Exercice 1 :

1) le barbier est un homme, s'il ne se rase pas seul, alors il doit se raser.

2) Si le crocodile compte dévorer le bébé, il ne peut pas le faire. S'il ne le dévore pas alors il doit le dévorer.

Exercice 2 :

Si on ne sait pas si l'exécution s'arrête c'est parce qu'elle dépend de n. Si $n = 0$ alors le programme ne termine pas.

Si nous avions une procédure permettant de décider de la terminaison, alors nous pourrions conclure directement.

Excercice 3 :

1) $$\text{Rang}(x,y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$$

Algo RangRec (x, y)

Si $(x,y) = (0,0)$ alors retourner 0

Sinon si $x = 0$ alors retourner $\text{Rang}(y-1, 0)+1$
sinon retourner $\text{Rang}(x-1, y+1)+1$

mieux :

Algo RangRec (x, y)

Si $(x,y) = (0,0)$ alors retourner 0

Sinon si $x = 0$ alors retourner $\text{Rang}(y-1, 0)+1$
sinon retourner $\text{Rang}(0, y+1)+x$

2) t tel que $\frac{t(t+1)}{2} \leq z$

$x = z - \frac{t(t+1)}{2}$ $\qquad$ $y = t - x$

Cherchons le plus grand t tel que :

$\frac{t(t+1)}{2} \leq z$

$t := 0$;

Tant que $\frac{t(t+1)}{2} \leq z$ faire

$t := t+1$;

$t := t-1$;

$x := z - \frac{t*(t+1)}{2}$;

$y := t - x$;

3) $\text{Rang}(4,5) = \dfrac{9 \times 10}{2} + 4 = 49$

$\text{Rang}(x,y) = 8$:

$k = 3$

$x = 8 - \dfrac{3 \times 4}{2} = 2$

$y = 3 - 2 = 1$

Exercice 4 :

1) $h(x,y,z) = c(c(x,y),z)$

$c(x,y) = 67$

$t = 11$

$y = 67 - 66 = 1$ car la formule est $\dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y$

$x = 11 - 1 = 10$

$c(c(x,y),z) = (10,1)$ donc $z = 1$ et

$c(x,y) = 10$ $\quad t(t+1) \leq 2 \times 10$

$t = 4$ $\quad y = 10 - \dfrac{4 \times 5}{2} = 0$

$x = 4 - 0 \quad = 4$

Exercice 5 :

1) $f(0) = f(0^2 + 0^2) = f(0)^2 + f(0)^2$

$= 2 f(0)^2$

Si $f(0) \neq 0$

$1 = 2 f(0)$ Pas de solution dans $\mathbb{N}$.

Donc $f(0) = 0$

2) $f(1) = f(1^2 + 0^2) = f(1)^2 + f(0)^2$

donc $a = a^2$ donc $a = 0$ ou $a = 1$

3) $f(2) = f(1^2 + 1^2) = f(1)^2 + f(1)^2$

$= a^2 + a^2 = 2a^2 = 2a$

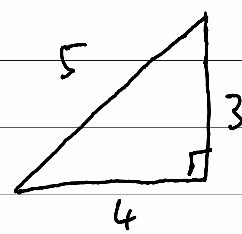
$$f(4) = f(2^2+0^2) = f(2)^2 + f(0)^2$$

$$= 4a^2 = 4a$$

$$f(5) = f(2^2+1^2) = 4a^2 + a^2 = 5a^2$$

$$= 5a.$$

4) Pythagore



$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

$$f(4^2+3^2) = f(4)^2 + f(3)^2$$

$$f(5^2+0^2) = f(5)^2$$

$$f(3)^2 = 25a^2 - 16a^2 = 9a^2$$

$$f(3) = 3a$$

5) $f(7)$: $7^2+1^2=5^2+5^2$ car $7^2=49$

$f(8)$: 2^2+2^2

$f(9)$: $9=3^2+0^2$

$f(10)$: $10=3^2+1^2$

$f(6)$: $f(6^2+8^2)=f(10^2+0^2)$ car

pythagore.

Excercice 6 :

Rationnel est en bijection avec couple

$(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et $pgcd(a, b) = 1$

p et q premiers entre eux pour être unique représentant du rationnel.

On prend ces couples dans l'ordre $p+q$ et à égalité, l'ordre lexicographique.

Pour intégrer les rationnels négatifs il suffit d'alterner avec code pair/impair.

Le décodage se fait en parcourant le code.

Excercice 7 :

1) il faut aussi la taille de la liste car il existe une infinité de liste dont la somme est 0, donc on ne codera jamais la liste (1)

2) (0), (1), (2), (3), . . . , (i)

Il existe une infinité de liste dont la taille vaut 1.

