

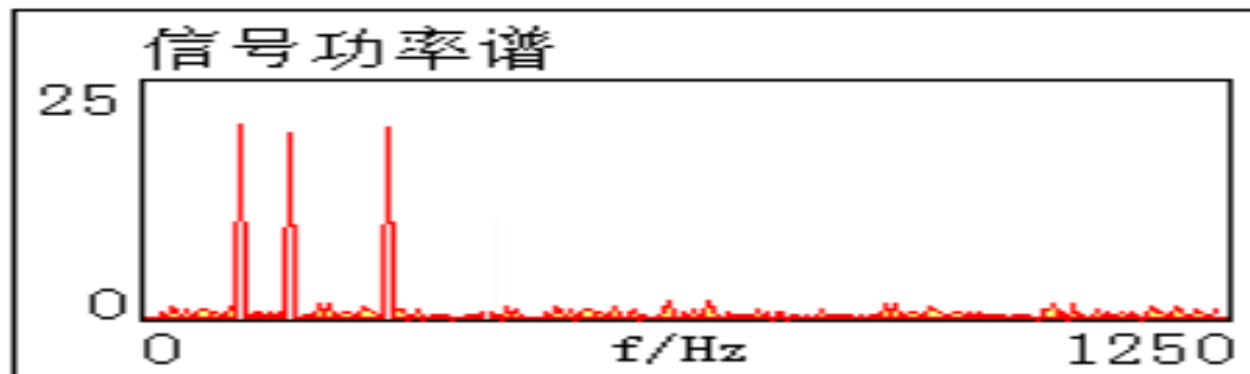
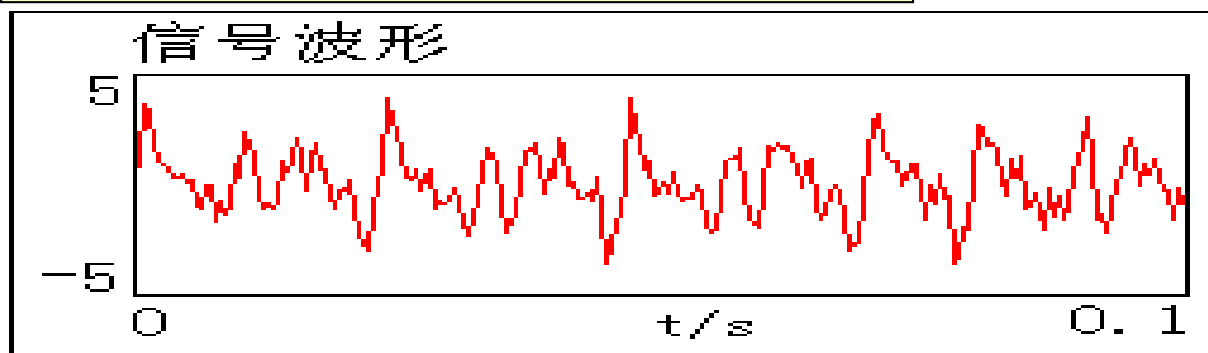


图像的傅里叶变换

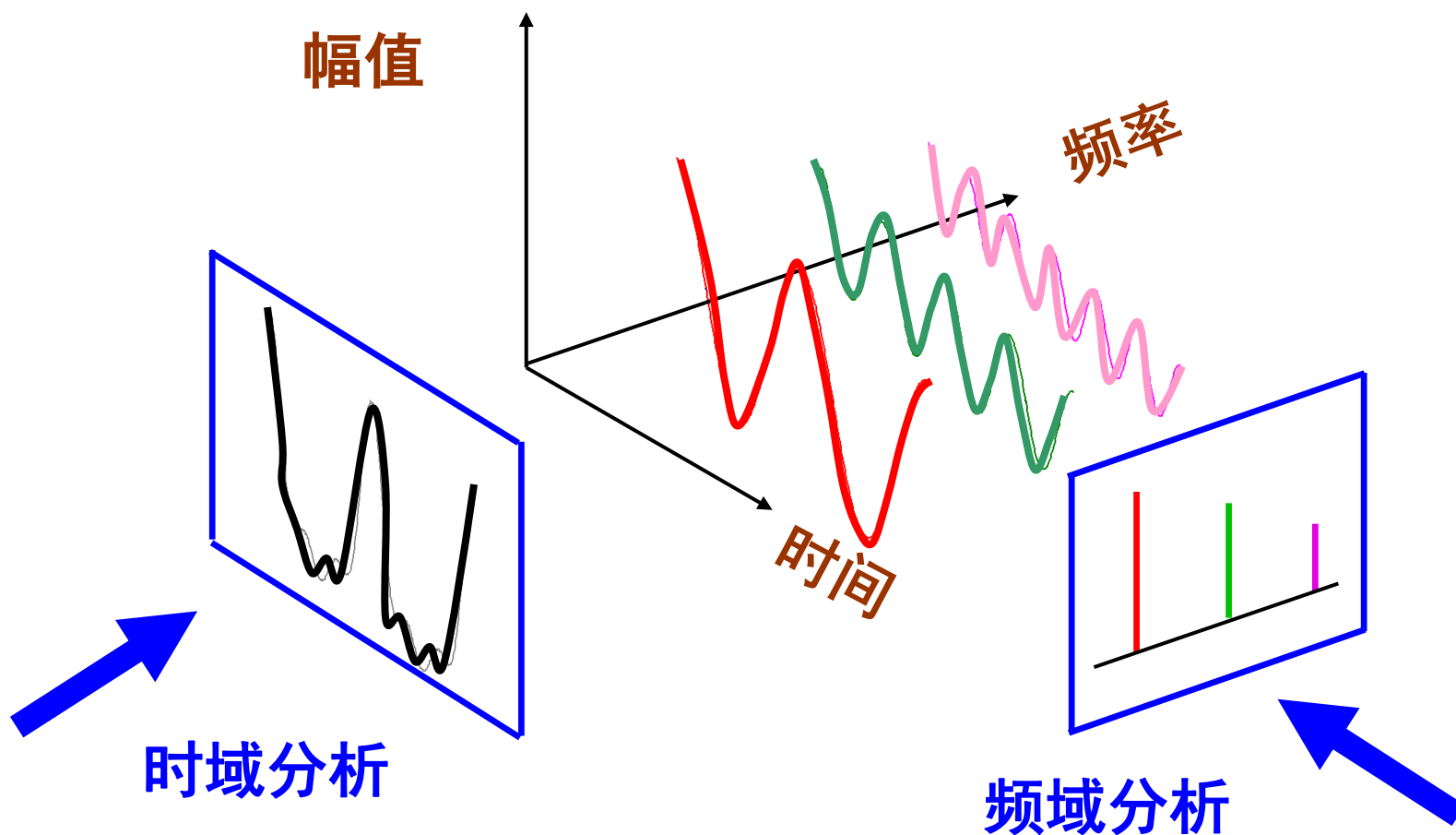
Fourier Transformation For Image

时域分析只能反映信号的幅值随时间的变化情况，除单频率分量的简谐波外，很难明确揭示信号的频率组成和各频率分量大小。

图例：受噪声干扰的多频率成分信号



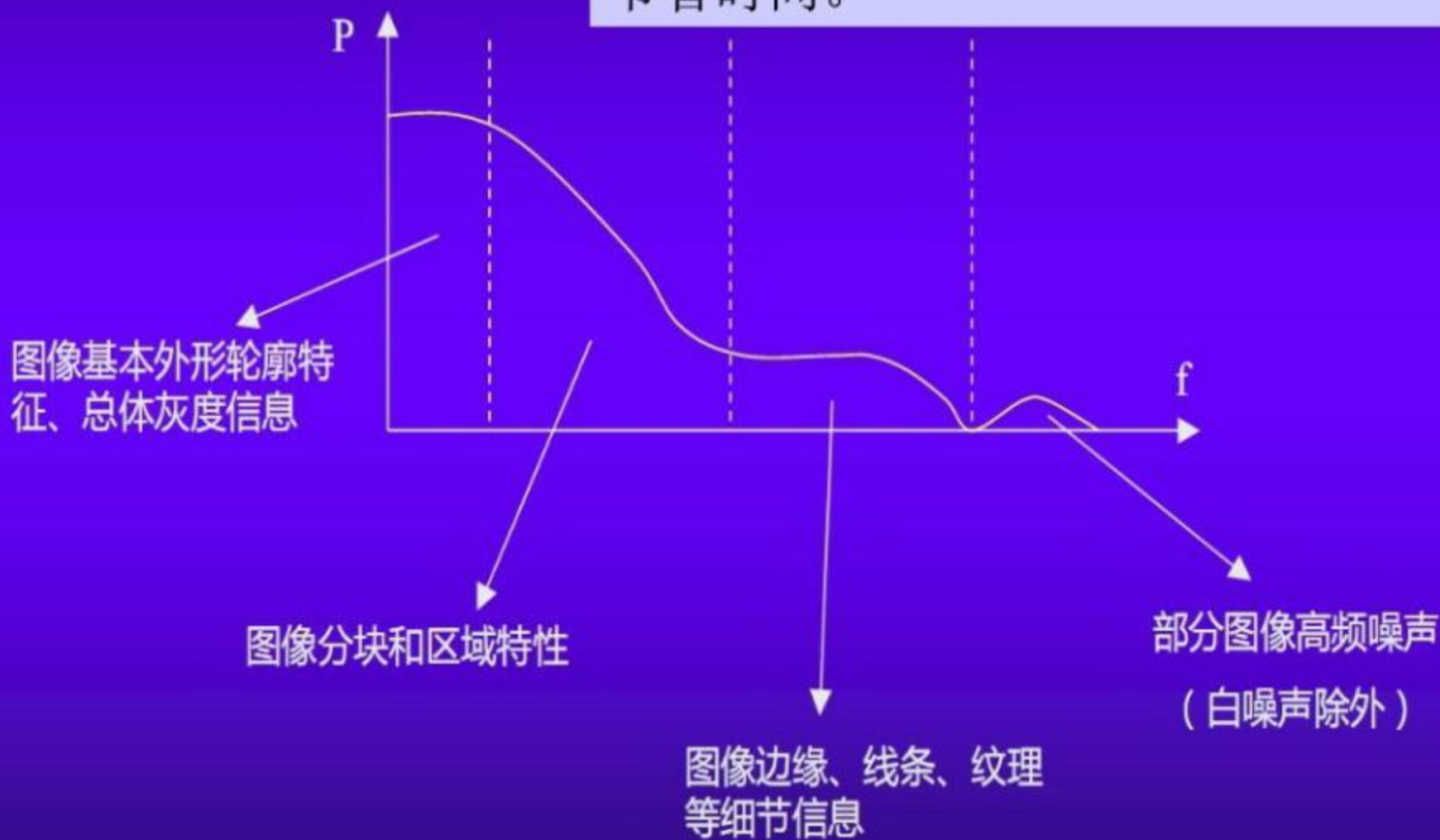
信号频谱 $X(f)$ 代表了信号在不同频率分量成分的大小，能够提供比时域信号波形更直观，丰富的信息。



为什么要做图像变换？

图像信号的频域模型

❖ 变换后的图象，大部分能量都分布于低频谱段，这对以后图象的压缩、传输都比较有利。使得运算次数减少，节省时间。



一维FT及其反变换

- 连续函数 $f(x)$ 的傅立叶变换 $F(u)$:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx$$

- 傅立叶变换 $F(u)$ 的反变换:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du$$

一维DFT及其反变换

- 离散函数 $f(x)$ (其中 $x, u=0,1,2,\dots,N-1$)的傅立叶变换:

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j2\pi ux/N}$$

- $F(u)$ 的反变换的反变换:

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{j2\pi ux/N}$$

计算 $F(u)$:

- 1) 在指数项中代入 $u=0$, 然后将所有 x 值相加, 得到 $F(0)$;
- 2) $u=1$, 复对所有 x 的相加, 得到 $F(1)$;
- 3) 对所有 M 个 u 重复此过程, 得到全部完整的FT。

- 离散傅里叶变换及其反变换总存在。
- 用欧拉公式得 $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) [\cos 2\pi ux / N - j \sin 2\pi ux / N]$$

每个F(u) 由f(x)与对应频率的正弦和余弦乘积和组成;

u 值决定了变换的频率成份, 因此, F(u) 覆盖的域 (u值) 称为**频率域**, 其中每一项都被称为FT 的**频率分量**。与f(x) 的“**时间域**”和“**时间成份**”相对应。

傅里叶变换的作用

- * 傅里叶变换将信号分成不同频率成份。类似光学中的分色棱镜把白光按波长(频率)分成不同颜色,称数学棱镜。
- * 傅里叶变换的成份: 直流分量和交流分量
- * 信号变化的快慢与频率域的频率有关。噪声、边缘、跳跃部分代表图像的高频分量; 背景区域和慢变部分代表图像的低频分量

二维DFT傅里叶变换

- 一个图像尺寸为 $M \times N$ 的函数 $f(x, y)$ 的离散傅立叶变换 $F(u, v)$:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

- $F(u, v)$ 的反变换:

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

二维DFT傅里叶变换

- $(u,v)=(0,0)$ 位置的傅里叶变换值为

$$F(0,0) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) = \bar{f}(x, y)$$

即 $f(x,y)$ 的均值，原点 $(0,0)$ 的傅里叶变换是图像的平均灰度。 $F(0,0)$ 称为频率谱的直流分量(系数)，其它 $F(u,v)$ 值称为交流分量(交流系数)。

