Excercice 44 :

1. - Arbre couvrant de poids minimum.

   - Arbre couvrant de poids maximum.

Entrée : $G = (V, E)$, $\omega : E \to \mathbb{N}$

Les 2 problèmes peuvent se réduire l'un dans l'autre.

$\omega'(\text{arête}) = \max \omega(\text{poids}) - \omega(\text{arête})$

réduction en $O(m)$
nombre d'arête.

Les 2 problèmes sont dans la classe P. Algo Kruskall, Prim.

2. - Plus court chemin.

- Plus long chemin.

Entrée : $G = (V, E)$

Plus court chemin classe P : Dijskra

Plus long chemin : plus compliqué que le cycle Hamiltonien. Il est NP-difficile

3. coupe maximale : NP-complet

coupe minimale : P

4. - couplage maximum de valeur maximal

- couplage maximum de valeur minimal

Entrée : $G = (V, E)$, $\omega : E \to \mathbb{N}$

$\omega'(e) = \max \omega(P) - \omega(e)$

Les 2 problèmes sont dans classe P.

5. - TSP optimal

- TSP affreux

$\omega'(e) = \max \omega(P) - \omega(e)$

Les 2 problèmes sont NP-difficiles.

Excercice 45 :

1. existe chemin entre 2 sommets disjoint ?

taille graphe $O(n^2)$ (représentation matrice)

Entrée : $G = (V, E)$, $s, t \in V$

taille de l'instance : $O(\underbrace{n^2 + \log(n)}_{\text{sommet}}) = O(n^2)$

2. Existe chemin entre 2 sommets disjoints de taille K ?

Entrée : $G = (V, E)$, $s, t \in V$, $K \in \mathbb{N}$

taille de l'instance : $O(n^2 + \log(n) + \log(K))$

$= O(n^2)$ car $K \leq m$

3. longueur chaine maximal dans graphe pondéré.

Entrée : $G = (V, E)$, $w : E \to \mathbb{N}$, $K \in \mathbb{N}$

poids arête

Existe t'il une chaine dans G de longueur $\geq K$

taille de l'instance : $O(n^2 + \log(K) + m \log(w^*))$

où $w^* = \max w(e)$

$K \leq n \times w^*$

$\log(K) \leq \log(n \times w^*)$

$\log(K) \leq \log(n) + \log(w^*)$

Donc la taille de l'instance est :

$O(n^2 + m \log(w^*))$

Un algorithme de complexité $O(n\, w^*)$ serait pseudo polynomial car exponentiel en fonction de la taille de la donnée, mais polynomial en fonction des valeurs des données.

Excercice 46:

1. Stable < Max Stable

Stable (G = (V, E), K)

S ← Max Stable (G)

K' ← |S|

return K' ≥ K

2. Taille Max Stable < Stable

Taille Max Stable (G) :

i = 0

Tant que (Stable (G , i)) :

i ← i + 1

return i - 1

Mq Max Stable < Taille Max Stable,

par transitivité : Max Stable < Stable.

Si taille Max Stable (G - {x}))

$\neq$

taille Max Stable (G))

alors x est dans Max Stable

Max Stable (G)

$S \leftarrow \emptyset$; $G' \leftarrow G$

Tant que $V' \neq \emptyset$:

choisir x dans V'

Si Taille Max Stable $(G' - \{x\})$

$\neq$ Taille Max Stable (G')

$S \leftarrow S \cup \{x\}$

$G' \leftarrow G' - \{x\} - \Gamma(x)$

voisinage

Sinon $G' \leftarrow G' - \{x\}$

return S

Certificat positif = preuve que la réponse est oui.

Si la vérification du certificat se fait en temps polynomial, le problème est NP.

Certificat = données

Exercice 49 :

1. Posons A dans NP, B dans NP

$A \cup B$ dans NP.