Exercice 8 :

1) $U_0 = \{(1)\}$

$U_1 = \{(0)\}$

$U_2 = \{(0,0), (1)\}$

$U_3 = \{(0,1), (1,0), (2)\}$

$U_4 = \{(0,0,0,0), (0,0,1), (0,1,0),$

$(0,2), (1,0,0), (1,1), (2,0), (3)\}$

2) $|U_1| = 1$ $|U_2| = 2$ $|U_3| = 4$ $|U_4| = 8$

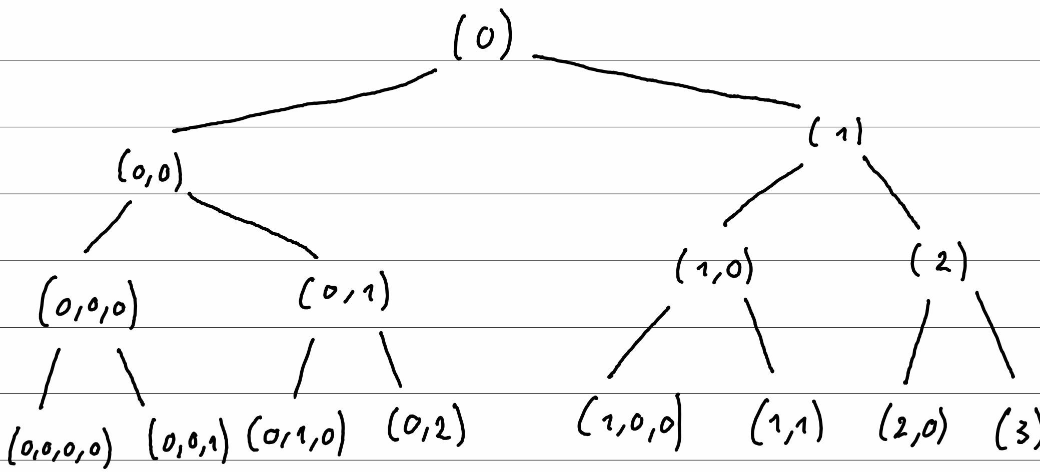
$|U_k| = 2^{k-1}$? I: $|U_1| = 2^{1-1} = 2$ OK

H: $|U_k| = 2^{k-1} \Rightarrow |U_{k+1}| = 2^{k+1-1}$

$|U_K| = 2^{K-1}$

$|U_{K+1}| = 2 \times 2^{K-1} = 2^{K-1+1} = 2^K$ ∎

car la construction des éléments suit un arbre binaire :



3) la première liste de $U_K = (0,0,0,\dots,0)$

la dernière liste de $U_K = (K-1)$

4) Code_En_Tas $(l_1, l_2, l_3, \dots, l_n)$

Si $n = 1$ et $l_1 = 0$:

retourner 1

Sinon Si $l_n = 0$:

retourner $2 *$ Code_En_tas$($

$l_1, l_2, l_3, \dots, l_{n-1})$

Sinon $2 *$ code_En_tas $(l_1, l_2, \dots,$

$l_{n-1}) + 1$

$O(\log_n(k))$

décodage : On prend un nombre, on le divise par 2. On compte le nombre de division pour trouver un pair. Ensuite pour chaque pair on ajoute un 0.

2 (1)

4 (10)

8 (100)

17 (101)

35 (102)

71 (103)

$\frac{72}{2} = 35$

$\frac{35}{2} = 17$

$\frac{17}{2} = 8$ (3)

$\frac{8}{2} = 4$ (0,3)

$\frac{4}{2} = 2$

$\frac{2}{2} = 1$ (1,0,3)

sol := ()

Tant que $K \geq 3$ faire :

cpt := 0;

Tant que K % 2 = 1 faire

K := K // 2 ; cpt++

sol := cons(cpt , sol)

K := K // 2

Exercice 9 :

$f(n) = K$ si $n = 2^K$

$f(n) = f(n/2)$ si n pair et n n'est pas puissance de 2

$f(n) = f(3n+1)$ sinon.

$A_i = \{ x \mid f(x) = i \}$

1) $A_1 = \{ 2 \}$

$A_2 = \{ 4 \}$

$A_3 = \{ 8 \}$

$A_4 = \{ 16, 5, 10, 20, 3, \ldots \}$

$A_6 = \{ 21, 42, 64, 84, \ldots \}$

2) Affiche (A_i)

pour tout n faire

Si $f(n) = i$ alors afficher n

Pour que cet algo fonctionne, il faut être sûr que f est défini pour tout n.

C'est un problème qui n'a pas de réponse.

afficher A_i :

afficher 2^i

si $(2^i - 1) \% 3 = 0$:

$L = \left\{ \frac{2^i - 1}{3} \right\}$

Sinon $L = \emptyset$

Tant que $L \neq \emptyset$ faire :

$n ::= tete(L)$

$L ::= queue(L)$

afficher n