■ 二维连续傅里叶变换

1) 定义

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx$$

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

2) 逆傅里叶变换

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv$$

3) 傅里叶变换特征参数

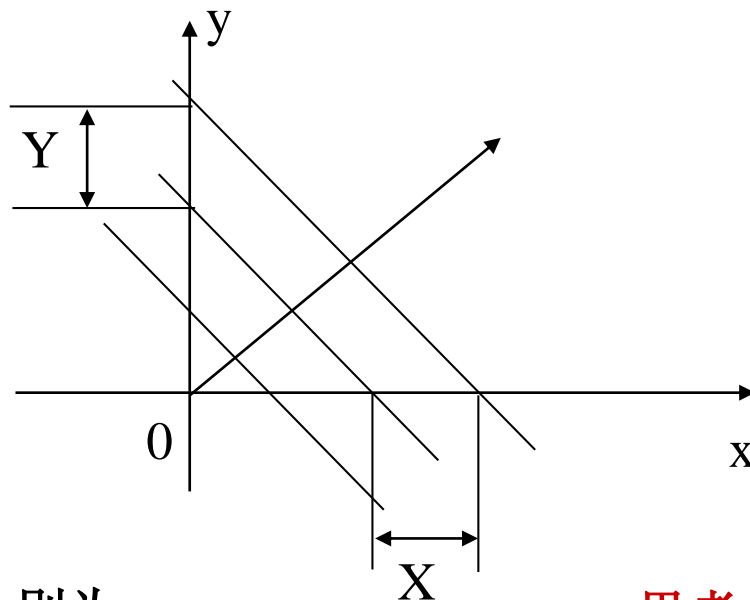
$$F(u, v) = R(u, v) + jI(u, v)$$

频谱/幅度谱/模 $|F(u, v)| = \sqrt{R^2(u, v) + I^2(u, v)}$

能量谱/功率谱 $P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$

相位谱 $\phi(u, v) = \arctan \frac{I(u, v)}{R(u, v)}$

傅里叶变换中出现的变量 u 和 v 通常称为频率变量，**空间频率**可以理解为等相位线在 x, y 坐标投影的截距的倒数。



相应的空间频率分别为

$$u = \frac{1}{X} = \frac{\cos \alpha}{\lambda}, v = \frac{1}{Y} = \frac{\cos \beta}{\lambda}$$

思考：噪声、线、细节、背景或平滑区域对应的空间频率特性？

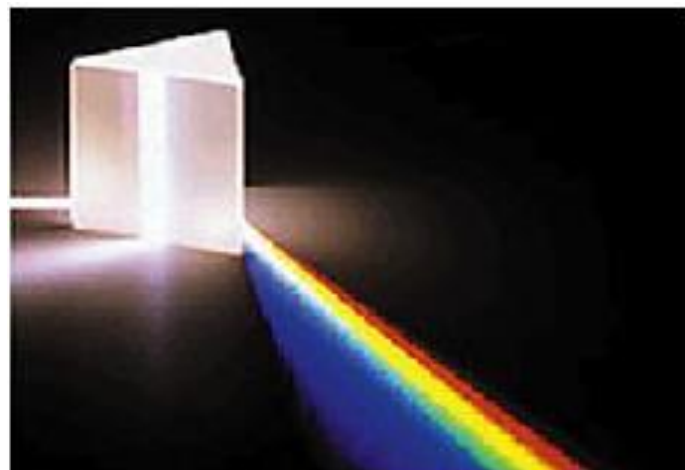
对图像信号而言，空间频率是指单位长度内亮度作周期性变化的次数。

傅里叶变换的意义

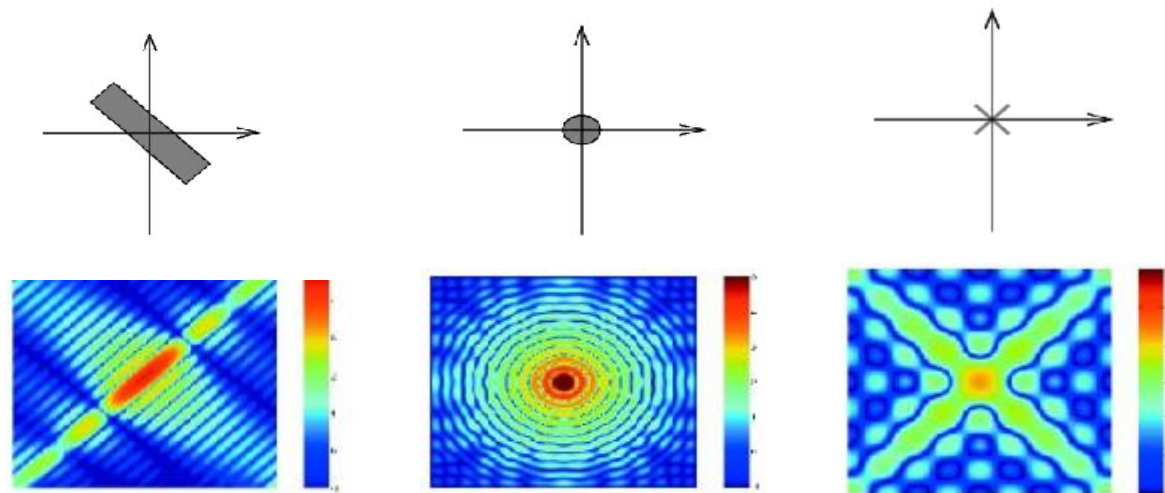
傅里叶变换好比一个玻璃棱镜

棱镜是可以将光分成不同颜色的物理仪器，每个成分的颜色由波长决定。

傅里叶变换可看做是“数学中的棱镜”，将函数基于频率分成不同的成分。



一些图像的傅里叶变换



对于xy平面上一点的复振幅分布 $g(x,y)$ 可由逆傅里叶变换表示成:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi, \eta) \exp[j2\pi(\xi x + \eta y)] d\xi d\eta$$

$G(\xi, \eta)$ 是 $g(x,y)$ 的频谱, 物函数 $g(x,y)$ 可以看作不同方向传播的单色平面波分量的线性叠加。 $G(\xi, \eta)d\xi d\eta$ 为权重因子。空间频率 $\xi = \frac{\cos \alpha}{\lambda}, \eta = \frac{\cos \beta}{\lambda}$ 表示了单色平面波的传播方向。

■ 二维离散傅里叶变换

1) 定义

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

$$u = 0, 1, \dots, M-1$$

$$\underline{v = 0, 1, \dots, N-1}$$

2) 逆傅里叶变换

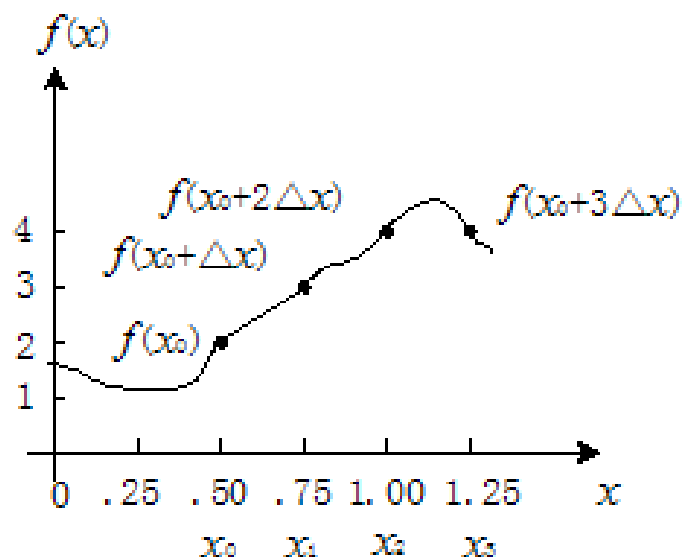
$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

$$x = 0, 1, \dots, M-1$$

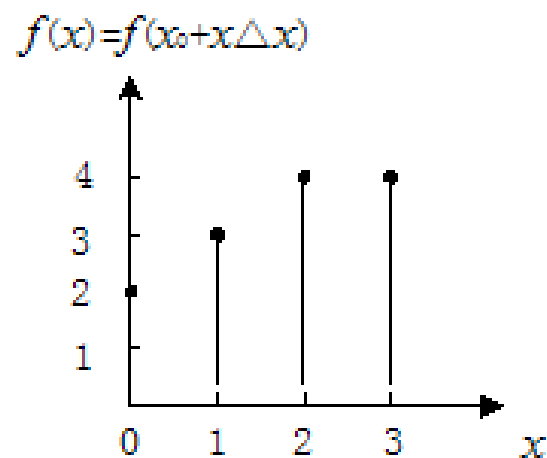
$$\underline{y = 0, 1, \dots, N-1}$$

离散的情况下，傅里叶变换和逆傅里叶变换始终存在。

例 设一函数如图 (a) 所示, 如果将此函数在自变量
 $x_0 = 0.5, x_1 = 0.75, x_2 = 1.00, x_3 = 1.25$ 取样
并重新定义为图 (b) 离散函数, 求其傅里叶变换。



(a)



(b)

$$F(0) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f(x) \exp \{0\}$$

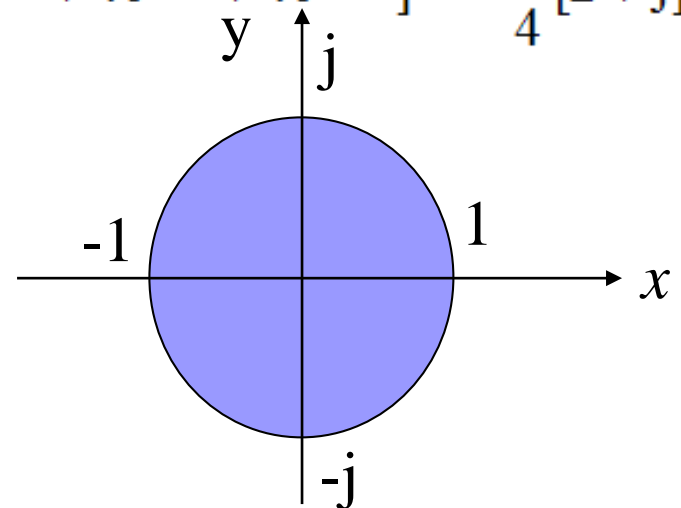
$$= (1/4)[f(0) + f(1) + f(2) + f(3)] = (1/4)[2 + 3 + 4 + 4] = 3.25$$

$$F(1) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f(x) \exp \{-j2\pi x/4\} = \frac{1}{4} [2e^0 + 3e^{-j\pi/2} + 4e^{-j\pi} + 4e^{-j3\pi/2}] = \frac{1}{4} [-2 + j]$$

$$F(2) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f(x) \exp \{-j4\pi x/N\} = \frac{1}{4} [2e^0 + 3e^{-j\pi} + 4e^{-j2\pi} + 4e^{-j3\pi}] = -\frac{1}{4} [1 + j0]$$

$$F(3) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f(x) \exp \{-j6\pi x/4\} = \frac{1}{4} [2e^0 + 3e^{-j3\pi/2} + 4e^{-j3\pi} + 4e^{-j9\pi/2}] = -\frac{1}{4} [2 + j]$$

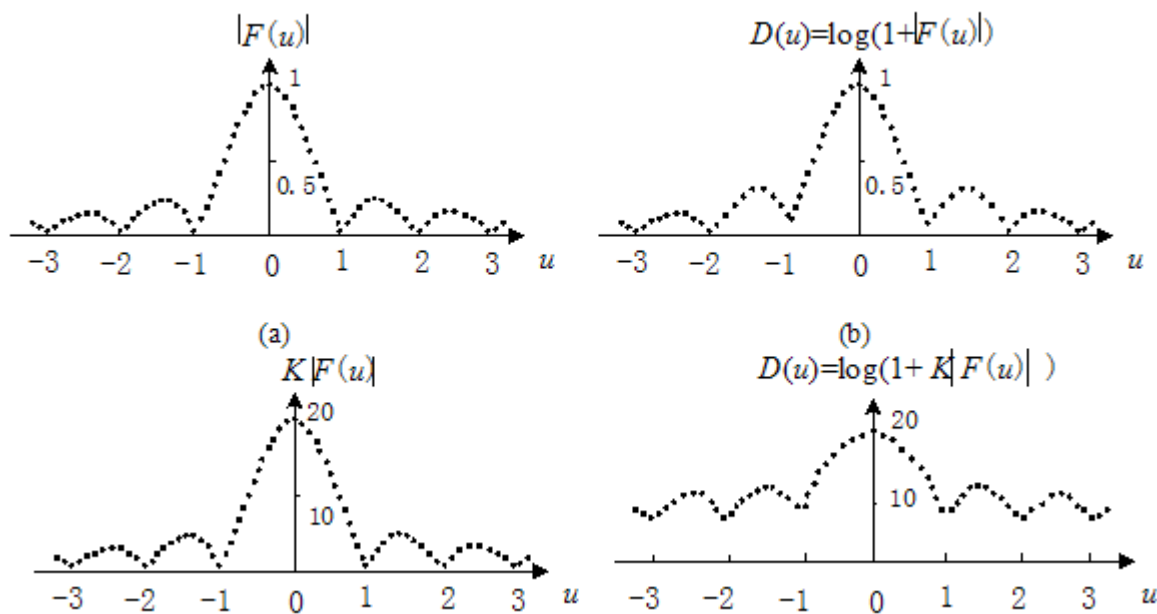
$$F(u) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix}$$



