

NATIONAL TAIWAN UNIVERSITY

Department of Mathematics

幾何學課程筆記

Lecture Notes on Geometry

B10901042 彭璦 W. Perng

2023 Fall

目錄

1 課程介紹 (9/6)	1
1.1 關於此筆記	1
1.2 章節概述	1
1.3 幾何學簡史	3
1.4 等周長不等式	6
2 空間中的曲線 (9/8)	8
2.1 歐氏空間	8
2.2 曲線	10
2.3 Frenet 公式	11
3 曲線的局部標準型、Cauchy-Crofton 公式與碎形幾何 (9/13)	18
3.1 曲線的局部標準型	18
3.2 Cauchy-Crofton 公式	19
3.3 碎形幾何	22
4 偽黎曼流形 (9/15)	25
4.1 偽黎曼度規	25
4.2 時空的對稱性	26
5 高斯後的空間曲面論 (9/20)	27
5.1 定義曲面的方法	27
5.2 第一標準型	29
5.3 高斯映射與第二標準型	30
5.4 關於曲率的補充	33
6 高斯曲率與高斯絕妙定理 (9/22)	34
6.1 第二標準型與正向曲率	34
6.2 曲率	35
6.3 範例	37
6.4 高斯絕妙定理	39

目錄

7 曲面論中的複變函數論 (9/27)	44
7.1 複變函數論簡介	44
7.2 複曲面的第一標準型	48
7.3 Isothermal 座標系的存在性證明	49
7.4 Isothermal 座標系的範例	52
7.5 莫比烏斯變換	60
8 定高斯曲率曲面、Liouville 方程與古典李群幾何 (10/4)	64
8.1 固定高斯曲率的曲面分類	64
8.2 Schwarzian 導數	67
8.3 古典李群	68
9 Liouville 共形變換定理 (10/6)	73
9.1 共形/保角變換	73
9.2 Liouville 共形變換定理	75
10 張量與晶體學群 (10/11)	78
10.1 張量的代數理論	78
10.2 晶體學群	85
11 張量運算與微分形式 (10/18)	97
11.1 音樂同構	97
11.2 微分形式	98
11.3 Hodge 對偶	103
12 李導數 (10/20)	106
12.1 Pullback 和 Pushforward	107
12.2 張量場的李導數	108
13 李理論 (10/25)	112
13.1 李理論	112
13.2 李群與李代數	113
13.3 Invariant 向量場	116

目錄

14 Killing 形式與 Cartan d 算子 (10/27)	118
14.1 Killing 形式	118
14.2 Cartan d 算子	120
15 Stokes 定理與 Christoffel 符號 (11/1)	127
15.1 Stokes 定理	127
15.2 Christoffel 符號	130
16 聯絡 (11/3)	132
16.1 共變微分	132
16.2 平行運輸與測地線方程	133
16.3 聯絡的計算	134
16.4 聯絡之範例	137
17 曲率 (11/8)	140
17.1 黎曼曲率張量	140
17.2 里奇曲率張量與純量曲率	143
17.3 曲率之範例	144
18 關於聯絡的討論與 Gauss-Codazzi 方程 (11/10)	148
18.1 一些關於聯絡的討論	148
18.2 Gauss-Codazzi 方程	151
19 高斯-博內定理 (11/15)	154

1 課程介紹 (9/6)

1.1 關於此筆記

此 L^AT_EX 檔案為筆者將曾旁聽的臺大數學系王金龍教授於 2023 秋所開授的幾何學一課所作之筆記，進行整理並加以補充一些闕漏細節之講義。因筆者非數學系之學生，且課程部分細節並未完全融會貫通，若有錯誤或可改進之處也請不吝指教。

此課程之參考書目為由 B. A. Dubrovin、A. T. Fomenko 與 S. P. Novikov 所著的「Modern Geometry - Methods and Applications: Part I. The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields」一書，妥妥的蘇聯數學。蘇聯數學的特點在於除了理論外，在此參考書的最後章節更著重於幾何學在其他科學中的應用，更是此書的精華。

本講義之編排將會以每週兩次授課內容為標題，以一天兩堂課的內容為一章節。且會盡量以中文書寫，並輔以適當的英文名詞翻譯與註釋。章節中不時會有教授上課提及的思考問題，可供讀者延伸。另外，因為筆者為電機工程學系之學生，部分記號將與課程中所使用的有所出入，也請注意。

1.2 章節概述

以下筆記將以每次課程分別記敘。

- 09/06：課程簡介與等周長不等式介紹。
- 09/08：介紹空間中的曲線與引 Frenet 公式。
- 09/13：介紹曲線的局部標準型、Cauchy-Crofton 公式、碎形與 Hausdorff 測度。
- 09/15：以敏考斯基時空為偽黎曼空間的範例。
- 09/20：引入第一標準型與三維空間中二維曲面的第二標準型。
- 09/22：由兩標準型定義了高斯曲率與平均曲率，且證明了高斯絕妙定理。
- 09/27：討論複流形如何使高斯曲率的計算變得更簡單。使用到複變知識。
- 10/04：Schwarzian 導數與 Liouville 方程介紹。古典李群介紹。
- 10/06：Liouville 共形變換定理，用以討論不同維度中的共形/保角變換。

- 10/11：張量簡介。簡介晶體學群與張量的關係，使用到群論知識。
- 10/18：張量的運算介紹，包含音樂同構、Cartan d 算子。此外，還介紹了微分型與 Hodge 對偶。
- 10/20：由 pushforward 與 pullback 映射，引入李導數出發的張量微積分。
- 10/25：李理論介紹，著重於 invariant 向量場。
- 10/27：探討 Killing 形式為何並證明了 Cartan d 算子的唯一性。
- 11/01：證明 Stokes 定理。介紹了第三種張量場的微分-運用 Christoffel 符號。
- 11/03：平行輸運與測地線方程介紹，並定義了 Levi-Civita 聯絡。
- 11/08：透過前幾堂課程的知識，定義黎曼曲率與其餘相關量。
- 11/10：一些關於聯絡與 Gauss-Codazzi 方程的討論。
- 11/15：證明了二維曲面的高斯-博內定理。
- 11/22：變分法介紹。內容包含歐拉-拉格朗日方程、諾特定理、哈密頓表述。
- 11/24：依循著哈密頓表述，介紹了向空間的辛幾何。
- 11/29：辛流形介紹。二階變分問題討論。
- 12/01：高維變分問題討論，引入並定義一拉格朗日量對應的能量-動量張量、四動量與角動量。
- 12/06：高維變分問題範例，包含霍奇理論、敏考斯基空間的電磁場、廣義相對論。
- 12/08：高維變分問題範例，包含最小曲面問題。
- 12/13：高維變分問題範例，包含相對論量子力學。依循著狄拉克方程的解，介紹群的 Spin 表現理論與 Clifford 代數。
- 12/15：規範場論、示性類與陳類簡介。

整學期的內容非常豐富，以高斯的幾何為出發點，依序介紹了複流形、張量與李代數，最後集大成於變分問題的討論。此課程內容對於未來所能學到的諸多內容富有啟發性，令人期待不已。好了，廢話不多說，趕緊進入到課程內容中。

1.3 幾何學簡史

最早的幾何學談論的重點就是「比例 (ratio)」。如同畢達哥拉斯 (Pythagoras) 的理論，用相似形與比例即可推出許多令人驚訝的結論。見圖 1.1a，透過比例我們即可推出著名的畢氏定理 (公式 1.1)：

$$\begin{cases} a : x = c : a \\ b : y = c : b \\ x + y = c \end{cases}$$

$$\Rightarrow b^2 = cy = c(c - x) = c^2 - c(a^2/c) = c^2 - a^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2. \quad (1.1)$$

不過畢氏定理的證明非常多，王教授最喜歡的是在三角形外延伸三個正方形的方法 (圖 1.1b)。此外，同樣是希臘時期的托勒密 (Ptolemy) 亦以其之托勒密定理 (公式 1.2) 聞名，見圖 1.2。其證明也可利用相似形與比例得到。詳細證明細節可以直接見維基百科中的構造。

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD} \quad (1.2)$$

而相似形在工程上亦是十分有用，最簡單的範例便是應用於遙測測距上。以前為了建立工程對應的數值表抑或是為了不同的目的，研發了許多不同的三角函數，遠遠不只現在的六個 (\sin 、 \cos 、 \tan 、 \cot 、 \sec 、 \csc)。

在這些種種的結論背後，幾何的目的就是為了解決一個問題並使之可以被解決而提出一個模型。這時，我們可以將目光轉向另一個升上大學的各位解決問題最愛的方法—微積分。微積分的方法是代數的技巧，而幾何則是可以賦予這些抽象的代數每一條背後的意義。當然，兩個技巧並沒有孰優孰劣之差，是相輔相成的存在。

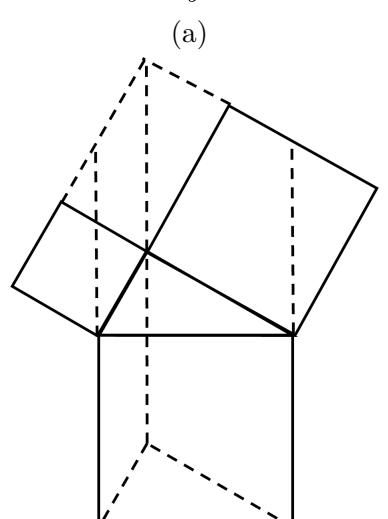
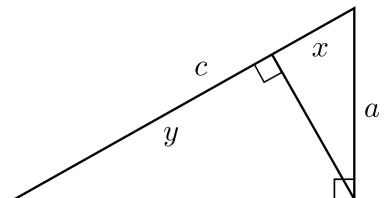


圖 1.1: 畢氏定理

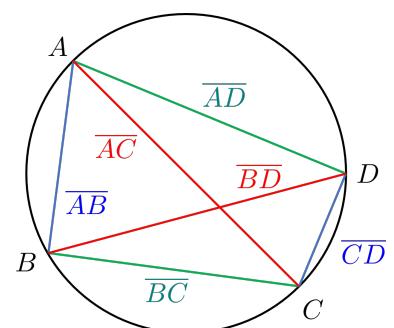


圖 1.2: 托勒密定理

一個範例便是討論光線路徑：光線的反射與折射。在探討光線從某點出發並經過表面某點後反射到另一點，常詢問該反射點滿足的條件為何。我們知道光線滿足「費馬原理」，即其將走花費時間最短的路徑。由此，可以列出一個以該點座標為變數的函數表示著光線走該路徑所花費的時間，將該函數微分得零的點即是極值點，由此可知反射點。但這樣的結論顯然沒有比幾何解更加淺顯易懂吧！透過三角形兩邊和大於第三邊即可得知反射點。幾何解固然簡單明瞭，但其卻沒有如同使用微積分那般容易延伸。換個問題，考慮光線的折射，則詢問折射點為何？前面使用的幾何解法在此變得毫無用武之地（當然有一些構造法可以讓其有用，但便顯得沒那麼直截了當而簡潔美麗了），反觀使用微積分的方法在此情形仍然適用。故說幾何與代數之間相輔相成，缺一不可。

另一個範例如下：考慮空間中有一線，線上有一動點 R 。若在線同側有兩相異點 P 、 Q ，則詢問 $\overline{PR}/\overline{QR}$ 達到最大或最小值時， R 點在哪？此題固然可以設 R 座標為變數，用代數解。但亦可發現，此題與阿波羅尼奧斯圓 (Apollonius' circles) 有關， R 點所在即是阿波羅尼奧斯圓與該直線相切的情況。

以上所探討的幾何學皆是在高斯 (Carl Friedrich Gauss, 1777~1855) 之前的幾何，遵循著歐氏幾何的腳步。在高斯之後的幾何學發生了巨大的改變，他的貢獻之一便是引入了對於「曲率 (curvature)」的討論。見圖 1.4a，考慮一個嵌入 \mathbb{R}^3 的曲面 M ，在某點 $p \in M$ 附近我們可以找出一個小區域，並畫出在那區域中每一點的單位法向量 \hat{n} 。我們可以透過某個映射將這些法向量丟到三維空間中的二維球面 S^2 上。這些法向量端點在 S^2 上張出的面積為 Ω ，同樣地，這些法向量在 M 上張出的面積為 $N(\Omega)$ ，則在該點 p 的「高斯曲率 (Gaussian curvature)」為：

$$K_p = \pm \lim_{|\Omega| \rightarrow 0} \frac{|\Omega|}{|N(\Omega)|}, \quad (1.3)$$

亦即兩個面積之間的比例。公式前面的正負號標示著法向量在 M 上的移動方向是否與在 S^2 上一致，若一致則為正，反之則為負。例如圖 1.4a 便具有正的高斯曲率；圖 1.4b

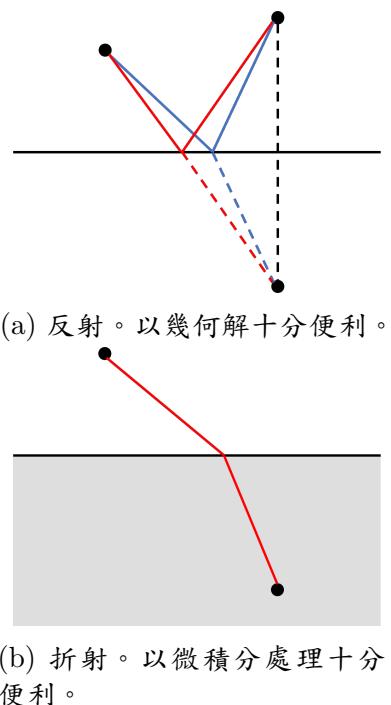


圖 1.3: 光線的反射與折射

便具有負的高斯曲率。

在高斯之後更有黎曼 (Bernhard Riemann, 1826~1866) 提出了更廣義的「黎曼曲率張量 (Riemann curvature tensor)」 R_{ijkl} 。其考慮在具有度規張量 (metric tensor) g_{ij} 流形 (manifold, 即曲面) \mathcal{M} 上的曲率，記作 (\mathcal{M}, g) 。度規張量其實就只是一個二次型 (quadratic form)，用以表示在該空間中「長度」，又稱第一標準型 (first fundamental form)，怎麼計算：

$$d^2s \equiv d^2\ell = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j. \quad (1.4)$$

過去情況下， g_{ij} 皆為正定 (positive definite)，即 d^2s 恒正，除非 $dx^i = 0$ ，稱該流形為黎曼 (Riemannian)；反之，若 g_{ij} 為不定 (indefinite)，則該流形稱為偽黎曼 (pseudo-Riemannian)。黎曼曲率張量對於相對論的探討十分重要，在課程後面會見到。

另一個會探討的幾何學上的重要定理是高斯-博內定理 (Gauss-Bonnet theorem)。其一個簡化至三維空間中二維封閉曲面 S 的版本為：

$$\int_S K dA = 2\pi\chi(S). \quad (1.5)$$

其中 K 為定義在該曲面上的高斯曲率、 $\chi(S)$ 為該曲面的歐拉示性數 (Euler characteristic)。歐拉示性數之值有關係為：

$$\chi(S) = 2 - 2g = V + F - E, \quad (1.6)$$

其中 g 為曲面 S 的虧格 (genus)，亦即曲面包住的空間 Ω 所具有的洞的個數；若 Ω 的表面 S 可切割成許多三角形的鋪面， V 為頂點 (vertex) 數、 F 為面 (face) 數、 E 為邊 (edge) 數。在更高維空間中，我們則有此定理的延伸為高斯-博內-陳定理 (Gauss-Bonnet-Chern theorem)，陳氏即是數學家陳省身。此定理大約其實就是為微積分基本定理。此定理更與代數拓撲、微分幾何、代數幾何中的示性類 (characteristic class) 和陳類 (Chern

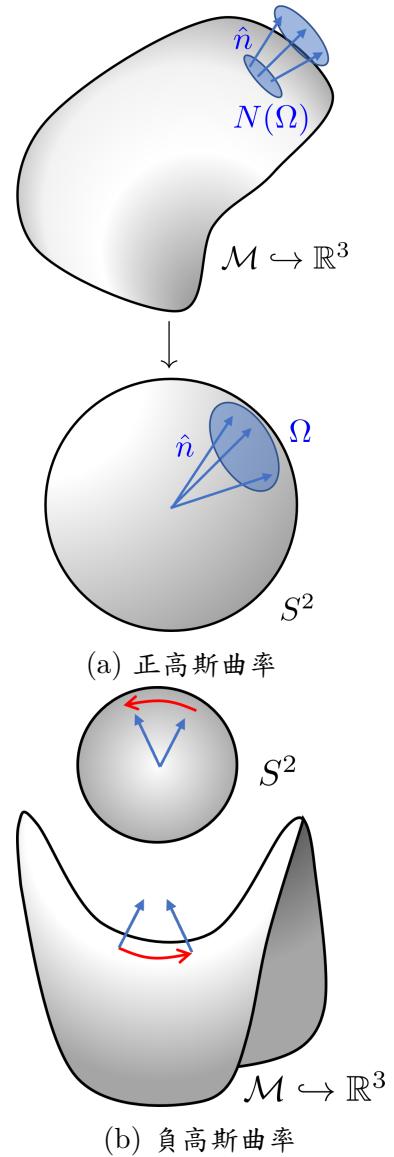


圖 1.4: 高斯曲率幾何意義

class) 大大相關。

1.4 等周長不等式

試問在平面上有面積周長為定值，則使面積最大的形狀為何？答案，不出意外地，是個圓形。此即引導出等周長不等式 (isoparametric inequality)：對於 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 有可計算的邊界 $C = \partial\Omega$ ，若記兩者大小為 $A = |\Omega|$ 、 $\ell = |C|$ ，則有

$$\ell^2 \geq 4\pi A, “=” \text{ 成立若且唯若 } \Omega \text{ 為圓形。} \quad (1.7)$$

以前使用幾何的證明如下：

- (1) 不失一般性，可以考慮 Ω 為凸 (convex)。若 Ω 為凹 (concave)，則可將凹進去的部分往外翻，使得周長不變但面積變大 (見圖 1.5a)。
- (2) 見圖 1.5b，若有兩點 $P, Q \in C$ 且平分 C ，則兩者連線 \overline{PQ} 將 Ω 切割成兩半等面積區域。否則可以在保持周長下，將面積較小的一側變成形如面積較大的另一側。
- (3) 問題簡化成圖 1.5c，極大化該半邊面積。設該半邊面積為 $A_1 + A_2 + \frac{1}{2}ab \sin \theta$ ，當 a, b 固定時，極大值發生在 $\theta = 90^\circ$ 。此分析對於半邊上任一點都成立，故 Ω 為圓。 ■

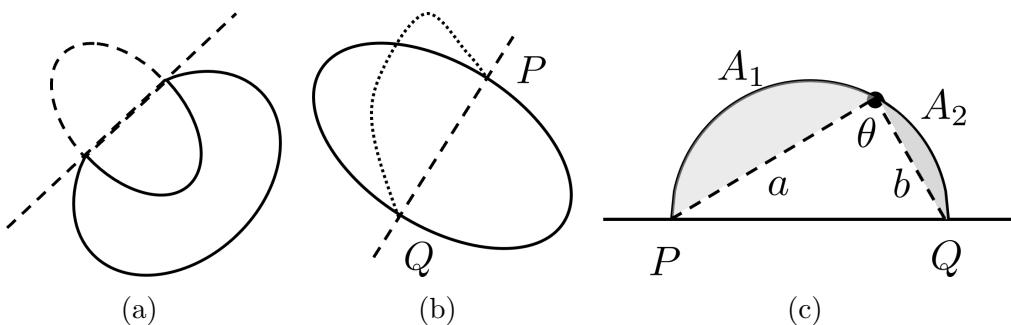


圖 1.5: 等周長不等式幾何證明

上方的幾何問題其實是有一些隱藏的問題的。首先我們根本無從確定存在性 (這依賴於緊緻性 (compactness))！此外，我們還要求 $\partial\Omega$ 是可計算長度的，我們可要求邊長要是 PC^1 (分段 C^1 ，piecewise C^1)¹ 的。

¹ 即代表該周長為分段的，且每段的參數曲線皆是一次微分連續的，亦即是 C^1 的。

但如今我們有了微積分，一個更近代的證明如下。考慮邊長在 $x-y$ 座標平面上有參數化 $(x(t), y(t)) \in (\text{PC}^1)^2, t \in [0, 2\pi]$ ，並不失一般性地讓面心 x 座標位於原點：

$$\int_0^{2\pi} x(t) dt = 0. \quad (1.8)$$

其中參數 t 滿足 $\sqrt{x'^2 + y'^2} = \ell/2\pi$ ，亦即參數化是以定速繞完該周長的。接著，根據格林定理 (Green's theorem) 我們有：

$$A = \int_0^{2\pi} xy' dt. \quad (1.9)$$

此外，有

$$\int_0^{2\pi} (x'^2 + y'^2) dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 dt = \frac{L^2}{2\pi}. \quad (1.10)$$

將兩者合併有：

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{2\pi} - 2A &= \int_0^{2\pi} (x'^2 + y'^2 - 2xy') dt \\ &= \underbrace{\int_0^{2\pi} (x'^2 - x^2) dt}_{(a)} + \underbrace{\int_0^{2\pi} (x - y')^2 dt}_{\geq 0}, \end{aligned}$$

積分式 (a) 可以透過龐加萊不等式 (Poincaré inequality)² 得知其必 ≥ 0 ，背後證明其實就是將函數進行傅立葉級數展開³。故得知：

$$\frac{L^2}{2\pi} - 2A \geq 0. \quad (1.11)$$

等號成立於：

$$\begin{cases} x = a \cos(t + \phi) & (a, \phi \in \mathbb{R}) \\ x = y' \end{cases} \Rightarrow (x, y) \text{是個圓}.$$

故得證。 ■

² 比此處提及的廣義的龐加萊可用於尋找拉普拉斯算子 Δ (亦可記為 ∇^2) 的最小特徵值 $\lambda_1(\Delta)$ 。

³ 考慮 $x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$ ， $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ 。透過帕塞瓦爾定理 (Plancherel theorem) 有 $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ 。另外有 $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x'^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2)$ 。故得證。不等式等號成立於 $a_n = b_n = 0 (\forall n > 1)$ 。

2 空間中的曲線 (9/8)

2.1 歐氏空間

定義：歐氏空間 (Euclidean space)

一歐氏空間 $\mathbb{E}^n = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 滿足：

(1) $V \cong \mathbb{R}^n$ 、

(2) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 為標準的內積 (standard inner product)。

標準內積一詞即表示對於 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ，該內積⁴計算為：

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i. \quad (2.1)$$

之後我們將會見到，定義了內積即表示定義了測量長度的方法。

但到底什麼是歐氏空間，歐幾里得時期的幾何學究竟是建構在什麼之上呢？事實上， \mathbb{E}^n 的建構完全在於其公設上。例如，什麼是 V 中的直線？對於歐幾里得，我們稱直線為 $\mathbf{v}_0 + t\mathbf{w}$ ($t \in \mathbb{R}$)。此外，我們還會想要考慮在該空間上的（一對一）變換 $f : V \rightarrow V$ 使得其保直線。這類變換，我們從線性代數中得知，是為 affine transformation(仿射變換)：

$$f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} + \mathbf{v}_0 \quad (\det(A) \neq 0). \quad (2.2)$$

更進一步，若我們要求 f 要保持 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 不變或是長度 ($|\mathbf{v}| := \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$) 不變，則會進而要求⁵ $A^\top A = \mathbb{1}$ ，抑或稱 A 屬於 n 維正交變換 (orthogonal transformation) : $O(n)$ 。

問題：請證明或證偽以下敘述：保長度的變換都是保直線的。

未來將遇到許多不同對於距離的定義，我們統稱保持距離不變的映射為「isometry(保距映射)」。

我們定義長度為 $|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ ，但這僅適用於向量上，我們能做得更好。對於任意

⁴ 我們前面幾章將以粗體表示向量，如 \mathbf{v} ，其第 i 個座標即為 v_i 。未來的章節將採用不同的標記，請小心。

⁵ $\mathbb{1}$ 表示單位矩陣。

C^1 曲線 $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ，我們可以定義其長度如下。

$$|\gamma| := \int_a^b |\gamma'(t)| dt \quad (\text{此論述需要內積的定義}) \quad (2.3)$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \quad (\max_i |t_{i+1} - t_i| \leq \delta) \quad (\text{透過分析與直線的概念}) \quad (2.4)$$

但上式是我們唯一能定義長度的方法了嗎？顯然不是的。別忘記了，前述的討論都在歐氏空間的假設下，跳脫此假設，我們可以更廣義地去定義內積：

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle := \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} v_i w_j} \quad (\text{在點 } p \in V). \quad (2.5)$$

此外， g_{ij} 可以是位置 $p \in V$ 的函數，不必處處相同，唯一的要求僅為 g_{ij} 是正定的，亦寫作 $[g_{ij}] \succ 0$ 。我們稱 g_{ij} 為黎曼度規 (Riemannian metric)⁶。而歐氏空間的度規即為 $g_{ij} = \delta_{ij}$ ，在歐氏空間中的內積可特別記為 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} := \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ ，其中：

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases} \quad (2.6)$$

為克羅內克 (Kronecker) δ 函數。由此，一條空間中的曲線 γ 具有長度：

$$|\gamma| = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n g_{ij}(\gamma(t)) \frac{d\gamma_i}{dt} \frac{d\gamma_j}{dt}} dt. \quad (2.7)$$

對於一個度規 g_{ij} ，我們可以定義「直線」為使 $|\gamma|$ 達到「最小值」的 γ (端點固定)，此與我們對於直線的直覺是相符的：

(1) 如右圖，使用 $|\gamma| = \lim \sum |\gamma_{i+1} - \gamma_i|$ ，我們可以看出 $\overline{AB} \leq \overline{AC} + \overline{BC}$ ，故是直線。

(2) 極座標下：距離最短對應到 $\theta' = 0$ ，即不「轉彎」。

$$|\gamma| = \int \sqrt{r'^2 + r^2 \theta'^2} dt \geq \int |r'| dt \Leftrightarrow \theta' = 0.$$

⁶ 或者是對於 $p \in U \overset{\text{open}}{\subset} V$ ， g_{ij} 為 U 上的黎曼度規。

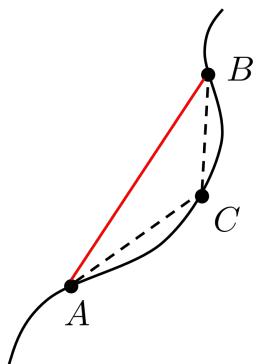


圖 2.1: 直線為最短距離

2.2 曲線

討論完直線，接下來讓我們考慮一條三維空間中的曲線：

$$\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \text{ 是 } C^k \quad (k \geq 1)。$$

我們要求該曲線是 C^k (k 次導函數連續) 的是為了接下來的討論，我們也會進而描述 k 最小需要多少才能套用接下來的討論。

對於該曲線 α 有數個參數對於描述它有很大的便利性：

- 弧長 (arc length) :

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(\tau)| d\tau。 \quad (2.8)$$

對於任何曲線速率 $s'(t) = |\alpha'(t)| > 0$ ，我們皆可以將該曲線「重新參數化 (reparameterize)」為 $\alpha(s) = \alpha(s(t))$ 。在此參數化下，曲線速率為：

$$|\alpha(s)| = \left| \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \right| = 1， \quad (2.9)$$

故可以得知，「弧長為最自然的參數」，使用弧長作為參數將大大減化以下的諸多討論。且也可輕鬆看出，無論 t 是如何參數化的，得到的弧長 s 總是不變的。

- 切向量 (tangent vector)：其定義為單位長的切向向量⁷

$$\mathbf{T}(s) := \alpha'(s) = \frac{\dot{\alpha}(t)}{|\dot{\alpha}(t)|}。 \quad (2.10)$$

可見得，切向量僅在速率不為 0 處有定義。 $\mathbf{T} \neq 0$ 即要求該曲線不能有原地迴轉之行為，此是局部參數化之要求。

- 法向量 (normal vector)：其標記為 $\mathbf{N}(s)$ ，是個單位向量，定義為滿足

$$\mathbf{T}'(s) = k\mathbf{N}(s)。 \quad (2.11)$$

比例係數 k 稱為曲率 (curvature)，是個曲線位置的函數。在三維中，我們限制曲

⁷ 往後若無特別註明變數，則對於弧長微分為 $\alpha' := \frac{d\alpha}{ds}$ ，對於其他參數微分則為 $\dot{\alpha} := \frac{d\alpha}{dt}$ 。

率 $k \geq 0$ 使得 $\mathbf{T}' \neq 0$ 下有唯一的 \mathbf{N} ；在二維中則無此限制， k 可正可負， \mathbf{N} 則是指向曲線的「左手邊」。此外，因為：

$$0 = \frac{d}{ds}(1) = \frac{d}{ds}|\mathbf{T}|^2 = 2\mathbf{T} \cdot (k\mathbf{N}) = 2k\mathbf{T} \cdot \mathbf{N}, \quad (2.12)$$

所以 \mathbf{N} 與 \mathbf{T} 垂直，故名之法向量。

- 副法向量 (binormal vector)：標記為 \mathbf{B} ，其為單位向量，定義為

$$\mathbf{B} := \mathbf{T} \times \mathbf{N}. \quad (2.13)$$

這三個向量構成一個沿著曲線移動的座標系，我們稱之為「Frenet 標架 (Frenet frame)」： $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ 。我們將在下節看到一些範例。

2.3 Frenet 公式

首先我們將考慮二維的 Frenet 標架： (\mathbf{T}, \mathbf{N}) 。因為此兩向量相互垂直，且 \mathbf{N} 的指向我們先前定義其在曲線的左手邊（也就是 \mathbf{T} 逆時鐘旋轉 90 度），故將其並排所形成的矩陣屬於特殊正交矩陣 (special orthogonal matrix)：

$$[\mathbf{T} \ \mathbf{N}] \in \text{SO}(2) := \{M \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid M^\top M = \mathbb{1}, \det(M) = 1\}. \quad (2.14)$$

此外其微分滿足：

$$(1) \ \mathbf{T}' = k\mathbf{N};$$

$$(2) \ \text{因為 } |\mathbf{N}| = 1, \text{ 所以根據同公式 2.12 的推導，必有 } \mathbf{N}' \perp \mathbf{N}, \text{ 即 } \mathbf{N}' = g\mathbf{T} (g \in \mathbb{R}).$$

該比例係數為 $g = \mathbf{N}' \cdot \mathbf{T} = (\mathbf{N} \cdot \mathbf{T})' - \mathbf{N}' \cdot \mathbf{T} = 0 - k = -k$ 。（此推導手法在接下來的討論中十分常見。）

我們可以將如上的結論⁸整理成：

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{T}^\top \\ \mathbf{N}^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}^\top \\ \mathbf{N}^\top \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

註記：因為對於 $A(t) \in \text{SO}(2)$ ，其滿足 $A^\top(t)A(t) = \mathbb{1}$ ，故有

$$\dot{A}^\top(t)A(t) + A^\top(t)\dot{A}(t) = 0.$$

考慮 $A(0) = \mathbb{1}$ 則有 $\dot{A}^\top(0) = -A(0)$ ，是為一反對稱矩陣。因此對於三維中的 Frenet 標架，我們可以大膽地假設：

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{T}^\top \\ \mathbf{N}^\top \\ \mathbf{B}^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}^\top \\ \mathbf{N}^\top \\ \mathbf{B}^\top \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

係數 k 為在所考慮點的曲率、係數 τ 為在所考慮點的撓率 (torsion)。公式 2.16 是為弗萊納公式。接下來我們將檢驗此結論之正確性。首先因為 $\mathbf{B}' \perp \mathbf{B}$ 故可假設 $\mathbf{B}' = \alpha \mathbf{T} + \beta \mathbf{N}$ 。其中 $\alpha = \mathbf{B}' \cdot \mathbf{T} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{T})' - \mathbf{B} \cdot \mathbf{T}' = 0$ ，則命 $\beta = \mathbf{B}' \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{N}'$ 為撓率。

定理：Frenet 公式

對於 \mathbb{R}^n 中的曲線 α ，存在一移動標架 $(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_n)$ 滿足：

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^\top \\ \mathbf{T}_2^\top \\ \mathbf{T}_3^\top \\ \vdots \\ \mathbf{T}_n^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & & & \\ -k_1 & 0 & k_2 & & \\ & -k_2 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & k_{n-1} \\ & & & -k_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^\top \\ \mathbf{T}_2^\top \\ \mathbf{T}_3^\top \\ \vdots \\ \mathbf{T}_n^\top \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

其中曲率 $k_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n-2$)，而 k_{n-1} 可正可負。

⁸ $\text{SO}(2)$ 為李群 (後面會提到)，故其 (單參數) 微分為其李代數作用於其。 $\text{SO}(2)$ 的李代數恰好為反對稱矩陣。

此為三維結果顯然的推廣，標架需要 n 個向量、描述該曲線需要 $n - 1$ 個曲率。該定理的證明其實等價於如何建構該標架：

- (1) 對於曲線 $\alpha(s)$ ，有第一個單位向量 $\mathbf{T}_1 := \alpha'(s)$ 。
- (2) 我們定義第二個單位向量為滿足 $\mathbf{T}'_1 = k_1 \mathbf{T}_2$ 者，其中比例係數 $k_1 \geq 0$ 。
- (3) 對於第 $i < n$ 個單位向量 \mathbf{T}_i ，因為 $\mathbf{T}'_i \perp \mathbf{T}_i$ ，所以我們可以有以下正交分解：

$$\mathbf{T}'_i = \left(\sum_{j=1}^i \alpha_j \mathbf{T}_j \right) + k_i \mathbf{T}_{i+1}, \quad (2.18)$$

定義 $k_i \geq 0$ 為第 i 個曲率。可以通過內積得知 $\alpha_j = 0$ ($\forall j < i$)、 $\alpha_i = -k_{i-1}$ ，手法與先前一致。

- (4) 上述之正交分解在 $i = n$ 時因為沒有更多維度而無法成立，故有 $k_n = 0$ ，其餘參數同樣通過內積可得。故得證。 ■

曲率與撓率的計算有以下定理：

定理：曲率與撓率計算

對於空間中的曲線 α ，若其以弧長 s 參數化，則有：

$$k(s) = |\alpha''|, \quad (2.19)$$

$$\tau(s) = -\frac{[\alpha', \alpha'', \alpha''']}{k^2}; \quad (2.20)$$

若其以弧長 t 參數化，則有：

$$k(t) = \frac{|[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}]|}{|\dot{\alpha}|^3}, \quad (2.21)$$

$$\tau(t) = -\frac{[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}]}{|[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}]|^2}. \quad (2.22)$$

其中為 $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ 向量外積、 $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ 為向量的純量三重積 (scalar triple product)。

其證明如下：

- (a) $k(s)$ ：從定義出發即可得 $k = |\mathbf{T}'| = |\alpha''|$ 。

(b) $\tau(s)$: 因為 $\mathbf{B}' = \tau \mathbf{N}$ ，且 $\mathbf{N} = \frac{1}{k} \boldsymbol{\alpha}''$ ，有

$$\begin{aligned}\tau &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{B}' = \mathbf{N} \cdot (\mathbf{T} \times \mathbf{N})' \\ &= \frac{\boldsymbol{\alpha}''}{k} \cdot \left(\boldsymbol{\alpha}' \times \frac{\boldsymbol{\alpha}''}{k} \right)' = \frac{\boldsymbol{\alpha}''}{k} \cdot \left(\boldsymbol{\alpha}'' \times \frac{\boldsymbol{\alpha}''}{k} + \boldsymbol{\alpha}' \times \frac{\boldsymbol{\alpha}'''}{k} + \boldsymbol{\alpha}'' \times \boldsymbol{\alpha}'' (k^{-1})' \right)' \\ &= \frac{\boldsymbol{\alpha}'' \cdot (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\alpha}''')}{k^2} = -\frac{[\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\alpha}''']}{k^2}.\end{aligned}$$

(c) $k(t)$:

(1) 首先觀察到 $\mathbf{T} = \dot{\boldsymbol{\alpha}} / |\dot{\boldsymbol{\alpha}}|$ ，其中 $\dot{s} = |\dot{\boldsymbol{\alpha}}|$ ，因此

$$\begin{aligned}k &= \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \frac{dt}{ds} \right| = \frac{1}{\dot{s}} |\dot{\mathbf{T}}| \\ &= \frac{1}{\dot{s}} \left| \frac{d}{dt} \frac{\dot{\boldsymbol{\alpha}}}{\dot{s}} \right| = \frac{1}{|\dot{\boldsymbol{\alpha}}|} \frac{|\ddot{\boldsymbol{\alpha}} \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{s} \ddot{\boldsymbol{\alpha}}|}{|\dot{\boldsymbol{\alpha}}|^2}.\end{aligned}$$

(2) 因為 $\dot{s} = \sqrt{\dot{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}}$ ，故有

$$\ddot{s} = \frac{\dot{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \ddot{\boldsymbol{\alpha}}}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}}} = \frac{\dot{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \ddot{\boldsymbol{\alpha}}}{|\dot{\boldsymbol{\alpha}}|}. \quad (2.23)$$

(3) 代入上式有

$$\begin{aligned}k &= \frac{1}{|\dot{\boldsymbol{\alpha}}|^3} \left| \ddot{\boldsymbol{\alpha}} \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \left(\frac{\dot{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \ddot{\boldsymbol{\alpha}}}{|\dot{\boldsymbol{\alpha}}|} \right) \dot{\boldsymbol{\alpha}} \right| = \frac{1}{|\dot{\boldsymbol{\alpha}}|^4} |(\dot{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \ddot{\boldsymbol{\alpha}} - (\dot{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \ddot{\boldsymbol{\alpha}}) \dot{\boldsymbol{\alpha}}| \\ &= \frac{1}{|\dot{\boldsymbol{\alpha}}|^4} |\dot{\boldsymbol{\alpha}} \times (\ddot{\boldsymbol{\alpha}} \times \dot{\boldsymbol{\alpha}})| = \frac{|\dot{\boldsymbol{\alpha}} \times \ddot{\boldsymbol{\alpha}}|}{|\dot{\boldsymbol{\alpha}}|^3} = \frac{|[\dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}]|}{|\dot{\boldsymbol{\alpha}}|^3}.\end{aligned}$$

(d) $\tau(t)$:

(1) 首先考慮

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{s} \mathbf{T} \\ \ddot{\boldsymbol{\alpha}} = \ddot{s} \mathbf{T} + \dot{s}^2 k \mathbf{N} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{\dot{\boldsymbol{\alpha}} \times \ddot{\boldsymbol{\alpha}}}{|\dot{\boldsymbol{\alpha}}|^3 k}. \quad (2.24)$$

(2) 在 $k(t)$ 的證明中，我們得到：

$$\alpha'' = \frac{1}{|\dot{\alpha}|} \frac{d}{dt} \alpha' = \frac{1}{|\dot{\alpha}|^4} (\dot{\alpha} \times (\ddot{\alpha} \times \dot{\alpha})) , \quad (2.25)$$

故有

$$N = \frac{\alpha''}{k} = \frac{1}{|\dot{\alpha}| |\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|} (\dot{\alpha} \times (\ddot{\alpha} \times \dot{\alpha})) . \quad (2.26)$$

(3) 最後，整合以上結論公式 2.24 與公式 2.26，得到

$$\begin{aligned} \tau &= N \cdot \dot{B} = \frac{1}{|\dot{\alpha}|^2 |\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|^2} (\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}) \cdot (\dot{\alpha} \times (\ddot{\alpha} \times \dot{\alpha})) \\ &= \frac{(\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}) \cdot \ddot{\alpha}}{|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|^2} = -\frac{[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ddot{\alpha}]}{|[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}]|^2} . \end{aligned}$$

■

我們接著來考慮幾個範例：

(a) 圓：在第一章中，公式 1.3 表示高斯對於曲率的理解，其值為法向量張角與掃過面積的比值。對於一圓，如圖 2.2a，此值為

$$k = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{A} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{R\theta} = \frac{1}{R} . \quad (2.27)$$

若以此章節所學的計算：假設圓的曲線為 $\alpha(t) = R(\cos t, \sin t)$ ，有 $\alpha(s) = R(\cos(s/R), \sin(s/R))$ ，故

$$k = \frac{1}{R} . \quad (2.28)$$

兩者結果相同。可看出「曲率半徑」為曲率的倒數。

(b) 螺旋：如圖 2.2b，考慮曲線為 $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, ct)$ ($a > 0$ 、 $c \neq 0$)，則有

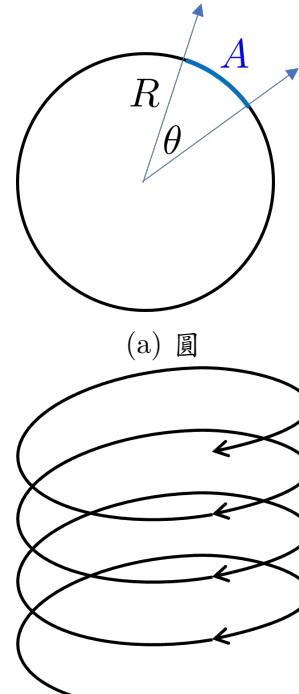


圖 2.2: 空間中的曲線

$$k(t) = \frac{a}{a^2 + c^2} , \tau(t) = -\frac{c}{a^2 + c^2} \quad (2.29)$$

皆為常數！且螺旋為唯一曲率與撓率同為定值的曲線。

我們根據上面的範例可以思考到，倘若曲線能唯一決定其曲率與撓率，那麼反過來，給定曲線的曲率、撓率以及適當的初始條件，是否能唯一決定該曲線？答案是肯定的。

定理：空間曲線的唯一性

一條存在於 \mathbb{R}^3 中並以其弧長 s 參數化的曲線 α 由其曲率 $k(s)$ 、撓率 $\tau(s)$ 與初始條件 $(\alpha(0), \alpha'(0), \alpha''(0))$ 唯一決定。

證明如下：證明流程將先證明 Frenet 標架在公式 2.16 下的演化將會保持其正交性，因此該微分方程成立於曲線上任一點。接著，即可透過常微分方程的存在唯一定理得證曲線的唯一性。

(1) 考慮向量

$$\mathbb{V}(s) = [\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}, \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}, \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}, \mathbf{T} \cdot \mathbf{N}, \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}, \mathbf{N} \cdot \mathbf{B}]^\top,$$

其有初始值 $\mathbb{V}(0) = [1, 1, 1, 0, 0, 0]^\top$ 。

(2) 若 \mathbf{T} 、 \mathbf{N} 、 \mathbf{B} 根據公式 2.16 演化，則 \mathbb{V} 的演化滿足： $\mathbb{V}' = \mathbb{S}\mathbb{V}$ ，其中

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2k & 0 & -2\tau \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\tau \\ -k & k & 0 & 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & k \\ 0 & \tau & -\tau & 0 & -k & 0 \end{bmatrix}.$$

(3) 可以注意到， $\mathbb{V}(0)$ 屬於 \mathbb{S} 的零空間 (null space) 內 (亦即 $\mathbb{S}\mathbb{V}(0) = 0$)，故 $\mathbb{V}(s) = \mathbb{V}(0)$ ，Frenet 標架維持其正交性。

(4) 若令 $\mathbb{X}^\top(s) = [\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}]^\top$ ，公式 2.16 形式上可以寫作一常微分方程 $\mathbb{X}' = \mathbb{A}\mathbb{X}$ 定義於開區間 $I = (0, \ell)$ 上並有初始值 \mathbb{X}_0 。

(5) 根據常微分方程的存在唯一定理 (懶惰可寫作 $\exists!$ 定理) :

定理：常微分方程存在唯一定理

對於曲線 $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, 與空間向量場 $\mathbf{F}(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 。若 $\mathbf{F}(x, t)$ 為 Lipschitz 連續 (Lipschitz continuous^a), 則存在唯一的曲線 $x(t)$ 滿足常微分方程：

$$\frac{d}{dt}x(t) = \mathbf{F}(x(t), t) \quad (\forall t \in I),$$

且 $x(t_0) = x_0$ 。

^a 若函數 $\mathbf{F}(x)$ 在區間 $x \in D$ 內滿足 Lipschitz 連續，則表示存在一常數 L 使得 $\mathbf{F}(x)$ 在整個探討的區間內滿足：

$$\|\mathbf{F}(x_1) - \mathbf{F}(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \quad (\forall x_1, x_2 \in D).$$

可視覺化為：該函數可以被一圓錐完整分為兩半，兩半各自在對立的圓錐內。我們稱該函數在 D 上為 L -Lipschitz。

可以得知 $X(s)$ 的存在與唯一性。故存在唯一的 T 。

(6) 由 T , 我們得以重建原曲線：

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \int_0^s T(\bar{s}) d\bar{s}, \quad (2.30)$$

