Exercice 37 :

1. Soit C_k = Card(clauses de taille 3 à partir clause de taille k).

Soit v_K = Card(variables ajoutées pour transformer une clause de taille k en un ensemble de clauses de taille 3).

Conjecturons $v_K = K - 3$ et $C_K = K - 2$.

Preuve par récurrence :

Initialisation : $K = 3$

$v_3 = 0$, $C_3 = 1$ OK

Supposons vrai $\forall k' < k$,

Montrons le pour k :

$$l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_k \Rightarrow \begin{cases} l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \vee y \\ l_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor +1} \vee \dots \vee l_k \vee \bar{y} \end{cases}$$

Donc, $v_k = 1 + v_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor +1} + v_{\lceil \frac{k}{2} \rceil +1}$

Pour $k > 3$ $\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1 < k$

On obtient :

$v_k = 1 + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1 - 3 + \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1 - 3$

par hypothèse de récurrence.

$v_k = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + \lceil \frac{k}{2} \rceil - 3 = 2k - 3$

Continuons avec C_K :

$$C_K = C_{\lfloor \frac{K}{2} \rfloor + 1} + C_{\lceil \frac{K}{2} \rceil + 1}$$

$\lceil \frac{K}{2} \rceil + 1 < K$ Donc :

$$C_K = \lfloor \frac{K}{2} \rfloor + 1 - 2 + \lceil \frac{K}{2} \rceil + 1 - 2$$

$$= K - 2 \blacksquare$$

On ajoute donc $\mathcal{O}(K)$ variables pour obtenir $\mathcal{O}(K)$ clauses de taille 3.

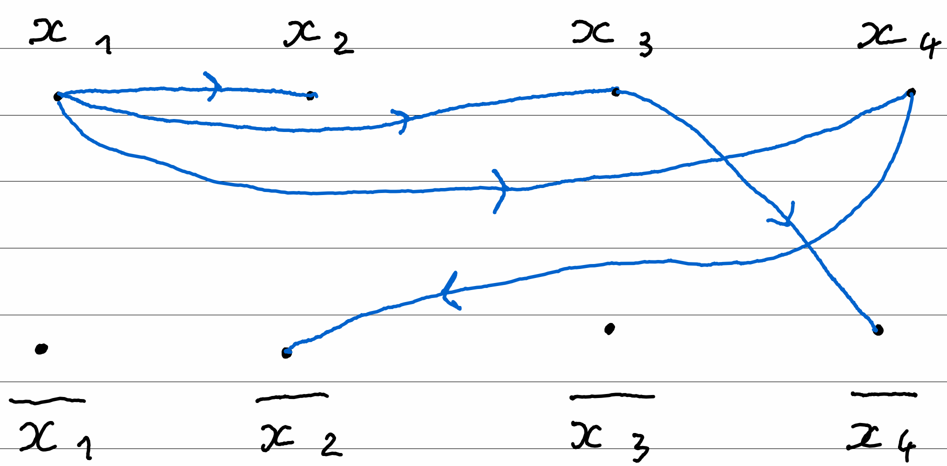
Posons n le nombre de clauses initiale,

On obtient une réduction en $n \times \mathcal{O}(K) = \mathcal{O}(nK)$. La réduction est donc polynomiale.

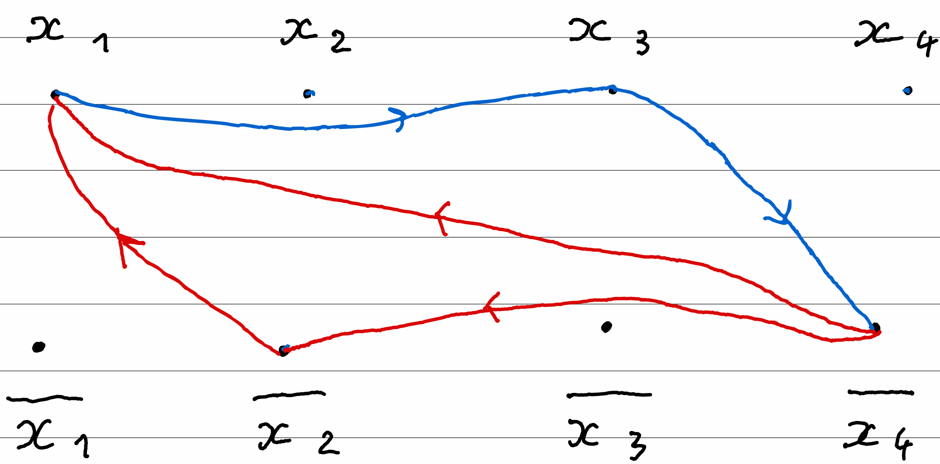
2.

$$\Phi = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge (x_1 \vee x_4)$$
$$\wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_4 \vee \overline{x_2})$$

Ci-dessous le graphe bi-partie qui rend vrai tous les littéraux de notre ensemble de clauses.

