Exercice 1 :

1. **Spécification :** $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to Prop$

on a is_fact $(0,1)$ et is_fact$(1,1)$

Pour $n, s \in \mathbb{N}$ si is_fact(n,s) alors

is_fact$(S(n), s \times S(n))$

2. **Fonction :**

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \text{ ou } 1 \\ f(p) \times S(p) & \text{si } n = S(p) \end{cases}$$

$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$

avec $p \in \mathbb{N}$

4. **Correction :** Mq :

$\forall n, s \in \mathbb{N}.\ f(n) = s \Rightarrow$ is_fact(n,s)

Schéma d'induction structurelle :

$P(n) = \forall s \in \mathbb{N}.\ f(n) = s \Rightarrow is\_fact(n, s)$

Cas de Base :

$\forall s \in \mathbb{N}.\ f(0) = s \Rightarrow is\_fact(0, s)$ (1)

$\forall s \in \mathbb{N}.\ f(1) = s \Rightarrow is\_fact(1, s)$ (2)

si $s = 1$ alors Tout est vrai.

Sinon tout est faux OK

Cas inductif :

$\forall s \in \mathbb{N}.\ f(S(n)) = s \Rightarrow is\_fact(S(n), s)$

sous l'hypothèse : $\forall s \in \mathbb{N}.\ f(n) = s \Rightarrow is\_fact(n, s)$

On calcule $f(S(n))$:

$\forall s \in \mathbb{N} .\ f(n) \times S(n) = s \Rightarrow is\_fact(S(n), s)$

On remplace s par $f(n) \times S(n)$ et on doit

démontrer : $is\_fact(S(n), f(n) \times S(n))$

On applique le cas inductif de la spécification

de is_fact et on doit démontrer :

$is\_fact(n, f(n))$

Par hypothèse d'induction $s = f(n)$

On obtient donc $f(n) = f(n)$ ∎

3. $\forall P \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow Prop . P(0,1) \Rightarrow P(1,1) \Rightarrow$
$(\forall p \in \mathbb{N} . P(p, f(p)) \Rightarrow P(S(p), f(p) \times S(p))) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} . P(n, f(n))$

5. $P(n, res) = res = f(n) \Rightarrow is\_fact(n, res)$

Cas de Base :

$$1 = f(0) \Rightarrow is\_fact(0,1)$$

$$1 = f(1) \Rightarrow is\_fact(1,1)$$

On applique le cas de Base de is_fact.

Cas inductif :

Pour $p \in \mathbb{N}$,

$$f(p) \times S(p) = res \Rightarrow is\_fact(S(p), res)$$

sous l'hypothèse d'induction :

$$f(p) = res \Rightarrow is\_fact(p, res)$$

On suppose $f(p) \times S(p) = res$ puis on applique le cas inductif de la relation is_fact et on démontre : $is\_fact(p, res)$ sous l'hypothèse $f(p) \times S(p) = res$ et $f(p) = res \Rightarrow is\_fact(p, res)$

On obtient : $\text{is\_fact}(S(1), f(1) \times S(1))$

à finir

6. Complétude : $\forall n, s \in \mathbb{N}.\ is\_fact(n,s) \Rightarrow f(n) = s$

$\forall P \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to Prop.\ P(0,0) \Rightarrow$

$\forall n, s \in \mathbb{N}.\ is\_fact(n,s) \Rightarrow P(n,s) \Rightarrow$

$P(S(n), s \times S(n))) \Rightarrow \forall n, s \in \mathbb{N}.\ is\_fact(n,s)$

$\Rightarrow P(n,s)$

On applique le schéma d'induction avec

$P(n,s) = (f(n) = s)$

Cas de Base :

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 1$$

Cas inductif :

Pour $n, s \in \mathbb{N}$,

$f(S(n)) = s \times S(n)$ sous les hypothèses d'induction : $is\_fact(n, s)$

$f(n) = s$

On calcule $f(S(n))$:

$$f(n) \times S(n) = s \times S(n)$$

On remplace s par $f(n)$:

$$f(n) \times S(n) = f(n) \times S(n) \quad \blacksquare$$