

NATIONAL TAIWAN UNIVERSITY

Department of Electrical Engineering

幾何代數讀書會

Geometric Algebra Study Group

B10901042 彭琄 W. Perng

2023 秋

目錄

1	介紹	1
1.1	有關本講義	1
1.2	有關讀書會	1
1.3	章節介紹	2
1.4	數學基礎	3
1.5	新的乘積—幾何積	7
1.6	幾何代數	10
2	二維與三維中的例子	15
2.1	二重向量	15
2.2	三重向量	18
2.3	複數	19
2.4	叉積	21
2.5	特殊運算子與名詞介紹	23
2.6	鏡像	26
2.7	旋轉	28
2.8	包立矩陣	34
2.9	四元數	35
3	幾何代數的運算與定理	39
3.1	符號數	39
3.2	反轉與共軛	40
3.3	對偶	41
3.4	質純量	44
3.5	回歸積	44
3.6	內積與外積的計算	45
3.7	倒易座標系	48
3.8	旋轉	50
3.9	線性代數	53
3.10	向量微分運算子	59

4 物理 (未完成)	65
4.1 晶格	65
4.2 角動量	66
4.3 軌道運動	67
4.4 旋轉座標系與剛體運動	72
4.5 狹義相對論	77
4.6 電磁學	78
5 平面射影幾何代數	79
5.1 平面為向量	79
5.2 零空間表示法	81
5.3 相交	82
5.4 平面射影幾何代數中的對偶	84
5.5 連接	85
5.6 平面簇	86
5.7 物件間的幾何關係	87
5.8 運動學	90
6 保角幾何代數	93
6.1 球極平面投影	93
6.2 零錐	95
6.3 內積零空間表示法	96
6.4 外積零空間表示法	100
6.5 保角變換	103
6.6 應用：機器人運動學 (未完成)	105
附錄	111
A 泰勒展開式	111
B 常見的群與其矩陣表示法	113
C 李群與李代數	118
D 圓錐曲線	119
E 淺談狹義相對論	120

目錄

F 淺談電磁學	121
-------------------	-----

參考資料	123
------	-----

1 介紹

1.1 有關本講義

本講義為關於幾何代數 (geometric algebra) 在電機工程上的應用，並非嚴謹的數學講義。其用於 2023 年秋季在國立台灣大學電機工程學系中的讀書會中，短暫介紹幾何代數於電機系上同學。旨在讓電機系的學生能認識這個數學工具，興許對於學生未來在研究或是工作中能有所啟發與影響。此外，因為幾何代數在工程上的美與通用性涉及眾多範疇，延伸知識將會穿插於文中或附加於附錄。

筆者撰寫此講義的動機為大二時偶遇此數學工具，並被其便利性與美所吸引，希冀能傳播於他人。也因為此為針對大學生的工程導向講課內容，如有不夠嚴謹、不清楚、錯誤處也請不吝告知 (414waynep@gmail.com)，信件標題請設為「[GA 讀書會]」。

1.2 有關讀書會

國立台灣大學電機系讀書會係由電機系學會學術部管轄。其目的為提升系上學術討論的風氣，加以提供系上同學討論較為學術、但沒有系上老師所做的題目，並同時讓系學會及學術部可以照顧到對理論更有興趣的同學而提出的活動。除了本學期「幾何代數」一題目外，更歡迎同學自行企劃於下個學期開設各種有趣的主題。

另外，系學會衛生部亦提醒參與讀書會的同學，請大家愛護教室衛生與整潔，於離開教室後維持原本的面貌。最後為有關保證金之事宜：

- 本課程於第一堂課 (2023/9/12) 決定往後哪些堂次屬於保證金範圍。
- 於第二堂課開始，每次都會請大家簽到點名。
- 第二次上課時每人收取保證金 100 元，未繳交不得參與本學期該課程。
- 除非停 (實體) 課，否則讀書會一律實體舉行。
- 有符合以下情況者得於學期末退回保證金：
 - 有繳交系學會費，缺席四次以內，第五次以上 (含) 不退費；
 - 未繳交系學會費，缺席兩次以內，第三次以上 (含) 不退費。
- 缺席不分假別，只算次數。

1.3 章節介紹

1.4 數學基礎

1.4.1 特殊符號與標記

克羅內克 δ 函數 (Kronecker delta)

在此我們介紹一些常見的數學符號與標記。首先為克羅內克 δ 函數，其定義為：

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases} \quad (1.1)$$

這與我們在信號與系統課程中所學到的離散時間單位脈衝函數 (discrete time unit impulse) 一樣： $\delta_{ij} \equiv \delta[i - j]$ 。

列維-奇維塔符號 (Levi-Civita symbol)

第二個要介紹的符號為列維-奇維塔符號，其定義為：

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & , (ijk) \text{ 為 } (123) \text{ 的偶置換} \\ -1 & , (ijk) \text{ 為 } (123) \text{ 的奇置換} \\ 0 & , \text{其餘情況。} \end{cases} \quad (1.2)$$

將 (123) 排列變成 (213) 需要將 1 和 2 交換，即是一次置換，(213) 為 (123) 的奇置換；將 (123) 排列變成 (231) 需要先將 1 和 2 交換，再將 1 和 3 交換，即是兩次置換，即 (231) 為 (123) 的偶置換。簡單的例子如下：

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1 \text{ ,}$$

$$\varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -1 \text{ 。}$$

其定義可延伸為 $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ ，若 $(i_1 i_2 \dots i_n)$ 為 $(12 \dots n)$ 的偶置換則數值為 1、奇置換則為 -1，其餘情形為 0。

列維-奇維塔符號與克羅內克 δ 函數具有以下的關係：

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_l^i & \delta_m^i & \delta_n^i \\ \delta_l^j & \delta_m^j & \delta_n^j \\ \delta_l^k & \delta_m^k & \delta_n^k \end{vmatrix}. \quad (1.3)$$

此結論可以延伸至： $\varepsilon^{i_1 \cdots i_n} \varepsilon_{j_1 \cdots j_n} = \det([\delta_{j_l}^{i_k}]_{j,k=1, \dots, n})$ ， $i_k, j_l \in \{1, \dots, n\}$ 。

愛因斯坦求和約定 (Einstein summation convention)

第三個要介紹的是愛因斯坦求和約定。此約定可以大大簡化未來眾多算式寫起來的複雜度，讓我們不被繁雜的數學符號所淹沒。此約定詳細如下：若看到一對上標下標的符號，則其表示省略的連加符號

$$\sum_i a^i b_i := a^i b_i. \quad (1.4)$$

然有時候亦可寫成同為下標 ($a_i b_i$) 或同為上標 ($a^i b^i$ ，平常的歐氏空間即是如此)；而有時也不代表前面有省略連加。若有如上的不確定性，將會在文中說明清楚。

透過以上的種種標記與符號我們可以練習證明以下關係。對於向量 a 與 b ，其在 n 維歐氏空間下可以分別用基底 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ 與其分量表示為：

$$a = a^i \mathbf{e}_i, b = b^i \mathbf{e}_i.$$

若該基底間的內積滿足：

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij},$$

則我們更有以下表示向量內積與叉積的關係式(兩式皆使用了愛因斯坦求和約定，然(1.5)式的最後改為同為一上標、一下標)：

$$a \cdot b = a^i b^j \delta_{ij} = a^i b^i \equiv a^i b_i, \quad (1.5)$$

$$a \times b = \mathbf{e}_i a^j b^k \varepsilon_{ijk}. \quad (1.6)$$

1.4.2 指數函數

以下介紹一個很特別的數字—尤拉數，亦稱為自然底數：

$$e = 2.718281828 \dots,$$

在本講義中以正體字表示之。以此數為底數的對數記為：

$$\log_e x \equiv \ln x.$$

其有許多等價的定義：

1.

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx}$$

2.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

3.

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

4.

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

等等。而對於我們，最重要的是 2.，其可以稱為 e^x 的泰勒展開式。如果考慮三角函數與雙曲函數的泰勒展開式 (Taylor expansion)，我們將有以下關係式：

$$e^x = \cosh x + \sinh x \tag{1.7}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \tag{1.8}$$

(2.6)式又被稱為尤拉恆等式。

1.4.3 向量空間與基底

想必大家對於向量空間的概念都有所了解。圖像上，向量就是一個有著長度與方向的「物件」，而在一開始的討論，我們僅須有此概念即可。但對於更後面的延伸討論，我們應在此讓大家回憶起向量的公理化定義。

定義：向量空間

考慮集合 V 與體 (field) F (例如實數 \mathbb{R} 或是複數 \mathbb{C})，我們引入兩滿足封閉性的運算：

$$+ : V \times V \rightarrow V \text{ (向量加上向量為向量)}$$

$$\cdot : F \times V \rightarrow V \text{ (純量乘上向量為向量)}$$

使得它們滿足以下八個公理：對於 a, b, c 屬於 V 與 μ, ν 屬於 F

1. $a + b = b + a$ ，向量加法具交換律
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ ，向量加法具結合律
3. $\exists 0 \in V$ s.t. $a + 0 = a$ ，向量加法具零元素
4. $\exists -a \in V$ s.t. $a + (-a) = 0$ ，向量加法具反元素
5. $\mu(a + b) = \mu a + \mu b$ ，純量乘法對於向量加法具分配律
6. $(\mu + \nu)a = \mu a + \nu a$ ，純量乘法對於純量加法具分配律
7. $\mu(\nu a) = (\mu\nu)a$ ，純量乘法具結合律
8. $\exists 1 \in F$ s.t. $1a = a$ ，純量乘法具單位元

由此我們稱 V 或是 $(V, F, +, \cdot)$ 為向量空間。 V 中的元素為向量， F 中的元素為純量。

而對於一向量空間我們可以賦予其一基底 (basis)。例如對於歐氏空間 \mathbb{R}^n ，我們有單位正交基底 $\{e_i\}$ 滿足：

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}。$$

1.5 新的乘積—幾何積

一個「代數 (algebra)¹」為具有一個「雙線性乘積 (bilinear product)²」的向量空間。我們在此引入一個新的乘積關係為「幾何積 (geometric product)」，並進而構建出一個比 \mathbb{R}^n 更大的向量空間為「幾何代數 (geometric algebra)」；依序記為 $*$ 與 \mathcal{G}_n 。

$$* : \mathcal{G}_n \times \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{G}_n$$

該幾何代數是建構在 \mathbb{R}^n 上的，且 $\mathbb{R}^n \subset \mathcal{G}_n$ 。這代表對於向量 u, v 屬於 \mathbb{R}^n ，我們有它們的幾何積為：

$$u * v \equiv uv \in \mathcal{G}_n,$$

往後，乘積符號將會被省略。而向量之間的幾何積滿足以下的公理 (令 a, b 屬於 \mathbb{R}^n)：

1. 幾何積具結合律： $a(bc) = (ab)c = abc$ ，
2. 幾何積對於加法有分配律： $a(b+c) = ab+ac$ 、 $(a+b)c = ac+bc$ ，
3. 任何向量的平方皆為實數： $a^2 \in \mathbb{R}$ 。

1.5.1 內積

上方的第三個公理有十分有趣的結論，我們考慮兩個向量 a, b ：

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + b^2 + ab + ba \in \mathbb{R},$$

但由於 a^2, b^2 也屬於 \mathbb{R} ，因此我們可以得知：

$$ab + ba \in \mathbb{R}.$$

此對稱積非常特別，我們在此特別定義其為「內積 (inner product)」：

$$a \cdot b := \frac{1}{2}(ab + ba). \quad (1.9)$$

¹ 又被稱為 an algebra over a field。

² 線性函數的定義為 $f(a)$ 滿足 $f(a+a') = f(a) + f(a')$ 。雙線性函數 $f(a, b)$ 則滿足 $f(a+a', b+b') = f(a, b) + f(a', b) + f(a, b') + f(a', b')$ ，若此時 $f(a, b)$ 又表示 a, b 之間的乘積，則我們稱其為雙線性乘積。例如對於向量 a, b ，我們有雙線性乘積 $f(a, b) = a \cdot b$ ，此即內積。

而我們將會發現，此內積與高中向量代數中所學到的點積 (dot product) 一模一樣。幾何上即是將其中一向量 a 「投影」至另一向量 b 上，並將投影長 $\|a_{\parallel}\| = \|a\| \cos \theta$ 乘上 b 之長度：

$$a \cdot b = \|a\| \|b\| \cos \theta = \|a_{\parallel}\| \|b\|。$$

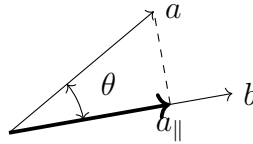


圖 1.1: 向量內積

1.5.2 外積

ab 中的對稱部分稱為內積，而剩餘的反對稱部份我們稱之為「外積 (outer product)³」或「楔積 (wedge product)」：

$$a \wedge b := \frac{1}{2}(ab - ba)。 \quad (1.10)$$

如同內積表示向量之間夾角的餘弦 $\cos \theta$ 的資訊，外積則是蘊含了正弦 $\sin \theta$ 的資訊：其為一個有向的 (oriented) 面積：

$$\|a \wedge b\| := \|a\| \|b\| \sin \theta = \|a_{\perp}\| \|b\|。$$

外積出來的物件的大小為 a 、 b 兩向量張出來的平行四邊形面積，如下圖1.2左：

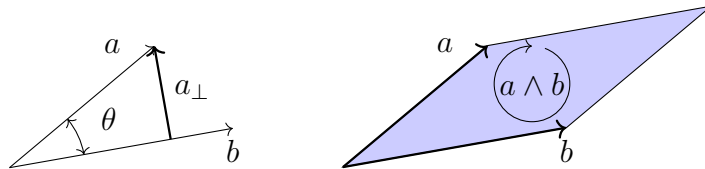


圖 1.2: 向量外積

³ 高中所熟悉的向量外積 (cross product) 往後將稱為叉積： $a \times b$ 。

外積表示的是一個「有向面積 (oriented area)」的概念。在圖1.2右中，我們以一旋轉箭頭表示其有向性。此物件我們稱其為「二重向量 (bivector)」。有向性即表示滿足反交換律 (anticommutativity)：

$$b \wedge a = -a \wedge b。$$

由上式也可以得知互相平行的兩向量外積為 0。

此外，外積也具有對加法的分配律和結合律：

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c := a \wedge b \wedge c， \quad (1.11)$$

1.5.3 幾何積的延伸

由以上的討論，對於一給定的正交基底向量 $\{e_k\}$ ，我們定義：

$$e_k^2 = e_k e_k := 1, e_i e_j = -e_j e_i \ (i \neq j)，$$

則對於兩向量 (以二維為例) 的幾何積有：

$$\begin{aligned} v_1 v_2 &= (x_1 e_1 + y_1 e_2)(x_2 e_1 + y_2 e_2) = x_1 x_2 e_1 e_1 + x_1 y_2 e_1 e_2 + y_1 x_2 e_2 e_1 + y_1 y_2 e_2 e_2 \\ &= (x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) e_1 e_2 \\ &= v_1 \cdot v_2 + v_1 \wedge v_2。 \end{aligned}$$

前者即是我們熟悉的內積，後者括號內則是兩向量張出的平行四邊形面積，即是對應外積。因此，我們可以展開兩向量的幾何積為：

$$ab = a \cdot b + a \wedge b。 \quad (1.12)$$

故驗證先前的結論。對於兩向量 a, b ，若：

- $a \parallel b$ 則 $ab = a \cdot b = b \cdot a = ba$ ，滿足交換律
- $a \perp b$ 則 $ab = a \wedge b = -b \wedge a = -ba$ ，滿足反交換律

這樣的關係會在我們賦予該空間一基底後大大簡化計算的複雜度。

有了幾何積之後我們更可以求出二重向量在幾何積下的平方：

$$\begin{aligned}
 (a \wedge b)(a \wedge b) &= -(a \wedge b)(b \wedge a) = -(ab - a \cdot b)(ba - a \cdot b) \\
 &= -[a^2b^2 - (a \cdot b)(ab + ba - a \cdot b)] \\
 &= -[a^2b^2 - (a \cdot b)(a \cdot b)] \\
 &= -(\|a\|^2\|b\|^2 - \|a\|^2\|b\|^2 \cos^2 \theta) \\
 &= -\|a\|^2\|b\|^2 \sin^2 \theta = -\|a \wedge b\|^2, \tag{1.13}
 \end{aligned}$$

其中 θ 為兩個向量 a 、 b 的夾角。可以注意到二重向量的平方為負的。

事實上我們會發現，對於 \mathcal{G}_n 裡面的元素我們都能定義之間的幾何積。我們稱兩個向量的幾何積所得到的物件為「二重向量 (bivector)」，三個向量的幾何積所得到的物件為「三重向量 (trivector)」，以此類推稱為「多重向量 (multivector)」。更廣義上， r 個向量的幾何積得到的物件我們稱之為 r 級多重向量。「級 (grade)」為這個代數中一個很重要的概念，二重向量的級數為 2、三重向量的級數為 3。而這些多重向量都是幾何代數中的元素。

1.6 幾何代數

我們來建構一個幾何代數。常見的歐氏空間 \mathbb{R}^n ，我們將其基底記做：

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}。$$

由這些基底，我們可以構建一個（實係數）幾何代數 \mathcal{G}_n 。其對應的基底為：

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \{e_1, \dots, e_n\} & \{e_1 e_2, e_1 e_3, \dots\} & \cdots & e_1 e_2 \cdots e_n \\
 \text{scalar} & \text{vector} & \text{bivector} & & \text{pseudoscalar}
 \end{array}。$$

依序有零級基底的純量 (scalar)、一級基底的向量 (vector)、兩個基底向量幾何積的二重向量 (bivector)、三個基底向量幾何積的三重向量 (trivector) 等等。其中最後一個為 n 個基底向量幾何積的 n 重向量，其又被稱為質純量 (pseudoscalar)。

一例子如下：我們考慮 \mathbb{R}^3 所建構出的幾何代數為：

$$\mathcal{G}_3 = \text{span} \{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\}。$$

因為透過歐氏空間的基底可以生成整個幾何代數，我們稱 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ 為該幾何代數的生成元 (generator)。

利用這些基底向量描述十分便利，我們將在此列出其幾個好處。首先，因為這些基底為單位正交向量，我們可以推得：

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_i = 1 + 0 = 1，$$

再來，因為這些基底互相正交 (orthogonal)：對於 $i \neq j$

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = 0 + \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i。$$

而習慣上，我們常標示級數最大的多重向量 (即質純量) 為 I ：

$$I = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \cdots \mathbf{e}_n。 \quad (1.14)$$

如何去思考幾何積這樣的運算呢？事實上，我們都可以用矩陣去代替它們，這可以讓我們去理解其為何不滿足交換律。一個例子如下，在三維中，兩向量的幾何積是：

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = \delta_{ij} + I\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k，I = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3。$$

其中，質純量 I 滿足：

$$I^2 = -1，$$

與單位虛數 $i = \sqrt{-1}$ 十分相似。而量子力學中，描述粒子自旋的包立矩陣 (Pauli Matrices) 為：

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}，\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}，\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}。$$

十分有趣地，它們也滿足：

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} I_2 + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k,$$

$$i I_2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3.$$

兩者擁有同樣的代數結構 (I_2 為 2×2 單位矩陣)。我們由此也可發覺幾何代數可以用矩陣來表示，但該取代無法引入新的洞見，且代數運算上也更為繁瑣。(如果你看不懂以上在說什麼，沒關係，在之後會再提及。)

1.6.1 幾何代數的維度

對於一給定的向量空間 \mathbb{R}^n ，一組正交基底 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ 給予了我們描述幾何代數最簡單的方法。透過基底向量，我們可以建構出整個代數的基底，我們標記此代數為 \mathcal{G}_n ：

$$1, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \ (i < j), \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \ (i < j < k), \dots. \quad (1.15)$$

再次提及，這些正交向量間幾何積滿足反交換律，即：

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \quad (i \neq j).$$

另外根據定義， r 個正交向量的幾何積即為一個 r 級多重向量 (如二重向量、三重向量等)。(1.15)的基底很自然地，便定義了 \mathcal{G}_n 的 r 級子空間，標記為 \mathcal{G}_n^r ，且我們有：

$$\dim(\mathcal{G}_n^r) = C_r^n = \binom{n}{r}.$$

二項式係數的 $\binom{n}{r}$ 與 $\binom{n}{n-r}$ 的對稱性也隱含了我們之後會提及的「對偶 (duality)」特性，與兩個向量若 (有限) 維度相同則同構 (isomorphic) 這一性質有關。

另外，幾何代數的總維度是：

$$\dim(\mathcal{G}_n) = \sum_{r=0}^n \dim(\mathcal{G}_n^r) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = (1+1)^n = 2^n.$$

可以看見，幾何代數的維度很快就會變得非常大，其矩陣表達式將會完全不方便使用，這也是為何往後矩陣表達式不一定對於幾何代數的理解有幫助。

1.6.2 多重向量運算

指數、三角函數與雙曲函數泰勒展開

對於幾何代數中的任意多重向量 M ，我們定義其指數為：

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}。$$

因此，只要該多重向量滿足：

$$M^2 = MM = -1$$

則有關係式：

$$e^{Mx} = \cos x + M \sin x。$$

而正、餘弦函數的定義亦是以其泰勒展開（詳細請見附錄 A）表示：

$$\begin{aligned} \cos M &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{M^{2k}}{(2k)!}， \\ \sin M &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{M^{2k+1}}{(2k+1)!}。 \end{aligned}$$

而因為分母 $n!$ 的增長速度大於分子的冪次，上方的級數必收斂。

同樣地，我們也可定義雙曲函數，對於 $M^2 = 1$ ，有關係式：

$$e^{Mx} = \cosh x + M \sinh x。$$

並且：

$$\begin{aligned} \cosh M &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^{2k}}{(2k)!}， \\ \sinh M &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^{2k+1}}{(2k+1)!}。 \end{aligned}$$

計算順序

「內積」優先於「外積」優先於「幾何積」：

$$(a \cdot b)c = a \cdot bc$$

$$I(a \wedge b) = Ia \wedge b$$

$$(a \cdot b)(c \wedge d) = a \cdot bc \wedge d。$$

這樣的標記可以大為減少我們使用括號的次數。

2 二維與三維中的例子

2.1 二重向量

幾何積的概念並不僅侷限於向量之間而已，而是對於幾何代數 \mathcal{G}_n 中的所有元素間皆可計算其幾何積。我們接著著重於向量 a 與二重向量 B 之間的幾何積。例如在三維中：

$$aB = (e_1 + e_2)(e_2e_3) = e_1e_2e_3 + e_3。$$

可以看到，如同向量和向量之間的幾何積可以得到純量和二重向量，向量和二重向量間的幾何積則是可以得到向量和三重向量。要了解更多 aB 的性質，我們可以將 a 分解成平行與垂直平面 B 的分量：

$$a = a_{\parallel} + a_{\perp}，$$

則 $aB = (a_{\parallel} + a_{\perp})B$ 。同時我們將 B 分解為：

$$B = a_{\parallel} \wedge b = a_{\parallel}b，$$

使得 b 是一個垂直 a_{\parallel} 的向量。如下圖，可以得知 b 向量必存在。

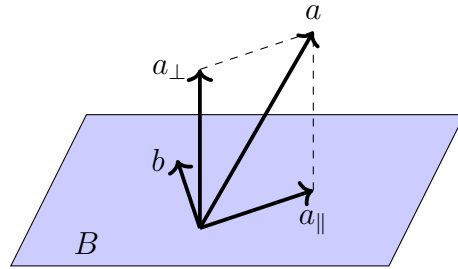


圖 2.1: 向量-二重向量幾何積

因此我們有：

$$a_{\parallel}B = a_{\parallel}(a_{\parallel}b) = a_{\parallel}^2b， \quad (2.1)$$

$$a_{\perp}B = a_{\perp}(a_{\parallel}b) = a_{\perp}a_{\parallel}b。 \quad (2.2)$$

這三個向量互相正交，因此滿足反交換律：乘法順序交換會多出一負號。

兩項中，前者為一個向量，後者為三重向量。我們先分析平行項：方向平行 b ，但

長度伸長了 $|a_{\parallel}|^2$ 倍。因為它是個「降級 (grade-lowering)」的運算 (一級向量乘上二級二重向量得到一級向量)，我們用「內積」的符號標示它：

$$a \cdot B = a_{\parallel} B = a_{\parallel} \cdot B,$$

且其具有反交換律：

$$a \cdot B = a_{\parallel}^2 b = -(a_{\parallel} b) a_{\parallel} = -B \cdot a.$$

因此我們可以看出， $a \cdot B$ 的效果為：將 a 投影在 B 上，旋轉 90° ，並將長度伸長 B 的大小。

接著第二項是個「升級 (grade-raising)」的運算 (一級向量乘上二級二重向量得到三級的三重向量)，因此我們用外積表示它：

$$a \wedge B = a_{\perp} B = a_{\perp} \wedge B$$

且其具有交換律：

$$a \wedge B = a_{\perp} \wedge a_{\parallel} \wedge b = a_{\parallel} \wedge b \wedge a_{\perp} = B \wedge a.$$

綜上所述，我們可將向量與二重向量的幾何積為：

$$aB = a \cdot B + a \wedge B,$$

向量與二重向量的內積與外積以幾何積表示為：

$$\begin{aligned} a \cdot B &= \frac{1}{2}(aB - Ba), \\ a \wedge B &= \frac{1}{2}(aB + Ba). \end{aligned}$$

2.1.1 外積結合律

此結果可以讓我們生出一個更複雜的外積結合律證明，使用了幾何積的結合律與定義(1.9)和(1.10)。為避免循環論證，我們從向量與二重向量的幾何積出發：

$$\begin{aligned}
 aB &= a(b \wedge c) = a \frac{1}{2}(bc - cb) = \frac{1}{2}((ab)c - (ac)b) \\
 &= \frac{1}{2}((2a \cdot b - ba)c - (2a \cdot c - ca)b) \\
 &= (a \cdot b)c - (a \cdot c)b + \frac{1}{2} \underbrace{(c(ab) - b(ac))}_{c(2a \cdot b - ba) - b(2a \cdot c - ca)} \\
 &= 2(a \cdot b)c - 2(a \cdot c)b + \frac{1}{2}(bc - cb)a \\
 &= 2(a \cdot b)c - 2(a \cdot c)b + (b \wedge c)a \\
 \Rightarrow a(b \wedge c) - (b \wedge c)a &= 2(a \cdot b)c - 2(a \cdot c)b.
 \end{aligned}$$

等式的右邊為一個向量，是「反對稱」項。且因為「降級」，將其定義為內積： $a \cdot B = \frac{1}{2}(aB - Ba) = -B \cdot a$ 。同時，我們可以得到一個十分有用的公式：

$$a \cdot (b \wedge c) = (a \cdot b)c - (a \cdot c)b. \quad (2.3)$$

反之，「對稱」項則為「升級」，將其定義為外積： $a \wedge B = \frac{1}{2}(aB + Ba) = B \wedge a$ 。可以注意到，我們僅通過「升降級」的概念便推出了先前的公式。

而可以以此推出向量外積具結合律：

$$\begin{aligned}
 a \wedge (b \wedge c) &= \frac{1}{2}[a(b \wedge c) + (b \wedge c)a] = \frac{1}{4}[(abc - acb) + (bca - cba)] \\
 &= \frac{1}{4}[abc - (2a \cdot c - ca)b + b(2a \cdot c - ac) - cba] \\
 &= \frac{1}{4}[(abc - bac) + (cab - cba)] = \frac{1}{2}[(a \wedge b)c + c(a \wedge b)] \\
 &= c \wedge (a \wedge b) = (a \wedge b) \wedge c \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

故得證。在之後當我們提及「級投影運算子」後會更公理化地去推導出幾何代數之性質，在此我們先接受這些結論。

2.2 三重向量

一個三重向量 $a \wedge b \wedge c$ 僅包含了其體積與有向 (orientation) 的資訊。因為外積具有結合律，且交換任意兩個向量將會多出一個負號，在滿足右手定則的三維座標系下我們可定義其質純量為：

$$I = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = e_1 e_2 e_3, \text{ 滿足 } I^2 := II = -1。$$

若是左手定則的座標系，乘出來則為 $-I$ 。且對於任意三個向量，其外積就是 $a \wedge b \wedge c = \nu I$ ，其中 ν 為三個向量構出的平行六面體的有向體積。

向量與質純量幾何積

考慮一個向量和質純量的幾何積：

$$e_1 I = e_1 e_1 e_2 e_3 = e_2 e_3,$$

我們得到了與 e_1 垂直的二重向量 $B_1 := e_2 e_3$ ，且 B_1 的方向性與 e_1 的方向滿足右手定則。當乘積反過來則有：

$$I e_1 = e_1 e_2 e_3 e_1 = -e_1 e_2 e_1 e_3 = e_2 e_3 = e_1 I。$$

可以輕鬆得出，三維中的質純量和向量間的幾何積滿足交換律：

$$Ia = aI。$$

其實對於奇數維度中的質純量都和向量滿足交換律；偶數維度中的質純量則和向量滿足反交換律。此外：

$$e_1 e_2 = I e_3, e_2 e_3 = I e_1, e_3 e_1 = I e_2,$$

我們稱其為對偶轉換 (duality transformation)，將向量和與其垂直的二重向量做對應。同樣的，因為這樣的運算是降級的，可以用內積表示之：

$$aI = a \cdot I。$$

此外，這樣的結果可以視為是一種「投影」：將 I 垂直 a 的分量投影出來。往後會更詳細地描述對偶變換，尤其是在平面射影幾何代數。

2.3 複數

二維歐氏空間的基底 $\{e_1, e_2\}$ 建構出的幾何代數有四個基底⁴：

$$\mathcal{G}_2 = \text{span}\{1, e_1, e_2, e_1 e_2\}。$$

我們常設級數最高的基底為 I ，在此處 $I = e_1 e_2 = e_1 \wedge e_2$ 。可以觀察到，其與常用的虛數單位 i 有很大的相似性：

$$I^2 = II = e_1 e_2 e_1 e_2 = -e_1 (e_2 e_1) e_1 = -1。$$

因此，我們以幾何代數的語言定義一個複數為以下的多重向量：

$$Z = u + v e_1 e_2 = u + v I，$$

其中 u, v 皆為實數。另外，其等價的向量為：

$$x = u e_1 + v e_2。$$

我們因此可以了解到 \mathcal{G}_2 為 \mathbb{R}^2 和 \mathbb{C} 的直和 (direct sum)，亦即：

$$\mathcal{G}_2 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{C}。 \quad (2.4)$$