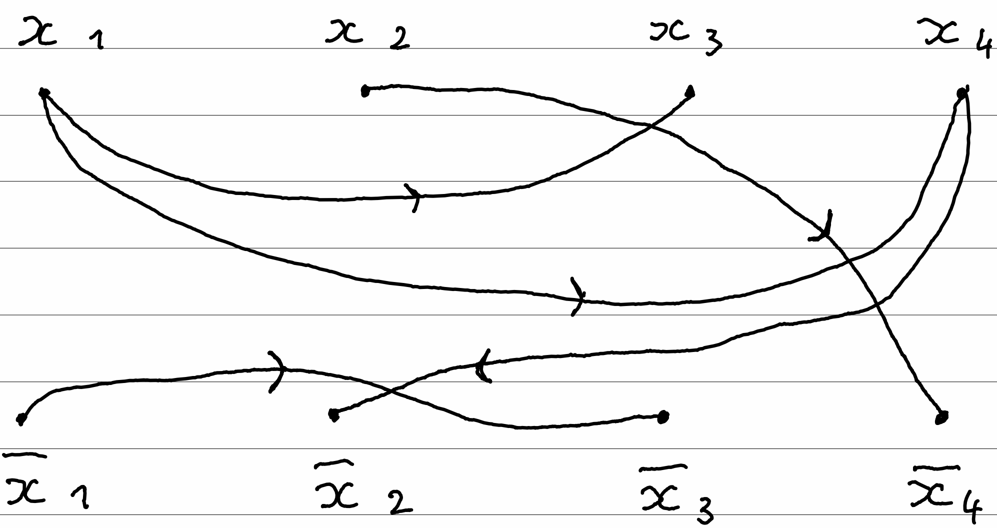


On supprime les incohérences du type $\overline{x_i} \wedge x_i$, et on ajoute les nouveaux liens:

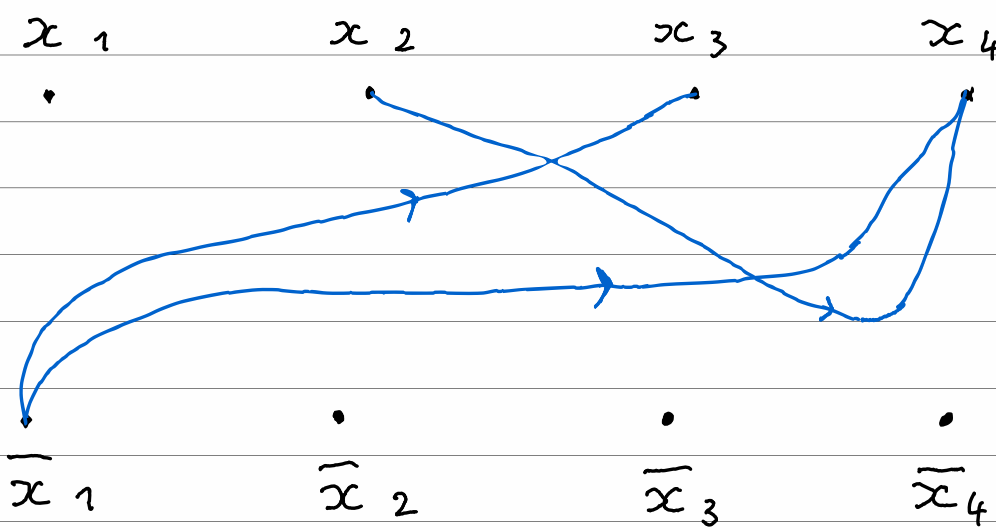


$$\Phi = (x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \overline{x_4}) \wedge (x_1 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_4 \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_3})$$

Ci-dessous le graphe bi-partie qui rend vrai tous les littéraux de notre ensemble de clauses.



On supprime les incohérences du type $\bar{x}_i \wedge x_i$, et on ajoute les nouveaux liens:



⚠ Il faut parfois supprimer des liens sans en créer