並由此證明原空間曲線的唯一性。 ■

3 曲線的局部標準型、Cauchy-Crofton 公式與碎形幾何 (9/13)

3.1 曲線的局部標準型

考慮將曲線 $\alpha(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 在 $0 \in I$ 附近以弧長 s 進行泰勒展開，則可以得到：

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \alpha'(0)s + \frac{\alpha''(0)}{2!}s^2 + \frac{\alpha'''(0)}{3!}s^3 + \underbrace{R(s)}_{\in O(s^3)}, \quad (3.1)$$

且在 0 處有：

$$\alpha'(0) = \mathbf{T}_0, \quad (3.2)$$

$$\alpha''(0) = k_0 \mathbf{N}_0, \quad (3.3)$$

$$\alpha'''(0) = k'_0 \mathbf{N}_0 + k_0 (-k_0 \mathbf{T}_0 - \tau_0 \mathbf{B}_0), \quad (3.4)$$

透過空間曲線的存在唯一定理，若我們設初始條件為 $\alpha(0) = 0$ 、 $(\mathbf{T}_0, \mathbf{N}_0, \mathbf{B}_0) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ (即 \mathbb{R}^3 的慣用單位正交基底)，則該曲線可表示為：

$$\alpha(s) = \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s - \frac{k_0^2}{6}s^3 \\ \frac{k_0}{2}s^2 + \frac{k'_0}{6}s^3 \\ -\frac{k_0\tau_0}{6}s^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_x(s) \\ R_y(s) \\ R_z(s) \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

此即 α 的局部標準型 (local canonical form)。

當考慮 $s \ll 1$ 時，則有：

$$\begin{cases} x \sim s \\ y \sim \frac{k_0}{2}s^2 \\ z \sim -\frac{k_0\tau_0}{6}s^3 \end{cases}. \quad (3.6)$$

透過局部標準型，我們得以將空間中曲線的複雜行為在一鄰域內變成簡單的多項式關係，十分好分析。觀察以下三張圖：

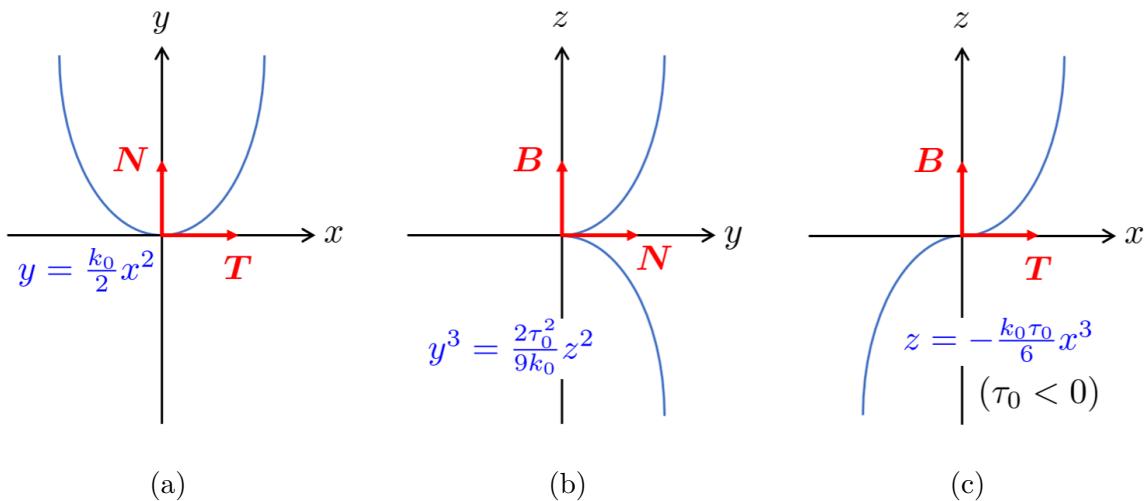


圖 3.1: 曲線的局部標準型

見圖 3.2，定義平面 P 為由 \mathbf{T} 和 \mathbf{N} 張出來的平面，則：

- (1) 從圖 3.1c 可見：當 $\tau < 0$ 時，曲線從平面 P 的 $-B$ 側進入 $+B$ 側。而當 $\tau = 0$ 時，該空間中的曲線切於平面 P 。
- (2) 從圖 3.1a 可見：若垂直於向量 \mathbf{N} 的平面將空間分為二，則曲線恆存在於 \mathbf{N} 所指向的該側。

問題：請問 \mathbb{R}^n 中的曲線的局部標準型應為何？

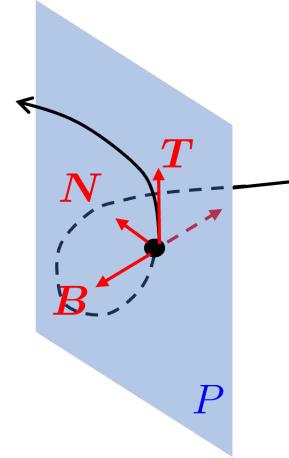


圖 3.2: Frenet 標架

3.2 Cauchy-Crofton 公式

此部分節選自由 Manfredo. P. Do Carmo 所著的「Differential Geometry of Curves & Surfaces」一書中，是為平面中曲線的一特別定理。其旨在回答以下問題：給予一條曲線 $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ，我們能否透過「數 C 與其他直線的交點數」計算出 C 的長度？直覺上應該要是可以的，因為一條曲線就是許多點的集合，知道有多少點就能對應到其長度。

一個合適的想法如下：我們或許可以賦予平面上的直線一測度 (measure)，使得計算交點數等同於將這些測度加起來並可以得到 C 的長度！那麼該如何「適當地」賦予直線測度呢？我們可以先考慮如何將直線參數化。

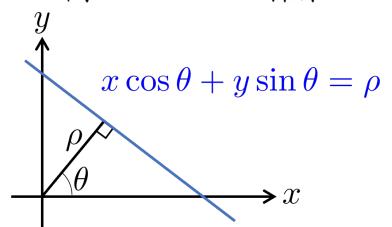


圖 3.3: 直線參數

定義：在 \mathbb{R}^2 中的直線的參數空間為：

$$\mathcal{L} = \{\mathbb{R}^2 \text{ 中所有直線}\} \cong [0, \infty) \times [0, 2\pi)。 \quad (3.7)$$

其幾何可參考圖 3.3。

我們可以賦予測度於該參數空間。此外，對於交點是如何計算的我們也需定義：

定義：給予任何曲線 $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ，我們定義其與某直線 L 的交點數 (包含重數 (multiplicity)) 的計算為：

$$\begin{aligned} n_C : \mathcal{L} &\rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\} \\ L &\mapsto n_C(L) = \#(L \cap C) \end{aligned} \quad (3.8)$$

含重數的計算即為，倘若交點為切點，則視之為交兩點。

最後，若該曲線是 rectifiable(可求長的)，亦即該曲線可以被折線段 P_i 逼近，且若該線段長度為 $\ell(P_i)$ ，則極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ell(P_i)$ 存在。此也代表該曲線長度是可計算且有限的。有以下定理：

定理：Cauchy-Crofton 公式

若 C 是 rectifiable，則：

$$\ell(C) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} n_C d\rho d\theta。 \quad (3.9)$$

一最簡單的範例為坐落在原點、半徑 R 的正圓：直線 $L(\rho, \theta)$ 與其的交點數為

$$n_C = \begin{cases} 2 & \text{當 } \rho \in [0, R] \\ 0 & \text{其餘情況} \end{cases}，$$

因此有：

$$\ell(C) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R 2 d\rho d\theta = 2\pi。$$

接著讓我們來證明此定理：因為曲線 C 可以拆分成許多折線段，我們因此僅須證明該定理成立於某長度為 ℓ 的直線段即可。

(1) 首先可以注意到測度 $d\rho d\theta$ 在 \mathbb{R}^2 的 isometry 下的雅可比行列式 (Jacobian)：考慮

變換

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

則任意直線 $L = x \cos \theta + y \sin \theta = \rho$ 將變成：

$$\mapsto \bar{L} : \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right) = \rho,$$

亦即 \bar{L} 有參數 $(\bar{\rho}, \bar{\theta}) = (\rho - a \cos \theta - b \sin \theta, \theta - \varphi)$ 。

(2) 該變換的雅可比行列式為：

$$\det \begin{pmatrix} \bar{\rho}_\rho & \bar{\rho}_\theta \\ \bar{\theta}_\rho & \bar{\theta}_\theta \end{pmatrix} = 1.$$

故測度 $d\rho d\theta$ 在 \mathbb{R}^2 的 isometry 下不變，即 $d\rho d\theta = d\bar{\rho} d\bar{\theta}$ 。

(3) 考慮 C 為坐落在 x 軸上 $[-\ell/2, \ell/2]$ 的直線段。則公式 3.2 右側為：

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} n_C d\rho d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\ell |\cos \theta|/2} 1 d\rho d\theta = \ell.$$

因為該測度在 isometry 下不變，上式對任意直線段 C 都成立。

(4) 若 $C = \bigsqcup_{i=1}^n C_i$ ，則有 $\ell(C) = \sum_{i=1}^n \ell(C_i)$ 。

(5) 對於 $C : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ 為可求長的，考慮 P_α 為 I 的劃分 (partition)，並對應出許多直線段的互斥聯集 (disjoint union) C_α 。則：

$$\ell(C) \xleftarrow[\text{rectifiable}]{\alpha \rightarrow \infty} \sum_i \ell(C_{\alpha,i}) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} n_{C_\alpha} d\rho d\theta \xrightarrow{\text{DCT}} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} n_C d\rho d\theta,$$

其中 DCT 為控制收斂定理 (dominant convergence theorem)。故得證。 ■

公式 3.2 有許多用途，其一便是用於近似某曲線的長度，常用於生物學中：以一束 X 光打 DNA，會出現干涉亮點，並可進而計算出交點數以求出 DNA 長度。

另一用途⁹為若曲線 C 是不可求長的但等式右邊有值，則可以用於定義這曲線的「長度」，例如：考慮 $C : (x, \sin(\pi/x))$ ($x \in [0, 1]$)。若該曲線 C 的弧長以公式 2.4 計算有：

$$\ell(C) \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{2}{n + \frac{1}{2}} \geq \lim_{N \rightarrow \infty} 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n + 1} \rightarrow \infty$$

為無窮大。但以 Cauchy-Crofton 公式計算則可得有限值！

此外，此公式也可推導出其他有趣的定理，如：

定理：Barbier's 定理

所有寬度固定的曲線，其周長為寬度乘上 π 。

Reuleaux 多邊形 (polygon) 即為一範例。

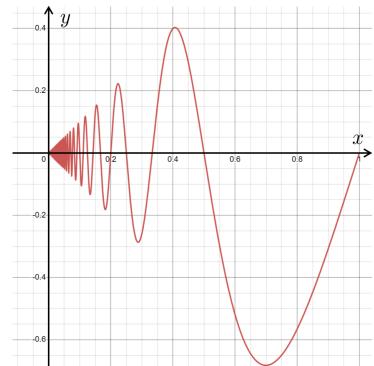


圖 3.4: $y = x \sin(\pi/x)$

問題：思考高維中的 Cauchy-Crofton 公式應為何？其用於計算什麼的體積？是利用什麼東西與其的相交計算出？

3.3 碎形幾何

碎形 (fractal)，又作分形。上網一查，想必大家都對碎形是什麼十分了解，我們看一個常見的範例—科赫曲線 (Koch curve)，如圖 3.5。

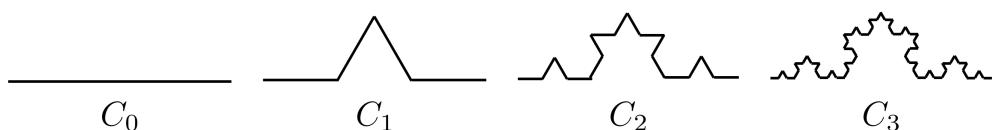


圖 3.5: 科赫曲線

我們考慮極限為 $C = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ，則其長度必為無窮大。此時我們需要考慮「長度」在此情境下有何意義。更甚，有以下定理成立：

定理：對於 $n \geq 1$ ，存在一連續滿射 $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ，亦即存在 space-filling curves，為填滿整個空間的曲線。

⁹ 接著為筆者所補充，可能有不完全處。

這看似是個非常矛盾甚至是錯誤的命題，線的維度和平面的維度根本不相同怎麼可能可以填滿呢？但其實建構填滿空間的曲線有很多方式，以下介紹常見的幾個：

(a) 科赫-曼德博建構（名稱有待確認）：

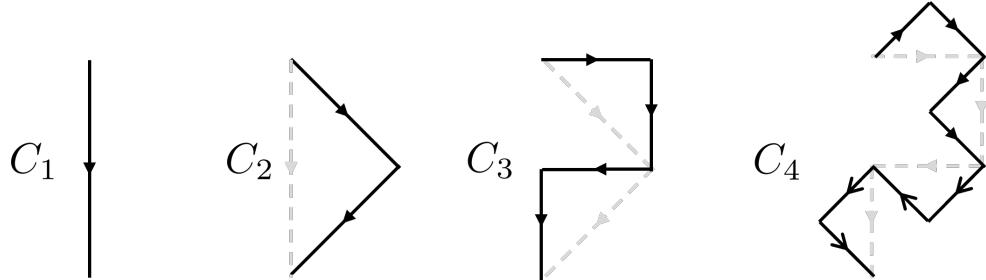


圖 3.6: 科赫-曼德博曲線

透過自相似的手法，我們將能建構 $C_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ，且可以證明 $C = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$ 存在且連續（透過均勻收斂定理）。此外，其像可以包含任意的二維方塊： $\text{im}(C) \supseteq \text{2D-box}$ ，因為空間中的方塊 $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ 為可數的，可將方塊複製並填滿整個 \mathbb{R}^2 。

(b) 希爾伯特 (Hilbert) 建構：

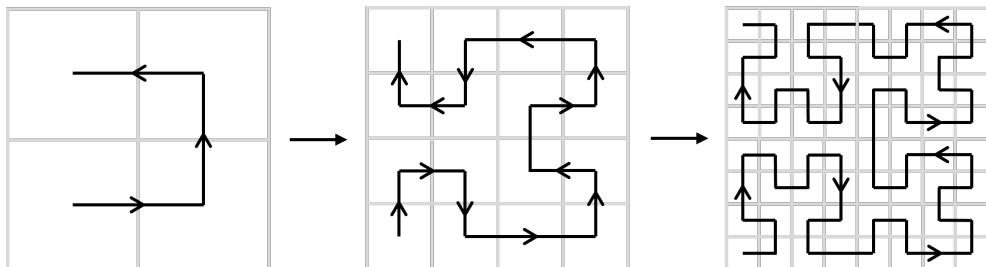


圖 3.7: 希爾伯特曲線

同樣透過均勻收斂定理，可以證明 $C = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ 存在、連續且滿射。

事實上，並不存在任何滿足 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的同胚 (homeomorphism)¹⁰，那麼問題在何處呢？更甚，我們該如何測量這些「曲線長度」才是有意義的呢？例如在勒貝格測度 (Lebesgue measure) 下，康托集合 (Cantor's set) 便有著零測度，這顯然不是我們要的。我們需要引入 Hausdorff 測度。

¹⁰ 若 $\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$)，則 $\mathbb{R} \setminus \{0\} \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ，但前者為不連通的、後者為連通 (connected) 的，而同胚將維持連通性。故矛盾。

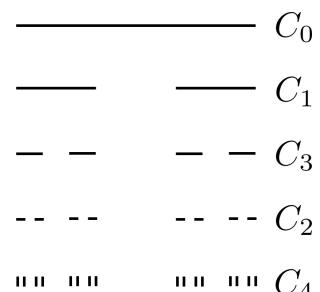


圖 3.8: 康托集合

3.3.1 Hausdorff 維度與 Hausdorff 測度

給予 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 並定住 $\mathbb{R} \ni d \geq 0$ ，且定義一集合 A 的直徑為 $\text{diam}(A)$ 。對於 $\varepsilon > 0$ ， S 的一個 ε -覆蓋 (cover) 定義為：

$$A = \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ 且 } \text{diam}(A_i) < \varepsilon, \text{ 滿足 } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = S. \quad (3.10)$$

則有 S 的「 d 維 Hausdorff 測度」為：

$$m_H^d(S) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{A: S \text{ 的 } \varepsilon\text{-覆蓋}} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(A_i))^d \right\}, \quad (3.11)$$

此值可能為無窮大 ($\inf \emptyset = \infty$)。

定義：Hausdorff 維度

對於任意 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ， $\exists! d \geq 0$ (存在唯一的) 使得：

$$\begin{cases} \forall d_1 > d \Rightarrow m_H^{d_1}(S) = 0 \\ \forall d_1 < d \Rightarrow m_H^{d_1}(S) = \infty \end{cases}, \quad (3.12)$$

則稱 d 為 S 的 Hausdorff 維度，可記為 $d_H(S)$ 。

其具有以下特性：

- (a) 對於一 n 維方塊 $[0, 1]^n$ ，其 Hausdorff 維度為 n 。
- (b) 若 $S \subseteq T$ ，則 $d_H(S) \leq d_H(T)$ 。
- (c) $d_H(S \cup T) = \max\{d_H(S), d_H(T)\}$ 。
- (d) 若 $f: S \rightarrow S$ 是個「良好」的自相似 (self-similar) 映射，則 $d_H(f(S)) = d_H(S)$ 。
- (d) 特性是滿足我們對於自相似物件維度的直覺的！範例如下：

- (a) 康托集合有 $d_H = \log_3 2$ ，且 $m_H^{\log_3 2}(C) = 1$ 。
- (b) 填滿整個 \mathbb{R}^2 的曲線具有 $d_H = 2$ ，且 $m_H^2(C) = \infty$ ，其確實填滿整個平面。

4 偽黎曼流形 (9/15)

4.1 偽黎曼度規

過去所提及的度規 g_{ij} ，不論在直角座標或極座標下，皆為正定的，故稱為黎曼度規 (Riemannian metric)。但現下我們將介紹偽黎曼度規 (pseudo-Riemannian metric)：考慮偽黎曼空間

$$\mathbb{R}_{p,q}^n \equiv \mathbb{R}_p^n \equiv \mathbb{R}^{p,q} \quad (p+q=n), \quad (4.1)$$

則對於任意兩向量 $x, y \in \mathbb{R}^{p,q}$ ，其內積定義為：

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n g_{ij} x_i y_j = \underbrace{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_p y_p}_{p\text{項}} - \underbrace{x_{p+1} y_{p+1} - x_{p+2} y_{p+2} - \cdots - x_n y_n}_{q\text{項}}. \quad (4.2)$$

對於 $n=4, p=1$ 的情況，我們稱 $\mathbb{R}^{1,3}$ 為敏考斯基時空 (Minkowski spacetime)，與相對論有大大的關聯性。其中的向量通常寫作 $x = (x^0, x^1, x^3, x^4) \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (ct, x, y, z)$ ¹¹，且其模長為：

$$|x|^2 := \langle x, x \rangle = c^2 t^2 \sum_{i=1}^3 x_i^2 = c^2 t^2 - |\mathbf{x}|^2, \quad (4.3)$$

其中用粗體 x 特別表示在 \mathbb{R}^3 中的向量，其模長是根據歐氏空間的度規所定義的。另外對於曲線 $\alpha(t) \in \mathbb{R}^{1,3}$ ，我們僅考慮滿足：

$$|\alpha'|^2 = c^2 - |\mathbf{v}|^2 > 0$$

者。其具有的物理詮釋為僅考慮時空中速度比光速慢的路徑。此外，時空依據之中向量模長的正負被區分成了三塊：

(1) $|x|^2 > 0$ ：之中的向量被稱為類時的 (time-like)。

(2) $|x|^2 = 0$ ：之中的向量被稱為類光的 (light-like)。

(3) $|x|^2 < 0$ ：之中的向量被稱為類空的 (space-like)。

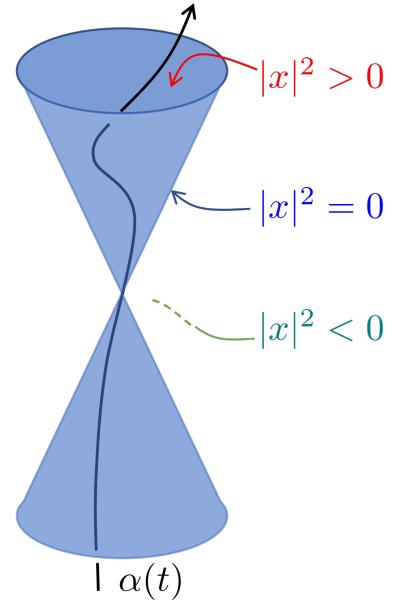


圖 4.1: 光錐

¹¹ 上下標在現在的討論中無差異，但未來討論張量時將會對於上下標有所規範。到時 $\mathbb{R}^{1,3}$ 中的向量應為上標。

但這只是一個用以描述物理現象的數學框架。我們真正好奇的是：給予一空間與其對應的二次型/內積，它具有哪些對稱性？

4.2 時空的對稱性

考慮映射 $f : \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{R}^{1,3}$ 使得對於所有 $x, y \in \mathbb{R}^{1,3}$ ，

$$Q(x - y) = Q(f(x) - f(y)) \circ \quad (4.4)$$

$Q(\cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle$ 為該空間度規對應的二次型。這樣保持長度 $Q(\cdot)$ 的變換稱為 isometry(保距映射)。對於如上的問題還考慮原點不動，我們記該 isometry¹²為 $f \in O(1, 3)$ 。

考慮最簡單的範例：勞倫茲轉換 (Lorentz transformation)，其為 $\mathbb{R}^{1,1}$ 中的 isometry。該變換線性，因此可以表示為：

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{bmatrix} \circ \quad (4.5)$$

又因其保距，故滿足：

$$x_0^2 - x_1^2 = (ax'_0 + bx'_1)^2 - (cx'_0 + dx'_1)^2 = x'^2_0 - x'^2_1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 - c^2 = 1 \\ ab - cd = 0 \\ b^2 - d^2 = -1 \end{cases} \circ$$

其通解為：

$$O(1, 1) \ni \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} \cosh \psi & \pm \sinh \psi \\ \sinh \psi & \pm \cosh \psi \end{bmatrix} \quad (\psi \in \mathbb{R}), \quad (4.6)$$

是為四個不連通 (disconnected) 的部分： $\begin{bmatrix} + & + \\ + & + \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} + & - \\ + & - \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} - & + \\ - & + \end{bmatrix}$ 與 $\begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$ 。所謂連通性是指存在一條連續曲線得以將連通空間內的每一點連接在一起。但顯然地，此四種正負號的矩陣不可能有交集，故不連通。此外，唯有符號全正是與單位矩陣連通的，故選其為勞倫茲轉換，符合物理意義。就此略過狹義相對論的細節，因為這樣太冗了且也非重點。

¹² 此標記與 \mathbb{R}^3 中的 isometry 為 $f \in O(3)$ 一樣。更廣義地， $\mathbb{R}^{p,q}$ 中的 isometry 為 $f \in O(p, q)$ 。

5 高斯後的空間曲面論 (9/20)

此節旨在探討如何理解曲面的局部行為。先前我們已經學會如何分析曲線了，現在要探討 \mathbb{R}^3 中的曲面 S ，其每點 $p \in S$ 上有各自唯一的法向量 N 與切平面 $T_p S$ 。我們可以取向量 $v \in T_p S \subseteq \mathbb{R}^3$ ，並由 v 、 N 之共平面與 S 相交得到一截痕，我們由此可以透過曲線來研究曲面。

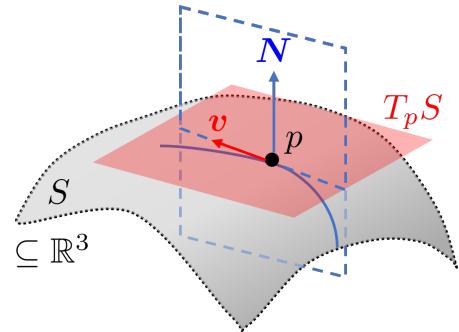


圖 5.1: 曲面與切平面

5.1 定義曲面的方法

以下我們將介紹三種得到空間中的曲面的方法，考慮 $S \subset \mathbb{R}^3$ 且為 C^∞ ，有：

- (a) 函數圖 (graph) : $z = f(x, y)$ 。
- (b) 等高線 (level set) : $F(x, y, z) = c$ 。
- (c) 參數化 (parameterise) : $(u, v) \xrightarrow{r} (x, y, z)$ 。

這三種表示法其實是等價的：

- (1) (a) \Rightarrow (b) : 考慮 $F = z - f$ 。
- (2) (b) \Rightarrow (a) : 若 $\nabla F(p) \neq 0$ ，且不失一般性令 $F_z \neq 0$ ，則透過隱函數定理 (implicit function theorem) 可以得知存在函數 f 使得 $z = f(x, y)$ 。
- (3) (a) \Rightarrow (c) : trivial¹³。
- (4) (c) \Rightarrow (a) : 同樣透過隱函數定理。倘若 $\frac{\partial r}{\partial(u,v)}$ 為滿秩 (full rank) $\Leftrightarrow \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0 \Leftrightarrow$ 可定義法向量，則局部上可有 $u = u(x, y)$ 、 $v = v(x, y)$ 。

(4) 的滿秩條件與 (2) 的梯度不為零皆為保證曲面非「奇異 (singular)」，目的是為了保證能使用隱函數定理。

接下來我們將看兩個範例：

¹³ 這是本筆記第一個 trivial 耶！

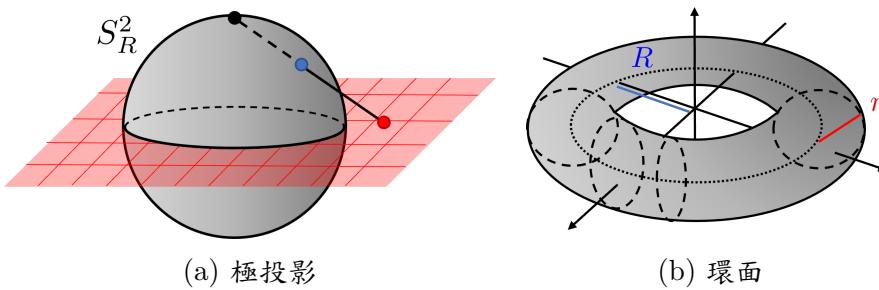


圖 5.2: 空間中的曲面

(a) 極投影 (stereographic projection)：見圖 5.2a，此投影可將半徑 R 的球面投影為平面，亦即可用平面上的變數參數化一球面。

考慮射線從球 S^2_R 的北極連接球上一點 (x, y, z) 並延伸至赤道面上一點 (u, v) ，故：

$$(x, y, z) = (1 - t) \cdot (0, 0, R) + t \cdot (u, v, 0) \rightarrow t^2(u^2 + v^2) + (1 - t)^2R^2 = R^2.$$

此外，因為我們知道其中一解必為北極點 $t = 0$ ，故可排除之得到：

$$t(u^2 + v^2) - 2R^2 + tR^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{2R^2}{u^2 + v^2 + R^2}$$

最後可得球面（排除掉北極點）的參數化為：

$$(x, y, z) = \left(\frac{2R^2}{u^2 + v^2 + R^2} \cdot u, \frac{2R^2}{u^2 + v^2 + R^2} \cdot v, \frac{u^2 + v^2 - R^2}{u^2 + v^2 + R^2} \cdot R \right) \quad (5.1)$$

$$\stackrel{R=1}{=} \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right). \quad (5.2)$$

此結果可輕易延伸為橢球面。

(b) 環面 (torus)：其形如圖 5.2b。其可表示為：

$$F(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R \right)^2 + z^2 = r^2 \quad (5.3)$$

或：

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = ((R + r \cos \phi) \cos \theta, (R + r \cos \phi) \sin \theta, r \sin \phi)^\top. \quad (5.4)$$

5.2 第一標準型

定義：第一標準型 (first fundamental form)

對於分段連續的曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ ，我們定義在 $p \in S$ 處的「第一標準型」為：

$$\begin{aligned} I_p : T_p S \times T_p S &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{R}^3} |_{T_p S} \end{aligned} \quad , \quad (5.5)$$

此即將 \mathbb{R}^3 中的內積約束 (restrict) 於 $T_p S$ 上。

對於一 S 上的曲線 $\alpha(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$ ， $\alpha(0) = p$ ，則：

$$\begin{aligned} |\alpha'(0)|^2 &= I_p(\alpha'(0)) := I_p(\alpha'(0), \alpha'(0)) \\ &= \langle \mathbf{r}_u \dot{u} + \mathbf{r}_v \dot{v}, \mathbf{r}_u \dot{u} + \mathbf{r}_v \dot{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle \dot{u}^2 + 2 \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle \dot{u} \dot{v} + \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle \dot{v}^2 . \end{aligned}$$

應注意，上式的推導假設了空間中的內積為對稱的。此外，符號上我們常記 $u = x^1$ 、 $v = x^2$ ，則有 $\mathbf{r}_u = \mathbf{r}_1$ 、 $\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_2$ 。若我們定義：

$$g_{ij} = \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j \rangle = I_p(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) , \quad (5.6)$$

則有：

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\ell}{dt} \right)^2 &= |\alpha'|^2 = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \equiv g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \\ d\ell^2 &= g_{ij} dx^i dx^j , \end{aligned} \quad (5.7)$$

故 $T_p S$ 上的內積可由 $[g_{ij}] \succ 0$ ，即第一標準型，計算。

公式 5.7 得以讓我們計算長度外，其也可以計算出面積。

定理：對於有界的 $U \subset S \subseteq \mathbb{R}^3$ ，其面積為：

$$A(U) = \int_U \sqrt{g} dx^1 dx^2 \quad (g = \det([g_{ij}]) = \det(G)) . \quad (5.8)$$

其證明如下：

(1) 定義矩陣 $A = [\mathbf{r}_u \ \mathbf{r}_v]$ ，則有 $A^T A = [g_{ij}] = G$ 。

(2) 有單位面積為 $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$ 。觀察到 $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = |\mathbf{r}_u|^2 |\mathbf{r}_v|^2 - \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle^2 = \det(G)$ ，因此有 $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{\det(G)}$ 。故得證。 ■

可以注意到，以上計算面積的方法也不限於 \mathbb{R}^3 中。其通用於計算任何 \mathbb{R}^n 中 k -參數曲面 $(x^1, \dots, x^k) \xrightarrow{r} \mathbb{R}^n$ ，其中 $g_{ij} = \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j \rangle$ 。

另外，習慣上有以下標記：

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

5.3 高斯映射與第二標準型

參考圖 5.3，對於 \mathbb{R}^3 中的曲面¹⁴ $S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ ，我們可以局部地定義每個點 $p \in S$ 的單位法向量 $\mathbf{N}_p \in S^2$ ，而若該曲面是可定向的 (orientable)，則該點與法向量的映射關係可以延伸至曲面全體。以上之映射稱為高斯映射 (Gauss map)，標記為 $\mathbf{N} : S \rightarrow S^2$ ， $p \mapsto \mathbf{N}_p$ 。

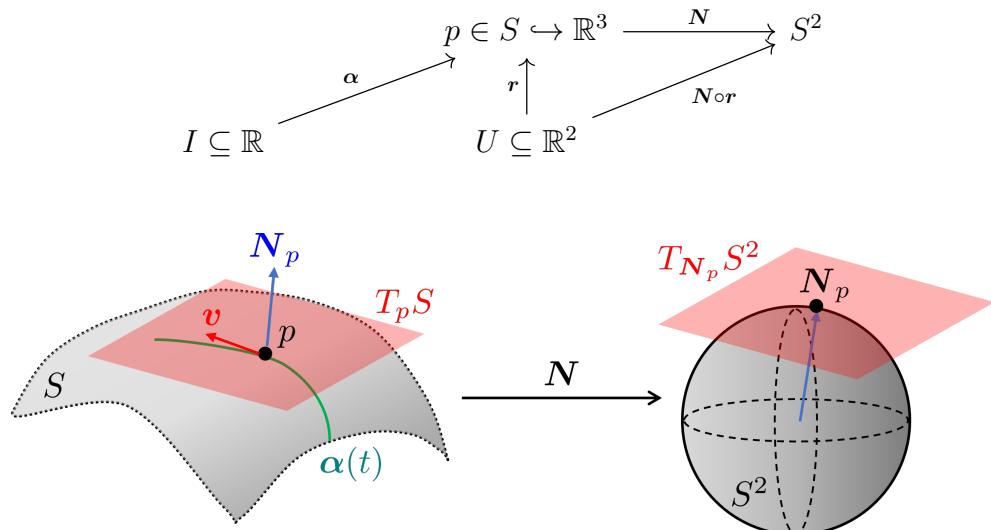


圖 5.3: 高斯映射

圖 5.3 中，曲線 $\alpha(0) = p$ 、 $\alpha'(0) = v$ 。考慮高斯映射的「微分映射 (differential

¹⁴ \$\hookrightarrow\$ 有「嵌入於 (embedded in)」之意，\$S \hookrightarrow \mathbb{R}^3\$ 即表示 \$S\$ 嵌入於 \$\mathbb{R}^3\$。

map)¹⁵ \lrcorner : $d\mathbf{N}_p : T_p S \rightarrow T_{\mathbf{N}_p} S^2$, 有

$$d\mathbf{N}_p(\mathbf{v}) := \frac{d}{dt} [\mathbf{N} \circ \alpha(t)]_{t=0} \in T_{\mathbf{N}_p} S^2, \quad (5.10)$$

其告訴我們 \mathbf{N}_p 向量在 p 處隨著 α 方向移動的方向導數為何。此外，因為兩個切空間 $T_{\mathbf{N}_p} S^2$ 和 $T_p S$ 相同，故可以寫作：

$$d\mathbf{N}_p : T_p S \rightarrow T_{\mathbf{N}_p} S^2 \equiv T_p S. \quad (5.11)$$

關於此映射有以下之定理：

定理： $d\mathbf{N}_p : T_p S \rightarrow T_p S$ 為在第一標準型下^a的自伴隨算子 (self-adjoint)。意即 $d\mathbf{N}_p$ 的伴隨 (adjoint) 算子為其自身：對於任意向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p S$ 有

$$\langle d\mathbf{N}_p(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, d\mathbf{N}_p(\mathbf{v}) \rangle. \quad (5.12)$$

^a注意，伴隨的定義仰賴於內積。

證明如下：

(1) 選取座標 $\mathbf{r}(u, v)$ ，則 $T_p S = \text{span}\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$ (在 p 點上)。

(2) 接著將左式代入切空間的基底向量： $\mathbf{u} = \mathbf{r}_i$ 、 $\mathbf{v} = \mathbf{r}_j$ ，為

$$\langle d\mathbf{N}_p(\mathbf{r}_i), \mathbf{r}_j \rangle = (\mathbf{N}_p \cdot \mathbf{r}_j)_i - (\mathbf{N}_p \cdot \mathbf{r}_{ji}) = 0 - \mathbf{N}_p \cdot \mathbf{r}_{ij},$$

因為 $\mathbf{N}_p \perp T_p S$ 。此式對 i, j 對稱，故對於基底左式等於右式。

(3) 透過基底的線性組合可以得到切空間的任意向量，故此式成立。 ■

公式 5.12 的推導最後可以看到若將等式左右同乘上 -1 會簡潔許多，得到：

$$\langle (-d\mathbf{N}_p)(\mathbf{r}_i), \mathbf{r}_j \rangle = \mathbf{N}_p \cdot \mathbf{r}_{ij}. \quad (5.13)$$

若在 p 點附近函數 \mathbf{N} 表現夠好，我們可以將 \mathbf{N}_p 軸視為 z 軸， $T_p S$ 有座標 (x, y) ，則考

¹⁵考慮 $\varphi : M \rightarrow N$ 為平滑流形間的平滑映射，則在 $x \in M$ 處 φ 的微分映射記為 $d\varphi_x$ 。其為切空間之間的線性映射，即： $d\varphi_x : T_x M \rightarrow T_{\varphi(x)} N$ 。倘若有曲線 γ 滿足 $\gamma(0) = x$ ，則有 $d\varphi(\gamma'(0)) = (\varphi \circ \gamma)'(0)$ 。

慮 $z = f(x, y) = \mathbf{N}_p \cdot \mathbf{r}$ 。且因為 $\nabla f = 0$ ，我們可以將其泰勒展開至二階項：

$$\begin{aligned} z &= f_{11}(x^1)^2 + 2f_{12}x^1x^2 + f_{22}(x^2)^2 + \dots \\ &= (\mathbf{N}_p \cdot \mathbf{r}_{11}) u^2 + 2(\mathbf{N}_p \cdot \mathbf{r}_{12}) uv + (\mathbf{N}_p \cdot \mathbf{r}_{22}) v^2 + \dots \end{aligned} \quad (5.14)$$

此為一線性函數，可由一對稱矩陣描述，故存在相互垂直的特徵向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in T_p S$ ，對應有特徵值 $\lambda_1 \geq \lambda_2$ 。

最後，我們將公式 5.13 正式定義為：

定義：第二標準型 (second fundamental form)

對於曲面 S 其上一點 p 與其約束的第一標準型 I_p ，我們定義在該點的「第二標準型」為：對於向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p S$

$$\mathbb{I}_p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\langle d\mathbf{N}_p(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle. \quad (5.15)$$

倘若曲面有參數化 $(u, v) \xrightarrow{r} S$ ，則：

$$\mathbb{I}_p(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = -\langle d\mathbf{N}_p(\mathbf{r}_i), \mathbf{r}_j \rangle = \mathbf{N}_p \cdot \mathbf{r}_{ij}. \quad (5.16)$$

其中內積即為 $I_p(,) = \langle , \rangle$ 、 $() \cdot () = \langle , \rangle_{\mathbb{R}^3}$ ^a。

^a可以注意到，關於內積是否為約束在流形上是顯而易見的，故可使用並濫用相同的符號。

其有以下特性：

- (a) $\mathbb{I}_p(\mathbf{e}_i) := \mathbb{I}_p(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = \langle -d\mathbf{N}_p(\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_i \rangle = \langle k_i \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = k_i$ 。對於 $k_1 \geq k_2$ ，我們稱兩者為主曲率 (principal curvatures)。
- (b) $\mathbb{I}_p(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$ ($i \neq j$)。
- (c) 對於任意方向向量 $\mathbf{v} = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2$ ，有

$$\mathbb{I}_p(\mathbf{v}) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta =: k_n(\mathbf{v}) \quad (5.17)$$

$k_n(\mathbf{v})$ 稱為在 \mathbf{v} 方向上的正向曲率 (normal curvature)。

5.4 關於曲率的補充

(a) k_1 、 k_2 兩主曲率分別為對應方向的截面截痕的曲率。此兩方向相互垂直，擁有的曲率也分別為正向曲率中的最大與最小值。數值上可正可負。

(b) 各方向上的正向曲率的平均值為：

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_n(\mathbf{v}) d\theta = \frac{k_1 + k_2}{2} =: H_p, \quad (5.18)$$

H_p 是為在 p 的平均曲率。

(c) 紿予一封閉邊界，可能具有該邊界的曲面有無窮多種可能性。但其中具有最小表面積的曲面 \mathcal{M} 滿足其各點平均曲率均為零，即 $H_p = 0$ ($\forall p \in \mathcal{M}$)。

(d) 曲率與眼睛的近視與散光度數極為相關¹⁶。近視是測量眼睛整體平均的屈光強度，故考量平均曲率 H_p ，是為「球曲率」：平均曲率越大，近視越深。散光起因於眼睛不同方向上屈光強度的差異，故考量曲率差值 $k_1 - k_2$ ，是為「柱曲率¹⁷」：曲率差異越大，散光越重。

¹⁶ 王金龍教授的父親為眼鏡行老闆，故他在此補充一些關於眼睛近視、散光度數的知識。

¹⁷ 曲率差異越大，眼睛越似柱子一般。故要嘲笑朋友有散光可以說其眼睛是柱狀（誤）。

6 高斯曲率與高斯絕妙定理 (9/22)

6.1 第二標準型與正向曲率

延續上週內容，我們介紹了第一標準型，對於曲面上路徑 $\mathbf{r}(t)$ 可標記為：

$$d\ell^2 = \langle \dot{\mathbf{r}} dt, \dot{\mathbf{r}} dt \rangle = g_{11} du^2 + 2g_{12} du dv + g_{22} dv^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2。 \quad (6.1)$$

此外還提及了第二標準型，將介紹其符號如下。首先，我們有高斯映射的微分映射為 $d\mathbf{N}_p : T_p S \rightarrow T_{\mathbf{N}_p} S^2 \simeq T_p S$ 。對於兩向量 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p S = \text{span}\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$ ，有第二標準型為 $\mathbb{I}_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle -d\mathbf{N}_p(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle$ 。因此，我們僅需知道對於基底 $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$ 的第二標準型即可：

$$\mathbb{I}_p(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \mathbf{N}_p \cdot \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{N}_p \cdot \mathbf{r}_{ji} =: b_{ij}。 \quad (6.2)$$

則對於任意向量 $\mathbf{v} = v^1 \mathbf{r}_1 + v^2 \mathbf{r}_2$ 、 $\mathbf{w} = w^1 \mathbf{r}_1 + w^2 \mathbf{r}_2$ ，有：

$$\mathbb{I}_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^2 b_{ij} v^i w^j \equiv b_{ij} v^i w^j。 \quad (6.3)$$

故對於曲面上路徑 $\mathbf{r}(t)$ ，可記第二標準型為：

$$\langle \ddot{\mathbf{r}} dt^2, \mathbf{N}_p \rangle = b_{11} du^2 + 2b_{12} du dv + b_{22} dv^2 = L du^2 + 2M du dv + N dv^2。 \quad (6.4)$$

此外，因為 $d\mathbf{N}_p$ 為自伴隨算子，我們有關於正向曲率的歐拉公式¹⁸：

$$k_n(\mathbf{v}) = \mathbb{I}_p(\mathbf{v}) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta。 \quad (6.5)$$

且若對於曲線 $\alpha(s) = \mathbf{r}(u(s), v(s))$ ，讓 $\mathbf{v} = \alpha'(0)$ ，則根據公式 2.16 有：

$$k_n(\mathbf{v}) = \mathbb{I}_p(\alpha'(0)) = \mathbf{N}_p \cdot \alpha''(0) = \mathbf{N}_p \cdot (k\mathbf{N}) = k \cos \phi。 \quad (6.6)$$

由公式 6.6 我們始得見正向曲率的幾何意義。見圖 6.1。 k 為曲線 α 在 p 處的曲率、 \mathbf{N} 則為該處 Frenet 標架中的法向量。因為我們希望 $k_n(\mathbf{v})$ 表示的是「以 \mathbf{v} 與 \mathbf{N}_p 兩向量

¹⁸ 是的，沒錯，又是歐拉 (Leonhard Euler)。

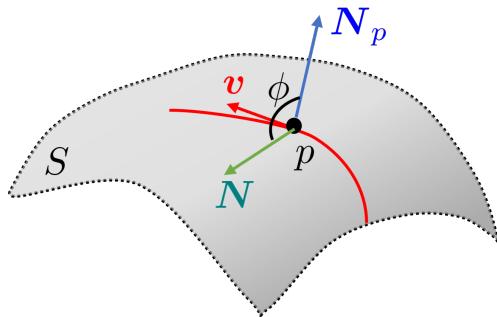


圖 6.1: 正向曲率

張出的平面」和曲面的相交截痕的曲率。故在 α 的撓率不為零下， N 將不會與 N_p 平行，需要將曲率 k 「投影」在「正向」 N_p 上才能得到對應的平面和曲面截痕曲率。由此，我們稱 k_n 為「正向」曲率。

最後補充：在 \mathbb{R}^3 中，第二標準型可表示為

$$b_{ij} = \mathbf{N}_p \cdot \mathbf{r}_{ij} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|} \cdot \mathbf{r}_{ij} = \frac{[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_{ij}]}{\sqrt{g}}. \quad (6.7)$$

6.2 曲率

先前討論過，因為（負的）高斯映射的微分映射 $-d\mathbf{N}_p$ 為自伴隨算子，其具有兩特徵值 k_1 與 k_2 ，且對應的特徵向量垂直，故我們可以定義以下兩種曲率：

$$\text{高斯曲率} : K_p := \det(-d\mathbf{N}_p) = k_1 \cdot k_2; \quad (6.8)$$

$$\text{平均曲率} : H_p := \frac{1}{2} \text{tr}(-d\mathbf{N}_p) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2). \quad (6.9)$$

此兩者¹⁹十分重要，而高斯曲率又會是本節討論的重點。

接下來，我們將考慮在基底 $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$ 下 $-d\mathbf{N}_p$ 的矩陣表示法。

(1) 因為 $-d\mathbf{N}_p : T_p S \rightarrow T_p S$ ，所以有：

$$\begin{cases} -d\mathbf{N}_p(\mathbf{r}_1) = a\mathbf{r}_1 + c\mathbf{r}_2 \\ -d\mathbf{N}_p(\mathbf{r}_2) = b\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2 \end{cases} \Leftrightarrow (-d\mathbf{N}_p) \left(\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

