Exercice 51 :

Si $A, B \in NP$ alors

$A \cap B \in NP$

On sait que $A \in NP$ et $B \in coNP$.

1. Pour montrer qu'un problème est de la classe $coNP$, il faut montrer que le complémentaire du problème est NP.

$$\overline{\bar{A} \cup B} = \bar{\bar{A}} \cap \bar{B} = A \cap \bar{B} \in NP$$

Donc $\bar{A} \cup B \in coNP$ $\blacksquare$

2. $\overline{B} \in NP$

$NP \neq Co\,NP$

$A \cap \overline{B} \in NP$

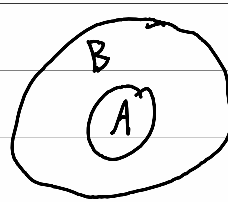
Soit A langage $\in NP - Co\,NP$,

$B = \{\}$ $\Rightarrow$ $\overline{B} = \Sigma^*$

Donc $A \cap \overline{B} = A \notin Co\,NP$ ■

Si $\overline{B}$ immense, l'intersection

$A \cap \overline{B} = A$.



3. Soit A langage $\in NP - coNP$,

$B = \{\}$

$A \cup B = A \notin coNP$ ∎

4. Soit $A \in NP - coNP$,

$B = \Sigma^*$

$A \cap B = A \notin coNP$ ∎

Σ^* neutre pour intersection

$\{\}$ neutre pour l'union.

Exercice 53 :

1. $\Pi \in NP$- complet

$\overline{\Pi} \in NP$

Donc $\overline{\Pi} \in co\ NP$-complet.

Tout problème $\lambda \in co-NP$ se réduit

à $\overline{\Pi}$

$\overline{\Pi}$ se réduit à Π

Donc λ se réduit à Π par transitivité.

Donc $co NP \subset NP$.

Tout problème $\lambda \in NP$ se réduit à Π

Π se réduit à $\overline{\overline{\Pi}}$

Donc λ se réduit à $\overline{\Pi}$ par transitivité

Donc $NP \subset coNP$. ■

Excercice 6 1 :

Cycle Hamiltonien :

Données $G = (V, E)$

Esciste t'il un cycle Hamiltonien dans G ?

TSP : Données : n villes X

coût $v : E \to \mathbb{N}$, $v(x, y)$ coût du

déplacement de x à y, $K \in \mathbb{N}$

Question : Esciste t'il un cycle Hamiltonien

de distance inférieure à K ?

$n = |V|$ $X = V$, $v(i, j) = 1$ si $\{i, j\} \in E$

$K = n$, $v(i, j) = 2$ si $(i, j) \notin E$ (pour respecter inégalité triangulaire). Donc le cycle Hamiltonien se réduit au TSP. CH est NP-complet, TSP est NP, donc TSP est NP-complet.

Exercice 62 :

Données : $G = (V, E)$ $K \in \mathbb{N}$

Question : Existe t'il $S \subseteq V, |S| \leq k,$

$\forall e \in E , e \cap S \neq \emptyset$?

3-SAT, n variables, m clauses

$|V| = 2n + 3m$

$|E| = n + 6m$ (6 car 3 arêtes entre littéral et clause et 3 arêtes dans la clause)

3-SAT données n variables x_i

m clauses C_j

Existe t'il une affectation des variables tq chaque clause soient vérifiées ?

$K = n + 2m$ (2 arêtes par clause, 1 arête entre littéral et son opposé).

Supposons qu'il existe A, une affectation des variables tq toutes les clauses soient vérifiées. A chaque clause on associe un littéral à True car il y en a au moins 1 true. On met les autres dans le recouvrement.

La réponse est OUi à 3-SAT
$\Rightarrow$ La réponse est OUi à Recouvrement Sommet.

Supposons un recouvrement de taille

$2m + n$.

Il y a 2 sommets par triangle : $2m$

et 1 sommet parmi littéral et son opposé.

Il existe un recouvrement de taille

$2m + n$ => Il y a un sommet entre

1 littéral et son opposé dans le recouvrement.

Si on donne la valeur true aux

littéraux correspondant, on a une

affectation valide.

Exercice 63 :

Soit G un graphe quelconque.
Soit G' le même graphe avec un sommet en plus relié à tous les sommets de degré impair de G.
Un tel sommet est de degré pair car dans un graphe $|V| = 2|E|$

$$G' = \{ V \cup \{ \underbrace{x}_{\text{nouveau sommet}} \} , \quad E' = E \cup \{ \{x, t\} \mid d_G(t) \text{ est impair} \} \}$$

Réduction de Recouvrement de Sommet à Recouvrement de sommet dont tous les sommets sont de degré pair.

