

## Exercice 51 :

Si  $A, B \in NP$  alors

$$A \cap B \in NP$$

On sait que  $A \in NP$  et  $B \in coNP$ .

1. Pour montrer qu'un problème est de la classe  $coNP$ , il faut montrer que le complémentaire du problème est  $NP$ .

$$\overline{\bar{A} \cup B} = \bar{\bar{A}} \cap \bar{B} = A \cap \bar{B} \in NP$$

Donc  $\bar{A} \cup B \in coNP$  ■

$$2. \quad \bar{B} \in NP$$

$$NP \neq Co\ NP$$

$$A \cap \bar{B} \in NP$$

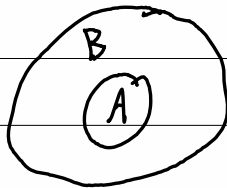
Soit  $A$  langage  $\in NP - Co\ NP$ ,

$$B = \{ \} \Rightarrow \bar{B} = \Sigma^*$$

$$\text{Donc } A \cap \bar{B} = A \notin Co\ NP$$

Si  $\bar{B}$  immense, l'intersection

$$A \cap \bar{B} = A$$



3. Soit  $A$  langage  $\in NP-coNP$ ,

$$B = \{\}$$

$$A \cup B = A \notin coNP$$

4. Soit  $A \in NP-coNP$ ,

$$B = \Sigma^*$$

$$A \cap B = A \notin coNP$$

$\Sigma^*$  neutre pour intersection

$\{\}$  neutre pour l'union.

### Exercice 53:

1.  $\Pi \in \text{NP-complet}$

$$\overline{\Pi} \in \text{NP}$$

Donc  $\overline{\overline{\Pi}} \in \text{co NP-complet}$ .

Tout problème  $\lambda \in \text{co-NP}$  se réduit  
à  $\overline{\Pi}$

$\overline{\overline{\Pi}}$  se réduit à  $\Pi$

Donc  $\lambda$  se réduit à  $\Pi$  par transitivité.

Donc  $\text{co NP} \subset \text{NP}$ .

Tout problème  $\lambda' \in NP$  se réduit à  $\Pi$

$\Pi$  se réduit à  $\overline{\Pi}$

Donc  $\lambda'$  se réduit à  $\overline{\Pi}$  par transitivité

Donc  $NP \subset co NP$ .  $\blacktriangleright$

## Exercice 61:

Cycle Hamiltonien :

Données  $G = (V, E)$

Existe-t-il un cycle Hamiltonien dans  $G$  ?

TSP : Données :  $m$  villes  $X$

coût  $v : E \rightarrow \mathbb{N}$  ,  $v(x, y)$  coût du déplacement de  $x$  à  $y$ ,  $k \in \mathbb{N}$

Question : Existe-t-il un cycle Hamiltonien de distance inférieure à  $k$  ?

$m = |V|$  ,  $X = V$  ,  $v(i, j) = 1$  si  $\{i, j\} \in E$   
 $k = m$  ,  $v(i, j) = 2$  si  $(i, j) \notin E$  (pour respecter l'inégalité triangulaire). Donc le cycle Hamiltonien se réduit au TSP. CH est NP-complet, TSP est NP, donc TSP est NP-complet.

## Exercice 62 :

Données :  $G = (V, E)$   $K \in \mathbb{N}$

Question : Existe-t-il  $S \subseteq V, |S| \leq k,$

$\forall e \in E, e \cap S \neq \emptyset$  ?

3-SAT,  $n$  variables,  $m$  clauses

$$|V| = 2n + 3m$$

$$|E| = n + 6m \quad (\text{6 car 3 arêtes entre littéral et clause et 3 arêtes dans la clause})$$

3-SAT données  $n$  variables  $x_i$

$m$  clauses  $C_j$

Existe-t-il une affectation des variables  $t_q$

chaque clause soient vérifiées?

$k = m + 2m$  (2 arêtes par clause,  
1 arête entre littéral et son opposé).

Supposons qu'il existe  $A$ , une affectation  
des variables tq toutes les clauses soient  
vérifiées. A chaque clause on associe un  
littéral à True car il y en a au moins 1 true.

On met les autres dans le recouvrement.

La réponse est OUI à 3-SAT

$\Rightarrow$  La réponse est OUI à Recouvrement  
Sommet.



Supposons un recouvrement de taille  
 $2m + n$ .

Il y a 2 sommets par triangle :  $2m$   
et 1 sommet parmi littéral et son opposé.

Il existe un recouvrement de taille  
 $2m + n \Rightarrow$  Il y a un sommet entre  
1 littéral et son opposé dans le recouvrement.

Si on donne la valeur true aux  
littéraux correspondant, on a une  
affectation valide.

### Exercice 63:

Soit  $G$  un graphe quelconque.

Soit  $G'$  le même graphe avec un sommet en plus relié à tous les sommets de degré impair de  $G$ .

