Exercice 58 :

NAESAT :

Entrée : ensemble de m clauses sur n variables.

Question : Existe t-il une affectation tq chaque clause à un littéral Faux et un littéral Vrai.

Soit A une solution à NAESAT.

c'est à dire affectation valide pour NAESAT.

$\bar{A}$ est aussi valide.

Mq NAESAT est NP-Complet.

NAESAT $\in$ NP (en parcourant les clauses, linéaire en somme tailles des clauses).

Réduction de SAT à NAESAT

$m' = m$

$n' = n + 1$

SAT :		NAESAT
$l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_k$		$l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_k \vee z$
affectation valide	$\Longrightarrow$	affectation valide avec $z = F$.
affectation valide	$\Longleftarrow$	affectation valide et $z = F$
		affectation valide, $z = T$ et $l_i \forall i = F$
		$\Downarrow$
		son opposé est
affectation valide	$\Longleftarrow$	$z = F$ et $l_i \forall i = T$

K-SAT se réduit à (K+1) NAESAT

4-NAESAT est NP-Complet (réduction de 3SAT

3-NAESAT : 2-SAT se réduit à 3

NAESAT . On ne peut rien en déduire.

Mq 3-NAESAT est NP-Complet

Réduction de 4-NAESAT vers 3-NAESAT

$$C^i = l_1^i \vee l_2^i \vee l_3^i \vee l_4^i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C^{i'} = l_1^i \vee l_2^i \vee z_i \\ C^{i''} = l_3^i \vee l_4^i \vee \overline{z_i} \end{cases}$$

(i) $l_1^i \neq l_2^i$: $\overline{z_i} = \overline{l_3^i}$, $z_i = l_3^i$

(i) $l_1^i = l_2^{(i)}$: $z_i = \overline{l_1^i}$, $\overline{z_i} = l_1^i$

Comme C' était valide l_3^i ou $l_4^i \neq l_1^i$,

$C^{i''}$ est valide.

affectation valide pour $C^{i)}$ et $C^{i''}$

En enlevant y^i, montrer que C^i est valide.

(i) $l_1^{'} \neq l_2^{'}$ OK

(ii) $l_1^i = l_2^i \Rightarrow y_i = \overline{l_1^i} \Rightarrow \overline{y_i} = l_1^i$

$C^{i''}$ devient $l_3^i \vee l_4^i \vee l_1^i \Rightarrow$ les 3 ne peuvent être égaux $\Rightarrow$ valide.

Exercice 59 :

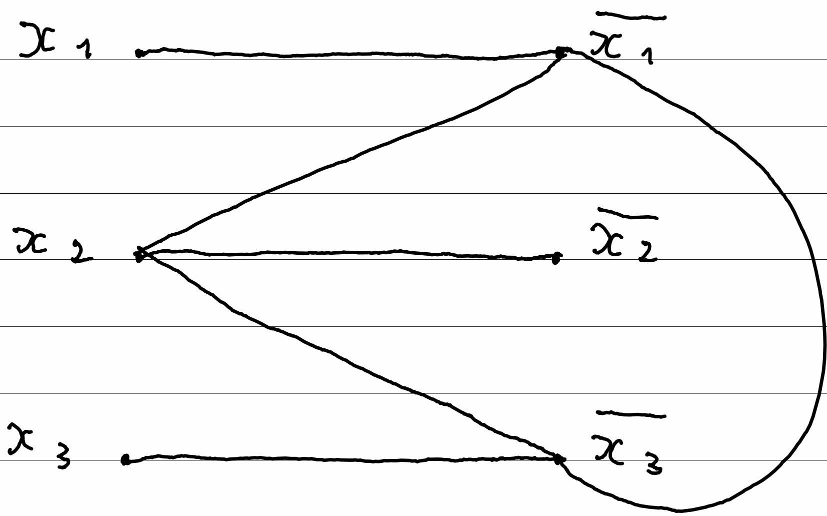
Posons sommet = littéral [var et son opposé]

arête = affectation

$|V| = 2n$, $|E| = n + 3m$

Réduction de 3-NAESAT en Coupe Max :

$\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}$



$E = \{ \{l_i, l_j\} \mid \exists l \text{ tq } l_i \in C^l \wedge l_j \in C^l \}$

$K = 2m + n$

Prenons $V_1 = \{$ littéraux à T dans l'affectation valide $\}$

$V_2 = V - V_1$.

Combien faut-il couper d'arêtes pour séparer V_1 et V_2 ?

Les n arêtes $\{x_i, \overline{x_i}\}$

Chaque clause $\{l_1, l_2, l_3\}$ engendre un triangle $\{l_1, l_2\}$, $\{l_2, l_3\}$, $\{l_1, l_3\}$ et 2 de ces arêtes doivent être coupées.

total : $2m + n$.

Supposons qu'il existe dans G une coupe de taille $2m + n$.

Soit P le nombre d'arêtes $\{x_i, \overline{x_i}\}$ dans la coupe. $(P \leq n)$

Soit q le nombre d'arêtes $\{l_i, l_j\}$ dans la coupe. $q = 2q' \quad (q' \leq m)$

$l_i \neq \overline{l_j}$

$2m + n = P + 2q' \Rightarrow m = q'$ et $n = P$

car $P \leq n$ et $q' \leq m$.

Donc $x_i \in V_1 \Leftrightarrow \overline{x_i} \in V_2$

$\forall \{l_1, l_2, l_3\} \in C_i$

$C_i \cap V_1 \neq \emptyset$

$C_i \cap V_2 \neq \emptyset$

Si on donne la valeur True à tous les litteraux, associés à un sommet de V_1 et F à tous les littéraux associés à un sommet V_2. On obtient une affectation valide de NAESAT.

Exercice 60 :

Mq 3 coloration est NP-Complet en faisant une réduction de 3-SAT vers 3-coloration.

3 coloration $\in NP$.

$V = \{$ vrai, faux, neutre, $\forall i\ x_i, \overline{x_i} \}$

$E = \{ \{T, F\}, \{F, N\}, \{T, N\},$

$\forall i\ \{x_i, \overline{x_i}\}, \forall i\ \{x_i, N\},$

$\{\overline{x_i}, N\}, \{V_3^i, T\} \{V_4^i, V\}$

$C_i = x_i \vee \overline{x_2} \vee x_4$

$\{l_1, V_0^i\}, \{l_2, V_1^i\}, \{l_3^i, V_4\}$