

HAI603I - TD7 - Correction en étapes

Benoît Huftier

2022

1 Exercice 1 (Sémantique)

Enoncé

Évaluer les programmes suivants en utilisant les règles d'évaluation vues en cours :

- 1 if $x \geq 0$ then $y := x$ else $y := -x$ dans les environnements $(x, 2), (y, 0)$ et $(x, -2), (y, 0)$.
- 2 while $i < 3$ do $(x := x + i; i := i + 1)$ dans l'environnement $(i, 1), (x, 0)$.

Exercice 1 - 1.a

Environnement

Soit $E = (x, 2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x$$

Exercice 1 - 1.a

Environnement

Soit $E = (x, 2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$E \vdash x \geq 0$

$E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x$

if

Exercice 1 - 1.a

Environnement

Soit $E = (x, 2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{\frac{E \vdash x \quad E \vdash 0}{E \vdash x \geq 0}}{E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x} \text{ if}$$

Exercice 1 - 1.a

Environnement

Soit $E = (x, 2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{\frac{(x, 2) \in E}{E \vdash x} \quad \forall \quad E \vdash 0}{E \vdash x \geq 0} \geq$$
$$\frac{}{E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x} \text{if}$$

Exercice 1 - 1.a

Environnement

Soit $E = (x, 2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{\frac{(x, 2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow 2} \quad \forall \quad E \vdash 0}{E \vdash x \geq 0} \geq$$
$$\frac{}{E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x} \text{if}$$

Exercice 1 - 1.a

Environnement

Soit $E = (x, 2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{\frac{(x, 2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow 2} \quad \forall \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0} \quad \mathbb{Z}}{E \vdash x \geq 0} \geq$$

$$E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x \quad \text{if}$$

Exercice 1 - 1.a

Environnement

Soit $E = (x, 2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{\frac{(x, 2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow 2} \quad \forall \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \rightsquigarrow 0} \quad \mathbb{Z}}{E \vdash x \geq 0} \geq$$

$$E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x \quad \text{if}$$

Exercice 1 - 1.a

Environnement

Soit $E = (x, 2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{\frac{(x, 2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow 2} \quad \forall \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \rightsquigarrow 0} \quad \mathbb{Z}}{E \vdash x \geq 0 \rightsquigarrow 2 \geq_{\mathbb{Z}} 0} \geq$$

$$E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x \quad \text{if}$$

Exercice 1 - 1.a

Environnement

Soit $E = (x, 2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{\frac{(x, 2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow 2} \quad \forall \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \rightsquigarrow 0} \quad \mathbb{Z}}{E \vdash x \geq 0 \rightsquigarrow 2 \geq_{\mathbb{Z}} 0 \equiv \text{true}} \quad \geq \quad E \vdash y := x \quad \text{if}_{\text{true}} \\ \hline E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x$$

Exercice 1 - 1.a

Environnement

Soit $E = (x, 2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{\frac{(x, 2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow 2} \mathbb{V} \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \rightsquigarrow 0} \mathbb{Z}}{E \vdash x \geq 0 \rightsquigarrow 2 \geq_{\mathbb{Z}} 0 \equiv \top} \geq \quad \frac{y \in \text{Dom}(E) \quad E \vdash x}{E \vdash y := x} :=$$
$$\frac{}{E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x} \text{if}_{\top}$$

Exercice 1 - 1.a

Environnement

Soit $E = (x, 2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{\frac{\frac{(x, 2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow 2} \forall \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \rightsquigarrow 0} \mathbb{Z}}{E \vdash x \geq 0 \rightsquigarrow 2 \geq_{\mathbb{Z}} 0 \equiv \top} \geq \quad \frac{y \in \text{Dom}(E) \quad \frac{(x, 2) \in E}{E \vdash x} \forall}{E \vdash y := x} :=}{E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x} \text{if}_{\top}$$

Exercice 1 - 1.a

Environnement

Soit $E = (x, 2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{\frac{(x, 2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow 2} \mathbb{V} \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \rightsquigarrow 0} \mathbb{Z}}{E \vdash x \geq 0 \rightsquigarrow 2 \geq_{\mathbb{Z}} 0 \equiv \top} \geq \quad \frac{y \in \text{Dom}(E) \quad \frac{(x, 2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow 2} \mathbb{V}}{E \vdash y := x} :=$$
$$\frac{}{E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x} \text{if}_{\top}$$