Un tel sommet est de degré pair car dans un graphe  $|V| = 2|E|$

$$G' = \{ V \cup \underbrace{\{x\}}_{\text{nouveau sommet}}, E' = E \cup \{ \{x, t\} \mid d_G(t) \text{ est impair} \} \}$$

Réduction de Recouvrement de Sommet à  
Recouvrement de sommet dont tous les  
sommets sont de degré pair.

$$G(V, E), K$$

$$G' = (V', E'), K'$$

$$V' = V \cup \{x, y, z\}$$

$$E' = E \cup \{\{x, t\} \mid d_G(t) \text{ est impair}\}$$

$$\cup \{\{x, y\}, \{y, z\}, \{x, z\}\}$$

$$K' = K + 2.$$

Si  $S$  est un Recouvrement de sommets de  
 $G$  de taille  $K \Rightarrow S' = S \cup \{x, y\}$  est un

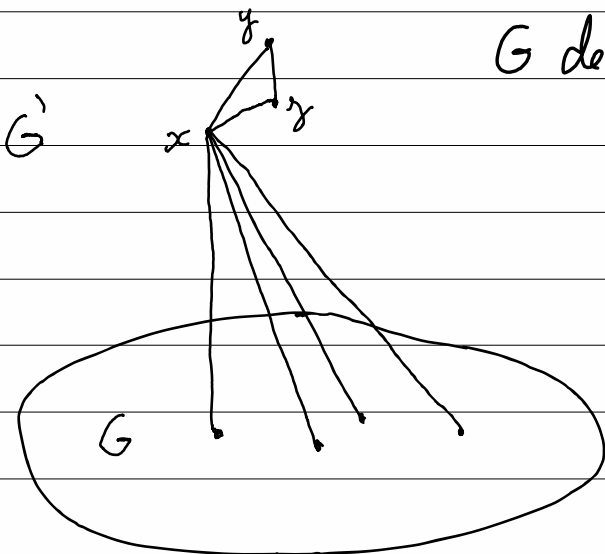
Recouvrement de sommet de  $G'$  de taille  $k+2$

$S'$  un recouvrement de taille  $k+2$  dans  $G'$ .

$S'$  contient au moins 2 sommets parmi  $\{x, y, z\}$ . On peut supposer s.p.d.g. que  $\{x, y\}$  est un recouvrement.

$S = S' - \{x, y\}$  est un recouvrement de

$G$  de taille  $k$ .



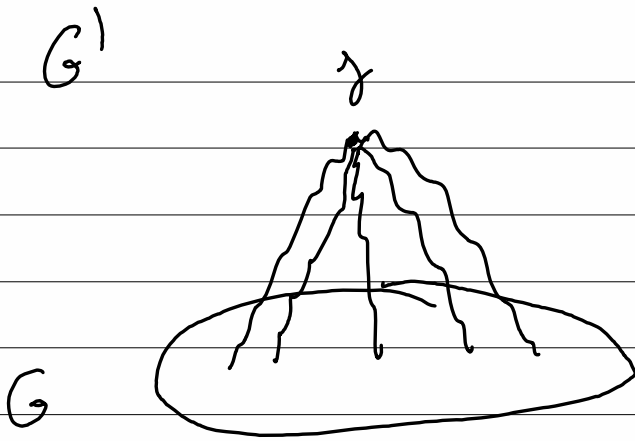
## Exercice 64 :

Un graphe bipartie est 2-Colorable.

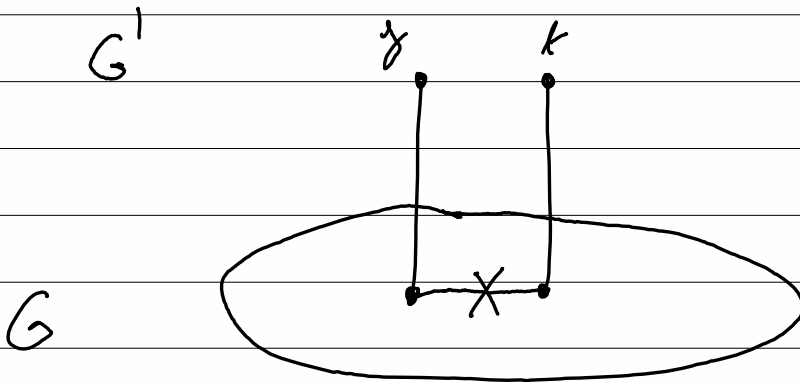
Le cycle hamiltonien bipartie est un sous problème du cycle hamiltonien donc il se réduit.

La chaîne hamiltonienne bipartie est un sous problème de la chaîne hamiltonienne donc elle se réduit.

Si j'ai un cycle hamiltonien, en ajoutant un sommet relié à tous les sommets j'obtiens :



$G'$  a un cycle hamiltonien ssi  $G$  a une chaîne Hamiltonienne.



$G'$  a une chaîne Hamiltonienne  
 $\Rightarrow G$  a un cycle.

$$G_e = (V_e, E_e)$$

$$V_e = V \cup \{y, t\}$$

$$E_e = E - \{e\} \cup \{\{x, y\}, \{y, t\}\}$$

$G_e$  a une chaîne Hamiltonienne  $\Rightarrow G$  a un cycle hamiltonien.

On peut réduire trivialement  
le cycle hamiltonien vers circuit et  
chaîne vers chemin.