图像的频谱幅度随频率增大而迅速衰减

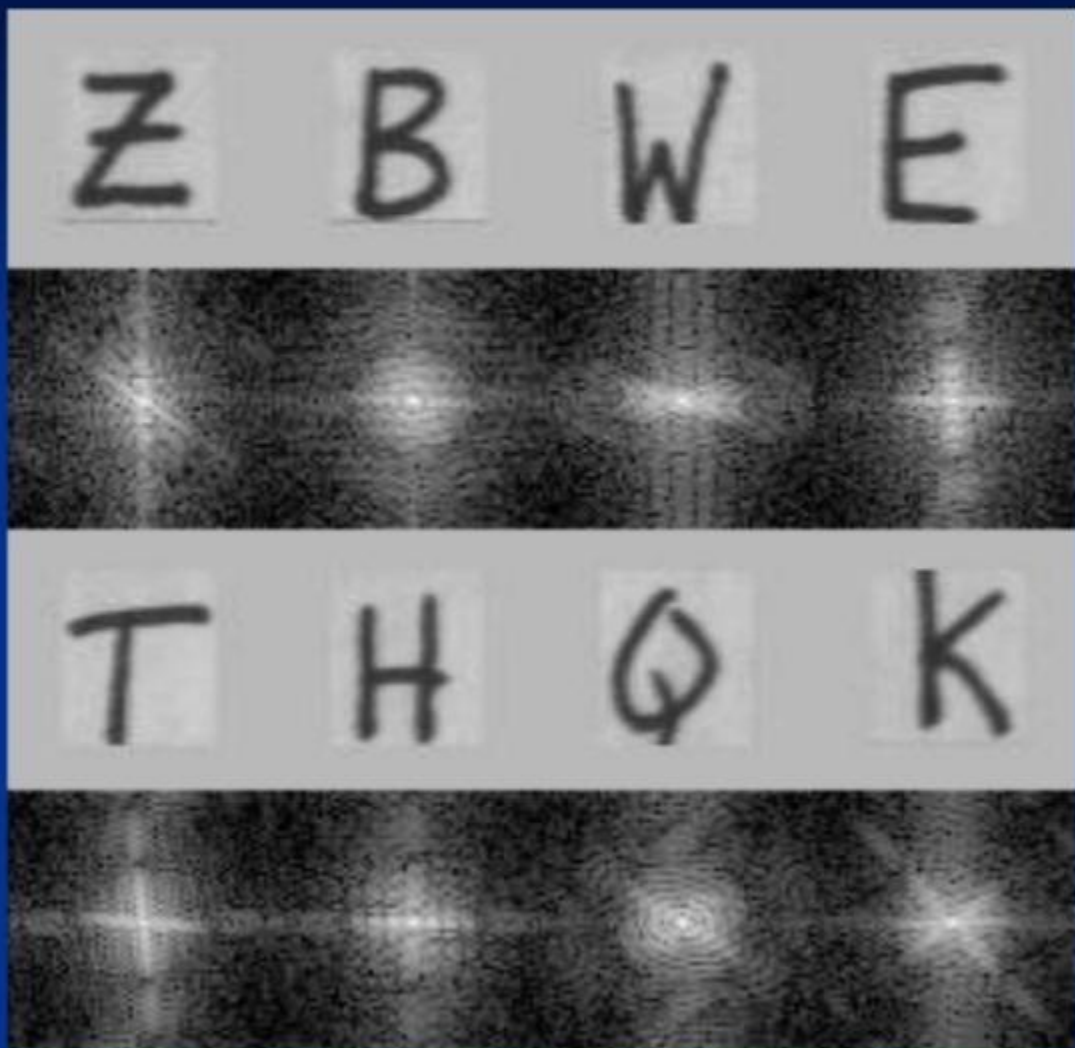
许多图像的傅里叶频谱的幅度随着频率的增大而迅速减小，这使得在显示与观察一副图像的频谱时遇到困难。但以图像的形式显示它们时，其高频项变得越来越不清楚。

解决办法：
对数化



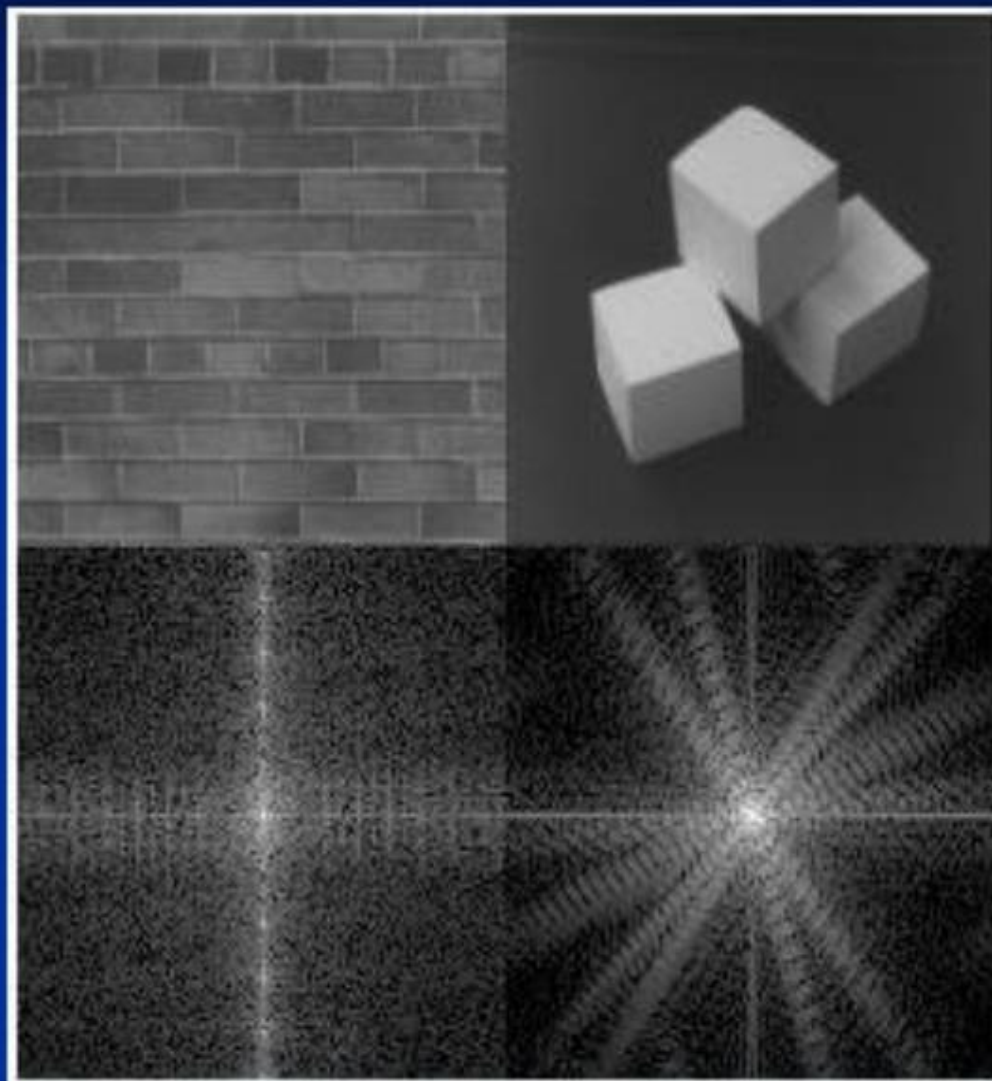
幅度谱和相位谱

- 从幅度谱中我们可以看出明亮线和原始图像中对应的轮廓线是垂直的。如果原始图像中有圆形区域那么幅度谱中也呈圆形分布



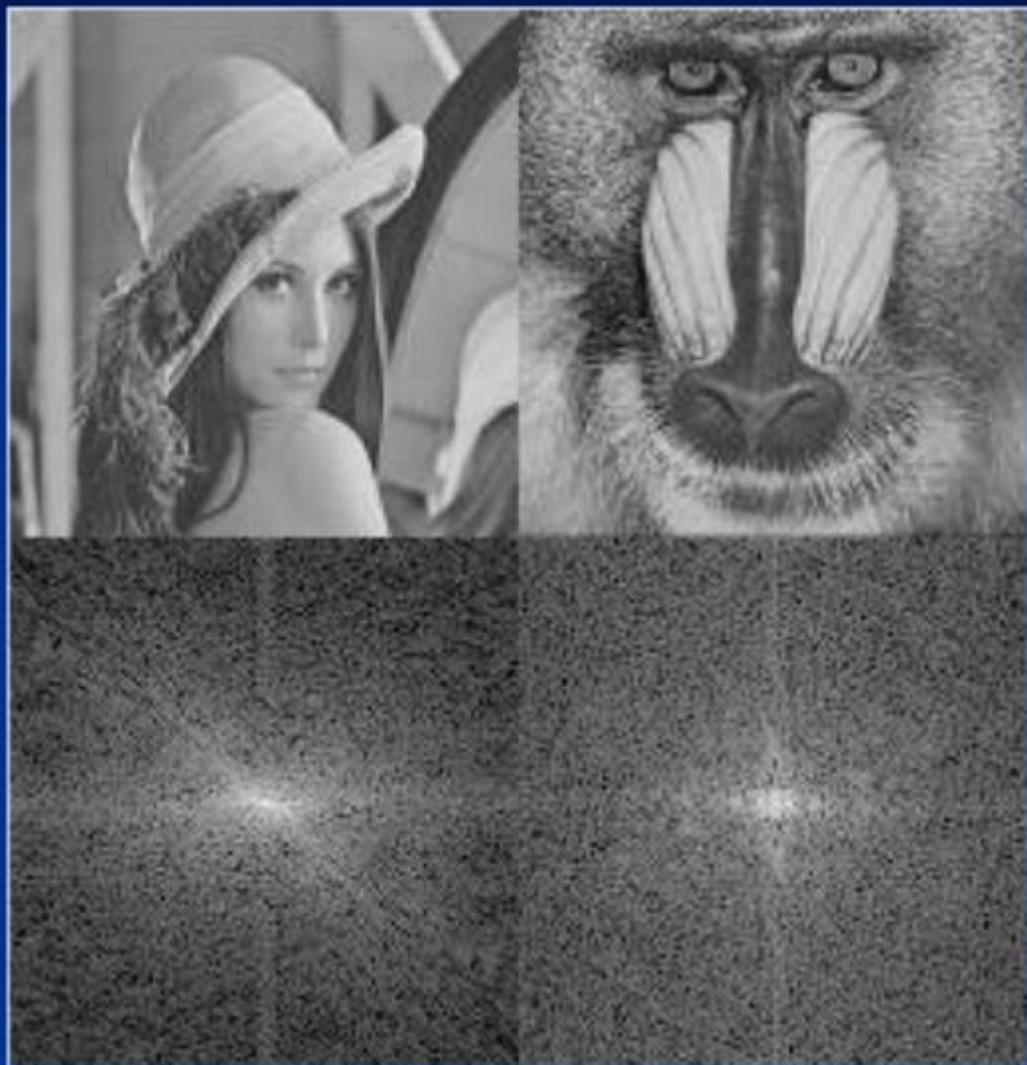
幅度谱和相位谱

- 从幅度谱中我们可以看出明亮线反映出原始图像的灰度级变化，这正是图像的轮廓边

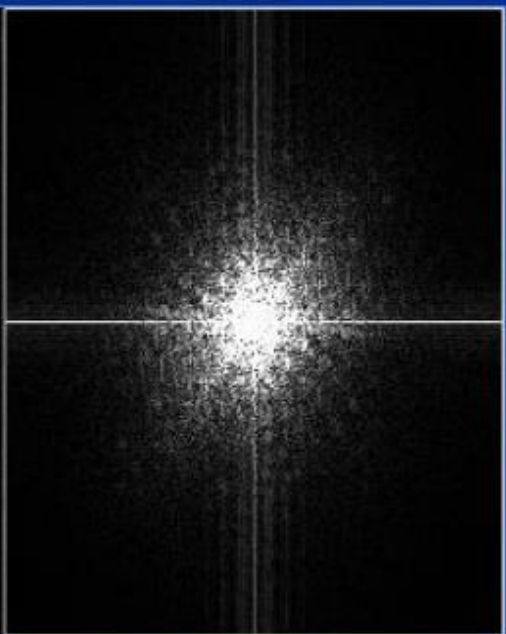
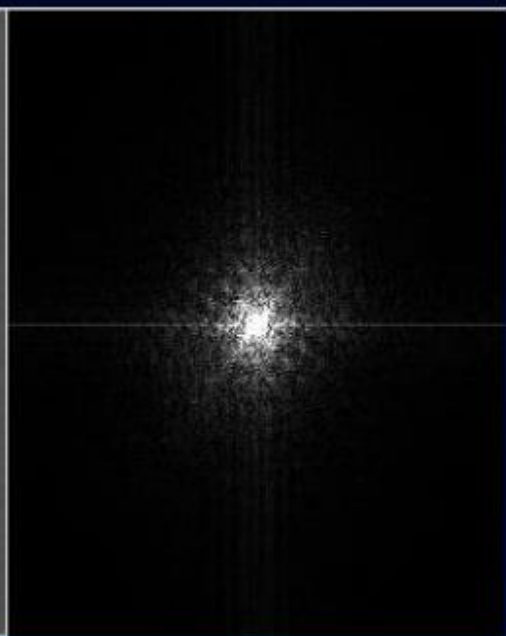