複數與向量之轉換

可以輕鬆觀察到：

$$Z = u + v I = e_1 (u e_1 + v e_2) = e_1 x。$$

⁴ $\mathcal{G}_2 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{C}$ ，其中 \oplus 為向量空間的直和 (direct sum)。

同樣，式子兩側都乘上 e_1 ，我們可以輕鬆得到複數與其相對應之向量表示法的轉換：

$$Z = e_1 x \longleftrightarrow x = e_1 Z. \quad (2.5)$$

共軛複數

定義複數 Z 之共軛複數為：

$$Z^\dagger = u - vI = u(e_1 e_1) + v(e_2 e_1) = (ue_1 + ve_2)e_1 = xe_1,$$

$(\cdot)^\dagger$ 表示共軛。再代入複數與向量之轉換關係得到：

$$Z^\dagger = e_1 Z e_1. \quad (2.6)$$

我們在之後會看到這僅僅代表共軛複數之間的關係為沿著 e_1 軸做鏡射。另外，使用 \dagger 的原因也將在之後揭曉。

平面旋轉

我們欲將一複數 Z 在複數平面上逆時鐘（正向）旋轉角度 ϕ 得到 Z' 。對於一般的複數，此關係即為：

$$Z \mapsto Z' = e^{i\phi} Z = Z e^{i\phi},$$

但對於幾何代數，其關係有些許不同。

首先我們定義：

$$e^{I\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(I\phi)^n}{n!} = \cos \phi + I \sin \phi.$$

對於「複數」（以後所描述之複數皆為幾何代數在二維中的偶數級部分，將不會保有傳統的複數定義）旋轉時，此公式無改變：

$$Z' = e^{I\phi} Z = Z e^{I\phi}.$$

但嘗試對「向量」進行同樣的旋轉公式，左乘與右乘卻有所區別：

$$\mathbf{e}_1 x' = Z' = e^{I\phi} Z = e^{I\phi} \mathbf{e}_1 x \rightarrow x' = \left(\mathbf{e}_1 e^{I\phi} \mathbf{e}_1 \right) x = \left(e^{I\phi} \right)^\dagger x = e^{-I\phi} x。$$

圖2.2中我們可以看到，左乘的旋轉因子 $e^{I\phi}$ 會產生左手方向的旋轉；右乘則會產生右手方向的旋轉。

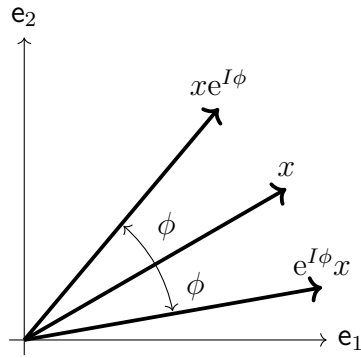


圖 2.2: 向量在二維平面上的旋轉

2.4 叉積

我們先前發現對偶關係：

$$-I(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3, \quad -I(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1, \quad -I(\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2,$$

這樣的關係與叉積十分相似：

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2。$$

因此我們有：

$$a \times b = -I(a \wedge b)。 \quad (2.7)$$

此外，根據公式(2.3)，我們有向量三重積：

$$\begin{aligned} a \times (b \times c) &= -Ia \wedge [-I(b \wedge c)] = \frac{1}{2}I [aI(b \wedge c) - (b \wedge c)Ia] \\ &= -a \cdot (b \wedge c) = -(a \cdot bc - a \cdot cb) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c。 \end{aligned}$$

定理：向量與多重向量之內積

對於公式(2.3)，其更廣義的通式為：對於向量 a, a_1, \dots, a_r ，有

$$a \cdot (a_1 \wedge \dots \wedge a_r) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} (a \cdot a_k) a_1 \wedge \dots \wedge \check{a}_k \wedge \dots \wedge a_r. \quad (2.8)$$

其中 \check{a}_k 表示該項省略。另外，因為內積運算優先於幾何積，上方括號可省略。此公式對於往後討論倒易座標系與平面投影幾何代數時十分有用。

在過往的公式中，使用叉積者我們都可以透過對偶關係使其變換成以外積表示。例如上方的向量三乘積：

$$a \times (b \times c) = -a \cdot (b \wedge c), \quad (2.9)$$

或是主宰古典電磁學的馬克士威方程式 (Maxwell's equations) 的後兩條就可以表示為：

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \leftrightarrow \nabla \wedge \mathbf{E} = -I \frac{\partial (\mathbf{B})}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \leftrightarrow \nabla \wedge \mathbf{B} = I \left(\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \end{cases}. \quad (2.10)$$

抑或是由向量 a, b, c 張出的平行六面體 (parallelepiped) 的有向體積為：

$$V_3 = a \cdot (b \times c) = (a \wedge b \wedge c) I^{-1}, \quad (2.11)$$

其中因為在三維中 $I^2 = -1$ ， $I^{-1} = -I$ 。我們更可以延伸推得在 n 維歐氏空間中，由 n 個向量 a_1, a_2, \dots, a_n 所張出的 n 維體積正是：

$$V_n = (a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n) I^{-1}, \quad (2.12)$$

其中 $I = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_n$ ， $I^{-1} = (-1)^{n(n-1)/2} I$ 。可自行確認，(2.12)算出的數值即為行列式 (determinant)。

2.5 特殊運算子與名詞介紹

刃 (blade)

若存在一組線性獨立的向量 $\{a_k\}_{k=1}^r$ 使得多重向量 A_r 可以表示為：

$$A_r = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_r$$

則稱 A_r 為一個 r 級刃，亦稱為「單純 (simple)」的 r 級多重向量⁵。此外，同時亦存在一組正交積底 $\{e_k\}_{k=1}^r$ 滿足 $A_r = e_1 e_2 \cdots e_r$ ，得以將外積取代為幾何積。此外，齊次的多重向量不等於它是一個刃，事實上任一個齊次多重向量都可以由同級的刃的線性組合得到。

級投影運算子 (grade-projection operator)

我們在此介紹「級投影運算子」 $\langle \cdot \rangle_r$ ，其會將尖括弧中的 r 級多重向量取出。因此一多重向量 A 可以分解為：

$$A = \langle A \rangle_0 + \langle A \rangle_1 + \cdots = \sum_r \langle A \rangle_r。$$

只含有 r 級分量的多重向量稱為「齊次 (homogeneous)」，通常表示為 A_r 使得：

$$\langle A_r \rangle_r = A_r。$$

零級元素又被稱為純量，其與任何多重向量的乘積都滿足交換律。這樣的運算子讓我們可以輕鬆以幾何積取代內積和外積，就如同取複數的實部與虛部一樣。且因為取純量經常出現，我們再簡記為：

$$\langle M \rangle = \langle M \rangle_0。$$

且對於任意的多重向量乘積，其純量部分都滿足「循環次序對稱性 (cyclic ordering symmetry)」：

$$\langle AB \cdots C \rangle = \langle B \cdots CA \rangle。$$

⁵ 筆者將 blade 譯作「刃」乃用於凸顯以下概念：在幾何代數中構成該刃的線性獨立向量會張出一子空間，而刃則如同一刀切入該子空間。

反轉 (reversion)

一個常見的運算為「反轉」，以波浪號 (tilde) 表示： \tilde{A} 、 A^\sim 。反轉的功能如其名，即是將相乘的向量的順序反轉。例如：對於向量 $\{a_k\}_{k=1}^n$ 有：

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^\sim = a_n \cdots a_2 a_1, \quad (2.13)$$

或是將幾何積的產物用刀展開：

$$(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n)^\sim = a_n \wedge \cdots \wedge a_2 \wedge a_1, \quad (2.14)$$

例如對於一個 r 級多重向量 A_r ，其反轉為：

$$\tilde{A}_r = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} A_r. \quad (2.15)$$

模 (norm)

對於 \mathcal{G}_n 中的多重向量 M ，我們定義它的模⁶為：

$$\|M\| = \sqrt{\langle M \tilde{M} \rangle}. \quad (2.16)$$

有了模的定義後，我們便可驗證多重向量的指數的收斂，詳見附錄。

內積

內積 (inner product)，有時又被稱為點積 (dot product)。內積是個「降級 (grade-lowering)」運算，亦即：

$$A_r \cdot B_s = \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|}, \quad (2.17)$$

特別用以表示兩個齊次的多重向量乘積中，級數最低的項。若內積不為零，則表示 (考慮 $r < s$) 構成 A_r 的向量的張 (span) 為構成 B_s 的向量的張的子空間。若這兩個多重向量的級數一樣，則內積亦可被稱為純量積 (scalar product)。此外，內積對於多重向量的加法具有分配律，因此亦可定義非齊次的多重向量間的內積。

⁶ 切記：此定義僅在此章節中使用，由第三章往後將會有對於任意幾何代數中更完整定義的模。

外積

外積 (outer product / exterior product) 亦可稱為楔積 (wedge product)，一般多稱其為第一個以與內積對稱。外積是個「升級 (grade-raising)」運算，亦即：

$$A_r \wedge B_s = \langle A_r B_s \rangle_{r+s}, \quad (2.18)$$

特別用以表示兩個齊次的多重向量乘積中，級數最高的項。若外積不為零，則表示構成 A_r 的向量的張 (span) 與構成 B_s 的向量的張兩空間無交集。此外，外積對於多重向量的加法具有分配律，因此亦可定義非齊次的多重向量間的外積。

當我們觀察兩個刀 (級數不必相同) 的幾何積時，考慮它們是由同樣的正交積底的幾何積構成。之中的向量要麼有相互平行者可以相乘得到純量，使得幾何積後的結果級數減少 2；要麼向量正交沒有抵銷，使得總級數不變。剩餘的向量數即為幾何積得到的多重向量的級數。又因齊次多重向量可以表示為數個刀的和，對於兩齊次多重向量的幾何積有：

$$A_r B_s = \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|} + \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|+2} + \cdots + \langle A_r B_s \rangle_{r+s}. \quad (2.19)$$

有了以上概念，我們可以透過幾何積的結合律證明外積的結合律：

$$(A_r \wedge B_s) \wedge C_t = \langle A_r B_s \rangle_{r+s} \wedge C_t = \langle (A_r B_s) C_t \rangle_{r+s+t} = \langle A_r B_s C_t \rangle_{r+s+t} = A_r \wedge B_s \wedge C_t. \quad \blacksquare$$

最後，也可證明零級投影運算子的循環次序對稱性：因為一刀可以由反交換的基底乘積表示，我們有：

$$\tilde{A}_r = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} A_r$$

$$\langle A_r B_r \rangle = \langle A_r B_r \rangle^\sim = \langle \tilde{B}_r \tilde{A}_r \rangle = (-1)^{r(r-1)} \langle B_r A_r \rangle = \langle B_r A_r \rangle.$$

而任一多重向量皆可表示為刀的線性組合，重複上方的推導則有：

$$\langle A \cdots BC \rangle = \langle CA \cdots B \rangle. \quad \blacksquare$$

2.6 鏡像

幾何代數的優美之處在鏡像與旋轉中始見。

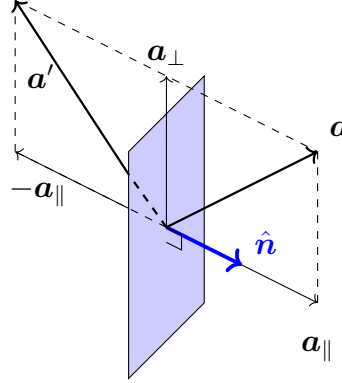


圖 2.3: 反射

我們欲將向量 $a = a_{\perp} + a_{\parallel}$ 通過一平面法向量為 $n(n^2 = 1)$ 的平面進行鏡像，得到鏡像後的向量 a' ：

$$a' = a_{\perp} - a_{\parallel} ,$$

其中，平行與垂直是相對於法向量：因此我們可以有以下的分解 (split)

$$\begin{cases} a_{\parallel} = (n \cdot a)n = a \cdot nn \\ a_{\perp} = a - n \cdot an = ann - \frac{1}{2}(na + an)n = \frac{1}{2}(an - na)n = a \wedge nn \\ \rightarrow a' = a_{\perp} - a_{\parallel} = nn \wedge a - na \cdot n = -nan . \end{cases} \quad (2.20)$$

這樣的向量鏡像公式是在任意維度中皆成立的，並且鏡像前後向量內積不變。

$$(-nan) \cdot (-nbn) = \langle (-nan)(-nan) \rangle = \langle nabn \rangle = \langle abnn \rangle = a \cdot b$$

此外，我們可以發現共軛複數即是取鏡像：

$$x' = e_1 Z^{\dagger} = e_1 x e_1 = -e_1 I I x e_1 = -e_1 I x e_1 I = -e_2 x e_2 .$$

其中 $I = e_1 e_2$ 。因此，取共軛複數即是以垂直 e_2 之平面做鏡像。亦即以 x 軸為對稱軸做翻轉。

2.6.1 二重向量的鏡像

一個二重向量是由兩個向量外積出來，亦即 $B = a \wedge b$ 。現下經過鏡射，得到：

$$\begin{aligned} B' &= (-nan) \wedge (-nbn) \\ &= \frac{1}{2} [(nan)(nbn) - (nbn)(nan)] \\ &= \frac{1}{2} n(ab - ba)n \\ &= nBn. \end{aligned}$$

我們可以看到，二重向量的鏡像和向量的鏡像十分相似，唯獨其「缺少了個負號」。這就是向量/極向量 (vector / polar vector) 與質向量/軸向量 (pseudovector / axial vector) 之間的差異。質向量可由向量外積獲得，或是兩向量經過叉積後再透過對偶轉換變成質向量。討論質向量時因座標變化產生的負號常會引起許多困惑，因此往後我們將不再使用叉積，而是以外積構見出的二重向量代替 (如角速度、角動量、磁場)。

2.6.2 三重向量的手性

我們將三重向量進行鏡像：

$$\begin{aligned} (-nan) \wedge (-nbn) \wedge (-ncn) &= \langle (-nan)(-nbn)(-ncn) \rangle_3 \\ &= -\langle nabcn \rangle_3 \\ &= -\langle na \wedge b \wedge cn \rangle_3 = -\langle n(\nu I)n \rangle_3 \\ &= -\nu \langle Inn \rangle_3 = -\nu I = -a \wedge b \wedge c. \end{aligned}$$

第一與第三個等號是因為三個向量的幾何積只有一中湊出三重向量的方法，因此可以直接以 $\langle \cdot \rangle_3$ 求出三級的部分。第四個等號為任何三重向量皆是 I 的倍率的緣故，並因為 I 與三維中的向量都具有交換律而使第五個等號成立。

手性 (handedness)，又被稱為有向的 (oriented)，即是描述當空間中的所以向量皆鏡像，則座標系由右手定則變成左手定則。因此，也可說在三維中，鏡像的行列式 (determinant) 為 -1 。

2.7 旋轉

「旋轉的本質是連續得對於兩個(高維)平面的鏡像。」此句的意義為何，請見圖2.4的分析。

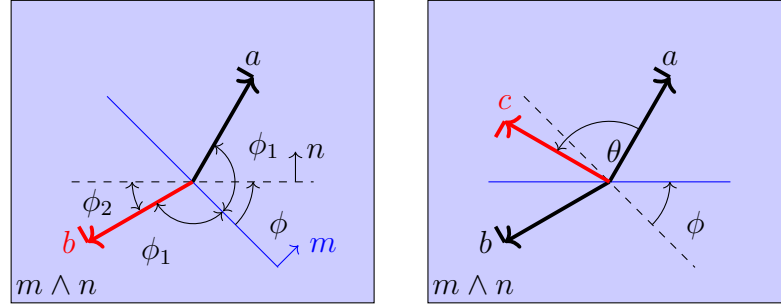


圖 2.4: 旋轉為兩個反射

上圖2.4為向量 a 自高維平面 $m \wedge n$ 的法向往下看 (m, n 為單位向量)。如左圖，先將 a 透過 m 的垂直平面進行鏡像得到 b 。再如右圖，將 b 以 n 的垂直平面鏡像得到 c 。 a 與 c 的夾角 θ 與 m, n 夾角 ϕ 的關係為：

$$\begin{aligned}\theta &= \pi - \phi_2 - (\phi_1 - \phi) \\ &= \pi - (\pi - \phi_1 - \phi) - (\phi_1 - \phi) \\ &= 2\phi.\end{aligned}$$

因此，通過兩次的反射後，向量 a 旋轉了 θ ，其中 $m \cdot n = \cos \frac{\theta}{2}$ 。那這樣的概念在幾何代數的架構下長什麼樣子呢？我們分析如下：

$$\begin{aligned}b &= -mam, \\ c &= -nbn = nmamn.\end{aligned}$$

我們定義：

$$R = nm \rightarrow c = Ra\tilde{R}. \quad (2.21)$$

可以注意到，上方的論述中，皆沒有對維度有所限制，因此此轉換對於任意維度、任意級數的多重向量皆是適用的！

2.7.1 轉子

$R = nm$ 被稱為「轉子 (rotor)」，其非常方便地描述了高維中的旋轉變換。要更加了解其性質我們可以觀察到：

$$(n \wedge m)(n \wedge m) = -\|n\|^2\|m\|^2 \sin^2 \phi = -\sin^2 \phi。$$

上式利用了(1.13)。由此，我們定義單位二重向量：

$$B = \frac{m \wedge n}{\sin \phi}，\text{滿足 } B^2 = -1。 \quad (2.22)$$

$m \wedge n$ 的方向性保證了我們旋轉的方向性。因此，我們可以得到：

$$R = n \cdot m + n \wedge m = \cos \phi - B \sin \phi = e^{-B\phi}。 \quad (2.23)$$

最後，因為我們想要將向量 a 旋轉 $\theta = 2\phi$ ，所以有：

$$a \mapsto a' = Ra\tilde{R} = e^{-B\theta/2}ae^{B\theta/2}。 \quad (2.24)$$

幾何意義上， B 即表示了我們旋轉的有向平面， θ 則是所旋轉的角度。

此外：

$$\begin{aligned} \because R\tilde{R} &= (nm)(mn) = 1 = \tilde{R}R \\ \therefore a' \cdot b' &= \frac{1}{2} \left[(Ra\tilde{R})(Rb\tilde{R}) + (Rb\tilde{R})(Ra\tilde{R}) \right] = a \cdot b， \end{aligned}$$

可以得知旋轉是保內積的。

由轉子我們可以看出幾何代數的重要性：將不同級的元素加起來本身沒有一個明確的幾何意義，但是我們可以將其視為一個表示空間變換的運算子。幾何代數的重要性在於幾何物件和作用在它們上面的變換同屬於一個代數⁷。

另外， R 和 $-R$ 這兩個不同的轉子皆生成同樣的旋轉，因此我們說轉子和旋轉的關係是個「二對一的映射/雙重覆蓋 (two-to-one mapping / double cover)」。

⁷ 我們所熟悉的向量代數中，要麼是利用 Rodrigue's formula 將向量各個分量進行投影與旋轉變換後再結合，要麼是利用旋轉矩陣作用在向量上描述旋轉。其在維度上的限制十分明顯，表示法也缺乏直觀性。

平面上的旋轉

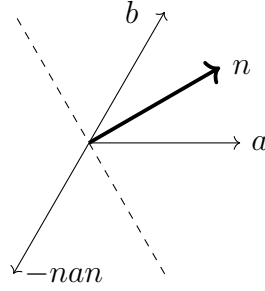


圖 2.5: 透過鏡像得到平面旋轉

我們欲將單位向量 a 轉至向量 b ，並設轉軸為這兩個向量的公垂向量（出紙面方向）。我們定義：

$$n = \frac{a + b}{\|a + b\|}$$

$$\rightarrow R = bn = \frac{ba + 1}{\|a + b\|} = \frac{ba + 1}{\sqrt{2(1 + a \cdot b)}}$$

因此我們可以得到轉子的根號為（我們在此僅考慮正根，因負根也表示同樣的旋轉）：

$$R = \sqrt{ba} = \frac{1 + ba}{\sqrt{2(1 + a \cdot b)}} \quad (2.25)$$

此外：

$$Ra = \frac{a + b}{\sqrt{2(1 + a \cdot b)}} = (Ra)^\sim = a\tilde{R}$$

$$\rightarrow Ra\tilde{R} = R^2a = a\tilde{R}^2.$$

又可用極座標表示法，令 $B = a \wedge b$ 、 $\cos \theta = a \cdot b$ ：

$$R = \exp(-B\theta/2) \rightarrow R^2 = \exp(-B\theta)$$

$$\Rightarrow b = e^{-B\theta}a = ae^{B\theta},$$

這就是我們熟悉的平面上的複數旋轉！欲建構三維中的旋轉便可以看出，使用單邊乘法以達到旋轉只適用於「平面上的旋轉」，正確的公式應該是兩側的包夾乘積。

多重向量的旋轉

考慮向量都經過轉子 R 旋轉，相對應地，它們所建構出來的多重向量也會改變：

$$\begin{aligned} B' &= (Ra\tilde{R}) \wedge (Rb\tilde{R}) = \frac{1}{2} \left[(Ra\tilde{R})(Rb\tilde{R}) - (Rb\tilde{R})(Ra\tilde{R}) \right] \\ &= \frac{1}{2} (Rab\tilde{R} - Rba\tilde{R}) \\ &= \frac{1}{2} R(ab - ba)\tilde{R} \\ &= RB\tilde{R}. \end{aligned}$$

轉子的優點即在於此，對於任意級的多重向量，其變換方式皆是 $A \mapsto RA\tilde{R}$ ，這是個保級的變換。而在三維中，因為三重向量與任何項都滿足交換律：

$$RI\tilde{R} = IR\tilde{R} = I.$$

這顯然是保持手性與保級的變換，我們稱其為「行列式為 1」之變換。此對於描述剛體的旋轉運動十分便利。關於幾何代數行列式之定義將在之後說明清楚。

轉子的疊加

若疊加兩個連續的旋轉：

$$c = R_2b\tilde{R}_2 = R_2R_1a\tilde{R}_1\tilde{R}_2 = (R_2R_1)a(R_1R_2)^\sim,$$

合成的物件也是個轉子，為：

$$R = R_2R_1.$$

這是轉子群的合成法則。轉子構成一個群因為 $R\tilde{R} = 1$ ，而三維中的轉子僅僅由二重向量的指數組成。此外，轉子其實構成一個連續群（即「李群 (Lie group)」⁸），之後將會更深入討論。

⁸ 對於群的介紹，見附錄 B；對於李群的介紹，見附錄 C。

我們可以更詳細地展開合成後的轉子：令 $R_1 = \exp(-B_1\theta_1/2)$ 、 $R_2 = \exp(-B_2\theta_2/2)$

$$\begin{aligned} R &= (\cos \theta_2 - B_2 \sin \theta_2/2)(\cos \theta_1 - B_1 \sin \theta_1/2) \\ &= \cos \left(\frac{\theta_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta_1}{2} \right) - \left[\cos \left(\frac{\theta_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta_1}{2} \right) B_1 + \cos \left(\frac{\theta_1}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta_2}{2} \right) B_2 \right] \\ &\quad + \sin \left(\frac{\theta_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta_1}{2} \right) B_1 B_2。 \end{aligned}$$

若令 $R = \exp(-B\theta/2)$ 則有其純量為：

$$\cos \frac{\theta}{2} = \cos \left(\frac{\theta_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta_1}{2} \right) + \sin \left(\frac{\theta_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta_1}{2} \right) \langle B_1 B_2 \rangle，$$

與二重向量分量為：

$$B \sin \frac{\theta}{2} = \cos \left(\frac{\theta_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta_1}{2} \right) B_1 + \cos \left(\frac{\theta_1}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta_2}{2} \right) B_2 - \sin \left(\frac{\theta_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta_1}{2} \right) \langle B_1 B_2 \rangle_2。$$

而上方的合成法則有個十分奇妙的結果：令 R_1 為固定的，然後讓 $R_2 = \exp(-B\theta/2)$ ，當角度由 0 變至 2π ，轉子僅會產生 180 度的旋轉：

$$R(2\pi) = e^{-B\pi} R_1 = -R_1 = -R(0)。$$

這在量子力學中，被賦予為與費米子的波函數有關聯，不過我們在這可以看出這樣的現象是源於我們對於轉子的參數角度的定義。

另外，描述將向量 \mathbf{e}_1 轉至 \mathbf{e}_2 的轉子為：

$$R(\theta) = e^{-\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \theta/2} \rightarrow \mathbf{e}_2 = R(\pi/2) \mathbf{e}_1 \tilde{R}(\pi/2) = R(-3\pi/2) \mathbf{e}_1 \tilde{R}(-3\pi/2)。$$

參數 θ 可以描述我們旋轉的過程， $\theta = \pi/2$ 表示我們以正向旋轉，而 $\theta = -3\pi/2$ 表示我們以反向（順時鐘）旋轉。

2.7.2 歐拉角

另一個參數化旋轉的方式是利用歐拉角 $\{\phi, \theta, \psi\}$ ，將 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 旋轉至 $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ 。

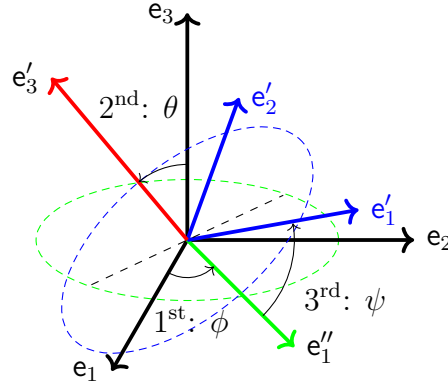


圖 2.6: 歐拉角

如上圖2.6，首先在 e_3 軸 (即 e_1e_2 平面) 上旋轉 ϕ ，再通過旋轉後的 e_1 軸 (即 e_1'' 軸) 旋轉 θ ，最後再過旋轉後的 e_3 軸 (即 e_3' 軸) 旋轉 ψ 。轉子依序是：

$$\begin{cases} R_\phi = e^{-e_1e_2\phi/2} \\ R_\theta = \exp(-R_\phi e_2 e_3 \tilde{R}_\phi \theta/2) = R_\phi e^{-e_2e_3\theta/2} \tilde{R}_\phi \\ R_\psi = \exp(-R_\theta R_\phi e_1 e_2 \tilde{R}_\phi \tilde{R}_\theta \psi/2) = R_\theta R_\phi e^{-e_1e_2\psi/2} \tilde{R}_\phi \tilde{R}_\theta \end{cases}$$

$$\rightarrow R = R_\psi R_\theta R_\phi = e^{-e_1e_2\phi/2} e^{-e_2e_3\theta/2} e^{-e_1e_2\psi/2}。$$

三者最後竟然去耦合了。且十分乾淨，得以輕鬆再轉換為矩陣表示法。不過有了幾何代數這樣的工具後，就比較不會去使用歐拉角的分析方式了。

如上之討論，轉動的體系分為兩種，歐拉角以及軸角 (axis-angle) 轉動。歐拉角是對於一固定的座標系或是物體座標系，描述三個軸各自的轉動角度；軸角轉動則是給予一旋轉軸及其旋轉角度。事實上，軸角轉動對於人的理解是較為直觀的，而最後將提及的四元數旋轉亦是如此。

2.8 包立矩陣

我們先前已經看到量子力學中描述粒子自旋的包立矩陣 (Pauli Matrices)：

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

滿足：

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I_2, \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = iI_2.$$

包立矩陣同時為厄爾米特矩陣⁹、么正矩陣¹⁰， $\exp(i\sigma_k)$ 亦可生成 $SU(2)$ 群¹¹，在量子力學中對於描述自旋 (spin) 十分有用。總而言之就是超級重要。

其中一應用就是：包立矩陣可描述包立向量

$$\boldsymbol{\sigma} = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3 = \begin{bmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

的旋轉。若我們欲將 $\boldsymbol{\sigma}$ 繞著 $\hat{\mathbf{n}} = n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + n_3\sigma_3$ 軸 ($n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$) 旋轉角度 θ 變成 $\boldsymbol{\sigma}'$ ，則有旋轉公式 (請自行計算確認)：

$$\boldsymbol{\sigma}' = e^{-i\hat{\mathbf{n}}\theta/2} \boldsymbol{\sigma} e^{i\hat{\mathbf{n}}\theta/2}. \quad (2.27)$$

矩陣的指數亦是透過泰勒展開式(A.4)定義。與(2.24)式的轉子旋轉公式長得一模一樣！

我們知道在三維中，基底向量間的幾何積滿足：

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = 1, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = I,$$

