Correction de l'examen

Exercice 1

Démontrer dans le système $\mathrm{LJ}_{\mathrm{EQ}}$ les séquents suivants :

— $\vdash (\forall x.\, P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x.\, P(x)) \Rightarrow \exists x.\, Q(x)$

— $\forall x.\, x + 0 \doteq x,\ \forall x, y.\, x + y \doteq y + x \vdash \forall x.\, 0 + (x + 0) \doteq x$

où P et Q sont des symboles de prédicat d'arité 1, « + »un symbole de fonction d'arité 2 et 0 une constante.

— Preuve :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$P(X) \vdash P(X)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$Q(X) \vdash Q(X)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_{\mathrm{left}}$}
\BinaryInfC{$P(X) \Rightarrow Q(X), P(X) \vdash Q(X)$}
\RightLabel{$\exists_{\mathrm{right}}\{x \mapsto X\}$}
\UnaryInfC{$P(X) \Rightarrow Q(X), P(X) \vdash \exists x.\, Q(x)$}
\RightLabel{$\forall_{\mathrm{left}}\{x \mapsto X\}$}
\UnaryInfC{$\forall x.\, P(x) \Rightarrow Q(x), P(X) \vdash \exists x.\, Q(x)$}
\RightLabel{$\exists_{\mathrm{left}}$}
\UnaryInfC{$\forall x.\, P(x) \Rightarrow Q(x), \exists x.\, P(x) \vdash \exists x.\, Q(x)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_{\mathrm{right}}$}
\UnaryInfC{$\forall x.\, P(x) \Rightarrow Q(x) \vdash (\exists x.\, P(x)) \Rightarrow \exists x.\, Q(x)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_{\mathrm{right}}$}
\UnaryInfC{$\vdash (\forall x.\, P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x.\, P(x)) \Rightarrow \exists x.\, Q(x)$}
\end{prooftree}
$$

— Preuve :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{refl}
\UnaryInfC{$\forall x.\, x + 0 \doteq x,\ \forall x, y.\, x + y \doteq y + x \vdash X \doteq X$}
\RightLabel{$=_{\mathrm{right2}}$}
\UnaryInfC{$\forall x.\, x + 0 \doteq x,\ \forall x, y.\, x + y \doteq y + x \vdash X + 0 \doteq X$}
\RightLabel{$=_{\mathrm{right2}}$}
\UnaryInfC{$\forall x.\, x + 0 \doteq x,\ \forall x, y.\, x + y \doteq y + x \vdash 0 + X \doteq X$}
\RightLabel{$=_{\mathrm{right2}}$}
\UnaryInfC{$\forall x.\, x + 0 \doteq x,\ \forall x, y.\, x + y \doteq y + x \vdash 0 + (X + 0) \doteq X$}
\RightLabel{$\forall_{\mathrm{right}}$}
\UnaryInfC{$\forall x.\, x + 0 \doteq x,\ \forall x, y.\, x + y \doteq y + x \vdash \forall x.\, 0 + (x + 0) \doteq x$}
\end{prooftree}
$$

Exercice 2

Dans ce qui suit, vous pouvez utiliser soit une notation mathématique (en logique du premier ordre) soit du code `Coq` (sauf pour les parties preuves, qui devront être faites semi-formellement en logique du premier ordre).

1. Écrire une relation inductive `even_decr_list` qui détermine si une liste d'entiers naturels est une liste d'entiers pairs décroissante jusqu'à 0. Par exemple, on a : `even_decr_list([0])`, `even_decr_list([4; 2; 0])`.
2. Démontrer que `even_decr_list([4; 2; 0])`
3. Écrire la fonction f_{edl} qui teste si une liste d'entiers naturels est une liste d'entiers pairs décroissante jusqu'à 0. Par exemple, $f_{edl}([4; 2; 0])$ retourne vrai mais $f_{edl}([4; 2; 1])$ retourne faux.
4. Écrire le schéma d'induction fonctionnelle associé à la fonction f_{edl}.
5. Énoncer les théorèmes de correction et de complétude de la fonction f_{edl} vis-à-vis de la spécification `even_decr_list` (on souhaite juste les énoncés, pas les preuves).