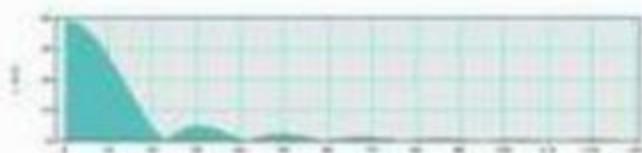
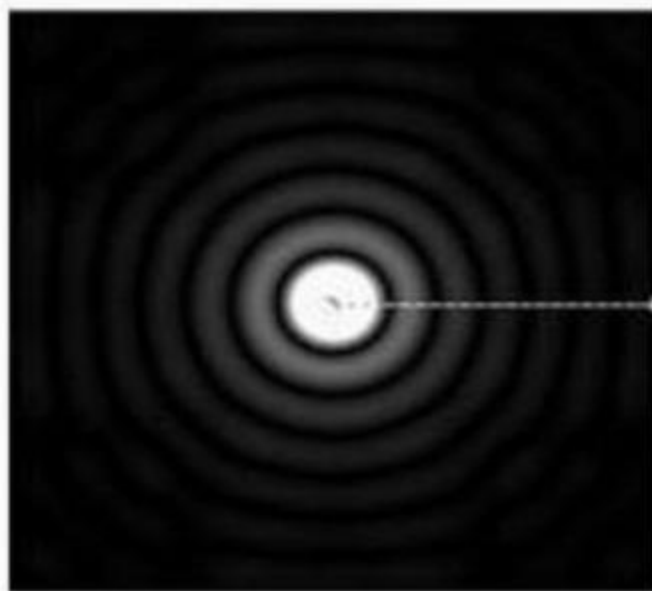
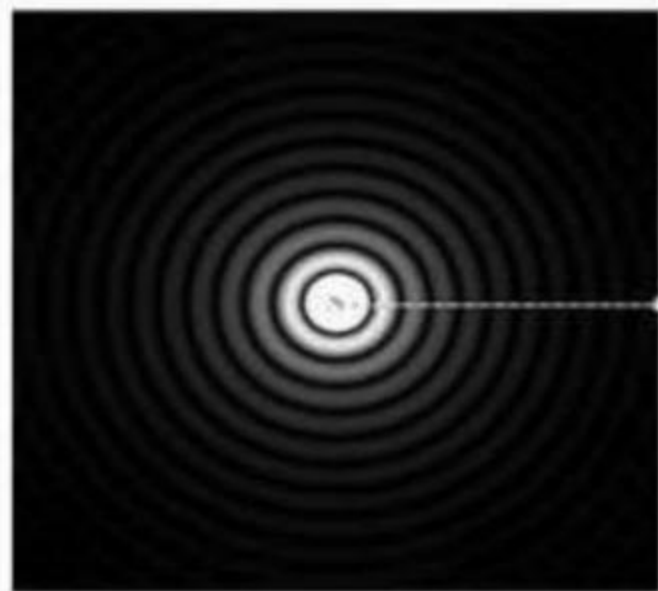
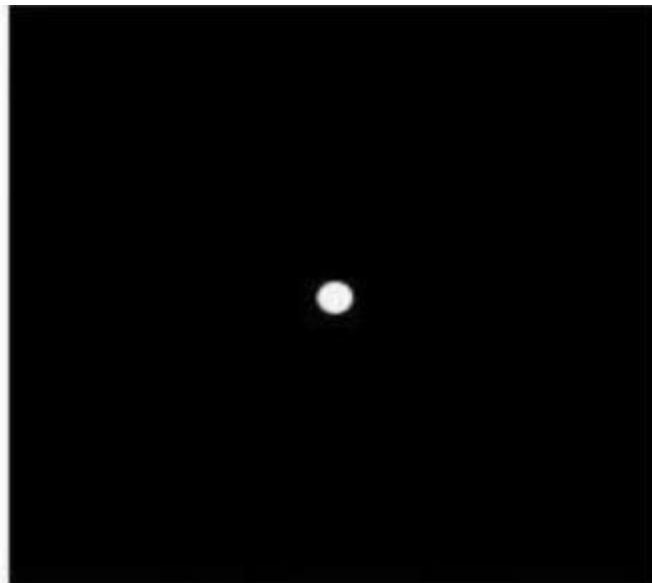
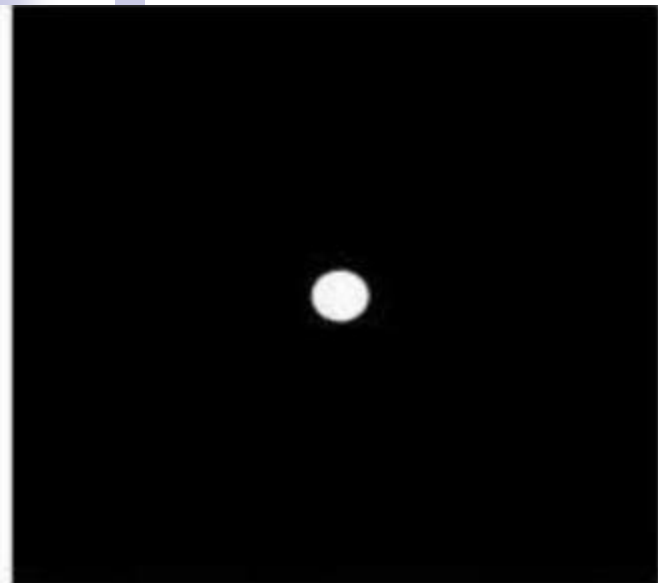
幅度谱和相位谱

- 这些图像没有特定的结构，左上角到右下角有一条斜线，它可能是由帽子和头发之间的边线产生的
- 两个图像都存在一些小边界



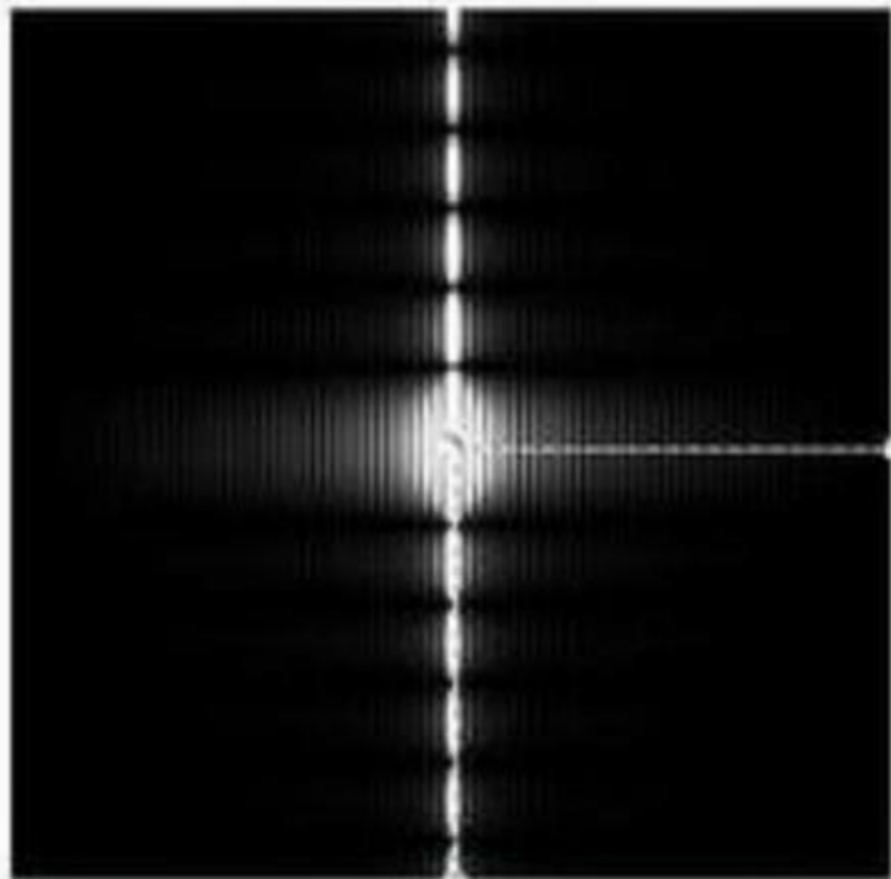
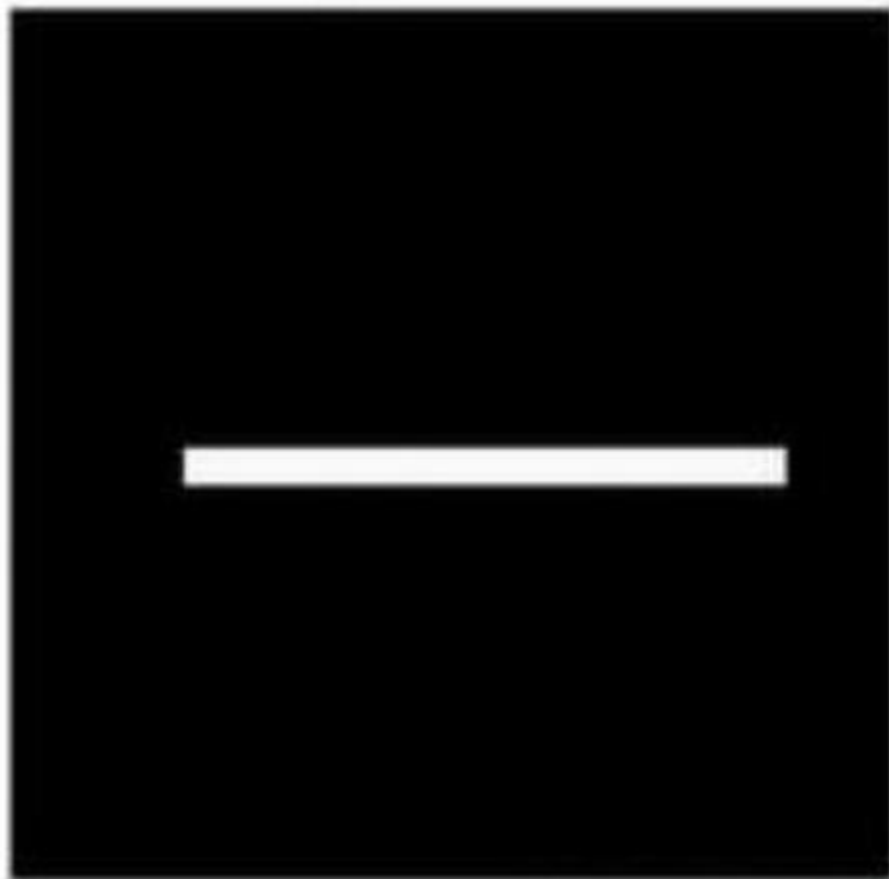
频谱图中暗的点数更多，那么实际图像是比较柔和的，反之，如果频谱图中亮的点数多，那么实际图像一定是尖锐的，边界分明且边界两边像素差异较大的



