HAI603I - TD7 - Correction en étapes

Benoît Huftier

2022

Benoît Huftier HAI603I - TD7 2022 1 / 5

Plan

1 Exercice 1 (Sémantique)



Benoît Huftier HAI603I - TD7 2022 2 / 5

Sémantique

Enoncé

Évaluer les programmes suivants en utilisant les règles d'évaluation vues en cours :

- if $x \ge 0$ then y := x else y := -x dans les environnements (x, 2), (y, 0) et (x, -2), (y, 0).
- **2** while i < 3 do (x := x + i; i := i + 1) dans l'environnement (i, 1), (x, 0).

Benoît Huftier HAI603I - TD7 2022 3 / 5

Environnement

Soit E = (x, 2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

$$E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x$$

Environnement

Soit E = (x, 2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

$$E \vdash x \leq 0$$

 $E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x$

if

4/5

Environnement

Soit E = (x, 2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{E \vdash x \qquad E \vdash 0}{E \vdash x \le 0} \ge$$

$$E \vdash \text{if } x \ge 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x$$

4/5

Environnement

Soit E = (x, 2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{(x,2) \in E}{E \vdash x} \quad V \qquad E \vdash 0$$

$$E \vdash x \leq 0$$

$$E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x$$
if

<□ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ >

4/5

Environnement

Soit E = (x, 2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{(x,2) \in E}{E \vdash x \leadsto 2} \mathbb{V} \qquad E \vdash 0$$

$$E \vdash x \leq 0$$

$$E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x$$
if

 4 □ →

Environnement

Soit E = (x, 2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{(x,2) \in E}{E \vdash x \leadsto 2} \mathbb{V} \qquad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0} \ge \frac{\mathbb{Z}}{E}$$

$$\frac{E \vdash x \le 0}{E \vdash \text{if } x > 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x}$$

Environnement

Soit E = (x, 2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{(x,2) \in E}{E \vdash x \leadsto 2} \mathbb{V} \qquad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \leadsto 0} \mathbb{Z} \ge$$

 $E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x$

◆ロト ◆個ト ◆重ト ◆重ト 重 めの(で)

Environnement

Soit E = (x, 2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{(x,2) \in E}{E \vdash x \leadsto 2} \mathbb{V} \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \leadsto 0} \mathbb{Z}$$

$$\frac{E \vdash x \le 0 \leadsto 2 \ge_{\mathbb{Z}} 0}{E \vdash \text{if } x \ge 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x} \text{if}$$

◆ロト ◆団 ト ◆ 豆 ト ◆ 豆 ・ か Q (で)

Environnement

Soit E = (x, 2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{(x,2) \in E}{E \vdash x \leadsto 2} \mathbb{V} \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \leadsto 0} \mathbb{Z}$$

$$\frac{E \vdash x \le 0 \leadsto 2 \ge_{\mathbb{Z}} 0 \equiv \top}{E \vdash \text{if } x \ge 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x} \text{if}_{\top}$$

Environnement

Soit E = (x, 2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{(x,2) \in E}{E \vdash x \leadsto 2} \mathbb{V} \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \leadsto 0} \mathbb{Z} \quad \frac{y \in Dom(E)}{E \vdash x} := \frac{E \vdash x \le 0 \leadsto 2 \ge_{\mathbb{Z}} 0 \equiv \top}{E \vdash \text{if } x \ge 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x} := \frac{\text{if}_{\top}}{E \vdash x \bowtie y := x} := \frac{(x,2) \in E}{E \vdash x}$$

Environnement

Soit E = (x, 2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

Environnement

Soit E = (x, 2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{(x,2) \in E}{E \vdash x \leadsto 2} \mathbb{V} \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \leadsto 0} \mathbb{Z} \qquad y \in Dom(E) \qquad \frac{(x,2) \in E}{E \vdash x \leadsto 2} \mathbb{V}$$

$$\frac{E \vdash x \le 0 \leadsto 2 \ge_{\mathbb{Z}} 0 \equiv \top}{E \vdash \text{if } x \ge 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x} \text{if}_{\top}$$

Environnement

Soit E = (x, 2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{(x,2) \in E}{E \vdash x \leadsto 2} \mathbb{V} \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \leadsto 0} \mathbb{Z} \qquad y \in Dom(E) \quad \frac{(x,2) \in E}{E \vdash x \leadsto 2} \mathbb{V} \\ \frac{E \vdash x \le 0 \leadsto 2 \ge_{\mathbb{Z}} 0 \equiv \top}{E \vdash \text{if } x \ge 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x} := E \vdash \text{if } x \ge 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x$$

Environnement

Soit E = (x, 2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

Benoît Huftier HAI603I - TD7 2022 4 / 5

Environnement

Soit E = (x, -2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

$$E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x$$

5/5

Environnement

Soit E = (x, -2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

$$E \vdash x \leq 0$$

 $E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x$



5/5

Environnement

Soit E = (x, -2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{E \vdash x}{E \vdash x < 0} \stackrel{E \vdash 0}{=} \geq$$

 $E \vdash \text{if } x \ge 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x$

◆ロト ◆昼 ト ◆ 夏 ト ◆ 夏 ・ 夕 ♀ ○

5/5

Environnement

Soit E = (x, -2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{(x,-2) \in E}{E \vdash x} \mathbb{V} \quad E \vdash 0$$

$$E \vdash x < 0$$

 $E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x$

<ロ > → □ → → □ → → □ → → へ ○ ○

5/5

Environnement

Soit E = (x, -2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{(x,-2) \in E}{E \vdash x \leadsto -2} \mathbb{V} \quad E \vdash 0$$
$$E \vdash x < 0$$