¹⁹ \det 為取算子的行列式值； tr 為取算子的跡 (trace)。

其中 $-\mathrm{d}\mathbf{N}_p$ 的矩陣表示法即為：

$$[-\mathrm{d}\mathbf{N}_p] := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

(2) 套用第二標準型之定義有：

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &:= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) & \mathbb{I}_p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ \mathbb{I}_p(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) & \mathbb{I}_p(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^\top \\ \mathbf{r}_2^\top \end{bmatrix} (-\mathrm{d}\mathbf{N}_p) \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^\top \\ \mathbf{r}_2^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =: \mathbf{G} \cdot [-\mathrm{d}\mathbf{N}_p]. \end{aligned}$$

(3) 故有 $-\mathrm{d}\mathbf{N}_p$ 的矩陣表示法為：

$$[-\mathrm{d}\mathbf{N}_p] = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{Q}. \quad (6.10)$$

由以上推導也可看出以下定理：

定理：高斯曲率可以使用第一與第二標準型表示為：

$$K_p := \frac{\det(\mathbf{Q})}{\det(\mathbf{G})} = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \quad (6.11)$$

上式其實與我們先前公式 1.3 與對於高斯曲率的幾何意義是相符的。 $\det(-\mathrm{d}\mathbf{N}_p)$ 即表示經過線性變換 $-\mathrm{d}\mathbf{N}_p$ 下面積的變化率。觀察圖 1.4a 及圖 1.4b，可見該變化率即為：

$$K_p = \det(-\mathrm{d}\mathbf{N}_p) = \lim_{|\Omega| \rightarrow 0} \frac{|-\mathrm{d}\mathbf{N}_p(\Omega)|}{|\Omega|} = \lim_{|\Omega| \rightarrow 0} \frac{|\Omega|}{|(-\mathrm{d}\mathbf{N}_p)^{-1}(\Omega)|} = \text{公式 1.3}.$$

6.3 範例

以下將計算兩種曲面的高斯曲率與平均曲率。

(a) 函數圖 $z = f(x, y)$ ：為方便，記 $x_1 = x$ 、 $x_2 = y$ 、 $\mathbf{r} = (x, y, f(x, y))$ 。

(1) 第一步為求出第一標準型，有：

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = (1, 0, f_1) \\ \mathbf{r}_2 = (0, 1, f_2) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} d\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 dx + \mathbf{r}_2 dy = (dx, dy, f_1 dx + f_2 dy) \\ d\ell^2 = (1 + f_1^2) dx^2 + (2f_1 f_2) dx dy + (1 + f_2^2) dy^2 \end{cases}.$$

故有：

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 + f_1^2 & f_1 f_2 \\ f_1 f_2 & 1 + f_2^2 \end{bmatrix}. \quad (6.12)$$

(2) 接著因為 $\mathbf{r}_{11} = (0, 0, f_{11})$ 、 $\mathbf{r}_{12} = (0, 0, f_{12})$ 、 $\mathbf{r}_{22} = (0, 0, f_{22})$ ，且有法向量：

$$\mathbf{N}_p = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|} = \frac{(-f_1, -f_2, 1)}{\sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2}},$$

故有第二標準型：

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2}} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

(3) 高斯曲率為：

$$K_p = \frac{\det(\mathbf{Q})}{\det(\mathbf{G})} = \frac{f_{11} f_{22} - f_{12}^2}{(1 + f_1^2 + f_2^2)^2}. \quad (6.14)$$

(4) 平均曲率計算則較為複雜，可先求出 $[-d\mathbf{N}_p] = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{Q}$ 後，再求其跡為：

$$2H_p = \text{tr}[-d\mathbf{N}_p] = \frac{f_{11}(1 + f_2^2) + f_{22}(1 + f_1^2) - 2f_1 f_2 f_{12}}{(1 + f_1^2 + f_2^2)^{3/2}} \quad (6.15)$$

$$= \nabla \cdot \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = \nabla \cdot (-\mathbf{N}_p). \quad (6.16)$$

可以見得平均曲率為（負的）法向量的散度（divergence），此結果將與之後會提及的李代數、李群有關：從中可以得之矩陣的跡與散度息息相關。

(b) 旋轉體曲面 (surface of revolution)：考慮該旋轉體曲面為坐落在 x - z 平面上的曲線 $\alpha(v) = (\varphi(v), \psi(v))$ ，沿著 z 軸旋轉而得。故有曲面參數式：

$$\mathbf{r}(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v)) \quad (v \in \mathbb{R}, u \in [0, 2\pi]).$$

且同樣記 $x_1 = u$ 、 $x_2 = v$ ，且 $(\cdot)' = \frac{d}{dv}(\cdot)$ 。

(1) 第一標準型為：

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{r}_1 = (-\varphi \sin u, \varphi \cos u, 0) \\ \mathbf{r}_2 = (\varphi' \cos u, \varphi' \sin u, \psi') \end{array} \right\} \longrightarrow d\ell^2 = \varphi^2 du^2 + (\varphi'^2 + \psi'^2) dv^2$$

(2) 為了往後公式的簡潔，令 v 為曲線 α 的弧長，因此有 $\varphi'^2 + \psi'^2 = 1$ 。第一標準型也可簡化為：

$$d\ell^2 = \varphi^2 du^2 + dv^2 \iff \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \varphi^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.17)$$

(3) 接著為第二標準型：有

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{r}_{11} = (-\varphi \cos u, -\varphi \sin u, 0) \\ \mathbf{r}_{12} = (-\varphi' \sin u, \varphi' \cos u, 0) \\ \mathbf{r}_{22} = (\varphi'' \cos u, \varphi'' \sin u, \psi'') \\ \mathbf{N}_p = \frac{(\psi' \cos u, \psi' \sin u, -\varphi')}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} = (\psi' \cos u, \psi' \sin u, -\varphi') \end{array} \right\}.$$

(4) 因此 $b_{11} = -\varphi\psi'$ 、 $b_{12} = 0$ 、 $b_{22} = (\varphi''\psi' - \varphi'\psi'') = \varphi''\psi' + \varphi'(\varphi'\varphi''/\psi') = \varphi''/\psi'$ ，其中 b_{22} 運用了 $(\varphi'^2 + \psi'^2)' = 0$ 。有第二標準型為：

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\varphi\psi' & 0 \\ 0 & \varphi''/\psi' \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

(5) 因此高斯映射的微分映射為：

$$[-dN_p] = G^{-1}Q = \begin{bmatrix} -\psi'/\varphi & 0 \\ 0 & \varphi''/\psi' \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

(6) 最後可得高斯曲率與平均曲率分別為：

$$\begin{cases} K_p = -\frac{\varphi''}{\varphi} \\ H_p = \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi''}{\psi'} - \frac{\psi'}{\varphi} \right) \end{cases}. \quad (6.20)$$

6.4 高斯絕妙定理

到目前為止，我們僅考慮了 $S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ 中的曲率，那麼要是在其他空間如 $\mathbb{R}^{1,2}$ 中呢？此外，我們對於曲率的探討皆是外稟 (extrinsic) 的，其仰賴於我們如何將該曲面放置於空間中，都必須先找出曲面的「法向量」才能得到第二標準型與曲率。

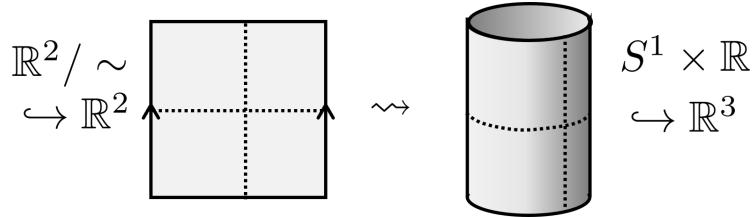


圖 6.2: 將平面嵌入空間中

考慮如圖 6.2，將平面嵌入為空間中的圓柱。可以見得在嵌入前，高斯曲率與平均曲率皆為零；然嵌入後，平均曲率變為正、高斯曲率不變。由此可知，雖然兩者皆為曲率，但其實兩者本質上截然不同。平均曲率依賴於如何將曲面嵌入於空間中，故稱其為外稟幾何 (extrinsic geometry) 性質。而高斯曲率僅依賴於曲面的第一標準型，並在保距的嵌入變化 (isometric embedding) 下保持不變，故稱其為內稟幾何 (intrinsic geometry) 性質。上述結果即為高斯絕妙定理：

定理：高斯絕妙定理 (Theorema Egregium)

K_p 僅依賴於曲面的第一標準型 I_p (即 $d\ell^2$)，故其為內稟的。因此 K_p 在局部的 isometry 下不變。

一證明如下：

(1) 對於第一標準型為 $d\ell^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ 者，令 $x_1 = u$ 、 $x_2 = v$ 。

(2) 高斯曲率為：

$$\begin{aligned} K_p &:= \frac{\det(Q)}{\det(G)} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{1}{\det(G)^2} \left(\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_{11} \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_{22} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_{12} \end{array} \right|^2 \right) \\ &= \frac{1}{\det(G)^2} \left(\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_1^\top \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_1^\top \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_1^\top \mathbf{r}_{22} \\ \mathbf{r}_2^\top \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2^\top \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_2^\top \mathbf{r}_{22} \\ \mathbf{r}_{11}^\top \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_{11}^\top \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_{11}^\top \mathbf{r}_{22} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{r}_1^\top \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_1^\top \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_1^\top \mathbf{r}_{12} \\ \mathbf{r}_2^\top \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2^\top \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_2^\top \mathbf{r}_{12} \\ \mathbf{r}_{12}^\top \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_{12}^\top \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_{12}^\top \mathbf{r}_{12} \end{array} \right| \right) \\ &= \frac{1}{\det(G)^2} \left(\left| \begin{array}{ccc} E & F & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{22} \\ F & G & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_{22} \\ \mathbf{r}_{11} \cdot \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_{11} \cdot \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_{11} \cdot \mathbf{r}_{22} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc} E & F & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{12} \\ F & G & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_{12} \\ \mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{r}_{12} \end{array} \right| \right) \end{aligned}$$

其中第二標準型的計算運用了公式 6.7。

(3) 顯然地，下一步即是去考慮上方所有的內積為何：

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{11} = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1)_1 = \frac{1}{2} E_1 \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_{22} = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2)_2 = \frac{1}{2} G_2 \\ \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{12} = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1)_2 = \frac{1}{2} E_2 \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_{12} = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2)_1 = \frac{1}{2} G_1 \\ \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{22} = (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)_2 - \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_{12} = F_2 - \frac{1}{2} G_1 \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_{11} = (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)_1 - \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{12} = F_1 - \frac{1}{2} E_2 \end{array} \right. .$$

(4) 套用第三步的結果至第四步最後，接續有：

$$\begin{aligned}
 K_p &= \frac{1}{\det(\mathbf{G})^2} \left(\begin{vmatrix} E & F & F_2 - \frac{1}{2}G_1 \\ F & G & \frac{1}{2}G_2 \\ \frac{1}{2}E_1 & F_1 - \frac{1}{2}E_2 & \mathbf{r}_{11} \cdot \mathbf{r}_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E & F & \frac{1}{2}E_2 \\ F & G & \frac{1}{2}G_1 \\ \frac{1}{2}E_2 & \frac{1}{2}G_1 & \mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{r}_{12} \end{vmatrix} \right) \\
 &= \frac{1}{\det(\mathbf{G})^2} \left(\begin{vmatrix} E & F & F_2 - \frac{1}{2}G_1 \\ F & G & \frac{1}{2}G_2 \\ 0 & 0 & \mathbf{r}_{11} \cdot \mathbf{r}_{22} - (\dots) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E & F & \frac{1}{2}E_2 \\ F & G & \frac{1}{2}G_1 \\ 0 & 0 & \mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{r}_{12} - (\dots) \end{vmatrix} \right) \\
 &= \frac{1}{\det(\mathbf{G})^2} \left(\begin{vmatrix} E & F & F_2 - \frac{1}{2}G_1 - \frac{1}{2}E_2 \\ F & G & \frac{1}{2}G_2 - \frac{1}{2}G_1 \\ 0 & 0 & \mathbf{r}_{11} \cdot \mathbf{r}_{22} - \mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{r}_{12} - (\dots) \end{vmatrix} \right),
 \end{aligned}$$

其中 (\dots) 項皆為以 E 、 F 、 G 及其微分所表示。

(5) 最後即是要證明可將 $\mathbf{r}_{11} \cdot \mathbf{r}_{22} - \mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{r}_{12}$ 也以 E 、 F 、 G 及其微分所表示。觀察到：

$$\mathbf{r}_{11} \cdot \mathbf{r}_{22} - \mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{r}_{12} = (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{22})_1 - (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})_2 = \left(F_2 - \frac{1}{2}G_1 \right)_1 - \left(\frac{1}{2}E_2 \right)_2.$$

(6) 可見得， K_p 完全可以由第一標準型與其微分所表示。故得證。 ■

上方推導中，我們僅使用了公式 6.11 作為高斯曲率的定義，並無假設該曲面所擁有的第一標準型與嵌入的空間是否為 \mathbb{R}^3 、 $\mathbb{R}^{1,2}$ 或其他空間。故高斯絕妙定理在這些情況下皆成立。

根據上方的推導，我們確實可以將高斯曲率僅以第一標準型表示，然其公式複雜無比。我們將在此介紹兩個特殊情況下較乾淨的表示法。

定理：特殊第一標準型下的高斯曲率

(a) 若對於第一標準型為 $d\ell^2 = E du^2 + F dv^2$ 者，有高斯曲率為：

$$K_p = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_2}{\sqrt{EG}} \right)_2 + \left(\frac{G_1}{\sqrt{EG}} \right)_1 \right) . \quad (6.21)$$

(b) 若對於第一標準型為 $d\ell^2 = \rho (du^2 + dv^2)$ 者，有高斯曲率為：

$$K_p = -\frac{1}{2\rho} \nabla^2 (\ln \rho) . \quad (6.22)$$

(c) 若對於第一標準型為 $d\ell^2 = du^2 + G dv^2$ 者，有高斯曲率為：

$$K_p = -\frac{(\sqrt{G})_{11}}{\sqrt{G}} . \quad (6.23)$$

證明如下：

(a) $d\ell^2 = E du^2 + G dv^2$:

(1) 從先前對於高斯絕妙定理的推導有：

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{1}{\det(G)^2} \begin{pmatrix} E & 0 & -\frac{1}{2}G_1 \\ 0 & G & \frac{1}{2}G_2 \\ \frac{1}{2}E_1 & -\frac{1}{2}E_2 & \mathbf{r}_{11} \cdot \mathbf{r}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 & \frac{1}{2}E_2 \\ 0 & G & \frac{1}{2}G_1 \\ \frac{1}{2}E_2 & \frac{1}{2}G_1 & \mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{r}_{12} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{E^2 G^2} \begin{pmatrix} E & 0 & -\frac{1}{2}G_1 \\ 0 & G & \frac{1}{2}G_2 \\ 0 & 0 & \mathbf{r}_{11} \cdot \mathbf{r}_{22} + \frac{1}{4} \frac{E_1 G_1}{E} + \frac{1}{4} \frac{E_2 G_2}{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 & \frac{1}{2}E_2 \\ 0 & G & \frac{1}{2}G_1 \\ 0 & 0 & \mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{r}_{12} - \frac{1}{4} \frac{E_2^2}{E} - \frac{1}{4} \frac{G_1^2}{G} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{E^2 G^2} \begin{pmatrix} E & 0 & -\frac{1}{2}E_2 - \frac{1}{2}G_1 \\ 0 & G & \frac{1}{2}G_2 - \frac{1}{2}G_1 \\ 0 & 0 & (\mathbf{r}_{11} \cdot \mathbf{r}_{22} - \mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{r}_{12}) + \frac{1}{4} \left(\frac{E_1 G_1}{E} + \frac{E_2 G_2}{G} + \frac{E_2^2}{E} + \frac{G_1^2}{G} \right) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

(2) 接著有：

$$\mathbf{r}_{11} \cdot \mathbf{r}_{22} - \mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{r}_{12} = -\frac{1}{2} (G_{11} + E_{22}) \circ.$$

(3) 故：

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{1}{EG} \left(-\frac{1}{2} (G_{11} + E_{22}) + \frac{1}{4} \left(\frac{E_1 G_1}{E} + \frac{E_2 G_2}{G} + \frac{E_2^2}{E} + \frac{G_1^2}{G} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_2}{\sqrt{EG}} \right)_2 + \left(\frac{G_1}{\sqrt{EG}} \right)_1 \right) \circ. \end{aligned}$$

可展開後式確認。故得證。 ■

(b) $d\ell^2 = \rho (du^2 + dv^2)$:

(1) 將公式 6.21 代入 $E = G = \rho$ ，有：

$$K_p = -\frac{1}{2\rho} \left(\left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)_1 + \left(\frac{\rho_2}{\rho} \right)_2 \right) = -\frac{1}{2\rho} ((\ln \rho)_{11} + (\ln \rho)_{22}) = -\frac{1}{2\rho} \nabla^2 (\ln \rho) \circ.$$

故得證。 ■

(c) $d\ell^2 = du^2 + G dv^2$:

(1) 將公式 6.21 代入 $E = 1$ 、 $A = \sqrt{G}$ ，有：

$$K_p = -\frac{1}{2A} \left(\frac{(A^2)_1}{A} \right)_1 = -\frac{1}{2A} (2A_1)_1 = -\frac{A_{11}}{A} \circ.$$

故得證。 ■

另外，第一標準型為 $d\ell^2 = \rho (du^2 + dv^2)$ 者，此類座標系 (u, v) 被稱為「isothermal 座標系」。因其高斯曲率的簡潔，它在未來的討論中其具有相當美妙的地位。

7 曲面論中的複變函數論 (9/27)

先前的討論僅適用於 \mathbb{R}^n 中的 $n - 1$ 維曲面 (只要能定義法向量)。對於曲面，最重要的目標之一便是計算出其高斯曲率，這對於做理論是十分重要的，例如高斯絕妙定理與未來會提到的高斯-博內定理。但在這些眾多的情況下，我們已見過曲面的高斯曲率是極難計算的，有什麼情況是好算的呢？有的！我們先前已看過其中一個情況便是 isothermal 座標系下： $d\ell^2 = \rho (du^2 + dv^2)$ 。那麼，究竟該如何取參數使得 $r_1 \perp r_2$ 且 $E = G$ 呢？答案是，根據高斯，透過「複數」座標系。

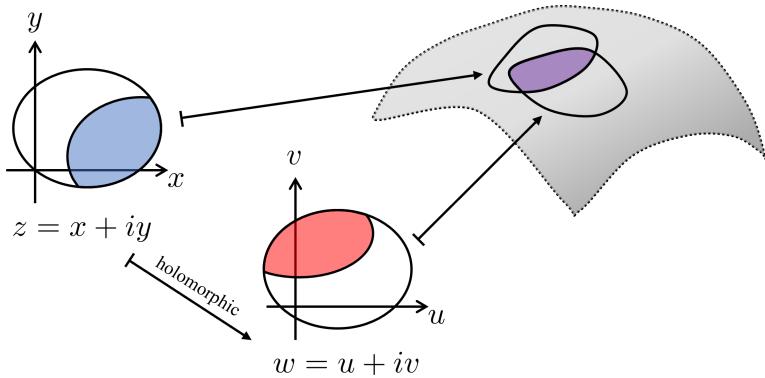


圖 7.1: 複數座標系與座標變換

7.1 複變函數論簡介

首先，我們將複習一些基本的複變函數論 (complex analysis) 中的定義與定理，接著再來討論複流形 (complex manifold) 上的幾何。

7.1.1 柯西-黎曼方程

考慮映射 $w = f(z)$ 將變數 $z = x + iy \in \mathbb{C}$ 映射至 $w = u + iv \in \mathbb{C}$ 。若該函數可微，則其從任何 z 方向逼近皆為可導，故有

$$f'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = u_x + iv_x = \frac{1}{i}(u_y - iv_y) \longrightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}, \quad (7.1)$$

此即柯西-黎曼方程 (Cauchy-Riemann equation)。對於映射 $(x, y) \mapsto (u, v)$ ，其滿足柯西-黎曼方程即表示向量 (u_x, v_x) 和 (u_y, v_y) 兩者相互正交且長度相同。因此該變換也是保角

(conformal) 的！亦即任兩直線在該變換下交角不變。故有：

$$w = f(z) \text{ 滿足柯西-黎曼方程} \iff w = f(z) \text{ 為保角變換}。$$

7.1.2 全純函數

定義：Holomorphic 函數

若函數 $w = f(z)$ ($z \in \mathbb{C}$) 對於某區域 (domain/region) D 中每點的某鄰域 (neighborhood) 內皆可微，則我們稱 f 在 D 內 holomorphic(全純)，是為全純函數。該定義可以延伸至多變數之情況。

定義：可解析 (analytic)

若函數 $w = f(z)$ 為在某區域內為可解析的 (亦被稱為解析或複解析 (complex analytic))，則其在該區域內每點有收斂的冪級數表示法。

透過柯西積分公式可以見得，在「複變函數論中」的解析函數與全純函數是相同的，故在許多文本中將見到將兩者交錯使用。全純函數具有極佳的性質。其中之一即為其存在級數展開式，因此其是複變函數論中大量探討的函數類型。

7.1.3 複數座標

使用複數座標十分有趣。例如對於 \mathbb{C}^2 中有座標 (z, w) ，則 $C = \{(z, w) \mid f(z, w) = 0\}$ 可以視為是 \mathbb{C}^2 中的一條代數曲線，也可以視為是 \mathbb{R}^4 中的二維曲面。

重點在於，我們視 $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ ，亦即在 \mathbb{R}^{2n} 上施加複數的結構。其有座標：

$$\begin{cases} z^k = x^k + iy^k \\ \bar{z}^k = x^k - iy^k \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (7.2)$$

其中稱 \bar{z}^k 為 z^k 的共軛複數 (complex conjugate)。則第一標準型為：

$$d\ell^2 = \sum_{k=1}^n \left((dx^k)^2 + (dy^k)^2 \right) = \sum_{k=1}^n dz^k d\bar{z}^k. \quad (7.3)$$

7.1.4 Wirtinger 導數

對於函數 $f(x^1, y^1, \dots, x^n, y^n) = \tilde{f}(z^1, \bar{z}^1, \dots, z^n, \bar{z}^n)$ ，我們定義其 Wirtinger 導數 (Wirtinger derivative) 為：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z^k} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} - i \frac{\partial}{\partial y^k} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} + i \frac{\partial}{\partial y^k} \right) \end{cases} \quad (7.4)$$

使得：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z^k} \tilde{f} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} - i \frac{\partial}{\partial y^k} \right) f \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} \tilde{f} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} + i \frac{\partial}{\partial y^k} \right) f \end{cases} \quad (7.5)$$

可以見得對於複數的導數，公式 7.4 是最為自然的了：因為有

$$\frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 \quad \frac{\partial}{\partial z}(\bar{z}) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\bar{z}) = 1.$$

且也滿足連鎖律 (萊布尼茲律)。此外：

f 對於 z^k 滿足柯西-黎曼方程 $\iff f$ 與 \bar{z} 無關，即 $\partial_{\bar{z}^k} f = 0$ 。

其實以上的標記使用要非常小心，不然將顯得十分奇怪：例如對於 z 做偏導數時， \bar{z} 怎麼可能維持不變。故雖然我們常以複定義域函數 \tilde{f} 替代實定義域函數 f ，但在計算 Wirtinger 導數時，需要回歸到以 x^k 和 y^k 表示的函數形式。除非 f 對於所有 z^k 與 \bar{z}^k 皆為可解析函數，則其有以 z^k 、 \bar{z}^k 表示的冪級數表示法，故可直接符號上對 z^k 和 \bar{z}^k 微分而不必換為實變數版本。

定理：可慮一個實解析 (real analytic)^a函數 (有實變數的收斂冪級數) 形如 $P(x^1, y^1, \dots, x^n, y^n)$ ，其可以被寫為 $Q(z^1, \bar{z}^1, \dots, z^n, \bar{z}^n)$ 。則 Q 對於 \bar{z}^k 獨立若且唯若 $\partial_{\bar{z}^k} P = 0$ 。

^a注意，若單說解析函數、可解析函數，表達的為複解析。

最後再介紹幾個定理：

定理：對於 holomorphic 函數 $F : (z^1, \dots, z^n) \mapsto (w^1(z), \dots, w^n(z))$ ，該變換之雅可比行列式為：

$$J_{\mathbb{R}} := \det(DF) = |J_{\mathbb{C}}|^2 , \quad (7.6)$$

其中：

$$J_{\mathbb{C}} := \det(D^{\mathbb{C}} F) = \det \left(\frac{\partial w^i}{\partial z^j} \right) . \quad (7.7)$$

證明如下：

$$\begin{aligned} J_{\mathbb{R}} &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix} \stackrel{F \text{為全純}}{=} \det \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \det \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) \\ &= \det \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \overline{\det \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right)} = |J_{\mathbb{C}}|^2 . \end{aligned}$$

故得證。 ■

一簡單範例如下：考慮 $w = z^2$ ，故有 $(u, v) = (x^2 - y^2, 2xy)$ 。則：

$$J_{\mathbb{R}} = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} = 4(x^2 + y^2) = (2z)(2\bar{z}) = |J_{\mathbb{C}}|^2 .$$

上方之定理確實成立。

定理：複反函數、隱函數定理

反函數定理與隱函數定理對於 holomorphic 函數依然成立^a。

^a 兩者的簡寫都是 IFT 喔。

證明如下：

(a) 反函數定理 (inverse function theorem)：

- (1) 對於反函數定理，證明僅需確認反函數是可解析的即可。
- (2) 根據假設，對於可解析座標變換 $w = F(z)$ ，我們有其雅可比行列式為非零

的：

$$J_{\mathbb{R}} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix},$$

其中 $A = (\partial w^i / \partial z^j)$ 。

(3) 故其反變換的雅可比行列式：

$$\det(DF^{-1}) = \det \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & \bar{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

亦為非零。根據實變數的反函數定理，我們可以確認複數下的反函數定理也成立。 ■

(b) 隱函數定理 (implicit function theorem)：證明從略，但僅需記得隱函數定理成立的條件在於對於 $f(w, z) = 0$ ，若在某點 $\partial_w f \neq 0$ ，則在其鄰域內存在 $w = g(z)$ 。此外，因為：

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(g(z), z) = 0 = f_{\bar{z}} + f_w \frac{\partial g}{\partial \bar{z}},$$

又 f 為解析函數有 $f_{\bar{z}} = 0$ ，故 $\partial g / \partial \bar{z} = 0$ ，該隱函數也是可解析的。

7.2 複曲面的第一標準型

回到考慮 \mathbb{C}^2 中的代數曲線 $f(w, z) = 0$ (等同於四維實空間中的二維實曲面)，若在欲討論的區域內 $\partial f / \partial w \neq 0$ ，故有 holomorphic 的隱函數 $w = w(z)$ 。在 \mathbb{C}^2 中座標 (w, z) 下的第一標準型為：

$$d\ell^2 = dw d\bar{w} + dz d\bar{z}, \quad (7.8)$$

此度規亦被稱為 Hermitian 度規，是為複數版的歐氏度規。那麼約束在曲面 $w = w(z)$ 上的第一標準型則為：

$$\begin{aligned} \therefore dw &= \frac{\partial w}{\partial z} dz + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = \frac{\partial w}{\partial z} dz \\ \therefore d\ell^2 &= \left(1 + \left|\frac{\partial w}{\partial z}\right|^2\right) dz d\bar{z}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

定義：保角/isothermal 座標

若在二維實曲面上的度規形如 $d\ell^2 = \rho(x, y)(dx^2 + dy^2)$ 者，我們稱其實座標 (x, y) 為保角的 (conformal)，亦可稱之為 isothermal 座標。

由此可見，若使用的座標系為 holomorphic 的，則第一標準型必為保角的，十分簡單。此外，若是經過某座標變換能保持座標的 isothermal 特性，則該變換需要滿足何？

定理：若給予一 isothermal 座標系，則保持其 isothermal 特性的變換恰為「holomorphic 座標變換」與「共軛變換」的合成。

證明如下：

(1) 考慮 $d\ell^2 = \rho(x, y)(dx^2 + dy^2) = \tilde{\rho}(z, \bar{z}) dz d\bar{z}$ 。

(2) 對於充分性，令座標變換 $z = z(w)$ 為可解析的，即 $\partial z / \partial \bar{w} = 0$ 。第一標準型變為：

$$d\ell^2 = \bar{\rho}(z(w), \overline{z(w)}) \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 dw d\bar{w},$$

其確實仍為 isothermal。

(3) 對於必要性，考慮 $z = z(w, \bar{w})$ ，則有：

$$d\ell^2 = \bar{\rho} \left| \frac{\partial z}{\partial w} dw + \frac{\partial z}{\partial \bar{w}} d\bar{w} \right|^2 = \bar{\rho} \left((|z_w|^2 + |z_{\bar{w}}|^2) dw d\bar{w} + (z_w \overline{z_{\bar{w}}}) dw^2 + (\overline{z_w} z_{\bar{w}}) d\bar{w}^2 \right),$$

其為 isothermal 若且唯若 $\partial z / \partial w = 0$ 或 $\partial z / \partial \bar{w} = 0$ ，故得證。 ■

7.3 Isothermal 座標系的存在性證明

但這麼好的座標系真的存在嗎？答案是肯定的！

定理 : Isothermal 座標系的存在性

對於歐氏空間 \mathbb{R}^3 中的曲面，以 $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ 參數化，其有約束的第一標準型為：

$$d\ell^2 = E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2.$$

若 E, F, G 為 p, q 的實解析函數（亦即可以表示為 p, q 的收斂冪級數），則存在一組新的實座標系 (u, v) 使得：

$$d\ell^2 = \rho(u, v) (du^2 + dv^2).$$

證明如下：

(1) 該第一標準型可以分解為：

$$d\ell^2 = \left(\sqrt{E} dp + \frac{F + i\sqrt{G}}{\sqrt{E}} dq \right) \left(\sqrt{E} dp + \frac{F - i\sqrt{G}}{\sqrt{E}} dq \right),$$

其中 $g = EG - F^2 > 0$ (因為該第一標準型正定)。

(2) 我們希望存在 $\lambda = \lambda(p, q)$ 滿足：

$$\lambda \left(\sqrt{E} dp + \frac{F + i\sqrt{G}}{\sqrt{E}} dq \right) = du + i dv, \quad (7.10)$$

使得 $d\ell^2 = |\lambda|^{-2} (du^2 + dv^2)$ 。

(3) 又因為：

$$du + i dv = \left(\frac{\partial u}{\partial p} + i \frac{\partial v}{\partial p} \right) dp + \left(\frac{\partial u}{\partial q} + i \frac{\partial v}{\partial q} \right) dq,$$

λ 的存在性等價於考慮：

$$\begin{cases} \lambda \sqrt{E} = u_p + iv_p \\ \lambda \frac{F + i\sqrt{G}}{\sqrt{E}} = u_q + iv_q \end{cases}.$$

(4) 將兩式相除以消掉 λ ，有：

$$(F + i\sqrt{g})(u_p + iv_p) = E(u_q + iv_q), \quad (7.11)$$

亦即：

$$\begin{cases} Fu_p - \sqrt{g}v_p = Eu_q \\ \sqrt{g}u_p + Fv_p = Ev_q \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_p = \frac{Fu_p - Eu_q}{\sqrt{g}} \\ v_q = \frac{Gu_p - Fu_q}{\sqrt{g}} \end{cases}.$$

(5) 可以見得 u_p 、 u_q 和 v_p 、 v_q 是相互決定的。然而，我們想要求它們之間須滿足連續的二次微分： $v_{pq} = v_{qp}$ ，故引入線性微分運算子

$$L = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{F \frac{\partial}{\partial p} - E \frac{\partial}{\partial q}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{F \frac{\partial}{\partial q} - G \frac{\partial}{\partial p}}{\sqrt{EG - F^2}} \right), \quad (7.12)$$

則 $v_{pq} - v_{qp} = 0$ 等價於：

$$Lu = 0. \quad (7.13)$$

微分方程 $Lf = 0$ 稱為 Beltrami 方程， L 則為 Beltrami 算子。根據微分方程中的理論，對於實解析 E 、 F 、 G ，Beltrami 方程必有解，使得存在 $(p, q) \mapsto (u(p, q), v(p, q))$ 為 isothermal 座標。第一標準型的 $\rho = |\lambda|^{-2}$ 可以再透過公式 7.10 求得。 ■

想要求得 isothermal 座標系的座標轉換等同於解 Beltrami 方程。而因為二維實曲面皆存在 isothermal 座標系，我們可以將其轉化為複曲面，並透過複幾何中的公式求得其特性。例如對於曲面有第一標準型 $d\ell^2 = \rho dz d\bar{z}$ 者，其高斯曲率為：

$$K_p = -\frac{1}{2\rho} \nabla^2 (\ln \rho) = -\frac{2}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (\ln \rho). \quad (7.14)$$

其中透過 Wirtinger 導數的定義公式 7.4，有 Laplacian 算子 $\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 = 4\partial_z \partial_{\bar{z}}$ 。

另外補充介紹一個容易和 Beltrami 算子搞混的算子：Laplace-Beltrami 算子。其為 Laplacian 算子在更複雜的流形上的推廣，定義為：

$$\nabla^2 := \sum_{ij} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \left(\sqrt{g} g^{ij} \partial_j \right), \quad (7.15)$$

其中 $g = \det([g_{ij}])$ 為第一標準型的行列式、 $[g^{ij}]$ 為 $[g_{ij}]$ 的反矩陣。

7.4 Isothermal 座標系的範例

接下來²⁰我們將介紹在 \mathbb{R}^3 中的球面與 $\mathbb{R}^{1,2}$ 中的 Lobachevskian 面的度規（第一標準型），並介紹其 isothermal 的表示法。此外，我們也將討論哪些變換可以使得其 isothermal 度規不變，是為該度規的 isometry。我們將發現，這些變換有很多種不同的群表現法 (group representation)²¹，但因為是維持同個度規不變，故這些變換群都同構 (isomorphic)²²。

7.4.1 球

考慮在 \mathbb{R}^3 中半徑為 R 的二維球面 $S_R^2 \subset \mathbb{R}^3$ ，其方程式為：

$$S_R^2 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (7.16)$$

對於 $R = 1$ 者記為 S^2 。

²⁰ 此章節部分內容在原授課時被移置下週，但為求完整性與閱讀通順將合併於此。下個章節前面將會再使用此小節討論之內容。

²¹ 群 (group) 即是描述變換與對稱性的代數結構。考慮集合 G 與具封閉性的二元運算 \cdot ，倘若其滿足：
(a) 對於所有 g_1, g_2 和 $g_3 \in G$ ， $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$ ；(b) 存在 $1 \in G$ 使得對於所有 $g \in G$ 有 $1g = g$ ；
(c) 對於所有 $g \in G$ 存在 $g^{-1} \in G$ 使得 $g \cdot g^{-1} = 1$ ，則我們稱之為群。

同樣一個群，其作用在不同物件 (集合) 上將會有不同的表現法 (representation)。例如二維平面上對於原點的旋轉變換構成二維旋轉群。二維旋轉可以作用在平面向量上，以 2×2 矩陣的方式表現，構成特殊正交群 $SO(2)$ ；二維旋轉亦可作用在複數上，以單位複數乘法表現，構成么正群 $U(1)$ 。

²² 對於兩個群 (與其運算元)： (G, \cdot) 、 (H, \circ) ，倘若存在映射 $\varphi : G \rightarrow H$ 使得對於所有 $g_1, g_2 \in G$ ，有

$$\varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2),$$

則稱 φ 為 G 到 H 的同態 (homomorphism)。倘若 φ 為雙射 (bijection)，則稱 φ 為 G 和 H 的同構、 G 和 H 同構，記為 $G \cong H$ 。

對於群更深入的介紹請見章節 10.2.1

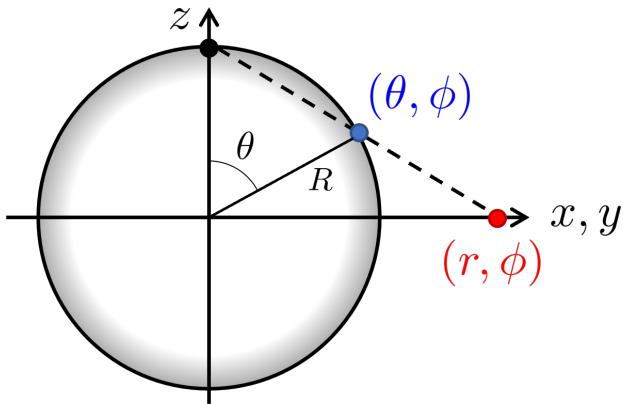


圖 7.2: 球與極投影

將歐氏空間 \mathbb{R}^3 的內積約束在 S_R^2 上可以得到球座標下的第一標準型為：

$$d\ell^2 = (dx^2 + dy^2 + dz^2)|_{S^2} = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) . \quad (7.17)$$

由上式可見，若欲從北極點到球上任一點，最短路徑為 $\phi =$ 定值者，即為大圓航線，其又被稱為球的測地線 (geodesic)。觀察圖 7.2，我們可以透過極投影將 $S_R^2 \setminus \{\text{北極點}\}$ 映射至赤道面 (r, ϕ) 上，其中由公式 5.1 可見：

$$R \sin \theta = \frac{2R^2 r}{R^2 + r^2} \quad (r^2 = x^2 + y^2) .$$

故有：

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta d\theta &= \frac{2R(R^2 - r^2)}{(R^2 + r^2)^2} dr , \quad \cos \theta = \frac{r^2 - R^2}{R^2 + r^2} \\ \therefore d\ell^2 &= \frac{4R^4}{(R^2 + r^2)^2} (dr^2 + r^2 d\phi^2) = \frac{4R^4}{(R^2 + x^2 + y^2)^2} (dx^2 + dy^2) . \end{aligned} \quad (7.18)$$

其已是 isothermal 座標系。對於 S^2 (即 $R = 1$ 者)，我們可以進而用 \mathbb{C} 的座標 $z = x + iy$ 來表示之：

$$d\ell^2 = \frac{4}{(1 + |z|^2)^2} dz d\bar{z} , \quad (7.19)$$

此稱為 Fubini-Study 度規²³。先前的討論中，我們發現此度規僅適用於 $S_R^2 \setminus \{\text{北極點}\}$ ，但事實上，若我們將平面上的「無窮遠點」包含進來，則此度規依然適用。包含了北極

²³ 此度規以義大利數學家 Guido Fubini 和德國數學家 Eduard Study 為名，並不是 Fubini 很認真學習。

點的 S^2 我們稱之為「黎曼球 (Riemann sphere)」，亦可記為 \mathbb{CP}^1 。我們已見得黎曼球可以透過極投影變成複數平面加上無窮遠點；而也可以將黎曼球分解為北半球（以 z 參數化）與南半球（以 w 參數化）的聯集，南北半球之間的關係為 $z = 1/w$ ，故我們有以下同胚 (homeomorphism)²⁴：

$$S^2 \simeq \mathbb{CP}^1 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\} =: \mathbb{C}_\infty \simeq \mathbb{C}_z \cup \mathbb{C}_w. \quad (7.20)$$

下個問題便是：請問在哪些變換下，此度規不變？亦即我們需要尋找此度規對應的 isometry 變換。

Isometries 有分成兩類：direct isometry²⁵ 和 opposite isometry，兩者分別對應行列式為 +1 與 -1 情況，兩者的聯集為完整的 isometry。對於 S^2 ，可以見得其 direct isometry 即是三維旋轉群，亦稱為特殊正交群 $SO(3)$ ，其 opposite isometry 為合成一個鏡射：兩者的聯集構成完整的 isometry 為正交群 $O(3)$ ，包含旋轉與鏡射變換的合成。對於 \mathbb{C}_∞ ，我們則考慮其上面的莫比烏斯變換 (Möbius transformation)²⁶。莫比烏斯變換又被稱為分式線性變換 (linear fractional transformation)，形如：

$$z = \frac{aw + b}{cw + d} \quad (ad - bc = 1), \quad (7.21)$$

其代數結構同構於所有行列式為 1 的複係數 2×2 矩陣，即特殊線性群 (么模群) $SL(2, \mathbb{C})$ ²⁷。對於一莫比烏斯變換要保持 Fubini-Study 度規不變，需要滿足：

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= \frac{4 dw d\bar{w}}{(|aw + b|^2 + |cw + d|^2)^2} \\ &= \frac{4 dw d\bar{w}}{(|b|^2 + |d|^2 + (a\bar{b} + c\bar{d})w + (\bar{a}b + \bar{c}d)\bar{w} + (|a|^2 + |c|^2)w\bar{w})^2}, \end{aligned}$$

²⁴ 同胚即表示拓樸 (topology) 上，兩物件是等價的，兩物件可以經過無撕裂與黏合的連續形變相互轉換，以 \simeq 標記之。

²⁵ 亦可稱為 directed/oriented/proper isometry。

²⁶ 事實上，對於 Fubini-Study 度規，我們僅需考慮莫比烏斯變換。

²⁷ 任一莫比烏斯變換 $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$ 皆可對應到 $SL(2, \mathbb{C})$ 中的矩陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，此即為兩者之同構，變換的合成即對應到矩陣的相乘。但是因為對於 U 和 $-U \in SL(2, \mathbb{C})$ ，兩者對應的莫比烏斯變換相同，故莫比烏斯變換群其實同構於 $SL(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\}$ ，是為商群 (quotient group)：將 U 和 $-U$ 視為等價 (equivalent) 的元素。

故需要要求係數滿足：

$$a\bar{b} + c\bar{d} = 0 \quad |a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2 = 1 \quad ad - bc = 1 ,$$

此即表示矩陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -\bar{c} \\ c & \bar{a} \end{bmatrix}$ 為「特殊么正群 (special unitary group)」 $\sqcup \mathrm{SU}(2)$ ²⁸。然而對於一個矩陣 $U \in \mathrm{SU}(2)$ ， U 和 $-U$ 對應到同一個莫比烏斯變換，故可以得知 Fubini-Study 度規的 direct isometry 為 $\mathrm{SU}(2)/\{\pm 1\}$ 。由上方的論述，我們可以得到以下的群同構：

$$\underbrace{\mathrm{SO}(3)}_{\text{isometry of } S^2} \cong \underbrace{\mathrm{SU}(2)/\{\pm 1\}}_{\text{isometry of } \mathbb{C}_\infty} . \quad (7.22)$$

試回憶上述的步驟，我們透過幾何的技巧發現 S^2 與 \mathbb{C}_∞ 同胚，兩者分別具有 isometry 為 $\mathrm{SO}(3)$ 與 $\mathrm{SU}(2)/\{\pm 1\}$ ，因此可以得知兩 isometry 同構。以這樣的幾何角度出發尋找群同構是十分強而有力的²⁹。

7.4.2 Lobachevskian 面

考慮在 $\mathbb{R}^{1,2}$ 中半主軸為 R 的二維雙葉雙曲面 $L_R^2 \subset \mathbb{R}^{1,2}$ ，其方程式為：

$$L_R^2 : t^2 - x^2 - y^2 = R^2 , \quad (7.23)$$

我們稱其為 Lobachevskian 面 (Lobachevskian plane)³⁰或是偽球 (pseudo-sphere)。對於 $R = 1$ 者記為 L^2 。

見圖 7.3a，Lobachevskian 面落在光錐 $t^2 - x^2 - y^2 = 0$ 內，可以有參數化 $(\rho, \chi, \phi) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) \times [0, 2\pi)$ 使得 $(t, x, y) = (\rho \cosh \chi, \rho \sinh \chi \cos \phi, \rho \sinh \chi \sin \phi)$ 。在此參數化下，可自行透過連鎖律確認第一標準型為：

$$d\ell^2 = d\rho^2 - \rho^2 \left(d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\phi^2 \right) , \quad (7.24)$$

²⁸ 因矩陣之兩行向量垂直 ($a\bar{b} + c\bar{d} = 0$)、且行向量皆為單位長 ($|a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2 = 1$)，最後因其行列式為 1，故稱之特殊。

²⁹ 另一個觀點是透過四元數 (quaternions) \mathbb{H} 。因為對於 (非單位元) 四元數基底與 (非單位元) $\mathrm{SU}(2)$ 基底有： $\{i, j, k\} = i\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ ，故 $\mathbb{H} \cong \mathrm{SU}(2)$ 。且四元數為三維旋轉的雙重覆蓋 (double cover)，即 $\mathrm{SO}(3) \cong \mathbb{H}/\{\pm 1\}$ ，故 $\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{SU}(2)/\{\pm 1\}$ 。