Exercice 1 - 1.a

Environnement

Soit $E = (x, 2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{\frac{(x, 2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow 2} \mathbb{V} \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \rightsquigarrow 0} \mathbb{Z}}{E \vdash x \geq 0 \rightsquigarrow 2 \geq_{\mathbb{Z}} 0 \equiv \top} \geq \quad \frac{y \in \text{Dom}(E) \quad \frac{(x, 2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow 2} \mathbb{V}}{E \vdash y := x \rightsquigarrow E' = (x, 2), (y, 2)} \mathbb{V} :=$$
$$\frac{}{E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x} \text{if}_{\top}$$

Exercice 1 - 1.a

Environnement

Soit $E = (x, 2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{\frac{(x, 2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow 2} \mathbb{V} \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \rightsquigarrow 0} \mathbb{Z}}{E \vdash x \geq 0 \rightsquigarrow 2 \geq_{\mathbb{Z}} 0 \equiv \top} \mathbb{Z} \quad \frac{y \in \text{Dom}(E) \quad \frac{(x, 2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow 2} \mathbb{V}}{E \vdash y := x \rightsquigarrow E' = (x, 2), (y, 2)} \mathbb{V} :=$$
$$\frac{E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x \rightsquigarrow E'}{\text{if}_{\top}}$$

Exercice 1 - 1.b

Environnement

Soit $E = (x, -2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x$$

Exercice 1 - 1.b

Environnement

Soit $E = (x, -2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$E \vdash x \geq 0$$

$$E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x$$

if

Exercice 1 - 1.b

Environnement

Soit $E = (x, -2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{\frac{E \vdash x \quad E \vdash 0}{E \vdash x \geq 0} \geq}{E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x} \text{if}$$

Exercice 1 - 1.b

Environnement

Soit $E = (x, -2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{\frac{(x, -2) \in E}{E \vdash x} \quad \mathbb{V} \quad E \vdash 0}{E \vdash x \geq 0} \geq \frac{}{E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x} \text{if}$$

Exercice 1 - 1.b

Environnement

Soit $E = (x, -2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{\frac{(x, -2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow -2} \quad \forall \quad E \vdash 0}{E \vdash x \geq 0} \geq \frac{}{E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x} \text{if}$$

Exercice 1 - 1.b

Environnement

Soit $E = (x, -2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{\frac{(x, -2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow -2} \quad \forall \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0} \quad \mathbb{Z}}{E \vdash x \geq 0} \geq$$

$$E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x \quad \text{if}$$

Exercice 1 - 1.b

Environnement

Soit $E = (x, -2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{\frac{(x, -2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow -2} \quad \forall \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \rightsquigarrow 0} \quad \mathbb{Z}}{E \vdash x \geq 0} \geq$$

$$E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x \quad \text{if}$$

Exercice 1 - 1.b

Environnement

Soit $E = (x, -2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{\frac{(x, -2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow -2} \quad \mathbb{V} \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \rightsquigarrow 0} \quad \mathbb{Z}}{E \vdash x \geq 0 \rightsquigarrow -2 \geq_{\mathbb{Z}} 0} \quad \geq} \quad \text{if} \\ E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x$$

Exercice 1 - 1.b

Environnement

Soit $E = (x, -2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{\frac{(x, -2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow -2} \quad \forall \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \rightsquigarrow 0} \quad \mathbb{Z}}{E \vdash x \geq 0 \rightsquigarrow -2 \geq_{\mathbb{Z}} 0 \equiv \perp} \geq \quad E \vdash y := -x \quad \text{if } \perp$$
$$E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x$$

Exercice 1 - 1.b

Environnement

Soit $E = (x, -2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{\frac{(x, -2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow -2} \quad \forall \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \rightsquigarrow 0} \quad \mathbb{Z}}{E \vdash x \geq 0 \rightsquigarrow -2 \geq_{\mathbb{Z}} 0 \equiv \perp} \geq \frac{\frac{y \in \text{Dom}(E) \quad E \vdash -x}{E \vdash y := -x} \quad :=}{E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x} \text{if}_{\perp}$$