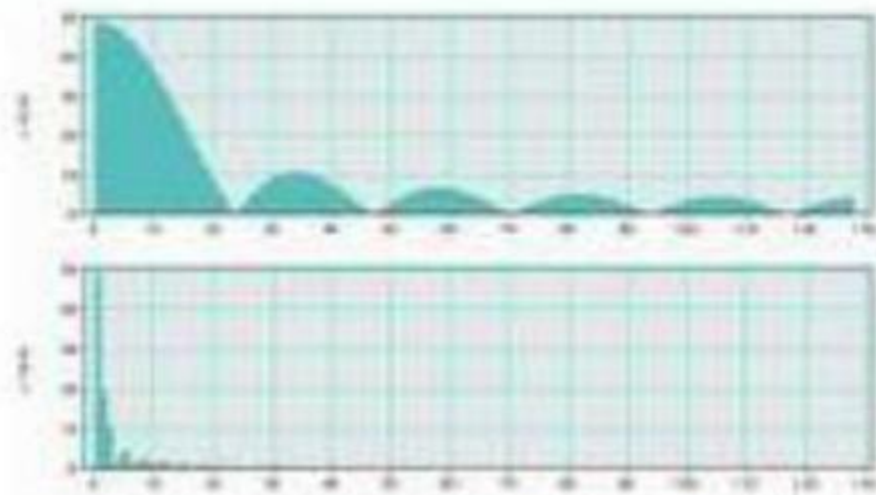


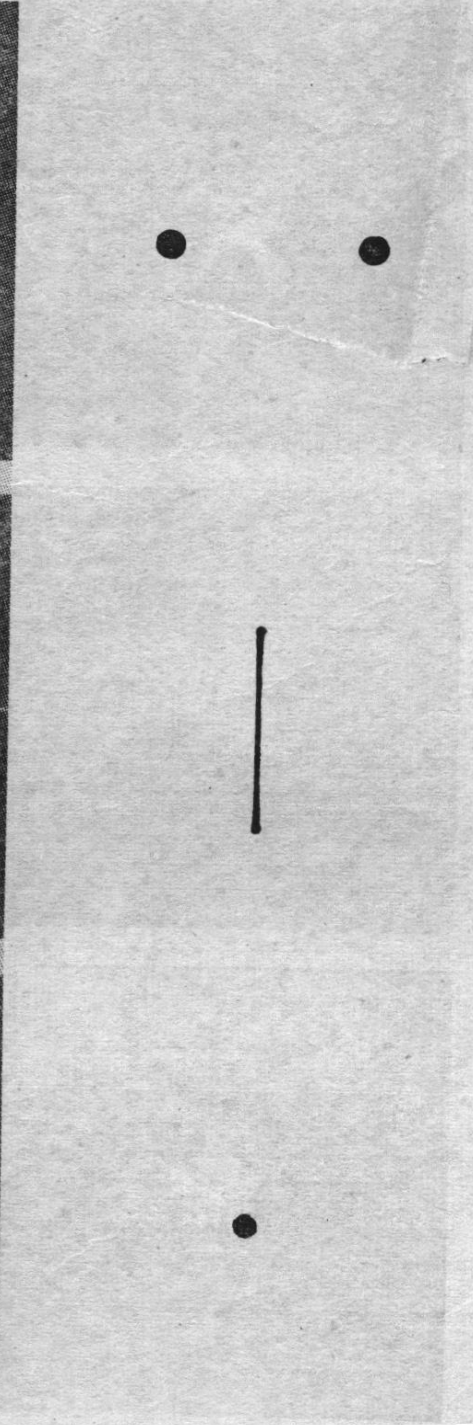
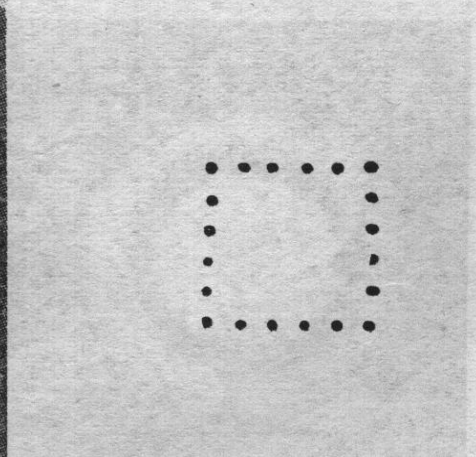
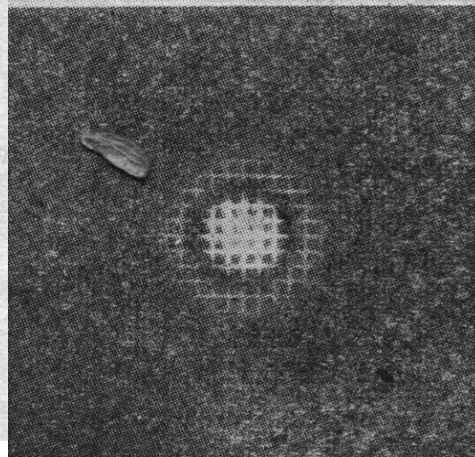
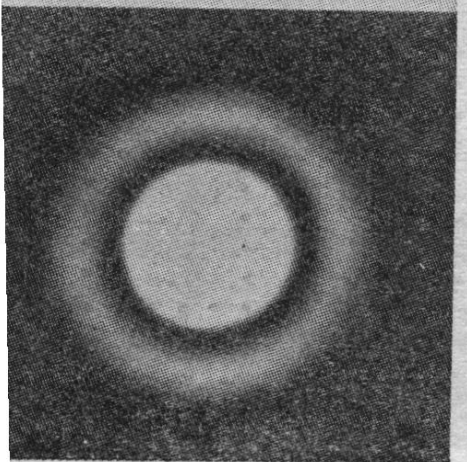
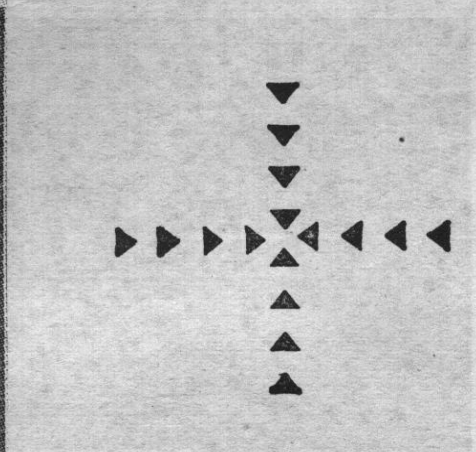
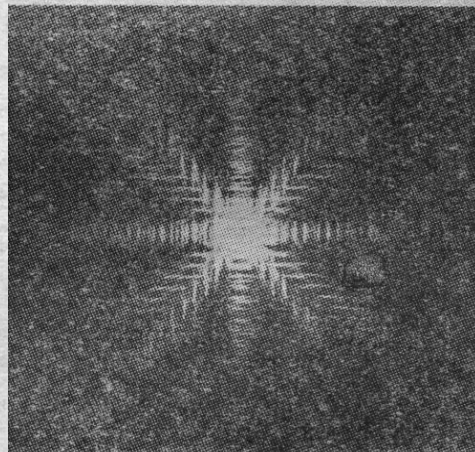
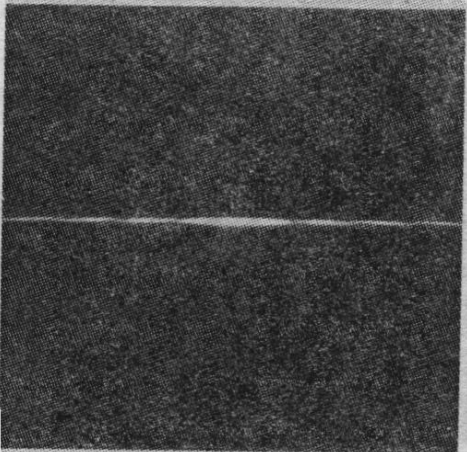
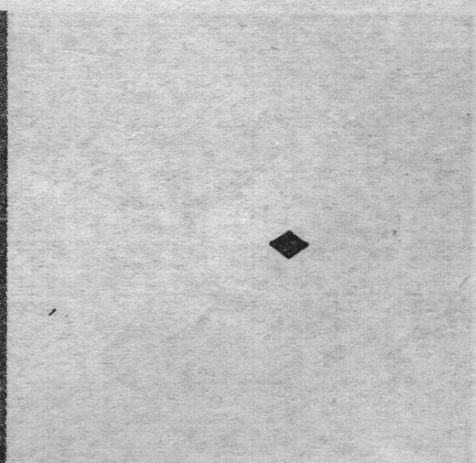
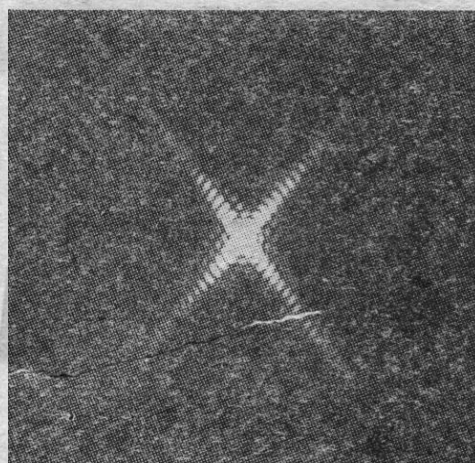
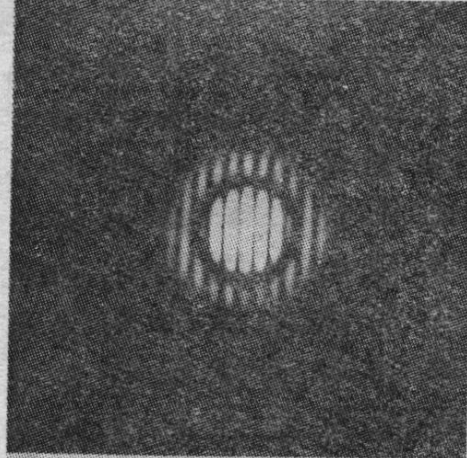
可以看到大圆经傅立叶变换之后，其圆环小；而小圆经傅立叶变换之后，其圆环反而大。

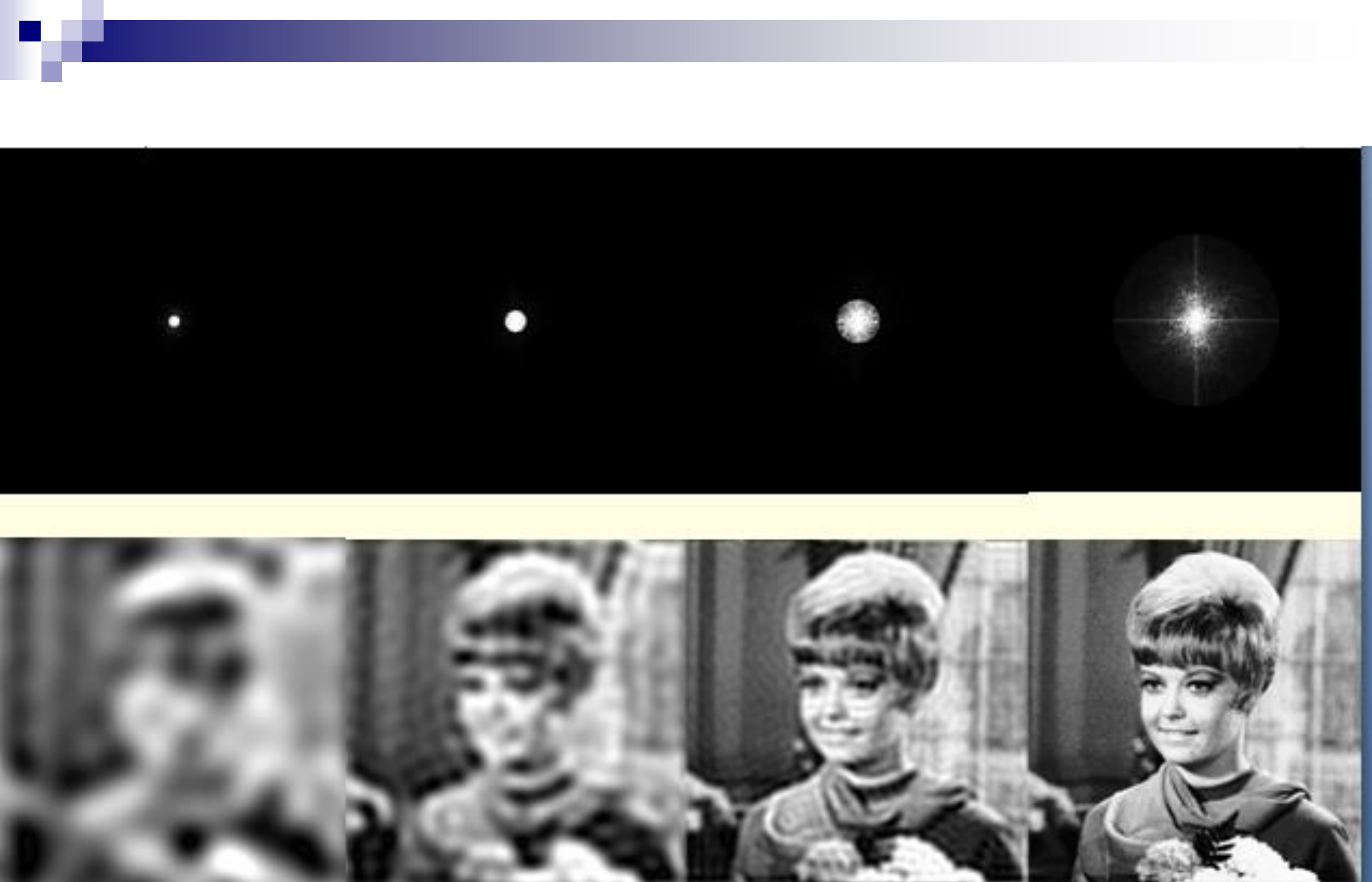
因为越尖锐变换越剧烈的信号总包含着更多的频率成分。

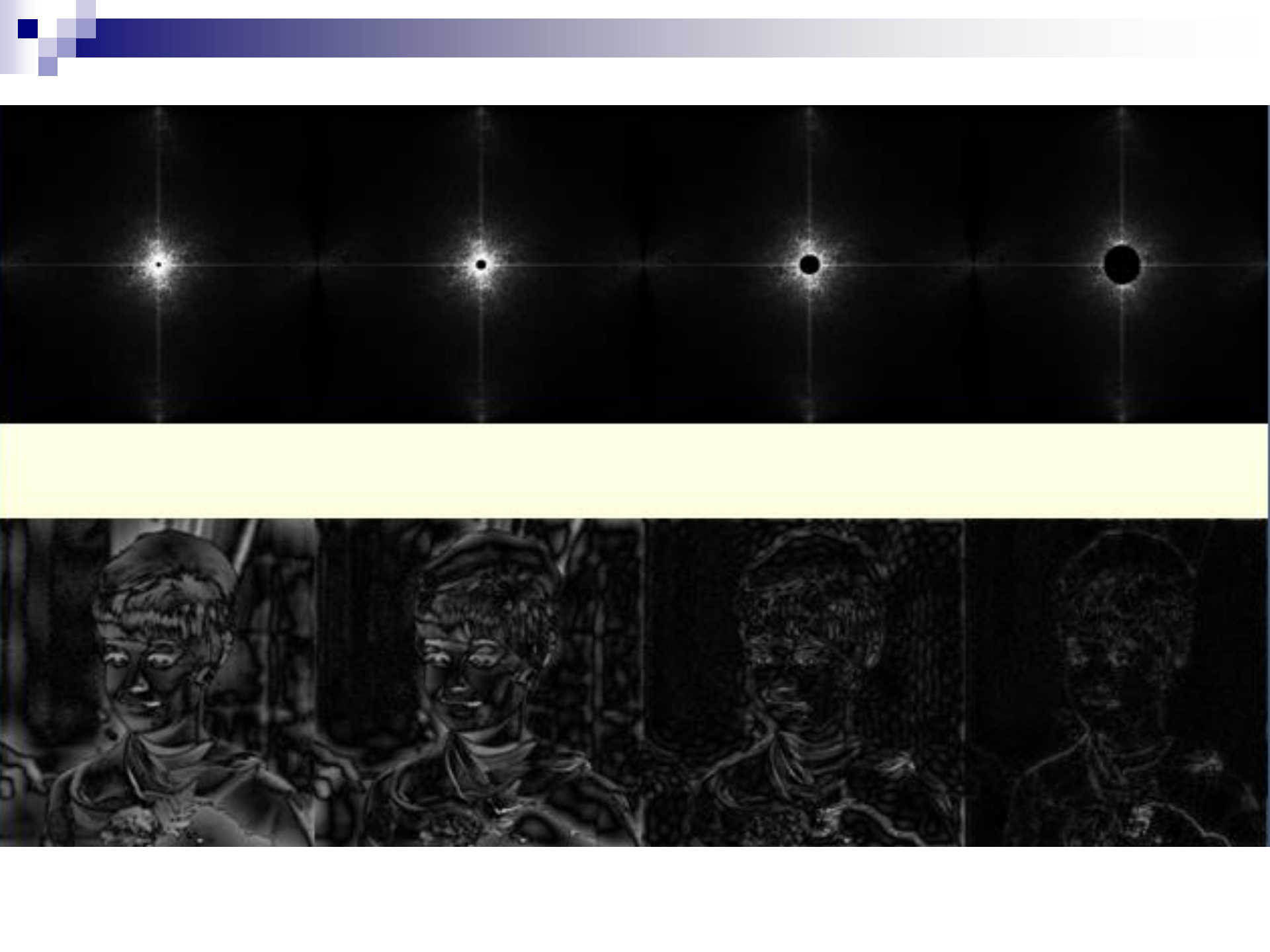


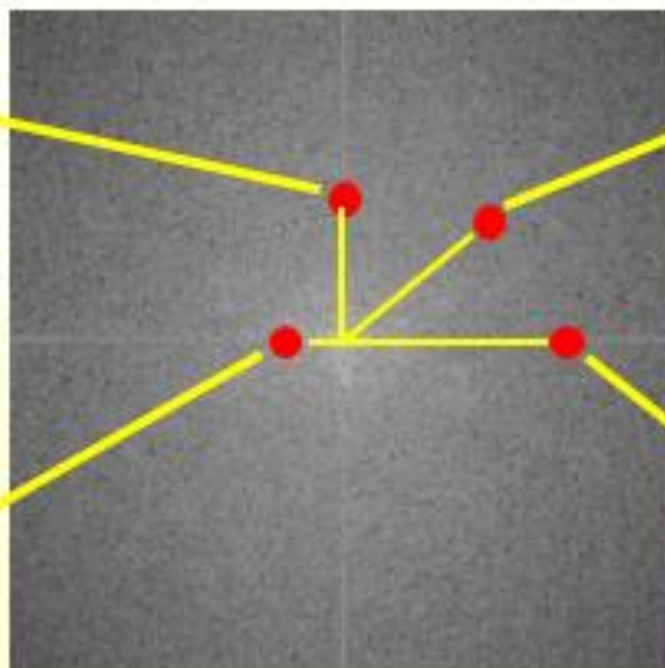
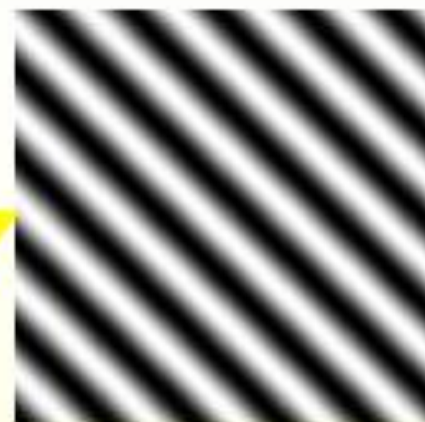
在垂直方向上需要更多的
频率分量，所以它的
波峰比较宽，而水平方
向上的波峰比较窄