³⁰ 此以俄國數學家 Nikolai Lobachevsky 為名，紀念其在雙曲幾何學中的貢獻。

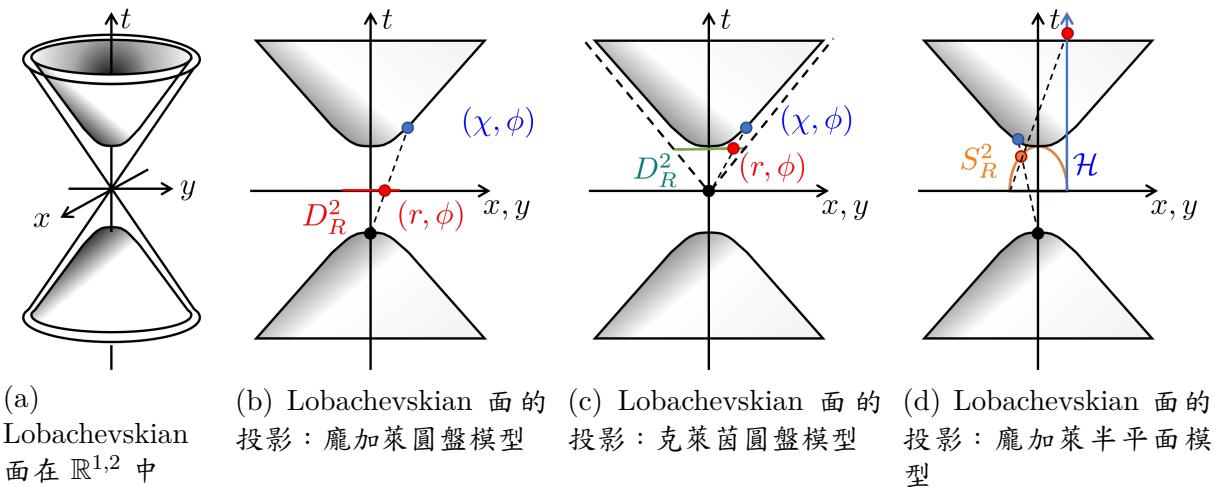


圖 7.3: Lobachevskian 面與其投影表示

約束在 Lobachevskian 面 L_R^2 上的第一標準型則為：

$$d\ell^2 = -R^2 \left(d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\phi^2 \right) . \quad (7.25)$$

因為該曲面的切向量皆為類空的，我們亦稱此曲面為類時曲面 (space-like hypersurface)。為讓長度變為正的，我們將等式右側之負號去掉，得到在上半葉雙曲面的度規為：

$$d\ell^2 = R^2 \left(d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\phi^2 \right) \quad (R > 0) , \quad (7.26)$$

是為 Lobachevsky 度規。由上式亦可知，從上半葉雙曲面的北極點 (座標為 $(t, x, y) = (R, 0, 0)$) 至其上的任一點，最短距離為走 $\phi =$ 定值者，是為其上的測地線。

觀察圖 7.3b，我們亦可透過極投影將 Lobachevskian 面投影至二維平面上。以南極點 $(-R, 0, 0)$ 為投影源，投影至圓盤 $D_R^2 = \{(0, x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R\}$ 上 (若 $R = 1$ 記為 D^2)，是為 Lobachevsky 幾何的「龐加萊圓盤模型 (Poincaré disk model)」。該光源射線為滿足：

$$(t, x, y) = (1 - \lambda) \cdot (-R, 0, 0) + \lambda \cdot (u, v, 0) \longrightarrow (1 - \lambda)^2 R^2 - \lambda^2 (u^2 + v^2) = R^2 ,$$

因一交點為 $t = 0$ ，可排除之得到：

$$\lambda R^2 - 2R^2 - \lambda(u^2 + v^2) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2R^2}{R^2 - u^2 - v^2} = \frac{2R^2}{R^2 - r^2} ,$$

有雙曲面參數化為：

$$(t, x, y) = \left(\frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2} \cdot R, \frac{2R^2}{R^2 - r^2} \cdot u, \frac{2R^2}{R^2 - r^2} \cdot v \right) \quad (7.27)$$

$$\stackrel{R=1}{=} \left(\frac{1+r^2}{1-r^2}, \frac{2u}{1-r^2}, \frac{2v}{1-r^2} \right) . \quad (7.28)$$

投影在 D_R^2 上的座標 (r, θ) 導致的 Lobachevky 度規變為新的第一標準型：

$$\begin{aligned} \because R \sinh \chi &= \frac{2R^2 r}{R^2 - r^2} , \cosh \chi = \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2} \\ \therefore \cosh \chi d\chi &= \frac{2R^2(R^2 + r^2)}{(1 - r^2)^2} dr \\ \therefore d\ell^2 &= \frac{4R^4}{(R^2 - r^2)^2} (dr^2 + r^2 d\phi^2) = \frac{4R^4}{(R^2 - x^2 - y^2)^2} (dx^2 + dy^2) . \end{aligned} \quad (7.29)$$

此即是一 isothermal 座標系。對於 D^2 ，也可進而用 \mathbb{C} 的座標 $z = x + iy$ 在 D^2 中表示為：

$$d\ell^2 = \frac{4}{(1 - |z|^2)^2} dz d\bar{z} \quad (|z| < 1) . \quad (7.30)$$

但 Lobachevskian 面不只可以投影在 $x-y$ 平面上³¹。見圖 7.3c，我們也可考慮將投影源放置於原點，投影至 $t = R$ 平面上的 D_R^2 圓盤上，此是為 Lobachevsky 幾何的「克萊茵圓盤模型 (Klein disk model)³²」。以同樣的技巧可以得到曲面參數化與第一標準型，但其結果沒有如龐加萊圓盤模型那般簡潔，故不在此多做贅述。

最後一個值得討論的投影法為 Lobachevsky 幾何的「龐加萊半平面模型 (Poincaré half-plane model)」。見圖 7.3d。首先將投影源放置在南極點，並投影上半葉雙曲面至位於原點的球 S_R^2 上。接著將投影源換至 $(t, x, y) = (0, -R, 0)$ ，將 S_R^2 投影至半平面 $\mathcal{H}: x = R$ 上。 \mathcal{H} 即為我們的半平面。此變換因為是與一球進行投影，可以得知 \mathcal{H} 必為龐加萊圓盤模型經過莫比烏斯變換而得³³：因為我們取投影源在 D_R^2 之 $-R$ 處，該莫比

³¹ 此為筆者所補充。在課本中克萊茵模型被歸名於接下來將見到的半平面模型。但根據簡單的搜尋可見得此名稱有誤，更嚴謹應該查詢數學史以確認正確的命名，但筆者我沒那個心思確認。

³² 亦可被稱為 Beltrami-Klein 模型。

³³ 莫比烏斯變換幾何上即是將黎曼球經過旋轉與平移後再極投影至複數平面上。

烏斯變換將 $-R \mapsto \infty$ 、 $R \mapsto 0$ 、 $iR \mapsto R$ ，其為³⁴

$$w = \frac{R}{i} \left(\frac{z-R}{z+R} \right) \quad , \quad z = R \left(\frac{iw+R}{-iw+R} \right) . \quad (7.31)$$

該變換下，度規變成了：

$$d\ell^2 = \frac{4R^2 |dw|^2}{|w - \bar{w}|^2} \quad (7.32)$$

$$\stackrel{R=1}{=} \frac{|dw|^2}{|\operatorname{Im}\{w\}|^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \quad (\operatorname{Im}\{w\} = y > 0) . \quad (7.33)$$

根據章節 4.2 的討論，我們得知對於 $L^2 \subset \mathbb{R}^{1,2}$ ，其在 $O(1,2)$ 變換下第一標準型不變。但因為我們僅考慮上半葉的雙曲面，我們的轉換務必確認不會顛倒 t 軸（亦即 orthochronous 變換），因此僅考慮 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 的連通空間，是為 L^2 的 isometry³⁵；
 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 的連通空間則不為 L^2 的 isometry。而若是欲討論 direct isometry，則僅包含 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的連通空間，該連通空間恰好包含單位變換，故記為 $SO(1,2)^\circ$ 之集合（上標的 \circ 即是表示為與單位變換連通，讀做「 $SO(1,2)$ 單位元 (identity) 的 connected component」）。然而對於龐加萊圓盤模型 D^2 ，其 isometry 又為何呢？我們考慮其上面的莫比烏斯變換 (Möbius transformation)³⁶。對於變換 $z = (aw+b)/(cw+d)$ ，有：

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= \frac{4 dw d\bar{w}}{(|aw+b|^2 - |cw+d|^2)^2} \\ &= \frac{4 dw d\bar{w}}{(|b|^2 - |d|^2 + (a\bar{b} - c\bar{d})w - (\bar{a}b - \bar{c}d)\bar{w} + (|a|^2 - |c|^2)w\bar{w})^2} , \end{aligned}$$

³⁴ 莫比烏斯變換可以由三個點的變換完全決定。更複雜點來說，因為其是一射影變換 (projective transformation)，所以交比 (cross ratio) 不變，故可以由三點的變換決定。

³⁵ 在章節 4.2 討論的為 $O(1,1)$ ，以 2×2 矩陣表現且有四個連通空間；本節雖討論 $O(1,2)$ ，以 3×3 矩陣標示，但仍然只有四個連通空間，可以將空間的兩維度視為一起的。

³⁶ 事實上，除了 Fubini-Study 度規外，對於形如公式 7.30 的度規，我們僅需考慮莫比烏斯變換。

故需要要求係數滿足：

$$a\bar{b} - c\bar{d} = 0 \quad |a|^2 - |c|^2 = |d|^2 - |b|^2 = 1 \quad ad - bc = 1 ,$$

此即表示矩陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 屬於偽歐氏空間中的特殊公正群 $SU(1, 1)^{37}$ 。然而對於一個矩陣 $U \in SU(1, 1)$ ， U 和 $-U$ 對應到同一個莫比烏斯變換，故可以得知龐加萊圓盤模型的 direct isometry 為 $SU(1, 1)/\{\pm 1\}$ 。最後考慮對於龐加萊半平面模型，其 isometry 我們也僅考慮莫比烏斯變換（這樣也足夠了）。其必須是上半平面的滿射 $z = (aw + b)/(cw + d)$ ，保持實軸：

$$\operatorname{Im}\{w\} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}\{z\} = 0 = \frac{w^2 \operatorname{Im}\{a\bar{c}\} + w \operatorname{Im}\{a\bar{d} + b\bar{c}\} + \operatorname{Im}\{b\bar{d}\}}{|cw + d|^2} ,$$

又因為上式對於任意 $w \in \mathbb{R}$ 皆成立，可以得到等價的條件為：

$$\operatorname{Im}\{a\bar{c}\} = \operatorname{Im}\{a\bar{d} + b\bar{c}\} = \operatorname{Im}\{b\bar{d}\} = 0 . \quad (7.34)$$

倘若 a, b, c, d 皆不為零，則可知 $c = \alpha a, d = \beta b$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)。又 $\operatorname{Im}\{a\bar{d} + b\bar{c}\} = \operatorname{Im}\{\beta a\bar{b} + \alpha \bar{a}b\} = 0$ ，成立於 $\alpha = \beta$ 或 $b = \gamma a$ ($\gamma \in \mathbb{R}$)。但前者違反了條件 $ad - bc = 1$ ，故可以得知四個變數為某複數 k 的實數倍率。對於有任一者為零的情況，結果相同。再來，為了滿足 $ad - bc = 1 \in \mathbb{R}$ ，有 $k = 1$ 或 i ：但兩者對應的莫比烏斯變換相同，故不失一般性，可以假設四者皆為實數。可見 \mathcal{H} 的 isometry 為 $SL(2, \mathbb{R})/\{\pm 1\}$ ，其中 $SL(2, \mathbb{R})$ 為所有 2×2 的實係數矩陣。另外也可確認 $SL(2, \mathbb{R})$ 確實使 \mathcal{H} 之度規不變：

$$d\ell^2 = -\frac{4|dz|^2}{(z - \bar{z})^2} = -\frac{4|dw|^2}{(w - \bar{w})^2} .$$

最後，我們透過上述的幾何論證，得到以下的群同構：

$$\underbrace{\operatorname{SO}(1, 2)^\circ}_{\text{isometry of } L^2} \cong \underbrace{SU(1, 1)/\{\pm 1\}}_{\text{isometry of } D^2} \cong \underbrace{SL(2, \mathbb{R})/\{\pm 1\}}_{\text{isometry of } \mathcal{H}} . \quad (7.35)$$

³⁷ 因矩陣之兩行向量垂直 ($a\bar{b} - c\bar{d} = 0$)，由此也可看出內積空間是為 $\mathbb{C}^{1,1}$ ，最後因其行列式為 1，故稱之特殊。

7.5 莫比烏斯變換

先前我們分析球與 Lobachevskian 面在投影下的 isometries 時，皆僅考慮莫比烏斯變換，那麼為何這樣是足夠的呢？我們將在此節引入些許複變函數論中的定理以論述使用莫比烏斯變換的充分性，且此小節部分證明參考了 Serge Lovovski 所著的「Principles of Complex Analysis」一書。因為內容為筆者自行補充的，也不存在於參考書上，若有所錯誤也請不吝告知。

7.5.1 S^2 的 Isometry

我們知道：

$$\frac{4|dz|^2}{(1+|z|^2)^2} = \frac{4|dw|^2}{(1+|w|^2)^2} \iff \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SU}(2)/\{\pm 1\},$$

但更困難的問題為為何「 $f : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1 \implies f$ 為莫比烏斯變換」？以下將透過一個個複變函數論的定理堆砌出原因。

定理：(Liouville)

一個在 \mathbb{C} 上有界的 holomorphic 函數必為常數函數。

證明如下：考慮柯西積分公式，對於任意 $a \in \mathbb{C}$ ，

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow f = \text{常數}.$$

故得證。 ■

問題：讀者可以嘗試找到三個以上 Liouville 定理的證明。

接著此引理說明了為何我們可以僅考慮在 \mathbb{CP}^1 上的莫比烏斯變換作為其 isometry：

定理：任何在 \mathbb{CP}^1 上的 meromorphic^a函數必為有理函數^b。且若 $\deg(f) = 1^c$ 則為莫比烏斯變換。

^a 在某區域 D 上的 meromorphic 函數為除了在幾個孤立奇點外都可解析的函數，可以視為是兩個 holomorphic 函數相除。

^b 有理函數 (rational function) 形如 $f(z) = P(z)/Q(z)$ 者。其中 $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ ，即 z 的多項式。

^c 一個有理函數 f 的 degree(記為 $\deg(f)$) 定義為其分子或分母多項式 degree 的較大者。

筆者嘗試證明如下³⁸：

- (1) 先證明 \mathbb{CP}^1 上的 meromorphic 函數必為有理函數。後者則為 trivial。
- (2) 首先 ∞ 為 f 的可移除奇點或奇點，故 f 在 $\{R < |z| < \infty\}$ 內為 holomorphic。
- (3) 觀察 f 在 $\{|z| \leq R\}$ 內必僅包含有限個奇點，否則奇點 $\{z_j\}$ 將構成收斂子序列 $z_j \rightarrow a$ 。則 $|a| < R$ 但 a 不為孤立奇點，是不可能的。
- (4) 令 f 在 $\{|z| \leq R\}$ 內的奇點為 z_1, \dots, z_n ，各自有階數 (order) 為 m_1, \dots, m_n 。令 f 的勞倫級數 (Laurent series) 中的無窮遠處的不可解析部分 (principal part) 為 $g(z)$ ，即：若 ∞ 是 f 的奇點， g 為多項式；若 ∞ 為 f 的可疑除奇點，則 $g \equiv 0$ 。

- (5) 考慮函數：

$$F(z) = f(z) - g(z) - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_j} \frac{c_{-k}^{(j)}}{(z - z_j)^k},$$

因為 f 所有的奇點都被移除了， F 在 \mathbb{C}_∞ 為 holomorphic 的。且 F 必為有界的，故根據 Liouville 定理有 $F = c$ ， c 為一常數。

- (6) 現下有：

$$f(z) = c + g(z) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_j} \frac{c_{-k}^{(j)}}{(z - z_j)^k},$$

是為一有理函數，故得證。 ■

為了能套用的 isometry 必為 meromorphic 函數，又為維持 \mathbb{CP}^1 度規的形式，則 $\deg(f) = 1$ ，故僅考慮莫比烏斯變換。

³⁸ 亦可見 Principles of Complex Analysis 之 Proposition 7.29。

7.5.2 L^2 的 Isometry

此小節內容可參考 Principles of Complex Analysis 之 Proposition 9.14 與 Corollary 9.15。首先討論龐加萊圓盤模型，我們將考慮 $\text{Conf}^+(D^2)$ ，即在 D^2 上行列式為 1 的保角變換，亦即是其上的所有 holomorphic 函數。首先我們要求該變換不會改變圓盤結構：

定理： D^2 的自同構

對於單位圓盤 $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ，其保角自同構 (conformal automorphism)^a 為

$$\text{Aut}(D^2) = \left\{ z \mapsto e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \mid \alpha \in D^2, \theta \in \mathbb{R} \right\}. \quad (7.36)$$

^a 自同構 (automorphism) 即表示自己對自己的同構。保角僅表示該變換為 holomorphic。

其證明由右至左 (充分性) 甚為簡單，在此不多做贅述。以下將證明其必要性：

(1) 必要性之證明仰賴以下引理：

定理：Schwarz 引理

對於全純 $f : D^2 \rightarrow D^2$ ，且 $f(0) = 0$ ，則滿足：

- (a) $|f(z)| \leq |z|$ 與 $|f'(0)| \leq 1$ ，
- (b) 上方兩等號成立若且唯若 $f(z) = e^{i\theta}z$ 。

其證明如下：

- (i) 因為 $f(0) = 0$ ， $g(x) = f(x)/x$ 為在 D^2 上 holomorphic，且 $g(0) = f'(0)$ 。
- (ii) 根據最大模原理 (maximum modulus principle³⁹)，對於在開集上的非常數 holomorphic 函數 f ， $|f|$ 在開集上不會有極大值。故極大值必在邊界上，有在 $D_r^2 \subset D^2$ 上：
$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{r} \xrightarrow{r \rightarrow 1} 1.$$
- (iii) 上式代入 $z = 0$ 即可得到 $|f'(0)| \leq 1$ ，故得證 (a)。
- (iv) 若對於某 $z_0 \in D^2$ 等號成立， $g(z_0) = 1$ 達到最大值。因此根據最大模原理， f 在 D^2 上必為一常數函數： $g(z) = c$ ，且因 $|g| = |c| = 1$ ，故得證 (b)。

³⁹ 見 Principles of Complex Analysis 之 Proposition 9.11，就不在此贅述，因為那將會是一個無底洞，而此節內容又已那麼多。

(2) 考慮 $f : D^2 \rightarrow D^2$ 為保角自同構，且 $f(0) = a \in D^2$ 。

(3) 引入莫比烏斯變換：

$$g : z \mapsto \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

則顯然地， $\varphi = g \circ f$ 亦為 D^2 的保角自同構，因為對於邊界點 $|z| = 1$ ，有 $z^{-1} = \bar{z}$ ，故可見邊界不變：

$$\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| = |z| \cdot \left| \frac{1 - az^{-1}}{1 - \bar{a}z} \right| = 1,$$

且內部點 a 經過映射後仍為內部點 0，故為自同構。

(4) 因為 $\varphi : D \rightarrow D$ 且 $\varphi(0) = g(f(0)) = 0$ ，故其可套用 Schwarz 引理： $|\varphi(z)| \leq |z|$ 。而其反射也可以套用 Schwarz 引理： $|z| = |\varphi^{-1}(\varphi(z))| \leq |\varphi(z)|$ 。可以得知 $|\varphi(z)| = |z|$ ，故 $\varphi(z) = e^{i\theta}z$ 。

(5) 最後可以得到 f 形如：

$$f(z) = g^{-1} \circ \varphi = e^{i\theta} \frac{z + ae^{-i\theta}}{1 + \bar{a}e^{i\theta}z} \equiv e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}.$$

故得證。 ■

因此先前討論 D^2 上的 isometry 時，我們僅需考慮莫比烏斯變換。至於對於龐加萊半平面 \mathcal{H} 的 isometry，因為我們知道其與龐加萊圓盤模型之間可以透過公式 7.31 之莫比烏斯變換來相互轉換，且莫比烏斯轉換的合成亦為莫比烏斯轉換，故我們也僅需考慮莫比烏斯變換群 $\text{SL}(2, \mathbb{R})/\{\pm 1\}$ 。只是很剛好地， \mathcal{H} 的 isometry 恰好是整個莫比烏斯變換群。

我們可以將以上結論整合為：

定理：

$$\begin{aligned} \text{Isometry}(D^2) &= \left\{ e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right\} = \text{SU}(1, 1)/\{\pm 1\} = \text{Conf}^+(D^2) \\ &\cong \text{SL}(2, \mathbb{R})/\{\pm 1\} = \text{Conf}^+(\mathcal{H}) \\ &\cong \text{SO}(1, 2)^\circ. \end{aligned} \tag{7.37}$$

註：通常 $\text{Conf}^+ \supseteq \text{Isometry}$ ，不過對於 Lobachevskian 面的投影模型兩者剛好相等。

8 定高斯曲率曲面、Liouville 方程與古典李群幾何 (10/4)

先前我們討論的曲面中， S^2 具有高斯曲率：

$$\begin{aligned}\therefore \rho(z, \bar{z}) &= \frac{4}{(1+|z|^2)^2} \\ \therefore K_p &= -\frac{2}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (\ln \rho) = -\frac{(1+|z|^2)^2}{2} (-2) \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (\ln(1+z\bar{z})) = 1.\end{aligned}$$

同樣地， L^2 具有高斯曲率：

$$\begin{aligned}\therefore \rho(z, \bar{z}) &= \frac{4}{(1-|z|^2)^2} \\ \therefore K_p &= -\frac{2}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (\ln \rho) = -\frac{(1-|z|^2)^2}{2} (-2) \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (\ln(1-z\bar{z})) = -1.\end{aligned}$$

那麼，是否存在 \mathbb{R}^3 中曲面局部上與 Lobachevsky 度規是相同的呢？答案是肯定的。考慮以下「偽球（任何高斯曲率為 -1 之曲面）」：

$$\mathbf{r} = (\operatorname{sech} u \cos v, \operatorname{sech} u \sin v, u - \tanh u) \quad (u \geq 0), \quad (8.1)$$

其有第一標準型：

$$d\ell^2 = \tanh^2 u du^2 + \operatorname{sech}^2 u dv^2. \quad (8.2)$$

其確實處處具有負的高斯曲率。另外有趣的是，可以注意到其測地線僅能有限地延伸至邊緣。

8.1 固定高斯曲率的曲面分類

- (a) 球面： S_R^2 ，具有 $K = 1/R^2$ 。
- (b) 平面： \mathbb{R}^2 ，具有 $K = 0$ 。
- (c) Lobachevskian 面： L_R^2 ，具有 $K = -1/R^2$ 。

上方高斯曲率省略掉下標 p 是因為該曲面高斯曲率處處相同，故無需標明考慮的點。

先前我們是給予一曲面的第一標準型，並進而計算出其高斯曲率。那麼一個值得考慮的問題是，若先給予在開集 U 上定義良好的高斯曲率 K_p ，那麼能求得第一標準型嗎？

考慮 \mathbb{R}^3 中曲面的 isothermal 第一標準型為： $d\ell^2 = \rho |dz|^2$ ，其中 $\rho > 0$ 。令 $\rho = e^\varphi$ ，稱為保角因子 (conformal factor)，則有高斯曲率為：

$$K = -\frac{1}{2}e^{-\varphi}\nabla^2\varphi = -2e^{-\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar{z}}. \quad (8.3)$$

若考慮高斯曲率 K 為常數，則可以得到「Liouville 方程」：

$$\nabla^2\varphi = -2Ke^\varphi \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar{z}} = -\frac{K}{2}e^\varphi. \quad (8.4)$$

定理：任一固定高斯曲率 K 的曲面局部上 isometric 於 S_R^2 、 \mathbb{R}^2 、 L_R^2 ，其中曲率半徑 $R = \frac{1}{\sqrt{|K|}}$ 。

其證明如下：

(1) 因為 K 為定值，考慮：

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\varphi_{zz} - \frac{1}{2}\varphi_z^2\right) = \varphi_{z\bar{z}\bar{z}} - \varphi_z\varphi_{z\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{K}{2}e^\varphi\right) - \varphi_z\left(-\frac{K}{2}e^\varphi\right) = 0,$$

可知 $\varphi_{zz} - \frac{1}{2}\varphi_z^2$ 為可解析函數，記之為 $\psi(z)$ 。

(2) 考慮解析座標變換下 $z = f(w)$ 使得 $d\ell^2 = e^{\tilde{\varphi}}|dw|^2$ ，則 f 需要滿足：

$$e^\varphi \left| \frac{\partial f}{\partial w} \right|^2 = e^{\tilde{\varphi}},$$

若記 $(\cdot)' = \partial_w(\cdot)$ ，則同樣有 $\tilde{\psi}$ ：

$$\tilde{\psi} = \tilde{\varphi}_{ww} - \frac{1}{2}\tilde{\varphi}_w^2,$$

有：

$$\begin{cases} \tilde{\varphi} = \varphi + \ln|f'|^2 \\ \tilde{\varphi}_w = \varphi_z f' + \frac{f''}{f'} \\ \tilde{\psi} = \psi \cdot (f')^2 + \left(\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 \right) \end{cases}. \quad (8.5)$$

(3) 可以注意到 $\tilde{\psi}$ 後面括號內的項十分有趣，其為：

定義：Schwarzian 導數

對於函數 $f = f(w)$ ，記 $f'(w) = \partial_w f(w)$ ，則兩者的 Schwarzian 導數定義為：

$$(Sf)(z) = \{f, w\} := \frac{f'''}{f''} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2. \quad (8.6)$$

其相關特性將在下個小節介紹。

(4) 根據常微分方程的理論， $\tilde{\psi} \equiv 0$ 對於可解析 f 是局部可解的，即存在該良好的座標變換。

(5) 考慮：

$$\left(e^{-\tilde{\varphi}/2} \right)_{ww} = \left(-\frac{1}{2} \tilde{\varphi}_w e^{-\tilde{\varphi}/2} \right)_w = \left(-\frac{1}{2} \tilde{\varphi}_{ww} + \frac{1}{4} \tilde{\varphi}_w^2 \right) e^{-\tilde{\varphi}/2} = -\frac{1}{2} \tilde{\psi} e^{-\tilde{\varphi}/2} \equiv 0$$

(6) 因為 $w = u + iv$ ，所以 $\left(e^{-\tilde{\varphi}/2} \right)_{uu} = \left(e^{-\tilde{\varphi}/2} \right)_{vv} = 0$ 也滿足。考慮第二式，有解：

$$\begin{aligned} e^{-\tilde{\varphi}/2} &= a(u^2 + v^2) + \beta u + \beta' v + c && (a, \beta, \beta', c \in \mathbb{R}) \\ &= aw\bar{w} + bw + \bar{b}\bar{w} + c && (a, c \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

(7) 因此經過 $z = f(w)$ ，第一標準型變為：

$$d\ell^2 = e^{\tilde{\varphi}} |dw|^2 = \frac{|dw|^2}{(a|w|^2 + bw + \bar{b}\bar{w} + c)^2}. \quad (8.7)$$

(8) 高斯曲率則為：

$$K = -2e^{\tilde{\varphi}} \frac{\partial^2}{\partial w \partial \bar{w}} (\ln(\cdots)) = 4(ac - |b|^2), \quad (8.8)$$

(9) 最後將上述的第一標準型經過適當的莫比烏斯變換，即可得到形如 Fubini-Study 或 Lobachevsky 度規的保角因子。故得證。 ■

通過上方的推導，我們可以得知高斯曲率與保角因子之間的關係為：

(a) 若 $K = 4(ac - |b|^2) > 0$ ，則 $\rho = \frac{4R^4}{(1+|z|^2)^2}$ 。

(b) 若 $K = 4(ac - |b|^2) = 0$ ，則 $\rho = 1$ 。

(c) 若 $K = 4(ac - |b|^2) < 0$ ，則 $\rho = \frac{4R^4}{(1-|z|^2)^2}$ 。

8.2 Schwarzian 導數

Schwarzian 導數是研究二階常微分方程非常重要的量，我們在此介紹其性質。

定理：Schwarzian 導數之特性

(a) $\{f, w\} = \{w, f\} \cdot (f')^2$ 。

(b) 考慮二階常微分方程的標準型 $\varphi'' - I\varphi = 0$ ，其中 $I = I(w)$ 。對於其兩解 φ_1 與 φ_2 ，有 $\{\varphi_1/\varphi_2, w\} = \frac{1}{2}I$ 。特別的，對於 $ad - bc \neq 0$ ，有該 Schwarzian 導數在以下變換下不變：

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} \mapsto \frac{a\varphi_1/\varphi_2 + b}{c\varphi_1/\varphi_2 + d}.$$

(c) $\{f, w\} = 0 \iff f = \frac{aw+b}{cw+d}$ 。

(d) $\tilde{\psi} \equiv 0$ 對於可解析 f 是局部可解的。

在這邊特別先討論特性 (c)：根據公式 8.5 對於 $\tilde{\psi}$ 的推導，我們有靈感為考慮函數 $\phi = f''/f'$ ，則 $\{f, w\} = 0$ 等價於以下微分方程：

$$\phi' = \frac{1}{2}\phi^2, \quad (8.9)$$

$$\begin{aligned} \int 2\phi^{-2} d\phi &= -\phi^{-1} = w + \frac{d}{c} \\ \rightarrow \frac{f''}{f'} &= \frac{-2}{w + d/c} \\ \rightarrow \int \frac{1}{f'} df' &= \ln f' = \int \frac{-2}{w + d/c} dw = \ln(w + d/c)^{-2} + \ln c^{-2} \\ \rightarrow f' &= \frac{1}{(cw + d)^2} \rightarrow f = \frac{-1/c}{cw + d} + \frac{a}{c} = \frac{aw + b}{cw + d}. \end{aligned}$$

故 f 為莫比烏斯變換。

8.3 古典李群

接下來我們將討論古典李群 (classical Lie groups)。古典群即為矩陣群，群元素皆以矩陣表現。李群則為具有拓樸結構的群，可以在其上討論幾何。

首先討論一般線性群 (general linear group) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ，其是由所有 $n \times n$ 的實係數矩陣組成，且矩陣行列式不為零，亦即：

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) := \{A = [a_j^i] \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) \neq 0\}. \quad (8.10)$$

可以見得 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ ，其可以由一張 chart 覆蓋，並且為 \mathbb{R}^{n^2} 的稠密 (dense) 開集 (亦即 $\det A = 0$ 者極少)。此外，所有 $n \times n$ 實係數矩陣形成的空間亦可記為 $M(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ 。

緊接著，我們來確認其群結構：記群 $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$

- (a) 乘法封閉性：考慮矩陣乘法 $G \times G \rightarrow G$ ， $(A, B) \mapsto AB$ 。倘若記 $C = AB$ ，則 $c_j^i = \sum_k a_k^i b_j^k \equiv a_k^i b_j^k$ ，此為係數 a_j^i 和 b_j^i 的多項式映射，故此群運算 (乘法) 為 C^∞ 映射。
- (b) 結合律：透過矩陣乘法的結合律，固然成立。
- (c) 單位元：單位矩陣即為單位元。
- (d) 反元素：考慮 $G \rightarrow G$ 、 $A \mapsto A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(A)}{\det(A)}$ 確實存在⁴⁰。

從 \mathbb{R}^{n^2} 中的歐氏度規可以引出矩陣的模 (norm)：

$$|A|^2 = \sum_{i,j} |a_j^i|^2, \quad (8.11)$$

則因而也有：

- (a) 三角不等式： $|A + B| \leq |A| + |B|$ 。
- (b) 柯西不等式： $|AB| \leq |A||B|$ 。
- (c) 無窮等比級數：考慮 $|A| < 1$ ，則 $(1 - A)^{-1} = 1 + A + A^2 + \dots$ 收斂。其證明如下：

⁴⁰ $\mathrm{adj}(A)$ 為古典伴隨矩陣，稱為 adjugate matrix。其與伴隨 (adjoint) 運算子概念不同，中文翻譯真的不太好。

定理：令 $\mathbb{1}$ 為單位矩陣，考慮 X 使得 $|X| < 1$ ，則 $\mathbb{1} + X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 。

證明如下：

(1) 首先考慮 $B = 1 - X + X^2 - X^3 + \dots$ 。

(2) 因為 $|X^m - X^{m+1} + X^{m+2} - \dots \pm X^{m+k-1}| \leq |X^m| (1 + |X| + \dots + |X|^{k-1}) = |X^m| \frac{1-|X|^k}{1-|X|}$ 。

所以此數列的部分和為柯西數列，其絕對收斂。故可知 B 是良好定義的。

(3) 考慮 $(\mathbb{1} + X)B = \mathbb{1}$ ，故 $B = (\mathbb{1} + X)^{-1}$ ，也因此 $(\mathbb{1} + X) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 。 ■

事實上， \mathbb{R}^{n^2} （或 $M_n(\mathbb{R})$ ）在歐氏模下為 complete 的，亦即任何柯西數列都會收斂⁴¹到 \mathbb{R}^{n^2} 中的元素。

接著我們將討論矩陣 B_0 的鄰域。考慮 $X \in \mathbb{R}^{n^2}$, $|X| < 1$ ，有該鄰域內矩陣為：

$$B = B_0(\mathbb{1} + X) = B_0 + B_0X,$$

則對於 $Y = B_0X$, $|Y| < |B_0|$ 是顯然的。但反過來，若 $|Y| < |B_0|$ 不一定代表 $|X| < 1$ 。

事實上，我們需要要求：

$$|Y| = |B - B_0| < |B_0^{-1}|^{-1} \quad (8.12)$$

才能推得 $|X| = |B_0^{-1}Y| \leq |B_0^{-1}| |Y| < 1$ 。在以上良好的鄰域內，我們可以探討接下來的定理。

8.3.1 矩陣群與其切空間

定理：實矩陣與其切空間

以下實矩陣群：

$$\underbrace{\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})}_{\dim=n^2} \supset \underbrace{\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})}_{\dim=n^2-1} \supset \underbrace{\mathrm{SO}(n)}_{\dim=\frac{n(n-1)}{2}} \quad (8.13)$$

皆為無奇異點的曲面。且其在單位矩陣 $e = \mathbb{1}$ 處的切空間滿足：

$$\mathbb{R}^{n^2} \supset \{\mathrm{tr}(X) = 0\} \supset \{X + X^\top = 0, \mathrm{tr}(X) = 0\}. \quad (8.14)$$

⁴¹ 對於 $\varepsilon > 0$ ，存在 $n, m > 0$ ，使得 $|a_n - a_m| < \varepsilon$ 。或 $\limsup_{m,n} |a_n - a_m| = 0$ 。

定理：複矩陣與其切空間

複矩陣群之間滿足：

$$\underbrace{\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})}_{\dim=2n^2} \supset \underbrace{\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})}_{\dim=2(n^2-1)} \supset \underbrace{\mathrm{SU}(n)}_{\dim=n^2-1} \quad (8.15)$$

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \supset \underbrace{\mathrm{U}(n)}_{\dim=n^2} \supset \mathrm{SU}(n) \quad (8.16)$$

其在單位矩陣 $e = \mathbb{1}$ 處的切空間滿足：

$$\mathbb{C}^{n^2} \supset \left\{ \mathrm{tr}(A) = 0 \right\} \supset \left\{ X + X^\top = 0, \mathrm{tr}(X) = 0 \right\} \quad (8.17)$$

$$\mathbb{C}^{n^2} \supset \left\{ X + X^\top = 0 \right\} \supset \left\{ X + X^\top = 0, \mathrm{tr}(X) = 0 \right\} . \quad (8.18)$$

以上關於切空間的結論非常好證明。例如：

(a) 對於 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ ：

(1) 考慮曲線 $A(t) \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ ，其中 $A(0) = \mathbb{1}$ 。

(2) 在原點的切向量滿足：

$$\mathrm{tr} \left(\frac{d}{dt} A(t) \right) \Big|_0 = \frac{d}{dt} \det(A(t)) \Big|_0 = \frac{d}{dt} 1 = 0 . \quad (8.19)$$

因此切向量的跡為零。

(3) 反過來，若有矩陣 X 跡為零，則其張出的直線 $A(t) = \mathbb{1} + tX$ (t 足夠小) 滿足：

$$\det(A(t)) = \det(\mathbb{1} + tX) = 1 + t\mathrm{tr}(X) + O(t^2) = 1 + O(t^2) . \quad (8.20)$$

其確實為 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ 的切空間。 ■

(b) 對於 $\mathrm{SO}(n)$ ：

(1) 考慮曲線 $A(t) \in \mathrm{SO}(n)$ ，其中 $A(0) = \mathbb{1}$ 。

(2) 在原點的切向量滿足：

$$0 = \frac{d}{dt} A(t) A^T(t) \Big|_0 = A(0) \dot{A}^T(0) + \dot{A}(0) A^T(0) = \dot{A}(0) + \dot{A}^T(0)。 \quad (8.21)$$

因此切向量為反對稱矩陣。

(3) 反過來，若有反對稱矩陣 X ，則其張出的直線 $A(t) = \mathbb{1} + tX$ (t 足夠小) 滿足：

$$A(t)A^T(t) = \mathbb{1} + t(X + X^T) + O(t^2) = \mathbb{1} + O(t^2)。 \quad (8.22)$$

其確實為 $\text{SO}(n)$ 的切空間。 ■

其他結論可以依樣畫葫蘆得證。

8.3.2 指數映射

定義：指數映射

對於群 $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$ 與其在單位元的切空間 $T_e G$ ，有

$$\exp : T_e G \rightarrow G, X \mapsto \exp(X) \equiv e^X := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}。 \quad (8.23)$$

很顯然地，其滿足：

$$(a) [X, Y] := XY - YX \equiv 0 \implies e^{X+Y} = e^X e^Y。$$

$$(b) e^X = g \text{ 若為可逆，則 } g^{-1} = e^{-X}。$$

定理：指數映射在子集上仍有封閉性

先前僅討論了 $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$ ，然其對於 $G = \text{GL}(n, \mathbb{C})$ 、 $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ 、 $\text{SL}(n, \mathbb{C})$ 、 $\text{O}(n)$ 、 $\text{SO}(n)$ 、 $\text{U}(n)$ 或 $\text{SU}(n)$ 等都成立。

證明十分簡單，以下兩個為範例：

(a) 對於 $G = \text{SL}(n, \mathbb{R})$ ，套用矩陣的喬登標準型 (Jordan form) 與 $\det(e^X) = e^{\text{tr}(X)}$ 一式便可得證。 ■

(b) 對於 $G = \text{O}(n)$ 與反對稱矩陣 X ，因為 $[X^T, X] = 0$ ，故有 $(e^X)^T e^X = e^{X^T + X} = \mathbb{1}$ 而得證。 ■

定理：指數映射的微分映射

$$d\exp_e = \text{id} : T_e G \rightarrow T_e G \quad (8.24)$$

此代表 \exp 在 $e = \mathbb{I}$ 附近為雙射 (bijection, one-to-one and onto)。其中， id 表示單位映射。

證明如下：

$$d\exp_e(X) = \left. \frac{d}{dt} e^{tX} \right|_0 = X.$$

此結論也可由反函數定理得證。 ■

註：對於群的單位元常記為 e ，對於矩陣群又可記為單位矩陣 \mathbb{I} ；然而對於其切空間，單位元可以視為零向量，故也可記為 0 。對於指數映射有一圖像化描述如下圖。

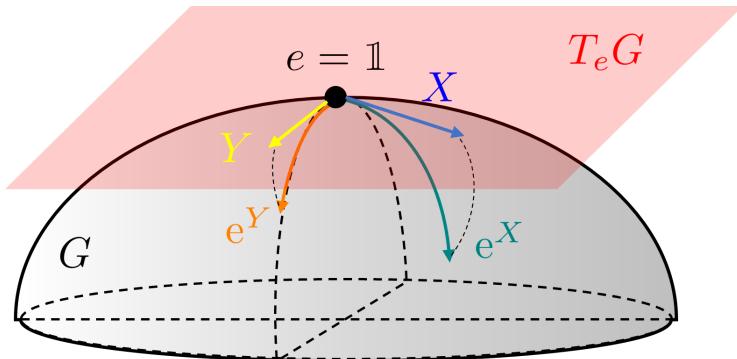


圖 8.1: 指數映射

此節最後其實還有介紹四元數 (quaternions)，不過較為粗淺，欲瞭解者請課本或註腳29即可，就不在此多做敘述。

9 Liouville 共形變換定理 (10/6)

先前對於 S^2 與 L^2 的 isometry 探討時，皆提到了保角變換，那麼對於更高維的流形，請問其具有哪些保角變換呢？而此時保角變換又是如何定義的？

9.1 共形/保角變換

定義：共形等價 (conformal equivalence)

考慮在流形^a (U, x^\cdot) 上的兩個第一標準型 $g_{ij}(x)$ 和 $g'_{ij}(x)$ 。若存在「共形因子 (conformal factor)」 $\rho(x) > 0$ 使得：

$$\rho \cdot g_{ij} = g'_{ij} , \quad (9.1)$$

則我們稱兩者為「共形等價」。

^a (U, x^\cdot) 為 chart，包含集合 U 與座標系 $x^\cdot = \{x^\alpha\} \equiv x$ 。

定義：共形變換 (conformal maps)^a

考慮變換 $\varphi : (U, x^\cdot, g_{ij}(x)) \rightarrow (V, y^\cdot, g'_{ij}(y))$ 。我們有 φ 的 pullback^b 定義為滿足：

$$\varphi^* \left(\sum_{i,j} g'_{ij}(y) dy^i dy^j \right) := \sum_{\alpha,\beta} \left(\sum_{i,j} g'_{ij}(\varphi(x)) \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} \right) dx^\alpha dx^\beta . \quad (9.2)$$

則我們稱 φ 為共形的 (conformal) 若且唯若其 pullback 使得第一標準型滿足：

$$\varphi^* \left(\sum_{i,j} g'_{ij}(y) dy^i dy^j \right) \equiv \rho^2(x) \cdot \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta , \quad (9.3)$$

其中共形因子 $\rho^2(x) > 0$ 。

^a conformal 可譯作保角或是共形，在此稱作共形因為聽起來比較酷。唯在討論複數時仍多用保角一詞。

^b Pullback 直翻即為「拉回」。 φ 為將 (U, x^\cdot) 打至 (V, y^\cdot) 的映射，因此 φ 的 pullback，記為 φ^* ，是將在 (V, y^\cdot) 的物件拉回以 (U, x^\cdot) 表示之。

由上述定義可以見得，因為 $g' \circ \phi = g$ ，有映射 $\varphi : (U, x) \rightarrow (V, y)$ 為共形的條件即

為：

$$\rho^2 \cdot g_{\alpha\beta} = \sum_{i,j} g_{ij} \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} \quad (\rho > 0), \quad (9.4)$$

或反之為：

$$\rho^{-2} \cdot g_{\alpha\beta} = \sum_{i,j} g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta} \quad (\rho > 0), \quad (9.5)$$

即變化前後的第一標準型僅相差一僅與位置 x (或 y)有關的倍率 ρ^2 ，兩者共形等價。

此概念也與線性代數中對於保角變換的概念相符。若一線性映射 A 為保角的，則對於對於某常數 ρ ，所有向量 v 皆滿足 $|Av| = \rho|v|$ 。

在一維的情況下，任意映射都是共形的。在二維的情況下，我們先前已看過，共形變換即是對應到所有的解析函數(以及與共軛變換的合成，為反解析(anti-analytic))，先前亦稱作保角變換。但在三維或以上者呢？在 \mathbb{R}^n 或 $\mathbb{R}^{p,q}$ ，我們已知的共形變換包含：

(a) isometries：如 $O(n)$ 和 $O(p, q)$ ，則有 $\rho^2 = 1$ 。

(b) 伸縮(dilations)： $x \mapsto \lambda x$ ，則有 $\rho^2 = \lambda^2$ 。

(c) 平移： $x \mapsto x + x_0$ ，則有 $\rho^2 = 1$ 。

(d) isometries 和 dilations 的合成。

但還有更多嗎？一個三維中的共形映射範例便是「反演(inversion)」變換：考慮對於 $g_{ij} = \delta_{ij}$ ，

$$x^\alpha \mapsto y^\alpha = \frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{\langle x - x_0, x - x_0 \rangle}. \quad (9.6)$$

其幾何上變換如圖 9.1。可以見：

$$\begin{aligned} x^\alpha &= \frac{y^\alpha}{\langle y, y \rangle} + x_0^\alpha \\ \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} &= \frac{\delta_\alpha^i}{\sum_k (y^k)^2} - \frac{2y^\alpha y^i}{[\sum_k (y^k)^2]^2}, \end{aligned}$$