Exercice 1 - 1.b

Environnement

Soit $E = (x, -2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{\frac{(x, -2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow -2} \quad \forall \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \rightsquigarrow 0} \quad \mathbb{Z} \quad \frac{y \in \text{Dom}(E) \quad \frac{E \vdash x}{E \vdash -x} \text{ --}}{E \vdash y := -x} \quad \text{--} \quad \text{if}_{\perp}}{\frac{E \vdash x \geq 0 \rightsquigarrow -2 \geq_{\mathbb{Z}} 0 \equiv \perp}{E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x}} \quad \text{:=}$$

Exercice 1 - 1.b

Environnement

Soit $E = (x, -2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{\frac{(x, -2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow -2} \forall \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \rightsquigarrow 0} \mathbb{Z}}{E \vdash x \geq 0 \rightsquigarrow -2 \geq_{\mathbb{Z}} 0 \equiv \perp} \geq \quad \frac{y \in \text{Dom}(E)}{E \vdash y := -x} \quad \frac{\frac{(x, -2) \in E}{E \vdash x} \forall \quad \frac{}{E \vdash -x} -}{E \vdash -x} - \quad \frac{}{E \vdash y := -x} :=$$
$$\frac{}{E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x} \text{if}_{\perp}$$

Exercice 1 - 1.b

Environnement

Soit $E = (x, -2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{\frac{(x, -2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow -2} \mathbb{V} \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \rightsquigarrow 0} \mathbb{Z}}{E \vdash x \geq 0 \rightsquigarrow -2 \geq_{\mathbb{Z}} 0 \equiv \perp} \geq \quad \frac{y \in \text{Dom}(E)}{E \vdash y := -x} \quad \frac{\frac{(x, -2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow -2} \mathbb{V} \quad \frac{(x, -2) \in E}{E \vdash -x} -}{E \vdash x \rightsquigarrow -2} \mathbb{V} \quad \frac{}{E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x} \text{if}_{\perp} :=$$

Exercice 1 - 1.b

Environnement

Soit $E = (x, -2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{\frac{(x, -2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow -2} \mathbb{V} \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \rightsquigarrow 0} \mathbb{Z}}{E \vdash x \geq 0 \rightsquigarrow -2 \geq_{\mathbb{Z}} 0 \equiv \perp} \geq \quad \frac{y \in \text{Dom}(E)}{E \vdash y := -x} \quad \frac{\frac{(x, -2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow -2} \mathbb{V} \quad \frac{E \vdash -x \rightsquigarrow 2}{-}}{E \vdash -x \rightsquigarrow 2} \mathbb{V} \quad \frac{}{E \vdash y := -x} \text{if}_{\perp} :=$$

$E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x$

Exercice 1 - 1.b

Environnement

Soit $E = (x, -2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{\frac{(x, -2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow -2} \mathbb{V} \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \rightsquigarrow 0} \mathbb{Z}}{E \vdash x \geq 0 \rightsquigarrow -2 \geq_{\mathbb{Z}} 0 \equiv \perp} \geq \quad \frac{y \in \text{Dom}(E) \quad \frac{(x, -2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow -2} \mathbb{V} \quad \frac{}{E \vdash -x \rightsquigarrow 2} -}{E \vdash y := -x \rightsquigarrow E' = (x, 2), (y, 2)} := \text{if}_{\perp}$$
$$E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x$$

Exercice 1 - 1.b

Environnement

Soit $E = (x, -2), (y, 0)$ notre environnement de départ.

Preuve

$$\frac{\frac{(x, -2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow -2} \mathbb{V} \quad \frac{0 \in \mathbb{Z}}{E \vdash 0 \rightsquigarrow 0} \mathbb{Z}}{E \vdash x \geq 0 \rightsquigarrow -2 \geq_{\mathbb{Z}} 0 \equiv \perp} \geq \quad \frac{y \in \text{Dom}(E) \quad \frac{(x, -2) \in E}{E \vdash x \rightsquigarrow -2} \mathbb{V} \quad \frac{}{E \vdash -x \rightsquigarrow 2} -}{E \vdash y := -x \rightsquigarrow E' = (x, 2), (y, 2)} := \quad \frac{}{\text{if}_{\perp}}$$
$$E \vdash \text{if } x \geq 0 \text{ then } y := x \text{ else } y := -x \rightsquigarrow E'$$