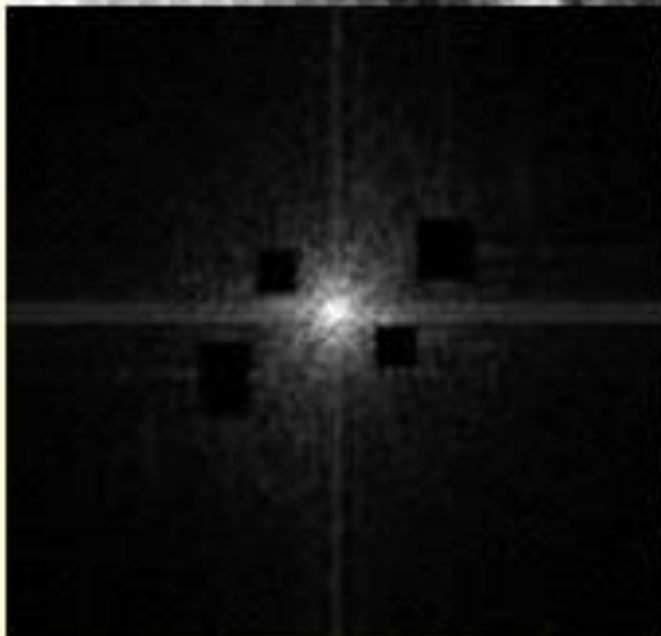
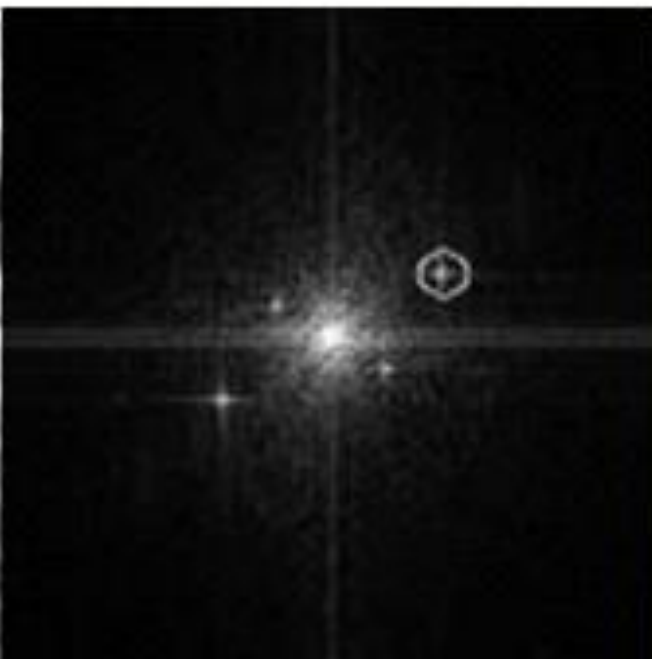


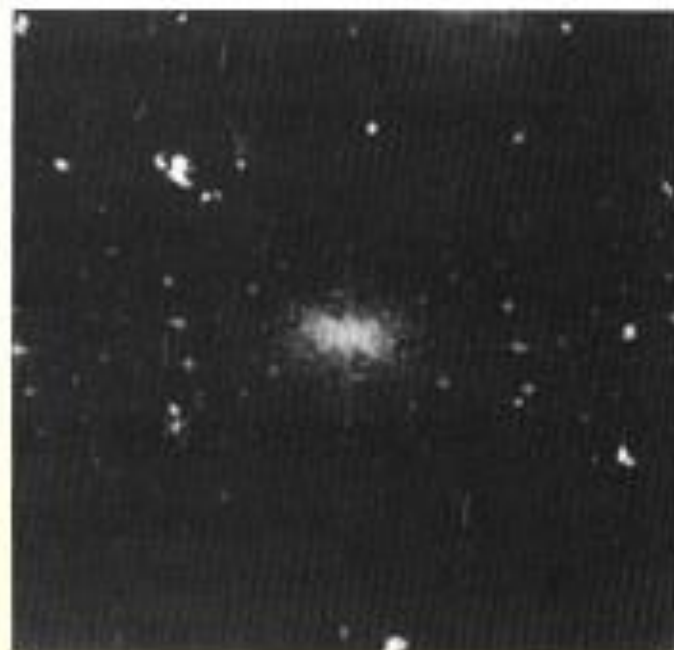




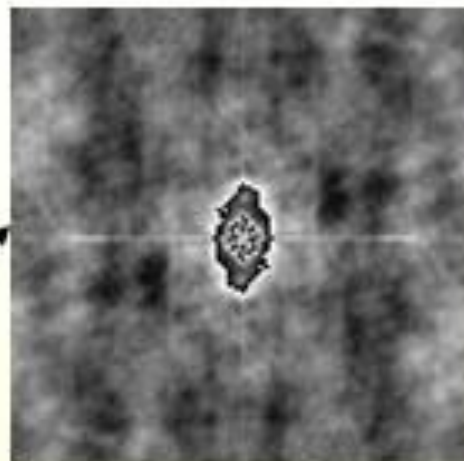








图像中的周期性噪声产生了变换中的尖峰信号



$$F^{-1}(|F(x)|)$$

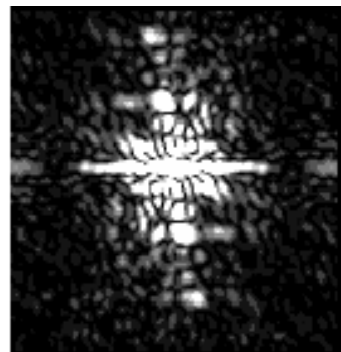
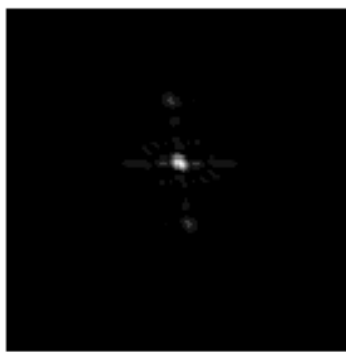


$$F^{-1}(F(x)/|F(x)|)$$

- 幅值与相位

主极大的值用 F_{max} 表示，第一个旁瓣的峰值用 F_{min} 表示

$$R = \frac{\log_a (1 + KF_{max})}{\log_a (1 + KF_{min})}$$



例题：对一幅图像实施二维DFT，显示并观察其频谱。

解：源程序及运行结果如下：

%对单缝进行快速傅里叶变换，以三种方式显示频谱，
%即：直接显示（坐标原点在左上角）；把坐标原点平
%移至中心后显示；以对数方式显示。

```
f=zeros(512,512);
```

```
f(246:266,230:276)=1;
```

```
subplot(221),imshow(f,[]),title('单狭缝图像')
```

```
F=fft2(f); %对图像进行快速傅里叶变换
```

```
S=abs(F);
```

```
subplot(222)
```

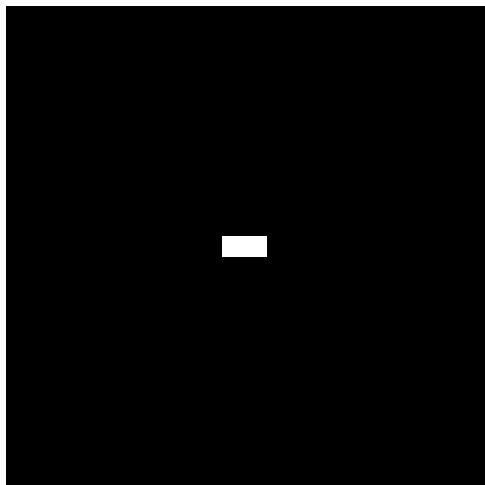
```
imshow(S,[]) %显示幅度谱
```

```
title('幅度谱（频谱坐标原点在左上角）')
```

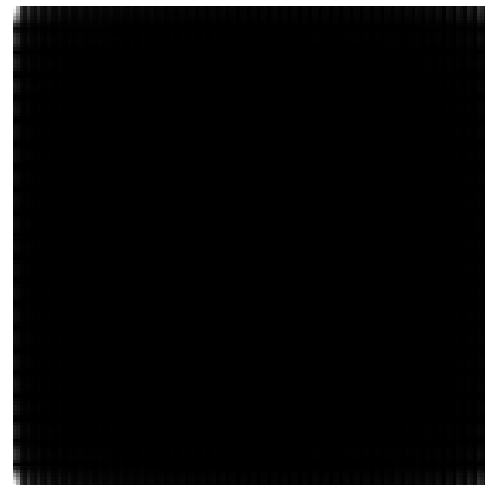
```
Fc=fftshift(F); %把频谱坐标原点由左上角移至屏幕中央
subplot(223)
Fd=abs(Fc);
imshow(Fd,[])
ratio=max(Fd(:))/min(Fd(:))
%ratio = 2.3306e+007,动态范围太大，显示器无法正常显示
title('幅度谱（频谱坐标原点在屏幕中央）')
S2=log(1+abs(Fc));
subplot(224)
imshow(S2,[])
title('以对数方式显示频谱')
```

运行上面程序后，结果如下：

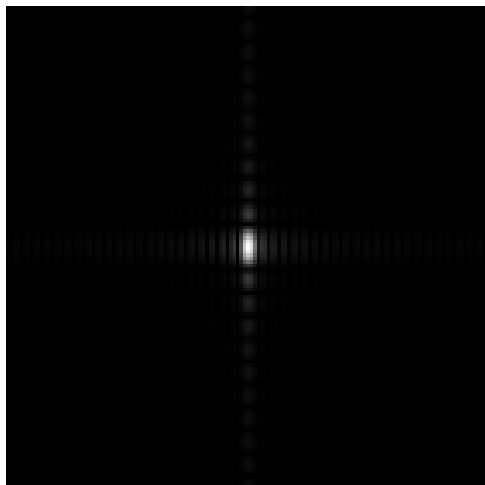
单狭缝图像



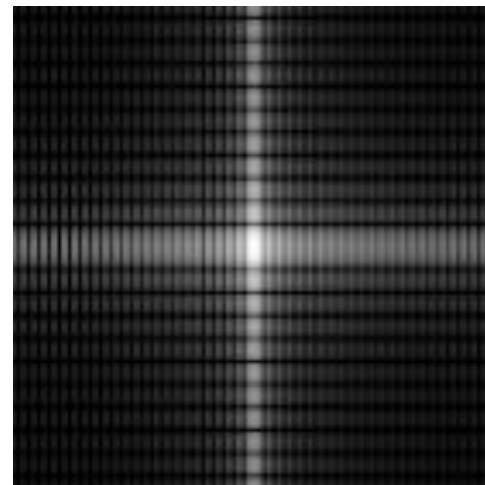
幅度谱 (频谱坐标原点在左上角)



幅度谱 (频谱坐标原点在屏幕中央)



以对数方式显示频谱



二维离散傅里叶变换的性质

➤ 线性性

$$\begin{cases} f_1(x, y) \leftrightarrow F_1(u, v) \\ f_2(x, y) \leftrightarrow F_2(u, v) \end{cases} \Rightarrow c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y) \leftrightarrow c_1 F_1(u, v) + c_2 F_2(u, v)$$


证明:

$$\begin{aligned} & DFT \left[c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y) \right] \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left[c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y) \right] \cdot e^{-j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \\ &= c_1 \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f_1(x, y) e^{-j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} + c_2 \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f_2(x, y) e^{-j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \\ &= c_1 F_1(u, v) + c_2 F_2(u, v) \end{aligned}$$

%imagelinear.m

%该程序验证了二维DFT的线性性质

```
f=imread('D:\chenpc\data\thry\chpt4\Fig4.04(a).jpg');  
g=imread('D:\chenpc\data\thry\chpt4\Fig4.30(a).jpg');  
[m,n]=size(g);  
f(m,n)=0;  
f=im2double(f);  
g=im2double(g);  
subplot(221)  
imshow(f,[])  
title('f')  
subplot(222)  
imshow(g,[])  
title('g')
```



```
F=fftshift(fft2(f));  
G=fftshift(fft2(g));  
subplot(223)  
imshow(log(abs(F+G)),[])  
FG=fftshift(fft2(f+g));  
title('DFT(f)+DFT(g)')  
subplot(224)  
imshow(log(abs(FG)),[])  
title('DFT(f+g)')
```

