HAI601I - Exercices de révisions

Benoît Huftier

2022

Création de la table d'analyse

Enoncé

Soit la grammaire $G_E = (\{0, 1, \ldots, 9, +, *, \hat{}, (,)\}, \{E\}, X, E)$ avec les règles X suivantes :

$$E \quad \rightarrow \quad E + E | E * E | E\hat{}E | (E) | 0 | 1 | \ldots | 9$$

1. Calculer G_{ENR} la grammaire G_E sans récursivité à gauche.
2. Donner la table d'analyse de cette grammaire.
3. Que peut-on en déduire ?

Enoncé

1. Calculer G_{ENR} la grammaire G_E sans récursivité à gauche.

La suppression de la récursivité à gauche se fait en trois étapes :

1. suppression des ε-productions,
2. suppression des cycles,
3. suppression de la récursivité à gauche.

La grammaire G_E ne possède pas d'ε-production ni de cycle, on peut donc directement faire la suppression de la récursivité à gauche.

Il n'y a que des récursivités à gauche immédiates qui se dérécursivent facilement et on a notre grammaire non récursive à gauche.

$G_{ENR} = (\{0, 1, \ldots, 9, +, *, \hat{}, (,)\}, \{E\}, X', E)$ avec les règles X' suivantes :

$$\begin{array}{lcl} E & \rightarrow & (E)R_E|0R_E|1R_E|\ldots|9R_E \\ R_E & \rightarrow & +ER_E|*ER_E|\hat{}ER_E|\varepsilon \end{array}$$

Enoncé

2. Donner la table d'analyse de cette grammaire.

Calcul des premiers :

- $premiers(E) = \{(, 0, 1, \ldots, 9\}$
- $premiers(R_E) = \{+, *, \hat{}\}$

Calcul des suivants :

- $suivants(E) = \{\$, +, *, \hat{},)\}$
- $suivants(R_E) = \{\$, +, *, \hat{},)\}$

Table d'analyse :

	$0, 1, \ldots, 9$	(	)	+	*	^	\$
E	$E \to 0R_E \mid 1R_E \mid \ldots \mid 9R_E$	$E \to (E)$					
R_E			$R_E \to \varepsilon$	$R_E \to +ER_E$ $R_E \to \varepsilon$	$R_E \to +ER_E$ $R_E \to \varepsilon$	$R_E \to +ER_E$ $R_E \to \varepsilon$	$R_E \to \varepsilon$

Enoncé

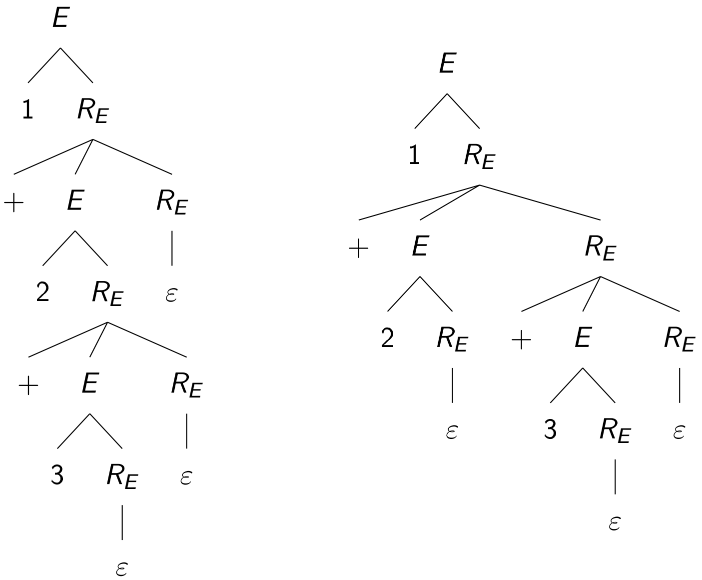
3. Que peut-on en déduire ?

La grammaire G_{ENR} n'est pas $LL(1)$. En fait, elle est même ambiguë. Cela peut se vérifier car pour un même mot du langage, il existe deux arbres de dérivations différents.

Dans la table d'analyse, ces différents arbres sont montrés par les règles dans la même case.

Par exemple, le mot 1+2+3 peut produire deux arbres de dérivation différents.