 $E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x$

< ロ > ← □

5/5

Environnement

Soit E = (x, -2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{(x,-2) \in E}{E \vdash x \leadsto -2} \mathbb{V} \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0} \ge$$

 $E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x$

Benoît Huftier HAI603I - TD7 2022 5 / 5

Environnement

Soit E = (x, -2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{(x,-2) \in E}{E \vdash x \leadsto -2} \mathbb{V} \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \leadsto 0} \mathbb{Z}$$

$$E \vdash x < 0$$

 $E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x$

◆ロト ◆母ト ◆夏ト ◆夏ト 夏 めるぐ

5/5

Environnement

Soit E = (x, -2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{(x,-2) \in E}{E \vdash x \leadsto -2} \mathbb{V} \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \leadsto 0} \mathbb{Z}$$
$$E \vdash x \le 0 \leadsto -2 \ge_{\mathbb{Z}} 0$$

 $E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x$

◆ロト ◆個ト ◆重ト ◆重ト 重 めの(で)

5/5

Environnement

Soit E = (x, -2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{(x,-2) \in E}{E \vdash x \leadsto -2} \mathbb{V} \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \leadsto 0} \mathbb{Z}$$

$$\frac{E \vdash x \le 0 \leadsto -2 \ge_{\mathbb{Z}} 0 \equiv \bot}{E \vdash \text{if } x \ge 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x} \text{if}_{\bot}$$

5/5

Environnement

Soit E = (x, -2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{(x,-2) \in E}{E \vdash x \leadsto -2} \mathbb{V} \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \leadsto 0} \mathbb{Z} \\ \frac{E \vdash x \le 0 \leadsto -2 \ge_{\mathbb{Z}} 0 \equiv \bot}{E \vdash \text{if } x \ge 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x} := \\ \frac{E \vdash x \le 0 \leadsto -2 \ge_{\mathbb{Z}} 0 \equiv \bot}{E \vdash \text{if } x \ge 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x} := \\ \frac{(x,-2) \in E}{E \vdash x \leadsto -2} \mathbb{Z}$$

5/5

Environnement

Soit E = (x, -2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{(x,-2) \in E}{E \vdash x \leadsto -2} \mathbb{V} \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \leadsto 0} \mathbb{Z} \quad y \in Dom(E) \quad \frac{E \vdash x}{E \vdash -x} = \frac{E \vdash x \le 0 \leadsto -2 \ge_{\mathbb{Z}} 0 \equiv \bot}{E \vdash \text{if } x \ge 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x} := \frac{\text{if}_{\bot}}{E \vdash x \bowtie 0} = \frac{E \vdash x}{E \vdash x} = \frac{$$

5/5

Environnement

Soit E = (x, -2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{(x,-2) \in E}{E \vdash x \leadsto -2} \mathbb{V} \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \leadsto 0} \mathbb{Z} \qquad \frac{(x,-2) \in E}{E \vdash x} \mathbb{V} \\
\underline{E \vdash x \le 0 \leadsto -2 \ge_{\mathbb{Z}} 0 \equiv \bot} \ge \frac{y \in Dom(E)}{E \vdash y := -x} := \\
\underline{E \vdash if \ x \ge 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x} \text{ if}_{\bot}$$

Benoît Huftier HAI603I - TD7 2022 5 / 5

Environnement

Soit E = (x, -2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{(x,-2) \in E}{E \vdash x \leadsto -2} \mathbb{V} \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \leadsto 0} \mathbb{Z} \quad y \in Dom(E) \quad \frac{E \vdash x \leadsto -2}{E \vdash -x} \mathbb{V}$$

$$\frac{E \vdash x \le 0 \leadsto -2 \ge_{\mathbb{Z}} 0 \equiv \bot}{E \vdash \text{if } x \ge 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x} :=$$

Benoît Huftier HAI603I - TD7 2022 5/5

Environnement

Soit E = (x, -2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{(x,-2) \in E}{E \vdash x \leadsto -2} \mathbb{V} \quad \underbrace{\frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \leadsto 0}}_{E \vdash x \bowtie -2} \mathbb{Z} \quad \underbrace{\frac{(x,-2) \in E}{E \vdash x \leadsto -2}}_{F \vdash x \bowtie -2} \mathbb{V}$$

$$\frac{E \vdash x \leq 0 \leadsto -2 \geq_{\mathbb{Z}} 0 \equiv \bot}_{E \vdash \text{ if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x} := \text{if}_{\bot}$$

5/5

Environnement

Soit E = (x, -2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{(x,-2) \in E}{E \vdash x \leadsto -2} \mathbb{V} \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \leadsto 0} \mathbb{Z} \quad \frac{(x,-2) \in E}{E \vdash x \leadsto -2} \mathbb{V} \\ \hline E \vdash x \le 0 \leadsto -2 \ge_{\mathbb{Z}} 0 \equiv \bot \quad \ge \quad \frac{y \in Dom(E)}{E \vdash y := -x \leadsto E' = (x,2), (y,2)} := \\ E \vdash \text{if } x \ge 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x$$
 if \bot

↓□▶ ↓□▶ ↓□▶ ↓□▶ □ ♥ ♀○

5/5

Environnement

Soit E = (x, -2), (y, 0) notre environnement de départ.

Preuve

Benoît Huftier HAI603I - TD7 2022 5 / 5