可見其與包立矩陣擁有同樣的代數結構。但幾何代數的運算複雜度比矩陣計算好太多了，同時幾何代數下公式的推導具有更鮮明的幾何概念，無須引入虛數。或甚至可以说，幾何代數賦予了虛數真實的幾何意義，接下來的四元數便是最鮮明的例子。

⁹ Hermitian，即該矩陣的共軛轉置 (Hermitian conjugate) 等於自己。

¹⁰ Unitary，即該矩陣的共軛轉置為自己的反矩陣。

¹¹ $SU(2)$ 即 2 階特殊么正群，由行列式為 1 的 2×2 么正矩陣組成的集合。對於常見的群與其矩陣表示法的簡介請見附錄 B。

2.9 四元數

2.9.1 四元數為何

四元數 (quaternion) 由愛爾蘭數學家哈密頓 (William Rowan Hamilton) 於 1843 年提出。其目的是為了延伸二維的複數旋轉至三維旋轉，因此提出了新的代數系統。二維的旋轉需要一個複數 i ，而三維的旋轉則是需要三個複數 i 、 j 、 k ，滿足代數運算：

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1。 \quad (2.28)$$

由上述的關係式再加上我們要求四元數的乘法是滿足結合律的，可以見得¹²：

$$ij = k、jk = i、ki = j， \quad (2.29)$$

同時其乘法是滿足反交換律的¹³：

$$ji = -k、kj = -i、ik = -j。 \quad (2.30)$$

有了 i 、 j 、 k 這三個複數後，我們即可以定義四元數為何。一廣義的四元數可記作：

$$q = s + \mathbf{v} = s + v_1i + v_2j + v_3k \quad (s, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R})， \quad (2.31)$$

s 分量稱為純量，以粗體表示的 $\mathbf{v} = v_1i + v_2j + v_3k$ 則稱為向量。純量與向量為何可以相加？其實這就如同複數是實數加上虛數一樣，有何不可？兩向量幾何積可以寫作純量加上二重向量也是一樣的原因。我們同時記四元數的代數空間為 \mathbb{H} ，可以輕鬆見得以下關係成立：

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}。$$

¹² 因為 $(ij)k = kk = -1$ 、 $i(jk) = ii = -1$ 、 $k(ik) = -(ki)j = -jj = 1$ 。

¹³ 舉 $-ji = ij$ 為例，其餘證明相同。因為：

$$-j = j(ijk) = (ji)(jk) = (ji)i，$$

所以

$$ki = j = (-ji)i，$$

亦即

$$k = ij = -ji。$$

2.9.2 四元數運算

四元數 \mathbb{H} 是一個向量空間，因此加法即是將各自分量相加即可，乘法則是透過分配律與結合律即可計算。此外，我們可以定義一個四元數 q 的共軛四元數：

$$q = s + v_1i + v_2j + v_3k \rightarrow q^* = s - v_1i - v_2j - v_3k。$$

其模長¹⁴定義為：

$$|q| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{s^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}。$$

可以自行確認，若我們有一單位向量 $\hat{n} = n_1i + n_2j + n_3k$ (即滿足 $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$)，則：

$$q = \cos(\phi) + \sin(\phi)\hat{n} \quad (\phi \in \mathbb{R})$$

的模長為 1。此外，我們也可由此定義四元數的倒數為：

$$q^{-1} = \frac{q^*}{qq^*}, \quad (2.32)$$

可以自行確認 $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$ 。

2.9.3 四元數旋轉

空間中有一向量 p (以四元數表示)，若我們欲將其繞著單位向量 \hat{n} 為軸旋轉角度 θ 變成 p' ，則該變換公式為：

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + \hat{n} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.33)$$

$$p' = qpq^{-1} = qpq^*。 \quad (2.34)$$

一簡單的範例如下：考慮向量 $v = 1i + 1k$ 繞著軸 $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(j + k)$ 旋轉了 90° (滿足右手定則)。我們現在使用四元數去計算該旋轉：有

$$q = \cos(90^\circ/2) + \frac{1}{\sqrt{2}}(j + k) \sin(90^\circ/2) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}(j + k)，$$

¹⁴ 數個單位向量的外積稱為刃、數個單位向量的幾何積稱為逆數 (versor)。而單位模長的四元數在代數上等價於兩個單位向量幾何積形成的逆數。

其模長為 1、倒數為：

$$q^{-1} = q^* = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}(j+k)。$$

套入公式(2.34)則有：

$$\begin{aligned} v' &= qvq^{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}(j+k) \right) (i+k) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}(j+k) \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}(j+k) \right) \left(\frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{k}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}(k-j-i-1) \right) \\ &= \left(\frac{i}{2} + \frac{k}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(k-j-i-1) \right) + \left(\frac{-k}{2\sqrt{2}} + \frac{i}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4}(i+1+k-j) \right) \\ &\quad + \left(\frac{j}{2\sqrt{2}} + \frac{-1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4}(-1+i-j-k) \right) \\ &= 1 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \right) + i \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \\ &\quad + j \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \right) + k \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}i + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)j + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)k。 \end{aligned}$$

2.9.4 幾何代數下的四元數

三維中，如同向量的基底為 e_1 、 e_2 和 e_3 ，我們也可定義二重向量的積底為：

$$B_1 := e_2e_3, B_2 := e_3e_1, B_3 := e_1e_2,$$

所有二重向量皆是這三個基底的線性組合。且他們之間的幾何積滿足：

$$\begin{aligned} B_1^2 &= B_2^2 = B_3^2 = -1, B_1B_2B_3 = 1 \\ \leftrightarrow B_iB_j &= -\delta_{ij} - \varepsilon_{ijk}B_k。 \end{aligned}$$

可以自行檢查，四元與二重向量基底的等價關係為：

$$i \equiv -B_1, j \equiv -B_2, k \equiv -B_3,$$

因為定義 $ijk = -1$ 而非 $+1$ ，導致在理解四元數的計算時造成了不少的困惑。但我們也可見得為何四元數可以描述三維旋轉！因為四元數與代表著旋轉的二重向量是等價的。

3 幾何代數的運算與定理

在此節，我們將描述在往後課程中常見的一些定理與公式，將使我們對於其代數上的對稱性有更深入的了解。定同時對於線性代數和向量微積分有所討論。

3.1 符號數

對於一向量空間我們可以賦予其一基底 (basis)。例如對於歐氏空間 \mathbb{R}^n ，我們有單位正交基底 $\{\mathbf{e}_i\}$ 滿足

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}。$$

但未來可能遇到不同的向量空間，其基底間的內積關係¹⁵可能較為複雜。例如其基底向量中有 p 個模長為 $\mathbf{e}_i^2 = +1$ 、有 q 個模長為 $\mathbf{e}_i^2 = -1$ 、有 r 個模長為 $\mathbf{e}_i^2 = 0$ ，則我們記該偽歐氏空間 (pseudo-Euclidean space) 為 $\mathbb{R}^{p,q,r}$ 。

定義：幾何代數

幾何代數可以由一個向量空間建構。該向量空間的基底 $\{\mathbf{e}_i\}$ 具有以下的「符號數 (signature)」規範：

$$\mathbf{e}_i^2 = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1, -1 \text{ 或 } 0。$$

此外，這些基底中符號數為 $+1$ 的基底有 p 個，符號數為 -1 的基底有 q 個，符號數為 0 的基底有 r 個，則我們標記該向量空間為

$$\mathbb{R}^{p,q,r}。$$

由此，透過其基底的外積建構出的幾何代數標記為

$$\mathcal{G}_{p,q,r}。$$

另外，若 $r \neq 0$ ，則我們也稱該幾何代數為退化的 (degenerate)。

常見的範例為狹義相對論的 $\mathbb{R}^{1,3,0}$ (描述雙曲幾何)、三維平面射影幾何的 $\mathbb{R}^{3,0,1}$ 、三維球射影幾何的 $\mathbb{R}^{4,1,0}$ 。

¹⁵ 對於一個二次型 $Q(x) = x^T Q x$ ， Q 可以為正定 (positive-definite)、不定等。而對於此二次型，則有雙線性關係 $Q(x, y) = x^T Q y$ 為內積。

3.2 反轉與共軛

前面我們曾提到反轉運算，作用於 $\mathcal{G}_{p,q,r}$ 的多重向量上可以反轉幾何積或外積的乘法順序：對於向量 $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^k$

$$(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_k)^\sim = \mathbf{a}_k \cdots \mathbf{a}_1, \quad (3.1)$$

$$(\mathbf{a}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_k)^\sim = \mathbf{a}_k \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_1. \quad (3.2)$$

對於兩多重向量 A, B 亦有 $(AB)^\sim = \tilde{B}\tilde{A}$ 。

我們在此介紹一個十分類似的運算為「共軛 (conjugate \angle grade involution)」：對於非退化的幾何代數 $\mathcal{G}_{p,q,r}$ 中的標準基底向量 \mathbf{e}_i ，我們定義其共軛為

$$\mathbf{e}_i^\dagger = \begin{cases} \mathbf{e}_i & , \mathbf{e}_i^2 = 1 \text{ 或 } 0 \\ -\mathbf{e}_i & , \mathbf{e}_i^2 = -1 \end{cases}, \quad (3.3)$$

使其滿足 $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^\dagger = 1$ 。並且利用：

1. 對於多重向量 A, B ，滿足 $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ ；
2. 線性： $(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$ ，

我們得以延伸共軛運算於所有 $\mathcal{G}_{p,q}$ 中的多重向量。因此有

$$(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_k)^\dagger = \mathbf{a}_k^\dagger \cdots \mathbf{a}_1^\dagger, \quad (3.4)$$

$$(\mathbf{a}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_k)^\dagger = \mathbf{a}_k^\dagger \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_1^\dagger. \quad (3.5)$$

而任一多重向量的模長公式也將更新為：

$$\|M\| := \sqrt{\langle MM^\dagger \rangle}. \quad (3.6)$$

多重向量的共軛以劍號 (dagger)， A^\dagger ，表示。其等價於矩陣代數中的厄爾米特共軛 (Hermitian conjugate)，或稱為共軛轉置 (conjugate transpose)。另外，對於 \mathcal{G}_n 中的任一多重向量 M ，因為其向量基底符號數皆為 $+1$ ，故有 $M^\dagger = \tilde{M}$ 。但對於任意的幾何代數 $\mathcal{G}_{p,q,r}$ ，反轉和共軛並不相同。

3.3 對偶

先前我們發現向量外積與叉積之間的對偶關係 (duality) :

$$-I(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)I^{-1} = \mathbf{e}_3 ,$$

其中 $-I = I^{-1}$ 。如上之對偶關係十分重要。我們將在此更深入介紹。

3.3.1 關於對偶的觀察

透過 \mathbb{R}^n 來建構的幾何代數 \mathcal{G}_n ，其 r 級子空間與 $n-r$ 級子空間具有維度

$$\dim(\mathcal{G}_n^r) = \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = \dim(\mathcal{G}_n^{n-r}) ,$$

因此這兩個子空間可能具有某種對應的關係，此即是對偶關係。我們通常以 \star 表示對偶，例如對於 \mathcal{G}_3 的基底¹⁶：

$$\begin{array}{cccc} 1 & \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{31} & \mathbf{e}_{123} \\ 0 \text{ 級} & 1 \text{ 級} & 2 \text{ 級} & 3 \text{ 級} \end{array} ,$$

其中使用了簡記法： $\mathbf{e}_{i_1 \dots i_n} = \mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_n}$ 。我們可以¹⁷定義對偶關係為：

$$\begin{aligned} \star(1) &= \mathbf{e}_{123} \text{、} \star(\mathbf{e}_{123}) = 1 \text{、} \\ \star(\mathbf{e}_1) &= -\mathbf{e}_{23} \text{、} \star(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_{31} \text{、} \star(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_{12} \text{、} \\ \star(\mathbf{e}_{23}) &= \mathbf{e}_1 \text{、} \star(\mathbf{e}_{31}) = \mathbf{e}_2 \text{、} \star(\mathbf{e}_{12}) = \mathbf{e}_3 \text{。} \end{aligned}$$

當我們需要討論更複雜的多重向量的對偶時，我們可以根據上方基底的對偶關係加上對偶運算子為線性 (亦即 $\star(\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2) = \alpha_1 \star(M_1) + \alpha_2 \star(M_2)$ ，其中 α_i 為純量、 M_i 為多重向量) 的條件，得到對偶後的結果。例如在 \mathcal{G}_3 中我們有：

$$\star(3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) = 3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 - 4\mathbf{e}_3 \text{。}$$

¹⁶ \mathbb{R}^n 的標準基底 (canonical basis) 為 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ ，往後討論幾何代數的基底即表示透過標準基底外積/幾何積得到的刃，其又稱為標準基底刃 (canonical basis blade)。

¹⁷ 事實上，有許多不同的定義對偶的方式，然只要小心使用，所應運推導出的結果都會相同。

3.3.2 非退化歐氏空間之對偶

依序上方的討論，我們可以定義對偶關係為：對於一幾何代數，其具有質純量 I 及其倒數 I^{-1} 滿足 $II^{-1} = 1$ ，則我們可以定義多重向量 M 的對偶為

$$\star M \equiv M^* := MI^{-1}。 \quad (3.7)$$

例如在 \mathcal{G}_3 中，我們有 $I^{-1} = I^\dagger = e_3e_2e_1 = -e_1e_2e_3$ 。另外若是在別的空間中，則會有不同的結果：如 \mathcal{G}_4 中 $I^{-1} = e_4e_3e_2e_1 = e_1e_2e_3e_4 = I$ ；或是 $\mathcal{G}_{1,1,0}$ 中有 $e_0^2 = 1$ 、 $e_1^2 = -1$ ，則 $I^{-1} = e_0e_1 = I$ 。然而我們可以很輕易看出以上的「乘上質純量」的計算方法在退化的幾何代數（符號數包含 0 者）中必然得到零，因此我們必須重新定義對偶。

3.3.3 霍奇對偶

若 A_r 是一個刀，則我們可觀察到 A_rI^{-1} 將會是 A_r 的正交餘補 (orthogonal complement)，即是由不含 A_r 的空間中的向量所外積得到的刀，也可視為與 A_r 「正交」的所有「物件」集合¹⁸。

定義對偶的方式十分多元，而我們將在下面採取霍奇對偶 (Hodge dual) 作為定義：從正交餘補的角度出發，考慮單位基底 $\{e_i\}_{i=1}^m$ 滿足 $e_i^2 = +1, -1$ 或 0，其生成的幾何代數具有質純量 $I = e_1e_2 \cdots e_n$ 。則我們可以定義「單位刀」 M 為這些基底的外積，其對偶為 $\star M \equiv M^*$ ，滿足

$$MM^* = I。 \quad (3.8)$$

此外，對於非單位刀的多重向量，我們根據對偶運算為線性之特性可得到其對偶。以下為一範例，考慮 $\mathcal{G}_{2,1,1}$ ，有 $e_0^2 = 0$ 、 $e_1^2 = e_2^2 = 1$ 、 $e_3^2 = -1$ ，則有

$$I = e_0e_1e_2e_3, (e_0 + 3e_2e_3 + e_3e_0e_1)^* = e_1e_2e_3 + 3e_0e_1 - e_2,$$

與反對偶運算滿足 $\star^{-1}(\star M) = (M^*)^{-\star} = M$ ：

$$(e_1e_2e_3 + 3e_0e_1 - e_2)^{-\star} = e_0 + 3e_2e_3 + e_3e_0e_1。$$

¹⁸ 事實上，每個刀都可視為在其所張的空間中的質純量，例如即使在三維中 e_1e_2 仍可視為 $x-y$ 平面上的質純量，可用於計算該平面中的多重向量的對偶。

3.3.4 內積與外積的對偶

內積與外積具有以下的對偶關係：當我們有兩個齊次多重向量 A_r 和 B_s ，其中級數滿足 $r + s \leq n$ 時，有：

$$A_r \cdot (B_s I) = \langle A_r B_s I \rangle_{|r-(n-s)|} = \langle A_r B_s I \rangle_{n-(r+s)} = \langle A_r B_s \rangle_{r+s} I = (A_r \wedge B_s) I. \quad (3.9)$$

當 $r \leq s$ ，則有：

$$A_r \wedge (B_s I) = \langle A_r B_s I \rangle_{r+(n-s)} = \langle A_r B_s I \rangle_{n-(s-r)} = \langle A_r B_s \rangle_{s-r} I = (A_r \cdot B_s) I. \quad (3.10)$$

以上兩個條件 ($r + s \leq n$ 與 $r \leq s$) 皆為避免外積值為零的例外。將上方的公式利用對偶性書寫則有以下結論：

定理：內積與外積的對偶

對於兩個齊次多重向量 A_r 和 B_s ，其內積與外積滿足：

$$A_r \cdot B_s^* = (A_r \wedge B_s)^* \quad (r + s \leq n) \quad (3.11)$$

$$A_r \wedge B_s^* = (A_r \cdot B_s)^* \quad (r \leq s) \quad (3.12)$$

兩對偶關係。

若引入新的「內積¹⁹」運算為：對於 r 級多重向量 A_r 與 s 級多重向量 B_s

$$\begin{cases} \text{左收縮/左內積 (left contraction):} & A_r \rfloor B_s = \langle A_r B_s \rangle_{s-r}, \\ \text{右收縮/右內積 (right contraction):} & A_r \lrcorner B_s = \langle A_r B_s \rangle_{r-s} \end{cases}, \quad (3.13)$$

則以上公式可以不必在乎級數的條件，化為：

$$A_r \rfloor B_s^* = (A_r \wedge B_s)^*, \quad (3.14)$$

$$A_r \wedge (B_s)^* = (A_r \lrcorner B_s)^*. \quad (3.15)$$

¹⁹ 內積代數上可以視為是將相同基底透過幾何積相消掉。幾何上其則是將兩個刃張出的子空間的共同部分收縮掉，故有 contraction 之意。因此上方將左、右內積稱為左、右收縮也不為過。另外，不同文獻對於左、內積符號略有差異。

3.4 質純量

根據對偶關係，我們知道在一個幾何代數中，其純量基底 1 與最高級多重向量基底 I 具有對應關係： $1^* = I$ 。那麼為何我們稱其為質純量呢？顧名思義，此即是表示質純量在代數運算上與純量無異（可以回想在 \mathcal{G}_2 中， $I = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ 代數上等同於單位虛數），然而在該向量空間經過「座標轉換」時，則與純量相異。

純量在空間座標轉換時，其數值不變。但是對於以下的線性變換：在 \mathbb{R}^n 中，對於所有向量 v ，有線性變換 F 滿足

$$F(v) = -v, \quad (3.16)$$

則單位質純量變成

$$I \mapsto F(\mathbf{e}_1) \wedge \cdots \wedge F(\mathbf{e}_n) = (-1)^n I,$$

與純量的變換

$$1 \mapsto F(1) = 1$$

不同。

同樣的概念可以延伸至 r 級多重向量與其對偶的 $n-r$ 級多重向量。例如在 \mathcal{G}_3 中，向量即與二重向量互為對偶。在線性變換(3.16)下，二重向量保持不變，但向量皆會多出一個負號。故我們稱二重向量為「質向量 (pseudovector)²⁰」。

3.5 回歸積

我們定義兩多重向量 A 、 B 間的回歸積 (regressive product) 定義如下，其滿足結合律與反交換律²¹，且代表取兩刀子空間的交集，與外積正好相反：

$$A \vee B = (A^* \wedge B^*)^{-*}. \quad (3.17)$$

在此提供一計算範例：考慮 $\mathcal{G}_{2,0,1}$ (有正交基底 $\mathbf{e}_0^2 = 0$ 、 $\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = 1$)，則有 $I = \mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ ，且

$$(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_0) \vee (\mathbf{e}_{02}) = ((\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_0)^* \wedge (\mathbf{e}_{02})^*)^{-*} = ((-\mathbf{e}_{02} + \mathbf{e}_{12}) \wedge (-\mathbf{e}_1))^{-*} = (\mathbf{e}_{021})^{-*} = -1.$$

²⁰ 在其他物理文獻中，我們也常稱向量為「極向量 (polar vector)」，與質向量被稱為「軸向量 (axial vector)」作為對比。

²¹ 此定義亦可寫做 $(A \vee B)^* = A^* \wedge B^*$ 。若根據前個章節內積與外積的對偶關係，我們也可將回歸積寫做 $A \vee B = A^* \cdot B$ 。另外，使用不同的對偶定義得到的結果都相同

3.6 內積與外積的計算

前述的左、右收縮即是體現了內積的幾何意義：「將兩個刀共同具有的子空間收縮掉」。此外，內積滿足對於加法的分配律，我們理論上只需考慮任兩個刀的內積：以單位正交基底表示

$$\mathbf{e}_{I_1} \cdot \mathbf{e}_{I_2} = \begin{cases} \mathbf{e}_{I_1} \mathbf{e}_{I_2} & , \text{若 } I_1 \subseteq I_2 \text{ 或 } I_2 \subseteq I_1 ; \\ 0 & , \text{其餘情況,} \end{cases} \quad (3.18)$$

其中集合 I_1 和 I_2 分別是表示這兩刀由哪些正交基底向量外積而得。若其中一個集合完全包含另一個集合，則內積可以化為幾何積；若否，則表示兩刀所張出的子空間垂直，內積為零。數個範例如下，對於 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{G}_n$ ：

$$\mathbf{e}_{12} \cdot \mathbf{e}_{123} = \mathbf{e}_{12123} = -\mathbf{e}_3 ,$$

$$\mathbf{e}_{123} \cdot \mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_{12312} = -\mathbf{e}_3 ,$$

$$\mathbf{e}_{12} \cdot \mathbf{e}_{345} = 0 ,$$

$$\mathbf{e}_{12} \cdot \mathbf{e}_{234} = 0 .$$

當然，同樣的結果也可以透過級投影的概念得到：

$$A_r \cdot B_s = \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|} . \quad (3.19)$$

我們也可以透過非級投影的方式計算內積。例如對於向量 a 與 $\{a_i\}_{i=1}^r$ 為一組基底，考慮以下的幾何積：透過不停使用 $aa_i = 2(a \cdot a_i) - a_i a$ 和幾何積的結合律，我們有

$$\begin{aligned} aa_1 a_2 \cdots a_r &= 2(a \cdot a_1) a_2 \cdots a_r - (a_1 a) a_2 \cdots a_r \\ &= 2(a \cdot a_1) a_2 \cdots a_r - 2(a \cdot a_2) a_1 a_3 \cdots a_r + a_1 a_2 a a_3 \cdots a_r \\ &= 2 \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} (a \cdot a_k) a_1 a_2 \cdots \check{a}_k \cdots a_r + (-1)^r a_1 a_2 \cdots a_r a , \end{aligned}$$

移項有：

$$\frac{1}{2} (aa_1 a_2 \cdots a_r - (-1)^r a_1 a_2 \cdots a_r a) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} (a \cdot a_k) a_1 a_2 \cdots \check{a}_k \cdots a_r . \quad (3.20)$$

定義 $A_r := a_1 \wedge \cdots \wedge a_r = \langle a_1 \cdots a_r \rangle_r$ 為一個 r 級刃。由此我們將等式兩邊同取 $r-1$ 級分量，記向量與刃之間的內積為：

$$a \cdot A_r = \frac{1}{2}(aA_r - (-1)^r A_r a), \quad (3.21)$$

其中：

$$a \cdot A_r = \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} (a \cdot a_k) a_1 \wedge \cdots \wedge \check{a}_k \wedge \cdots \wedge a_r \quad (3.22)$$

即是定理(2.8)。若考慮兩多重向量之間的內積，從級的概念出發則有以下結論：

$$A \cdot B = (a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_r) \cdot B = a_1 \cdot \left(a_2 \cdot (\cdots (a_r \cdot B)) \right). \quad (3.23)$$

外積與內積恰恰相反，幾何意義為：「將兩個刃無交集的子空間結合」。計算上若以正交積底表示，則可以視外積為所有積底符號數都為 0 的幾何積：例如

$$e_{12} \wedge e_{34} = e_{1234},$$

$$e_{12} \wedge e_{23} = 0.$$

對於向量 a_1, a_2, \cdots, a_r ，其外積定義為它們的完全反對稱幾何積 (total-antisymmetric product) 之和：

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_r = \frac{1}{r!} \sum (-1)^\epsilon \underbrace{a_{k_1} a_{k_2} \cdots a_{k_r}}_{\epsilon \text{ 個置換}}. \quad (3.24)$$

此外，因為我們透過級的概念知道： $aA_r = \langle aA_r \rangle_{r-1} + \langle aA_r \rangle_{r+1} := a \cdot A_r + a \wedge A_r$ ，故可以定義向量與 r 級刃之間的外積為：

$$a \wedge A_r = \frac{1}{2}(aA_r + (-1)^r A_r a). \quad (3.25)$$

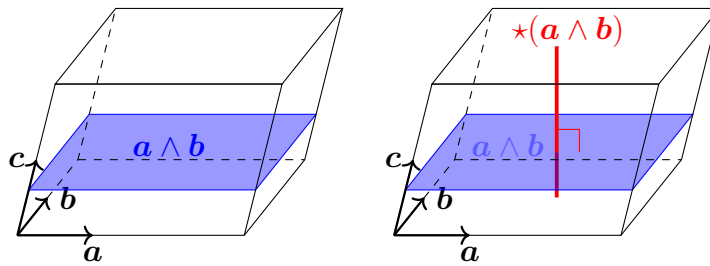
此結果與公式(3.24)等價。當談及多重向量之間的外積時，公式(3.24)永遠適用。

最後附註幾何上的詮釋：內積表示兩個子空間大的包含小的，將大的減去小的；外積表示兩不相交 (除了原點) 的子空間，兩者結合進行擴增；回歸積表示求出兩個子空間的重疊。

3.6.1 子空間詮釋

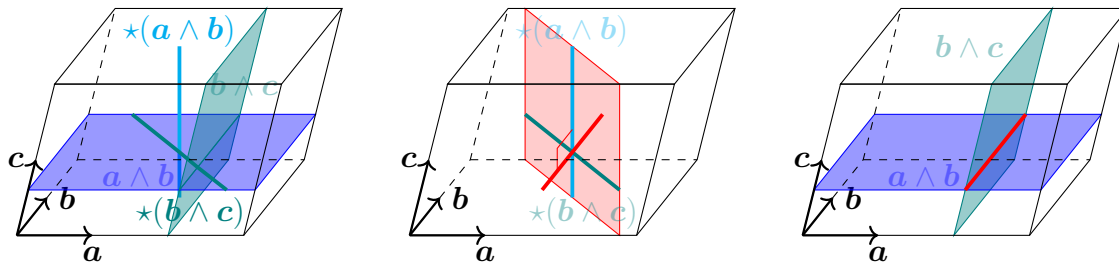
先前提及，「 k 級刃表示一子空間」。運用此概念，我們可以圖像概念化內積、外積、回歸積的計算規則。

- 外積：取兩刃的子空間的「互斥聯集 (disjoint union)」。如下圖3.1a。若兩子空間互斥，則外積得到兩空間 A 、 B 之聯集 $A \cup B$ ；若兩空間有交集，則外積得到 0。
- 霍奇對偶：相對於整個向量空間，取刃表示的子空間 A 之正交餘補 A^c 。見下圖3.1b。
- 回歸積：因 $(A^c \cup B^c)^c = A \cap B$ ，回歸積為取兩個刃的子空間 A 、 B 的交集 $A \cap B$ 。見下圖3.1b，並與外積之子空間詮釋做比較。
- 內積：若兩刃的子空間 A 、 B 中， A 者包含於 B 者內 ($A \subseteq B$)，則取兩刃子空間的差 $B - A = B \setminus A$ 。否則得到 0。

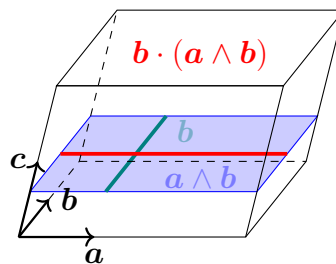


(a) 外積之子空間詮釋

(b) 霍奇對偶之子空間詮釋



(c) 回歸積之子空間詮釋



(d) 內積之子空間詮釋

3.7 倒易座標系

我們定義 n 維空間的「不正交」一組座標系為 $\{\mathbf{e}_k\}$ ，而在此節中，我們並不要求該基底要單位正交。一向量在該座標系下可表示為（使用愛因斯坦求和約定）： $a = a^k \mathbf{e}_k$ ，其中 a^k 為各座標係數。在該空間中，我們定義其「有向體積」元素為：

$$V_n = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n. \quad (3.26)$$

因為 $\{\mathbf{e}_k\}$ 為一基底，向量間線性獨立，故 $V_n \neq 0$ 。

而對於每個座標系，我們都有其倒易座標系²²標記為 $\{\mathbf{e}^k\}$ ，滿足：

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i \quad (\forall i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (3.27)$$

那麼我們該如何建構倒易座標系呢？觀察：

$$\mathbf{e}^k V_n = \mathbf{e}^k \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_i) (\mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \check{\mathbf{e}}_i \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n),$$

因為 $\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_i = \delta_i^k$ ，我們有一簡單建構倒易座標系的方法如下：

$$\mathbf{e}^k = (-1)^{k-1} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \cdots \wedge \check{\mathbf{e}}_k \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n V_n^{-1}. \quad (3.28)$$

我們可以透過內積與外積的對偶性輕鬆確認：

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}^k &= \mathbf{e}_k \cdot \left((-1)^{k-1} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \cdots \wedge \check{\mathbf{e}}_k \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n V_n^{-1} \right) \\ &= (-1)^{k-1} \left(\mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \cdots \wedge \check{\mathbf{e}}_k \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n) \right) V_n^{-1} \\ &= (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n) V_n^{-1} = V_n V_n^{-1} = 1, \end{aligned}$$