Voici les deux arbres de dérivation possibles pour l'expression 1+2+3 :



Création de la table d'analyse

Enoncé

Soit la grammaire $G_E = (\{0, 1, \ldots, 9, +, *, \hat{}, (,)\}, \{E\}, X, E)$ avec les règles X suivantes :

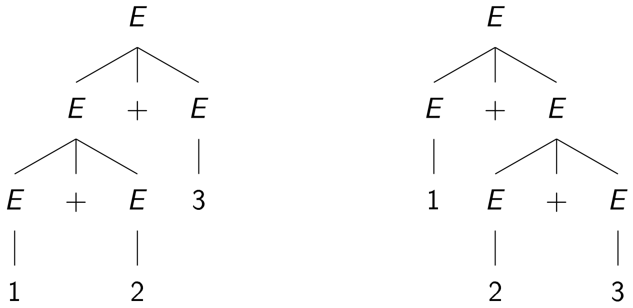
$$E \quad \rightarrow \quad E + E | E * E | E \hat{} E | (E) | 0 | 1 | \ldots | 9$$

1. Montrer que cette grammaire est ambiguë.
2. Désambiguer cette grammaire.
3. Soit la grammaire G_{ENA} obtenue, calculer la grammaire G_{ENANR} sans récursivité à gauche.
4. Factoriser à gauche cette grammaire.
5. Donner la table d'analyse de cette grammaire.
6. Donner l'arbre de dérivation des expressions suivantes :
   1. 1+2
   2. 1+2*3
   3. (1*2)^3
   4. 1+2*(3+4)^5
7. Pour les mêmes expressions, faire la trace sur un automate à pile.

Enoncé

1. Montrer que cette grammaire est ambiguë.

Cette grammaire est ambiguë car pour une même expression on peut trouver deux arbres de dérivations différents. Par exemple pour 1+2+3, nous avons les deux arbres suivants :



Enoncé

2. Désambiguer cette grammaire.

Pour désambiguer une grammaire, il faut le faire à la main car c'est indécidable (cf HAI602I). Heureusement, pour les grammaires "à opérandes" de ce type, il y a une méthode efficace qui existe.

La première chose à faire, c'est de définir la priorité des opérateurs. Chaque opérateur est défini par un symbole non terminal. Plus un opérateur est prioritaire et plus son symbole est en "profondeur". Un symbole d'opérateur à une profondeur i va faire appel au symbole de l'opérateur de profondeur $i + 1$.

Par exemple, avec l'opérateur $-$ qui serait moins prioritaire que l'opérateur $/$, on aurait les règles suivantes :

$$\begin{array}{lcl} E & \rightarrow & E - F | F \\ F & \rightarrow & F / G | G \\ G & \rightarrow & \dots \end{array}$$

Cela permet de calculer toutes les divisions avant de calculer les soustractions.

La règle $E \rightarrow F$ permet de dire qu'il est possible qu'une expression ne contienne pas du tout de soustraction. De même pour la règle $F \rightarrow G$ et la division.

La deuxième chose à faire, c'est de définir l'associativité des opérateurs. Les opérateurs +, -, * et / par exemple, sont associatif à gauche tandis que l'opérateur ^ est associatif à droite.

Un opérateur associatif à gauche se calculerait de la façon suivante :

$$\text{id op id op id} = (\text{id op id}) \text{ op id}$$

Une expression entre parenthèse revient à calculer une expression générale (puisque les parenthèses ont la priorité absolue). On peut donc remplacer une expression entre parenthèses par E (il peut y avoir n'importe quel opérateur). On peut donc remplacer (id op id) par E.

$$\text{id op id op id} = E \text{ op id}$$

Et ainsi, la règle s'écrirait de la manière suivante :

$$\begin{array}{lcl} E & \rightarrow & E\ op\ F|F \\ F & \rightarrow & \ldots \end{array}$$

De manière analogue, un opérateur associatif à droite se calculerait de la façon suivante :

$$\text{id op id op id} = \text{id op (id op id)}$$

ou encore

$$\text{id op id op id} = \text{id op } E$$

Et ainsi, la règle s'écrirait de la manière suivante :

$$\begin{array}{lcl} E & \rightarrow & F \; op \; E | F \\ F & \rightarrow & \ldots \end{array}$$

Maintenant, vous avez les outils en main pour désambiguer la grammaire G_E

La gramaire G_E non ambiguë est la suivante :

$G_{ENA} = (\{0, 1, \ldots, 9, +, *, \hat{}, (,)\}, \{E, T, F, X\}, R, E)$ avec les règles R suivantes :

$$\begin{array}{lcl} E & \rightarrow & E + T|T \\ T & \rightarrow & T * F|F \\ F & \rightarrow & X\hat{}F|X \\ X & \rightarrow & (E)|0|1|\ldots|9 \end{array}$$

Avec T pour terme, F pour facteur et X pour exposant.