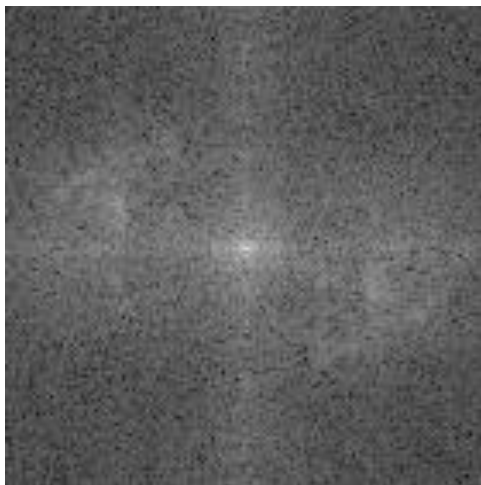
f



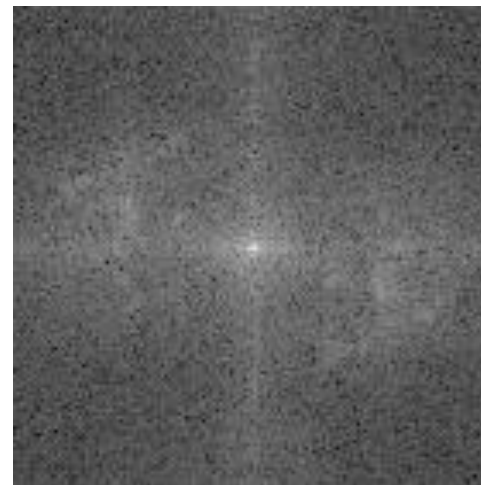
g



$\text{DFT}(f) + \text{DFT}(g)$



$\text{DFT}(f+g)$



➤ 可分离性

二维DFT可视为由沿x,y方向的两个一维DFT所构成。

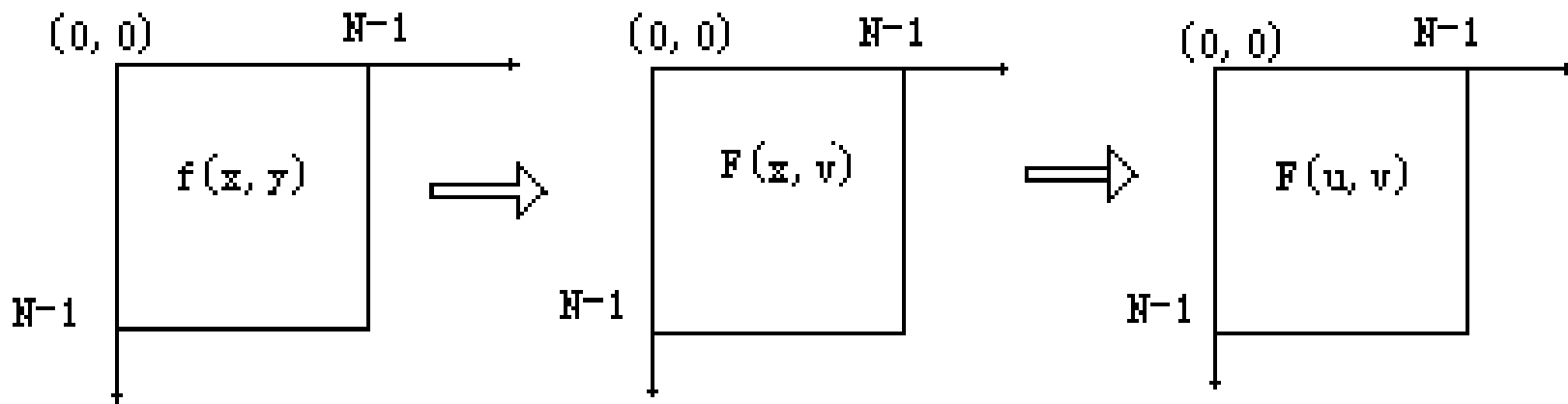
$$\begin{aligned} F(u, v) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \left[\sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi \frac{vy}{N}} \right] \cdot e^{-j2\pi \frac{ux}{M}} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} F(x, v) \cdot e^{-j2\pi \frac{ux}{M}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \cdot e^{j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \cdot e^{j2\pi \frac{vy}{N}} \right] \cdot e^{j2\pi \frac{ux}{M}} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u, y) \cdot e^{j2\pi \frac{ux}{M}} \end{aligned}$$

其中：

$$\begin{cases} F(x, v) = \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi \frac{vy}{N}} \sim y \text{ 方向的 DFT} \\ F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} F(x, v) \cdot e^{-j2\pi \frac{ux}{M}} \sim x \text{ 方向的 DFT} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(u, y) = \frac{1}{N} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \cdot e^{j2\pi \frac{vy}{N}} \sim y \text{ 方向的 IDFT} \\ f(x, y) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u, y) \cdot e^{j2\pi \frac{ux}{M}} \sim x \text{ 方向的 IDFT} \end{cases}$$



例题：编程验证二维离散傅里叶变换可分离为两个一维离散傅里叶变换。

解：

%myseparable.m

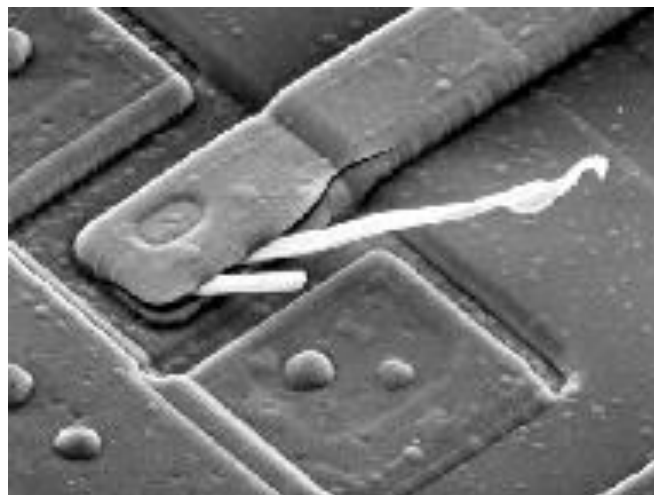
%该程序验证了二维DFT的可分离性质

%该程序产生了冈萨雷斯《数字图像处理》（第二版）

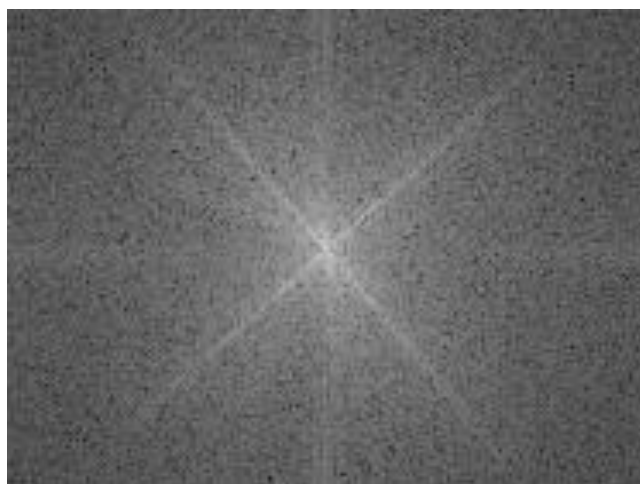
%P125 图4.4

```
f=imread('D:\chenpc\data\thry\chpt4\Fig4.04(a).jpg');
subplot(211)
imshow(f,[])
title('原图')
F=fftshift(fft2(f));
subplot(223)
imshow(log(1+abs(F)),[])
title('用fft2实现二维离散傅里叶变换')
[m,n]=size(f);
F=fft(f);    %沿x方向求离散傅里叶变换
G=fft(F')';  %沿y方向求离散傅里叶变换
F=fftshift(G);
subplot(224)
imshow(log(1+abs(F)),[])
title('用fft实现二维离散傅里叶变换')
```

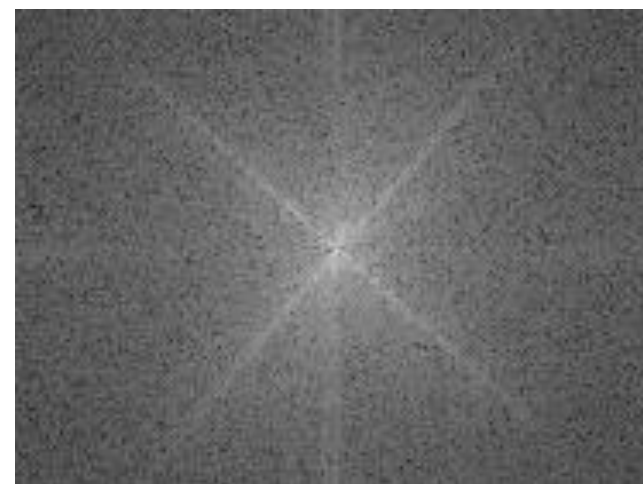
原图



用 fft^2 实现二维离散傅里叶变换



用 fft 实现二维离散傅里叶变换



➤ 平移性

$$f(x, y) \leftrightarrow F(u, v) \Rightarrow \begin{cases} f(x, y) \cdot e^{j2\pi\left[\frac{u_0x}{M} + \frac{v_0y}{N}\right]} \leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0) \\ f(x - x_0, y - y_0) \leftrightarrow F(u, v) \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N}\right)} \end{cases}$$

证明:

(1) 频域移位

$$\begin{aligned} & DFT \left[f(x, y) \cdot e^{j2\pi\left(\frac{u_0x}{M} + \frac{v_0y}{N}\right)} \right] \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot e^{j2\pi\left(\frac{u_0x}{M} + \frac{v_0y}{N}\right)} \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{(u-u_0)x}{M} + \frac{(v-v_0)y}{N}\right)} \\ &= F(u - u_0, v - v_0) \end{aligned}$$

结论:

$$f(x, y) \cdot e^{j2\pi\left(\frac{u_0x}{M} + \frac{v_0y}{N}\right)} \leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$$

当 $u_0 = \frac{M}{2}, v_0 = \frac{N}{2}$

$$e^{j2\pi(u_0x/M + v_0y/N)} = e^{j\pi(x+y)} = (-1)^{x+y}$$

$$\Rightarrow f(x, y) \cdot (-1)^{x+y} \leftrightarrow F\left(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2}\right)$$

即如果需要将频域的坐标原点从显示屏起始点 (0, 0) 移至显示屏的中心点只要将 $f(x,y)$ 乘以 $(-1)^{x+y}$ 因子再进行傅里叶变换即可实现。

例题：利用 $(-1)^{x+y}$ 对单缝图像 $f(x,y)$ 进行调制，实现把频谱坐标原点移至屏幕正中央的目标。

解：完成本题的源程序为：

%在傅里叶变换之前，把函数乘以 $(-1)^{x+y}$ ，相当于把频谱
%坐标原点移至屏幕窗口正中央。

```
f(512,512)=0;
```

```
f=mat2gray(f);
```

```
[Y,X]=meshgrid(1:512,1:512);
```

```
f(246:266,230:276)=1;
```

```
g=f.*(-1).^(X+Y);
```

```
subplot(221),imshow(f,[]),title('原图像f(x,y)')
```

```
subplot(222),imshow(g,[]),title('空域调制图像g(x,y)=f(x,y)*(-  
1)^{x+y}')
```

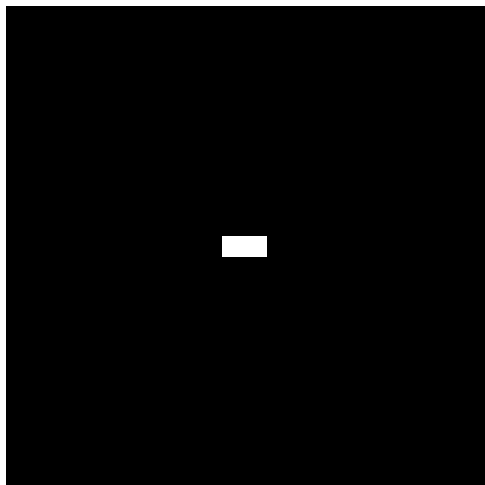
```
F=fft2(f);
```

```
subplot(223),imshow(log(1+abs(F)),[]),title('f(x,y)的傅里叶  
频谱')
```

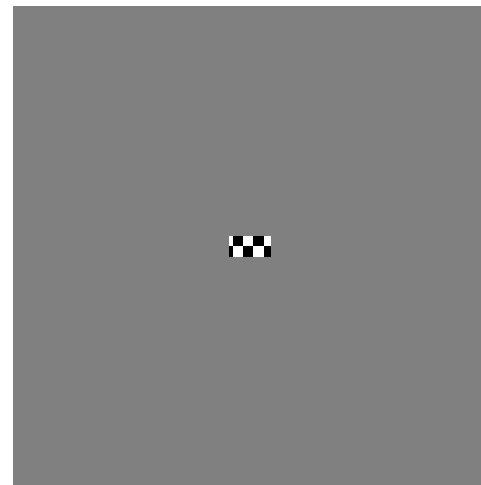
```
G=fft2(g);
```

```
subplot(224),imshow(log(1+abs(G)),[]),title('g(x,y)的傅里叶  
频谱')
```