Si $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ (on utilise certificat A)

ou $x \in B$ (on utilise certificat B)

$A \cap B$ dans NP. car $A \cap B \subset A \cup B$

Donc Vrai

Si $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ (on utilise certificat A)

et $x \in B$ (on utilise certificat B)

2. $\Sigma = \{0, 1\}$, Soit L un langage NP-complet

$A = 0L \cup \{1(0+1)^*\}$

$B = 1L \cup \{0\Sigma^*\}$

$A \cup B = \Sigma^*$ et Σ^* n'est pas un langage NP-Complet.

Posons $\Sigma = \{0, 1\}$

Soit L un langage NP-Complet

$A = 0L$ $\qquad$ $B = 1L$

A et B sont NP-Complets (car L est NP-Complet)

$A \cap B = \emptyset$ n'est pas NP-Complet.

Exercice 57 :

Max 2 Sat :

Données : ensemble de clauses de taille ≤ 2,

$K \in \mathbb{N}$

Résultat : Existe t'il une affectation des variables tq K clauses soient vraies.

2 Sat :

sans perte de généralité

Données : ensemble de clauses de taille 2

Résultat : Existe t'il une affectation des variables tq toutes les clauses soient vérifiées. Ce problème $\in P$.

3 Sat :

Données : ensemble de clauses de taille 3

Résultat : Existe t'il une affectation des variables tq toutes les clauses soient vérifiées. Ce problème ∈ NP-Complet

$C_i = a_i \vee b_i \vee d_i$

	a_i	b_i	d_i	$\overline{y_i} \vee \overline{a_i}$	$\overline{y_i} \vee \overline{b_i}$	$\overline{y_i} \vee \overline{d_i}$	$\overline{y_i} \vee a_i$	$\overline{y_i} \vee b_i$	$\overline{y_i} \vee d_i$	y_i	nb Msc clause
$a_i = b_i = d_i = T$	T	T	T	F	F	F	T	T	T	T	7
$a_i = b_i = T$, $d_i = F$	T	T	F	T	T	T	T	T	T F	F T	7
$a_i = T$, $b_i = d_i = F$	T	F	F	T	T	T	T	T	T	F	7
$a_i = b_i = d_i = F$	F	F	F	T	T	T	T	T	T	F	6

Sat :

Données : $X = \{x_1, \dots, x_n\}$;

$C = \{C_1, \dots, C_m\}$;

existe t'il une affectation des variables x_i tq toutes les C_j soient vérifiées.

$\xrightarrow{\text{réduction}}$

Max 2 Sat :

Données : $X' = \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots y_m\}$

$C' = \{$ clauses construites précédemment $\}$

$|C'| = 10\,|C| = 10m$, $K = 7m$

Existe t'il une affectation des variables

X' tq K clauses soient vraies ?

La réponse est oui pour 3 Sat ssi la

réponse est oui pour max 2 Sat.

Max 2 Sat $\in$ NP car il y a un certificat

positif.

3 Sat $<$ Max 2 Sat

3 Sat est NP-complet $\Rightarrow$ Max 2 Sat est

NP-Complet.

Min 2 Sat :

Entrée : ensemble de clause de taille 2 sur

n variables, $k' \in \mathbb{N}$.

Question : Existe t'il une affectation qui

satisfasse au plus k clauses ?

Min 2 Sat $\in NP$ (certificat ≥ 0 et polynomial)

$n' = n + m$ à chaque clause de Max 2 Sat

on associe une nouvelle variable $y_1, y_2 \dots y_m$

$m' = 2m$

$C_i = l_1^i \vee l_2^i$

$\overline{l_1^i} \vee y_i$ $\qquad$ $\overline{l_2^i} \vee \overline{y_i}$

si $C_i \rightsquigarrow F$

$\overline{l_1^i} \vee y_i$ et $\overline{l_2^i} \vee \overline{y_i} \rightsquigarrow T$

si $C_i \rightsquigarrow T$

Je peux choisir $\overline{y_i}$ pour que l'un des 2 soit fausse, l'autre sera forcément vraie.

$K' = 2m - K$ $\qquad$ Donc Min 2 Sat est NP-Complet.