Enoncé

3. Soit la grammaire G_{ENA} obtenue, calculer la grammaire G_{ENANR} sans récursivité à gauche.

$G_{ENANR} = (\{0, 1, \ldots, 9, +, *, \hat{}, (,)\}, \{E, R_E, T, R_T, F, X\}, R, E)$ avec les règles R suivantes :

$$\begin{array}{lcl}
E & \rightarrow & TR_E \\
R_E & \rightarrow & +TR_E | \varepsilon \\
T & \rightarrow & FR_T \\
R_T & \rightarrow & *FR_T | \varepsilon \\
F & \rightarrow & X\hat{}F | X \\
X & \rightarrow & (E) | 0 | 1 | \ldots | 9
\end{array}$$

Enoncé

4. Factoriser à gauche cette grammaire.

$G_{ENANR} = (\{0, 1, \ldots, 9, +, *, \hat{}, (,)\}, \{E, R_E, T, R_T, F, R_F, X\}, R, E)$ avec les règles R suivantes :

$$\begin{array}{lcl} E & \rightarrow & TR_E \\ R_E & \rightarrow & +TR_E|\varepsilon \\ T & \rightarrow & FR_T \\ R_T & \rightarrow & *FR_T|\varepsilon \\ F & \rightarrow & XR_F \\ R_F & \rightarrow & \hat{}F|\varepsilon \\ X & \rightarrow & (E)|0|1|\ldots|9 \end{array}$$

Enoncé

5. Donner la table d'analyse de cette grammaire.

- $premiers(X) = \{(, 0, 1, \ldots, 9\}$
- $premiers(R_F) = \{\hat{}, \varepsilon\}$
- $premiers(F) = \{(, 0, 1, \ldots, 9\}$
- $premiers(R_T) = \{*, \varepsilon\}$
- $premiers(T) = \{(, 0, 1, \ldots, 9\}$
- $premiers(R_E) = \{+, \varepsilon\}$
- $premiers(E) = \{(, 0, 1, \ldots, 9\}$

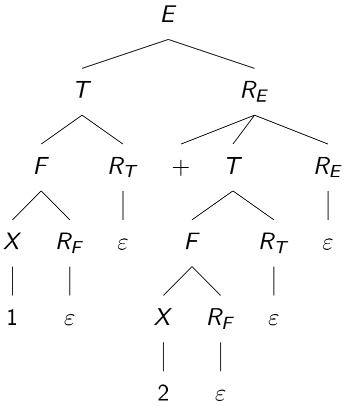
- $suivants(E) = \{\$,)\}$
- $suivants(R_E) = \{\$,)\}$
- $suivants(T) = \{+, \$,)\}$
- $suivants(R_T) = \{+, \$,)\}$
- $suivants(F) = \{*, +, \$,)\}$
- $suivants(R_F) = \{*, +, \$,)\}$
- $suivants(X) = \{\hat{}, *, +, \$,)\}$

Table d'analyse :

	$0\|1\|\ldots\|9$	$+$	$*$	^	(	)	\$
E	$E \to TR_E$				$E \to TR_E$		
R_E		$R_E \to +TR_E$				$R_E \to \varepsilon$	$R_E \to \varepsilon$
T	$T \to FR_T$				$T \to FR_T$		
R_T		$R_T \to \varepsilon$	$R_T \to *FR_T$			$R_T \to \varepsilon$	$R_T \to \varepsilon$
F	$F \to XR_F$				$F \to XR_F$		
R_F		$R_F \to \varepsilon$	$R_F \to \varepsilon$	$R_F \to \hat{}F$		$R_F \to \varepsilon$	$R_F \to \varepsilon$
X	$X \to 0\|1\|\ldots\|9$				$X \to (E)$		