$G(V,E)$, K

$G' = (V', E')$, K'

$V' = V \cup \{x, y, z\}$

$E' = E \cup \{\{x, t\} \mid d_G(t) \text{ est impair}\}$

$\cup \{\{x, y\}, \{y, z\}, \{x, z\}\}$

$K' = K + 2$.

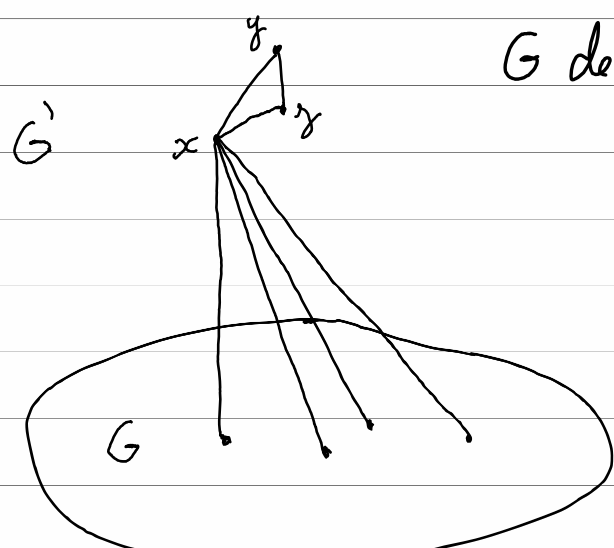
Si S est un Recouvrement de sommets de G de taille $K \Rightarrow S' = S \cup \{x, y\}$ est un

Recouvrement de sommet de G' de taille $k+2$

S' un recouvrement de taille $k+2$ dans G'.

S' contient au moins 2 sommets parmi $\{x, y, z\}$. On peut supposer s.p.d.g que $\{x, y\}$ est un recouvrement.

$S = S' - \{x, y\}$ est un recouvrement de G de taille k.



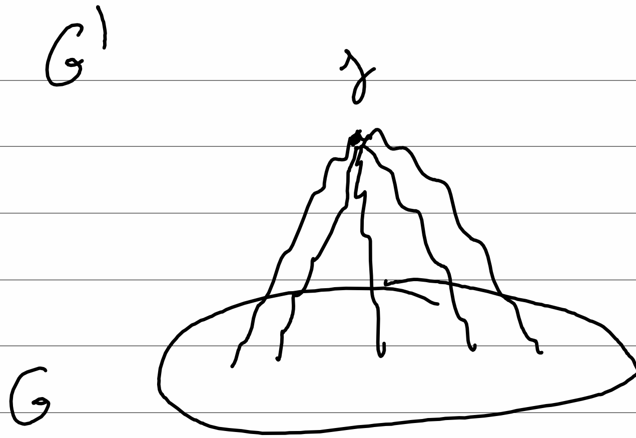
Excercice 64 :

Un graphe bipartie est 2-Coloriable.

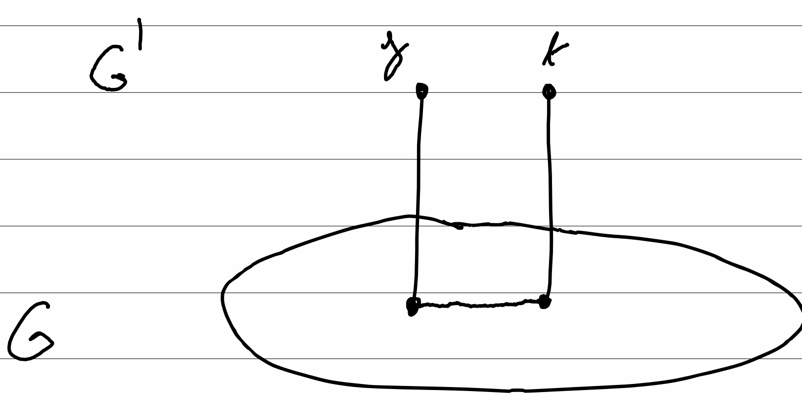
le cycle hamiltonien bipartie est un sous problème du cycle hamiltonien donc il se réduit.

La chaîne hamiltonienne bipartie est un sous problème de la chaîne hamiltonienne donc elle se réduit.