兩者上下標相異則表示上式第二行之楔積為零，故滿足關係式(3.27)。

²² 此概念即等同於線性代數中的對偶空間 (dual space)。對於向量空間 V ，我們可以定義其對偶空間 V^* ，其中的元素為所有將向量映射到純量的函數，亦即對於 $(V, F, +, \cdot)$ ，我們有 $v^* \in V^*$ 使得：

$$v^* : V \rightarrow F.$$

而最常見的對偶空間例子便是「內積」， V 中的向量透過內積可以被映射到一個純量。此外，透過內積的概念，最自然建構對偶空間的基底的方法是上述的 $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i$ 。

3.7.1 分量

因為 $\{e_k\}$ 和 $\{e^k\}$ 各為基底，故任一向量可分解為：

$$a = a^k e_k = a_k e^k。$$

係數 (a^1, a^2, \dots, a^n) 為向量 a 在基底 $\{e_k\}$ 下的分量 (components)；同理有 $\{e^k\}$ 下的分量 (a_1, a_2, \dots, a_n) 。在非單位正交座標系中 e_k 和 e^k 相異，因此其分量也各不相同：

$$\left. \begin{aligned} a \cdot e^i &= a^k e_k \cdot e^i = a^k \delta_k^i = a^i \\ a \cdot e_i &= a_k e^k \cdot e_i = a_k \delta_i^k = a_i \end{aligned} \right\} \rightarrow a = a \cdot e^k e_k = a \cdot e_k e^k。 \quad (3.29)$$

如上的分解可延伸至由 $\{e_k\}$ 張出的空間中的多重向量。例如對於二重向量 $a \wedge b$ 有：

$$e_k e^k \cdot (a \wedge b) = e_k ((e^k \cdot a)b - (e^k \cdot b)a) = ab - ba = 2a \wedge b。$$

定理：

對於一 r 級多重向量 A_r 與 n 維空間的一組基底 $\{e_k\}$ ，我們有以下關係式：

$$e_k e^k \cdot A_r = r A_r， \quad (3.30)$$

$$e_k e^k \wedge A_r = (n - r) A_r， \quad (3.31)$$

$$e_k A_r e^k = (-1)^r (n - 2r) A_r。 \quad (3.32)$$

此外，任意多重向量 A 亦可被分解為

$$A = \sum_{i < j < \dots < k} A_{ij\dots k} e^i \wedge e^j \wedge \dots \wedge e^k， \text{ 其中 } A_{ij\dots k} = \langle (e_k \wedge \dots \wedge e_j \wedge e_i) A \rangle； \quad (3.33)$$

$$A = \sum_{i < j < \dots < k} A^{ij\dots k} e_i \wedge e_j \wedge \dots \wedge e_k， \text{ 其中 } A^{ij\dots k} = \langle (e^k \wedge \dots \wedge e^j \wedge e^i) A \rangle。 \quad (3.34)$$

以上之公式²³都可以考慮其幾何意義：內積即是求出空間中相互包含的物件之個數、外積則是求出空間中互斥物件之個數。

²³ 這些公式十分適合出練習題，往後也會在意想不到的地方再次遇到。

3.8 旋轉

透過附錄群的概念、更嚴謹的代數運算與新引入的倒易座標系，我們再次探討旋轉。我們先前見到了如何將 $\mathbb{R}^{p,q,r}$ 中向量 a 沿著方向 n 鏡射 ($n^2 = 1$)：

$$a \mapsto -nan。$$

我們可以疊加數個鏡射得到變換： $U = u_1 u_2 \cdots u_k \in \text{Pin}(p, q, r)$ ，其中群 $\text{Pin}(p, q, r)$ 表示在 $\mathcal{G}_{p,q,r}$ 中透過鏡射複合 (composition) 出的所有變換的集合。 U 作用在一個 r 級多重向量 A_r 上有變換：

$$A_r \mapsto U[A_r] := (-1)^{kr} U A_r U^{-1}。 \quad (3.35)$$

而群 $\text{Spin}(p, q, r)$ 則是僅包含了不改變手性的鏡射複合變換。事實上 $\text{Pin}(n)$ 雙重覆蓋 (double cover)²⁴ 群 $\text{O}(n)$ 、 $\text{Spin}(n)$ 雙重覆蓋 $\text{SO}(n)$ ^{25,26}。

而我們在此特別在乎兩個連續兩個對於 m 和 n 的鏡射，其對應於在 $m \wedge n$ 平面上的旋轉。該旋轉可由一轉子紀錄：

$$R = nm = \exp(-\hat{B}\theta/2)，$$

其中：

$$\cos(\theta/2) = m \cdot n, \hat{B} = \frac{m \wedge n}{\sin(\theta/2)}。$$

事實上，高維旋轉可以視為偶數個單位向量的包夾積 (sandwich product)，形如：

$$R = lk \cdots nm, \tilde{R} = mn \cdots kl, a \mapsto RaR^{-1} = Ra\tilde{R},$$

並且我們有歸一化 (normalization) 條件 $R\tilde{R} = 1$ 。在歐氏空間中，該歸一化條件是必然的，然在如敏考斯基時空 (Minkowski spacetime) 等等有混合不同符號數的情況下，我們視歸一化為對於轉子的條件。

²⁴ A 群雙重覆蓋 B 群：即是 B 中任一元素都可對應到 A 中的兩個不重複元素，造成的群作用皆相同， B 的元素有一個對應到 A 中元素的二對一滿射 (two-to-one surjection)。簡而言之，即 A 中元素為 B 的兩倍，但它們所造成的變換相同。例如我們可以看到 U 與 $-U$ 所造成的變換是等價的。

²⁵ 它們的取名也十分有趣： $\text{Spin}(p, q, r)$ 表示旋轉變換群，而 $\text{Pin}(p, q, r)$ 則是單位矩陣非 $+1$ 的對應，故缺少了前面表示 special 的 S 。

²⁶ 雙重覆蓋的概念我們之後還會遇到，在 PGA 中，我們將看到 $\text{Pin}(n, 0, 1)$ 雙重覆蓋 $\text{E}(n) = \text{O}(n) \ltimes T(n)$ 、 $\text{Spin}(n, 0, 1)$ 雙重覆蓋 $\text{SE}(n) = \text{O}(n) \ltimes T(n)$ 。

在歐氏空間中，任一轉子都能寫為一個二重向量的指數，此和李群與李代數的概念有關。我們可以證明：

$$a \mapsto \exp(-B/2)a \exp(B/2)$$

必為一向量如下。定義：

$$a(\lambda) = \exp(-\lambda B/2)a \exp(\lambda B/2)。$$

因為：

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}a(\lambda) &= -\frac{1}{2}\exp(-\lambda B/2)Ba \exp(\lambda B/2) + \frac{1}{2}\exp(-\lambda B/2)aB \exp(\lambda B/2) \\ &= \exp(-\lambda B/2)\frac{1}{2}(aB - Ba) \exp(\lambda B/2) \\ &= \exp(-\lambda B/2)a \cdot B \exp(\lambda B/2)， \end{aligned}$$

且 $a \cdot B$ 仍為一向量，故有：

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}a(\lambda) = \exp(-\lambda B/2)\left(\cdots \underbrace{((a \cdot B) \cdot B) \cdots}_{n \text{ 個內積}} \cdot B \exp(\lambda B/2)。$$

我們由此可以得到其泰勒展開式：

$$a(\lambda) = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} \frac{d^k a(0)}{d\lambda^k} = a + \lambda a \cdot B + \frac{\lambda^2}{2!} (a \cdot B) \cdot B + \cdots， \quad (3.36)$$

代入 $\lambda = 1$ 即可發現連加的每一項皆為向量：

$$a = e^{-B/2}ae^{-B/2} = a + a \cdot B + \frac{1}{2!}(a \cdot B) \cdot B + \frac{1}{3!}((a \cdot B) \cdot B) \cdot B + \cdots， \quad (3.37)$$

故整體也是一向量²⁷。上方的泰勒展開式(3.36)也是個近似或內插 (interpolate) 旋轉的好方法。

²⁷ 此式等價於李群與李代數中的貝克-坎貝爾-豪斯多夫 (Baker-Campbell-Hausdorff, BCH) 公式。

3.8.1 如何得到轉子

當一組座標系 $\{\mathbf{e}_k\}$ 通過一轉子 R 轉至新座標系 $\{\mathbf{f}_k\}$ ，我們有兩種方法去求得該轉子：

1. 得知如歐拉角、軸角旋轉等對於固定/不固定座標軸的轉角資訊、
2. 得知 $\{\mathbf{e}_k\}$ 與 $\{\mathbf{f}_k\}$ 間的關係。

在此我們來探討第二個方法。假設在三維空間中：

$$\mathbf{f}_k = R\mathbf{e}_k\tilde{R} \quad (k = 1, 2, 3),$$

我們欲求得一簡單的 R 的表達式。因為：

$$R = \exp(-B/2) = \cos(\|B\|/2) - \sin(\|B\|/2) \frac{B}{\|B\|} = \alpha - \beta B,$$

我們有：

$$\sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k \tilde{R} \mathbf{e}^k = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k (\alpha + \beta B) \mathbf{e}^k = 3\alpha - \beta B = 4\alpha - \tilde{R}.$$

我們計算 (使用愛因斯坦求和約定)：

$$\mathbf{f}_k \mathbf{e}^k = \sum_{k=1}^3 \mathbf{f}_k \mathbf{e}^k = \sum_{k=1}^3 R \mathbf{e}_k \tilde{R} \mathbf{e}^k = R(4\alpha - \tilde{R}) = 4\alpha R - 1,$$

可得知 R 必正比於：

$$\psi = 1 + \mathbf{f}_k \mathbf{e}^k. \quad (3.38)$$

加上歸一化條件，我們有：

$$R = \frac{1 + \mathbf{f}_k \mathbf{e}^k}{|1 + \mathbf{f}_k \mathbf{e}^k|} = \frac{\psi}{\sqrt{\psi \tilde{\psi}}}. \quad (3.39)$$

而當轉子為旋轉 180° 時， $\psi = 0$ 。因此僅需考慮其中兩個基底的旋轉變換以解決此問題。

3.9 線性代數

對於線性映射的研究在物理與數學中都十分重要，這就是線性代數這一門學科。過往學習的多是從矩陣變換的角度切入，在此我們將透過幾何代數研究線性代數。本節中，以 F 、 G 的字體表示線性映射，且因為幾何代數的維度十分大，我們的映射定義域與值域為同一空間（代表線性映射為「自同態 (endomorphism)」）。線性即表示對於純量 λ 、 μ 與向量 a 、 b ，映射 F 滿足

$$F(\lambda a + \mu b) = \lambda F(a) + \mu F(b)。$$

然而線性代數中的映射 F 僅能作用於向量上，我們欲延伸其定義使其能作用於任意多重向量上，由此我們引入 F 的「外同態 (outermorphism)」 \underline{F} 滿足：

$$\underline{F}(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n) = \underline{F}(a_1) \wedge \underline{F}(a_2) \wedge \cdots \wedge \underline{F}(a_n)。$$
 (3.40)

外同態除了將對於向量的線性映射延伸至多重向量上外，其同時為線性與保級 (grade-preserving) 的。我們因此也會簡記外同態 \underline{F} 為 F 。另外，對於純量 λ 我們有 $F(\lambda) = \lambda$ 。

目前見到的範例之一便是旋轉變換：

$$R(a) = Ra\tilde{R}$$

與其外同態：

$$\underline{R}(A) \equiv R(A) = RA\tilde{R}。$$

線性映射之間也可以進行合成，為：

$$(FG)(a) = F(G(a)) = FG(a)，$$

同樣也滿足線性與外同態之要求。

3.9.1 轉置

給予一個線性映射 F ，我們可以定義其轉置 (transpose) 或伴隨 (adjoint) 為 \bar{F} 。其定義為：對於任意向量 a, b ， F 的轉置滿足

$$a \cdot \bar{F}(b) = F(a) \cdot b. \quad (3.41)$$

又因為 $e_i \cdot \bar{F}(a) = F(e_i) \cdot a$ ，我們可以透過以下公式求得轉置：

$$\bar{F}(a) = e^i e_i \cdot \bar{F}(a) = e^i a \cdot F(e_i). \quad (3.42)$$

轉置滿足以下特性：

1. 轉置的轉置為原映射：

$$\overline{(\bar{F})}(a) = e^i a \cdot \bar{F}(e_i) = e^i e_i F(a) = F(a).$$

2. 合成映射的轉置為：

$$\overline{FG}(a) = e^i a \cdot F(G(e_i)) = e^i \bar{F}(a) \cdot G(e_i) = e^i \bar{G}\bar{F}(a) \cdot e_i = \bar{G}\bar{F}(a).$$

3. 對稱映射滿足： $\bar{F}(a) = F(a)$ ；反對稱映射滿足： $\bar{F}(a) = -F(a)$ 。

4. 對於任意多重向量 A_r, B_s 分別有級數 r 與 s (且 $r \leq s$)，則有：

$$A_r \cdot \bar{F}(B_s) = \bar{F}(F(A_r) \cdot B_s). \quad (3.43)$$

可以用如下的方式思考此定理：對於 $r \geq s$ 的情況，有 r 個 F 作用在 A_r 的各個向量上。當 $F(A_r)$ 和 B_s 做內積/收縮 (contraction) 時，其中 s 個 F 變成了其轉置映射 \bar{F} 。而剩下的 $r - s$ 個 F 則是作用在最後的 $r - s$ 級多重向量 $A_r \cdot \bar{F}(B_s)$ 上。

3.9.2 行列式

現在我們了解了一線性映射作用在整個幾何代數上的影響，我們可以提供一個十分簡單對於行列式的定義。因為線性映射是保級的，且空間中的質純量只有一基底，故我們定義：

$$F(I) = \det(F)I. \quad (3.44)$$

可驗證此定義與高中所學的行列式值相同。從此定義可立即看出：

1. 行列式值為高維有向體積經過 F 變換後的縮放比例，正負號表示空間手性是否被改變。
2. 對於映射 F 和 G ，我們有：

$$\det(FG)(I) = FG(I) = F(\det(G)I) = \det(F)\det(G)I. \quad (3.45)$$

3. 轉置前後行列式值不變：

$$\det(F) = \langle F(I)I^{-1} \rangle = \langle I\bar{F}(I^{-1}) \rangle = \det(\bar{F}). \quad (3.46)$$

一範例如下：對於 f_1, f_2 為任意向量，考慮線性變換

$$F(a) = a + \alpha a \cdot f_1 f_2.$$

我們應先求出該映射的外同態，即得知該變換如何作用於任意多重向量上：

$$\begin{aligned} F(a \wedge b) &= (a + \alpha a \cdot f_1 f_2) \wedge (b + \alpha b \cdot f_1 f_2) \\ &= a \wedge b + \alpha(b \cdot f_1)a \wedge f_2 - \alpha(a \cdot f_1)b \wedge f_2 \\ &= a \wedge b + \alpha(b \cdot f_1 a - a \cdot f_1 b) \wedge f_2 \\ &= a \wedge b + \alpha((a \wedge b) \cdot f_1) \wedge f_2. \end{aligned}$$

故對任意多重向量 A ，有 $F(A) = A + \alpha(A \cdot f_1) \wedge f_2$ 。則行列式為：

$$F(I) = I + \alpha(I \cdot f_1) \wedge f_2 = I + \alpha(f_1 \cdot f_2)I \rightarrow \det(F) = 1 + \alpha f_1 \cdot f_2.$$

3.9.3 反變換

我們在此構建反變換的公式。考慮任一多重向量 B ，有：

$$\det(F)IB = F(I)B = F(I\bar{F}(B))。$$

此時令 $A = IB$ ，我們進而發現：

$$\det(F)A = F(I\bar{F}(I^{-1}A))，$$

因此我們有反變換：

$$F^{-1}(A) = I\bar{F}(I^{-1}A)(\det(F))^{-1}，$$

$$\bar{F}^{-1}(A) = IF(I^{-1}A)(\det(F))^{-1}。$$

此結論比任何張量或是矩陣的結果來得快速。一範例如下：考慮線性映射

$$F(A) = A + \alpha(A \cdot f_1) \wedge f_2。$$

因為：

$$\begin{aligned} \langle A_r F(B_r) \rangle &= \langle A_r B_r \rangle + \alpha \langle A_r (B_r \cdot f_1) \wedge f_2 \rangle = \langle A_r B_r \rangle + \alpha \langle f_2 A_r (B_r \cdot f_1) \rangle \\ &= \langle A_r B_r \rangle + \alpha \langle f_2 \cdot A_r B_r f_1 \rangle = \langle \bar{F}(A_r) B_r \rangle， \end{aligned}$$

所以：

$$\bar{F}(A) = A + \alpha_1 f_1 \wedge (f_2 \cdot A)。$$

整合上方之結果，再加上 $(f_1 \cdot f_2)A = f_1 \cdot (f_2 \wedge A) + f_2 \wedge (f_1 \cdot A)$ ，有：

$$\begin{aligned} F^{-1}(A) &= I(I^{-1}A + \alpha f_1 \wedge (f_2 \cdot (I^{-1}A)))(1 + \alpha f_1 \cdot f_2)^{-1} \\ &= \frac{A + \alpha I f_1 \wedge (f_2 \cdot (I^{-1}A))}{1 + \alpha f_1 \cdot f_2} = \frac{A + \alpha f_1 \cdot (f_2 \wedge A)}{1 + \alpha f_1 \cdot f_2} \\ &= A - \frac{\alpha}{1 + \alpha f_1 \cdot f_2} f_2 \wedge (f_1 \cdot A)。 \end{aligned}$$

3.9.4 特徵向量與特徵刀

我們延伸傳統線性代數中對於特徵值與特徵向量的概念，並更著重於其幾何意義。一線性映射 F 有特徵向量 e 若它們滿足：

$$F(e) = \lambda e,$$

λ 則是其對應的特徵值。並且我們有特徵多項式：

$$\det(F - \lambda) = 0.$$

一任意的特徵多項式會有複數的 λ 根，然這並不能讓我們對於該變換有著直接的幾何意象。因此我們引入特徵刀的概念，其滿足：

$$F(A_r) = \lambda A_r,$$

A_r 為 r 級刀、 λ 為對應的實數特徵值。各個特徵刀皆表示一個在該變換下不變的空間。一最簡單的例子即為 I ，有特徵值 $\det(F)$ 。

一範例如下：考慮以下的函數

$$F(e_1) = \lambda e_2, F(e_2) = -\lambda e_1,$$

則傳統上我們會表示該映射的特徵向量為 $e_1 \pm ie_2$ ，且有特徵值 $\mp i\lambda$ ，其中 i 是單位虛數。但此時我們同時有：

$$F(e_1 \wedge e_2) = \lambda^2 e_1 \wedge e_2,$$

$e_1 \wedge e_2$ 為 F 的特徵二重向量。 F 的複數結構顯示於單位二重向量 $e_1 \wedge e_2$ 中，而一個單位二重向量可以視為在其張出的平面中的單位虛數。

3.9.5 對稱與反對稱函數

對於線性函數理論，一很重要的面相在於找到函數最自然、標準的表示法。對於歐氏空間中的對稱函數，此表示法可以透過「譜分解 (spectral decomposition)」獲得。對於函數 F ，其有特徵向量、特徵值對 (e_i, λ_i) 和 (e_j, λ_j) ，則：

$$e_i \cdot F(e_j) = e_i \cdot (\lambda_j e_j) = \lambda_j e_i \cdot e_j。$$

但若函數為對稱，其相等於其轉置：

$$e_i \cdot F(e_j) = F(e_i) \cdot e_j = \lambda_i e_i \cdot e_j。$$

故有：

$$(\lambda_i - \lambda_j) e_i \cdot e_j = 0，$$

亦即特徵值相異之特徵向量必正交。

若我們允許複係數的特徵向量與特徵值，則透過計算 $e^* \cdot F(e)$ 可得知 (* 號為取共軛複數)：

$$(\lambda - \lambda^*) e^* \cdot e = 0。$$

給定 $e^* \cdot e \neq 0$ ，我們可以知道特徵值必為實數，故特徵向量亦為實係數。在 n 維歐氏空間此不等式必成立，因此對於對稱函數有以下分解：

$$F(a) = \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i(a), \quad P_i(a) = a \cdot e_i e_i, \quad (3.47)$$

其中特徵值 $\lambda_1 < \dots < \lambda_m$ 有各自的對應的相互正交特徵向量 e_i 。即使兩個特徵值相等，我們也可找到一組相互正交的特徵向量。另外，在非歐空間中，有「零向量 (null vector)」可能導致 $e^* \cdot e = 0$ ，使我們不能保證該正交分解的存在性。

3.10 向量微分運算子

幾何代數提供了一向量間的可除積。而我們在向量微積分中常見的梯度、散度、旋度可由向量微分算子 (vector derivative) ∇ 計算得到，此算符讀作「nabla」。而不像單獨的散度或旋度，向量微分 (運算子) 為可除的，因此其格林函數 (Green's function) 存在。幾何微積分的理論將向量微積分與幾何代數做結合，讓我們得以洞悉並延伸向量微積分中的許多結果。

向量微分運算子由 ∇ 表示之，其在二維或三維中亦可用粗體表示為 $\boldsymbol{\nabla}$ 。代數上，其有所有 (一級) 向量的特性。其作為算子的特性展現於「方向導數」中：

$$a \cdot \nabla F(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(x + \epsilon a) - F(x)}{\epsilon}, \quad (3.48)$$

其中我們假設該極限存在並且是良好定義的。若我們有一個固定的座標系 $\{e_k\}$ 與其倒易座標系 $\{e^k\}$ ，且同時使用愛因斯坦求和約定，我們可以將向量微分算子表示為：

$$\nabla = \sum_k e^k \frac{\partial}{\partial x^k} = e^k \partial_k. \quad (3.49)$$

可以確認 ∇ 的定義與所選擇的座標系獨立。而也可只考慮熟悉的直角座標系內， $\boldsymbol{\nabla}$ 則變回以前向量微積分中熟悉的算子。

3.10.1 純量場

首先我們考慮將 ∇ 作用於一純量場 $\phi(x)$ 上，我們將得到其「梯度」場 $\nabla\phi$ 。一個最簡單的例子為 $\phi = a \cdot x$ ，其中 a 唯一常數向量。該純量場亦可寫成 $a \cdot x = x^j a_j$ ，使得梯度為：

$$\nabla(x \cdot a) = e^k (\partial_k x^j) a_j = e^k a_j \delta_k^j,$$

此即向量 a 在 $\{e^k\}$ 中的表示式。因此我們有以下與座標系獨立的結論：

$$\nabla(x \cdot a) = a. \quad (3.50)$$

此結論與空間的維度與符號數皆無關，並可透過考慮連鎖律 (chain rule) 與萊布尼茲律 (Leibniz's rule) 延伸得到更多公式。其一為考慮：

$$\nabla x^k = \nabla(x \cdot \mathbf{e}^k) = \mathbf{e}^k, \quad (3.51)$$

此公式可延伸至曲線 (curvilinear) 座標系。第二個例子為利用 $a = a \cdot \mathbf{e}_k \mathbf{e}^k$ ，有：

$$\begin{aligned} \nabla(x^2) &= \mathbf{e}^i \partial_i (x^j x^k) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k \\ &= \mathbf{e}^i \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^i} x^k + x^j \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \right) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k \\ &= (\mathbf{e}^j x^k + \mathbf{e}^k x^j) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k \\ &= x^k \mathbf{e}_k + x^j \mathbf{e}_j = 2x. \end{aligned}$$

然而，該推導並不需要標明所使用的座標系。我們可以引入以下向量微分的約定：用上標「 \cdot 」來表示向量微分運算子所作用的對象。範例如下：

$$\nabla(x^2) = \dot{\nabla}(\dot{x} \cdot x) + \dot{\nabla}(x \cdot \dot{x}) = 2\dot{\nabla}(\dot{x} \cdot x) = 2x. \quad (3.52)$$

3.10.2 向量場

考慮向量場 $J(x)$ ，其向量微分 ∇J 包含了純量與二重向量分量。純量為該向量場的「散度」，二重向量為該向量場的「旋度」。

散度場的定義可以為對於一固定的座標系 $\{\mathbf{e}_k\}$ 或是根據幾何積的特性：

$$\nabla \cdot J = \mathbf{e}^k \partial_k \cdot J = \partial_k J^k \quad (3.53)$$

$$= \frac{1}{2}(\nabla J + J \dot{\nabla}). \quad (3.54)$$

最簡單的範例為在 n 為空間中的位置向量場 x ，其散度為：

$$\nabla \cdot x = \partial_k x^k = n.$$

旋度場定義為：

$$\nabla \wedge J = \mathbf{e}^i \wedge (\partial_i J) = \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j \partial_i J_j \quad (3.55)$$

$$= \frac{1}{2}(\nabla J - J \nabla) \cdot \quad (3.56)$$

旋度的每一項為 $\partial_i J_j$ 的完全反對稱項的和。在三維中，其每一項與可以透過對偶變換從二重向量變成質向量：

$$\text{curl}(J) = -I \nabla \wedge J \cdot \quad (3.57)$$

楔積因此可以將旋度的概念延伸至任意維度。一簡單的例子為位置向量場的旋度：

$$\nabla \wedge x = \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = 0 \cdot$$

各項因為反對稱性而可以相消為零。

另外，我們可以結合(3.54)和(3.56)得到

$$\nabla J = \nabla \cdot J + \nabla \wedge J \cdot \quad (3.58)$$

例如有 $\nabla x = n$ 。此結論可用於簡化馬克士威方程式。

3.10.3 多重向量場

我們可以延伸向量微分算子的定義，使其能作用於多重向量 A 上：

$$\nabla A = \mathbf{e}^k \partial_k A \cdot \quad (3.59)$$

例如當 A_r 為一 r 級多重向量場，則有

$$\nabla \cdot A_r = \langle \nabla A_r \rangle_{r-1} \cdot, \quad (3.60)$$

$$\nabla \wedge A_r = \langle \nabla A_r \rangle_{r+1} \cdot, \quad (3.61)$$

內積之項稱為散度、外積之項稱為旋度（切勿與向量微積分中的三維旋度(3.57)搞混，兩者互為對偶）。另外，我們有以下兩定理：

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge A) = 0, \quad (3.62)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot A) = 0. \quad (3.63)$$

以上結果可透過基底展開後得證。事實上，此兩定理其實互為對偶： $\nabla \wedge (\nabla \wedge A)I = \nabla \cdot (\nabla \cdot (AI))$ ，兩者皆對應於向量微積分中常見的以下公式：

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0.$$

因為 ∇ 為向量，其不一定可與多重向量交換，因此我們有以下標記習慣去表明該運算子的作用範圍：

1. 若無括弧，則 ∇ 作用於緊鄰其右方之物件。
2. 當 ∇ 後面接上括弧，則微分運算作用於括號內的每個物件。
3. 當 ∇ 作用於非緊鄰其右的多重向量，則用上標點「 $\dot{\cdot}$ 」表示作用的範圍。

例如我們有：

$$\nabla(AB) = \nabla \dot{A}B + \dot{\nabla} A \dot{B}.$$

而上標點可以用偏微分（代數上視為純量運算子）替代為：

$$\nabla \dot{A}B = e^k \partial_k(A)B, \quad \dot{\nabla} A \dot{B} = e^k A \partial_k(B).$$

而在在其他文獻中，上標點的標記可延伸至作用於線性函數上。例如 $f(a)$ 為位置相依的線性函數，則

$$\dot{\nabla} f(a) = \nabla f(a) - e^k f(\partial_k a),$$

使得 $\dot{\nabla} f(a)$ 僅表示微分 f 的位置相依部分，而並未對於其代入的變數進行微分。

我們可以建構出一系列對於 x 位置向量相依的線性函數微分基礎結論，根據(3.30)、

(3.31)與(3.32)，對於一常數 r 級多重向量有：

$$\nabla x \cdot A_r = r A_r, \quad (3.64)$$

$$\nabla x \wedge A_r = (n - r) A_r, \quad (3.65)$$

$$\dot{\nabla} A_r \dot{x} = (-1)^r (n - r) A_r. \quad (3.66)$$

此外，透過幾何代數的代數操作，我們得以證明諸多向量微積分恆等式：例如對於向量場 A 、 B

1. $\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$ 。證明如下：

$$\begin{aligned} \nabla^2 A &= \nabla(\nabla A) = \nabla(\nabla \cdot A + \nabla \wedge A) \\ &= \nabla(\nabla \cdot A) + \nabla \cdot (\nabla \wedge A) + \cancel{\nabla \wedge \nabla \cdot A} \\ &= \nabla(\nabla \cdot A) + \nabla \cdot ((\nabla \times A)I) \\ &= \nabla(\nabla \cdot A) + (\nabla \wedge (\nabla \times A)) I \\ &= \nabla(\nabla \cdot A) + (\nabla \times (\nabla \times A)) I^2 \\ &= \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla \times (\nabla \times A) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2. $\nabla \cdot (A \times B) = B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B)$ 。證明如下：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (A \times B) &= \nabla \cdot (A \wedge B)^* = (\nabla \wedge A \wedge B)^* \\ &= (\dot{\nabla} \wedge \dot{A} \wedge B)^* - (A \wedge \dot{\nabla} \wedge \dot{B})^* \\ &= (\dot{\nabla} \wedge \dot{A})^* \cdot B - A \cdot (\dot{\nabla} \wedge \dot{B})^* \\ &= (\nabla \times A) \cdot B - A \cdot (\nabla \times B) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4 物理（未完成）