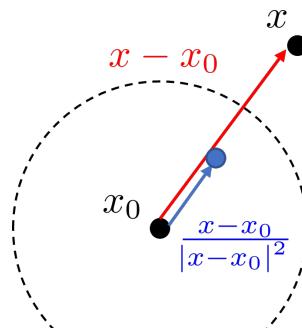


圖 9.1: 反演

故反演變換確實為三維中的共形變換：

$$\sum_{i,j} g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta} = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{[\sum_k (y^k)^2]^2} = \delta_{\alpha\beta} \langle x - x_0, x - x_0 \rangle^2 \equiv g_{\alpha\beta} \cdot \rho^{-2}. \quad \blacksquare$$

9.2 Liouville 共形變換定理

定理：(Liouville)

對於共形映射 $\varphi : U \rightarrow V \simeq \mathbb{R}^{3+}$ (可以為偽歐氏空間)，則 φ 必為 isometry、dilation、inversion，或是三者的合成。

該定理表明對於任何局部歐氏或偽歐氏空間，只要維度大於等於 3，則共形變換必為 isometry、dilation 和 inversion 的合成。與二維的共形變換可以是任意解析函數相比，多樣性少了很多！事實上，維度越高，共形變換便越少，故共形場論 (conformal field theory) 對於二維情況的研究更為豐富。

扯遠了，接下來我們將證明 Liouville 的共形變換定理，如下：

(1) 考慮在 φ 變換作用在一個「常數」向量場 e_i 上，如圖 9.2，其中 $e_i \perp e_j$ ($i \neq j$)。但我們也可以使用別的向量場如 η_i ，只是將比較複雜。

(2) 令 $A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} \end{bmatrix} = [\varphi_1, \dots, \varphi_n]$ 為座標變換的線性近似矩陣，其中 $\varphi_i := \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ 。當然，可以見得該向量場的變換即為 $e_i \mapsto \varphi_i = Ae_i$ 。

(3) 因為保角性即意味著對於任意向量 v 和 w ，有 $\langle Av, Aw \rangle = \rho^2 \langle v, w \rangle$ ，所以 $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0$ ($i \neq j$)。

(4) 將該式微分並輪換 i, j, k ，得到：

$$\begin{cases} 0 = \partial_k \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \langle \varphi_{ik}, \varphi_j \rangle + \langle \varphi_i, \varphi_{jk} \rangle \\ 0 = \partial_j \langle \varphi_k, \varphi_i \rangle = \langle \varphi_{jk}, \varphi_i \rangle + \langle \varphi_k, \varphi_{ij} \rangle \quad (i \neq j \neq k), \\ 0 = \partial_i \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = \langle \varphi_{ij}, \varphi_k \rangle + \langle \varphi_j, \varphi_{ik} \rangle \end{cases}$$

將前兩式相加、減去第三式，得到：

$$\langle \varphi_i, \varphi_{jk} \rangle = 0 \quad (9.7)$$

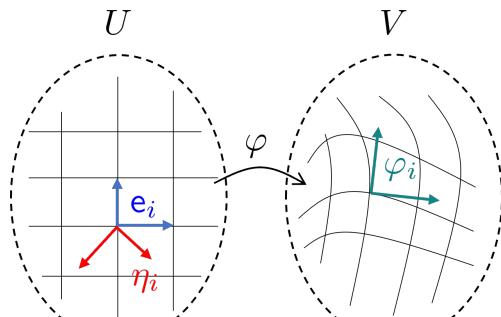


圖 9.2: 座標變換下的基底

(5) $\langle \varphi_i, \varphi_{jk} \rangle = 0$ 對於任意 $i \neq j$ 或 k 都成立，故

可以得到以下線性組合： $\varphi_{jk} = \nu_j \varphi_j + \nu_k \varphi_k$ 。

(6) 因為基底 φ_j 之間的正交性，係數 ν_j 滿足：

$$\nu_j = \frac{\langle \varphi_{jk}, \varphi_j \rangle}{\langle \varphi_j, \varphi_j \rangle} = \frac{\partial_k \langle \varphi_j, \varphi_j \rangle}{2 \langle \varphi_j, \varphi_j \rangle} = \frac{\partial_k (\rho^2)}{2\rho^2} = (\ln \rho)_k. \quad (9.8)$$

若定義 $\mu := \ln \rho$ ，則有 $\nu_j = \partial_k \mu \equiv \mu_k$ 。其中 ρ^2 即為定理中的共形因子。

(7) 我們再將上式繼續微分 (i, j, k 相異)，觀察是否會產生遞迴：

$$\begin{aligned} \varphi_{jki} &= \mu_{ki} \varphi_j + \mu_k \varphi_{ji} + \mu_{ji} \varphi_k + \mu_j \varphi_{ki} \\ &= \mu_{ki} \varphi_j + \mu_k (\mu_j \varphi_i + \mu_i \varphi_j) + \mu_{ji} \varphi_k + \mu_j (\mu_k \varphi_i + \mu_i \varphi_k) \\ &= (2\mu_j \mu_k) \varphi_i + (\mu_{ik} + \mu_i \mu_k) \varphi_j + (\mu_{ij} + \mu_i \mu_j) \varphi_k. \end{aligned}$$

因為上式對於 (ijk) 應該要是「輪換對稱」的。

故比較係數可知：

$$\mu_{jk} + \mu_j \mu_k = 2\mu_j \mu_k. \quad (9.9)$$

(8) 由此可知 $\mu_{jk} - \mu_j \mu_k = 0$ 。又 $\mu = \ln \rho = -\ln \rho^{-1}$ ，故：

$$0 = -\frac{(\rho^{-1})_{jk}\rho^{-1} - (\rho^{-1})_j(\rho^{-1})_k}{(\rho^{-1})^2} - \frac{(\rho^{-1})_j}{\rho^{-1}} \frac{(\rho^{-1})_k}{\rho^{-1}} = -\frac{(\rho^{-1})_{jk}}{\rho^{-1}}.$$

此即意味著 ρ^{-1} 的海森矩陣 (Hessian matrix) $D^2(\rho^{-1})$

這個二次型 (bilinear form) 滿足：對於任意

$\eta_j \perp \eta_k$ ，有 $D^2(\rho^{-1})(\eta_j, \eta_k) = 0$ 。

(9) 根據此即意味著 $(\rho^{-1})_{\alpha\beta}(x) \equiv \delta_{\alpha\beta} \cdot \sigma(x) \equiv \sigma(x) \cdot g_{\alpha\beta}(x)$ 。此即共形映射的定義。

(10) 此外，因為 $\sigma_\gamma = \sigma_\gamma g_\alpha \alpha = (\rho^{-1})_{\alpha\alpha\gamma} = \sigma_\alpha g_{\alpha\gamma} = 0$ ，故對於任意 $\gamma = 1, \dots, n$ ，有 $\sigma_\gamma = 0$ 。亦即 $\sigma(x) = \sigma$ 為常數。

(11) 接著若為考慮 \mathbb{R}^n ，則因為 $\rho_{\alpha\alpha}$ = 常數，有 $\rho^{-1} = a_1|x - x_0|^2 + b_1$ 。同樣地， φ^{-1} 也是共形的，故 $\rho = a_2|y - y_0|^2 + b_2$ 也成立。將兩式相乘得到：

$$(a_1|x - x_0|^2 + b_1)(a_2|y - y_0|^2 + b_2) = 1. \quad (9.10)$$

此 $x \mapsto y$ 變換即為將以 x_0 為球心的球映射到以 y_0 為球心的球。

(12) 因此，直線 $\overline{x_0x}$ 將被映射到直線 $\overline{y_0y}$ ，其長度關係為：

$$|y - y_0| = \int_{t_1}^t \rho d\ell_U = \int_{t_0}^t (a_1\tau^2 + b_1)^{-1} d\tau. \quad (9.11)$$

(13) 調整不同的參數 a_1, b_1 即可發現其運動為 isometry、dilation 和 inversion 的組合⁴²。故得證。

■

可以注意到，以上的推導從 (4) 起便仰賴維度 ≥ 3 ，且過程中對於空間的度規並無特別要求。故 Liouville 共形變換定理對於任意 $\mathbb{R}_{p,q}^{>3}$ 皆成立。然在其他空間中，inversion 實際的形式有待將 (11) 往後依例推導而得知。

最後補充一小定理⁴³，並省略其證明：

定理： $\mathbb{R}^{p,q}$ 空間中的共形映射具有以下同構：

$$\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q}) \cong \text{O}(p+1, q+1). \quad (9.12)$$

⁴² 三維中，isometry、dilation 皆可由 inversion 的組合得到。

⁴³ 此即 conformal geometric algebra 背後建構的原理。

10 張量與晶體學群 (10/11)

為了研究更高維度下的微分幾何，我們需要一些新的定義與標記，此即對於張量研究之伊始。

10.1 張量的代數理論

張量可以說是「上下標的藝術⁴⁴」，清楚的上下標可以簡化公式增加記憶，我們事後將會看見。一個十分重要的標記為：

定義：愛因斯坦求和約定 (Einstein summation convention)

倘若遇到連加項中有出現成對的上下標，則連加符號可以省略如下：

$$\sum_i a^i b_i \equiv a^i b_i . \quad (10.1)$$

若往後文中無意表達連加，則從上下文中可以清楚明白或將會特別標明。

另外，我們在接下來的討論中將多次進行座標變換，故考慮開集 U 中的兩座標系：我們記座標 x 的基底向量為 \mathbf{e}_i 、座標 y 的基底向量為 $\tilde{\mathbf{e}}_i$ 。且此章往後，向量將不再特別用粗體表示。

10.1.1 向量的意義

究竟什麼是向量呢？我們至今看過「兩種」向量：切向量與梯度向量，兩者的行為在座標變換下完全相反，見下面的比較與探討。

(a) 向量 (vectors)，亦稱反變/逆變向量 (contravariant vectors)：曲線的切向量。

若考慮曲線 $x^i(t) \in \mathbb{R}^n$ ，則其向量為：

$$\dot{x} = \frac{dx^i}{dt} \mathbf{e}_i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{dy^j}{dt} \mathbf{e}_i \equiv \frac{dy^j}{dt} \tilde{\mathbf{e}}_j ,$$

故有基底變換公式為：

$$\tilde{\mathbf{e}}_j = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \mathbf{e}_i . \quad (10.2)$$

⁴⁴ 原話為：tensor is the art of indexing。

若考慮向量：

$$v = \tilde{\xi}^j \tilde{\mathbf{e}}_j = \tilde{\xi}^j \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \mathbf{e}_i \equiv \xi^i \mathbf{e}_i ,$$

故有係數的反變換公式為：

$$\xi^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \tilde{\xi}^j . \quad (10.3)$$

(b) 共向量⁴⁵(covectors)，亦稱共變/協變向量(covariant vectors)：函數的梯度。

若考慮函數 f ，則其梯度為：

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathbf{e}^i = \frac{\partial f}{\partial y^j} \frac{dy^j}{dx^i} \mathbf{e}^i \equiv \frac{\partial f}{\partial y^j} \tilde{\mathbf{e}}^j ,$$

故有基底變換公式為：

$$\tilde{\mathbf{e}}^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \mathbf{e}^i . \quad (10.4)$$

若考慮共向量：

$$v = \tilde{\xi}_j \tilde{\mathbf{e}}^j = \tilde{x}^i_j \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \mathbf{e}^i \equiv \xi_i \mathbf{e}^i ,$$

故有係數的反變換公式為：

$$\xi_i = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \tilde{\xi}_j . \quad (10.5)$$

透過上方的討論，可以見得 vectors 的行為似「方向導數(directional derivative)」，而 covectors 的行為則似「全微分(total differential)⁴⁶」，故我們有以下標記法方便我們記住 vectors 與 covectors 之間的變換規則：

定義：我們記 vectors 與 covectors 的基底為：

$$\mathbf{e}_i := \frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i \quad \mathbf{e}^i := dx^i . \quad (10.6)$$

此標記僅為記憶用，恰好透過我們對於微分算子與全微分連鎖律的關係表示 vectors 與 covectors 的座標變換規則。另外記住，上下標皆為成對出現的，此規則搭配良好的上下標習慣可以讓公式的記憶顯得簡單無比⁴⁷。

⁴⁵ 我不確定其中文怎麼翻譯，故多將使用英文描述之。

⁴⁶ f 若為座標 $\{x^i\}$ 的函數，則其全微分即為 $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ 。

⁴⁷ 以公式 10.5 為例：因為右式 $\tilde{\xi}_j$ 有下標 j ，且為與 y 座標有關，故其必須乘上 ∂y^j 於分子；因為左式有一 i 在下標，故右式需要有 ∂x^i 在分母。

事實上，若向量屬於一向量空間 V ，則共向量則屬於其對偶空間 (dual space) V^* 。

定義：對偶空間

對於一向量空間 V ，其對偶空間 V^* 定義為所有 V 上的線性函數的集合，對偶空間亦為一向量空間。

若 V 之基底為 $\{e_i\}$ ，則我們可以定義 V^* 上的標準 (canonical) 基底為 $\{e^i\}$ 滿足：

$$e^i(e_j) = \delta_j^i. \quad (10.7)$$

這樣的觀念也很符合我們的直覺：梯度場本就可以視為一線性運算子。我們在此考慮一範例：例如有向量 $v = v^i \partial_i$ 與共向量 $\eta = \eta_i dx^i$ ，則我們可以定義其之間的作用為：

$$(df, v) = df(v) := v(f) = \left(\sum_i v^i \frac{\partial}{\partial i} \right) (f) = \sum_i v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad (10.8)$$

其可視為是 f 在 v 方向上的方向導數。

最後，補充一定理以解釋為何對偶空間標準基底可以如此定之：

定理：Riesz 表現定理 (Riesz representation theorem)

考慮內積空間 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 。對於任何線性映射 $f \in V^*$ ，皆存在唯一的 $w \in V$ 使得：

對於任意 $v \in V$ ，有

$$f(v) = \langle v, w \rangle, \quad (10.9)$$

亦即兩空間同構： $V \cong V^*$ 。

10.1.2 張量

給予一流形 \mathcal{M} ，其上有點 $p \in \mathcal{M}$ 。我們考慮在該點的所有 C^∞ 函數，記為 C_p^∞ 。則我們可視在該點的切空間 $T_p \mathcal{M}$ 為「所有一階微分算子⁴⁸」，亦即對於 $v \in T_p \mathcal{M}$ ，有：

$$v : C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}, \quad (10.10)$$

則可以證明 $T_p \mathcal{M} = \text{span}\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ 。由此往後，我們討論的向量空間即為切空間 (tangent space) $V = T_p \mathcal{M}$ ，其對偶空間則為餘切空間 (cotangent space) $V^* = T_p^* \mathcal{M}$ 。由此也可以

⁴⁸ 對於 $v \in T_p \mathcal{M}$ ， $f, g \in C_p^\infty$ ，有 $v(fg) = v(f)g + fv(g)$ 。

看出微分幾何與線性代數之間的差異：線性代數討論的是一固定的向量空間；但是微分幾何所考慮的則是移動的向量空間， V 與 V^* 皆是 p 上的叢 (bundle)⁴⁹。

有了 V 與 V^* ，即對應有了對於 V^* 與 V 的線性函數。我們可以將這些線性函數組合在一起成為一個多線性函數 (multilinear function)，這就是張量。亦可視之為透過張量積 (tensor product) \otimes 將向量與共向量組合在一起的物件。以上概念都會在之後多作探討。首先我們來看一個張量到底長怎樣，再來看要怎麼定義之。

定義： (p, q) -張量

在向量空間 V 下的 (p, q) -張量 T 為：

$$\mathcal{T}^{p,q}(V) := \bigotimes^p V \otimes \bigotimes^q V^* \quad (10.11)$$

內的元素，其可寫為：

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \end{aligned} \quad (10.12)$$

為求方便，我們也可簡記之為：

$$T = \sum_{I,J} T_J^I e_I \otimes e^J \in \mathcal{T}^{p,q}, \quad (10.13)$$

其中有序集 I 、 J 的大小為 $|I| = p$ 、 $|J| = q$ 。 (p, q) 為該張量的型 (type)， $n = p + q$ 為該張量的階 (order)。

定義：張量場

張量場為在各個座標系 ($\{x^i\}$) 中滿足「張量座標變換規則」的函數 $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(x)$ ：

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(x) = \sum_{K,L} \tilde{T}_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p}(y) \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{k_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial y^{k_p}} \cdot \frac{\partial y^{l_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial y^{l_q}}{\partial x^{j_q}}. \quad (10.14)$$

上方之定義即是最常聽到的「張量是滿足張量座標變換規則的物件」的定義。雖然

⁴⁹ 叢即為某點與附加於該點的特性，常見的叢有切叢、餘切叢、向量叢 (vector bundle)、纖維叢 (fiber bundle)、法向量向量叢 (normal bundle)。以向量叢為例，其即為某點與附加於某點上的向量空間。

看似是沒有循環論證的一句話，卻很實在的定義了究竟什麼是張量。

一些張量的範例如下，可以確認其在座標變換下確實滿足張量座標變換規則：

(a) $(0, 2)$ -張量：第一標準型。

$$\sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j \equiv g_{ij} dx^i dx^j , \quad (10.15)$$

其中若 $g_{ij} = g_{ji}$ ，我們記 $dx^i \otimes dx^j = dx^i dx^j$ 。

(b) $(2, 0)$ -張量：第一標準型的反矩陣。

$$g^{ij} = (g_{ij})^{-1} . \quad (10.16)$$

(c) $(1, 1)$ -張量：矩陣。

$$A = \sum_{i,j} a_j^i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \equiv a_j^i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j : V \rightarrow V \quad (10.17)$$

為一矩陣，因為對於向量 $x = x^k \mathbf{e}_k$ ，有矩陣乘法：

$$Ax = \sum_{i,j} a_j^i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j (x^k \mathbf{e}_k) = \sum_{i,j} a_j^i x^k \mathbf{e}_i \cdot \delta_k^j = \sum_{i,j} a_j^i x^j \mathbf{e}_i . \quad (10.18)$$

有些標記習慣上會將張量後面的 $\mathbf{e}_I \otimes \mathbf{e}^J$ 省略，只表示前面的係數，但要小心這樣的標記較容易粗心犯錯。

從建構上可以見得，對於開集 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ，若我們可以在點 $p \in S$ 找到其切空間，則可有張量場⁵⁰：

$$\mathcal{T}^{p,q}(S) = (p, q)\text{-張量場} = \bigsqcup_{p \in S} \bigotimes^{p,q} (T_p S) . \quad (10.19)$$

也可視之為一向量空間，有基底 $\{\partial_{x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \partial_{x^{i+p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_p}\}$ 。張量 $T \in \mathcal{T}^{p,q}(S)$ 的係數 $T_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p}(x)$ 若是 C^k 函數，則有稱 T 為 C^k -張量。但若曲面 S 並非 C^∞ 而是 C^k 的，因為要滿足張量的座標變換公式，該張量叢最多僅能為 C^{k-1} -張量場。

⁵⁰ 張量場為互斥聯集 \bigsqcup 因為 $\bigotimes^{p,q} (T_p S)$ 為每點 $p \in S$ 上面的纖維，整個張量場為纖維叢，可以用更大的 chart $S \times \mathbb{R}^{p+q}$ 來描述。例如一曲面 $U \subset \mathbb{R}^3$ 上的法向量叢即可以用座標 $U \times S^2$ 描述之。

10.1.3 張量與線性映射

⁵¹ 在前一小節的範例中，我們見到張量可以被視為是矩陣，我們將在此見到其實張量可以被視為是更廣義的線性映射。

考慮向量空間 V ，有基底 $\{\mathbf{e}_i\}$ 。它具有對偶空間 $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ 為所有從 V 到 \mathbb{R} 的線性映射⁵²，有對偶基底 $\{\mathbf{e}_i^*\} = \{\mathbf{e}^i\}$ 。那麼 V^{**} 為何？可以見得 $V^{**} \cong V$ 因為兩者之間具有標準同構 (canonical isomorphism)⁵³ 為：對於 $v \in V^*$ 、 $f \in V$ ， $v(f) = f(v)$ 。對於有限維向量空間，我們有 $V^* \cong V$ ，但此同構不一定是 canonical 的。除非 V 有一非退化的二次型 (non-degenerate quadratic form)^{54 55}，則我們可以透過 Riesz 表現定理來定義其標準基底 $\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) := \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ ，這才有標準同構。

至於一個張量 $T \in \mathcal{T}^{p,q}(V) \equiv \bigotimes^{p,q} V \equiv \bigotimes^p V \otimes \bigotimes^q V^*$ 也是一個線性映射：其 V 分量可將 $v \in V^*$ 視為變數並輸出純量、其 V^* 分量可將 $v \in V$ 視為變數並輸出純量。例如： $T \in V \otimes V \otimes V^*$ 可以有許多不同的詮釋法，

$$T \in \begin{cases} V \otimes V \otimes V^* & : V^* \otimes V^* \otimes V \rightarrow \mathbb{R} \\ (V \otimes V) \otimes V^* & : V \rightarrow V \otimes V \\ V \otimes V \otimes (V^*) & : V^* \otimes V^* \rightarrow V^* \\ V \otimes (V \otimes V^*) & : V^* \rightarrow V \otimes V^* \\ \vdots \end{cases}.$$

而我們先前考慮的矩陣為 $A \in V \otimes V^* : V \rightarrow V$ 。故張量具有研究線性映射的極佳結構。

10.1.4 張量的代數運算

我們來討論有哪些張量的代數操作能滿足其封閉性。共有以下三種操作：

(a) 置換 (permutation)：考慮以下整數 $1, 2, \dots, q$ 的置換⁵⁶ $\sigma \in S_q$ ，則在每點有置換下

⁵¹ 此部分為由下週內容搬過來的，筆者認為這樣較為通順。

⁵² $\text{Hom}_F(V, W)$ 為所有從 V 到 W 的 F -線性映射。

⁵³ 這邊的標準 (canonical) 僅只代表此結論為很直覺的，不具任何嚴謹的數學意義。

⁵⁴ 二次型即表示該空間的內積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 。對於向量 $v \in V$ ，若 $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ ，則我們稱該二次型為非退化的。反之，若存在 $v \neq 0$ 但 $\langle v, v \rangle = 0$ ，則該二次型為退化的。

⁵⁵ 一個具有模的完備 (complete) 向量空間稱為 Banach 空間。一個具有內積的完備向量空間稱為希爾伯特空間 (Hilbert space)。希爾伯特空間除了是一 Banach 空間外，其上也可定義柯西序列。

⁵⁶ 對稱群 (symmetric group) S_n 為 n 個元素的所有置換 (permutation) 變換。

標後的新張量為 σT (T 為原張量)，其係數滿足：

$$\tilde{T}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T_{\sigma(j_1) \dots \sigma(j_q)}^{i_1 \dots i_p} \circ \quad (10.20)$$

上標的置換亦可如是定義。

(b) 縮約 (contraction)：縮約為透過將 $i_k = j_l = i$ 連加起來，將 (p, q) -張量變成一個 $(p - 1, q - 1)$ -張量。定義為：

$$T \mapsto \sum_{I \setminus \{i_k\}, J \setminus \{j_l\}} \sum_i T_{j_1 \dots i \dots j_q}^{i_1 \dots i \dots i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_{k-1}} \otimes e_{i_{k+1}} \otimes e_{i_p} \otimes e^{j^1} \otimes \dots \otimes e^{j_{l-1}} \otimes e^{j_{l+1}} \otimes e^{j_q}, \quad (10.21)$$

亦可僅用其係數表示為：

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \mapsto \sum_i T_{j_1 \dots i \dots j_q}^{i_1 \dots i \dots i_p} \equiv T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \Big|_{i_k=j_l=i}. \quad (10.22)$$

須注意，上兩式中的 i 分別替代了原本 i_k 與 j_l 的位置。縮約亦可被稱為「跡 (trace)⁵⁷」乃因對於矩陣 a_j^i ，其縮約即為 a_i^i ，這就是該矩陣的跡！

(c) 張量積 (tensor product)：考慮 (p, q) -張量 T 與 (r, s) -張量 U ，兩者之張量積 $T \otimes U$ 為一 $(p + q, r + s)$ -張量。

在此驗證經過縮約仍為張量：事實上，僅需驗證其滿足張量變換規則，

$$\begin{aligned} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \Big|_{i_k=j_l=i} &= T_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p} \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial y^{i'_p}} \right) \left(\frac{\partial y^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial y^{j'_q}}{\partial x^{j_q}} \right) \Big|_{i_k=j_l=i} \\ &= T_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p} \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_{k-1}}}{\partial y^{i'_{k-1}}} \frac{\partial x^{i_{k+1}}}{\partial y^{i'_{k+1}}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial y^{i'_p}} \right) \left(\frac{\partial y^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial y^{j'_{k-1}}}{\partial x^{j_{k-1}}} \frac{\partial y^{j'_{k+1}}}{\partial x^{j_{k+1}}} \dots \frac{\partial y^{j'_q}}{\partial x^{j_q}} \right) \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^{i'_k}} \frac{\partial y^{j'_l}}{\partial x^i} \\ &= T_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p} \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_{k-1}}}{\partial y^{i'_{k-1}}} \frac{\partial x^{i_{k+1}}}{\partial y^{i'_{k+1}}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial y^{i'_p}} \right) \left(\frac{\partial y^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial y^{j'_{k-1}}}{\partial x^{j_{k-1}}} \frac{\partial y^{j'_{k+1}}}{\partial x^{j_{k+1}}} \dots \frac{\partial y^{j'_q}}{\partial x^{j_q}} \right) \cdot \delta_{i'_k}^{j'_l} \\ &= T_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p} \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_{k-1}}}{\partial y^{i'_{k-1}}} \frac{\partial x^{i_{k+1}}}{\partial y^{i'_{k+1}}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial y^{i'_p}} \right) \left(\frac{\partial y^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial y^{j'_{k-1}}}{\partial x^{j_{k-1}}} \frac{\partial y^{j'_{k+1}}}{\partial x^{j_{k+1}}} \dots \frac{\partial y^{j'_q}}{\partial x^{j_q}} \right) \Big|_{i'_k=j'_l=i}. \end{aligned}$$

故其是為一張量。 ■

⁵⁷ 動詞為 trace out 或 take the trace。

10.2 晶體學群

⁵⁸此節的目標為討論並分類 $\text{SO}(3)$ 的有限子群，最後將會與張量有所關聯。內容會用到一些群論的結論，因求筆記閱讀的完整性，筆者將會在此先補充必要的內容，提供些許範例並省略部分細節與推導。欲對於群論更深入的探討可以見 David S. Dummit 和 Richard M. Foote 所著的「Abstract Algebra」一書，內含所有此節需要的知識。

10.2.1 群論淺談

什麼是群？

群在概念上代表著變換與對稱性，故根據我們對於變換與對稱性的直覺定義（可以疊加、可以什麼都不做、可以反著做），其應該滿足以下規則：

定義：群 (group)

對於集合 G 與其上滿足封閉性的二元運算 \cdot ，我們稱 (G, \cdot) 為群若：

- (a) 對於任意 $g_1, g_2, g_3 \in G$ ，有結合律： $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$ 。
- (b) 存在單位元 $e \equiv 1 \in G$ 使得對於任意 $g \in G$ ，皆滿足 $1 \cdot g = g$ 。
- (c) 對於任意 $g \in G$ ，皆存在反元素 $g^{-1} \in G$ 使得 $g \cdot g^{-1} = 1$ 。

在計算上，常將運算元 \cdot 省略有： $g \cdot h \equiv gh$ 。

若語意明白，亦可省略二元運算並直接稱 G 為群。一些群的範例如下：

- (a) 循環群 (cyclic group)： $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ ($n \in \mathbb{N}$)。此群即為 $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ 在模 n 加法下的結構。其大小滿足 $|\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = n$ 。循環群亦可記為 \mathbb{Z}_n 、 C_n 。
- (b) 整數： $(\mathbb{Z}, +)$ 。其有無限多個元素。
- (c) 二面體群 (dihedral group)： D_{2n} 。為所有保持正 n 邊形不變的鏡射、旋轉變換，其元素共 $|D_{2n}| = 2n$ 個。

一個群的大小我們記之為 $|G|$ ，稱之為其階 (order)。若 $g \in G$ 滿足存在一最小正整數 s 使得 $g^s = 1$ ，則我們記 $s = |g|$ 為 g 的階。

⁵⁸此節在課堂上為由助教介紹，較不清楚，故以下內容大致為筆者參考課本後所彙整而得。

群作用

群做為變換可以作用在某集合上，將該集合內的元素打至另一元素，是為群作用：

定義：群作用 (group action)

群 G 在集合 S 上的群作用為^a： $G \times S \rightarrow S$ 、 $(g, s) \mapsto g(s)$ ^b，滿足對於 $g, h \in G$ ， $s \in S$ ，有：

$$g(h(s)) = (gh)(s)。 \quad (10.23)$$

^a 在此僅討論左作用 (left action)，即 g 從左邊作用上 s 。

^b 意義明確時，可簡寫成 $g(s) = gs$ 。

因為公式 10.23 的條件，若 $s \in G \equiv S$ ，群作用僅有三種可能： $g(s) = gs$ 、 $g(s) = sg^{-1}$ 、 $g(s) = gsg^{-1}$ 。

而在群作用下，我們可以討論該被作用的元素與群元素間可能有的行為：

定義：軌道 (orbit)

元素 $s \in S$ 在群 G 作用下可以到達的所有可能狀態稱為其軌道：

$$\text{Orb}_s(G) := \{s^* \in S \mid \exists g \in G \text{ s.t. } s^* = gs\}。 \quad (10.24)$$

定義：穩定子 (stabilizer)

對於 $s \in S$ ，考慮那些不會使其改變狀態的變換 $g \in G$ 為其穩定子：

$$\text{Stab}_s(G) = G_s := \{g \in G \mid gs = s\}。 \quad (10.25)$$

可以確認，穩定子 $\text{Stab}_s(G)$ 亦為群，且 $\text{Stab}_s(G) \subseteq G$ ，其為 G 的一個「子群」。而倘若 G 作用在 S 上僅有一個軌道，則我們稱該作用為 transitive，亦即 S 中任一元素都可以透過 G 的作用到達任意的另一個 S 中的元素。另外，以下關係式成立：

定理：軌道-穩定子定理 (orbit-stabilizer theorem)

$$|\text{Orb}_s(G)| \cdot |\text{Stab}_s(G)| = |G| \quad (10.26)$$

此定理對於求某些群的大小時十分有用。

子群

對於一個群，其裡面的變換非常多，乃至無法研究其性質，故我們常研究其子集之特性以推得整個群的特性。若該子集亦滿足群特性，則稱為子群：

定義：子群 (subgroup)

考慮 $H \subseteq G$ ，若：

- (a) $H \neq \emptyset$ 、
- (b) 對於所有 $x, y \in H$ ， $xy^{-1} \in H$ ，

則稱 H 為 G 的一個子群，記為 $H \leq G$ 。倘若子群 $H \subset G$ ，則 $H < G$ 。

當 $g \in G$ 作用在其子群 $H \leq G$ 上時，我們可以定義其左陪集 (left coset) 為 $gH = \{gh \mid \forall h \in H\}$ 與右陪集 (right coset) 為 $Hg = \{hg \mid \forall h \in H\}$ 。注意，陪集並不是群，因為其沒有單位元。另外有一很特別的子群需要介紹：

定義：正規子群 (normal subgroup)

若子群 $N \leq G$ 滿足：

$$gN = Ng \quad (\forall g \in G), \quad (10.27)$$

則我們稱 N 為 G 的正規子群，記之為 $N \trianglelefteq G$ 。若 $N < G$ ，則 $N \triangleleft G$ 。

群之間的乘積

我們可以將簡單的群組合在一起，得到更為複雜的群結構。

定義：直積 (direct product)

考慮群 (G, \circ_G) 與 (H, \circ_H) ，則其兩者的直積為一個新的群 $G \times H$ ，具有運算 · 滿足：

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 \circ_G g_2, h_1 \circ_H h_2). \quad (10.28)$$

一簡單的範例為克萊茵四元群 (Klein 4-group / Viergruppe)：

$$V_4 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}.$$

運算規則如： $(0, 1) + (1, 1) = (1, 0)$ 。

另一個更為重要的群之間的乘積為：

定義：半直積 (semidirect product)

考慮群 G 、 H 與 G 在 H 上的作用 (對於 $g \in G$ 、 $h \in H$ 有作用 $g(h)$)，有兩者的半直積 $A \ltimes B$ 滿足運算規則：

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 g_1(h_2))。 \quad (10.29)$$

一範例為考慮旋轉變換 $A \in \text{SO}(3)$ 與平移變換 $\xi \in \text{T}(3) = \text{作用在向量 } x \in \mathbb{R}^3$ 上，有 $(A, \xi)(x) = Ax + \xi$ 。考慮連續兩次的變換： $(A_1, \xi_1)((A_2, \xi_2)(x)) = (A_1, \xi_1)(A_2 x + \xi_2) = (A_1 A_2)x + (\xi_1 + A_1 \xi_2)$ ，故 $(A_1, \xi_1) \cdot (A_2, \xi_2) = (A_1 A_2, \xi_1 + A_1 \xi_2)$ 。可知旋轉平移變換屬於半直積： $\text{SO}(3) \ltimes \text{T}(3) =: \text{SE}(3)$ 為特殊歐幾里得群 (special Euclidean group)。若考慮的是 \mathbb{R}^n 中的正交變換 $\text{O}(n)$ 與平移變換 $\text{T}(n)$ 則有 $\text{E}(n) = \text{O}(n) \ltimes \text{T}(n)$ 。

定理：若有半直積 $G \ltimes H$ ，則 $H \trianglelefteq (G \ltimes H)$ 。

商群

定義：商群 (quotient group)

考慮群 G 與其正規子群 $N \trianglelefteq G$ ，因為 $gN = Ng$ ($\forall g \in G$)，我們可以建立一等價關係：對於 $g, g' \in G$ ，兩者等價若且唯若左陪集相同，即 $gN = g'N$ 。此等價關係對應的等價類為 $[gN]$ 。因此有商群定義為：

$$G/N := \{[gN] \mid \forall g \in G\}。 \quad (10.30)$$

可以觀察到，商群確實為群，其滿足特性：

- (a) $[g_1N] \cdot [g_2N] = [(g_1g_2)N]$ 。(因為對於 $g_1n_1 \in g_1N$ 、 $g_2n_2 \in g_2N$ ，其中 $g_2^{-1}n_1g_2 = n_3 \in N$ ，有 $g_1n_1 \cdot g_2n_2 = g_1(n_1g_2)n_2 = g_1(g_2n_3)n_2 \in (g_1g_2)N$ 。)
- (b) $[N] \in G/N$ 為單位元。對於任意 $[gN] \in G/N$ ，皆存在反元素 $[g^{-1}N] \in G/N$ 。
- (c) 存在「自然投影同態 (natural projection homomorphism)」 $\pi : G \rightarrow G/N$ 使得核 $\ker(\pi) = N$ (對於相此特性之介紹，見下面)。

範例如下：因為 $\text{T}(n)$ 是 $\text{E}(n)$ 的正規子群， $\text{E}(n)/\text{T}(n) \cong \text{O}(n)$ (\cong 表示同構，見下面)。

群同構

我們常考慮保持群結構的映射，稱其為同態：

定義：同態 (homomorphism)

對於群 (G, \cdot) 與 (H, \cdot) ，若存在映射：

$$\varphi : G \rightarrow H \quad (10.31)$$

滿足：

$$\varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2), \quad (10.32)$$

則稱 φ 為從 G 到 H 的同態。

定義：核 (kernel)

若有群同態 $\varphi : G \rightarrow H$ ，則記該映射的核為：

$$\ker(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = 1 \in H\}. \quad (10.33)$$

接著，群與群之間雖然有時候長得不太一樣，但有時結構卻是相同的，我們愈描述此等關係如下。

定義：同構 (isomorphism)

若存在同態 $\varphi : G \rightarrow H$ 為雙射，則稱 φ 為同構。且此時我們亦稱 G 和 H 同構，記為 $G \cong H$ 。

定義：自同構 (automorphism)

若 $\varphi : G \rightarrow G$ 為一同構，則亦稱之為自同構。即自己對自己的同構。

關於群同構，有以下定理。

定理：第二同構定理 (second isomorphism theorem)

考慮群 G 及其子群 $S \leq G$ 和正規子群 $N \trianglelefteq G$ ，則：

$$S \ltimes N/N \cong S/(S \cap N). \quad (10.34)$$

此外，我們提及對於正規自群 N ，存在自然投影同態 $\pi : G \rightarrow G/N$ 使得 $\ker(\pi) = N$ 。則第二同構定理亦可以寫作：對於 $S \leq G$ 與同態 π ，

$$\pi(S) \cong S / (S \cap \ker(\pi)). \quad (10.35)$$

10.2.2 晶體簡介

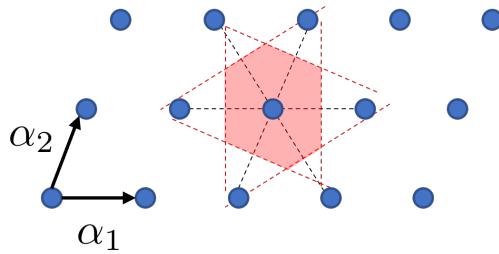


圖 10.1: 晶格

我們考慮一個空間中⁵⁹的晶格 (lattice) L ，其為一點集。假設 L 中的每個晶格點，皆可以表示為 (見圖 10.1)：

$$\alpha = n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + n_3\alpha_3 \quad (n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}), \quad (10.36)$$

其中 α_i 為晶格平移向量 (lattice translational vectors)。 α_i 所張出來的平行六面體稱為基礎晶胞 (primitive cell)，整個晶格可以視為是基礎晶胞透過平移堆疊出來的。且若對於所有 $n_i \in \mathbb{Z}$ 向量 α 皆屬於 L ，則我們可以看到此晶格具有平移不變性 (translational invariance)：考慮平移變換 $T \in T(3)$ ，表示為：

$$T = n_1\tau_1 + n_2\tau_2 + n_3\tau_3 \quad (n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}), \quad (10.37)$$

其中 τ_i 為沿著 α_i 方向平移一格的變換，則有作用 $T(L) = L$ ($\forall T$)，且我們稱該作用是 transitive 的。但倘若我們考慮的 L 不再是晶格而是晶體 (crystal) 時，並非所有的 n_i 組合都可以滿足 $T(L) = L$ 。因為晶體需要在晶格點上附加原子的資訊，不同晶格點可能代表著不同的原子 (仍然滿足週期性)，而不同的原子之間經過平移需要落到同樣原子之上，因此有些平移是不滿足不變性的。

⁵⁹ 晶格假設為在空間中無限延伸。

若晶格中每點都能以公式 10.36 的形式表示，則稱該晶格為 Bravais 晶格。先前提及過對於晶格 L ，其可以視為由基礎晶胞平移堆疊而出的。除此之外，我們可以考慮不同形式之晶胞，對稱晶胞（又稱為 Wigner-Seitz 晶胞、Dirichlet 區域）便是一範例，見圖 10.1 之上色區域。

10.2.3 晶格的基本對稱性

空間中所有的剛體運動皆存在於歐幾里得群 $E(3) = O(3) \ltimes T(3)$ 中，包含了鏡射、平移、旋轉運動以及它們的合成⁶⁰。在我們接續的討論中，我們想要討論 $E(3)$ 的子集，使得對於晶格 L 其具不變性。這些變換蒐集起來因為是穩定子 $\text{Stab}_L(E(3))$ ，故是為群，為 $E(3)$ 的子群：

定義：晶體空間群 (crystallographic space group)

對於一晶體 L ，所有使其不變的 $E(3)$ 變換為晶體學群，記為：

$$G_3(L), \quad (10.38)$$

是為晶體空間群。

顯然地： $G_3(L) \leq E(3)$ 。但想要了解更多時，我們便需要研究 $G_3(L)$ 的子群。最簡單的變換便是平移變換：

定義：晶體平移群 (translation group)

包含所有使 L 不變的平移變換的 $G_3(L)$ 子群稱為「 L 的晶體平移群」，記為：

$$T_3(L) := G_3(L) \cap T(3). \quad (10.39)$$

很顯然地，對於 $g \in G_3(L)$ 與 $t \in T_3(L)$ ， gtg^{-1} 仍為 $G_3(L)$ 中的平移變換，故其為正規子群 $T_3(L) \trianglelefteq G_3(L)$ 。

我們知道 $G_3(L)$ 中的任意變換 g 皆可以表示為正交變換 $\alpha \in O(3)$ 與平移變換 $t \in T(3)$ 的合成 $g = t\alpha$ ，且該合成為唯一的。但同時， α 和 $t \notin G_3(L)$ 是完全有可能的，我們將所有 α 蒐集起來有：

⁶⁰ 平移 + 旋轉稱為螺旋運動 (screw motion)。

定義：晶體點群 (crystallographic point group)

對於空間中的晶格 L ，其晶體點群，又或者可稱為對稱群 (symmetry group)，定義為：

$$S_3(L) := \{\alpha \in O(3) \mid \exists t \in T(3) \text{ s.t. } t\alpha \in G_3(L)\}. \quad (10.40)$$

點群即意味著「保持某點不動」的變換，該點通常設為原點，則點群即為 $O(3)$ 的子群。且因為 $g = t\alpha$ 的唯一性，可以考慮自然投影映射 $\pi: E(3) \rightarrow O(3)$ 使得 $\pi(t\alpha) = \alpha$ 為同態，而 $\pi(G_3(L)) \cong S_3(L)$ 必為 $O(3)$ 的子群。另外根據第二同構定理，有：

$$S_3(L) \cong \pi(G_3(L)) \cong G_3(L)/(\mathcal{G}_3(L) \cap T(3)) = G_3(L)/T_3(L). \quad (10.41)$$

另外，存在晶體點群中亦屬於晶體空間群者為：

定義：晶體固定群 (stationary group)

對於晶格 L ，其晶體固定群為 $G_3(L)$ 中固定原點者，記為：

$$H_3(L) := G_3(L) \cap O(3) = G_3(L) \cap S_3(L), \quad (10.42)$$

為兩者之子群。另外，若考慮行列式為 1 者 (即不包含鏡射) 記為：

$$H_3(L)^+ := G_3(L) \cap SO(3), \quad (10.43)$$

10.2.4 晶格對稱性的分類

對於固定原點的旋轉變換，我們有以下定理：

定理：若 L 具平移對稱性，則 $H_3(L)^+$ 為有限群，且其元素皆為繞著通過原點 (原點為 L 的晶格點之一) 的軸旋轉 $\pi/3$ 或 $\pi/2$ 的整數倍角度。

證明簡介如下：

- (1) 先考慮具平移對稱性的平面晶格：對於 $\Phi \in H_2(L)^+$ 表示繞著原點旋轉 ϕ 的變換與晶格平移向量 α_1 ，有 α_1 、 $\Phi\alpha_1$ 與 $\Phi^2\alpha_1$ 代表的平移變換皆屬於 $T_3(L)$ 。
- (2) 故 $\Phi\alpha_1$ 與 $\Phi^2\alpha_1$ 可以用 α_1 與 α_2 的整係數線性組合表

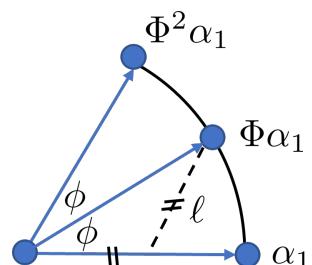


圖 10.2: 平面晶格

示。而 $\Phi\alpha_1$ 則可以由 α_1 與 $\Phi^2\alpha_1$ 的「有理係數」線性組合表示。

(3) 見圖 10.2，有：

$$\Phi\alpha_1 = \frac{\ell}{|\alpha_1|}(\alpha_1 + \Phi^2\alpha_1),$$

$$\ell = |\alpha_1| \cos \phi - \ell \cos 2\phi.$$

(4) 故係數：

$$\mathbb{Q} \ni \frac{\ell}{|\alpha_1|} = \frac{1}{2 \cos \phi},$$

而 $\cos \phi \in \mathbb{Q}$ 若且唯若 ϕ 為 $\pi/3$ 或 $\pi/2$ 的整數倍。

(5) 若考慮具平移對稱性的空間晶格：對於 $\Phi \in H_3(L)^+$ 表示繞著某通過原點的軸旋轉 ϕ 的變換，對於該轉軸有通過原點的法平面 Π 。若有 α_1 坐落在 Π 上，則可以用平面晶格之結論。反之，則可將 $\Phi^n\alpha_1$ 垂直投影到 Π 上，同樣可套用平面晶格之結論。故得證。 ■