Si j'ai un cycle hamiltonien, en ajoutant un sommet relié à tous les sommets j'obtiens :

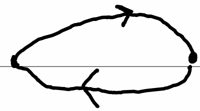


G' a un cycle hamiltonien si G a une chaine Hamiltonienne.



G' a une chaine Hamiltonienne
$\Rightarrow$ G a un cycle Hamiltonien.

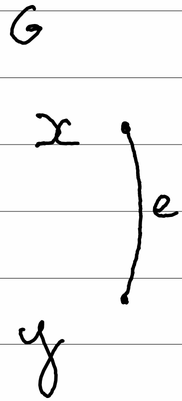
G'

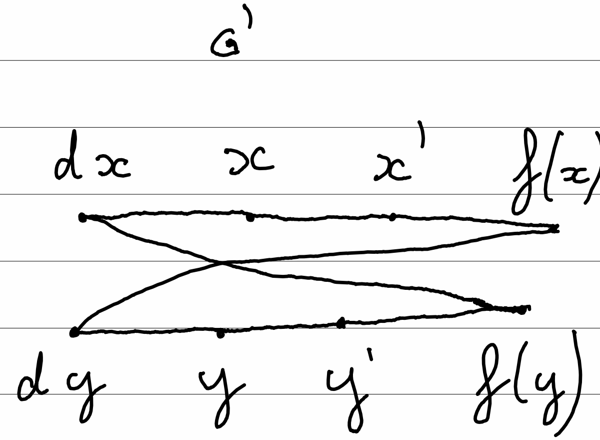


Si G est un chemin

G

ou un cycle, G' est un circuit ou un chemin.





$e = \{x, y\} \to \{dx, fy\} \ \{dy, fx\}$

$\{x \mid x, f(x)\} \Rightarrow$ stable

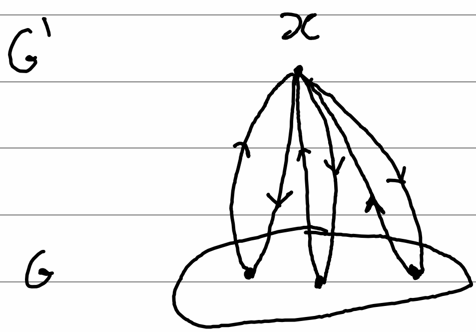
$\{x \mid x', dx\} \Rightarrow$ stable

Supposons que l'on a un cycle Hamiltonien dans G'.

On a donc $d_{x_1}, x_1, x_1', f(x_1), d_{x_2}, x_2, x_2', f(x_2)$

$\Rightarrow G : x_1 \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet x_2$

chemin H vers Circuit H :

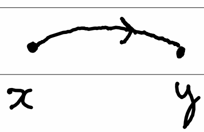


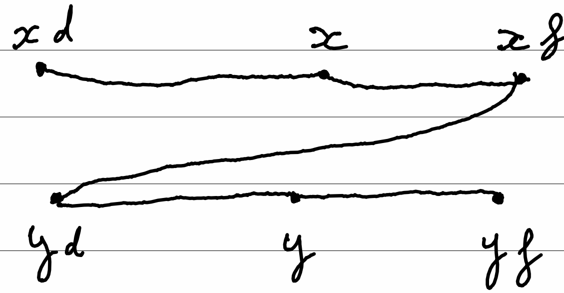
$G' = (V', E')$

$V' = V \cup \{x\}$

$E' = E \cup \{(x,y), (y,x) \ \forall y \in V\}$

Circuit H vers Cycle H :





Exercice 68 :

2 partitions :

Entrée : n objets de poids P_i tq $\sum P_i = 2P$

Question : Existe t-il une partition P_1, P_2

tq $\sum_{i \in P_1} P_i = \sum_{i \in P_2} P_i = P$

Ce problème est NP-Complet.

1. Il suffit de multiplier tous les poids par 2. Ce problème est NP car cas particulier de 2 partition.

2. $a_i' = 2a_i$

Si n pair, $a_i' = a_i$

Sinon $a_i' = a_i$ i de 1 à n : $2P$

$$a_{n+1}' = P \times 2 = 2P$$

$$a_{n+2}' = P \times 2 = 2P$$

$$a_{n+3}' = 2P \times 2 = 4P$$

$\sum a_i' = 10P$

avec Partition : $5P$.

NP car cas particulier de 2-partition.

5. NP trivialement en ajoutant un objet de poids P on crée une nouvelle partition

$a_i' = a_i + 1$ $\quad$ i de 1 à n

$Q = \{ i \mid I \leq i \leq n \}$

$a_i' = 1$ $\quad$ i de n+1 à 2n

$R = \{ i \mid n \leq i \leq 2n \}$

Supposons qu'il existe une solution P_1, P_2 à 2 partitions.