本章節將簡短介紹幾何代數在物理上的些許應用，包含晶格學、角動量與旋轉的概念，並會簡單帶到狹義相對論與電磁學在幾何代數中的寫法。此外，在本章節中，會以粗體量表示向量，大寫的一般字體用以表示多重向量。

4.1 晶格

在描述晶格的光學繞射性質時，最重要的定律便是「布拉格繞射定律 (Bragg's law)」，該定理的描述通常形如：

$$2d \sin \theta = n\lambda \quad (n \in \mathbb{N}),$$

其中 θ 為布拉格角、 λ 為入射波波長、 d 則為晶格週期性平面的間距。然而在高中學習此定律時，對於什麼是「晶格週期性平面」卻沒有多做解釋，因此必須引入「倒晶格 (reciprocal lattice)」的概念。

4.1.1 倒晶格

倒晶格為分析晶格時一很重要的工具。若一晶格其週期性的晶格點 (lattice points) 可以由晶格平移向量 (lattice translational vectors)： \mathbf{e}_1 、 \mathbf{e}_2 、 \mathbf{e}_3 的「整係數」線性組合表示如

$$\mathbf{T} = n^1 \mathbf{e}_1 + n^2 \mathbf{e}_2 + n^3 \mathbf{e}_3 \quad (\forall n^1, n^2, n^3 \in \mathbb{Z}).$$

倒晶格的數學本質即為倒易座標系。我們可定義其倒晶格基底為

$$\mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3}, \quad \mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3}, \quad \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3}. \quad (4.1)$$

我們通常標示

$$\mathbf{G} = n_1 \mathbf{e}^1 + n_2 \mathbf{e}^2 + n_3 \mathbf{e}^3$$

為倒晶格點。當入射一波進入該晶格，其出射光與入射光行建設性干涉的充分必要條件為出、入射的角波數變化為

$$\Delta \mathbf{k} = 2\pi(n_1 \mathbf{e}^1 + n_2 \mathbf{e}^2 + n_3 \mathbf{e}^3) \quad (\forall n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}),$$

是為布拉格條件 (Bragg condition)，亦可表示為 $\Delta \mathbf{k} = \mathbf{G}$ 。

此外，我們標示三向量並排的矩陣的行列式為 $|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3|$ ，則有

$$V_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = |\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3| I, \quad (4.2)$$

而 I 為三維空間中的質純量。因此我們有關於倒晶格基底常見的向量代數表示法：

$$\mathbf{e}^1 = \frac{(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) I^{-1}}{|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3|} = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3|}。$$

此處 \times 為兩向量叉積。一個三維倒晶格基底與晶格平移向量之間的關係見下圖4.1。

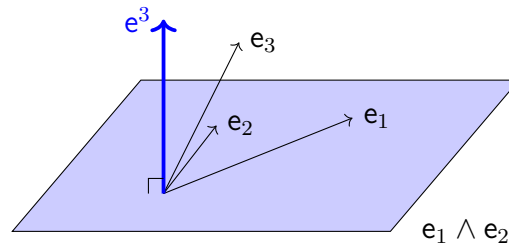


圖 4.1: 倒晶格

4.2 角動量

不同於往常用叉積產生的質向量去表示角動量，我們在此以二重向量去表示它：

$$L := \mathbf{x} \wedge \mathbf{p}. \quad (4.3)$$

因為所有的定向 (directed) 平面皆有一個唯一的單位法向量，我們可以很放心地用二重向量替代叉積。而不同於叉積是個令人頭疼的質向量，二重向量包含了面積的概念，更加體現出旋轉「掃過去的面積」的意象。另一種常用的表示法為定義：

$$r = |\mathbf{x}|, \quad \mathbf{x} = r \hat{\mathbf{x}},$$

因此有：

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}} &= \dot{r}\hat{\mathbf{x}} + r\dot{\hat{\mathbf{x}}} \\
 L &= \mathbf{x} \wedge m(\dot{r}\hat{\mathbf{x}} + r\dot{\hat{\mathbf{x}}}) = mr^2\hat{\mathbf{x}} \wedge \dot{\hat{\mathbf{x}}} \\
 \because \hat{\mathbf{x}}^2 = 1 \rightarrow 0 &= \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}}^2 = 2\hat{\mathbf{x}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{x}}} \\
 \therefore L &= mr^2\hat{\mathbf{x}}\dot{\hat{\mathbf{x}}} = -mr^2\dot{\hat{\mathbf{x}}}\hat{\mathbf{x}}. \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

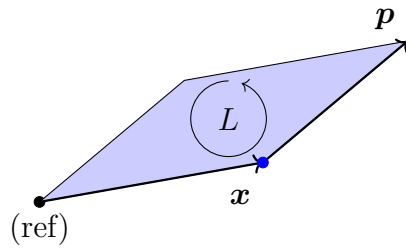


圖 4.2: 角動量二重向量

相對於原點的力矩則也定義為二重向量：

$$\begin{aligned}
 \frac{dL}{dt} &= \dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{p} + \mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{p}} \\
 &= \mathbf{v} \wedge (m\mathbf{v}) + \mathbf{x} \wedge m\mathbf{a} \\
 &= \mathbf{x} \wedge \mathbf{f} =: N. \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

角動量大小 $l > 0$ 定義為：

$$-l^2 = L^2 = -m^2 r^4 |\dot{\hat{\mathbf{x}}}|^2 \rightarrow l = mr^2 |\dot{\hat{\mathbf{x}}}|. \tag{4.6}$$

4.3 軌道運動

4.3.1 離心率向量

我們考慮包含質量為 M 和 m 的雙體系統，系統縮減質量 (reduced mass) 為 $\mu = (Mm)/(M+m)$ 。兩物體的連線向量 (自 M 至 m) 為 \mathbf{x} ，具有運動方程式 $\mu\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}$ ， \mathbf{f} 為 M 作用在 m 上的重力。兩者之間的重力為 $f = -k/r^2$ ，其中 k 表示此力為引力或斥力：

$k > 0$ 為引力， $k < 0$ 則為斥力，我們知道 $k = GMm$ 。則有系統運動方程式：

$$\mu \ddot{\mathbf{x}} = -\frac{k}{r^2} \hat{\mathbf{x}} = -\frac{k}{r^3} \mathbf{x}。$$

接者考慮角動量與加速度向量的幾何積：

$$\begin{aligned} L\dot{\mathbf{v}} &= L\ddot{\mathbf{x}} = (-\mu r^2 \dot{\hat{\mathbf{x}}}) \left(-\frac{k}{\mu r^2} \hat{\mathbf{x}} \right) = k \dot{\hat{\mathbf{x}}} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (L\mathbf{v} - k\hat{\mathbf{x}}) &= 0。 \end{aligned}$$

我們令最後一行括號內的項等於一常數向量 $k\mathbf{e}$ ，有：

$$L\mathbf{v} = k(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{e}) \Leftrightarrow \mathbf{e} = \frac{1}{k} L\mathbf{v} - \hat{\mathbf{x}}。 \quad (4.7)$$

\mathbf{e} 向量被稱為離心率向量 (eccentricity vector)，亦被稱為拉普拉斯-龍格-冷次向量 (Laplace-Runge-Lenz vector)。因為：

$$\begin{aligned} L \wedge \mathbf{e} &= \langle L\mathbf{e} \rangle_3 \\ &= \frac{1}{k} \langle L(L\mathbf{v} - k\hat{\mathbf{x}}) \rangle_3 \\ &= \frac{1}{k} \langle -l^2 \mathbf{v} - \mu \mathbf{x} \dot{\mathbf{x}} k \hat{\mathbf{x}} \rangle_3 = 0， \end{aligned}$$

我們可以看到 \mathbf{e} 將坐落於 L 的平面之上。

且可以藉此向量輕鬆求出行星運動軌道公式：

$$\begin{aligned} (L\mathbf{v})\mathbf{x} &= k(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{e})\mathbf{x} \\ L(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{x}) &= k(r + \mathbf{e}\mathbf{x}) \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} L + \frac{1}{\mu} L\tilde{L} &= kr(1 + \mathbf{e}\hat{\mathbf{x}}) \\ \frac{l^2}{\mu} &= \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} L + \frac{1}{\mu} L\tilde{L} \rangle = \langle kr(1 + \mathbf{e}\hat{\mathbf{x}}) \rangle = kr(1 + \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \\ &\rightarrow r = \frac{l^2/k\mu}{1 + \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{x}}} = \frac{l^2/k\mu}{1 + e \cos \theta}。 \end{aligned} \quad (4.8)$$

波浪號為反轉。由此，我們也可以看出 \mathbf{e} 的名稱的由來：因為(4.8)是一個圓錐曲線 (con-

ics) 以焦點 (focus) 為原點的極座標表示法 (詳見附錄 D)，其中 $e = |\mathbf{e}|$ 就是該圓錐曲線的離心率 (eccentricity)，且 \mathbf{e} 的方向就是該圓錐曲線的對稱軸方向。此即克卜勒第一行星運動定律。此外，對於橢圓/雙曲軌道，我們有半焦弦長 $l^2/k\mu = a(1 - e^2)$ ，其中 a 為半長軸/半貫軸長度。離心率與軌道形狀的關係請見下方表格 4.1。

Eccentricity	Energy	Orbit
$e > 1$	$E > 0$	Hyperbola
$e = 1$	$E = 0$	Parabola
$e < 1$	$E < 0$	Ellipse
$e = 0$	$E = -\mu k^2/2l^2$	Circle

表 4.1: 軌道形狀與能量關係

另外，我們可設在無窮遠處 $V = 0$ ，使力學能為：

$$E = \frac{1}{2}\mu \mathbf{v}^2 - \frac{k}{r}。$$

又有：

$$\begin{aligned} \because (lv)^2 &= L\mathbf{v}\mathbf{v}\tilde{L} = k^2(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{e})^2 \cdot (1 + \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{x}}) = \frac{l^2}{k\mu r} \\ \rightarrow E &= \frac{\mu k^2}{2l^2}(e^2 + 1 + 2\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e} - 2 - 2\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}) = \frac{\mu k^2}{2l^2}(e^2 - 1)。 \end{aligned} \quad (4.9)$$

4.3.2 橢圓軌道運動

在此先以較簡單的方式，從能量的角度切入去分析軌道運動。下一段將會以幾何代數的技巧解決更複雜的微擾問題。

$$\begin{aligned} \because E &= \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} \\ \therefore \mu^2 \dot{r}^2 &= 2\mu E - \frac{l^2}{r^2} + \frac{2\mu k}{r} \\ \rightarrow t &= \mu \int_{r_0}^{r_1} \frac{r \, dr}{(2\mu k r + 2\mu E r^2 - l^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

然這個積分不易處理，因此我們退而求其次，僅考慮能量為負的橢圓軌道，並考慮 r_0 、 r_1 為 r 的最大與最小值。定義半長軸：

$$a = \frac{1}{2}(r_0 + r_1) = -\frac{k}{2E}。 \quad (4.10)$$

因此可以化簡上述積分：

$$2\mu kr + 2\mu Er^2 - l^2 = -\frac{\mu k}{a}(r^2 - 2ar) - l^2 = \frac{\mu k}{a}(a^2 e^2 - (r - a)^2)。$$

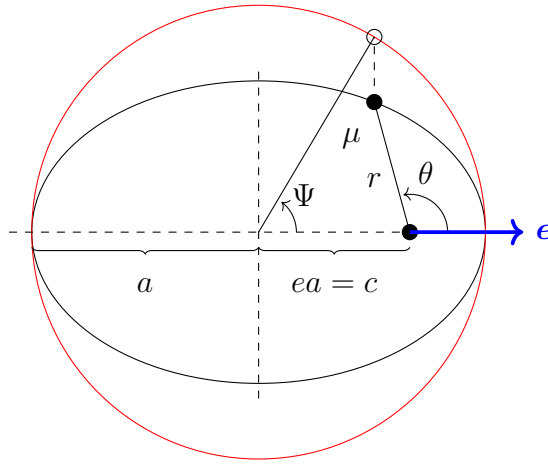


圖 4.3: 橢圓軌道

我們在此定義「偏近點角 (eccentric anomaly)」 Ψ 滿足：

$$r = a(1 - e \cos \Psi)， \quad (4.11)$$

見圖4.3。我們讓 $t = 0$ 為 r 在最小值時，則積分可化簡為：

$$\rightarrow t = \left(\frac{\mu a^3}{k} \right)^{1/2} \int_0^\Psi (1 - e \cos \tilde{\Psi}) d\tilde{\Psi} \quad (4.12)$$

$$\omega^2 := \frac{k}{\mu a^3} \quad (4.13)$$

$$\rightarrow \omega t = \Psi - e \sin \Psi。 \quad (4.14)$$

公式(4.14)和(4.11)讓我們可以參數化的方式連結 r 和 t ，並且也看出它們不存在解析的

關係。繞行一圈的時間為 $T = 2\pi/\omega$ ，因此

$$T^2 = \frac{4\pi^2\mu}{k}a^3, \quad (4.15)$$

此即克卜勒第三行星運動定律，又俗稱「 r^3 - T^2 定律」。

4.3.3 微擾軌道運動

在計算實際的軌道運動時，有許多的因素需要考慮而導致計算過於複雜。因此，我們很適合用微擾理論 (perturbation theory) 應對它，結果應是從最基本的克卜勒軌道加上微擾的無窮級數修正。分析如下：假設外力 \mathbf{f} 相對於平方反比力極小

$$\mu\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{k}{r^3}\mathbf{x} + \mathbf{f}。$$

然因為有一外力，角動量可能因此改變：

$$\dot{L} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{f}。$$

我們需要進行修正，但令離心率向量的定義(4.7)不變：

$$\begin{aligned} k\mathbf{e} &= L\mathbf{v} - k\hat{\mathbf{x}} \\ \rightarrow k\dot{\mathbf{e}} &= \dot{L}\mathbf{v} + L\dot{\mathbf{v}} - k\dot{\hat{\mathbf{x}}} \\ &= (\dot{L} \cdot \mathbf{v} + \dot{L} \wedge \mathbf{v}) + L \left(\frac{1}{\mu}\mathbf{f} - \frac{k}{\mu r^3}\mathbf{x} \right) - k\dot{\hat{\mathbf{x}}} \\ &= \dot{L} \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{x} \wedge \mathbf{f} \wedge \mathbf{v}) + \frac{1}{\mu}L \cdot \mathbf{f} + \frac{1}{\mu}L \wedge \mathbf{f} - k(\hat{\mathbf{x}} \wedge \dot{\hat{\mathbf{x}}})\hat{\mathbf{x}} - k\dot{\hat{\mathbf{x}}} \\ &= \left(\dot{L} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\mu}L \cdot \mathbf{f} \right) + \underbrace{(-\mathbf{x} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{f}) + \frac{1}{\mu}(\mu\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{f}}_{=0} + k(\dot{\hat{\mathbf{x}}} \wedge \hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}} - k\dot{\hat{\mathbf{x}}} \\ &= \left(\dot{L} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\mu}L \cdot \mathbf{f} \right) + \cancel{k\hat{\mathbf{x}}^2\dot{\hat{\mathbf{x}}} - k\dot{\hat{\mathbf{x}}}} \\ \Rightarrow k\dot{\mathbf{e}} &= \dot{L} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\mu}L \cdot \mathbf{f}。 \end{aligned} \quad (4.16)$$

而根據定義，別忘了 $L \wedge \mathbf{e} = 0$ 一直都會成立。對於許多問題， L 和 \mathbf{e} 的變化甚慢，因此分析時多以一周期的變化量作為討論。本節提供一範例如下。

4.4 旋轉座標系與剛體運動

描述一剛體在三維空間中的運動的方法有許多，我們在此專注於以轉子進行描述。

4.4.1 旋轉座標系

空間中有一旋轉的座標基底 $\{f_k\}$ ，可以利用轉子 $R(t)$ 與空間固定座標系之基底 $\{e_k\}$ 做轉換：

$$f_k(t) = R(t)e_kR^\dagger(t) \circ \quad (4.17)$$

角速度 ω 根據傳統的定義為：

$$\dot{f}_k = \omega \times f_k = -I(\omega \wedge f_k) = (-I\omega) \cdot f_k = f_k \cdot (I\omega) \circ \quad (4.18)$$

注意： ω 為向量，因此我們知道角速度應以一個二重向量表示較為妥當。我們定義「角速度二重向量」為：

$$\Omega := I\omega \circ \quad (4.19)$$

接著，根據歸一化條件 $RR^\dagger = 1$ 有：

$$\begin{aligned} \because 0 &= \frac{d}{dt} (RR^\dagger) = \dot{R}R^\dagger + R\dot{R}^\dagger \\ \therefore \dot{R}R^\dagger &= -R\dot{R}^\dagger = -\left(\dot{R}R^\dagger\right)^\dagger, \end{aligned}$$

可得知 $\dot{R}R^\dagger$ 為二重向量，其與向量的乘法具反交換律。接著我們對(4.17)微分：

$$\begin{aligned} \rightarrow \dot{f}_k &= \dot{R}e_kR^\dagger + Re_k\dot{R}^\dagger = \dot{R}R^\dagger f_k + f_k R\dot{R}^\dagger \\ &= \dot{R}R^\dagger f_k - f_k \dot{R}R^\dagger = (2\dot{R}R^\dagger) \cdot f_k \circ \end{aligned}$$

與上方角速度的定義做比較可得：

$$2\dot{R}R^\dagger = -\Omega \circ,$$

因此其得到轉子的運動方程式為：

$$\dot{R} = -\frac{1}{2}\Omega R, \quad (4.20)$$

$$\dot{R}^\dagger = \frac{1}{2}R^\dagger\Omega. \quad (4.21)$$

這個公式在物理學中無處不在。在更廣義的設定中，轉子被視為是「李群 (Lie group)」之元素，而二重向量則形成了「李代數 (Lie algebra)」。

等角速度運動

若 Ω 為定值，將公式(4.20)直接積分，可得到

$$R = \exp\left(-\frac{1}{2}\Omega t\right) R_0,$$

此即在 Ω 平面上，以固定角速度轉動之轉子。若我們再約束該轉動在 x - y 平面上，使得 $\Omega = I(\omega e_3) = \omega e_1 e_2$ ，此處 ω 為一純量，則

$$\begin{aligned} f_1 &= \exp\left(-\frac{1}{2}e_1 e_2 \omega t\right) e_1 \exp\left(\frac{1}{2}e_1 e_2 \omega t\right) = e_1 \exp(e_1 e_2 \omega t) \\ &= \cos(\omega t)e_1 + \sin(\omega t)e_2. \end{aligned}$$

4.4.2 剛體運動

對於在空間中移動的剛體，我們定義其質心座標為 \mathbf{x}_0 、該剛體中的 i 質點在空間中的座標 \mathbf{y}_i ，有

$$\mathbf{y}_i(t) = R(t)\mathbf{x}_i R^\dagger(t) + \mathbf{x}_0(t).$$

注意到， \mathbf{x}_i 為一定向量。我們可以求得點 $\mathbf{y} = R\mathbf{x}R^\dagger + \mathbf{x}_0$ 的速度是

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \dot{R}\mathbf{x}R^\dagger + R\mathbf{x}\dot{R}^\dagger + \dot{\mathbf{x}}_0 \\ &= -\frac{1}{2}\Omega R\mathbf{x}R^\dagger + \frac{1}{2}R\mathbf{x}R^\dagger\Omega + \mathbf{v}_0 \\ &= (R\mathbf{x}R^\dagger) \cdot \Omega + \mathbf{v}_0. \end{aligned}$$

注意此公式與座標系的旋轉相同， $\mathbf{x} \cdot \Omega$ 即為 \mathbf{x} 在旋轉時的速度向量。因為轉子的座標變換與向量一樣，我們定義該物體觀察自己的角速度 (body angular velocity) 二重向量為

$$\Omega_B = R^\dagger \Omega R。$$

因此

$$\dot{R} = -\frac{1}{2}\Omega R = -\frac{1}{2}R\Omega_B, \quad \dot{R}^\dagger = \frac{1}{2}R^\dagger\Omega = \frac{1}{2}\Omega_B R^\dagger,$$

得

$$\mathbf{v}(t) = R(\mathbf{x} \cdot \Omega_B) R^\dagger + \mathbf{v}_0。$$

另外引入其密度 $\rho = \rho(\mathbf{x})$ ，有

$$\int \rho \, dV = M, \quad \int \rho \mathbf{x} \, dV = 0,$$

對於其動量我們則有

$$\mathbf{p} = \int \rho \mathbf{v} \, dV = \int \rho (R\mathbf{x} \cdot \Omega_B R^\dagger + \mathbf{v}_0) \, dV = M\mathbf{v}_0。$$

4.4.3 轉動慣量張量

接著，來考慮該物體相對於其質心的角動量 L ：

$$\begin{aligned} L &= \int \rho(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \wedge \mathbf{v} \, dV \\ &= \int \rho (R\mathbf{x} R^\dagger) \wedge (R\mathbf{x} \cdot \Omega_B R^\dagger + \mathbf{v}_0) \, dV \\ &= R \left(\int \rho \mathbf{x} \wedge (\mathbf{x} \cdot \Omega_B) \, dV \right) R^\dagger。 \end{aligned}$$

另外，因為括好內的積分是相對於一固定坐標系，因此為與時間獨立的 Ω_B 的函數。我們由此定義轉動慣量張量 (inertia tensor) $\mathcal{I}(B)$ 為：

$$\mathcal{I}(B) = \int \rho \mathbf{x} \wedge (\mathbf{x} \cdot B) \, dV, \quad (4.22)$$

其中 B 為一個單位二重向量。由此定義也可輕易發現，角動量與角速度不一定平行（對於二重向量，「平行」等價於兩二重向量只差純量倍數）。其為由二重向量打到另一個二重向量的線性映射。其線性之證明非常簡單：

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\lambda A + \mu B) &= \int \rho \mathbf{x} \wedge (\mathbf{x} \cdot (\lambda A + \mu B)) dV \\ &= \lambda \int \rho \mathbf{x} \wedge (\mathbf{x} \cdot A) dV + \mu \int \rho \mathbf{x} \wedge (\mathbf{x} \cdot B) dV \\ &= \lambda \mathcal{I}(A) + \mu \mathcal{I}(B) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

另外，我們若要考慮相對於任一個點 \mathbf{a} 的轉動慣量張量，則有此一小定理：

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\mathbf{a}}(B) &= \int \rho (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \wedge ((\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot B) dV \\ &= \int \rho \left[\mathbf{x} \wedge (\mathbf{x} \cdot B) - \cancel{\mathbf{x} \wedge (\mathbf{a} \cdot B)} - \cancel{\mathbf{a} \wedge (\mathbf{x} \cdot B)} + \mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \cdot B) \right] dV \\ &= \mathcal{I}(B) + M \mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \cdot B) \quad \circ\end{aligned}$$

此定理即為「平行軸定理」：

$$\mathcal{I}_{\mathbf{a}}(B) = \mathcal{I}(B) + M \mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \cdot B) \quad (4.23)$$

4.4.4 主軸

上述對於轉動慣量張量的描述甚為抽象，但實際上我們會標明所使用的座標系。因此，我們希望所使用的座標系能讓轉動慣量張量呈現得越簡單越好，該座標系就是「主軸 (principal Axis) 座標系」。

我們考慮一座標系 $\{\mathbf{e}_i\}$ ，並透過其定義得知轉動慣量張量在該座標系下的矩陣表示法：

$$\mathcal{I}_{ij} = -(\mathbf{I} \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{I}(\mathbf{e}_j) \quad (4.24)$$

又因為對於任意向量 \mathbf{x} 和二重向量 A, B 有

$$A \cdot (\mathbf{x} \wedge (\mathbf{x} \cdot B)) = \langle A \mathbf{x} (\mathbf{x} \cdot B) \rangle = \langle (A \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x} B \rangle = B \cdot (\mathbf{x} \wedge (\mathbf{x} \cdot A))$$

所以矩陣 \mathcal{I} 為一對稱矩陣。並且我們根據線性代數對於對稱矩陣對角化的定理得知，若 $\{\mathbf{e}_k\}$ 選擇為矩陣 \mathcal{I} 的特徵向量方向上，則 \mathcal{I} 為對角矩陣。此即主軸座標系。

另外， \mathcal{I} 也為半正定 (semi-positive definite/positive semi-definite)：

$$\begin{aligned} a_i \mathcal{I} a_j &= a_i \left(-(\mathbf{I} \mathbf{e}_i) \cdot \mathcal{I}(\mathbf{I} \mathbf{e}_j) \right) a_j \\ &= a_i \left(-\int \right) a_j \end{aligned}$$

4.4.5 動能與角動量

4.4.6 歐拉轉動方程式

陀螺

4.5 狹義相對論

我們接下來要介紹的時空代數 (spacetime algebra, STA) 是一個偽歐氏空間：

$$\text{STA} \cong \mathcal{G}_{1,3} \text{。} \quad (4.25)$$

4.6 電磁學

5 平面射影幾何代數

我們接下來要介紹的平面射影幾何代數 (plane-based projective geometric algebra, PGA) 是用來描述 \mathbb{R}^n 空間中的幾何學，便於描述空間中幾何物體的鏡射、平移、旋轉運動²⁸，以及幾何物體之間的相交 (meet) 和連接 (join)。此代數即為：

$$\text{PGA} = \mathcal{G}_{n,0,1}, \quad (5.1)$$

我們尤其在乎描述二維幾何的 $\mathcal{G}_{2,0,1}$ 和描述三維幾何的 $\mathcal{G}_{3,0,1}$ 。透過此代數，我們得以將平面、線、點等物件視為向量，更甚至引入「無窮遠」平面、線、點等概念。作為遊戲引擎的幾何與物理描述都是十分合適的。

5.1 平面為向量

一個三維空間中的平面可以表示為 $p: ax + by + cz + d = 0$ 。不同平面之間可以相加減或乘上係數，這些計算滿足向量的運算公理，因此，我們不妨用一個向量來表示此平面：

$$p = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_0. \quad (5.2)$$

這些向量基底相互正交，而且其符號數為： $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1$ 、 $e_0^2 = 0$ 。一些範例如下，我們將用 $\xrightarrow{\text{PGA}}$ 來表示箭號左邊我們熟悉的幾何物件、箭號右邊為其在 PGA 中對應的多重向量：

$$\begin{aligned} x + 1 = 0 &\xrightarrow{\text{PGA}} e_1 + e_0 \\ 3x + 2y = 1 &\xrightarrow{\text{PGA}} 3e_1 + 2e_2 - e_0. \end{aligned}$$

此外，我們知道一個平面的係數不管其放大幾倍皆表示同樣的平面²⁹，如 $x + 2 = 0$ 和 $2x + 4 = 0$ 。因此，兩向量若差了常數倍率則一樣可視為同樣的幾何物件，我們可以用一個等價關係 (equivalence relation) 來表示此結果：幾何上

$$p \sim \lambda p \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

²⁸ 即為歐幾里得群 $E(n)$ ，詳見附錄 B。

²⁹ 此即齊次座標系 (homogeneous coordinates) 的概念。

5.1.1 無窮遠平面

根據上方的討論，我們可以得知，各個基底向量都是一個空間中的平面： $x = 0 \xrightarrow{\text{PGA}} e_1$ 、 $y = 0 \xrightarrow{\text{PGA}} e_2$ 、 $z = 0 \xrightarrow{\text{PGA}} e_3$ 。那麼向量 e_0 表示什麼平面呢？

因為：

$$e_0 = \lim_{|a| \rightarrow 0} \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + e_0 \xleftarrow{\text{PGA}} a_1x + a_2y + a_3z + 1 = 0,$$

當向量 $a = (a_1, a_2, a_3)$ 趨於 0，則此平面將逐漸遠離原點。因此，我們視 e_0 為「無窮遠平面」。可見其關係如下圖 5.1，其就好似天球。

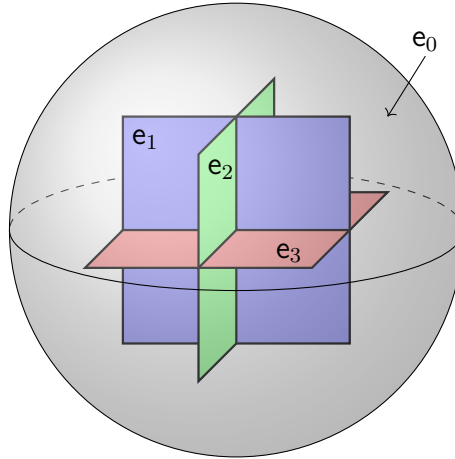


圖 5.1: 三維 PGA 之平面

5.1.2 平面族

一個平面 $p = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_0$ 的權重 (weight) $\|p\|$ 定義為其向量的模長：

$$\|p\| = \|ae_1 + be_2 + ce_3 + de_0\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (5.3)$$

當兩個平面 p_1 及 p_2 的權重都為 1 時， $p_1 \pm p_2$ 即是它們的角平分面。事實上，它們的線性組合構成一整個平面族，圍繞著它們的交線。

5.1.3 平面表示法

除了從平面方程式的角度，替換 $x \rightarrow \mathbf{e}_1$ 、 $y \rightarrow \mathbf{e}_2$ 、 $z \rightarrow \mathbf{e}_3$ 、 $1 \rightarrow \mathbf{e}_0$ 得到 PGA 的平面表示法外，亦可以從幾何的角度取得。在 \mathbb{R}^3 中，單位向量 $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ 與平面 p 垂直，且此平面距離原點距離為 δ ，則讀者可自行確認此平面在 PGA 中可以表示為：

$$p = \mathbf{n} - \delta \mathbf{e}_0 = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3 - \delta \mathbf{e}_0. \quad (5.4)$$

