HAI601I - Exercices de révisions

Benoît Huftier

2022

Suppression des cycles

Enoncé

Soit la grammaire $G = (\{a, b\}, \{X_1, X_2, X_3\}, R, X_1)$ avec les règles R suivantes :

$$
\begin{array}{lcl}
X_1 & \rightarrow & X_2 | a \\
X_2 & \rightarrow & X_1 | X_2 | X_3 | b \\
X_3 & \rightarrow & bX_1 | X_2 a
\end{array}
$$

Calculer G_{SC} la grammaire G sans cycle.

Pour appliquer la suppression des cycles, il faut que la grammaire soit sans ε-production.

La première chose à faire c'est de calculer les fermetures transitives des substituables (FTS) de chaque non terminal.
Un élément Y appartenant à $FTS(X)$ signifie que X peut se substituer à Y. Dis avec d'autres termes : il existe une possibilité de produire X qui n'utilise **que** Y.

Ainsi, $X_2 \in FTS(X_1)$ grâce à la règle $X_1 \to X_2$, mais la règle $X_3 \to X_2 a$ ne dit rien sur l'appartenance de X_2 à $FTS(X_3)$ car après avoir produit X_2 il faudrait en plus avoir un a pour produire X_3.

Grâce à ses règles directes nous pouvons en déduire que :

$$X_2 \in FTS(X_1)$$
$$X_1 \in FTS(X_2)$$
$$X_2 \in FTS(X_2)$$
$$X_3 \in FTS(X_2)$$

En plus de ça, il faut ajouter le fait que si un élément X peut se substituer en Y et que Y peut se substituer en Z alors il est évident que X peut se subtituer en Z. C'est pourquoi on parle de fermeture **transitive** des substituables.

Ainsi nous pouvons finir les FTS :

$$\begin{aligned}
FTS(X_1) &= \{X_2\} \cup FTS(X_2) \\
FTS(X_2) &= \{X_1, X_2, X_3\} \cup FTS(X_1) \cup FTS(X_2) \cup FTS(X_3) \\
FTS(X_3) &= \emptyset
\end{aligned}$$

Ou encore :

$$\begin{aligned}
FTS(X_1) &= \{X_1, X_2, X_3\} \\
FTS(X_2) &= \{X_1, X_2, X_3\} \\
FTS(X_3) &= \emptyset
\end{aligned}$$

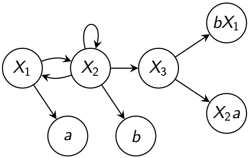
Notons que $X \in FTS(Y)$ et $Y \in FTS(X) \Rightarrow FTS(X) = FTS(Y)$

Les *FTS* permettent ensuite de détecter les cycles et de les utiliser dans l'algorithme pour les supprimer.

L'algorithme n'est pas très compliqué à comprendre, en revanche il n'est pas aisé à expliquer simplement. Je vous propose donc par la suite une méthode plus visuelle qui permet de comprendre l'algorithme très rapidement.

Nous pouvons voir l'ensemble de nos règles comme un graphe orienté. Chaque partie droite et chaque partie gauche d'une règle est représentée par un noeud. Les arêtes représentent les règles.

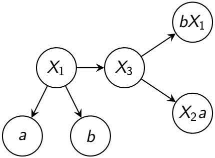
Chaque non terminal est donc représenté par un noeud (que l'on appelera noeuds sources) et les arêtes ne peuvent partir que de ces noeuds. Voici le graphe représentant R :



Les cycles sont donc uniquement constitué de noeuds sources, qui représentent des non terminaux qui sont substituables entre eux. Comme ils sont auto-substituables, on peut tout simplement les combiner.

Ainsi, fusionner les noeuds du graphes permet de supprimer les cycles.

Voici le graphe de R' une fois les non terminaux fusionnés :



Remarquez que la boucle $X_2 \rightarrow X_2$ a également été supprimée. En fait cette boucle est absurde, X_2 peut se substituer en lui même, ce qui ne sert strictement à rien.

On peut ensuite reconstruire les règles de R' grâce au graphe.

Notez que si l'axiome est fusionné avec d'autres noeuds (et c'est le cas ici), le nouvel axiome de la grammaire devient le noeud dans lequel l'axiome a fusionné.

Grammaire sans cycle :

$G_{SC} = (\{a, b\}, \{X_1, X_3\}, R', X_1)$ avec les règles R' suivantes :

$$\begin{array}{lcl} X_1 & \rightarrow & a|b|X_3 \\ X_3 & \rightarrow & bX_1|X_2a \end{array}$$

Suppression des cycles

Enoncé

Soit la grammaire $G = (\{a, b, c\}, \{X_1, X_2, X_3, X_4\}, R, X_1)$ avec les règles R suivantes :

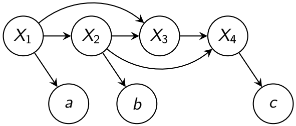
$$\begin{array}{lcl} X_1 & \rightarrow & X_2|X_3|a \\ X_2 & \rightarrow & X_3|X_4|b \\ X_3 & \rightarrow & X_4 \\ X_4 & \rightarrow & c \end{array}$$

Calculer G_{SC} la grammaire G sans cycle.

Avec les *FTS* :

$$FTS(X_1) = \{X_2, X_3, X_4\}$$
$$FTS(X_2) = \{X_3, X_4\}$$
$$FTS(X_3) = \{X_4\}$$
$$FTS(X_4) = \emptyset$$

Avec le graphe :



Que ce soit sur le graphe ou avec les *FTS*, on voit qu'il n'y a aucun cycle dans la grammaire G. Ainsi, $G = G_{SC}$

Enoncé

Soit la grammaire $G = (\{a, b, c\}, \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}, R, X_1)$ avec les règles R suivantes :

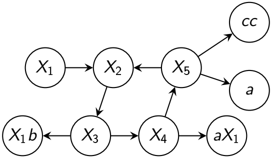
$$\begin{array}{lcl} X_1 & \rightarrow & X_2 \\ X_2 & \rightarrow & X_3 \\ X_3 & \rightarrow & X_4|X_1\,b \\ X_4 & \rightarrow & aX_1|X_5 \\ X_5 & \rightarrow & cc|X_2|a \end{array}$$

Calculer G_{SC} la grammaire G sans cycle.

Avec les FTS :

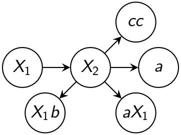
$$\begin{aligned}
FTS(X_1) &= \{X_2, X_3, X_4, X_5\}\\
FTS(X_2) &= \{X_2, X_3, X_4, X_5\}\\
FTS(X_3) &= \{X_2, X_3, X_4, X_5\}\\
FTS(X_4) &= \{X_2, X_3, X_4, X_5\}\\
FTS(X_5) &= \{X_2, X_3, X_4, X_5\}
\end{aligned}$$

Avec le graphe :



Il y a en effet un cycle entre les non terminaux X_2, X_3, X_4 et X_5. Remarquons que $FTS(X_1) = FTS(X_2)$ mais que X_1 ne fait pas partie du cycle !

On fusionne le cycle :



Et on réecrit les règles :

$G_{SC} = (\{a, b, c\}, \{X_1, X_2\}, R', X_1)$ avec les règles R' suivantes :

$$\begin{array}{lcl} X_1 & \rightarrow & X_2 \\ X_2 & \rightarrow & X_1 b | aX_1 | cc | a \end{array}$$