將上述之定理套用在平面晶格上，有以下固定群的分類：

定理： $H_2(L)^+$ 的分類

對於具有平移對稱性的平面晶格 L ，其固定群 $H_2(L)^+$ 必為通過原點旋轉 $2\pi/n$ 生成的循環群 C_n ，其中 $n = 1, 2, 3, 4, 6$ 。而 C_n 對應的旋轉矩陣表現為：

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi k}{n} & \sin \frac{2\pi k}{n} \\ -\sin \frac{2\pi k}{n} & \cos \frac{2\pi k}{n} \end{bmatrix} \quad (0 \leq k \leq n-1).$$

若我們允許通過原點的鏡射變換，則對於一具平移對稱性的平面晶格 L ，其固定群 $H_2(L)$ 僅可能為下方所列出者：

$$C_1, C_2, C_3, C_4, C_6; D_2, D_4, D_6, D_8, D_{12}. \quad (10.44)$$

其中二面體群為循環群與鏡射變換（保持晶格不變者）的半直積： $D_{2n} \cong \mathbb{Z}_2 \ltimes C_n$ 。整個平面的晶體空間群具有 17 種可能性，亦稱為「壁紙群 (wallpaper groups)」。

接著回到三維的情況。因為對於 $H_3(L)^+$ 與 $S_3(L)^+$ (即僅包含旋轉變換，不包含鏡射) 的分類較為複雜，我們在此僅考慮先求出 $SO(3)$ 的有限子群的分類，將固定群與點群的可能性進行限縮。首先，原本的二維旋轉可以變成是三維空間中繞一通過原點軸的旋轉，因為該群須為有限，所以要求轉動角度為 $2\pi/n$ ($n \in \mathbb{N}$) 的整數倍，同樣記該循環群為 C_n 。令通過原點且與旋轉軸垂直的平面為 Π ，因為三維旋轉 C_n 投影在 Π 上可以等價於平面旋轉，我們應該也可以找到對應平面上 D_{2n} 的三維旋轉變換。可以注意到，若取在 Π 上某軸 q 為轉軸旋轉角度 π ，則在 Π 上等價於鏡射變換，各個 q 軸之間應在平面上夾角度 π/n ($n \in \mathbb{N}$)。故我們可以將該對 q 的旋轉與 C_n 取半直積得到 D'_{2n} 變換 ($n \in \mathbb{N}$)， D'_{2n} 投影在 Π 上等價於 D_{2n} 。不過可以注意到， $D'_2 \cong C_2$ ，故可以不考慮同構者。

最後，還有一類三維的旋轉子群需要考慮，即對應到「柏拉圖立體 (Platonic polyhedra)」的旋轉對稱性，包含：正四面體 (tetrahedron)、正立方體 (cube)、正八面體 (octahedron)、正十二面體 (dodecahedron) 與正二十面體 (icosahedron)。其中因為正立方體與正八面體互為對偶、正十二面體與正二十面體互為對偶，其各自對稱群同構；因此最後僅剩三組對稱群，分別記為 T (正四面體)、 W (正立方體與正八面體)、 P (正十二面體與正二十面體)。透過軌道-穩定子定理可以得到其階為： $|T| = 12$ 、 $|W| = 24$ 、 $|P| = 60$ 。

事實上，以上所討論的群已窮盡所有的可能性了。

定理：任何 $SO(3)$ 的有限子群必同構於以下：

$$C_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$D'_{2n} \quad (n = 2, 3, \dots),$$

$$T, W, P.$$

證明如下：

- (1) 考慮子群 $\Gamma < SO(3)$ ，其階為 $|\Gamma| = N < \infty$ 。對於任意非單位變換 (identity transformation) 且屬於 Γ 的旋轉變換 S ，其皆具有一旋轉軸，利用右手定則我們更可以訂出該軸與位於原點的單位球相交的北極與南極點。
- (2) 對於一極點 p ，設 $\nu_p = |\text{Stab}_P(\Gamma)|$ ，則根據軌道-穩定子定理有 $N/\nu_p =: n_p \in \mathbb{N}$ 。

(3) 考慮所有序對 (p, S) 。因為 S 共 $N - 1$ 個，每個 S 都有兩個 p ，故 (p, S) 的總數為 $2(N - 1)$ 。同時，我們也可以從不同軌道的角度思考：對於同個軌道中的極點 p, q (共 n_p 個)，因為若 $\Gamma_p := \text{Stab}_p(\Gamma)$ 、 $g(p) = q$ ($g \in \Gamma$)，則 $\text{Stab}_q(\Gamma) = g\Gamma_p g^{-1}$ ，有 $\nu_p = |\Gamma_p| = |\Gamma_q| = \nu_q$ 。因此：

$$2(N - 1) = \sum_{i(\text{軌道})} (\nu_i - 1)n_i. \quad (10.45)$$

將左右同除 $N = \nu_i n_i$ 得到：

$$2 - \frac{2}{N} = \sum_{i(\text{軌道})} \left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right). \quad (10.46)$$

(4) 首先因為 $\Gamma = \{1\}$ 是顯然的，我們不考慮之，故 $N \geq 2$ 。公式 10.46 之左式必為：
 $1 \leq 2 - 2/N < 2$ 。同樣地，右式的軌道數也因此至少必須有兩個。又因為根據 Γ 的定義， $\nu_i > 1$ ，右式的軌道數不能多於三個。

(5) 先考慮僅有兩個軌道的情況，公式 10.46 可改寫為：

$$2 = \frac{N}{\nu_1} + \frac{N}{\nu_2} = n_1 + n_2. \quad (10.47)$$

可得知上式中，解必為 $n_1 = n_2 = 1$ ， Γ 必與 C_N 同構。

(6) 接著考慮有三個軌道的情況，公式 10.46 可改寫為：

$$\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} = 1 + \frac{2}{N}. \quad (10.48)$$

不失一般性，假設 $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3$ 。因為 $1 < 1 + 2/N$ ，有 $\nu_1 < 3$ ，上式可能的解為：

- $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (2, 2, N/2) : N = 2\nu_3, \Gamma \cong D'_N$ ；
- $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (2, 3, 3) : N = 12, \Gamma \cong T$ ；
- $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (2, 3, 4) : N = 24, \Gamma \cong W$ ；
- $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (2, 3, 5) : N = 60, \Gamma \cong P$ 。

(7) 可以確認上述軌道與穩定子的數量皆符合。此即全部可能的子群，故得證。 ■

此定理可以搭配對原點的點對稱與平面鏡射得到完整的 $\text{SO}(3)$ 子群，但詳細結果將不再細論下去，愈瞭解者可見課本。

10.2.5 張量分類

此小節最後將考慮晶體學群與張量場的關聯，將提供一物理中的範例。晶體具有其電導率 (electrical conductivity)，是為一 $(1, 1)$ -張量 σ_k^s ：若有外界施加電場 E_s ，則產生的體電流密度 J_k 為

$$J_k = \sigma_k^s E_s . \quad (10.49)$$

若該介質為各向同性的 (isotropic)，則有 $\sigma_k^s = \sigma \cdot \delta_k^s$ ，可以一純量 σ 表示之。

現下我們考慮一簡單立方 (simple cubic, SC) 晶格，即每個晶格點位置可表示為 $\alpha = a(n_1\hat{x} + n_2\hat{y} + n_3\hat{z})$ ($n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$)，其點群包含以下三個正交變換：

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

分別為將座標系對 x 、 y 、 z 軸旋轉 $\pi/2$ 者。因為在該座標變換下，公式 10.49 將（在矩陣表示法下）變為：

$$\beta_i[J_k] = \beta_i[\sigma_k^s][E_s] = \beta_i[\sigma_k^s]\beta_i^{-1}\beta_i[E_s] . \quad (10.50)$$

又因該變換使晶格不變，電導率張量也應不變，有：

$$\beta_i[\sigma_k^s]\beta_i^{-1} = [\sigma_k^s] . \quad (10.51)$$

將 $i = 1, 2, 3$ 代入後，可以輕鬆見得 $[\sigma_k^s] = \sigma \mathbb{1}$ ，故可知簡單立方晶體為各向同性的。在物理上並不能很顯而易見地得知該物質的特性，但透過對於晶格的對稱群的了解，可以十分簡單的得到 σ_k^s 個係數的關係。

11 張量運算與微分形式 (10/18)

11.1 音樂同構

對於張量，上下標的位置十分重要，不可隨意變動。倘若我們想要將某個上(下)標替換成下(上)標，意味著將其中的某 $V(V^*)$ 與 $V^*(V)$ 對調，該如何定義之？若有第一標準型 g_{ij} ⁶¹ (為一 $(0,2)$ -張量，有對應的反矩陣 g^{ij})，我們可以定義上下標的升降 (raising and lowering of index) 為以下的縮約計算：

$$T_{jk}^i \mapsto T_j^{i,k} := \sum_l T_{jl}^i g^{lk}, \quad (11.1)$$

$$T_{jk}^i \mapsto T_{ijk} := \sum_l T_{jk}^l g_{li}. \quad (11.2)$$

若要升降其他上下標也可依樣計算：先乘上對應的 g_{ij} 或 g^{ij} 再進行縮約，但要注意上下標之間的「順序⁶²」需要保持，故在上式之張量上下標之間有「空白間隔」。由此，我們可以定義音樂同構 (musical isomorphism)⁶³ 為將全部上(下)標降下(升起)：

$$\flat : \bigotimes^{k,0} V \rightarrow \bigotimes^{0,k} V, \quad T^{i_1 \dots i_k} \mapsto T_{i_1 \dots i_k}, \quad (11.3)$$

$$\sharp : \bigotimes^{0,k} V \rightarrow \bigotimes^{k,0} V, \quad T_{j_1 \dots j_k} \mapsto T^{j_1 \dots j_k}. \quad (11.4)$$

可以注意到 \flat 和 \sharp 互為反運算。

定理： $\flat : V \rightarrow V^*$ 和 $\sharp : V^* \rightarrow V$ 都為保內積的 (即 isometry)。

以下僅證明 \flat 者：考慮 $v = v^i \mathbf{e}_i$ 、 $w = w^j \mathbf{e}_i$ ，則：

$$\begin{aligned} \langle v^\flat, w^\flat \rangle &= g^{ij} v_i w_j = g^{ij} (g_{ik} v^k) w_l \\ &= \delta_k^j v^k (g_{jl} w^l) = g_{kl} v^k w^l = \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

故得證。 ■

⁶¹ 幾何學與拓樸學之間的一大差異便在於流形是否有內積/距離的概念。

⁶² 上下標順序很重要，例如 (以下將基底 $\mathbf{e}_I \otimes \mathbf{e}_J$ 省略)： $T_j^{i,k} \in V \otimes V^* \otimes V$ 、 $T^{ik,j} \in V \otimes V \otimes V^*$ 。

⁶³ 很顯然地，數學家符號不夠用了： \flat 為降音記號 (flat)、 \sharp 為升音記號 (sharp)， \flat 將上標下降、 \sharp 將下標升起。

11.1.1 (0,2)-張量的特徵值

我們可以考慮矩陣 $A = [a_j^i] \in V \otimes V^*$ 與二次型 $a_{ij} \in V^* \otimes V^*$ 之間的關係。因為 $a_{ij} = g_{ij}a_j^k$ ，故有：

$$a_j^i \text{為自伴隨} \iff a_{ij} \text{對稱}。 \quad (11.5)$$

證明如下： $a_{jk}v^kw^j = a_k^iv^kg_{ij}w^j = \langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle = v^ig_{ij}a_k^jw^k = a_{ik}v^iw^k$ ，故得證。 ■

此外，我們亦可討論二次型的特徵值：

定義：二次型的特徵值

對於二次型 ((0,2)-張量) $T_{ij} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ，其特徵值定義為同矩陣 $T_j^i = g^{ik}T_{kj}$ 之特徵值。

該特徵值問題即：

$$T_j^i\xi^j = \lambda\xi^i \longleftrightarrow (g^{ik}T_{kj} - \lambda\delta_j^i)\xi^j = 0, \quad (11.6)$$

因此有特徵方程式為：

$$\det(T_{ij} - \lambda g_{ij}) = 0. \quad (11.7)$$

特徵方程式的係數即為不變量：已見過二次型的包含第二標準型 b_{ij} 。其生成的不變量（即特徵方程式之係數）包含高斯曲率 $K = \det((g_{ij})^{-1})\det(b_{ij}) = \det(g^{ik}b_{kj}) = \det(b_j^i)$ ，其中 $-dN_p = [b_j^i]$ 。另外平均曲率為 $H = \frac{1}{2}b_i^i = \frac{1}{2}g^{ij}b_{ij}$ 。而此結果對於 \mathbb{R}^n 中任何超曲面 (hypersurface) 都成立。

11.2 微分形式

接著我們將目光放向非常重要的一類張量：(0, k)-張量

$$T = \sum T_{j_1 \dots j_k} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_k} : \bigotimes^k V \rightarrow \mathbb{R}.$$

其中，又有兩子集值得探討。考慮置換變換 $\sigma \in S_n$ ，我們有：

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \sigma \text{為偶置換 (even permutation)} \\ -1 & \sigma \text{為奇置換 (odd permutation)} \end{cases}, \quad (11.8)$$

則有子集：

(a) 對稱張量 (symmetric tensor)：記為 $S_k \in \operatorname{Sym}^k(V^*)$ ，滿足

$$\sigma(S_k) = S_k. \quad (11.9)$$

(b) 反對稱張量 (skew-symmetric tensor / alternating tensor)：記為 $A_k \in \operatorname{Alt}^k(V^*)$ ，滿足

$$\sigma(A_k) = (-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)} A_k. \quad (11.10)$$

以 $k = 2$ 為例：一個二階張量 $dx^1 \otimes dx^2$ 可以分解為

$$dx^1 \otimes dx^2 = \underbrace{\frac{1}{2}(dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^1)}_{\in \operatorname{Sym}^2(V^*)} + \underbrace{\frac{1}{2}(dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1)}_{\in \operatorname{Alt}^2(V^*)},$$

故可見： $(0, 2)$ 型的張量的向量空間可以表示為以下兩子空間 (subspace) 的直和 (direct sum)：

$$\mathcal{T}^{0,2}(V) = \operatorname{Sym}^2(V^*) \oplus \operatorname{Alt}^2(V^*). \quad (11.11)$$

對於任意 k ， $\operatorname{Sym}^k(V^*)$ 與 V 中齊次的 k 階多項式同構。對於任意 k ，我們亦記 $\operatorname{Alt}^k(V^*)$ 為 $\bigwedge^k(V^*)$ 或 \bigwedge^k ，是為 k -形式 (k -form)。因為 k -形式為反對稱張量，其具有一較好的基底為：

$$dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} := \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) dx^{\sigma(j_1)} \otimes \cdots \otimes dx^{\sigma(j_k)}. \quad (11.12)$$

則 $\bigwedge^k(V^*)$ 為一個 $\binom{n}{k}$ 維的向量空間，其具有基底⁶⁴：

$$\{ dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} \mid 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n \} . \quad (11.13)$$

k -形式亦可被稱為 k -微分形、 k -微分形式 (differential k -form)⁶⁵。透過該新基底，我們可以將 k -形式改寫為：

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} T_{j_1 \cdots j_k} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} &= \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n T_{j_1 \cdots j_k} dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_k} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n T_{j_1 \cdots j_k} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} . \end{aligned} \quad (11.14)$$

11.2.1 行列式結構

由於其反對稱的結構，我們可見 $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \in \bigwedge^n(\mathbb{R}^n)$ 是為「行列式運算」：即對於 $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ ，有

$$(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(v_1, \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_n) . \quad (11.15)$$

11.2.2 外積

對於微分形式 $T = \sum_{|I|=p} T_I dx^I \in \bigwedge^k$ 與 $S = \sum_{|J|=q} S_J dx^J \in \bigwedge^q$ ，則我們可以有兩者的張量積 $T \otimes S$ 。很顯然地，張量積不保證得到的張量仍為反對稱的，我們需要引入運算「外積 (exterior product)」來確保代數的封閉性。

⁶⁴ 在幾何學中，我們常設 $V = T_p S$ ($p \in S$ 為一 n 維曲面) 具有基底 $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ ，其對偶空間 $V^* = T_p^* S$ 則有基底 $e^i = dx^i$ 。

⁶⁵ 筆者補充：在幾何代數 (geometric algebra) 的語言中， k -形式可以被稱作 k -向量 (k -vector)、 k 級多向量 (grade- k multivector)。此外，2-形式亦可被稱為二重向量 (bivector)、3-形式亦可被稱為三重向量 (trivector)。筆者私自更喜歡此稱呼，較不拗口，但為求此筆記的連續性仍將多以 k -形式或 k -微分形式稱呼之。

定義：外積

微分形式 T 和 S 的外積為：

$$T \wedge S := \sum_{I,J} T_I S_J dx^I \wedge dx^J = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_{p+q} \leq n} R_{k_1 \dots k_{p+q}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{p+q}, \quad (11.16)$$

其中：

$$R_{k_1 \dots k_{p+q}} = \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \frac{\text{sgn}(\sigma)}{p!q!} T_{\sigma(k_1) \dots \sigma(k_p)} S_{\sigma(k_{p+1}) \dots \sigma(k_{p+q})}. \quad (11.17)$$

由上述定義，也可以見得：

$$T \wedge S = (-1)^{pq} S \wedge T \quad (|I| = p, |J| = q), \quad (11.18)$$

繼承於 $\text{sgn}(\sigma)$ ，外積為反交換的，故顛倒外積順序可能會多出負號。因為將 T 的最後一項 dx^{i_p} 與 dx^J 交換需要置換 q 次，所以多出了 $(-1)^q$ ；重複上述步驟於其餘的 dx^I ，可以得知最後共會多出 $((-1)^q)^p = (-1)^{pq}$ 。在此運算下，我們有以下代數：

定義：外代數 (exterior algebra)

對於 $(\bigwedge(V^*), \wedge)$ ，外積^a 具反交換律與結合律，則稱之為外代數。

其中張量 $T \in \bigwedge^k(V^*) \subseteq \bigwedge(V^*)$ 被稱為 k -微分形式。

^a 這樣算是音譯意義都有翻譯到嗎？(外積 \approx wedge)

該代數的集合為：對於在體 (field) \mathbb{F} 上的向量空間 $(V, \mathbb{F}, +, \cdot)$ ，

$$\bigwedge(V^*) = \bigoplus_{k=0}^n \bigwedge^k(V^*), \quad (11.19)$$

其中 $\bigwedge^0(V^*) = \mathbb{F}$ 、 $\bigwedge^1(V^*) = V^*$ 、 \dots ⁶⁶。

⁶⁶ 對於外積代數 $(\bigwedge(V^*), \wedge)$ ，我們有 $\bigwedge(V^*)$ 為所有 $V^* \cong \mathbb{R}^n$ 上微分形式的集合。同樣的，我們也有張量代數 $(\mathcal{T}(V), \otimes)$ ，其中：

$$\mathcal{T}(V) = \bigoplus_{p,q=1}^n \mathcal{T}^{p,q}(V),$$

為在 $V \cong \mathbb{R}^n$ 上所有可能 (任何階與型) 的張量的集合。

11.2.3 Stokes 定理介紹

微分形式中一個很重要的定理即為「Stokes 定理」：

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega \quad (\Omega \subset \mathbb{R}^n, \dim(\Omega) = k, \omega \in \bigwedge^{k-1}(\mathbb{R}^n)), \quad (11.20)$$

其描述對於在 \mathbb{R}^n 中的體積 Ω 與微分形式 ω ，在 Ω 的「邊界」 $\partial\Omega$ 上對 ω 「積分」，等於在 Ω 內對 ω 的「微分」 $d\omega$ 積分。此定理概念上即是微積分基本定理。

欲理解與證明此定理需要很多先備知識，包含邊界為何？如何對微分形式積分？如何取微分形式的導數？大部分內容將在之後更詳細地說明，在此我們先簡介第三個問題：其為「Cartan d 算子」，定義為對於在 Ω 上的純量函數 f 、微分形式⁶⁷ $\omega \in \Omega^k(U)$ 與任一微分形式 y 滿足

- (a) $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ ；
- (b) $d(\omega \wedge y) = d\omega \wedge y + (-1)^k \omega \wedge dy$ ；
- (c) $d^2 = 0$ 。

有以上規則則已可以計算：

$$d(f dx^I) = df \wedge dx^I + f d(dx^I) = df \wedge dx^I.$$

現在仍有一個問題是，這樣的定義是否是與座標獨立的？答案是肯定的，我們往後將有機會看到。

⁶⁷ k -微分形式的集合有兩標示法，意義稍有不同：

- (a) $\bigwedge^k(V^*)$ ：表示該微分形式空間僅定義於一固定點。
- (b) $\Omega^k(U)$ ：表示該微分形式空間定義於開集 U 上每個點，切空間 $V = T_p U$ 將隨 p 而改動。

11.3 Hodge 對偶

定義：體積形式 (volume form)

在一 (偽) 黎曼空間 $(U, d\ell^2)$ 上，可以定義對於其第一標準型 g_{ij} 的體積形式為：

$$d\sigma \equiv dV \equiv d \text{ vol} := \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \quad (11.21)$$

其中 $g = \det(g_{ij})$ 。

以下證明體積形式在座標變換下行為同一張量：

(1) 因為 $g_{ij} = \tilde{g}_{kl} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j}$ ，設雅可比行列式為 $J = \det(\partial y^i / \partial x^j)$ ，有 $g = \tilde{g}|J|^2$ ，故 $\sqrt{|g|} = \sqrt{|\tilde{g}|} \cdot J$ (假設 $J > 0$)。

(2) 又因：

$$\begin{aligned} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \frac{\partial x^1}{\partial y^{\sigma(1)}} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial y^{\sigma(n)}} \right) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n \\ &= J^{-1} dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n, \end{aligned}$$

故有 $d\sigma = d\tilde{\sigma}$ ，其為張量。故得證。 ■

先前提過， $V \cong \mathbb{R}^n$ 上的 k -形式構成 $\binom{n}{k}$ 維的向量空間。同時， $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ，故應存在某種對偶關係連結 k -形式與 $(n-k)$ -形式，此即 Hodge 對偶。

定義：Hodge 對偶 (Hodge duality)

Hodge 對偶概念即為求「正交餘補 (orthogonal complement)」。其為線性、isometry 且唯一，定義為^a：

$$\begin{aligned} \star: \bigwedge^k &\rightarrow \bigwedge^{n-k} \\ T &\mapsto (\star T)_{i_{k+1} \cdots i_n} = \frac{1}{k!} \sqrt{|g|} \cdot \varepsilon_{i_1 \cdots i_n} T^{i_1 \cdots i_k} \end{aligned}, \quad (11.22)$$

其中：

$$T^{i_1 \cdots i_k} = g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_k j_k} T_{j_1 \cdots j_k}. \quad (11.23)$$

^a \bigwedge^k 即表示所有 k -形式的集合，建構於的對偶空間 V^* 在語意清楚下可以省略。

其中 ε 為 Levi-Civita 符號⁶⁸，定義為

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} +1 & , \operatorname{sgn}(i_1, \dots, i_n) = +1 \\ -1 & , \operatorname{sgn}(i_1, \dots, i_n) = -1 \\ 0 & , \text{其他} \end{cases} \quad (11.24)$$

對於 $T, S \in \bigwedge^k(V^*)$ 該對偶滿足：

$$(a) \star(\star T) = (-1)^{k(n-k)} \operatorname{sgn}(g) T,$$

$$(b) T \wedge \star S = \{T, S\} d\sigma, \text{ 其中} :$$

$$\{T, S\} := \frac{1}{k!} T^{i_1 \dots i_k} S_{i_1 \dots i_k}. \quad (11.25)$$

證明如下：

$$(a) \text{推導 } \star^2 = (-1)^{k(n-k)} \operatorname{sgn}(g) : (\text{下方 } \varepsilon \text{ 之上下標僅因為滿足愛因斯坦求和約定而用})$$

$$\begin{aligned} (\star \star T)_{i_1 \dots i_k} &= \frac{\sqrt{|g|}}{(n-k)!} \varepsilon_{i_{k+1} \dots i_n i_1 \dots i_k} g^{i_{k+1} j_{k+1}} \dots g^{i_n j_n} \frac{\sqrt{|g|}}{k!} \varepsilon_{j_1 \dots j_n} g^{j_1 m_1} \dots g^{j_k m_k} T_{m_1 \dots m_k} \\ &= (-1)^{k(n-k)} \frac{|g|}{k!(n-k)!} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} \varepsilon_{j_1 \dots j_n} g^{j_1 m_1} \dots g^{j_k m_k} g^{j_{k+1} i_{k+1}} \dots g^{j_n i_n} T_{m_1 \dots m_k} \\ &= (-1)^{k(n-k)} \frac{|g|}{k!(n-k)!} \cdot \det([g_{ij}]^{-1}) \cdot \varepsilon_{i_1 \dots i_n} \varepsilon^{m_1 \dots m_k i_{k+1} \dots i_n} T_{m_1 \dots m_k} \\ &= (-1)^{k(n-k)} \operatorname{sgn}(g) \frac{1}{k!(n-k)!} \cdot k!(n-k)! T_{i_1 \dots i_k} = (-1)^{k(n-k)} \operatorname{sgn}(g) T_{i_1 \dots i_k}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$(b) \text{推導 } T \wedge \star S = \{T, S\} d\sigma :$$

$$\begin{aligned} T \wedge \star S &= \left(T_{j_1 \dots j_k} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_k} \right) \wedge \left(\frac{\sqrt{|g|}}{k!} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} S^{i_1 \dots i_k} dx^{i_{k+1}} \otimes \dots \otimes dx^{i_n} \right) \\ &= \frac{1}{(k!)^2(n-k)!} T_{j_1 \dots j_k} S^{i_1 \dots i_k} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} \left(\sqrt{|g|} (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}) \wedge (dx^{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}) \right) \\ &= \frac{1}{(k!)^2(n-k)!} T_{j_1 \dots j_k} S^{i_1 \dots i_k} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} \varepsilon^{j_1 \dots j_k i_{k+1} \dots i_n} d\sigma \\ &= \frac{1}{(k!)^2(n-k)!} T_{j_1 \dots j_k} \cdot k!(n-k)! S^{j_1 \dots j_k} d\sigma = \frac{1}{k!} T_{j_1 \dots j_k} S^{j_1 \dots j_k} d\sigma. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

⁶⁸ Levi-Civita 符號不是張量，其為「張量密度 (tensor density)」 $\propto \sqrt{|g|} \varepsilon$ 被稱為 Levi-Civita 張量。

我們稱 Hodge 對偶為求「正交餘補」乃因為考慮三維歐氏空間 $V = \mathbb{R}^3$ ，有歐氏座標 (x, y, z) ，則有對偶：

$$\star dx = dy \wedge dz \quad \star dy = dz \wedge dx \quad \star dz = dx \wedge dy,$$

與：

$$\star f = f dx \wedge dy \wedge dz.$$

對於內積空間 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 有單位正交基底 e^1, \dots, e^n ，則 $\bigwedge^k(V^*)$ 亦有正交基底 $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$ ($1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$)。則 Hodge 對偶可以透過 $\star : e^1 \wedge \dots \wedge e^k \mapsto e^{k+1} \wedge \dots \wedge e^n$ 與令其為線性延伸至任意 k -形式。

問題：如何定義 $\bigwedge^k(V^*)$ 上的內積？

我們之後將深入討論對於微分形式的微積分。此外，其也與 \mathbb{R}^n 中反交換變數（費米子（Fermions））的積分有關。

12 李導數 (10/20)

如何對張量進行導數運算呢？一個很直覺的方法如下：考慮向量 $\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ，倘若我們定義某種微分 D 滿足

$$D\xi = \sum_{i,j} \xi_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \quad \left(\xi_j^i := \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right) ,$$

且希望其滿足張量座標變換規則：在座標 $\tilde{x}^{i'}$ 下有

$$\xi_j^i \stackrel{?}{=} \tilde{\xi}_{j'}^{i'} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^{i'}} \frac{\partial \tilde{x}^{j'}}{\partial x^j} .$$

然而，實際進行座標變換會發現：

$$\begin{aligned} \xi_j^i &= \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\tilde{\xi}_{j'}^{i'} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^{i'}} \right) = \frac{\partial \tilde{x}^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{j'}} \left(\tilde{\xi}_{j'}^{i'} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^{i'}} \right) \\ &= \tilde{\xi}_{j'}^{i'} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^{i'}} \frac{\partial \tilde{x}^{j'}}{\partial x^j} + \underbrace{\tilde{\xi}_{j'}^{i'} \frac{\partial \tilde{x}^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \tilde{x}^{i'} \partial \tilde{x}^{j'}}}_{\stackrel{?}{=} 0} , \end{aligned}$$

若欲 ξ_j^i 為張量，則上式後項必須為零：可見得其為 affine 變換（仿射變換：即 $\tilde{x} = Ax + b$ ），非常無趣。

對於張量求導的問題歷史上共出現三種解決的方法，依發明時序由早到晚羅列如下（最早的反而是最難的）：

- (a) Levi-Civita 聯絡（義）：此即「共變微分 (covariant derivative)」 $\nabla_v T$ ，可以對任意張量作用，我們將在對於聯絡 (connection) 介紹的章節引入之。
- (b) 李導數 (法)：其並不是真正的方向導數，我們之後將看到其定義上依賴於一向量場，同樣可作用於任意張量上。
- (c) Cartan d 算子 (法)：先前已見過，計算十分簡單，但其僅可作用於微分形式上。

12.1 Pullback 和 Pushforward

在介紹李導數前，我們先要介紹兩個很重要的概念：pullback 和 pushforward。

定義：微分形式在映射下的 Pullback

考慮座標變換 $f : (V, y) \rightarrow (U, x)$ 與微分形式 $T \in \mathcal{T}^{0,k}(U)$ ，則 T 在 f 下的 pull-back^a 記為 $f^*T \in \mathcal{T}^{0,k}(V)$ ，定義為：

$$f^*T := f^*(T_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}) = T_{i_1 \dots i_k}(f(y)) \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{j_k}} dy^{j_1} \otimes \dots \otimes dy^{j_k}. \quad (12.1)$$

^a 亦可稱為約束 (restriction)。

由此可見，pullback 即是將張量「拉回」，以經過座標變換 f 之前的座標系表示該張量。此定義亦可延伸至任意 (p, q) -張量，僅其乘上的座標變換係數不同：

$$(f^*T)^I_J = T_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p}(f(y)) \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \dots \frac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{i'_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial y^{j'_q}}. \quad (12.2)$$

定義：切向量的 Pushforward

對於 $p \in V$ ，有向量 $T^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ 在座標變換 $f : (V, y) \rightarrow (U, x)$ 下的 pushforward 為在切空間之間的映射：

$$\begin{aligned} df_p : T_p V &\rightarrow T_{f(p)} U \\ T^i \frac{\partial}{\partial y^i} &\mapsto T^j \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned} \quad (12.3)$$

可見得，pushforward 即等同於微分映射 (differential map) / 切映射 (tangent map)，先前討論過的高斯映射 N_p 與 dN_p 即是此關係。

然而對於整個向量場的 pushforward，以上定義可能不成立。因為可能存在 $p, p' \in V, p \neq p'$ ，但 $f(p) = f(p')$ 者。故對於整個向量場的 pushforward，我們將要求 f 是單射的。同時，因為存在 pullback 為滿射，因此該映射需要是雙射，該 f 需要是「微分同胚 (diffeomorphism)⁶⁹」。若我們真的能獲得一微分同胚映射 f ，則可以延伸至任意向量場與張量場的 pullback。

另外，映射 f 在 p 處的 pushforward 除 df_p 外還有很多表示法，包含： Df_p 、 $(\varphi_*)_x$ 。

⁶⁹ 即雙射、 $V \xrightarrow{\sim} U$ 、 f 和 f^{-1} 皆為 C^∞ 。

12.2 張量場的李導數

下個問題便是如何「建構」微分同胚？答案是利用常微分方程 (ODE) 的存在唯一定理 ($\exists!$)：

定理：給予一在 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上的 C^∞ 向量場 ξ 。考慮一積分曲線 $x(t)$ 使得：

$$\begin{cases} x'(t) = \xi(x(t)) \text{ (且存在唯一)} \\ x(0) = x_0 \end{cases},$$

則可以定義以 x_0 為起點的積分曲線 $F_t(x_0) = x(t, x_0)$ ，其對於變數 t 和 x_0 為 C^∞ 的。

問題：證明常微分方程解對於初始條件的 smooth dependence。(non-trivial)

有了以上工具後，讓我們來思考一下要微分 V 上張量可能遇到的問題：最主要的問題即是，微分要求將兩不同時刻的張量相減看變化量，然而對於 $p \neq p'$ 上的張量，其存在於不同的向量空間 $T_p V \neq T_{p'} V$ ，不同向量空間之間的向量是不能相減的！因此需要透過「pullback」來將 p' 之張量拉回到 p 處以求導數。而 pullback 所需要之映射 f 則可以透過常微分方程與以下方法得到：

定義：流線 (flow)

對於點 x_0 ，存在一區間 $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ 使得 F_t 為在鄰域上的微分同胚。此外 $\{F_t\}_t$ 形成一個鄰域上的單參數微分同胚群，亦即其滿足：

$$\begin{cases} F_{t+s} = F_t \circ F_s \text{ (因 ODE 的 } \exists! \text{ 定理)} \\ F_{-t} = F_t^{-1} \end{cases} \quad . \quad (12.4)$$

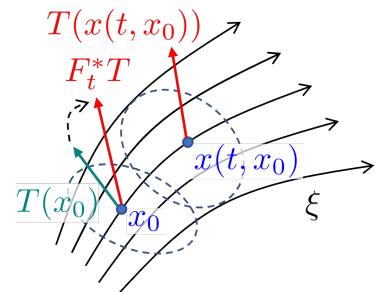


圖 12.1: 李導數

對於該 C^∞ 曲線，可將其展開為： $x(t, x_0) = x_0 + tx'(0) + O(t)$ ，其中有 x_0 為固定、

$x'(0) = \xi(0)$ 。則該變換的雅可比行列式為：

$$\frac{\partial x^i(t)}{\partial x_0^j} = \delta_j^i + t \frac{\partial \xi^i}{\partial x_0^j} + O(t^2), \quad (12.5)$$

可見其為可逆的：因為 $(1 + A)^{-1} = 1 - A + A^2 - \dots$ ，有逆變換的雅可比行列式為

$$\frac{\partial x_0^i}{\partial x^j(t)} = \delta_j^i - t \frac{\partial \xi^i}{\partial x_0^j} + O(t^2). \quad (12.6)$$

由此，可以得到李導數定義為：

定義：李導數 (Lie derivative)

對於張量 $T \in \bigotimes^{p,q}(T_{x_0}V)$ ，其沿著 V 上向量場 ξ 的李導數定義為：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi T &:= \frac{\partial}{\partial t} (F_t^* T) \Big|_{t=0}, \\ (\mathcal{L}_\xi T)_J^I &:= \frac{d}{dt} (F_t^* T)_J^I \Big|_{t=0} \end{aligned} \quad (12.7)$$

其中 F_t 為從 x_0 出發、由 ξ 生成的流線。

另外，因為 (p, q) -張量的 pullback 為：

$$(F_t^* T)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \underbrace{T_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p} \left(\delta_{j_1}^{l_1} + t \frac{\partial \xi^{l_1}}{\partial x_0^{j_1}} \right) \dots}_{\text{covariant 項 } (\times q)} \underbrace{\left(\delta_{k_1}^{i_1} - t \frac{\partial \xi^{i_1}}{\partial x_0^{k_1}} \right) \dots}_{\text{contravariant 項 } (\times p)} \quad (12.8)$$

李導數可以計算有：

定理：

$$(\mathcal{L}_\xi T)_J^I = \frac{\partial T_J^I}{\partial x^s} \xi^s + \sum_{n=1}^q T_{(\dots l_n \dots)}^I \frac{\partial \xi^{l_n}}{\partial x^{j_n}} - \sum_{n=1}^p T_J^{(\dots k_n \dots)} \frac{\partial \xi^{i_n}}{\partial x^{k_n}}. \quad (12.9)$$

我們考慮以下幾個範例來確認該李導數的定義確實是我們想要的：

(a) 函數 f ：可以得到方向導數如下

$$\mathcal{L}_\xi f = \frac{\partial f}{\partial x^s} \xi^s + 0 - 0 \equiv \xi(f) = \partial_\xi f = df(\xi).$$

(b) 向量場 η :

$$(\mathcal{L}_\xi \eta)^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial x^s} \xi^s + 0 - \eta^k \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} = (-\mathcal{L}_\eta \xi)^i .$$

(c) 共向量場 $T = T_i dx^i$:

$$(\mathcal{L}_\xi T)_j = \frac{\partial T_i}{\partial x^s} \xi^s + T_i \frac{\partial \xi^l}{\partial x^j} - 0 .$$

倘若 $T = df$ (f 為函數)，則更有 $\mathcal{L}_\xi df = d(L_\xi f)$ ，因此可以得知 \mathcal{L}_ξ 與 d 交換！

事實上，交換律：

$$\mathcal{L}_\xi d = d\mathcal{L}_\xi \quad (12.10)$$

成立於任意微分形式。

上方對於向量場的李導數的範例提供我們一個很有趣的物件如下：

定義：李括弧 (Lie bracket)

對於向量場 ξ 與 η ，可以定義以下微分運算為李括弧：

$$\mathcal{L}_\xi \eta =: [\xi, \eta] = \xi \circ \eta - \eta \circ \xi . \quad (12.11)$$

定理：李括弧為一階微分運算子。

證明如下：該微分運算子作用於 C^2 函數 f 上有 (注意 ξ 與 η 為給定之向量場)

$$\begin{aligned} [\xi, \eta]f &= \partial_{[\xi, \eta]} f = (\xi \circ \eta - \eta \circ \xi) f \\ &= \partial_\xi \left(\eta^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) - \partial_\eta \left(\xi^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\eta^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \xi^k - \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\xi^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \eta^l \\ &= \xi^k \frac{\partial \eta^i}{\partial x^k} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \xi^k \eta^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} - \eta^l \frac{\partial \xi^j}{\partial x^l} \frac{\partial f}{\partial x^j} - \eta^l \xi^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^j} \\ &= \xi^k \frac{\partial \eta^i}{\partial x^k} \frac{\partial f}{\partial x^i} - \eta^l \frac{\partial \xi^j}{\partial x^l} \frac{\partial f}{\partial x^j} \end{aligned}$$

二次微分項剛好相消，僅剩一次導數。故得證。 ■

此外，李括弧滿足萊布尼茲律 (即連鎖律)：

$$\mathcal{L}_\xi(T \otimes S) = (\mathcal{L}_\xi T) \otimes S + T \otimes (\mathcal{L}_\xi S) . \quad (12.12)$$

此結果可以從李導數的定義出發，有對 t 的導數，則顯而易見。

下次上課我們將會延續此堂對於李導數的探討。在此我們先引入一特別的向量場 ξ 。考慮第一標準型的李導數⁷⁰：

$$\mathcal{L}_\xi g_{ij} := (\mathcal{L}_\xi g)_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s} \xi^s + g_{lj} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} + g_{ik} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}.$$

倘若存在一向量場 ξ 使得在其生成的變換下第一標準型不變，滿足：

$$\mathcal{L}_\xi g_{ij} = 0,$$

則 ξ 是為該第一標準型的「Killing 向量場」，為該第一標準型對稱群的無窮小生成元 (infinitesimal generator)。

⁷⁰ 注意， $\mathcal{L}_\xi g_{ij}$ 為符號濫用，而此處的 g 為表示第一標準型張量，而非行列式。

13 李理論 (10/25)

上次提及過向量 η 沿著向量場 ξ 的李導數。因為根據其定義有：

$$\mathcal{L}_\xi(T \otimes S) = (\mathcal{L}_\xi T) \otimes S + T \otimes (\mathcal{L}_\xi S), \quad (13.1)$$

我們僅需考慮：

- (a) $\mathcal{L}_\xi f = \xi^s \frac{\partial f}{\partial x^s}$,
- (b) $\mathcal{L}_\xi \eta = [\xi, \eta]$,
- (c) $\mathcal{L}_\xi df = d(\mathcal{L}_\xi f)$,

便可以透過李導數為線性來延伸得到對於所有張量的李導數。

13.1 李理論

我們接下來將討論 $\mathcal{L}_\xi \eta$ 與 $[\xi, \eta]$ 之間的關聯。

定義：李代數 (Lie algebra)

考慮在體 \mathbb{F} (如 \mathbb{R} 或 \mathbb{C}) 上的向量空間 V 與一反對稱二次型 $[\cdot, \cdot]$ 滿足雅可比恆等式 (Jacobi identity) 者：

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0, \quad (13.2)$$

則我們稱 $(V, [\cdot, \cdot])$ 為李代數。

以上定義了在向量空間上，透過李括弧運算 $[\cdot, \cdot]$ 封閉的代數結構。首先要討論的是：「滿足雅可比恆等式」一句話所代表的意義為何？

定義：伴隨算子 (adjoint operator)

考慮李代數 $(V, [\cdot, \cdot])$ ，對於任意 $a, x \in V$ ，有伴隨算子：

$$\text{ad } a : V \times V \rightarrow V, x \mapsto (\text{ad } a)x := [a, x]. \quad (13.3)$$

有了以上定義並透過 $[\cdot, \cdot]$ 的反對稱性，可見得「雅可比恆等式等價於萊布尼茲律」：

$$(\text{ad } a)[b, c] = [(\text{ad } a)b, c] + [b, (\text{ad } a)c], \quad (13.4)$$

故我們稱 $\text{ad } a$ 為 derivation(滿足萊布尼茲律的線性算子)！

以下給予幾個李代數的範例：

- (a) (\mathbb{R}^3, \times) ，其中 \times 為三維中的向量叉積 (cross product)。
- (b) 線性運算子的空間 (例如矩陣、向量空間、或任何相對應的代數)，其中李括弧定義為： $[a, b] = a \circ b - b \circ a$ 。
- (c) Killing 向量場 ($\mathcal{L}_\xi g_{ij} = 0$) 形成一李子代數 (Lie subalgebra)，因為 $[\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_\eta]g = \mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\eta g - \mathcal{L}_\eta \mathcal{L}_\xi g = 0$ 。
- (d) 古典李代數：亦稱為矩陣李子代數，記為 $V = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) \subseteq \mathbb{F}^{n \times n}$ ，有李括弧為 $[A, B] = AB - BA$ 。

問題：「叉積滿足雅可比恆等式」是否為 trivial？

13.2 李群與李代數

我們接下來將見到李代數有兩種詮釋的方式，我們將考慮兩者是否等價：其一為定義李代數為在某矩陣群單位元的切空間、其二為透過李導數詮釋李代數。我們將先見前者：我們先前已見過 $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ 為一流形，故

定義：李群與李代數 (Lie group and Lie algebra)

對於子群 $G \subseteq \text{GL}(n, \mathbb{F})$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 或 \mathbb{C}) 有單位元 e ，則向量空間 $\mathcal{G} := T_e G$ 在運算 $[\cdot, \cdot]$ 下封閉。故稱 \mathcal{G} 為李群 G 的李代數。

封閉性證明如下：

- (1) 對於 $A, B \in \mathcal{G}$ ，根據古典李群的結論有 $e^{tA}, e^{tB} \in G$ ($\forall t$)。
- (2) 則曲線 $f(s) = e^A e^{sB} e^{-A} \in G$ 且通過 $f(0) = \mathbb{1}$ 。
- (3) 則根據李代數的定義，在 $s = 0$ 處的切向量為 $f'(0) = e^A B e^{-A} \in \mathcal{G}$ 。

(4) 再定義 $h(t) = e^{tA}Be^{-tA} \in \mathcal{G}$ ，有 $h'(0) = AB - BA \in \mathcal{G}$ 。

(5) 故得證其封閉性。 ■

一範例如下：因為我們先前已見過三個曲面的局部等價 $SU(2)/\{\pm 1\} \cong SO(3) \cong S^3$ ，故對應的李代數 $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3) \cong (\mathbb{R}^3, \times)$ 。更詳細地，它們李代數的基底為：

(a) $\mathfrak{su}(2)$:

$$S_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, S_3 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad (13.5)$$

滿足：

$$[S_1, S_2] = 2S_3, [S_2, S_3] = 2S_1, [S_3, S_1] = 2S_2. \quad (13.6)$$

從其對易關係 (commutator relation，即李括弧關係式) 可以看出考慮 $S_i/2$ 較好。

(b) $\mathfrak{so}(3)$:

$$L_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, L_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L_z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (13.7)$$