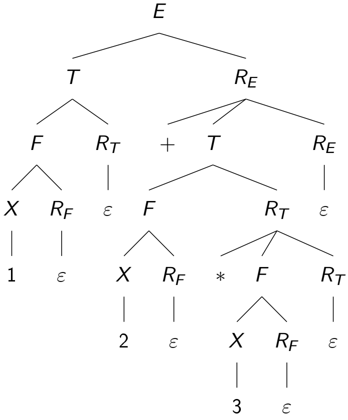
Enoncé

6. Donner l'arbre de dérivation des expressions suivantes :
   1. 1+2
   2. 1+2*3
   3. (1*2)^3
   4. 1+2*(3+4)^5



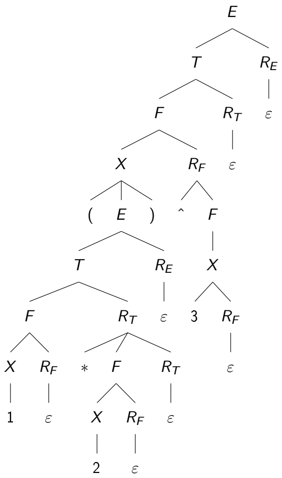
Enoncé

6. Donner l'arbre de dérivation des expressions suivantes :
   1. 1+2
   2. 1+2*3
   3. (1*2)^3
   4. 1+2*(3+4)^5



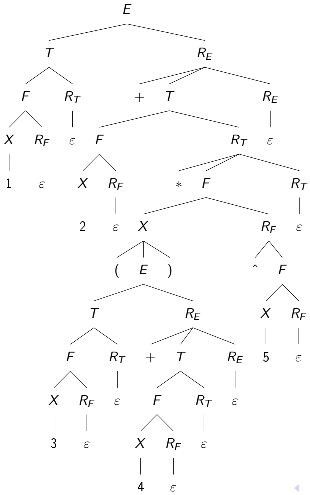
Enoncé

6. Donner l'arbre de dérivation des expressions suivantes :
   1. 1+2
   2. 1+2*3
   3. (1*2)^3
   4. 1+2*(3+4)^5



Enoncé

6. Donner l'arbre de dérivation des expressions suivantes :
   1. 1+2
   2. 1+2*3
   3. (1*2)^3
   4. 1+2*(3+4)^5



Enoncé

7. Pour les mêmes expressions, faire la trace sur un automate à pile.

Pile	Flot d'entrée	Action
$\$E$	$1+2\$$	$E \to TR_E$
$\$R_E T$	$1+2\$$	$T \to FR_T$
$\$R_E R_T F$	$1+2\$$	$F \to XR_F$
$\$R_E R_T R_F X$	$1+2\$$	$X \to 1$
$\$R_E R_T R_F 1$	$1+2\$$	dépiler et avancer
$\$R_E R_T R_F$	$+2\$$	$R_F \to \varepsilon$
$\$R_E R_T$	$+2\$$	$R_T \to \varepsilon$
$\$R_E$	$+2\$$	$R_E \to +TR_E$
$\$R_E T+$	$+2\$$	dépiler et avancer
$\$R_E T$	$2\$$	$T \to FR_T$
$\$R_E R_T F$	$2\$$	$F \to XR_F$
$\$R_E R_T R_F X$	$2\$$	$X \to 2$
$\$R_E R_T R_F 2$	$2\$$	dépiler et avancer
$\$R_E R_T R_F$	$\$$	$R_F \to \varepsilon$
$\$R_E R_T$	$\$$	$R_T \to \varepsilon$
$\$R_E$	$\$$	$R_E \to \varepsilon$
$\$$	$\$$	Accepter