5.2 零空間表示法

我們前面建立了「幾何上的平面對應到向量」這一概念，但為何如此呢？向量能不能代表我們熟悉的歐氏空間中的點？

此章節稱為「射影幾何 (projective geometry)」即為與傳統的射影幾何有相關性—其將物件視為是更高維度物件的投影 (projection)。因此同樣地，我們可以引入一個映射 \mathcal{X} 將 \mathbb{R}^n 中的點 (以向量 \mathbf{x} 表示) 提高維度到 $\mathcal{G}_{p,q}$ 中：在 PGA 中，該映射有以下形式³⁰

$$\begin{aligned} \mathcal{X} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathcal{G}_{4,1}^1 \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathcal{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{e}^0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

其中， \mathbf{e}^0 為 \mathbf{e}_0 的對偶向量，滿足 $\mathbf{e}^0 \cdot \mathbf{e}_i = \delta_i^0$ 。如先前曾提及過，在 $\mathcal{G}_{p,q,r}$ 中的一個 k 級刃 A_k 表示了一個子空間，其可以在向量空間 \mathbb{R}^n 或是其投影前的 $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n) = \{\mathcal{X}(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ 上引入兩個零空間 (null space / kernel)：內積零空間 (inner product null space) 與外積零空間 (outer product null space)。這兩個零空間的定義依序列於下：

$$\mathcal{IN}(A_k) := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{X}(\mathbf{x}) \cdot A_k = 0 \right\}, \quad (5.6)$$

$$\mathcal{ON}(A_k) := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{X}(\mathbf{x}) \wedge A_k = 0 \right\}. \quad (5.7)$$

有了以上的定義後，我們便可以分析前面的敘述。將向量視為平面的稱為「平面射影幾何代數 (plane-based PGA)」，其透過 \mathcal{IN} 賦予多重向量幾何意義；將向量視為點的稱為「點射影幾何代數 (point-based PGA)」，其透過 \mathcal{ON} 賦予多重向量幾何意義³¹。

³⁰ \mathcal{X} 的對應域寫作 $\mathcal{G}_{4,1}$ 而非 $\mathcal{G}_{3,0,1}$ 是因為後者同構於前者的子空間。前者的標準基底為 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_+, \mathbf{e}_-\}$ ，其中 $\mathbf{e}_+^2 = 1$ 、 $\mathbf{e}_-^2 = -1$ 。透過此設置，我們可以定義 $\mathbf{e}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_+ - \mathbf{e}_-)$ 及 $\mathbf{e}_\infty = \mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_- \equiv \mathbf{e}^0$ ，滿足下方需要的 $\mathbf{e}_0^2 = \mathbf{e}_\infty^2 = 0$ 、 $\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_\infty = 1$ 。詳可見保角幾何代數一章。

³¹ 兩個表示法其實僅相差對偶變換，因為： $\mathcal{X}(\mathbf{x}) \cdot A_k^* = (\mathcal{X}(\mathbf{x}) \wedge A_k)^*$ 。

5.3 相交

我們觀察到，對於相異平面 p_1 與 p_2 構成的二級多重向量 $L = p_1 \wedge p_2$ ，其與 \mathbb{R}^3 中的向量 x 若滿足：

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{IN}(L) &\leftrightarrow \mathcal{X}(x) \cdot L = 0 \\ &\leftrightarrow \mathcal{X}(x) \cdot (p_1 \wedge p_2) = (\mathcal{X}(x) \cdot p_1) p_2 - (\mathcal{X}(x) \cdot p_2) p_1 = 0 \\ &\leftrightarrow \mathcal{X}(x) \cdot p_1 = \mathcal{X}(x) \cdot p_2 = 0, \end{aligned}$$

由此可知， x 同時存在於 $\mathcal{IN}(p_1)$ 與 $\mathcal{IN}(p_2)$ 內。同時存在於兩相異平面上的點即存在於它們的交線上。因此，我們先前所使用的「外積」運算符 \wedge 在 PGA 裡面可以詮釋為「相交 (meet)」運算符。

5.3.1 線

兩平面的相交就是直線，數學上可表示為：對於平面 $p_1 = \mathbf{n}_1 - \delta_1 \mathbf{e}_0$ 、 $p_2 = \mathbf{n}_2 - \delta_2 \mathbf{e}_0$ ，它們的交線 L 為：

$$L = p_1 \wedge p_2 = \mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{n}_2 - \mathbf{e}_0 \wedge (\delta_1 \mathbf{n}_2 - \delta_2 \mathbf{n}_1). \quad (5.8)$$

若令向量 $\mathbf{d} = (\delta_1 \mathbf{n}_2 - \delta_2 \mathbf{n}_1)(\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{n}_2)^{-1} = \delta_1 \mathbf{n}^1 + \delta_2 \mathbf{n}^2$ ，則有：

$$\mathbf{d} + t(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \quad (t \in \mathbb{R}) \xrightarrow{\text{PGA}} L = (1 - \mathbf{e}_0 \mathbf{d})(\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{n}_2). \quad (5.9)$$

可以確認向量 \mathbf{d} 垂直於線的走向，且其大小 $|\mathbf{d}|$ 為原點到直線的最短距離。

同時我們可以探討可能的「例外」。平面相交若無交線則是因為兩平面重合或平行。前者的情形代表 $p_2 = \lambda p_1$ ，其中 $\lambda \in \mathbb{R}$ 。後者則較為有趣：考慮 $p_1 = \mathbf{n} - \delta_1 \mathbf{e}_0$ 、 $p_2 = \mathbf{n} - \delta_2 \mathbf{e}_0$ ，則其交線為

$$L = (\mathbf{n} - \delta_1 \mathbf{e}_0) \wedge (\mathbf{n} - \delta_2 \mathbf{e}_0) = (\delta_2 - \delta_1) \mathbf{e}_0 \mathbf{n}. \quad (5.10)$$

此結果可以看做是(5.9)中的 \mathbf{d} 趨於無窮大，亦即「無窮遠直線/地平線」—意料之內，兩平行平面確實相交於無窮遠直線。

5.3.2 點

三平面的相交就是點，數學上可表示為：對於平面 p_1 、 p_2 、 p_3 ，它們的交點 X 為

$$X = p_1 \wedge p_2 \wedge p_3. \quad (5.11)$$

同時，我們也可以觀察其代數上的結構。最簡單的範例便是 X 為座標 $\mathbf{x} = (a, b, c)$ ，其為平面 $x = a$ 、 $y = b$ 及 $z = c$ 之交點，故有：

$$\begin{aligned} a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3 &\xrightarrow{\text{PGA}} X = (\mathbf{e}_1 - a\mathbf{e}_0) \wedge (\mathbf{e}_2 - b\mathbf{e}_0) \wedge (\mathbf{e}_3 - c\mathbf{e}_0) \\ &= \mathbf{e}_{123} - a\mathbf{e}_{023} - b\mathbf{e}_{103} - c\mathbf{e}_{120} \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$= (1 + \mathbf{x}\mathbf{e}_0)I_3 \quad (5.13)$$

$$= (\mathbf{e}_0 + a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3)^* . \quad (5.14)$$

其中有歐氏空間的質純量 $I_3 = \mathbf{e}_{123}$ 。利用此計算，我們也可以用來解一次聯立方程式、解釋克拉瑪公式。對於以下三元一次聯立方程式：

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1\mathbf{e}_1 + b_1\mathbf{e}_2 + c_1\mathbf{e}_3 - d_1\mathbf{e}_0 \\ a_2\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + c_2\mathbf{e}_3 - d_2\mathbf{e}_0 \\ a_3\mathbf{e}_1 + b_3\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3 - d_3\mathbf{e}_0 \end{cases} ,$$

透過(5.11)得其解為三平面交點：

$$X = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_{123} - \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_{023} - \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_{103} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_{120} ,$$

將 \mathbf{e}_{123} 的係數行列式除過去便是克拉瑪公式。另外，我們也可以視三平面交點為一平面與一線交點。同時我們可以探討可能的「例外」。當 \mathbf{e}_{123} 的係數為 0，則 $X = a\mathbf{e}_{023} + b\mathbf{e}_{103} + c\mathbf{e}_{120}$ 表示「無窮遠點」。可以注意到，因為 \mathbf{e}_{123} 係數趨於 0^+ 和 0^- 剛好讓點的移動方向為反向， X 其實對應到幾何上對蹠的無窮遠點對。同時，無窮遠點也可以視為是方向，而非真正的點。

5.4 平面射影幾何代數中的對偶

透過霍奇對偶，我們得以了解 PGA 中的各個幾何物件的關係。例如(5.14)我們就可看出點可以視為是平面的對偶，那麼一物件與其對偶後的幾何關係為何呢？我們分析如下：首先，各個標準基底刃的對偶關係為 $MM^* = I = e_{0123}$ ，列表如下。

M	M^*	M	M^*	M	M^*	M	M^*
1	e_{0123}	e_3	$-e_{120}$	e_{12}	e_{03}	e_{023}	e_1
e_0	e_{123}	e_{01}	e_{23}	e_{23}	e_{01}	e_{103}	e_2
e_1	$-e_{023}$	e_{02}	e_{31}	e_{31}	e_{02}	e_{120}	e_3
e_2	$-e_{103}$	e_{03}	e_{12}	e_{123}	$-e_0$	e_{0123}	1

表 5.1: 三維 PGA 標準基底刃對偶關係

而幾何上，這些對偶關係可見圖5.2：左圖中可以見得平面與點互為對偶，平面 $p = n + \delta e_0$ 的對偶代表著座標點 x ，其中 n 平行 x 、 $|x| = \delta^{-1}$ ；右圖中可以見得直線的對偶為與其垂直歪斜的另一條直線，且它們各自到原點的最短距離向量 d_1 與 d_2 平行，長度滿足 $|d_1|^{-1} = |d_2|$ 。

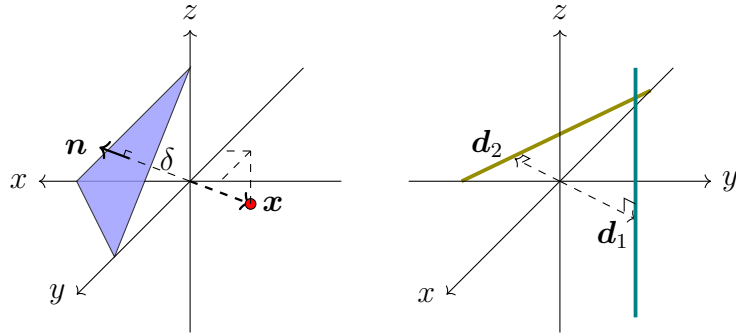


圖 5.2: 三維 PGA 對偶關係

對於傅立葉轉換熟悉者可能會發現，對偶的關係與連續脈衝 (impulse train) 的傅立葉轉換十分相似：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nk) \xrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} \delta(x' - n\frac{1}{k}),$$

其中傅立葉轉換定義為 $\mathcal{F}\{f(x)\}(x') = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi x x'} dx$ 。在本講義撰寫之時，傅立葉轉換與 PGA 對偶的關係還有待釐清。

5.5 連接

前面提即外積可以表示兩幾何物件的相交，那麼如何描述兩幾何物件的連接 (join) 呢？我們首先觀察到對於點 $X(0 \text{ 維})$ 、與物件 $Y(d \text{ 維})$ 的回歸積。假設是考慮 n 維空間中的 PGA，兩物件的級數為：

$$\text{grade}(X) = n, \quad \text{grade}(Y) = n - d。$$

它們回歸積的級數為

$$\begin{aligned} \text{grade}(X \vee Y) &= \text{grade}((X^* \wedge Y^*)^{-*}) = (n+1) - \text{grade}(X^* \wedge Y^*) \\ &= (n+1) - ((n+1-n) + (n+1-n+d)) = n - (d+1), \end{aligned}$$

其應為一 $d+1$ 維物件。再觀察其對應的內積零空間點 \mathbf{x} 滿足：

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \mathcal{IN}(X \vee Y) &\leftrightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{ON}(X^* \wedge Y^*) \\ &\leftrightarrow \mathcal{X}(\mathbf{x}) \wedge X^* \wedge Y^* = 0 \\ &\leftrightarrow (\mathcal{X}(\mathbf{x}) \cdot X)^* \wedge Y^* = -(\mathcal{X}(\mathbf{x}) \cdot Y)^* \wedge X^* = 0。 \end{aligned}$$

上式成立的充分條件在於 \mathbf{x} 位於 $\mathcal{IN}(X)$ 與 $\mathcal{IN}(Y)$ 內。因此 $X \vee Y$ 為同時包含 X 與 Y 的物件。由上述討論加上回歸積滿足結合律與反交換律，可以得知回歸積 \vee 即代表了幾何物件間的連接：三維中有兩點連線、三點連面、一點與一線連面；若 X_1 、 X_2 、 X_3 為點，則有線 $L = X_1 \vee X_2$ 、面 $p = X_1 \vee X_2 \vee X_3 = L \vee X_3$ 。

一範例如下：若二維中有兩點座標 $(x, y) = (a, 0)$ 和 $(0, b)$ ，其 PGA 表示法為

$$X_1 = \mathbf{e}_{12} - a\mathbf{e}_{02}, \quad X_2 = \mathbf{e}_{12} - b\mathbf{e}_{10}。$$

則兩者之連線為

$$X_1 \vee X_2 = ((\mathbf{e}_0 + a\mathbf{e}_1) \wedge (\mathbf{e}_0 + b\mathbf{e}_2))^{-*} = -a\mathbf{e}_2 - b\mathbf{e}_1 + ab\mathbf{e}_0,$$

亦即直線 $-ay - bx + ab = 0$ 。

5.6 平面簇

這裡有個需要澄清的概念：先前在3.6.1提及「 k 級刃」所表示的子空間時，我們用外積表示子空間的聯集、回歸積表示子空間的交集；此與平面射影幾何代數的幾何詮釋規則恰恰相反？

簡而言之，刃的子空間大小與其所詮釋的幾何完全不同，但兩者之間有密切的聯繫。此關係可以協助我們理解先前與接下來的公式與概念。在平面射影幾何代數中，我們最基本的三維幾何物件即是平面³²，以向量表示之。因為直線為兩平面的外積，為兩平面子空間的聯集，因此可以視之為一整簇³³的平面，見下圖5.3a。一直線代表了包含該直線的所有平面的集合，是為一簇。同理，點所代表的子空間為所有通過該點的平面，是為一簇，見下圖5.3b。

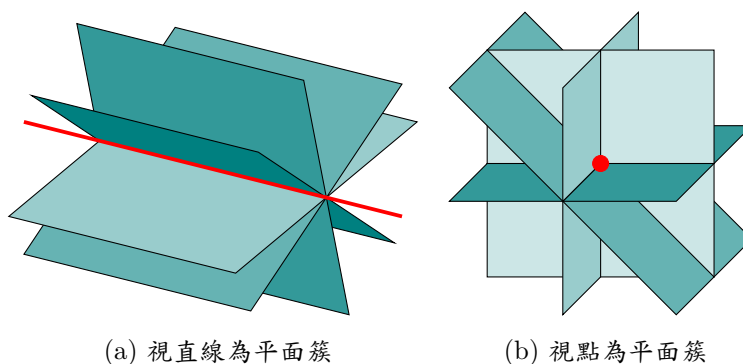


圖 5.3: 平面簇

透過平面簇的概念，也可圖像化去理解為何回歸積為連接。見下圖5.4，兩點的平面簇之間進行回歸積即是共同的平面簇，也可稱為尋求平面子空間的交集。因此可輕易看出交集（橘色、紅色的平面）為線的平面簇。

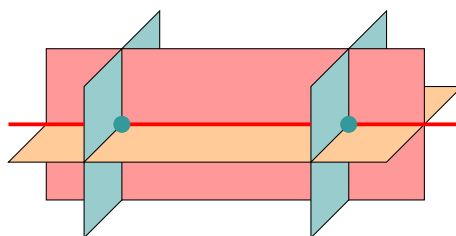


圖 5.4: 以平面簇理解連接

³² 三維中的基底是平面，故討論平面簇。若在二維，則基底為線，故討論線簇。

³³ 我不太確定除了「簇」外，怎樣稱呼之最為適當。看看有沒有人有更好的想法？

5.7 物件間的幾何關係

5.7.1 權重

因為我們使用的是射影幾何 (齊次座標)，因此任一幾何物件經過縮放後代表的幾何意義不變。再進行幾何物件間的線性組合時，權重的概念便非常重要。權重即是模長，我們先前已看過在 $\mathcal{G}_{3,0,1}$ 有：

$$||M|| := \sqrt{MM^\dagger} \equiv \sqrt{M\tilde{M}}, \quad (5.15)$$

但此模對於平方為零的多重向量無用，因此我們引入零模 (infinity norm / ideal norm / vanishing norm) 定義為：

$$||M||_\infty := ||e^0 \cdot M|| \equiv ||M^\star||. \quad (5.16)$$

考慮 T 和 P 為 \mathcal{G}_3 中的多重向量，則對於 $\mathcal{G}_{3,0,1}$ 中的多重向量 $A = T + e_0 P$ 我們有：

$$||A|| = ||T|| \qquad ||A||_\infty = ||P||, \quad (5.17)$$

因此可以視之為將一個幾何物件進行分解³⁴：分成包含「方向」資訊的 T 與「位置」資訊的 P 。以三維中的點、線、面為例：(其中 $I = e_{0123}$ 、 $I_3 = e_{123}$ 、粗體為 \mathcal{G}_3 向量)

物件	PGA 表示法	方向	位置
點	$e_{123} - ae_{023} - be_{103} - ce_{120}$ $= e_{123} + \boldsymbol{x}I$ $= (1 + \boldsymbol{x}e_0)I_3$	原點： e_{123}	x 座標： ae_{023} y 座標： be_{103} z 座標： ce_{120}
線	$L = \boldsymbol{u}I_3 - e_0\boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{u}I_3)$	直線方向： \boldsymbol{u}	線上一點： \boldsymbol{p}
面	$ae_1 + be_2 + ce_3 - de_0$ $= \boldsymbol{n} - de_0$	法向量： \boldsymbol{n}	到原點距離： $\frac{d}{ \boldsymbol{n} }$

表 5.2: 物件之方向與位置分量

³⁴ 可以檢查上方表格中點、線、面的 PGA 表示法，及前面的點、線、面，包含 e_0 的分量皆表示位置，剩餘的則表示該幾何物件的方向。

5.7.2 投影

在線性代數中，我們學過將向量 \mathbf{a} 投影在 \mathbf{b} 上的方法為：

$$\mathcal{P}_b(\mathbf{a}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}^{-1}。 \quad (5.18)$$

若 $\mathbf{b}^2 = 1$ ，則上方結果可以寫作 $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}$ ，亦稱為 \mathbf{a} 在 \mathbf{b} 上的正射影。相似的結果也存在於 PGA 中。將上式(5.18)中的 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 替換成 PGA 中的任意點、線、面皆能代表幾何上物件之間的投影。幾何物件 A 相對於 B 的投影為：

$$\mathcal{P}_B(A) = (A \cdot B)B。 \quad (5.19)$$

最簡單的範例為二維中點與直線之間的投影。透過線簇的方式思考，我們可將此問題如圖5.5的方式拆解。考慮點 $P = l_1 \wedge l_2$ 與線 L 。其中 l_1 垂直 l_2 ，因此亦可寫作 $P = l_1 l_2$ ； L 平行 l_1 ，因此 $L \cdot l_1$ 為一非零純量。兩者的投影數學上寫作： $\mathcal{P}_P(L) = (L \cdot l_1 l_2)l_1 l_2 \sim (l_2)(l_1 l_2) \sim l_1$ 。

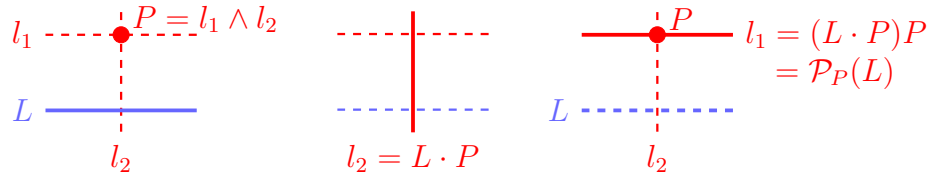


圖 5.5: 線在點上的投影

反過來，點在線上的投影則如下圖5.6，數學上寫作： $\mathcal{P}_L(P) = (P \cdot L)L \sim l_2 L = l_2 \wedge L = P'$ 。

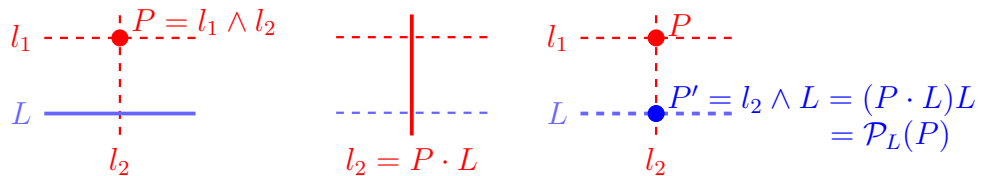


圖 5.6: 直線在點上的排斥

讀者可自行嘗試三維中各幾何物件間的投影關係。

5.7.3 長度與面積

對於權重為 1 的點 ($\|P\| = 1$)，我們可以將任意數個進行連接得到線與平面。任兩點 P_1 、 P_2 連接得到的直線 L 長度為：

$$L \text{ 的長度} = \|L\| = \|P_1 \vee P_2\|。 \quad (5.20)$$

若是在一平面上，由以上建構方式得到的數個直線圍出的 n 邊形面積為：

$$\text{面積} = \frac{1}{2!} \left\| \sum_{i=1}^n L_i \right\|_{\infty}。 \quad (5.21)$$

同樣地，任三點 P_1 、 P_2 、 P_3 連接得到的平面 p 面積為：

$$p \text{ 的面積} = \frac{1}{2!} \|p\| = \frac{1}{2!} \|P_1 \vee P_2 \vee P_3\|。 \quad (5.22)$$

由以上建構方式得到的數個平面圍出的 n 面體體積為：

$$\text{體積} = \frac{1}{3!} \left\| \sum_{i=1}^n p_i \right\|_{\infty}。 \quad (5.23)$$

一簡單的二維範例如下：考慮有頂點座標 $P_0(0,0)$ 、 $P_1(a,0)$ 、 $P_2(0,b)$ 的平面三角形。此三點在 PGA 中的單位表示法為 $P_0 = e_{12}$ 、 $P_1 = e_{12} - ae_{02}$ 、 $P_2 = e_{12} - be_{10}$ 。則它們的連線依序為：

$$L_{01} = (e_{12}) \vee (e_{12} - ae_{02}) = ae_2、$$

$$L_{12} = (e_{12} - ae_{02}) \vee (e_{12} - be_{10}) = -ae_2 - be_1 + abe_0、$$

$$L_{20} = (e_{12} - be_{10}) \vee (e_{12}) = be_1。 \quad (5.24)$$

因此有三角形周長： $\|L_{01}\| + \|L_{12}\| + \|L_{20}\| = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$ 與面積 $\frac{1}{2!} \|abe_0\|_{\infty} = \frac{1}{2} ab$ 。

另外，習慣上我們稱呼權重為 1 的點、線、面為單位點、線、面。對於點亦即 e_{123} 係數為 1，表示為 $(1 + xe_0)I_3$ ；對於線即為有方向單位向量 u ，表示為 $uI_3 - e_0p \cdot (uI_3)$ ；對於平面即表示有單位法向量 n ，表示為 $n - \delta e_0$ 。

5.8 運動學

以下我們將討論透過平面射影幾何代數描述點、線、面在空間中的鏡射、旋轉、平移，相關內容會在最後與附錄 B 和附錄 C 做連結。

5.8.1 鏡射

首先觀察當我們將一平面透過另一平面進行包夾積：將平面 $x = \mathbf{m} - \delta' \mathbf{e}_0$ 用平面 $p = \mathbf{n} - \delta \mathbf{e}_0$ 包夾

$$\begin{aligned} p x p &= (\mathbf{n} - \delta \mathbf{e}_0)(\mathbf{m} - \delta' \mathbf{e}_0)(\mathbf{n} - \delta \mathbf{e}_0) \\ &= \mathbf{n} \mathbf{m} \mathbf{n} + (-\delta' \mathbf{n}^2 + \delta(\mathbf{n} \mathbf{m} + \mathbf{m} \mathbf{n})) \mathbf{e}_0 \\ &= - \left[-\mathbf{n} \mathbf{m} \mathbf{n} - (\delta' - 2\delta \cos \theta) \mathbf{e}_0 \right] \end{aligned}$$

與圖 5.7 進行對照參考，可以見得鏡射後的新平面至原點的法向量為 $-\mathbf{n} \mathbf{m} \mathbf{n}$ 方向、至原點的距離為：

$$\begin{aligned} (2\delta \mathbf{n} - \delta' \mathbf{n} \mathbf{m} \mathbf{n}) \cdot (-\mathbf{n} \mathbf{m} \mathbf{n}) &= (-\mathbf{n}(2\delta \mathbf{n} - \delta' \mathbf{n} \mathbf{m} \mathbf{n}) \mathbf{n}) \cdot (-\mathbf{n}(-\mathbf{n} \mathbf{m} \mathbf{n}) \mathbf{n}) \\ &= (-2\delta \mathbf{n} + \delta' \mathbf{m}) \cdot \mathbf{m} = \delta' - 2\delta \cos \theta \end{aligned}$$

因此若要將平面 x 透過平面 p 鏡射，則有： $x \mapsto p x p$ 。

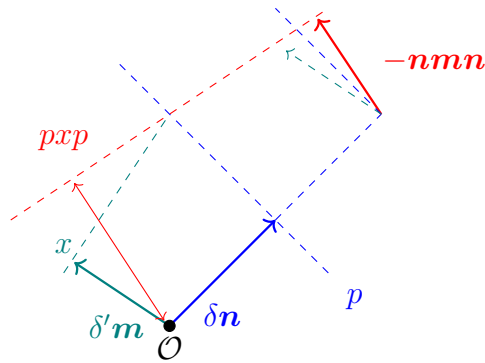


圖 5.7: 平面鏡射

接著，透過外同態，我們可以延伸對於任意 X 為點、線或面，通過平面 p 進行鏡射為：

$$X \mapsto p X p. \quad (5.24)$$

5.8.2 平移

考慮兩平行單位平面 $p_1 = \mathbf{n} - \delta_1 \mathbf{e}_0$ 與 $p_2 = \mathbf{n} - \delta_2 \mathbf{e}_0$ ，則物件 X 通過兩者鏡射後將為：

$$X \mapsto p_2 p_1 X p_1 p_2 ,$$

幾何上此為平移運動。我們考慮以下物件為「平移子 (translator)」：

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} - \delta_2 \mathbf{e}_0)(\mathbf{n} - \delta_1 \mathbf{e}_0) &= 1 - \mathbf{e}_0(\delta_2 - \delta_1)\mathbf{n} \\ &= 1 - \mathbf{e}_0 \frac{\mathbf{t}}{2} \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$= e^{-\mathbf{e}_0 \mathbf{t}/2} , \quad (5.26)$$

其中平移向量 $\mathbf{t} = 2(\delta_2 - \delta_1)\mathbf{n}$ ，距離為兩倍的兩平面間距。因此有平移：

$$X \mapsto \left(1 - \mathbf{e}_0 \frac{\mathbf{t}}{2}\right) X \left(1 + \mathbf{e}_0 \frac{\mathbf{t}}{2}\right) = e^{-\mathbf{e}_0 \mathbf{t}/2} X e^{\mathbf{e}_0 \mathbf{t}/2} . \quad (5.27)$$

5.8.3 旋轉

若兩單位平面不平行，則視兩次鏡射為旋轉。其中 $p_2 p_1$ 為轉子：

$$\begin{aligned} p_2 p_1 &= (\mathbf{n}_2 - \delta_2 \mathbf{e}_0)(\mathbf{n}_1 - \delta_1 \mathbf{e}_0) \\ &= \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_1 + (\mathbf{n}_2 - \delta_2 \mathbf{e}_0) \wedge (\mathbf{n}_1 - \delta_1 \mathbf{e}_0) \\ &= \cos \frac{\theta}{2} - L \sin \frac{\theta}{2} = e^{-L\theta/2} . \end{aligned} \quad (5.28)$$

2θ 為兩平面 (法向量) 夾角、 L 為兩平面單位交線使得 $L^2 = -1$ 。此運動即視為繞著兩平面交線為旋轉軸，旋轉 θ ：

$$X \mapsto e^{-L\theta/2} X e^{L\theta/2} . \quad (5.29)$$

另外，平移可以視為是對無窮遠點的轉動。

5.8.4 點對稱

三次鏡射 $X \mapsto p_3 p_2 p_1 X p_1 p_2 p_3$ 可視為將物件 X 透過點 $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$ 進行點對稱變換，亦被稱為點鏡射 (point reflection)。