滿足：

$$[L_x, L_y] = L_z, [L_y, L_z] = L_x, [L_z, L_x] = L_y. \quad (13.8)$$

可見得 L_x, L_y, L_z 為旋轉矩陣的無窮小生成元，即 $\exp(aL_x + bL_y + cL_z)$ 為旋轉矩陣。

另一個範例如 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \cong \mathfrak{so}(1, 2)$ ，因為兩者同為 Lobachevskian 面 L^2 的 isometry 的切空間：前者為利用與 L^2 等價的龐加萊上半平面表示法 \mathcal{H} 、後者則為龐加萊圓盤表示法 D^2 。另一個確認 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 、 $\mathfrak{so}(1, 2)$ 兩李代數同構的方法為透過伴隨表現法。考慮對於李群 G 與其李代數 \mathcal{G} 有以下映射：

$$\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{G}), \text{ 對於 } g \in G, B \in \mathcal{G}, \text{Ad}(g)B = gBg^{-1}. \quad (13.9)$$

$$g \rightarrow \text{Ad}(g)$$

考慮 Ad 的微分映射：設 $g = g(t) = e^{tA}$

$$(d\text{Ad}(g))B = \frac{d}{dt} (e^{tA}Be^{-tA}) \Big|_{t=0} = AB - BA = [A, B] = \text{ad}(A)B. \quad (13.10)$$

可見該自同構的微分映射對應到李代數的自同態 (endomorphism)⁷¹：

$$\begin{aligned} \text{ad} : \mathcal{G} &\rightarrow \text{End}(\mathcal{G}) \\ A &\mapsto \text{ad}(A) \end{aligned} \quad (13.11)$$

套用以上兩映射於我們的問題中：

(1) 對於任意 $Y = y^i Y_i \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 考慮以下二次型⁷²：

$$|Y|^2 := \det(Y) = (y_0)^2 - (y_1)^2 - (y_2)^2, \quad (13.12)$$

其中 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 的基底 Y_i 為：

$$Y_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, Y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, Y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (13.13)$$

(2) 根據定義，對於 $g \in G = \text{SL}(2, \mathbb{R})$ 者， $\text{Ad}(g) : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 將會使該二次型數值不變：

$$\det(\text{Ad}(g)Y) = \det(gYg^{-1}) = \det(Y).$$

(3) 同時亦可見 $\text{Ad}(g)$ 亦與 $\text{SO}(1, 2)$ 之元素同構，因該二次型為 $(y_0)^2 - (y_1)^2 - (y_2)^2$ 。

(4) 設 $g = e^{tA}$ ， $A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 。則 $d\text{Ad}(g) = \text{ad}(A)$ 存在於 $\text{SO}(1, 2)$ 單位元的切空間內。
根據李代數的定義， $\text{ad}(A)$ 因此為 $\mathfrak{so}(1, 2)$ 之元素。

(5) 該同態 $\text{ad} : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{so}(1, 2)$ 有核 $\ker(\text{ad}) = 0 \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ ，故該同態為同構。 ■

⁷¹ 自同態即自己打到自己的映射。同時是自同態和同構的映射是為自同構。

⁷² 為何如此定義 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 上之度規乃是根據 Killing 形式而得，可見公式 14.3。

13.3 Invariant 向量場

接著我們將討論李代數的第二個詮釋方式—透過向量場。對於矩陣 $X \in M_n(\mathbb{R})$ ，定義線性向量場 (linear vector field) $T_X(x) = -Xx$ ，亦即 $T_X = -X_j^i x^j \frac{\partial}{\partial x^i}$ 。

問題：請走過以下的推導，並考慮對於 $T_X(x) = +Xx$ ，請問與負者有何區別？正負號之意義為何？

定理：對於 T_X 與 T_Y ，有：

$$[T_X, T_Y] = T_{[X, Y]} \quad (13.14)$$

證明如下：

$$\begin{aligned} [T_X, T_Y] &= X_k^j x^k \partial_j \left(Y_l^i x^l \right) - Y_k^j x^k \partial_j \left(X_l^i x^l \right) \\ &= X_k^j x^k Y_j^i - Y_k^j x^k X_j^i = ([Y, X]x)^i \\ &= (-[X, Y]x)^i = (T_{[X, Y]})^i. \end{aligned}$$

故得證。 ■

我們接下來將看到，以上定理亦套用於「李群與 left-invariant 向量場」上。

我們欲於李群 G 在單位元 e 上的切空間 $T_e G$ 上附加李代數的結構使得 $\mathcal{G} = T_e G$ ：對於 $g \in G$ ，引入群作用 $l_g : G \rightarrow G$ 、 $l_g(h) = gh$ 。除了 l_g 外，亦可定義 $r_g : G \rightarrow G$ 、 $r_g(h) = hg^{-1}$ 。則有其微分映射

$$\begin{aligned} d(l_g)_e : T_e G &\rightarrow T_g G \\ X &\mapsto gX \end{aligned} \quad (13.15)$$

其定義了在 G 上的向量場 L_X 為 $L_X(g) = gX$ 。我們稱 L_X 為左不變的 (left-invariant)：

$$g \cdot L_X(h) = d(l_g)_h L_X(h) = d(l_g)_h \circ d(l_h)_e X = d(l_{gh})_e X = L_X(gh). \quad (13.16)$$

亦即左不變向量場經過 pushforward 後仍為同一向量場。為「左」不變乃因群 G 在 L_X 上的作用為左作用。右不變向量場記為 R_X ，有 $R_X(g) = Xg^{-1}$ 。

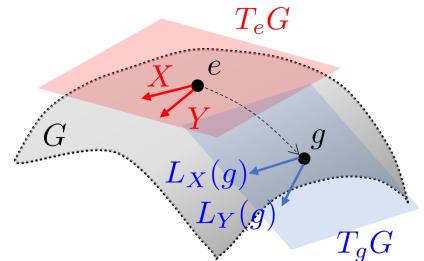
定理：滿足 $A'(t) = L_X(A(t)) \in G$ 的曲線有解為 $A(t) = A(0)e^{tX}$ 。

此外， $[L_X, L_Y] = L_{[X,Y]}$ 。

以上證明十分簡單，從略。由此定理可以看出：群 G 的李代數 $\mathcal{G} = \text{Lie}(G)$ 同構於 G 上的左不變向量場 L_X 構成的李代數。

此結論非常重要，見圖 13.1，我們因此得以將在 $T_e G$ 上的二次型 $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ 延伸至任意 $g \in G$ 上的 $T_g G$ ：

$$\langle A, B \rangle_g = \langle d(l_{g^{-1}})A, d(l_{g^{-1}})B \rangle_e, \quad (13.17)$$



或可說：

$$\langle X, Y \rangle_e = \langle L_X(g), L_Y(g) \rangle_g. \quad (13.18)$$

圖 13.1: 左不變向量場

同樣地，倘若 $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ 為非退化的，則我們可以得到 G 上的左不變度規：

$$d\ell^2 = \langle g^{-1} dg, g^{-1} dg \rangle_e. \quad (13.19)$$

一重要的例子如下：考慮 $G = \text{SO}(n) \subset M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n \times n}$ 。我們定義在 $M_n(\mathbb{R})$ 上的一個歐氏度規為：

$$\langle X, Y \rangle := \sum_{i,j} x_j^i y_j^i = \text{tr}(XY^\top). \quad (13.20)$$

則對於任意 $A \in \text{SO}(n)$ ，有 $|A|^2 = \text{tr}(AA^\top) = \text{tr}(\mathbb{1}) = n$ ，故可見 $\text{SO}(n) \subseteq S_{\sqrt{n}}^{n^2-1}$ 。對於任意 $A \in G$ ，該歐氏度規誘導出在 $T_A G$ 上的度規 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 。

定理： $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 bi-invariant^a的。

^a 即該度規同時為左和右不變。度規的左（右）不變性表示左（右）作用的微分同胚為該度規的 isometry。

證明如下：首先考慮左不變向量場 L_X ，對於 $X, Y \in \mathfrak{so}(n)$ 與 $A \in \text{SO}(n)$ ，則

$$\langle L_X(A), L_Y(A) \rangle = \text{tr}(AX(AY)^\top) = \text{tr}(AXY^\top A^\top) = \text{tr}(XY^\top A^\top A) = \text{tr}(XY^\top) = \langle X, Y \rangle_e.$$

依樣畫葫蘆，可以得知 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 在右不變向量場 R_X 上有同樣的結論。故得證。 ■

註記：bi-invariant $\langle \cdot, \cdot \rangle \Leftrightarrow (\mathbb{R}^n, +) \times$ 緊緻李群。Bi-invariant 度規可計算群的曲率。

14 Killing 形式與 Cartan d 算子 (10/27)

首先複習上週的內容，對於古典李群 $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ ，其單位元切空間 $T_e G$ 具有李代數結構：對於 $X, Y \in T_e G$ ， $[X, Y] = XY - YX \in T_e G$ 。我們可以將 $T_e G$ 的向量 X 延伸至 G 上的其他點 A ，有左不變向量場：

$$\mathrm{d}(l_A)X \equiv l_{A*}X \equiv L_X(A) := Ax,$$

其亦具有李代數結構： $[L_X, L_Y] = L_{[X, Y]}$ 。若搭配 $\mathbb{F}^{n \times n}$ 中的歐氏度規，則有誘導出的 bi-invariant 度規：

$$\langle L_X(A), L_Y(A) \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

14.1 Killing 形式

定義：Killing 形式 (Killing form)

李代數 \mathcal{G} 上的二次型 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 被稱為是 Killing 形式或 Killing 度規，若對於任意 $X, Y, Z \in \mathcal{G}$ 其滿足：

$$\langle [X, Y], Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle = 0. \quad (14.1)$$

以上 Killing 形式的條件亦可解讀為：該度規對於所有算子 $\mathrm{ad}(X)$ ($X \in \mathcal{G}$) 為反對稱

$$\langle \mathrm{ad}(X)Y, Z \rangle = -\langle Y, \mathrm{ad}(X)Z \rangle. \quad (14.2)$$

一個常用的二次型為：

$$\langle X, Y \rangle = -\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)), \quad (14.3)$$

其中有伴隨表現法 $\mathrm{ad} : \mathcal{G} \rightarrow \mathrm{End}(\mathcal{G})$ ，其讓我們得以將抽象代數變為矩陣代數。常見的 Killing 形式多為公式 14.3 的常數倍率，範例包含我們先前見過 $\mathfrak{su}(2)$ 的度規為歐氏的、 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 的度規為偽歐氏 (1,2) 型的。

問題：請問 ad 是否為單射？

而透過公式 13.19，亦可將 Killing 度規延伸至整個 G 上，故為該群的度規。

定義 : Semi-simple 李代數

李代數 \mathcal{G} 被稱為 semi-simple 的若其 Killing 形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 為非退化的。

定理 : $\mathfrak{so}(n)$ 上的歐氏度規 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是個非退化的 Killing 形式。

證明如下：

(1) 首先，歐氏度規本就是非退化且正定的。

(2) 接著驗證其是否滿足 Killing 形式的條件：因為對於 $X \in \mathfrak{so}(n)$ ， $X^T = -X$ ，所以 $\langle X, Y \rangle = \text{tr}(XY^T) = -\text{tr}(XY)$ 。則有：

$$\begin{aligned} \langle [X, Y], Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle &= -\text{tr}([X, Y]Z) - \text{tr}(Y[X, Z]) \\ &= -\text{tr}(XYZ) + \text{tr}(YXZ) - \text{tr}(YXZ) + \text{tr}(YZX) = 0. \end{aligned}$$

故得證。 ■

而因為：

$$\langle L_X(A), L_Y(A) \rangle = \text{tr}(AX(AY)^T) = \text{tr}(XY^T) = \langle X, Y \rangle, \quad (14.4)$$

該度規可以延伸至整個 $\text{SO}(n)$ 。

問題 :

(a) 透過 $\mathfrak{u}(n) \subset \mathfrak{so}(2n, \mathbb{R})$ ，驗證前者有 Killing 形式：

$$\langle X, Y \rangle = \text{Re}\{\text{tr}(X\bar{Y}^T)\} = -\text{Re}\{\text{tr}(XY)\}. \quad (14.5)$$

(b) 比較 $X \in \mathfrak{so}(n)$ 上定義的度規 $\langle X, Y \rangle = \text{tr}(XY^T) = -\text{tr}(XY)$ 與使用 $\text{ad}(X)$ 者的異同。

在此以驗證 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 之 Killing 度規為偽歐氏 (1,2) 型的為例：

(1) 挑選 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 之基底為：

$$Y_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, Y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, Y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14.6)$$

使其滿足對易關係：

$$[Y_0, Y_1] = -2Y_2, [Y_1, Y_2] = 2Y_0, [Y_0, Y_2] = 2Y_1. \quad (14.7)$$

(2) 因為 $\dim(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})) = 3$ ，故將其表示為三維向量空間，有基底 $e_0 = Y_0, e_1 = Y_1, e_2 = Y_2$ 。在該基底座標系下， $\text{ad}(Y_i) = [Y_i, \cdot]$ 為 3×3 矩陣：

$$\text{ad}(Y_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ad}(Y_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ad}(Y_2) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14.8)$$

(3) 故其 Killing 度規為：

$$\langle Y_i, Y_j \rangle := -\frac{1}{8} \text{tr}(\text{ad}(Y_i) \cdot \text{ad}(Y_j)) = \text{diag}(+1, -1, -1). \quad (14.9)$$

故得證公式 13.12。

14.2 Cartan d 算子

先前已講過 Cartan d 算子作用在微分形式上如何計算，現在將要證明其定義的嚴謹性，包括其唯一性。d 算子又被稱為外微分 (exterior derivative)，由法國數學家 Élie Cartan 提出其現在的形式。

定義：Cartan d 算子作用於 \wedge^k

對於微分形式 $\omega = h dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ ，其在 x^i 座標系下的 d 導數為：

$$d^x \omega = d^x h \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}. \quad (14.10)$$

至於 d^x 是否獨立於座標，即：

$$d^x \stackrel{?}{=} d \quad (14.11)$$

需要被證明。但我們可以先探討最簡單的情況，即 $\omega = f$ 一個純量函數。因 d 滿足：

$$(a) \quad df = \text{全微分} = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i ,$$

$$(b) \quad d^2 = 0 ,$$

$$(c) \quad d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge (d\eta) \quad (\omega \in \Lambda^p) .$$

故 d 作用在函數 f 上是獨立於座標的，即：

$$d^x f = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \frac{\partial f}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i = \frac{\partial f}{\partial y^j} dy^j = d^y f .$$

事實上，根據上方的三個特性， d 算子是唯一定義的。另外附註：根據第二個特性，我們也可以得知 d 微分僅成立於非對稱的微分形式：

$$d^2 \omega = d \left(\frac{\partial h}{\partial x^i} dx^i \right) \wedge dx^I = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^i \wedge dx^j \right) \wedge dx^I ,$$

故有條件：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^i \wedge dx^j \iff dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i . \quad (14.12)$$

接著， d 算子的定義與座標的獨立性證明如下：

(1) 首先我們回憶一下 pullback 的定義：其為座標變換，有

$$F^*(d^x \omega) = d(h \circ F) \wedge d(x^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(x^{i_k} \circ F) . \quad (14.13)$$

(2) 接著，我們需要討論以下定理：

定理：Functoriality

對於映射 $F : (V, y) \rightarrow (U, x)$ ，有 $d^y F^* \omega = F^* d^x \omega$ 。此即為 F 的 functoriality 特性^a。

^a Functoriality 被譯作函子性。

倘若 F 表示座標變換，則「 F 的 functoriality 等價於與座標獨立」。

(3) 接著驗證 F 的 functoriality :

$$\begin{aligned} d^y F^* \omega &= d^y \left((h \circ F) \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}} \cdot \frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{j_k}} \right) \wedge dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_k} \\ &= d^y (h \circ F) \wedge d(x^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(x^{i_k} \circ F) \quad \} = F^* d^x \omega \\ &\quad + (h \circ F) d^y \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}} \cdot \frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{j_k}} \right) \wedge dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_k} \} \stackrel{\text{反對稱}}{=} 0 \end{aligned}$$

(4) 故有 $d^y F^* \omega = F^* d^x \omega$, $d^x = d^y = d$ 。 ■

此外我們也有以下適用於任意座標系的公式：

定理 : Cartan's intrinsic 公式

對於 C^∞ 向量場 x_0, \dots, x_k ，有微分形式 $\omega \in \bigwedge^k(U)$ ，則：

$$\begin{aligned} (d\omega)(x_0, \dots, x_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \partial_{x_i} (\omega(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k)) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+k} \omega([x_i, x_j], x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_k), \end{aligned} \tag{14.14}$$

其中 $\partial_{x_i}(\cdot) = x_i(\cdot)$ 為分向導數、 \hat{x}_i 表示將該項移除、 $\omega(x_0, \dots, x_k)$ 為代入變數 (x_0, \dots, x_k) 進線性函數 ω 中。

證明為代入某座標系（例如直角座標系），並驗證右側仍為一張量，即得證。幾個範例如下：

(a) $\omega = f$ 為 0-形式：左側 $= df(X) = \partial_X f$ = 右側，顯然成立。

(b) $\omega = h dx^k$ 為 1-形式：欲驗證 $d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y])$ 。對於 $X = a^i \partial_i$ 、 $Y = b^i \partial_i$ ，有：

$$\begin{aligned} \text{左側} &= \left(\partial_j h dx^j \wedge dx^k \right) (X, Y) = (\partial_j h)(a^j b^k - a^k b^j) \\ \text{右側} &= X(hb^k) - Y(ha^k) + (-1)^{0+1} \omega \left(a^i (\partial_i b^j) \partial_j - b^i (\partial_i a^j) \partial_j \right) \\ &= a^j \partial_j(hb^k) - b^j \partial_j(ha^k) - h \left(a^i (\partial_i b^k) - b^i (\partial_i a^k) \right) \equiv \text{左側}, \end{aligned}$$

故確認成立。對於任意 k -形式的證明也相似，只是更為冗長。

以上公式在張量的上下標標下亦可記作：對於 $\omega = \sum T_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ ，有

$$(d\omega)_{i_1 \dots i_{k+1}} = \sum_{q=1}^{k+1} (-1)^{q-1} \partial_{x^{i_q}} T_{i_1 \dots \hat{i}_q \dots i_{k+1}}. \quad (14.15)$$

最後，我們將在此介紹數個在黎曼空間中和 Cartan d 算子相關的運算子⁷³：

(a) d 的伴隨算子：

定義：d 的伴隨算子

考慮 $\Omega^k(U)$ 為在有界 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上所有 k -形式的集合，且微分形式在 U 外為零。則定義對於 $\omega, \eta \in \Omega^k(U)$ 的內積為：

$$\langle \omega, \eta \rangle_k := \int_U \omega \wedge \star \eta, \quad (14.16)$$

而 d 的伴隨算子 $\delta : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k-1}(U)$ 滿足對於 $\omega_1 \in \Omega^{k-1}(U), \omega_2 \in \Omega^k(U)$ ：

$$\langle d\omega_1, \omega_2 \rangle_k := \langle \omega_1, \delta \omega_2 \rangle_{k-1}. \quad (14.17)$$

^a 內積的下標可省略為 $\langle d\omega_1, \omega_2 \rangle := \langle \omega_1, \delta \omega_2 \rangle$ 。

對於微分形式如何積分可見下個章節。

定理：若 d 算子作用於 $(k-1)$ -形式上，其作用於 k -形式的伴隨算子 δ 為：

$$\delta = (-1)^k \star^{-1} d \star = (-1)^{n(k-1)+1} \text{sgn}(g) \star d \star, \quad (14.18)$$

且 $\delta^2 = 0$ 。

證明如下：考慮 $\omega_1 \in \Omega^{k-1}(U), \omega_2 \in \Omega^k(U)$ ，有

$$\begin{aligned} \langle d\omega_1, \omega_2 \rangle &= \int_U (d\omega_1) \wedge \star \omega_2 \\ &= \int_U \left(d(\omega_1 \wedge \star \omega_2) - (-1)^{k-1} (\omega_1 \wedge d(\star \omega_2)) \right) \\ &= \int_U d(\omega_1 \wedge \star \omega_2) + (-1)^k \int_U \omega_1 \wedge d(\star \omega_2), \end{aligned}$$

⁷³ 此部分為根據作業與第二次期考補充的內容。

第一項利用了 Stokes 定理為零：

$$\begin{aligned} &= \int_{\partial U} (\omega_1 \wedge \star \omega_2) \xrightarrow{0} + (-1)^k \int_U \omega_1 \wedge \star (\star^{-1} d \star \omega_2) \\ &= (-1)^k \langle \omega_1, \star^{-1} d \star \omega_2 \rangle, \end{aligned}$$

故得 $\delta = (-1)^k \star^{-1} d \star$ 。又因為 \star^{-1} 作用在 $(n-k+1)$ -形式上：

$$\star^2 = (-1)^{(k-1)(n-k+1)} \cdot \text{sgn}(g) = (-1)^{kn-n-k^2-1} \text{sgn}(n),$$

得 $\delta = (-1)^{kn-n+1} \star d \star$ 。至於 $\delta^2 = \star^{-1} d^2 \star = 0$ ，故得證。 ■

(b) Laplace-de Rham 算子：

定義：Laplace-de Rham 算子 / Hodge-Laplacian

作用於 k -形式上，定義 Laplace-de Rham 算子為：

$$\Delta := d\delta + \delta d = (d + \delta)^2 \quad (14.19)$$

當其作用在純量函數上時，其與拉普拉斯算子 ∇^2 等價。

定理： Δ 為自伴隨，且其與 d 、 δ 、 \star 交換。

交換律僅須展開定義與 $d^2 = 0 = \delta^2$ 僅可得證。在此僅證明其自伴隨性：因為根據 $T \wedge \star S = \{T, S\} dV$ ，有

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \langle \omega_2, \omega_1 \rangle, \quad (14.20)$$

所以：

$$\langle \delta \omega, \eta \rangle = \langle \omega, d\eta \rangle, \quad (14.21)$$

故：

$$\begin{aligned} \langle \Delta \omega_1, \omega_2 \rangle &= \langle d\delta \omega_1, \omega_2 \rangle + \langle \delta d\omega_1, \omega_2 \rangle \\ &= \langle \omega_1, d\delta \omega_2 \rangle + \langle \omega_1, \delta d\omega_2 \rangle = \langle \omega_1, \Delta \omega_2 \rangle. \quad ■ \end{aligned}$$

(c) 內微分：

定義：內微分 (interior derivative)

對於向量場 X ，定義作用在微分形式 ω 上的算子「內微分」 $\iota_X : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k-1}(U)$ 為：

$$(\iota_X(\omega))(X_1, \dots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1}), \quad (14.22)$$

亦即將 ω 的第一個變數處帶入 X 。

定理：內微分滿足：

(i) 萊布尼茲律：對於 $\omega_1 \in \Omega^k(U)$ ，

$$\iota_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = \iota_X(\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge \iota_X(\omega_2). \quad (14.23)$$

(ii) Cartan 同倫公式 (Cartan homotopy formula)：

$$\mathcal{L}_X = d\iota_X + \iota_X d. \quad (14.24)$$

證明如下：

(i) 萊布尼茲律：

$$\begin{aligned} \iota_X(\omega_1 \wedge \omega_2) &= \iota_X \left(\sum_{I,J} T_I S_J dx^I \wedge dx^J \right) = \sum_{I,J} T_I S_J \cdot \iota_X(dx^I \wedge dx^J) \\ &= \sum_{I,J} T_I S_J \cdot \left(\iota_X(dx^I) \wedge dx^J + (-1)^k dx^I \wedge \iota_X(dx^J) \right) \\ &= \iota_X(\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge \iota_X(\omega_2). \end{aligned}$$

第二行中，因為要將 X 代入形式 ω_2 時，要先將 dx^J 中的任一 dx^j 項置換至 $dx^I \wedge dx^J$ 之第一項才能由 ι_X 代入，故前面多乘了 $(-1)^k$ ($k = |I|$)。 ■

(ii) Cartan 同倫公式：首先觀察到該公式對純量函數 f 成立，

$$(d\iota_X + \iota_X d)f = \iota_X df = df(X) = \mathcal{L}_X f.$$

接著，可見等式兩側都與 d 交換：

$$d\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_X d \quad d(d\iota_X + \iota_X d) = d\iota_X d = (d\iota_X + \iota_X d)d.$$

最後，觀察到在外積 \wedge 下兩側都是 derivation：對於 $\alpha \in \Omega^k(U)$ ，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) &= \mathcal{L}_X(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X(\beta), \\ (d\iota_X + \iota_X d)(\alpha \wedge \beta) &= d \left(\iota_X(\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \iota_X(\beta) \right) \\ &\quad + \iota_X \left(d(\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d(\beta) \right) \\ &= d\iota_X(\alpha) \wedge \beta + \underline{(-1)^{k-1} \iota_X(\alpha) \wedge d(\beta)} \\ &\quad + \underline{(-1)^k d(\alpha) \wedge \iota_X(\beta)} + (-1)^{2k} \alpha \wedge d\iota_X(\beta) \\ &\quad + \iota_X d(\alpha) \wedge \beta + \underline{(-1)^{k+1} d(\alpha) \wedge \iota_X(\beta)} \\ &\quad + \underline{(-1)^k \iota_X(\alpha) \wedge d(\beta)} + (-1)^{2k} \alpha \wedge \iota_X d(\beta) \\ &= (d\iota_X + \iota_X d)(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (d\iota_X + \iota_X d)(\beta). \end{aligned}$$

透過上述的三條件，可以見得對於任意微分形式 Cartan 同倫公式皆成立。故得證。 ■

15 Stokes 定理與 Christoffel 符號 (11/1)

15.1 Stokes 定理

⁷⁴要討論 Stokes 定理，我們需要解決先前在章節 11.2.3 提出的問題。首先為如何定義微分形式的積分：一直以來我們都只會做歐氏空間中的積分，故我們要將任意空間中微分形式的積分打回歐氏空間中處理。

定義：微分形式的積分

考慮 $f : U \hookrightarrow \mathbb{R}^k \xrightarrow{\text{有向}} \mathbb{R}^n$, $\omega \in \bigwedge^k((\mathbb{R}^n)^*)$ ，則有積分的 pullback：

$$\int_{f(U)} \omega := \int_U f^* \omega = \int_U \sum T_{i_1 \dots i_k} \underbrace{J_{1 \dots k}^{i_1 \dots i_k}}_{\text{雅可比行列式}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k. \quad (15.1)$$

Stokes 定理本質上即是微積分基本定理，故我們將用類似的手法證明之：將該證明先對一方塊驗證，後再將方塊組起來得到對於任意流行皆成立。我們將先建立一些符號以方便我們後續的推導：見圖 15.1，首先我們引入一個 \mathbb{R}^n 中的 k 維方塊

$$\sigma : I^k = [0, 1]^k \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^n, \quad (15.2)$$

我們稱其為 C^∞ 方塊 (C^∞ cube / singular cube / smooth cube)。其具有邊界 (boundary) 記為：

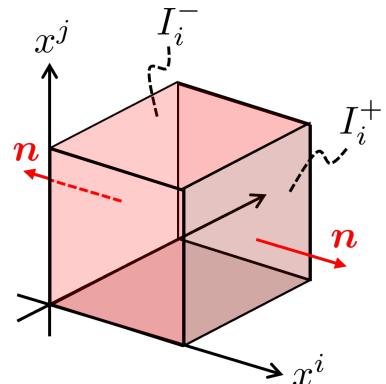


圖 15.1: C^∞ 方塊

$$\partial I^k := \bigcup_{i=1}^k (I_i^+ \cup I_i^-). \quad (15.3)$$

若我們考慮 I^k 是有向的 (oriented)，則該有向性可延伸至其邊界上：對於 I_i^+ 面有法向量 $n = \frac{\partial}{\partial x^i}$ 、 I_i^- 面有法向量 $n = -\frac{\partial}{\partial x^i}$ 。考慮方向性後，整個邊界亦可寫作：

$$\partial I^k = \sum_{i=1}^k (I_i^+ - I_i^-). \quad (15.4)$$

則我們稱以下定理成立：

⁷⁴部分前置作業為上堂課最後所補充，移至此節以提高閱讀便利性。

定理 : (Cartan)

對於 $\varphi \in \Omega^{k-1}(U)$ 、 $U \stackrel{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ 、 $\sigma : I^k \xrightarrow{C^\infty} U$ ，則：

$$\int_{\partial\sigma} \varphi = \int_{\sigma} d\varphi. \quad (15.5)$$

證明如下：

(1) 該命題等價於下：

$$\int_{\partial\sigma} \varphi = \int_{\partial I^k} \sigma^* \varphi \stackrel{?}{=} \int_{I^k} \sigma^*(d\varphi) = \int_{I^k} d(\sigma^* \varphi) = \int_{\sigma} d\varphi,$$

其中第三個等號運用了微分形式的 functoriality。

(2) 我們可以考慮：

$$\begin{aligned} \varphi &= h dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^\alpha} \wedge \cdots \wedge dx^k, \\ d\varphi &= (-1)^{\alpha-1} \frac{\partial h}{\partial x^\alpha} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^\alpha \wedge \cdots \wedge dx^k. \end{aligned}$$

(3) 我們將各個方向的積分套用微積分基本定理，得到：

$$\int_{I^k} d\varphi = \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \left(\int_{I_\alpha^+} \varphi - \int_{I_\alpha^-} \varphi \right) = \int_{\partial I^k} \varphi. \quad \blacksquare$$

由此也可見，此定理困難之處在於如何「定義邊界」。

定理 : Stokes 定理

對於有向 k 維曲面 \mathcal{M} 與定義於其上的 $(k-1)$ -形式 ω ，有：

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \omega = \int_{\mathcal{M}} d\omega. \quad (15.6)$$

證明即為將 \mathcal{M} 分割成數個 C^∞ 方塊，即可得證。但更深層的問題將會是「為什麼」我們可以分割 \mathcal{M} ，此將用到分析中的概念或是拓撲中的 partition of unity，就不在此多做說明。

對於上述的積分，我們可以見到理論中皆未出現度規，我們稱這類積分為「第二類積分 (integrals of the second kind)」。反之，若積分中出現度規，則稱之為「第一類積分 (integrals of the first kind)」。而在 \mathbb{R}^3 中，所以有第二類積分都可以視為是第一類積分，反之亦然。以下提供幾個範例：

(a) $\varphi = h \in \Lambda^0$, $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, 此即梯度定理：

$$\int_{\gamma} dh = \int_{\partial\gamma} h = h(\gamma(1)) - h(\gamma(0)) . \quad (15.7)$$

(b) $\varphi \in \Lambda^1$, $S : I^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, 此即旋度定理：

$$\begin{aligned} \int_S d\varphi &= \int_{\partial S} \varphi = \overbrace{\int_{\partial S} P dx + Q dy + R dz}^{\text{第二類積分}} = \overbrace{\int_{\partial S} \langle \mathbf{F}, dr \rangle}^{\text{第一類積分}} \\ &\quad || \\ \int_S (R_y - Q_z) dy \wedge dz + (P_z - R_x) dz \wedge dx + (Q_x - P_y) dx \wedge dy &= \int_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (15.8)$$

其中 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ 、 $dr = (dx, dy, dz)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 為內積。而 $\mathbf{n} dS = (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy)$ 。

(c) $\varphi \in \Lambda^2$, $\Omega : I^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, 此即散度定理：

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d\varphi &= \int_{\partial\Omega} \varphi = \overbrace{\int_{\partial\Omega} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy}^{\text{第二類積分}} = \overbrace{\int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle dS}^{\text{第一類積分}} \\ &\quad || \\ \int_{\Omega} (P_x, Q_y, R_z) dx \wedge dy \wedge dz &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dV \end{aligned} \quad (15.9)$$

我們也可考慮 $\mathbb{R}^{1,3}$ 中的積分。下方所討論的即為馬克士威方程式 (Maxwell's equations)：定義 $F = E_{\alpha} dx^0 \wedge dx^{\alpha} + \varepsilon_{ijk} B^i dx^j \wedge dx^k$ ，在高斯單位制下有

$$dF = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 = \operatorname{curl} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \quad (15.10)$$

$$\delta F = -\frac{4\pi}{c} \rho \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \cdot \operatorname{curl} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v} . \quad (15.11)$$

15.2 Christoffel 符號

1854 年，黎曼 (Bernhard Riemann) 於哥廷根大學的講師就職演說《Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.》⁷⁵ 中，奠定了在他之後微分幾何的研究概廓。而我們現在將介紹最後一種微分張量的方法：即是所謂的「聯絡 (connection)」。因為在流形上不同點之間的切空間不同，考慮微分時便需要透過聯絡將各個切空間聯繫在一起，而對於聯絡的描述則需要透過 Christoffel 符號。

定義：Christoffel 符號

考慮規範變換 (gauge transformation，即座標變換) $\mathcal{T}: z \rightarrow z'$ ，則滿足：

$$\mathcal{T}: \Gamma_{p'q'}^{k'}(z') := \frac{\partial z^{k'}}{\partial z^k} \Gamma_{pq}^k(z) \frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}} \frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}} + \frac{\partial z^{k'}}{\partial z^k} \frac{\partial^2 z^k}{\partial z^{p'} \partial z^{q'}} \quad (15.12)$$

之符號 Γ_{pq}^k 被稱為 Christoffel 符號。

注意，Christoffel 符號不為張量。

定理：向量的共變微分 (covariant derivative)

給予在座標系 x 下的 Christoffel 符號 Γ_{ij}^k ，則向量 $T = T^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ 的「共變微分」定義為：

$$T^k_{;j} := \frac{\partial T^k}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^k T^i \text{ 為 } (1, 1)\text{-張量} \iff \mathcal{T} \text{ 滿足。} \quad (15.13)$$

此即章節 12 一開始所見 ξ^i 之導數 ξ_j^i ，我們此處以下標「 $;j$ 」表示對 j 方向的共變微分。以上共變微分之定義與 \mathcal{T} 的關係如下：

$$\begin{aligned} T^k_{;j} &= \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^{j'}} \left(T^{k'} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \right) + \Gamma_{ij}^k T^i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \\ &= \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial T^{k'}}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} T^{k'} \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} + \Gamma_{ij}^k T^i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \\ &= \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \underbrace{\left[\frac{\partial T^{k'}}{\partial x^k} + T^{i'} \left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \right) \right]}_{\Gamma_{i'j'}^{k'}} , \end{aligned}$$

故得證。由此也可得知公式 15.12 的定義是由何啟發的。 ■

⁷⁵ 英譯：On the Hypotheses which lie at the Bases of Geometry.，由 William Kingdon Clifford 所譯。

公式 15.12 中後面多出的 $\frac{\partial z^{k'}}{\partial z^k} \frac{\partial^2 z^k}{\partial z^{p'} \partial z^{q'}}$ 導致 Γ_{pq}^k 不為張量。一種使其仍為張量的規範變換乃為仿射變換 (affine transformations)： $z' = Az + b$ ，然其沒有什麼新的洞見。另一種消掉後面多出的項的方法為：觀察到，該多出來的項對於 p' 和 q' 為對稱、且僅和規範變換有關、與 Γ 無關。故可以取任兩個 Christoffel 符號 Γ_{pq}^k 和 $\tilde{\Gamma}_{pq}^k$ ，則 $\Gamma - \tilde{\Gamma}$ 為張量；更甚，對於 $\{{}^a\Gamma_{ij}^k\}$ ，若函數 $\{f_a(x)\}$ 滿足：

$$\sum_a f_a(x) = 1 \Rightarrow \sum_a {}^a\Gamma_{ij}^k f_a(x) \text{ 為張量。}$$

而其中一個值得討論的情況則是：

定義：扭率張量 (torsion tensor)

對於 Christoffel 符號 Γ_{ij}^k ，我們可以定義其對應的扭率張量為：

$$T_{ij}^k := \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k, \quad (15.14)$$

其為一 $(1, 2)$ -張量。

可以見得，若 $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ 下標滿足交換律，則扭率張量為零，我們稱其為 torsion-free。Torsion-free 的情況將簡化許多算式，因此也將會是我們之後研究的重點；但遇到問題時也應提醒自己當扭率張量不為零的情形。

另外註記： Γ_{ij}^k 又被稱為第二類 Christoffel 符號，而 $\Gamma_{ij,k} := g_{kl}\Gamma_{ij}^l$ 則為第一類 Christoffel 符號。

16 聯絡 (11/3)

16.1 共變微分

上節最後，我們提到了對於向量進行共變微分，聯絡即是共變微分。除此之外，亦要延伸至對於任意張量的共變微分：

定義：共變微分

對於向量 $X \in T_p U$ ，定義沿著該方向的共變微分^a為：

$$\nabla_X : \mathcal{T}^{p,q}(T_p U) \rightarrow \mathcal{T}^{p,q}(T_p U) \quad (16.1)$$

^a 算子 ∇_X 又被稱為 Koszul 聯絡。

(a) 首先，公式 15.13 蘊含了以下結論：給予一 Christoffel 符號等價於表示共變微分為

$$\nabla_j \frac{\partial}{\partial x^i} \equiv \nabla_{\partial_j} \frac{\partial}{\partial x^i} := \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \circ \quad (16.2)$$

(b) 接著根據向量與共向量的對偶性：

$$\partial_i \left(dx^j, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \partial_i (\delta_k^j) = 0 \Rightarrow \nabla_j dx^i = -\Gamma_{kj}^i dx^k \circ$$

(c) 最後再透過萊布尼茲律：對於 $T \in \mathcal{T}^{p,q}(U)$ ，

$$\nabla_i T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial}{\partial x^i} T_J^I + \sum_{k=1}^p T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots s \dots i_p} \Gamma_{si}^{i_k} - \sum_{k=1}^q T_{j_1 \dots s \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \Gamma_{jk}^s \circ \quad (16.3)$$

其中 s 分別替代了 i_k 與 j_k 項。

此即將共變微分延伸至任意張量的結果。若使用上下標記，則十分好記；且若對於 i 微分則有符號 Γ_{*i}^* 中 i 在右下角。更可以見得，共變微分的定義僅需要向量即可，反觀李導數的定義則需要一向量場。另外註記 $\nabla : \mathcal{T}^{p,q}(U) \rightarrow \mathcal{T}^{p,q+1}(U)$ ，如：

$$\nabla(T^k \partial_k) = T_{;i}^k \partial_k \otimes dx^i \circ, \quad \nabla_X(T^k \partial_k) = T_{;i}^k \partial_k \otimes dx^i(X) \circ \quad (16.4)$$

其中 $T_{;i}^k = \partial_i T^k + T^s \Gamma_{si}^k$ 。故我們稱之為「共變」微分。

16.2 平行運輸與測地線方程

我們在此節將討論將張量沿著某曲線平行傳輸 (parallel transport) 與測地線 (geodesic) 究竟為何。考慮曲面 S 與向量 $X = \xi^k \partial_k \in T_p S$ ($p \in S$)，有張量 T 的共變微分：

$$\nabla_X T = \sum_k \xi^k \nabla_{\partial_k} T.$$

則平行運輸的概念為透過共變微分，描述平行移動一張量使之「相對於某路徑不變」，詳定義如下：

定義：平行運輸

對於曲線 $x(t) = \gamma : [a, b] \rightarrow S$ ，則 $\nabla_{\gamma'} T$ 為良好定義的 ($\xi^k = \partial_t x^k$)。根據常微分方程的結論，給定一初始值 $T_a \in \mathcal{T}^{p,q}(T_{\gamma(a)} S)$ ，存在唯一定義於 γ 上的 T 使得：

$$\nabla_{\gamma'} T \equiv 0 \quad (\forall t \in [a, b]), \quad (16.5)$$

則稱 T 為 T_a 沿著 γ 的平行運輸。

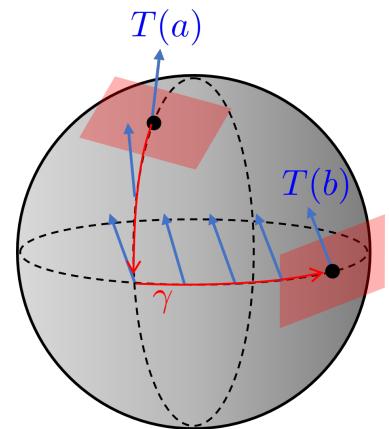


圖 16.1: 平行運輸

我們可以考慮向量的平行運輸：

$$\begin{aligned} (\nabla_{\gamma'} T)^i &= \xi^k T^i_{;k} \\ &= \frac{dx^k}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} T^i + \Gamma^i_{jk} T^j \right) \equiv 0 \\ &\rightarrow \frac{dT^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^k}{dt} T^j = 0, \end{aligned}$$

滿足上述方程的 T 即為沿著 γ 的平行運輸。

透過平行運輸的概念，我們可以闡述何為測地線。測地線即為運動的切向量（即速度向量）經過同個曲線平行運輸仍保持為切向量，用數學描述上述定義見下面。

此外，我們也會在討論變分的章節見到測地線為鄰域中兩點間最短距離之連線。

定義：測地線

給予一聯絡 Γ_{ij}^k ，曲線 γ 被稱為是測地線若且唯若在 γ 上每點都滿足測地線方程：

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0, \quad (16.6)$$

亦即：

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0. \quad (16.7)$$

可以注意到對於某 Γ_{ij}^k ，測地線方程於 i, j 對稱！故若空間中得到的 Christoffel 符號非 torsion-free 的，則我們可已更換 Christoffel 符號為一 torsion-free 者，同時保持測地線不變。該新的 Christoffel 符號記為：

$$\Gamma_{(ij)}^k := \frac{1}{2} (\Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ji}^k), \quad (16.8)$$

我們稱之為「對稱聯絡 (symmetric connection)」⁷⁶。

測地線方程為非線性的二次常微分方程，並透過初始值條件 $\gamma(0)$ 與 $\gamma'(0)$ 決定其在某有限區間內的解（為何？）。

最後，因為 γ' 為切向量，而「測地線」根據定義，是為以固定速度運動的曲線，故我們得知參數 t 需要為弧長（或其常數倍率）。

16.3 聯絡的計算

談論了如此多關於聯絡的理論，那麼聯絡真的存在嗎？考慮 m 維曲面 $S \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ，則顯然地對於 $S = \mathbb{R}^n$ ，有 $\nabla^{\mathbb{R}^n} = D$ （即歐氏微分算子），則 $\Gamma_{ij}^k = 0$ 。對於其他情況，聯絡亦是存在的。

見圖 16.2，考慮 $p \in S$ ，則我們可以將空間進行正交分

⁷⁶ 對應於對稱聯絡，我們亦有反對稱聯絡：

$$\Gamma_{[ij]}^k := \frac{1}{2} (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k).$$

下標的括號中，(*) 表示將括號中變數偶置換進行對稱和（每項相加）、[*] 表示將括號中變數置換進行反對稱和（加上偶置換項、減掉奇置換項）。

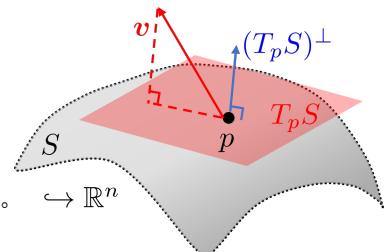


圖 16.2: 聯絡

解：

$$\mathbb{R}^n = T_p \mathbb{R}^n = T_p S \oplus (T_p S)^\perp = T_p S \oplus \mathcal{N}_p , \quad (16.9)$$

其中 \mathcal{N}_p 為在 p 點的法空間 (normal space)。則對於 $X, Y \in T_p S$ 我們可以定義 S 上的聯絡為：

$$\nabla_X Y = \left(\nabla_X^{\mathbb{R}^n} Y \right)_{\text{投影至 } T_p S \text{ 上}} , \quad (16.10)$$

其中投影乃將法空間之分量去掉。而對於空間中任意向量場 $\tilde{Y} \in \mathbb{R}^n$ ，我們亦有 $\nabla_X Y = \left(\nabla_X^{\mathbb{R}^n} \tilde{Y} \right)_{\text{投影至 } T_p S \text{ 上}}$ ，其中有約束關係 $\tilde{Y}|_S = Y$ 。由此上述投影方法得到的聯絡有許多良好特性：

- 與度規相容 (compatible with metric) :

$$\nabla_k g_{ij} = 0 . \quad (16.11)$$

- torsion-free :

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k . \quad (16.12)$$

聯絡與度規的相容性隱含了諸多性質：

- (a) 聯絡與度規可交換：

$$\nabla_k (g_{ij} T_J^I) = g_{ij} (\nabla_k T_J^I) . \quad (16.13)$$

- (b) 平行運輸為 isometry 變換：

$$\frac{d}{dt} \langle v, w \rangle = \frac{d}{dt} (g_{ij} v^i w^j) = \frac{dx^k}{dt} \nabla_k (g_{ij} v^i w^j) = \frac{dx^k}{dt} g_{ij} \left((\nabla_k v^i) w^j + v^i (\nabla_k w^j) \right) = 0 \quad (16.14)$$