Pile	Flot d'entrée	Action
$\$E$	$1+2*3\$$	$E \rightarrow TR_E$
$\$E$	$1+2*3\$$	$E \rightarrow TR_E$
$\$R_E T$	$1+2*3\$$	$T \rightarrow FR_T$
$\$R_E R_T F$	$1+2*3\$$	$F \rightarrow XR_F$
$\$R_E R_T R_F X$	$1+2*3\$$	$X \rightarrow 1$
$\$R_E R_T R_F 1$	$1+2*3\$$	dépiler et avancer
$\$R_E R_T R_F$	$+2*3\$$	$R_F \rightarrow \varepsilon$
$\$R_E R_T$	$+2*3\$$	$R_T \rightarrow \varepsilon$
$\$R_E$	$+2*3\$$	$R_E \rightarrow +TR_E$
$\$R_E T+$	$+2*3\$$	dépiler et avancer
$\$R_E T$	$2*3\$$	$T \rightarrow FR_T$
$\$R_E R_T F$	$2*3\$$	$F \rightarrow XR_F$
$\$R_E R_T R_F X$	$2*3\$$	$X \rightarrow 2$
$\$R_E R_T R_F 2$	$2*3\$$	dépiler et avancer
$\$R_E R_T R_F$	$*3\$$	$R_F \rightarrow \varepsilon$
$\$R_E R_T$	$*3\$$	$R_T \rightarrow *FR_T$
$\$R_E R_T F*$	$*3\$$	dépiler et avancer
$\$R_E R_T F$	$3\$$	$F \rightarrow XR_F$
$\$R_E R_T R_F X$	$3\$$	$X \rightarrow 3$
$\$R_E R_T R_F 3$	$3\$$	dépiler et avancer
$\$R_E R_T R_F$	$\$$	$R_F \rightarrow \varepsilon$
$\$R_E R_T$	$\$$	$R_T \rightarrow \varepsilon$
$\$R_E$	$\$$	$R_E \rightarrow \varepsilon$
$\$$	$\$$	Accepter

Pile	Flot d'entrée	Action
$\$E$	$(1*2)\hat{}3\$$	$E \to TR_E$
$\$R_E T$	$(1*2)\hat{}3\$$	$T \to FR_T$
$\$R_E R_T F$	$(1*2)\hat{}3\$$	$F \to XR_F$
$\$R_E R_T R_F X$	$(1*2)\hat{}3\$$	$X \to (E)$
$\$R_E R_T R_F)E($	$(1*2)\hat{}3\$$	dépiler et avancer
$\$R_E R_T R_F)E$	$1*2)\hat{}3\$$	$E \to TR_E$
$\$R_E R_T R_F)R_E T$	$1*2)\hat{}3\$$	$T \to FR_T$
$\$R_E R_T R_F)R_E R_T F$	$1*2)\hat{}3\$$	$F \to XR_F$
$\$R_E R_T R_F)R_E R_T R_F X$	$1*2)\hat{}3\$$	$X \to 1$
$\$R_E R_T R_F)R_E R_T R_F$	$*2)\hat{}3\$$	dépiler et avancer
$\$R_E R_T R_F)R_E R_T R_F$	$*2)\hat{}3\$$	$R_F \to \varepsilon$
$\$R_E R_T R_F)R_E R_T$	$*2)\hat{}3\$$	$R_T \to *FR_T$
$\$R_E R_T R_F)R_E R_T F*$	$*2)\hat{}3\$$	dépiler et avancer
$\$R_E R_T R_F)R_E R_T F$	$2)\hat{}3\$$	$F \to XR_F$
$\$R_E R_T R_F)R_E R_T R_F X$	$2)\hat{}3\$$	$X \to 2$
$\$R_E R_T R_F)R_E R_T R_F 2$	$2)\hat{}3\$$	dépiler et avancer
$\$R_E R_T R_F)R_E R_T R_F$	$)\hat{}3\$$	$R_F \to \varepsilon$
$\$R_E R_T R_F)R_E R_T$	$)\hat{}3\$$	$R_T \to \varepsilon$
$\$R_E R_T R_F)R_E$	$)\hat{}3\$$	$R_E \to \varepsilon$
$\$R_E R_T R_F)$	$)\hat{}3\$$	dépiler et avancer
$\$R_E R_T R_F$	$\hat{}3\$$	$R_F \to \hat{}F$
$\$R_E R_T F\hat{}$	$\hat{}3\$$	dépiler et avancer
$\$R_E R_T F$	$3\$$	$F \to XR_F$
$\$R_E R_T R_F X$	$3\$$	$X \to 3$
$\$R_E R_T R_F 3$	$3\$$	dépiler et avancer
$\$R_E R_T R_F$	$\$$	$R_F \to \varepsilon$
$\$R_E R_T$	$\$$	$R_T \to \varepsilon$
$\$R_E$	$\$$	$R_E \to \varepsilon$
$\$$	$\$$	Accepter