On prend pour :

$P_1' = P_1 + R_1$ $\quad$ $|R_1| = n - |P_1|$

$P_2' = P_2 + R_2$ $\quad$ $|R_2| = |P_1|$

$i \in P_1' = \sum_{i \in P_1'} a_i' = \sum_{i \in P_1} (a_i + 1) + |R_1| = \sum_{i \in P_1} a_i + n$

$\sum_{i \in P_2'} a_i' = \sum_{i \in P_2} a_i + n$

$|P_1'| = n \quad , \sum a_i' = P + n$

$|P_2'| = n \quad , \sum a_i' = P + n$

P_1' est de la forme $Q_1 \cup R_1$

$$\sum_{i \in P_1'} a_i' = \sum_{i \in Q_1} a_i + |Q_1| + |R_1|$$

$$= \sum_{i \in Q_1} a_i + n \quad \Rightarrow \sum_{i \in Q_1} a_i = P$$

Q_1 et $\overline{Q_1}$ est une partition valide pour 2 - Partition.

Excercice 70 :

$T(i,j)$ = il existe un sous ensemble des i premiers éléments de poids j.

2- Partition :

$T(0,j) = \text{False}$ $\forall j \neq 0$ $T(0,0) = \text{True}$.

$T(i,j) = \text{False}$ $\forall j \notin \{0, a_1\}$

$T(1,0) = \text{True}$ $T(1, a_1) = \text{True}$

$T(i,j) = T(i-1, j) \vee T(i-1, j-a_i)$

La réponse à 2-Partition est $T(n, P)$

car on a n objet, $\sum a_i = 2P$,

cible $= P$.

$T(i,j)$:

Si $j < 0$ alors retourner False

Si $i = 0$:

retourner $j = 0$

Sinon retourner $T(i-1, j) \,||$

$T(i-1, j - a[i])$

$O(2^n)$ et si la réponse est true,

on a pas la partition ...

$T(i,j)$:

$T[0,0] = \text{True}$

Pour j de 1 à P faire :

$T[0,j] = \text{False}$

Pour i de 1 à n faire :

$T[i,j] = T[i-1; i]$

Si $j \geq a[i]$ alors :

$T[i,j] \leftarrow T[i,j] \,||\, T[i-1, j-a[i]]$

retourner $T[n,P]$

$O(nP)$ en temps.

On peut trouver facilement la partition dans T. $2P = 32$, cible $= 16$.

16					T		
15							
14			T	T	T		
13					T		
12				T	T		
11					T		
10							
9			T	T	T		
8				T	T		
7							
6							
5		T	T	T	T		
4							
3				T	T		
2							
1							
0	T	T	T	T	T		
	0	1	2	3	4	5	6

$S = \emptyset$

$i = n$ $\quad\quad$ $j = P$

Tant que $i > 0$ faire :

Si $T[i-j, j]$ faire :

$i \leftarrow i - 1$

Sinon $S \leftarrow S \cup \{i\}$

$j \leftarrow j - a[i]$

$i \leftarrow i - 1$

renvoyer S.

Sac à dos :

Donnée : n objets de poids a_i, volume v_i

$V_{tot} \in \mathbb{N}$, $K \in \mathbb{N}$

Question : Existe t'il un sous ensemble S de l'ensemble des objets tq $\sum_{i \in S} a_i \geq K$ et

$\sum_{i \in S} v_i \leq V_{tot}$?

$f(i, j)$ = volume minimal avec poids j des i premiers objet.

Solution : + grande valeur de j tq

$f(n, j) \leq V_{tot}$

$f(0, 0) = 0$

$f(0, j) = V_{tot} + 1 \qquad (+\infty)$

$f(i, j) = \min\left(f(i-1, j),\ f(i-1, j-a_i) + v_i\right)$

Si on prend la programmation dynamique :

$i : O(n) \qquad j \leq \sum a_i = O(n P_{max})$

$P_{max} = \max a_i$

$f : O(n^2 P_{max})$

$g(i, j)$ = poids max que l'on peut atteindre dans un volume j.

La solution est $g(n, V_{tot})$

$g(i, j) = \max(g(i-1, j), a[i] + g(i-1, j - v[i]))$

Si on prend la prog dynamique :

$i : O(n)$ $j : O(V_{tot})$

$g : O(n V_{tot})$