1. Soit $\mathcal{L}(\mathbb{N})$ l'ensemble des listes d'entiers naturels.
   On peut définir l'ensemble des listes d'entiers pairs décroissante `even_decr_list` : $\mathcal{L}(\mathbb{N}) \to \mathit{Prop}$ comme le plus petit ensemble qui comporte les propriétés suivantes :
   - On a `even_decr_list`$([0]) = \top$;
   - Pour $p \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathcal{L}(\mathbb{N})$, si `even_decr_list`$(p :: l)$, alors `even_decr_list`$(S\ S\ p :: p :: l)$.
2. On veut montrer que `even_decr_list`$([4; 2; 0])$. On applique le cas inductif de `even_decr_list`, on veut montrer que $2 + 2 = 4$ et que `even_decr_list`$([2; 0])$. Par réflexivité, on montre $2 + 2 = 4$, et on applique le cas inductif de `even_decr_list`. On veut maintenant montrer que $2 + 0 = 2$ et que `even_decr_list`$([0])$. Par réflexivité, on a $2 + 0 = 2$, et on applique le cas de base (1) de `even_decr_list` pour prouver `even_decr_list`$([0])$.
3. On peut définir la fonction f_{edl} de type $\mathcal{L}(\mathbb{N}) \to \mathit{Prop}$ de la façon suivante :
   - Si $l = []$, alors $f_{edl}(l) = \bot$;
   - Si $l = [0]$, alors $f_{edl}(l) = \top$;
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $l = [n]$, alors $f_{edl}(l) = \bot$;
   - Si $l = n :: p :: q$ avec $n, p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathcal{L}(\mathbb{N})$, alors $f_{edl}(l) = (n \doteq (S\ S\ p)) \wedge f_{edl}(p :: q)$.
4. Le schéma d'induction fonctionnelle est le suivant :

$$\begin{array}{l}
\forall P : \mathcal{L}(\mathbb{N}) \to \mathit{Prop} \to \mathit{Prop}. \\
P([], \bot) \Rightarrow P([0], \top) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*. P([n], \bot)) \Rightarrow \\
(\forall p \in \mathbb{N}.\ \forall q \in \mathcal{L}(\mathbb{N}).\ P(p :: q, f_{edl}(p :: q)) \Rightarrow P((S\ S\ p) :: p :: q, f_{edl}(p :: q)))) \Rightarrow \\
\forall l \in \mathcal{L}(\mathbb{N}).\ P(l, f_{edl}(l))
\end{array}$$

5. Théorème de correction :

$$\forall l \in \mathcal{L}(\mathbb{N}).\ f_{edl}(l) = \top \Rightarrow \texttt{even\_decr\_list}(l)$$

   Théorème de complétude :

$$\forall l \in \mathcal{L}(\mathbb{N}).\ \texttt{even\_decr\_list}(l) \Rightarrow f_{edl}(l) = \top$$

Exercice 3

En utilisant les règles de la logique de Hoare, démontrer la validité des triplets suivants :

1. $\{y = 1\}\ x := y + 1;\ z = x - 1\ \{z = 1\}$
2. $\{-4 \leq x \wedge x \leq 4\}$ if $x \geq 0$ then $x := x - 2$ else $x := x + 2$ $\{-2 \leq x \wedge x \leq 2\}$

1. Preuve :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\{y+1=2\}\ x := y+1\ \{x=2\}}\ {:=} \qquad \begin{array}{c} y=1 \Rightarrow y+1=2 \\ x=2 \Rightarrow x-1=1 \end{array}}{\{y=1\}\ x := y+1\ \{x-1=1\}}\ \text{Aff} \qquad \dfrac{}{\{x-1=1\}\ z := x-1\ \{z=1\}}\ {:=}}{\{y=1\}\ x := y+1;\ z = x-1\ \{z=1\}}\ ;$$

2. Preuve :

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\{-2 \leq x-2 \wedge x-2 \leq 2\}\ x := x-2\ \{-2 \leq x \wedge x \leq 2\}}\,:= \qquad -4 \leq x \wedge x \leq 4 \wedge x \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x-2 \wedge x-2 \leq 2}{\{-4 \leq x \wedge x \leq 4 \wedge x \geq 0\}\ x := x-2\ \{-2 \leq x \wedge x \leq 2\}}\,\text{Aff} \qquad \Pi}{\{-4 \leq x \wedge x \leq 4\}\ \text{if } x \geq 0 \text{ then } x := x-2 \text{ else } x := x+2\ \{-2 \leq x \wedge x \leq 2\}}\,\text{if}
$$

Preuve de Π :

$$
\dfrac{\dfrac{}{\{-2 \leq x+2 \wedge x+2 < 2\}\ x := x+2\ \{-2 \leq x \wedge x < 2\}}\,:= \qquad \begin{array}{c} -4 \leq x \wedge x \leq 4 \wedge x < 0 \Rightarrow -2 \leq x+2 \wedge x+2 < 2 \\ -2 \leq x \wedge x < 2 \Rightarrow -2 \leq x \wedge x \leq 2 \end{array}}{\{-4 \leq x \wedge x \leq 4 \wedge x < 0\}\ x := x+2\ \{-2 \leq x \wedge x \leq 2\}}\,\text{Aff}
$$