Pile	Flot d'entrée	Action
$\$E$	$1+2*(3+4)\hat{}5\$$	$E \to TR_E$
$\$E$	$1+2*(3+4)\hat{}5\$$	$E \to TR_E$
$\$R_E T$	$1+2*(3+4)\hat{}5\$$	$T \to FR_T$
$\$R_E R_T F$	$1+2*(3+4)\hat{}5\$$	$F \to XR_F$
$\$R_E R_T R_F X$	$1+2*(3+4)\hat{}5\$$	$X \to 1$
$\$R_E R_T R_F 1$	$1+2*(3+4)\hat{}5\$$	dépiler et avancer
$\$R_E R_T R_F$	$+2*(3+4)\hat{}5\$$	$R_F \to \varepsilon$
$\$R_E R_T$	$+2*(3+4)\hat{}5\$$	$R_T \to \varepsilon$
$\$R_E$	$+2*(3+4)\hat{}5\$$	$R_E \to +TR_E$
$\$R_E T+$	$+2*(3+4)\hat{}5\$$	dépiler et avancer
$\$R_E T$	$2*(3+4)\hat{}5\$$	$T \to FR_T$
$\$R_E R_T F$	$2*(3+4)\hat{}5\$$	$F \to XR_F$
$\$R_E R_T R_F X$	$2*(3+4)\hat{}5\$$	$X \to 2$
$\$R_E R_T R_F 2$	$2*(3+4)\hat{}5\$$	dépiler et avancer
$\$R_E R_T R_F$	$*(3+4)\hat{}5\$$	$R_F \to \varepsilon$
$\$R_E R_T$	$*(3+4)\hat{}5\$$	$R_T \to *FR_T$
$\$R_E R_T F*$	$*(3+4)\hat{}5\$$	dépiler et avancer
$\$R_E R_T F$	$(3+4)\hat{}5\$$	$F \to XR_F$
$\$R_E R_T R_F X$	$(3+4)\hat{}5\$$	$X \to (E)$
$\$R_E R_T R_F)E($	$(3+4)\hat{}5\$$	dépiler et avancer
$\$R_E R_T R_F)E$	$3+4)\hat{}5\$$	$E \to TR_E$
$\$R_E R_T R_F)R_E T$	$3+4)\hat{}5\$$	$T \to FR_T$
$\$R_E R_T R_F)R_E R_T F$	$3+4)\hat{}5\$$	$F \to XR_F$
$\$R_E R_T R_F)R_E R_T R_F X$	$3+4)\hat{}5\$$	$X \to 3$
$\$R_E R_T R_F)R_E R_T R_F 3$	$3+4)\hat{}5\$$	dépiler et avancer
$\$R_E R_T R_F)R_E R_T R_F$	$+4)\hat{}5\$$	$R_F \to \varepsilon$
$\$R_E R_T R_F)R_E R_T$	$+4)\hat{}5\$$	$R_T \to \varepsilon$

Pile	Flot d'entrée	Action
$\$R_E R_T R_F)R_E$	$+4)\hat{}5\$$	$R_E \to +TR_E$
$\$R_E R_T R_F)R_E T+$	$+4)\hat{}5\$$	dépiler et avancer
$\$R_E R_T R_F)R_E T$	$4)\hat{}5\$$	$T \to FR_T$
$\$R_E R_T R_F)R_E R_T F$	$4)\hat{}5\$$	$F \to XR_F$
$\$R_E R_T R_F)R_E R_T R_F X$	$4)\hat{}5\$$	$X \to 4$
$\$R_E R_T R_F)R_E R_T R_F 4$	$4)\hat{}5\$$	dépiler et avancer
$\$R_E R_T R_F)R_E R_T R_F$	$)\hat{}5\$$	$R_F \to \varepsilon$
$\$R_E R_T R_F)R_E R_T$	$)\hat{}5\$$	$R_T \to \varepsilon$
$\$R_E R_T R_F)R_E$	$)\hat{}5\$$	$R_E \to \varepsilon$
$\$R_E R_T R_F)$	$)\hat{}5\$$	dépiler et avancer
$\$R_E R_T R_F$	$\hat{}5\$$	$R_F \to \hat{}F$
$\$R_E R_T F\hat{}$	$\hat{}5\$$	dépiler et avancer
$\$R_E R_T F$	$5\$$	$F \to XR_F$
$\$R_E R_T R_F X$	$5\$$	$X \to 5$
$\$R_E R_T R_F 5$	$5\$$	dépiler et avancer
$\$R_E R_T R_F$	$\$$	$R_F \to \varepsilon$
$\$R_E R_T$	$\$$	$R_T \to \varepsilon$
$\$R_E$	$\$$	$R_E \to \varepsilon$
$\$$	$\$$	Accepter