然上述構造聯絡的方法將限縮可以套用的空間度規，甚至需要藉由一外部空間才能定義其聯絡。我們稱具有上述良好性質的聯絡為：

定義：Levi-Civita 聯絡

在流形 $(S, d\ell^2)$ 上，我們稱一聯絡 ∇ 為 Levi-Civita 若其與度規相容且為 torsion-free。可標記為 $\nabla = \nabla^{\text{L-C}}$ 。

我們欲找到 Levi-Civita 聯絡，不依賴於外部空間，其必然存在嗎？

定理：Levi-Civita 聯絡的存在唯一性

給予一度規，則存在唯一的 Levi-Civita 聯絡。

證明如下：

(1) 紿予度規 g_{ij} ，我們將證明於下其 Levi-Civita 聯絡為

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}), \quad (16.15)$$

且所有其他聯絡形式皆為 $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + ((1, 2)\text{-張量})$ 。

(2) 首先考慮與度規之相容性關係式：

定理：聯絡與度規相容

考慮任意向量 X, Y, Z ：

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \iff X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle. \quad (16.16)$$

證明如下：因度規 g 為二次型，對於 $X = X^i \partial_i, Y = Y^i \partial_i, Z = Z^i \partial_i$ 有

$$\begin{aligned} \nabla_X g(Y, Z) &= X^i Y^j Z^k (\nabla_i g_{jk}) = X^i Y^j Z^k \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \Gamma_{ji}^s g_{sk} - \Gamma_{ki}^s g_{js} \right) \\ &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i} (g_{jk} Y^j Z^k) - g_{sk} \left(X^i Y^s_{;i} \right) Z^k - g_{js} Y^j \left(X^i Z^s_{;i} \right) \\ &= X \langle Y, Z \rangle - \langle \nabla_X Y, Z \rangle - \langle Y, \nabla_X Z \rangle = 0 \end{aligned}$$

(3) 選擇 $X = \partial_i, Y = \partial_j, Z = \partial_k$ ：

$$\partial_i \underbrace{\langle \partial_j, \partial_k \rangle}_{g_{jk}} = \underbrace{\langle \nabla_i \partial_j, \partial_k \rangle}_{\Gamma_{ji}^l \partial_l} + \underbrace{\langle \partial_j, \nabla_i \partial_k \rangle}_{\Gamma_{ki}^l \partial_l}.$$

將上式輪換 (i, j, k) ，有：

$$\begin{cases} \partial_i g_{jk} = \Gamma_{ji}^l g_{lk} + \Gamma_{ki}^l g_{jl} \\ \partial_j g_{ki} = \Gamma_{kj}^l g_{li} + \Gamma_{ij}^l g_{kl} \\ \partial_k g_{ij} = \Gamma_{ik}^l g_{lj} + \Gamma_{jk}^l g_{il} \end{cases} \circ$$

(4) 孤立出 Γ_{ij}^l 項，加上考慮聯絡為 torsion-free，將前兩式相加並減去第三式得到：

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} = 2\Gamma_{ij}^l g_{lk} \\ & \Rightarrow \Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{lk} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}) \circ \end{aligned}$$

故得證。 ■

16.4 聯絡之範例

16.4.1 散度

首先我們討論任意空間中的向量場的散度該如何定義。對於向量 $\mathbf{T} = T^i \partial_i$ 與 n 維區域 Ω ，考慮散度定理：

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{T} dV = \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{T}, \mathbf{n} \rangle dS = \int_{\partial\Omega} T^i dS_i , \quad (16.17)$$

其中：

$$dS_i := (-1)^{i-1} \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots dx^n .$$

故右式為：

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} T^i dS_i &= \int_{\partial\Omega} T^i (-1)^{i-1} \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots dx^n \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^i} (T^i \sqrt{|g|}) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{|g|} T^i) dV , \end{aligned}$$

由此可定義散度為：

$$\operatorname{div} \mathbf{T} := \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{|g|} T^i) . \quad (16.18)$$

定義：散度 (divergence)

對於 Levi-Civita 聯絡，定義向量場的散度為：

$$\operatorname{div} \mathbf{T} := \nabla_i T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} T^k = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{|g|} T^i) , \quad (16.19)$$

其中 $g = \det([g_{ij}])$ 。

證明如下：

$$\nabla_i T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + \Gamma_{ki}^i T^k .$$

又因為聯絡為 Levi-Civita 的，有：

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_k g_{li} + \cancel{\partial_l g_{ik}} - \cancel{\partial_k g_{li}}) = \frac{1}{2} g^{il} \partial_k g_{li} ,$$

且由線性代數之結論可知 $g^{il} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{li}}$ ，其中 $\frac{\partial g}{\partial g_{li}}$ 為 g_{li} 之餘因子 (cofactor)，故：

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial g_{li}} \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \ln(\sqrt{|g|}) . \quad (16.20)$$

可見：

$$\nabla_i T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} T^k .$$

最後等號可以直接展開右式得知。故得證。 ■

16.4.2 測地線

接著，我們將討論旋轉體曲面上的測地線之性質。考慮某參數化旋轉體曲面 $\mathbf{r}(\varphi, z) = (f(z) \cos \varphi, f(z) \sin \varphi, z)$ 。由章節 6.3 中已知：

$$d\ell^2 = f^2 d\varphi^2 + (1 + f'^2) dz^2 \Leftrightarrow 1 = f^2 \dot{\varphi}^2 + (1 + f'^2) \dot{z}^2 . \quad (16.21)$$

Christoffel 符號為：

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0 , \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{ff'}{f^2} , \Gamma_{11}^2 = -\frac{ff'}{1 + f'^2} , \Gamma_{22}^2 = \frac{f'f''}{1 + f'^2} ,$$

因而有測地線方程為：

$$\ddot{\varphi} + \frac{2ff'}{f^2}\dot{\varphi}\dot{z} = 0 \quad (16.22)$$

$$\ddot{z} + \frac{1}{1+f'^2}(-ff'\dot{\varphi}^2 + f'f''\dot{z}^2) = 0. \quad (16.23)$$

將公式 16.22 與公式 16.23 結合可以得到公式 16.21，因此僅需考慮化簡公式 16.22：

$$\begin{aligned} f^2\ddot{\varphi} + 2ff'\dot{z}\dot{\varphi} &= 0 \\ \frac{d}{dt}(f^2\dot{\varphi}) &= 0 \\ f^2\dot{\varphi} &= \text{常數} \end{aligned} \quad (16.24)$$

$$\rightarrow f^2\dot{\varphi} = \langle \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_1 \rangle = \langle \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_1 \rangle = \text{常數}.$$

若令 ψ 為測地線與緯線的夾角，則：

$$\begin{cases} \langle \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_1 \rangle = |\dot{\mathbf{r}}||\mathbf{r}_1| \cos \psi \\ |\dot{\mathbf{r}}| \cos \psi = |\mathbf{r}_1| \dot{\varphi} \end{cases}$$

$$\rightarrow f^2\dot{\varphi} = \langle \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_1 \rangle = |\mathbf{r}_1|^2 \dot{\varphi},$$

可知 $|\mathbf{r}_1| = f$ 。又因 $|\dot{\mathbf{r}}| = 1$ ，得到 Clairaut 關係式：

$$\langle \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_1 \rangle = f \cos \psi = c = \text{常數}, \quad (16.25)$$

其描述旋轉體曲面上測地線需要滿足的關係式。而透過公

式 16.24 與公式 16.21 亦可求得測地線上 φ 與 z 的關係：

$$\begin{aligned} c &= f^2 \frac{d\varphi}{dz} \dot{z} = f^2 \frac{d\varphi}{dz} \sqrt{\frac{1-f^2\dot{\varphi}^2}{1+f'^2}} = f \frac{d\varphi}{dz} \sqrt{\frac{f^2-c^2}{1+f'^2}} \\ \Rightarrow \frac{d\varphi}{dz} &= \frac{c}{f} \sqrt{\frac{1+f'^2}{f^2-c^2}} \\ \Rightarrow \varphi(z) &= \int \frac{c}{f} \sqrt{\frac{1+f'^2}{f^2-c^2}} dz. \end{aligned} \quad (16.26)$$

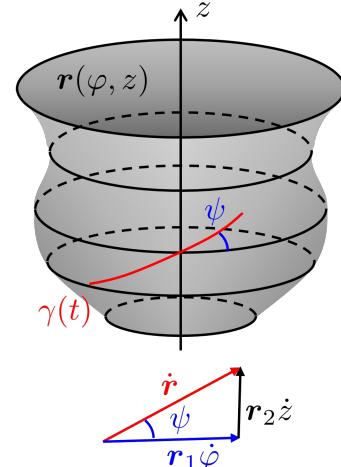


圖 16.3: 旋轉體曲面上的測地線

17 曲率 (11/8)

17.1 黎曼曲率張量

何為曲率？曲率乃為測量兩共變向量場之間的「不交換」程度。若是在歐氏空間， $\nabla_k T^i \equiv \partial_k T^i$ ，因為偏微分的連續性， $\partial_k \partial_l = \partial_l \partial_k$ ，故這似乎是度量共變向量場交換性的好方法。對於向量場 $T = T^i \partial_i$ ，考慮：

$$\nabla_k \nabla_l T^i - \nabla_l \nabla_k T^i = T^i_{;lk} - T^i_{;kl} ,$$

其中：

$$\begin{aligned} \nabla_k \nabla_l T^i &= \nabla_k \underbrace{T^i_{;l}}_{(1,1)\text{-張量}} = \nabla_k \left(\partial_l T^i + \Gamma^i_{ql} T^q \right) \\ &= \partial_k T^i_{;l} + \Gamma^i_{pk} T^p_{;l} - \Gamma^p_{lk} T^i_{;p} \\ &= (\underbrace{\partial_k \partial_l T^i}_{k, l \text{ 對稱}} + \partial_k \Gamma^i_{ql} T^q) + (\Gamma^i_{pk} \partial_l T^p + \Gamma^i_{pk} \Gamma^p_{ql} T^q) - \Gamma^p_{lk} T^i_{;p} , \end{aligned}$$

故有：

$$\nabla_k \nabla_l T^i - \nabla_l \nabla_k T^i = \underbrace{\left(\partial_k \Gamma^i_{ql} - \partial_l \Gamma^i_{qk} + \Gamma^i_{pk} \Gamma^p_{ql} - \Gamma^i_{pl} \Gamma^p_{qk} \right)}_{R^i_{qkl}} T^q + \underbrace{\left(\Gamma^p_{kl} - \Gamma^p_{lk} \right)}_{T^p_{kl}} T^i_{;p} . \quad (17.1)$$

定義：黎曼曲率張量 (Riemann curvature tensor)

黎曼曲率張量乃為以下的 $(1, 3)$ -張量：

$$R^i_{qkl} := \partial_k \Gamma^i_{ql} - \partial_l \Gamma^i_{qk} + \Gamma^i_{pk} \Gamma^p_{ql} - \Gamma^i_{pl} \Gamma^p_{qk} . \quad (17.2)$$

可視黎曼曲率張量 R^i_{qkl} 為矩陣 (i, q) ，其中每個元素皆為二次型 (k, l) 。

定理：對於切空間 $V = T_p S$ ，

(a) 黎曼曲率張量有座標獨立表示法：對於向量 X, Y, Z ，黎曼曲率張量 R ：

$V \times V \times V \rightarrow V$ 形如下

$$R(X, Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X, Y]}Z \quad (17.3)$$

(b) 扭率張量有座標獨立表示法：對於向量 X, Y ，撓率張量 $T : V \times V \rightarrow V$ 為 2-形式如下

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (17.4)$$

證明如下：首先我們僅需確認兩張量對於各變數皆是線性的（即 $F(fX) = fF(X) \quad \forall f \in C^\infty$ ），再來將正交基底向量代入變數確認其為張量（此部分為 trivial）便得證。

(a) 黎曼曲率張量：

$$\begin{aligned} R(fX, Y)Z &= f\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y f \nabla_X Z - \nabla_{f[X, Y]} Z \\ &= f\nabla_X \nabla_Y Z - (\cancel{\partial_Y f}) \cancel{\nabla_X Z} - f\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{f[X, Y]} Z + (\cancel{\partial_Y f}) \cancel{\nabla_X Z} \\ &= fR(X, Y)Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(X, Y)fZ &= \nabla_X \nabla_Y (fZ) - \nabla_Y \nabla_X (fZ) - \nabla_{[X, Y]} fZ \\ &= (\cancel{\partial_X \partial_Y f}) Z + (\cancel{\partial_Y f}) \cancel{\nabla_X Z} + (\cancel{\partial_X f}) \cancel{\nabla_Y Z} + f\nabla_X \nabla_Y Z - (\cancel{\partial_Y \partial_X f}) Z \\ &\quad - (\cancel{\partial_X f}) \cancel{\nabla_Y Z} - (\cancel{\partial_Y f}) \cancel{\nabla_X Z} - f\nabla_Y \nabla_X Z - (\cancel{\partial_{[X, Y]} f}) Z^0 - f\nabla_{[X, Y]} Z \\ &= fR(X, Y)Z \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(b) 扭率張量：

$$\begin{aligned} T(fX, Y) &= \nabla_{fX} Y - \nabla_Y fX - [fX, Y] \\ &= f\nabla_X Y - (\cancel{\partial_Y f}) X - f\nabla_Y X - fX(Y) + \cancel{Y(f)X} + fY(X) = fT(X, Y). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

可以見得，若所選擇的向量使得 $[X, Y] = 0$ ，則黎曼曲率張量與扭率張量形式將十分簡單為 $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z$ 、 $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ 。

若使用局部座標系，我們亦有以下表示法：

定理：

(a) 黎曼曲率張量：

$$R(\partial_k, \partial_l)\partial_q = R^i_{qkl}\partial_i \circ \quad (17.5)$$

(b) 扭率張量：

$$T(\partial_i, \partial_j) = -T^k_{ij}\partial_k \circ \quad (17.6)$$

證明從略。

定理：黎曼曲率張量性質

(a) 對於任意聯絡 ∇ ，其對於下標 (k, l) 為反對稱： $R^i_{qkl} = -R^i_{qlk}$ 。

(b) 第一 Bianchi 恒等式：對於 torsion-free 的聯絡 ∇ ，則有

$$R^i_{[qkl]} = 0 \text{ 或 } R^i_{qkl} + R^i_{klq} + R^i_{lqk} = 0 \circ \quad (17.7)$$

(c) 對於聯絡 ∇ 與度規 g 相容 ($\nabla g = 0$)，則 $R_{iqkl} := g_{ip}R^p_{qkl}$ 對於上下標 (i, q) 為反對稱： $R_{iqkl} = -R_{qikl}$ 。

(d) 對於 Levi-Civita 聯絡 $\nabla = \nabla^{\text{L-C}}$ ， $R_{iqkl} = R_{kliq}$ ，亦即其為 2-形式叢的對稱 2 階張量，即 $R_{iqkl} \in \text{Sym}^2(\bigwedge^2 T)$ 。

證明如下：

(a) 從定義即可得知。 ■

(b) 由公式 17.5 可知該命題等價於：

$$\begin{aligned} & [\nabla_k, \nabla_l]\partial_q + [\nabla_l, \nabla_q]\partial_k + [\nabla_q, \nabla_k]\partial_l \equiv 0 \\ \Leftrightarrow & \nabla_k(\nabla_l\partial_q - \nabla_q\partial_l) + \nabla_l(\nabla_q\partial_k - \nabla_k\partial_q) + \nabla_q(\nabla_k\partial_l - \nabla_l\partial_k) \equiv 0 , \end{aligned}$$

因 ∇ 為 torsion-free， $\nabla_l\partial_q - \nabla_q\partial_l = 0$ 。即可得證。 ■

(c) 因為：

$$R_{iqkl} = g_{ip} R^p_{qkl} = \langle R(\partial_k, \partial_l) \partial_q, \partial_i \rangle, \quad (17.8)$$

對於任意向量 $\xi = \xi^i \partial_i$ 亦有：

$$\langle [\nabla_k, \nabla_l] \xi, \xi \rangle = \langle [\nabla_k, \nabla_l](\xi^q \partial_q), \xi^i \partial_i \rangle = R_{iqkl} \xi^i \xi^q,$$

倘若能證明 $\langle [\nabla_k, \nabla_l] \xi, \xi \rangle = 0$ ，則代入 $\xi = a\partial_i + b\partial_q$ 即可得證。因該連絡與度規相容，有：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial x^k} \langle \xi, \xi \rangle &= \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^l} \langle \xi, \xi \rangle = \nabla_k \nabla_l \langle \xi, \xi \rangle = 2 \langle \nabla_k \nabla_l \xi, \xi \rangle + 2 \langle \nabla_k \xi, \nabla_l \xi \rangle \\ \rightarrow \langle (\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) \xi, \xi \rangle &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^l} \langle \xi, \xi \rangle - \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial x^k} \langle \xi, \xi \rangle \right) = 0 \end{aligned}$$

故得證。 ■

(d) 結合前三個性質：記 $\mathfrak{R}_{i;qkl} = R_{iqkl} + R_{iklq} + R_{ilqk}$ ，則因性質 (b) 有 $\mathfrak{R}_{i;qkl} = 0$ 。計算 $\mathfrak{R}_{i;qkl} - \mathfrak{R}_{q;ikl} + \mathfrak{R}_{k;ilq} + \mathfrak{R}_{l;iqk} = 0$ 即得證。 ■

17.2 里奇曲率張量與純量曲率

除了黎曼曲率張量外，亦有另外兩個張量值得介紹：

定義：里奇曲率張量 (Ricci curvature tensor)

里奇曲率張量為對稱的 $(0, 2)$ -張量，其定義如下^a：

$$R_{ql} := R^k_{qkl} = g^{ik} R_{iqkl}. \quad (17.9)$$

^a 說個笑話： R_{icci} 是黎曼曲率張量。

定義：純量曲率 (scalar curvature)

$$R := R^a_a = g^{lq} R_{ql} = g^{ik} g^{lq} R_{iqkl}. \quad (17.10)$$

我們接下來將看到純量曲率與過去所學到之高斯曲率也有關係。

17.3 曲率之範例

17.3.1 二維流形

首先我們將考慮三維空間中的二維曲面 $z = f(x_1, x_2)$ ，我們將證明純量曲率與高斯曲率的關係為 $R = 2K$ 。考慮在 p 點處， $\nabla f(p) = 0$ ，即 p 點為極值，則：

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{r}_1 = (1, 0, f_1) \\ \mathbf{r}_2 = (0, 1, f_2) \end{array} \right\} \rightarrow g_{ij} = \delta_{ij} + f_i f_j .$$

特別地， $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ ，因 $\partial_k \delta_{ij} = 0$ ，故 $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ 。我們因而有：

$$\begin{aligned} R^i_{qkl} &= \partial_k \Gamma^i_{ql} - \partial_l \Gamma^i_{qk} = \frac{1}{2} \partial_k (\partial_q g_{il} + \cancel{\partial_l g_{qi}} - \partial_i g_{ql}) - \frac{1}{2} \partial_l (\partial_q g_{ik} + \cancel{\partial_k g_{qi}} - \partial_i g_{qk}) \\ \rightarrow R_{1212} &= R^1_{212} = \frac{1}{2} (\partial_1 \partial_2 g_{12} - \partial_1 \partial_1 g_{22} - \partial_2 \partial_2 g_{11} + \partial_2 \partial_1 g_{21}) \\ &= f_{11} f_{22} - f_{12}^2 = K_p , \end{aligned}$$

其中最後一等號利用了公式 6.14。我們因此有純量曲率：

$$R = 2R_{1212}(g^{11}g^{22} - (g^{12})^2) = \frac{2R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = 2R_{1212} = 2K_p , \quad (17.11)$$

故得證。 ■

而因為純量張量和高斯曲率都是純量，在座標變換下為定值。故對於三維空間中的二維曲面上任一點，公式 17.11 都適用。且因為純量曲率可以完全以第一標準型 g_{ij} 表示，高斯曲率亦僅由第一標準型決定，此即高斯絕妙定理的另一個證明。

在證明的過程中，我們也可以見得曲面 S 上，對於兩相異向量 $X = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$ 、 $Y = c\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2 \in T_p S$ ，高斯曲率亦可表達為：

$$K_p = R_{1212} = \frac{(ad - bc)^2 R_{1212}}{|(ad - bc)\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2|^2} = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{|X \wedge Y|^2} , \quad (17.12)$$

其中 $X \wedge Y$ 為向量外積 (outer product / wedge product)。此外，我們亦可記：

$$R(X, Y, Z, W) := \langle R(X, Y)W, Z \rangle = \langle R(Z, W)Y, X \rangle . \quad (17.13)$$

17.3.2 三維流形

接著我們來討論三維流形上的曲率：

定理：在曲面維度 $n = 3$ 時，黎曼曲率 R^i_{qkl} 完全由里奇曲率 R_{ql} 與第一標準型 g_{ij} 決定：

$$R_{iqkl} = R_{ik}g_{ql} - R_{il}g_{qk} + R_{ql}g_{ik} - R_{qk}g_{il} - \frac{R}{2}(g_{ik}g_{ql} - g_{il}g_{qk}) \circ. \quad (17.14)$$

在此不證明上述定理，但提供其合理性之思路如下：

- (1) 首先，因 R_{iqkl} 對 (i, q) 反對稱、 (k, l) 反對稱、 $((iq), (kl))$ 對稱，故我們暫時記 (i, q) 為 $A = [i, q]$ 、 (k, l) 為 $B = [k, l]$ 以凸顯其反對稱性：

$$R_{iqkl} = R_{[i,q],[k,l]} = R_{AB},$$

且其對 A 、 B 對稱。 A 、 B 兩者共有三種可能： $[1, 2]$ 、 $[2, 3]$ 、 $[3, 1]$ ，因此決定 $n = 3$ 中的黎曼曲率張量有六個自由度。

- (2) 因為里奇曲率張量為對稱： $R_{ql} = R_{lq}$ ，其同樣具有六個自由度。由此可見，兩者是可以互相表示的！僅需逆計算 $R_{iq} = g^{kl}R_{iqkl}$ 。 ■

問題：

- (a) 證明公式 17.14。
- (b) 對於 $n = 2$ ，證明有：

$$R_{iqkl} = \frac{R}{2}(g_{ik}g_{ql} - g_{il}g_{qk}) \circ. \quad (17.15)$$

17.3.3 四維流形

在四維流形上，里奇曲率就不得能決定黎曼曲率，但在相對論的四維時空中，有愛因斯坦場方程：

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = \lambda T_{ij} , \quad (17.16)$$

$$\nabla_j T_i^j = 0 , \quad (17.17)$$

其中 T_{ij} 被稱為能量-動量張量 (energy-momentum tensor)，而第二式則是表示 T_i^j 滿足的守恆律。此為 g_{ij} 的二階偏微分方程。

17.3.4 額外的定理

定理：第二 Bianchi 恒等式

以下呈現該恒等式的不同標記法：

$$\nabla_m R^i_{jkl} + \nabla_k R^i_{jlm} + \nabla_l R^i_{jm} = 0 \quad (17.18)$$

$$R^i_{jkl;m} + R^i_{jlm;k} + R^i_{jm;k;l} = 0 \quad (17.19)$$

$$R^i_{j[kl;m]} = 0 . \quad (17.20)$$

證明如下：考慮局部的正則座標系 (normal coordinate)，使得基底座標之間局部相互正交、Christoffel 符號皆為零，因此有：

$$\begin{aligned} R^i_{jkl;m} &= \partial_m R^i_{jkl} + \cancel{\Gamma^i_{sm}} \overset{0}{R^s_{jkl}} - \cancel{\Gamma^s_{jm}} \overset{0}{R^i_{skl}} - \cancel{\Gamma^s_{km}} \overset{0}{R^i_{jsl}} - \cancel{\Gamma^s_{lm}} \overset{0}{R^i_{jks}} \\ &= \partial_m \left(\partial_k \Gamma^i_{jl} - \partial_l \Gamma^i_{jk} + \cancel{\Gamma^i_{pk}} \overset{0}{\Gamma^p_{jl}} - \cancel{\Gamma^i_{pl}} \overset{0}{\Gamma^p_{jk}} \right) = \partial_m \partial_k \Gamma^i_{jl} - \partial_m \partial_l \Gamma^i_{jk} , \end{aligned}$$

故將三項相加有：

$$R^i_{jkl;m} + R^i_{jlm;k} + R^i_{jm;k;l} = \partial_m \partial_k \Gamma^i_{jl} - \partial_m \partial_l \Gamma^i_{jk} + \partial_k \partial_l \Gamma^i_{jm} - \partial_k \partial_m \Gamma^i_{jl} + \partial_l \partial_m \Gamma^i_{jk} - \partial_l \partial_k \Gamma^i_{jm} = 0 .$$

且張量與所使用的座標表示法無關，故其在任何座標系下皆為零，第二 Bianchi 恒等式故得證。 ■

問題：透過以上定理，我們得以討論愛因斯坦場方程的一組特殊解：考慮 $n \geq 3$ 的真空中，若有 $R_{ij} = \lambda g_{ij}$ ，則可證明 λ 為常數。可考慮 $\nabla_i R_j^i = \frac{1}{2} \partial_j R$ 。^a

^a 不過這個我還沒有自己證明過，所以也不確定該題目敘述是否正確。

18 關於聯絡的討論與 Gauss-Codazzi 方程 (11/10)

18.1 一些關於聯絡的討論

18.1.1 Killing 度規下的曲率

接續上次對於曲率的討論：我們現下將考慮由 Killing 度規生成的曲率張量。考慮古典李群 G ，其具有一 bi-invariant 的 Killing 度規 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 。對於其李代數 \mathcal{G} 和任意 $X, Y \in \mathcal{G}$ ，定義兩左不變向量場 $L_X(A) = AX, L_Y(A) = AY (A \in G)$ ，則我們可以定義以下聯絡：

$$\nabla_{L_X} L_Y := \frac{1}{2} L_{[X,Y]} = \frac{1}{2} [L_X, L_Y]. \quad (18.1)$$

可以自行確認定義公式 18.1 確實為一聯絡。

定理： 公式 18.1 所定義的聯絡為 Levi-Civita 的，亦即 $\nabla = \nabla^{\text{L-C}}$ 。

證明如下：

(1) Torsion-free :

$$T(L_X, L_Y) := \nabla_{L_X} L_Y - \nabla_{L_Y} L_X - [L_X, L_Y] = 0.$$

(2) 度規相容性：見 Killing 度規的定義公式 14.1，並透過 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 為 bi-invariant 展開下式，

$$\begin{aligned} L_X \langle L_Y, L_Z \rangle - \langle \nabla_{L_X} L_Y, L_Z \rangle - \langle L_Y, \nabla_{L_X} L_Z \rangle \\ = L_X \underbrace{\langle Y, Z \rangle}_{\text{常數}} - \frac{1}{2} \langle L_{[X,Y]}, L_Z \rangle - \frac{1}{2} \langle L_Y, L_{[X,Z]} \rangle \\ = -\frac{1}{2} (\langle [X, Y], Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle) = 0 \end{aligned}$$

即可得證。 ■

在此如此良好的聯絡下，我們可以討論其黎曼曲率張量：

定理：Killing 度規下的黎曼曲率張量

考慮如上的 (G, ∇) ，有 G 上的黎曼曲率張量為：

$$R(X, Y)Z = -\frac{1}{4} [[X, Y], Z] , \quad (18.2)$$

其中 $X, Y, Z \in \mathcal{G}$ 。

證明如下：

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \\ &= \frac{1}{2} \left[X, \frac{1}{2}[Y, Z] \right] - \frac{1}{2} \left[Y, \frac{1}{2}[X, Z] \right] - \frac{1}{2} [[X, Y], Z] \\ &= -\frac{1}{4} [[X, Y], Z] , \end{aligned}$$

其中第三個等號利用了雅可比恆等式。故得證。 ■

此外，我們也可以得知：

定理：對於如上的 (G, ∇) ，以下公式成立：

$$R(X, Y, Z, W) := \langle R(X, Y)W, Z \rangle = \frac{1}{4} \langle [X, Y], [Z, W] \rangle , \quad (18.3)$$

以及高斯/純量曲率非負：

$$R = R(X, Y, X, Y) = \frac{1}{4} |[X, Y]|^2 \geq 0 . \quad (18.4)$$

證明如下：套用公式 14.1，

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)W, Z \rangle &= \frac{1}{4} \langle [W, [X, Y]], Z \rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle \text{ad}(W)[X, Y], Z \rangle \\ &= -\frac{1}{4} \langle [X, Y], \text{ad}(W)Z \rangle = \frac{1}{4} \langle [X, Y], [Z, W] \rangle . \quad ■ \end{aligned}$$

事實上，也可見得阿貝爾群⁷⁷，有 $[X, Y] = 0$ ，故其純量曲率處處為零。

⁷⁷ Abelian groups，亦即交換群 (commutative group)。

定理：對於如上的 (G, ∇) (G 為緊緻李群)，通過群單位元 e 的測地線為單參數的李子群。此外，左、右指數映射定義重合。

證明如下：

(1) 對於 $X \in \mathcal{G}$ ，考慮曲線 $A(t) = e^{tX}$ 。有 $A'(t) = AX = L_X(A)$ 。

(2) 則可見該曲線滿足測地線方程：

$$\nabla_{A'} A' = \nabla_{L_X} L_X = \frac{1}{2}[L_X, L_X] = 0.$$

(3) 反之亦然：若有測地線 $\nabla_{A'} A' = 0$ 、 $A'(0) = X \in T_e G$ ，則其必存在唯一解。 ■

上述定理中，我們對於李群要求其為緊緻的，並與其測地線做了連結。那麼對於一度量空間 (metric space) (S, d) ，是否有類似對於其完備性 (completeness) 的描述呢？有的，那便是所有柯西序列皆收斂。那麼對於幾何流形 (S, g) 的完備性呢？以下定理闡明此：

定理：Hopf-Rinow 定理

(S, g) 的完備性 $\Leftrightarrow S$ 的任何測地線都可延伸至無窮遠處 $\Leftrightarrow S$ 中的任兩點 p, q 都可透過測地線連接。

證明不在此討論。透過 Hopf-Rinow 定理，我們能得知既然如上 (G, ∇) 的左、右不變向量場能延伸無窮遠，則 (G, ∇) 必為完備的，同時指數映射為滿射。

但是 $SL(2, \mathbb{R})$ 則不為此。因為有些點無法由指數映射達到，故 $SL(2, \mathbb{R})$ 的幾何不能如 (G, ∇) 般如此簡單地描述。

18.1.2 二次共變微分

我們記：

$$\nabla_k \nabla_l T^i =: (\nabla^2 T)^i_{;lk}. \quad (18.5)$$

但顯然地，對於向量場 X, Y ，帶入共變微分後 $\nabla^2(X, Y) \neq \partial_X \partial_Y$ ，由其不滿足線性 $\nabla^2(X, fY) \neq f\partial_X \partial_Y$ 即可得出其非正確。事實上，我們有：

定理：對於二次共變微分算子，有以下展開：

$$\nabla_{X,Y}^2 \equiv \nabla^2(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_{\nabla_X Y} \circ \quad (18.6)$$

因此：

$$\nabla_{X,Y}^2 - \nabla_{Y,X}^2 = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{\nabla_X Y - \nabla_Y X} = R(X, Y) - \nabla_{T(X, Y)} \circ \quad (18.7)$$

詳細推導如下：

(1) 考慮向量場 $X = x^i \partial_i$ 、 $Y = y^i \partial_i$ 、 $Z = z^i \partial_i$ ，有：

$$\begin{aligned} (\nabla_X \nabla_Y Z)^i &= x^j \nabla_j (y^k \nabla_k z^i) = x^j y^k \nabla_j \nabla_k z^i + x^j (\nabla_j y^k) (\nabla_k z^i) \\ &= \nabla_{X,Y}^2 z^i + \nabla_{\nabla_X Y} z^i = (\nabla_{X,Y}^2 + \nabla_{\nabla_X Y}) z^i. \end{aligned}$$

(2) 考慮公式 17.3 和公式 17.4，有：

$$\begin{aligned} \nabla_{X,Y}^2 - \nabla_{Y,X}^2 &= [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{\nabla_X Y - \nabla_Y X} \\ &= [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]} - \nabla_{\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]} \\ &= R(X, Y) - \nabla_{T(X, Y)} \circ \end{aligned}$$

故得證兩式。 ■

18.2 Gauss-Codazzi 方程

考慮 n 維曲面 $S \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ，有座標 (y^1, \dots, y^{n+1}) 。考慮參數化曲面 $r = r(x^1, \dots, x^n)$ ，則我們可以將 \mathbb{R}^{n+1} 中的 Levi-Civita 聯絡， D ，分解為平行與垂直於曲面的分量：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial x^i \partial x^j} &= r_{ij} = (D_j r_i)^{\text{tangent}} + (D_j r_i)^{\text{normal}} \\ &= \nabla_j r_i + \langle r_{ij}, n \rangle n \\ &=: \Gamma_{ij}^k r_k + b_{ij} n, \end{aligned} \quad (18.8)$$

其中 ∇_j 為曲面 S 上的 Levi-Civita 聯絡， n 為在曲面上的單位法向量⁷⁸。此 b_{ij} 即為第二標準型，滿足：

$$b_{ij} = \langle r_{ij}, n \rangle = -\langle r_i, n_j \rangle = -\langle r_j, n_i \rangle. \quad (18.9)$$

公式 18.8 紿予我們透過外界空間計算聯絡與 Christoffel 符號的方法。接著考慮高斯映射—即 n_p 的微分映射 $dn_p : T_p S \rightarrow T_{n_p} S^n \simeq T_p S$ 如下：

$$\begin{aligned} \because n_i \perp n, \therefore n_i &= a_i^j r_j \\ \Rightarrow a_i^j g_{jl} &= \langle n_i, r_l \rangle = -b_{il} \\ \Rightarrow a_i^j &= -b_{il} g^{jl} = -b_i^j \\ \Rightarrow n_i &= -b_i^j r_j. \end{aligned} \quad (18.10)$$

此外，我們可進而考慮三次微分。透過微分為可交換的，亦即 $r_{ijk} = r_{ikj} = \dots$ ，展開條件式即有：

$$\begin{aligned} r_{ijk} &= \partial_k \left(\Gamma_{ij}^l r_l + b_{ij} n \right) = \partial_k \left(\Gamma_{ij}^l \right) r_l + \Gamma_{ij}^l r_{lk} + \partial_k (b_{ij}) n - b_{ij} b_k^l r_l \\ &= \left(\partial_k \Gamma_{ij}^l + \Gamma_{ij}^s \Gamma_{sk}^l - b_{ij} b_k^l \right) r_l + \left(\Gamma_{ij}^l b_{lk} + \partial_k b_{ij} \right) n \equiv r_{ikj}, \end{aligned}$$

將 r_{ikj} 如上式展開，與 r_{ijk} 比較可得如下的兩公式：

(a) r_l 之係數為：

$$\partial_k \Gamma_{ij}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{ij}^s \Gamma_{sk}^l - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{sj}^l = b_{ij} b_k^l - b_{ik} b_j^l. \quad (18.11)$$

此式為「高斯方程式」，其表示黎曼曲率張量（左式，可參考公式 17.2）和高斯曲率可以透過第二標準型連結，事實上，此式亦表達了純量曲率為高斯曲率的兩倍。

(b) n 之係數為：

$$\partial_k b_{ij} - \partial_j b_{ik} = -\Gamma_{ij}^l b_{lk} + \Gamma_{ik}^l b_{lj}. \quad (18.12)$$

此式為「Codazzi 方程式」，亦作「Peterson-Codazzi 方程式」。

此兩方程式合稱 Gauss-Codazzi 方程組，其重要性如下：

⁷⁸ 該建構更可以考慮 $(N, g, \nabla^{\text{L-C}})$ 與 $M \hookrightarrow N$ 。其中有約束在 M 上的度規與聯絡為 $g_M = g|_M$ 與 $\nabla_M^{\text{L-C}} = \nabla^{\text{L-C}}|_M$ （透過投影）。整個空間可以被正交分解為 $T_p N = T_p M \overset{\perp}{\oplus} N_p$ ，而 N_p 是由 n 張出的法空間。

定理 : Frobenius Integrability

公式 18.11 與公式 18.12 兩者決定了 \mathbb{R}^{n+1} 中的 n 維曲面 S (除了歐氏運動的自由度)。

可見，這等價於高維的 Frenet 公式！給予一第一標準型與第二標準型滿足 Gauss-Codazzi 方程組，則其決定該曲面。

19 高斯-博內定理 (11/15)

我們將討論二維曲面 (S, g) 上的高斯-博內定理，並假設聯絡為 $\nabla = \nabla^{\text{L-C}}$ 。此定理連結了空間中曲面的局部性質—曲率，與全域性質—虧格數，之間的關聯。

首先對於二維曲面，必存在一正交座標系。有第一標準型為 $d\ell^2 = E dx^2 + G dy^2$ 、高斯曲率公式 6.21 為：

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left[\left(\frac{(\sqrt{E})_2}{\sqrt{G}} \right)_2 + \left(\frac{(\sqrt{G})_1}{\sqrt{E}} \right)_1 \right]. \quad (19.1)$$

我們欲計算：

$$\int_{\Omega} K dA.$$

計算如下：令 $P = (\sqrt{E})_2/\sqrt{G}$ 、 $Q = -(\sqrt{G})_1/\sqrt{E}$ ，

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} K dA &= \int_{\Omega} K \sqrt{EG} dx dy = \int Q_x - P_y dx dy \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(\frac{(\sqrt{E})_2}{\sqrt{G}} x' - \frac{(\sqrt{G})_1}{\sqrt{E}} y' \right) d\ell, \end{aligned}$$

其中第二行運用了格林定理 (Green's theorem)。最後在曲線 $\alpha = \partial\Omega$ 上的被積式為：

$$\frac{1}{2\sqrt{EG}} (E_2 x' - G_1 y'), \quad (19.2)$$

其具有何種意義呢？

學習 Frenet 標架的概念，我們令曲線 α 為以弧長參數化，有：

$$\alpha' = \mathbf{r}_1 x' + \mathbf{r}_2 y', \quad (19.3)$$

且定義 (geodesic curvature) k_g 為：

$$\nabla_{\alpha'} \alpha' =: k_g \mathbf{n}, \quad (19.4)$$

\mathbf{n} 為單位向量，其與 α' 垂直。接下來我們考慮幾個情形：

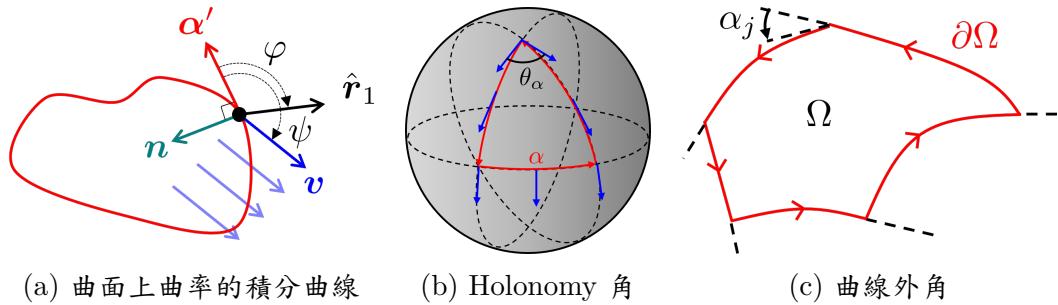


圖 19.1

(a) 考慮單位平行向量場 \mathbf{v} ，其有夾角 $\langle \mathbf{v}, \alpha' \rangle = \cos \psi$ 。但因為：

$$\langle \mathbf{v}, \alpha' \rangle' = \begin{cases} \langle \mathbf{v}, \nabla_{\alpha'} \alpha' \rangle = k_g \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = -\sin \psi \cdot k_g \\ (\cos \psi)' = -\sin \psi \cdot \psi' \end{cases},$$

因此有：

$$k_g = \psi'. \quad (19.5)$$

(b) 選擇另一個單位向量場 $\hat{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{r}_1 / |\mathbf{r}_1| = \mathbf{r}_1 / \sqrt{E}$ 。則因為 $\nabla_{\alpha'} \hat{\mathbf{r}}_1 \perp \hat{\mathbf{r}}_1$ ，存在函數 λ 使得：

$$\nabla_{\alpha'} \hat{\mathbf{r}}_1 = \lambda \hat{\mathbf{r}}_2. \quad (19.6)$$

若令 $\langle \hat{\mathbf{r}}_1, \alpha' \rangle = \cos \varphi$ ，則根據同 (a) 的步驟可以得知 $\lambda = \varphi'$ 。

接下來的討論將對於 ψ' 和 φ' 進行，可以自行確認它們的數值與平行向量場 \mathbf{v} 的選擇無關。由上述討論得知：

$$\nabla_{\alpha'} \hat{\mathbf{r}}_1 = x' \cdot \nabla_1 \frac{\mathbf{r}_1}{\sqrt{E}} + y' \cdot \nabla_2 \frac{\mathbf{r}_1}{\sqrt{E}},$$

其中 \mathbf{r}_2 分量為：

$$\frac{x'}{\sqrt{E}} \Gamma_{11}^2 + \frac{y'}{\sqrt{E}} \Gamma_{12}^2.$$

且根據公式 16.15 有：

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (-\partial_2 g_{11}) = -\frac{1}{2} \frac{E_2}{G} \\ \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_1 g_{22}) = \frac{1}{2} \frac{G_1}{G} \end{cases},$$

故可化簡 λ 為：

$$\lambda = \langle \nabla_{\alpha'} \hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2 \rangle = \sqrt{G} \left(-\frac{1}{2} \frac{x'}{\sqrt{E}} \frac{E_2}{G} + \frac{1}{2} \frac{y'}{\sqrt{E}} \frac{G_1}{G} \right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{EG}} (E_2 x' - G_1 y') \quad (19.7)$$

此即公式 19.2 (多個負號)。最後積分之有：

$$\int_{\Omega} K dA = \int_{\partial\Omega} (-\lambda) d\ell = \int_{\partial\Omega} \varphi' d\ell = -\varphi|_0^L =: \theta_{\alpha}, \quad (19.8)$$

此經過路徑所改變的角度 θ_{α} 稱為 holonomy 角⁷⁹，見圖 19.1b。

(c) 令 $\Theta = \psi - \varphi$ ，是為 $\hat{\mathbf{r}}_1$ 和 α' 之間的夾角。我們最後考慮以下積分：考慮 α 為分段 C^1 的曲線，

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \Theta' d\ell &= \int_{\partial\Omega} \psi' + (-\varphi)' d\ell \\ &= \int_{\partial\Omega} k_g d\ell + \int_{\Omega} K dA = 2\pi - \sum_j \alpha_j, \end{aligned} \quad (19.9)$$

其中 α_j 為 Ω 的外角 (exterior angle)，見圖 19.1c。將上式外角項移至等號另一側，可以得到局部的高斯-博內定理 (local Gauss-Bonnet theorem)：

$$2\pi = \underbrace{\sum_j \alpha_j}_{0\text{維角度}} + \underbrace{\int_{\partial\Omega} k_g d\ell}_{1\text{維角度}} + \underbrace{\int_{\Omega} K dA}_{2\text{維角度}}. \quad (19.10)$$

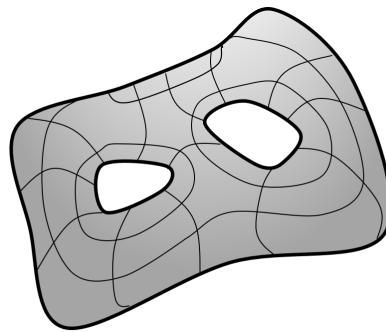
定理：全域高斯-博內定理 (global Gauss-Bonnet theorem)

$$2\pi\chi(\Omega) = \sum_j \alpha_j + \int_{\partial\Omega} k_g d\ell + \int_{\Omega} K dA, \quad (19.11)$$

其中 $\chi(\Omega)$ 為曲面 Ω 的歐拉示性數 (Euler characteristic)。

證明可以透過將 Ω 以三角形分解 (triangulation) 得證。

⁷⁹ Holonomy 一詞是指沿著曲面上封閉曲線平行傳輸，然後回到原點時的變化。



$$\chi(\Omega) = V + F - E = -2$$

圖 19.2: 歐拉示性數

在此附註關於歐拉示性數的性質：

定理：歐拉-龐加萊示性數

$$\chi(\Omega) \stackrel{(a)}{=} V + F - E = 2 - 2g \quad (19.12)$$

$$\stackrel{(b)}{=} \sum_i (-1)^i h^i(\Omega) \quad (19.13)$$

$$\stackrel{(c)}{=} \text{ind}(V) \quad (19.14)$$

(a) V ：頂點數、 F ：面數、 E ：邊數、 g ：虧格。

(b) h^i ：與曲面的第 i 個 homology 有關。

(c) ind ：為向量場的 index of zero，可見 Poincaré-Hopf 定理。