5.8.5 螺旋運動

四次鏡射表示一個剛體在空間中的平移加上旋轉運動，亦即任意位移運動。我們知道空間中的位移可以視為繞著一條線旋轉加上在該線方向上的平移，因此可以將平移化簡如下：有一單位直線 $L = (\mathbf{n}_1 - \delta_1 \mathbf{e}_0) \wedge (\mathbf{n}_2 - \delta_2 \mathbf{e}_0) / \sin \frac{\theta}{2}$ ，且 $I = \mathbf{e}_{0123} = \mathbf{e}_0 I_3$ ，則有

$$LI = (\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{n}_2)(\mathbf{e}_0 I_3) / \sin \frac{\theta}{2} = (\mathbf{u} I_3)(-I_3 \mathbf{e}_0) = -\mathbf{e}_0 \mathbf{u}。$$

其中 \mathbf{u} 為該直線之方向向量，其與旋轉方向滿足右手定則。又因為 $L(LI) = (LI)L$ ，由此，當我們要描述沿著單位直線 L 的方向 \mathbf{u} 平移距離 t 並繞著該線轉動角度 θ 的運動時，此變化可透過：

$$M = e^{LI t/2} e^{-L\theta/2} = e^{-L(\theta/2 - It/2)} = e^{-L\theta/2} e^{LI t/2}$$

描述，我們稱其為螺旋子 (screw) 或運動子 (motor / moment and vector)，變換為：

$$X \mapsto MX\tilde{M}。 \quad (5.30)$$

5.8.6 歐氏運動

定理：卡當-迪厄多內定理 (Cartan-Dieudonné Theorem)

n 維空間中的任一正交變換皆可由至多 n 個鏡射描述。

由此我們可以得知透過至多四次鏡射即可得到歐幾里得群 $E(3)$ 中的所有變換：鏡射、旋轉、平移變換。同時，偶數次鏡射的變換：旋轉、平移則為特殊歐幾里得群 $SE(3)$ 之元素。然而，如同單位四元數 \mathbb{H}_1 雙重覆蓋三維旋轉群 $SO(3)$ ，以上的變換在 PGA 的表示法中皆是透過包夾積的方式進行變換，因此 p 或 $-p$ 造成的變換影響相同，故其野雙重覆蓋 $E(3)$ 。

更嚴謹來說，對於向量 $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^{p,q,r}$ ，且 $\|\mathbf{u}_i\| = 1$ ，則我們稱 k 次鏡射的變換為 $\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_k \in \text{Pin}(p, q, r)$ 。 $\text{Pin}(p, q, r)$ 即是表示 k 次連續鏡射的變換群。若鏡射次數為偶數、變換行列式為 1，則我們另外稱變換所在的群為 $\text{Spin}(p, q, r)$ 。 $\text{Pin}(3, 0, 1)$ 即我們包含小節討論的所有變換，其雙重覆蓋 $E(3)$ ；而 $\text{Spin}(3, 0, 1)$ 則僅包含平移、旋轉和螺旋運動，其雙重覆蓋 $SE(3)$ 。

6 保角幾何代數

平面射影幾何代數引入了點、線、面的幾何形狀以及鏡射、平移、旋轉、螺旋等運動。我們將在此介紹保角幾何代數 (conformal geometric algebra, CGA)，其在 PGA 上引入了球這個幾何形狀，並且新增了球反演 (sphere inversion) 的變換。

6.1 球極平面投影

如同先前 PGA 討論零空間需要有個 \mathcal{X} 映射升維至射影空間，我們也需要一個 CGA 的升維函數。在此，我們介紹一個將 n 維平面 \mathbb{R}^n 與 $n+1$ 維空間中的 n 維單位球面 S^n 之間映射的函數。此稱為球極平面投影變換 (stereographic projection)。

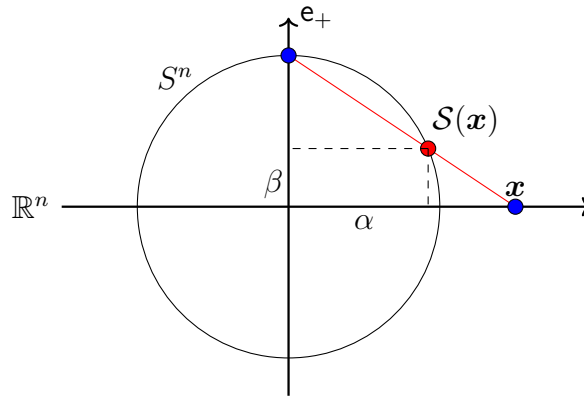


圖 6.1: 球極平面投影

先觀察上圖6.1，我們透過球極平面投影函數 S 將空間中的點映射到高維球面上，並記多出來的維度單位向量為 e_+ ，其中 $e_+^2 = 1$ 。則有 $S(x) = \alpha \hat{x} + \beta e_+$ ，座標 α 、 β 滿足

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 1 \\ |\mathbf{x}|/1 = \alpha/(1 - \beta) \end{cases} \rightarrow \alpha = \frac{2|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|^2 + 1}, \beta = \frac{|\mathbf{x}|^2 - 1}{|\mathbf{x}|^2 + 1}$$

故得到：

$$S(x) := \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} e_+ . \quad (6.1)$$

注意，上述推論對於任意維度皆成立。

將點投影到球面上後，如同 PGA 的操作：使用齊次座標系 (homogeneous coordinates) 的表示法，再增加一個座標 e_- (其中 $e_-^2 = -1$) 以方便從高維到低維進行投影，並

且前面乘上任何非零係數將不會改變物件所代表的幾何。此升維變換如下：

$$\mathcal{H}(S(x)) := \frac{1}{2}(x^2 + 1)(S(x) + e_-) \quad (6.2)$$

在 CGA 的探討中，我們常引入兩個新的向量：

$$e_\infty := e_- + e_+, e_0 := \frac{1}{2}(e_- - e_+), \quad (6.3)$$

其滿足 $e_\infty^2 = e_0^2 = 0$ 、 $e_\infty \cdot e_0 = -1$ 。有了以上標記，我們記完整的升維投影變換 (up-projection)³⁵ 為：

$$\mathcal{X}(x) := \mathcal{H} \circ S(x) = x + \frac{1}{2}x^2 e_\infty + e_0 \quad (6.4)$$

上述的各個映射關係彙整如下。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{S} & S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \\ & \searrow \mathcal{X} = \mathcal{H} \circ S & \downarrow \mathcal{H} \\ & & \mathcal{G}_{n+1,1,0}^1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{S} & \frac{2x}{x^2+1} + \frac{x^2-1}{x^2+1}e_+ \\ & \searrow \mathcal{X} & \downarrow \mathcal{H} \\ & & x + \frac{1}{2}x^2 e_\infty + e_0 \end{array}$$

新引入的基底在乘積上有許多較不直覺的結論，在此彙整以方便日後公式推導的流暢。

$$e_- = 2e_\infty + e_0, e_+ = 2e_\infty - e_0 \quad (6.5)$$

$$e_\infty^2 = e_\infty \cdot e_\infty = e_0^2 = e_0 \cdot e_0 = 0 \quad (6.6)$$

$$e_\infty \cdot e_0 = -1 \quad (6.7)$$

$$e_{\infty 0} := e_\infty \wedge e_0 = e_+ \wedge e_- =: e_{+-} \quad (6.8)$$

切記，因為我們在偽歐氏空間 $\mathbb{R}^{n+1,1}$ 中，兩垂直等長向量的相加減不一定垂直，例如：雖然 $e_+ \perp e_-$ ($e_+ \cdot e_- = 0$)，但是 $(e_+ + e_-) \cdot (e_+ - e_-) = 2$ 。且模長的定義是用共軛，如：

$$\begin{aligned} \|e_\infty\| &= \sqrt{e_\infty e_\infty^\dagger} \\ &= \sqrt{(e_- + e_+)(-e_- + e_+)} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

³⁵ 升維投影 up-projection 在文獻中亦稱為 conformal embedding 或 Hestenes' embedding [Per09]。

6.2 零錐

一個 \mathbb{R}^n 向量 \mathbf{x} 可以升維投影為 $\mathcal{G}_{n+1,1,0}$ 中的向量：

$$X = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0. \quad (6.9)$$

若考慮擴展實數域 (extended reals) $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ ，亦即包含無窮遠點的歐氏空間，則有：

$$\mathbf{e}_\infty \sim \mathcal{X}(\infty) = \mathcal{H}(\mathbf{e}_+) . \quad (6.10)$$

$$\mathbf{e}_0 = \mathcal{X}(0) = \mathcal{H}(-\mathbf{e}_+) . \quad (6.11)$$

如同 PGA 中的標記，兩多重向量 $A \sim B$ 即表示兩者僅差一非零倍率。另外，使用符號數為負的的齊次基底 $\mathbf{e}_-^2 = -1$ 將導致以下結論：

$$\begin{aligned} (\alpha\mathcal{X}(\mathbf{x}))^2 &= \alpha^2 (\mathcal{S}(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_-)^2 \\ &= \alpha^2 \left((\mathcal{S}(\mathbf{x}))^2 + \mathbf{e}_-^2 \right) \\ &= \alpha^2 (1 - 1) = 0 , \end{aligned}$$

因此所有的 $\mathcal{X}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$) 皆為核向量 (null vector)³⁶。又因其伸縮任意 α 仍為核向量， $\mathcal{X}(\mathbf{x})$ 形成一在 $\mathbb{R}^{n+1,1}$ 中的「零錐 (null cone)³⁷」，標記為：

$$\mathbb{K}^{n+1} := \{X \in \mathbb{R}^{n+1,1} \mid X^2 = 0\} \equiv \{\alpha\mathcal{X}(\mathbb{R}^n) \mid \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} . \quad (6.12)$$

在零錐上的向量 $X = \alpha\mathcal{X}(\mathbf{x}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ 皆存在反映射 $\mathcal{X}^{-1} : \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 為³⁸

$$\mathcal{X}^{-1} : X \mapsto \mathcal{P}_{\mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0}^\perp \left(\frac{X}{-X \cdot \mathbf{e}_\infty} \right) = -\frac{\sum_{j=1}^3 (X \cdot \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_j}{-X \cdot \mathbf{e}_\infty} , \quad (6.13)$$

$$\mathcal{X}^{-1}(X) = \mathcal{P}_{\mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0}^\perp \left(\frac{\alpha(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0)}{-(-\alpha)} \right) = \mathcal{P}_{\mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0}^\perp \left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 \right) = \mathbf{x} , \quad (6.14)$$

其中 $\mathcal{P}_{\mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0}^\perp$ 為垂直投影運算子取出多重向量中不在 $\mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0$ 平面上的分量 (見圖6.3)。

³⁶ 此處的核向量定義為平方等於零者。

³⁷ 所有位於 \mathbb{R}^n 中的向量透過 \mathcal{X} 皆被映射至一高維度錐體上 (見圖6.2)。

³⁸ 與升維投影變換相對應， \mathcal{X}^{-1} 稱為降維投影變換 (down-projection)。

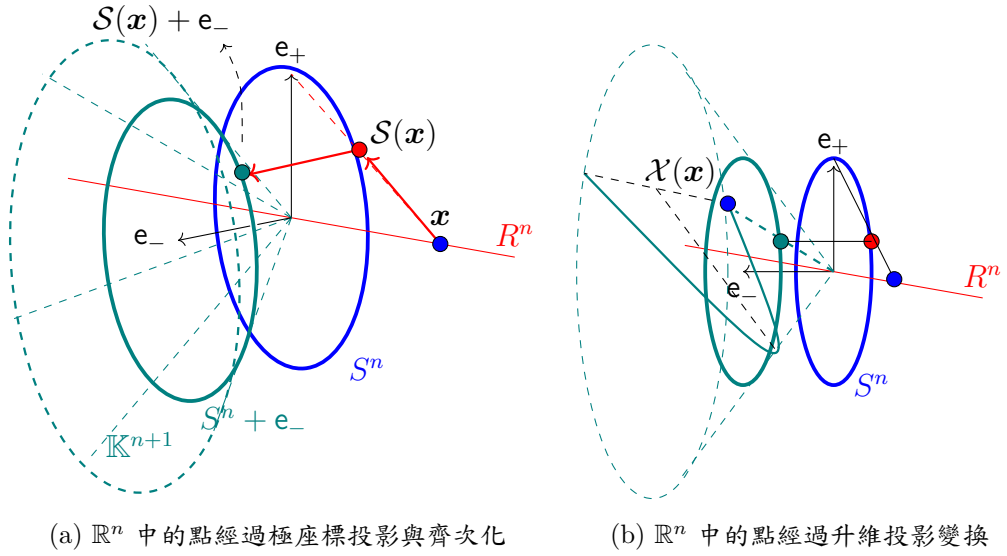


圖 6.2: 零錐

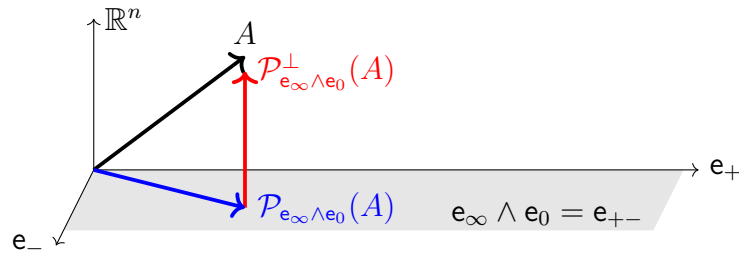


圖 6.3: 垂直投影運算子

6.3 內積零空間表示法

如同 PGA，我們將先透過內積零空間表示法賦予 $\mathcal{G}_{4,1,0}$ 中的多重向量在 \mathcal{R}^3 中的幾何意義。我們往後將侷限於 \mathbb{R}^3 中。

首先，考慮 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ ，令 $A = \mathcal{X}(\mathbf{a})$ 、 $B = \mathcal{X}(\mathbf{b})$ 。觀察：

$$A \cdot B = \left(\mathbf{a} + \frac{1}{2} \mathbf{a}^2 \mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 \right) \cdot \left(\mathbf{b} + \frac{1}{2} \mathbf{b}^2 \mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 \right) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \frac{1}{2} \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 = -\frac{1}{2} \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2, \quad (6.15)$$

可以見得兩個 CGA 中的向量內積給予了我們其對應在歐氏空間中向量的距離。此結果對於推導幾何詮釋十分重要。

6.3.1 一級點

對於在零錐上的向量 $A \in \mathbb{K}^4 \subset \mathcal{G}_{4,1,0}$ ，因為其為核向量，故其內積零空間即是其降維投影：

$$\mathcal{IN}(A) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathcal{X}(\mathbf{x}) \cdot A = 0\} = \mathcal{X}^{-1}(A) = \mathbf{a}。 \quad (6.16)$$

搭配(6.10)和(6.11)，我們也可得知 \mathbf{e}_∞ 表示無窮遠點、 \mathbf{e}_0 表示原點。

6.3.2 一級球

對於 $A := \mathcal{X}(\mathbf{a}) \in \mathbb{K}^4$ ，考慮一偏離零錐的向量 $S \in \mathcal{G}_{4,1,0}^1$ ：

$$S := \mathbf{A} - \frac{1}{2}\rho^2\mathbf{e}_\infty， \quad (6.17)$$

$\rho \in \mathbb{R}$ 。若 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ 位於 S 的內積零空間中，則：記 $X = \mathcal{X}(\mathbf{x})$ ，

$$\begin{aligned} S \cdot X &= A \cdot X - \frac{1}{2}\rho^2\mathbf{e}_\infty \cdot X \\ &= -\frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{x})^2 + \frac{1}{2}\rho^2， \end{aligned}$$

亦即：

$$S \cdot X = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{a} - \mathbf{x})^2 = \rho^2， \quad (6.18)$$

此即以 \mathbf{a} 為球心、半徑為 ρ 的球。另外對於任意倍率 $\alpha \neq 0$ ， αS 也代表同樣的球，可寫作 $\alpha S \sim S$ 。我們也可由(6.17)中看出，點即是半徑為 0 的球。

另外，(6.17)中的 S 我們稱其為「歸一化的 (normalized)」球，滿足：

$$S^2 = A^2 - \rho^2 A \cdot \mathbf{e}_\infty = \rho^2。 \quad (6.19)$$

任何非歸一化的球都可透過以下方式歸一化：

$$S_{\text{normalized}} = \frac{S}{-S \cdot \mathbf{e}_\infty}。 \quad (6.20)$$

6.3.3 一級面

一平面可視為半徑無窮大、球心在無窮遠處的球。考慮某一平面 P ，其與原點的最短距離向量為 \mathbf{a} ，亦即該平面通過點 \mathbf{a} 且垂直 \mathbf{a} 。我們可以將此平面視為一個半徑為 ρ 、球心在 $\mathbf{a} - \rho\hat{\mathbf{a}}$ 的球取極限 $\rho \rightarrow \infty$ ，即：

$$\begin{aligned} P &\sim \lim_{\rho \rightarrow \infty} \mathcal{X}(\mathbf{a} - \rho\hat{\mathbf{a}}) - \frac{1}{2}\rho^2\mathbf{e}_\infty \\ &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} (\mathbf{a} - \rho\hat{\mathbf{a}}) + \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \rho\hat{\mathbf{a}})^2\mathbf{e}_\infty - \frac{1}{2}\rho^2\mathbf{e}_\infty \\ &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} -\rho\hat{\mathbf{a}} - \rho\mathbf{a}\hat{\mathbf{a}}\mathbf{e}_\infty \sim \hat{\mathbf{a}} + \|\mathbf{a}\|\mathbf{e}_\infty。 \end{aligned}$$

因此我們將一平面記為：

$$P = \hat{\mathbf{a}} + \|\mathbf{a}\|\mathbf{e}_\infty, \quad (6.21)$$

此表示法與 PGA 之平面極為相似。

另一個常用的平面表示法為：有兩點 $A = \mathcal{X}(\mathbf{a})$ 與 $B = \mathcal{X}(\mathbf{b})$ 。則

$$P = A - B \quad (6.22)$$

表示一個垂直於 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 向量且通過兩點中間的平面：

$$\begin{aligned} \because P \cdot X &= A \cdot X - B \cdot X = -\frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{x})^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{x})^2 \\ \therefore P \cdot X &= 0 \Leftrightarrow (\mathbf{a} - \mathbf{x})^2 = (\mathbf{b} - \mathbf{x})^2。 \end{aligned}$$

6.3.4 二級圓

我們先前在5.3節看過：在內積零空間表示法下，外積即表示幾何物間之間的相交。因此，一個圓即為兩個球的相交。考慮兩球 $S_1, S_2 \in \mathcal{G}_{4,1,0}^1$ ，有圓 $C = S_1 \wedge S_2$ 。若 S_1, S_2 相異，則 C 為兩者之交圓；若 S_1, S_2 交於一點，則 C 表示該點；若 S_1, S_2 不相交，則 C 為一虛圓 (imaginary circle)³⁹，我們將在後面描述 CGA 中的變換時提及其意義。

³⁹ 較複雜，因此在此省略。詳見 Perwass 參考書。

我們在此觀察僅交於一點的兩球。一個通過原點的球可以表示為：

$$S = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{a}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 - \frac{1}{2}\|\mathbf{a}\|^2\mathbf{e}_\infty = \mathbf{a} + \mathbf{e}_0,$$

則考慮兩交於原點的球： $S_1 = \alpha\mathbf{a} + \mathbf{e}_0$ 、 $S_2 = \beta\mathbf{a} + \mathbf{e}_0$ ， $\alpha \neq \beta$ 。則有相交

$$C = S_1 \wedge S_2 = (\alpha - \beta)\mathbf{a} \wedge \mathbf{e}_0,$$

顯然地， $C \cdot \mathbf{e}_0 = 0$ ，故其表示原點。但除此之外， C 仍包含了「兩球交點切平面」的法向量 \mathbf{a} 。事實上，形如 $\mathbf{n} \wedge \mathcal{X}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{n}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$) 的多重向量皆可以視為包含了通過點 \mathbf{x} 且法向量為 \mathbf{n} 的平面的資訊。

6.3.5 二級線

直線為兩平面相交。對於平面 $P_1 = \hat{\mathbf{a}} + \alpha\mathbf{e}_\infty$ 與 $P_2 = \hat{\mathbf{b}} + \beta\mathbf{e}_\infty$ ，其交線為

$$L = P_1 \wedge P_2 = \hat{\mathbf{a}} \wedge \hat{\mathbf{b}} + (\beta\hat{\mathbf{a}} - \alpha\hat{\mathbf{b}}) \wedge \mathbf{e}_\infty. \quad (6.23)$$

若兩平面平行，即 $\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{a}}$ ，則

$$L = (\beta - \alpha)\hat{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{e}_\infty$$

可以視為是一平面與無窮遠平面 \mathbf{e}_∞ 的交線，即無窮遠線。此外，無窮遠平面在 CGA 下可以視為是半徑無窮大的天球，無窮遠線可以視為是半徑無窮大的圓。可以見得，CGA 恰恰補足了 PGA 中對於無窮遠物件的描述，將其視為球與圓而非單純的面與線。

6.3.6 三級點對

三個球交於兩個點，故對於相異球 $S_1, S_2, S_3 \in \mathcal{G}_{4,1,0}^1$ ， $A = S_1 \wedge S_2 \wedge S_3$ 即是此點對 (point pair)。然而，點對在外積零空間表示法中比較簡單，我們將在下節看到。而若其中一點在無窮遠處 (如三平面相交)，則點對中的有限點亦被稱為「齊次點 (homogeneous point)」。

6.3.7 四級點

四個球交一個點，有相異球 $S_1, S_2, S_3, S_4 \in \mathcal{G}_{4,1,0}^1$ ，則 $S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge S_4$ 即是此點。

6.4 外積零空間表示法

接下來我們將透過外積零空間表示法賦予 $\mathcal{G}_{4,1,0}$ 中的多重向量在 \mathbb{R}^3 中的幾何意義。

外積零空間與內積零空間表示法恰為對偶 (公式(3.15))。因為對於任意 $A \in \mathcal{G}_{4,1,0}$ ：

$$A \wedge \mathcal{X}(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow A^* \cdot \mathcal{X}(\mathbf{x}) = 0,$$

其中對偶定義為：對於任意 $M \in \mathcal{G}_{4,1,0}$ ，定義 $I_5 := \mathbf{e}_{123+-} = \mathbf{e}_{123\infty 0}$ ，則

$$M^* = -I_5 M, \quad M^{-*} = I_5 M.$$

所以：

$$\mathcal{ON}(A) = \mathcal{IN}(A^*). \quad (6.24)$$

此外，因為內積零空間表示法中回歸積表示物件之間的連接、外積表示物件之間的相交，所以外積零空間表示法中為其對偶，外積表示物件之間的連接、回歸積表示物件之間的相交。

6.4.1 一級點

因為對任一向量 $A = \alpha(\mathcal{X}(\mathbf{a}))$ ， $A \wedge \mathcal{X}(\mathbf{a}) = 0$ ，一級點因此同時在內積與外積零空間表示法下都具有幾何意義。但內外積零空間表示法的差異在於：外積零空間僅與代數結構有關，內積零空間卻仰賴於空間的符號數/度規 (metric)。

6.4.2 二級點對

對於兩點 $A = \mathcal{X}(\mathbf{a})$ 與 $B = \mathcal{X}(\mathbf{b})$ ，讓 $X = A \wedge B$ ，則對於任意 $M \in \mathcal{G}_{4,1,0}$ ：

$$X \wedge M = 0 \Leftrightarrow M = \alpha A + \beta B \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

然而若 X 需要表示 \mathbb{R}^3 中的點，則其必須滿足 $X \cdot X = 2\alpha\beta A \cdot B = 0$ ，故有 $\alpha = 0$ 或 $\beta = 0$ 。因此我們可以得知 X 代表一個點對：

$$\mathcal{ON}(A \wedge B) = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}. \quad (6.25)$$

此外，齊次點為點對中一點在有限處、一點在無窮遠者，亦即對於 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ 且 $A = \mathcal{X}(\mathbf{a})$ ，有一齊次點：

$$H := A \wedge \mathbf{e}_\infty = \mathbf{a} \wedge \mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty, \quad (6.26)$$

$$\mathcal{ON}(H) = \{\mathbf{a}\}. \quad (6.27)$$

其中 $\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty$ 表示幾何中的齊次維度。切記，無窮遠點在 \mathbb{R}^3 中無法被表示。

6.4.3 三級圓

空間中三點決定唯一的圓。因此對於 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ 且 $A = \mathcal{X}(\mathbf{a})$ 、 $B = \mathcal{X}(\mathbf{b})$ 、 $C = \mathcal{X}(\mathbf{c})$ ：

$$K := A \wedge B \wedge C \quad (6.28)$$

即代表一通過該三點的圓。論證如下：因為 $\mathcal{ON}(K) = \mathcal{IN}(K^*)$ ， K^* 的級數為 2，其必為圓或線。又因顯然地，其通過 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ (如 $A \wedge K = 0$)，故其必為一圓。倘若其中一點在無窮遠處或三點共線，則 K 為直線 (然直線亦可視為半徑無窮遠之直線)。

6.4.4 三級線

考慮 $L = A \wedge B \wedge \mathbf{e}_\infty$ 。令 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ 、 $X = \mathcal{X}(\mathbf{x})$ ：

$$X \wedge L = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{e}_\infty + (\mathbf{x} \wedge (\mathbf{b} - \mathbf{a}) - \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0 = 0,$$

因右側兩項線性獨立，皆需要為零。第一項 $\mathbf{x} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{e}_\infty = 0$ 表示 $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)。第二項為零若且唯若：

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \wedge (\mathbf{b} - \mathbf{a}) - \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= 0 \Leftrightarrow (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) \wedge (\mathbf{b} - \mathbf{a}) - \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha + \beta)\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \end{aligned}$$

很顯然地，上式成立於 $\alpha + \beta = 1$ 。因此有直線的外積零空間表示法為：

$$\mathcal{ON}(A \wedge B \wedge \mathbf{e}_\infty) = \{\alpha(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{b} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}. \quad (6.29)$$

6.4.5 四級球

空間中四個點決定一球。故有球的外積零空間表示法為：

$$S = A \wedge B \wedge C \wedge D. \quad (6.30)$$

因為平面可視為半徑為無窮大之球，倘若四點共平面或有任一點為無窮遠點，則其為平面。

6.4.6 四級平面

如同對於直線的推導，有相異三點 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ 且 $A = \mathcal{X}(\mathbf{a})$ 、 $B = \mathcal{X}(\mathbf{b})$ 、 $C = \mathcal{X}(\mathbf{c})$ ，則 $P := A \wedge B \wedge C \wedge \mathbf{e}_\infty$ 為一平面：

$$\mathcal{ON}(P) = \{\alpha(\mathbf{a} - \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b} - \mathbf{c}) + \mathbf{c} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

最後，在此整理各個幾何物件之間的內、外積零空間表示法：

\mathcal{IN}	\mathcal{ON}	級數	基底數	基底
球 S (點 A)、 平面 P	點 A	1	5 4	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3,$ $\mathbf{e}_\infty, \mathbf{e}_0$
圓 $S_1 \wedge S_2$ 、 線 $P_1 \wedge P_2$	點對 $A \wedge B$ 、 齊次點 $A \wedge \mathbf{e}_\infty$	2	10 6/4	$\mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{31}, \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{1\infty}, \mathbf{e}_{2\infty},$ $\mathbf{e}_{3\infty}, \mathbf{e}_{10}, \mathbf{e}_{20}, \mathbf{e}_{30}, \mathbf{e}_{0\infty}$
點對 $S_1 \wedge S_2 \wedge S_3$ 、 齊次點 $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$	圓 $A \wedge B \wedge C$ 、 線 $A \wedge B \wedge \mathbf{e}_\infty$	3	10 4/6	$\mathbf{e}_{23\infty}, \mathbf{e}_{31\infty}, \mathbf{e}_{12\infty}, \mathbf{e}_{230}, \mathbf{e}_{310},$ $\mathbf{e}_{120}, \mathbf{e}_{10\infty}, \mathbf{e}_{20\infty}, \mathbf{e}_{30\infty}, \mathbf{e}_{123}$
點 $S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge S_4$	球 $A \wedge B \wedge C \wedge D$ 、 平面 $A \wedge B \wedge C \wedge \mathbf{e}_\infty$	4	5 4	$\mathbf{e}_{123\infty}, \mathbf{e}_{230\infty},$ $\mathbf{e}_{310\infty}, \mathbf{e}_{120\infty}, \mathbf{e}_{1230}$

○ 註記：藍色者與藍綠色者為延伸至無窮遠處者。

前者為內積零空間表示法，不可包含 \mathbf{e}_0 ；後者為外積零空間表示法，必須包含 \mathbf{e}_∞ 。

表 6.1: 幾何物件的內、外積零空間表示法

6.5 保角變換

透過 CGA 建構的幾何變換與 PGA 十分相似，也包含了平面鏡射、旋轉、平移。然而，新增加的球得以讓我們有對於球面的鏡射，稱為「反演 (inversion)」。

6.5.1 鏡射

對平面鏡射的結論與 PGA 中 5.8 節之結論十分相似，推導相同，在此僅羅列出結論。將任一幾何物件 $A \in \mathcal{G}_{4,1,0}$ 對平面 $P = \hat{\mathbf{a}} + \alpha \mathbf{e}_\infty$ 鏡射，為：

$$A \mapsto PAP. \quad (6.31)$$

6.5.2 平移

對於兩平行平面 $P_1 = \hat{\mathbf{a}} + \alpha_1 \mathbf{e}_\infty$ 、 $P_2 = \hat{\mathbf{a}} + \alpha_2 \mathbf{e}_\infty$ ，將任一幾何物件 $A \in \mathcal{G}_{4,1,0}$ 對兩者依次鏡射可以得到平移變換，為：

$$A \mapsto P_2 P_1 A P_1 P_2 = \left(1 - \frac{\mathbf{t}}{2} \mathbf{e}_\infty\right) A \left(1 + \frac{\mathbf{t}}{2} \mathbf{e}_\infty\right) = e^{-\mathbf{t} \mathbf{e}_\infty / 2} A e^{\mathbf{t} \mathbf{e}_\infty / 2}, \quad (6.32)$$

其中平移向量為 $\mathbf{t} = 2(\alpha_2 - \alpha_1)\hat{\mathbf{a}}$ 。

6.5.3 旋轉

對於兩不平行平面 $P_1 = \hat{\mathbf{a}}_1 + \alpha_1 \mathbf{e}_\infty$ 、 $P_2 = \hat{\mathbf{a}}_2 + \alpha_2 \mathbf{e}_\infty$ ，將任一幾何物件 $A \in \mathcal{G}_{4,1,0}$ 對兩者依次鏡射可以得到旋轉變換，為：定義 $\frac{\theta}{2}$ 為兩平面交角、 $L = P_1 \wedge P_2 / \sin \frac{\theta}{2}$ 為兩平面交線（兩者方向皆滿足右手定則），

$$A \mapsto P_2 P_1 A P_1 P_2 = e^{-L\theta/2} A e^{L\theta/2}. \quad (6.33)$$

6.5.4 反演

以上的變換皆為 E(3) 變換，在 PGA 中已可以描述。然 CGA 引入了球這個幾何物件，使我們得以不只對於平面鏡射，更可以「對球面鏡射」。此變換即為「球反演 (sphere inversion)」。

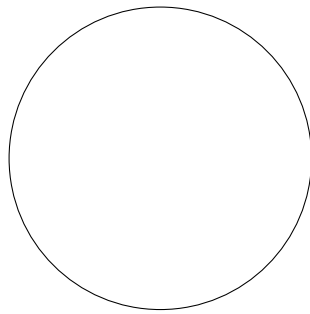


圖 6.4: 反演

考慮圖 6.4。

6.5.5 縮放

6.6 應用：機器人運動學（未完成）

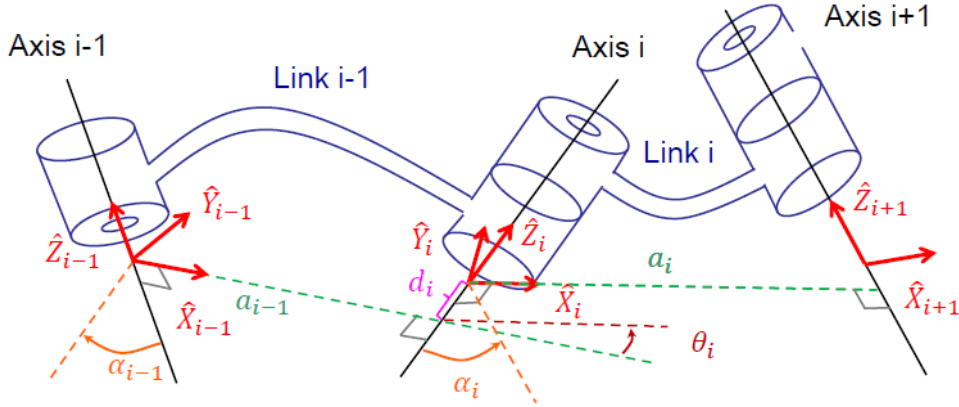


圖 6.5: 機器手臂之 D-H 參數

在描述機器手臂關節與關節之間的關係時，我們常用 D-H 參數 (Denavit-Hartenberg parameters) 來表達之。其定義如下：

定義：D-H 參數

見圖6.5，我們透過關節座標系定義關節參數 (α, a, d, θ) ：

- 沿著 \hat{X}_{i-1} 方向的螺旋運動：
 - α_{i-1} ：繞著 \hat{X}_{i-1} 軸，從 \hat{Z}_{i-1} 轉到 \hat{Z}_i 的角度；
 - a_{i-1} ：沿著 \hat{X}_{i-1} 軸，從 \hat{Z}_{i-1} 平移到 \hat{Z}_i 的距離（對於 $a_{i-1} \neq 0$ ）。
- 沿著 \hat{Z}_i 方向的螺旋運動：
 - d_i ：沿著 \hat{Z}_i 軸，從 \hat{X}_{i-1} 位移到 \hat{X}_i 的距離；
 - θ_i ：繞著 \hat{Z}_i 軸，從 \hat{X}_{i-1} 轉到 \hat{X}_i 的角度。
- $(\alpha, a, \theta, d) \in \mathbb{R}^4$ 。

透過 D-H 參數，我們得以轉換在 i 座標系下的座標到 $i-1$ 座標系，該座標轉換映射為：（細節見下節）

$${}^{i-1}_iT = \text{Rot}(\hat{x}_{i-1}, \alpha_{i-1}) \text{Trans}(\hat{x}_i, a_{i-1}) \text{Trans}(\hat{z}_i, d_i) \text{Rot}(\hat{z}_i, \theta_i) \in SE(3),$$

6.6.1 順向運動學

螺旋運動可透過旋轉與平移運動合成，是 $SE(3)$ 中的元素，因此可以用 4×4 矩陣描述之（見附錄 B）。座標系 i 為沿著座標系 $i-1$ 的 \hat{x}_{i-1} 軸方向旋轉 θ 角而得，則座標系 i 中的任一點座標可以透過以下變換變為座標系 $i-1$ 之座標表示法：

$$\text{Rot}(\hat{x}_{i-1}, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.34)$$

其中左上方 3×3 的 $SO(3)$ 矩陣即為沿著 \hat{x} 軸旋轉 θ 角的旋轉矩陣。同理可得其他的旋轉變換矩陣。接著，若座標系 i 為沿著座標系 $i-1$ 的 \hat{x}_{i-1} 軸方向平移距離 d 而得，則座標系 i 中的任一點座標可以透過以下變換變為座標系 $i-1$ 之座標表示法：

$$\text{Trans}(\hat{x}_{i-1}, d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.35)$$

其中右上方 3×1 的向量即為沿著 \hat{x} 軸平移距離 d 的平移向量。同理可得其他的平移變換矩陣。

將以上的矩陣依序疊加，並透過 D-H 參數可以得到以下的座標變換：

$$\begin{aligned} {}^{i-1}_iT &= \text{Rot}(\hat{x}_{i-1}, \alpha_{i-1}) \text{Trans}(\hat{x}_i, a_{i-1}) \text{Trans}(\hat{z}_i, d_i) \text{Rot}(\hat{z}_i, \theta_i) \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & a_{i-1} \\ \sin(\theta_i) \cos(\alpha_{i-1}) & \cos(\theta_i) \cos(\alpha_{i-1}) & -\sin(\alpha_{i-1}) & -\sin(\alpha_{i-1})d_i \\ \sin(\theta_i) \sin(\alpha_{i-1}) & \cos(\theta_i) \sin(\alpha_{i-1}) & \cos(\alpha_{i-1}) & \cos(\alpha_{i-1})d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

此即順向運動學 (forward kinematics, FK)：給予機器人每個關節之間的角度、長度等關係，一個一個關節依序得到整個機器人的姿態。

在 CGA 中，順向運動學的描述方式將不再使用矩陣描述，而是改用轉子與平移子：

$$\begin{aligned} R_{\alpha_{i-1}} &= e^{-\frac{\alpha_{i-1}}{2}(\hat{y}_{i-1} \wedge \hat{z}_{i-1})} , \\ T_{a_{i-1}} &= e^{-\frac{a_{i-1}}{2}(\hat{x}_{i-1} \wedge e_\infty)} , \\ T_{d_i} &= e^{-\frac{d_i}{2}(\hat{z}_i \wedge e_\infty)} , \\ R_{\theta_i} &= e^{-\frac{\theta_i}{2}(\hat{x}_i \wedge \hat{y}_i)} . \end{aligned}$$

兩個螺旋運動與座標變換則依次為：

$$\begin{aligned} M_{i-1} &:= R_{\alpha_{i-1}} T_{a_{i-1}} , \\ M_i &:= T_{d_i} R_{\theta_i} , \\ {}^{i-1}_i M &= M_{i-1} M_i . \end{aligned}$$

6.6.2 逆向運動學

逆向運動學 (inverse kinematics, IK) 的概念則與順向運動學恰恰相反：後者為給予每個關節的姿態得到機器人末端 (end-effector) 與機器人底座 (base) 之間的座標轉換關係；前者則為給予機器人末端相對於底座的座標和姿態，求得每個關節應該有的 D-H 參數。

$$\underbrace{\text{Joint Space}}_{\theta_i} \xrightleftharpoons[\text{IK, } \theta = f^{-1}(\text{base}_\text{end}^T)]{\text{FK, } \text{base}_\text{end}^T = f(\theta)} \underbrace{\text{Cartesian Space}}_{\text{base}_\text{end}^T}$$

如上，順向與逆向運動學搭起關節空間 (joint space，即 N 個關節的 D-H 參數所形成的 \mathbb{R}^{4N} 空間) 與歐氏空間的橋樑。然不如順向運動學那麼簡單，傳統上處理逆向運動學為透過(6.36)的 12 條方程式解聯立求得 N 個關節的 N 個 D-H 參數 (設每個關節只有一個自由度)。此聯立方程組為極為複雜的三角函數方程，係只能透過電腦數值求解。

通過 CGA 的幾何語言，我們期望能建構出對於一個機器人其適用的逆向動學演算法，且此結果應透過幾何上的洞見得到解析解，而非數值近似解。

在我們探討範例之前，我們將介紹以下之定理，對於處理機器人的姿態決策十分重要：

定理：從點對中取出點

給予兩外積表示法的點 A 、 B ，能生成二級點對 $Q = A \wedge B$ ，則：

$$\left(1 \pm \frac{Q}{\sqrt{Q^2}}\right) (Q \cdot \mathbf{e}_\infty) \sim A \text{ 或 } B。 \quad (6.37)$$

證明如下：不失一般性，令點 $A = \mathcal{X}(\mathbf{a})$ 、 $B = \mathcal{X}(\mathbf{b})$ ，其中 $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = 1$ ，即

$$A = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 = \mathbf{a} + \mathbf{e}_-、B = \mathbf{b} + \mathbf{e}_-。$$

將兩外積零空間表示法的點連接形成點對：

$$Q = A \wedge B = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{e}_- \wedge (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \left(\frac{\mathbf{b} + \mathbf{a}}{2} + \mathbf{e}_-\right) (\mathbf{b} - \mathbf{a})。$$

因此：

$$\begin{aligned} Q \cdot \mathbf{e}_\infty &= \langle Q(\mathbf{e}_- + \mathbf{e}_+) \rangle_1 = \langle Q\mathbf{e}_- \rangle_1 = \mathbf{b} - \mathbf{a} \\ Q^2 &= (A \wedge B)(A \wedge B) = - \left(\frac{\mathbf{b} + \mathbf{a}}{2} + \mathbf{e}_-\right)^2 (\mathbf{b} - \mathbf{a})^2 \\ &= \left(1 - \frac{2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{4}\right) \cdot 2(1 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (1 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2， \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(1 \pm \frac{Q}{\sqrt{Q^2}}\right) (Q \cdot \mathbf{e}_\infty) &= \left(1 \pm \frac{1}{1 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} \left(\frac{\mathbf{b} + \mathbf{a}}{2} + \mathbf{e}_-\right) (\mathbf{b} - \mathbf{a})\right) (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \\ &= (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \pm (\mathbf{b} + \mathbf{a} + \mathbf{e}_-) = 2B \text{ 或 } -2A。 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

此外，對於任意保角變換 S 將 $A \mapsto \alpha S A \tilde{S}$ 、 $B \mapsto \beta S B \tilde{S}$ (其中 α 、 β 為常數)，滿足 $S \tilde{S} = 1$ ，則：

$$\left(1 \pm \frac{SQ\tilde{S}}{\sqrt{(SQ\tilde{S})^2}}\right) ((SQ\tilde{S}) \cdot \mathbf{e}_\infty) = \alpha\beta S \left(1 \pm \frac{Q}{\sqrt{Q^2}}\right) (Q \cdot \mathbf{e}_\infty) \tilde{S} = 2\alpha\beta S B \tilde{S} \text{ 或 } -2\alpha\beta S A \tilde{S}，$$

故一開始的假設不失一般性。

一範例如下：考慮點 $A = \mathcal{X}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_-$ 、 $B = \mathcal{X}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_-$ ，則

$$\begin{aligned}
 Q &= A \wedge B = \mathbf{e}_{12} + \mathbf{e}_{1-} + \mathbf{e}_{-2} \\
 &\rightarrow \begin{cases} Q^2 = 1 \\ Q \cdot \mathbf{e}_\infty = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \end{cases} \\
 &\rightarrow \left(1 \pm \frac{Q}{\sqrt{Q^2}}\right) (Q \cdot \mathbf{e}_\infty) = 2(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_-) \text{ 或 } -2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_-) \sim B \text{ 或 } A。
 \end{aligned}$$

接著，我們將運用以上所學的 CGA 知識來處理以下的機器手臂的逆向運動學問題。最簡單的機構為如下的三關節手臂機器人 (圖6.6a)，其 D-H 參數如下表6.2。

(b)

awdaw

圖 6.6: 三關節手臂機器人

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1				
2				
3				

表 6.2: Caption

Code demo: serial robot IK position problem (w/o offset)

Solving the IK problem First, construct geometric entities and intersect them to solve for the desired null point positions,

$$S_w = (P_w - \frac{a_3^2}{2}e_\infty)^* \text{ (grade-4 sphere in wrist point),}$$

$$S_b = (P_b - \frac{a_2^2}{2}e_\infty)^* \text{ (grade-4 sphere in base origin),}$$

$$\Pi_{b1w} = P_b \wedge P_1 \wedge P_w \wedge e_\infty \text{ (vertical grade-4 plane passing through the wrist point and base),}$$

$$C_{wb} = S_w \vee S_b \text{ (intersect 2 spheres gives a grade-3 circle),}$$

$$Q_e = \Pi_{b1w} \vee C_{wb} \text{ (intersect the circle and plane gives a grade-2 point pair),}$$

$$P_e = (1 \pm \frac{Q_e}{\sqrt{Q_e Q_e^\dagger}})(Q_e \cdot e_\infty) \in \mathcal{G}_{4,1}^1 \text{ (extract the grade-1 points from the point pair),}$$

\Rightarrow elbow position (#2 solutions, elbow up & down)

After the null points are solved, form lines and solve for the joint variables

$$L_{ew} = P_e \wedge P_w \wedge e_\infty \text{ (line passing through the wrist and elbow points),}$$

$$L_{e0} = P_e \wedge e_0 \wedge e_\infty \text{ (line passing through the elbow point and the base origin),}$$

$$L_{ew,proj} = (L_{ew} \cdot \Pi_{0,hor}) \cdot \Pi_{0,hor} \text{ (projected line from } L_{ew} \text{ onto the horizontal plane passing through t}$$

$$\text{where } \Pi_{0,hor} = e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_\infty,$$

$$\text{and } p_w = \text{down}(P_w) = -\frac{\sum_{j=1}^3 (P_w \cdot e_j)e_j}{-P_w \cdot e_\infty} \in \mathcal{G}_3^1 \simeq \mathbb{R}^3.$$

$$\theta_1 = \text{atan2}(p_w \cdot e_2, p_w \cdot e_1),$$

$$\theta_2 = \text{acos}(L_{e0} \cdot L_{ew,proj}),$$

$$\theta_3 = \text{acos}(L_{ew} \cdot L_{e0}). \blacksquare$$

上述的三自由度機器手臂機器人為較簡單的範例，CGA 其實得以處理更複雜的機器人的逆向運動學問題，並提供其姿態的解析解。Code demo: 6-DoF serial robot IK (TM5-900)

附錄

A 泰勒展開式

泰勒展開式 (Taylor expansion)，又稱為泰勒級數 (Taylor series)，是透過多項式去近似任意函數的技巧。當所使用的多項是最高項次越大，則該多項式數列的極限—無窮級數 (infinite series) 可以與原本的函數在一「區間」內完美重合，該區間稱為該無窮級數的收斂區間。

那麼我們該如何求出函數的無窮級數表達式 (即泰勒展開式) 呢？首先，我們假定函數 $f(x)$ 可以在區間 $x \in \mathcal{I}$ 內用無窮級數 (infinite series) 表示為：

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n,$$

c_n 為待決定的係數。若上方之無窮級數表示法成立，則對於 $x \in \mathcal{I}$ 應滿足：

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} g(x) \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

將上方的每個 n 依序列出，並代入 $x = a$ 展開有：

$$\begin{aligned} f(a) &= g(a) = c_0 \\ \frac{d}{dx} f(a) &= \frac{d}{dx} g(a) = 1! \cdot c_1 \\ \frac{d^2}{dx^2} f(a) &= \frac{d^2}{dx^2} g(a) = 2! \cdot c_2 \\ &\vdots \\ f^{(n)}(a) &= \frac{d^n}{dx^n} f(a) = \frac{d^n}{dx^n} g(a) = n! \cdot c_n. \end{aligned}$$

由此，我們可以整理出：

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad (\text{A.1})$$

亦即：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad \forall x \in \mathcal{I}, \quad (\text{A.2})$$

我們稱其為 $f(x)$ 在 $x = a$ 處的泰勒展開式，並有收斂區間 \mathcal{I} 。

若我們取 $a = 0$ ，則此級數又可被稱為麥克勞林級數 (Maclaurin series)。以下列出幾個常見的麥克勞林級數，讀者可自行驗證其正確性。

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} \quad \forall x \in (-1, 1] \quad (\text{A.3})$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{A.4})$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{A.5})$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{A.6})$$

上方泰勒展開式的收斂區間都可以透過無窮級數的比值審斂法 (ratio test) 得到：對於 $f(x)$ 的泰勒展開式(A.2)有

$$\text{若 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} \frac{f^{(n+1)}(a)}{f^{(n)}(a)} (x-a) \right| < 1, \text{ 則 } x \in \mathcal{I}. \quad (\text{A.7})$$

對於極限大於 1 者，其必發散；對於極限為 1 者，其收斂與否要再進行額外的判斷。

B 常見的群與其矩陣表示法

什麼是群 (group) 呢？可以將其視為作用在某物件上的變換。而且我們希望這些變換是 (1) 可以結合的、(2) 存在一個「不變」的變換，且 (3) 變換都是可逆的。將上述的這些要求寫成較為嚴謹的數學符號表示如下：令群為 G ，並其具有一個乘積運算「 \cdot 」使得任兩個變換的合成仍然是一個變換：記做 (G, \cdot) ，滿足

$$\cdot : G \times G \rightarrow G$$

$$\text{對於 } g_1, g_2 \in G, (g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2。$$

此外，它還需要滿足：對於任意 g_1, g_2, g_3 屬於 G

$$1. g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$$

$$2. \exists e \in G \text{ 使得 } g_1 \cdot e = g_1$$

$$3. \exists g_1^{-1} \in G \text{ 使得 } g_1 \cdot g_1^{-1} = e$$

一個群裡的元素可以作用 (group action) 在一個集合 V 的元素上，使其變成 V 內的另一個元素。一例子如下：對於一個平面正三角形，其狀態為 V 的元素，共有六種可能，見圖.1a。

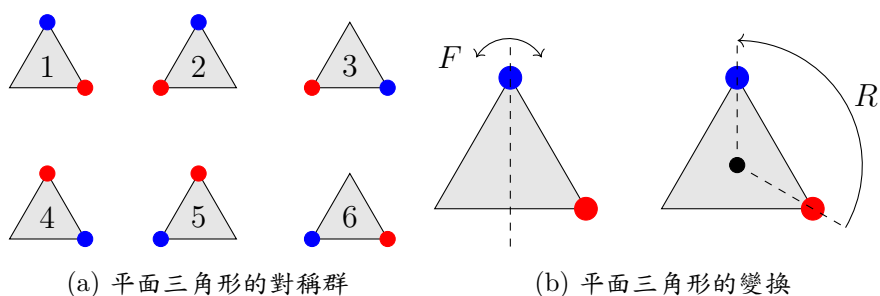


圖.1

而作用在 V 上的變換包括沿著垂直軸做鏡射 (F)、對著中心逆時鐘旋轉 120° (R) (見圖.1b)。在根據群的定義，我們的變換還包括 F 與 R 的乘積，因此我們有三角形的對稱群 D_3 為：

$$D_3 = \{e, F, R \cdot R, R \cdot R \cdot F, R, F \cdot R \cdot R\}。$$

將圖.1a的 1 號三角形對 D_3 中的變換作用就可以依序得到其餘三角形：例如作用了 e 即是什麼都不做，得到三角形 1；作用了 $R \cdot R \cdot F$ 就是先沿著垂直軸鏡射、再逆時鐘旋轉 240° 得到三角形 4。因為這個群裡面的元素是有限個的（共 6 個），所以我們稱其為一個「離散群 (discrete group)」。

B.1 連續群

這些上面的敘述感覺十分抽象，但如果我們可以想像這些 $g \in G$ 都是一些矩陣，感覺就熟悉許多了。而我們也將在下面列舉出一些常見的群（且與幾何代數的討論有直接關連）與其矩陣表示法。此外，與前述三角形對稱變換的離散群不同，我們在此將著重於元素有無窮多個的「連續群 (continuous group)」。

通常在討論群時，也會與它所作用的集合 V 一起討論，尤其是在群作用下集合的哪些特性是為不變量 (invariant)。

正交群

正交群 (orthogonal group) 記做：

$$O(n) := \left\{ M \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid MM^T = I_n \right\}。 \quad (B.1)$$

其中的元素都為正交矩陣 (orthogonal matrix)，幾何上其表示 \mathbb{R}^n 上的所有鏡射與旋轉變換。因此，它就是表示由一組單位正交基底映射成另一組單位正交基底的幾何變換。在正交群變換下，向量模長不變：對於 $M \in O(n) : x \mapsto y \in \mathbb{R}^n$ ，則

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = \langle y, y \rangle。 \quad (B.2)$$

特殊正交群

特殊正交群 (special orthogonal group) 記做：

$$SO(n) := \left\{ M \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid MM^T = I_n, \det(M) = 1 \right\}。 \quad (B.3)$$

群名前有「S」都表示其矩陣表示法的行列式為 $+1$ 。幾何上其表示 \mathbb{R}^n 上的所有旋轉變換。（鏡射變換會改變手性，使得行列式為 -1 。）例如 $SO(2)$ 即包含了所有的 2×2 旋轉

矩陣、 $\text{SO}(3)$ 即包含了所有的 3×3 旋轉矩陣。

么正群

么正群 (unitary group) 記做：

$$\text{U}(n) := \left\{ M \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid MM^\dagger = \text{I}_n \right\} . \quad (\text{B.4})$$

其中的元素都為么正矩陣 (unitary matrix)， M^\dagger 為矩陣 M 的共軛轉置/厄爾米特共軛。可視其為複數版的正交矩陣⁴⁰，我們先前提及過的包立矩陣 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 即屬於 $\text{U}(2)$ 。

特殊么正群

特殊么交群 (special unitary group) 記做：

$$\text{SU}(n) := \left\{ M \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid MM^\dagger = \text{I}_n, \det(M) = 1 \right\} . \quad (\text{B.5})$$

先前提及過， $\exp(i\sigma_k\theta) \in \text{SU}(2)$ ，其中 $\theta \in \mathbb{R}$ 。

歐幾里得群

歐幾里得群 (Euclidean group) 記做：

$$\text{E}(n) := \left\{ \begin{bmatrix} M & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid M \in \text{O}(n), p \in \mathbb{R}^n \right\} . \quad (\text{B.6})$$

其包含了歐氏空間 \mathbb{R}^n 中的所有鏡射、旋轉、平移變換。

假設我們將一個向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 用齊次座標 (homogeneous coordinates) 表示為：

$$x \mapsto \bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

⁴⁰ $\text{O}(n)$ 變換下 \mathbb{R}^n 的第一標準型 (first fundamental form) $\mathbb{I}_p = \langle , \rangle$ 為不變量； $\text{U}(n)$ 變換下 \mathbb{C}^n 的第一標準型為不變量。

則它可以被 $E(n)$ 中的元素作用進行變換：

$$\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} M & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Mx + p \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

$$x \mapsto Mx + p. \quad (\text{B.8})$$

特殊歐幾里得群

特殊歐幾里得群 (special Euclidean group) 記做：

$$\text{SE}(n) := \left\{ \begin{bmatrix} M & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid M \in \text{SO}(n), p \in \mathbb{R}^n \right\}. \quad (\text{B.9})$$

其包含了歐氏空間 \mathbb{R}^n 中的所有旋轉、平移變換。因此在描述物體如機器人在三維空間中的運動時很常使用此群。詳細可見平面射影幾何代數一章。

B.2 直積與半直積

此外，群具有複合 (composition) 的概念，我們在此引入直積 (direct product) 與半直積 (semidirect product)。首先考慮直積。若有兩個群 (G, \oplus) 和 (H, \otimes) ，則我們記它們的直積為 $G \times H$ 。其中的元素記做 (g, h) ，有 $g \in G, h \in H$ 。另外， $G \times H$ 也是一個群，其群運算滿足：

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 \oplus g_2, h_1 \otimes h_2). \quad (\text{B.10})$$

接著討論半直積。我們將同上的兩個群的半直積記做 $G \rtimes H$ (或 $H \ltimes G$)，稱為 H 作用在 G 上的半直積，其群運算滿足：

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 \oplus \varphi_{h_1}(g_2), h_1 \otimes h_2). \quad (\text{B.11})$$

其中 φ 為透過 H 群元素 h ，將 G 群元素 g 變成另一個元素 $\varphi_h(g) \in G$ 的同構 (isomorphism)⁴¹。範例如下，我們記三維空間中的平移群為 $T(3) = \mathbb{R}^3$ 。例如對於向量 ξ 、 $x \in \mathbb{R}^3$ ， $T_\xi \in T(3)$ 可以作用在 x 上滿足： $T_\xi(x) = x + \xi$ 。則有：

$$SE(3) = T(3) \rtimes SO(3), \quad (B.12)$$

$$(\xi_2, A_2) \cdot (\xi_1, A_1) = (\xi_2 + A_2\xi_1, A_2A_1) : x \mapsto (A_2A_1)x + (\xi_2 + A_2\xi_1). \quad (B.13)$$

⁴¹ 亦即 $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(G)$ ， $\text{Aut}(G)$ 為所有從 G 到 G 的同構映射的集合，稱為其自同構 (automorphism)。

C 李群與李代數

李群為可以視為同時是一個曲面/流形 (manifold) 的群。這個流形上面的每一個點都是李群裡面的一個元素：單位元、反元素等等。在其單位元處，我們能定義這個流形的一個切空間 (tangent space)。

如下圖??所示：假設我們的李群是描述二維旋轉的單位複數乘法群 $(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \cdot)$ ，其對應的流形採用 x - y 平面上的單位圓，則乘法單位元是 1。在單位元處我們能定義其切線 (即是在該點的流形的切空間)。

$$awda \tag{C.1}$$

D 圓錐曲線

圓錐曲線是非常基本但卻具有許多美麗特性的幾何結構。眾所周知，圓錐曲線的定義十分多元，我們將從高中數學所學的結果延伸，在此連結數個圓錐曲線的定義並介紹一些性質。

D.1 極座標

D.2 圓錐截痕

E 淺談狹義相對論

F 淺談電磁學

參考資料

書籍

- [DL03] Chris Doran and Anthony Lasenby. Geometric Algebra for Physicists. Cambridge University Press, 2003. ISBN: 0521480221.
- [Per09] Christian Perwass. Geometric Algebra with Applications in Engineering. Springer Series in Geometry and Computing. Springer, 2009. ISBN: 9783540890676.
- [Art11] John W. Arthur. Understanding Geometric Algebra for Electromagnetic Theory. The IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory. John Wiley & Sons, Inc., 2011. ISBN: 9780470941638.
- [Bay17] Eduardi Bayro-Corrochano. Geometric Algebra Applications. Springer, 2017. ISBN: 9783319748283.

論文

- [KE16] Adam L. Kleppe and Olav Egeland. “Inverse Kinematics for Industrial Robots using Conformal Geometric Algebra”. In: Modeling, Identification and Control 37.1 (2016), pp. 63–75. DOI: [10.4173/mic.2016.1.6](https://doi.org/10.4173/mic.2016.1.6).
- [DK22] Leo Dorst and Steven De Keninck. “A Guided Tour to the Plane-Based Geometric Algebra PGA”. Version 2. In: (2022).
- [DK23] Leo Dorst and Steven De Keninck. “May the Forque Be with You: Dynamics in PGA”. Version 2.6. In: (2023).

其餘資料來源

- [sud20] sudgylacmoe. A Swift Introduction to Geometric Algebra. 2020. URL: https://youtu.be/60z_hpEAtD8.

- [sud22] sudgylacmoe. A Swift Introduction to Spacetime Algebra. 2022.
URL: https://youtu.be/e7aIVSVc8cI?si=-pKoNv_edxyS2fX5.
- [sud23a] sudgylacmoe. A Swift Introduction to Projective Geometric Algebra. 2023.
URL: <https://youtu.be/0i3ocLhbxJ4?si=gn84ZaepIDUzUMai>.
- [sud23b] sudgylacmoe. An Overview of the Operations in Geometric Algebra. 2023.
URL: https://youtu.be/2AKt6adG_OI?si=2HRjDUt4N_eSN40W.