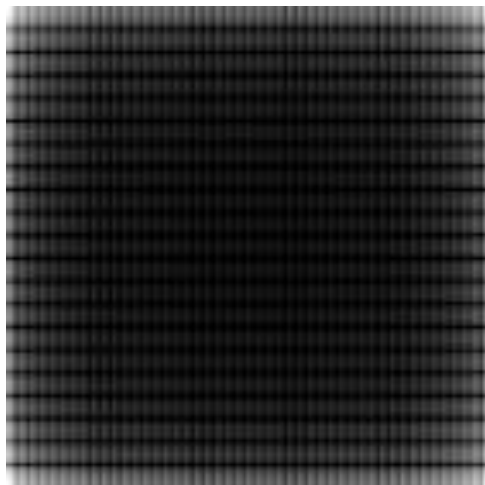
原图像 $f(x,y)$



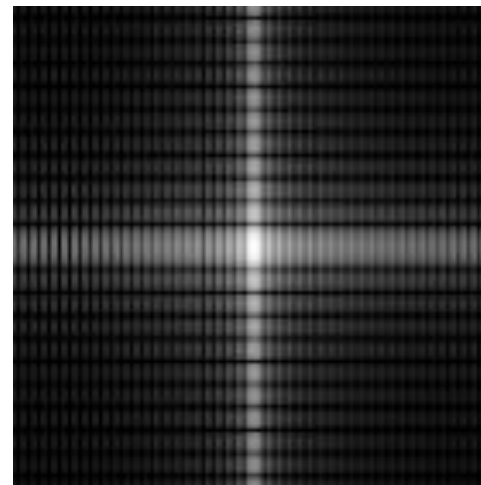
空域调制图像 $g(x,y)=f(x,y)*(-1)^{x+y}$

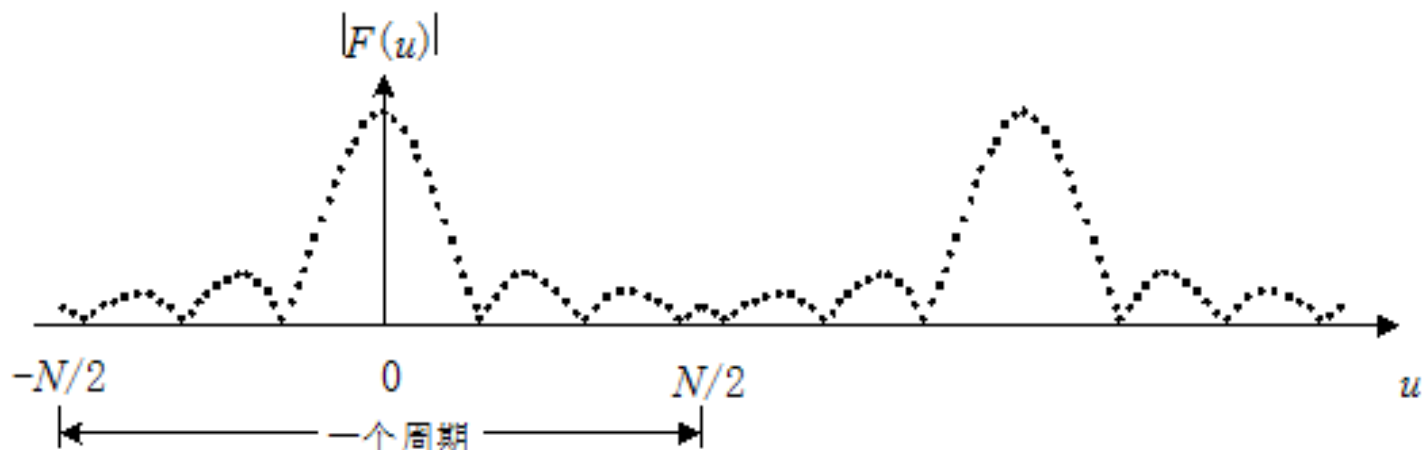


$f(x,y)$ 的傅里叶频谱

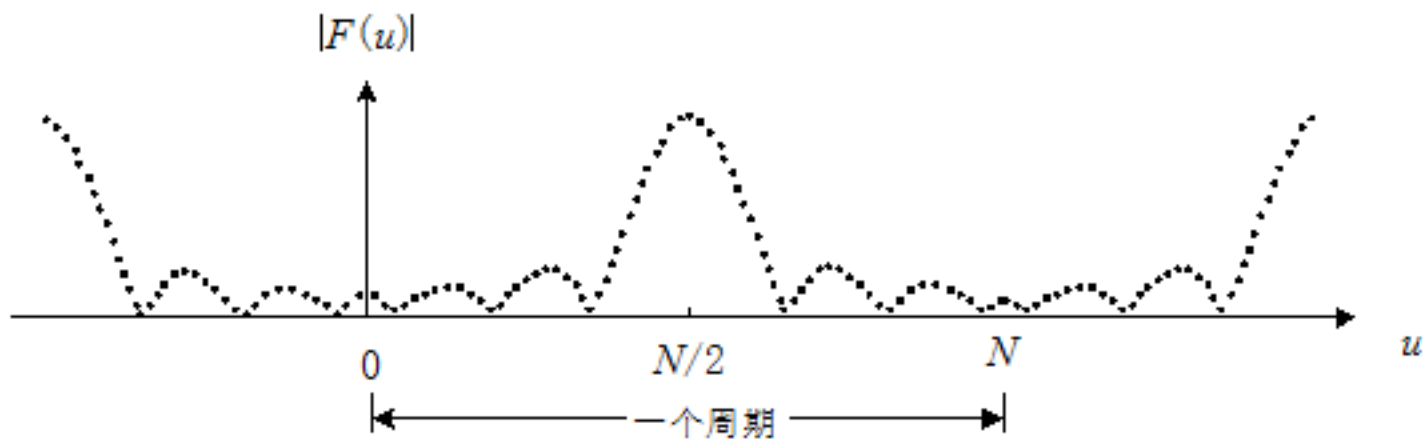


$g(x,y)$ 的傅里叶频谱





(a) 在 $[0, N-1]$ 周期中有两个背靠背半周期



(b) 同一区间内有一个完整的周期

这就意味着，坐标原点移到了频谱图像的中间位置，这一点十分重要，尤其是对以后的图像显示和滤波处理。

例题：利用 $(-1)^x$ 对 $f(x)$ 曲线进行调制，达到平移频域坐标原点至屏幕正中央的目的。

%以一维情况为例，说明空域调制对应着频域坐标原点移位。

```
f(1:512)=0;
```

```
f(251:260)=1;    %产生宽度为10的窗口函数
```

```
subplot(221),plot(f),title('宽度为10 的窗口函数')
```

```
F=fft(f,512);    %进行快速傅里叶变换，延拓周期周期为512
```

```
subplot(222)
```

```
plot(abs(F))    %绘幅度频谱（频谱坐标原点在左边界处）
```

```
title('幅度谱（频谱坐标原点在左边界处）')
```

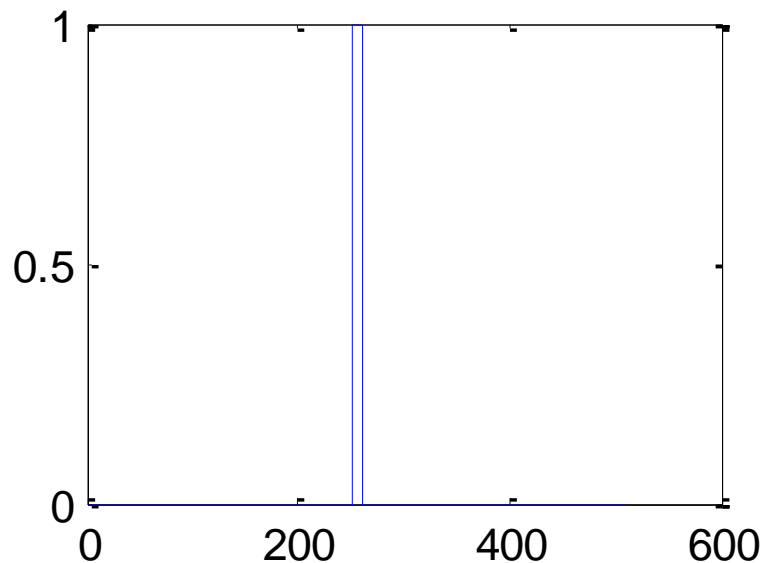
```
x=251:260;
```

```
f(251:260)=(-1).^x;    %把曲线 $f(x)$ 乘以 $(-1)^x$ ，可以把频谱  
                        %坐标原点移至屏幕正中央
```

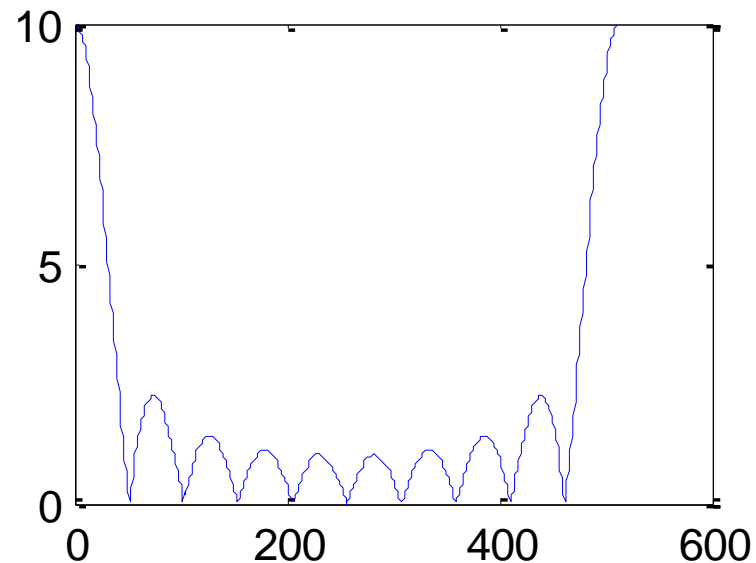
```
subplot(223),plot(f),title('宽度为10 的调制窗口函数')
```

```
F=fft(f,512);    %进行快速傅里叶变换
subplot(224);
plot(abs(F)) %直接显示幅度频谱（频谱坐标原点在正中央）
title('幅度谱（频谱坐标原点在中央）')
figure
f(1:512)=0;
f(251:270)=1;    %产生宽度为20的窗口函数
subplot(221),plot(f),title('宽度为20 的窗口函数')
F=fft(f,512);    %进行快速傅里叶变换，延拓周期周期为512
subplot(222)
plot(abs(F)) %绘幅度频谱（频谱坐标原点在左边界处）
title('幅度谱（频谱坐标原点在左边界处）')
x=251:270;
f(251:270)=(-1).^x;    %把曲线f(x)乘以(-1)^x，可以把频谱坐标原点移至
屏幕正中央
subplot(223),plot(f),title('宽度为20 的调制窗口函数')
F=fft(f,512);    %进行快速傅里叶变换
subplot(224);
plot(abs(F)) %直接显示幅度频谱（频谱坐标原点在正中央）
title('幅度谱（频谱坐标原点在中央）')
```

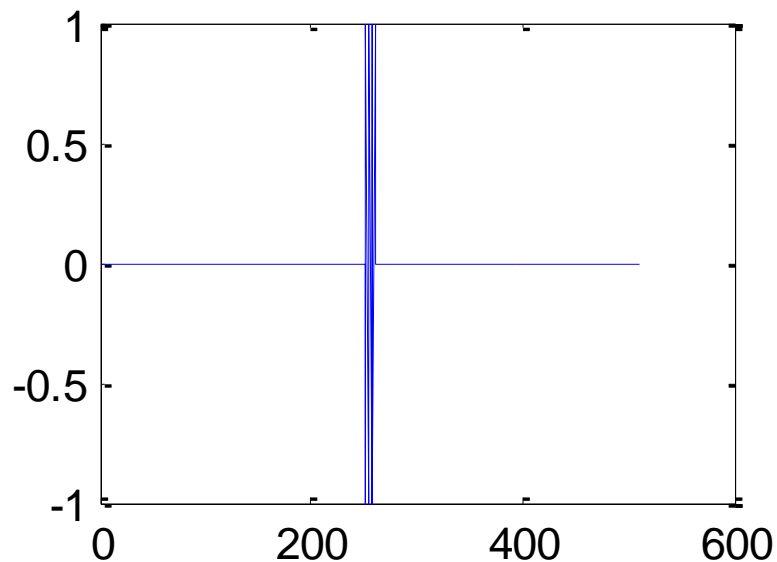
宽度为10的窗口函数



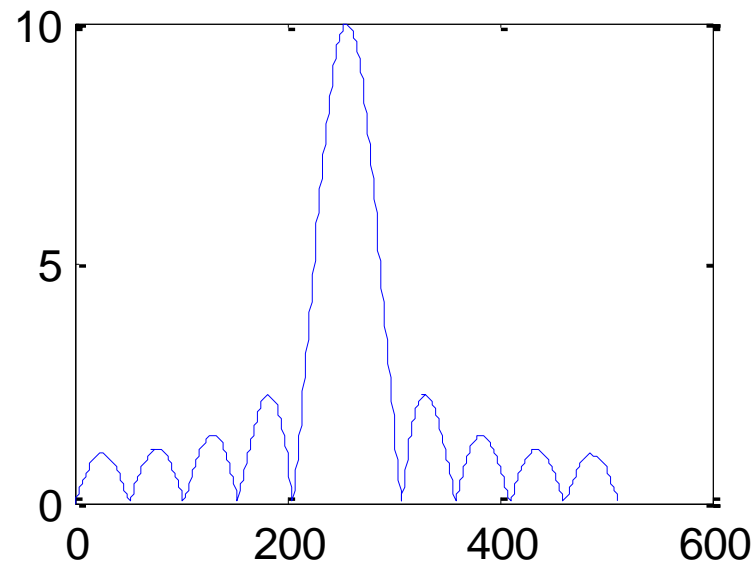
幅度谱 (频谱坐标原点在左边界处)



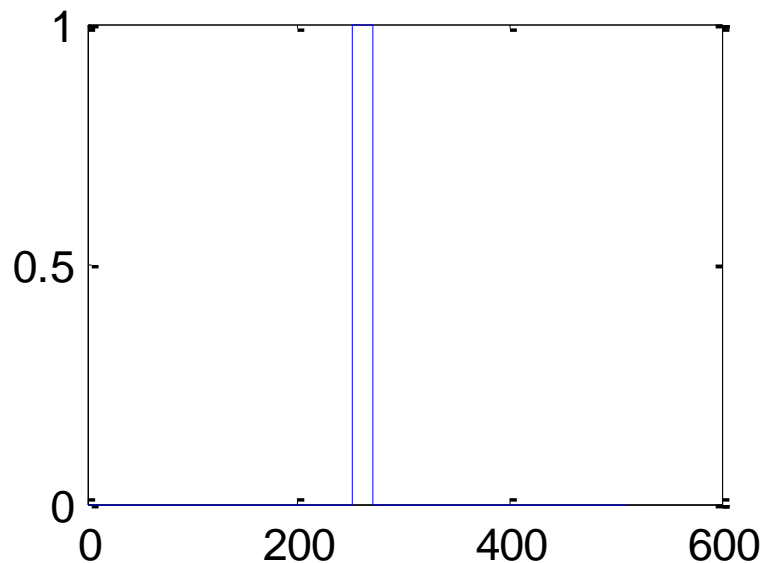
宽度为10的调制窗口函数



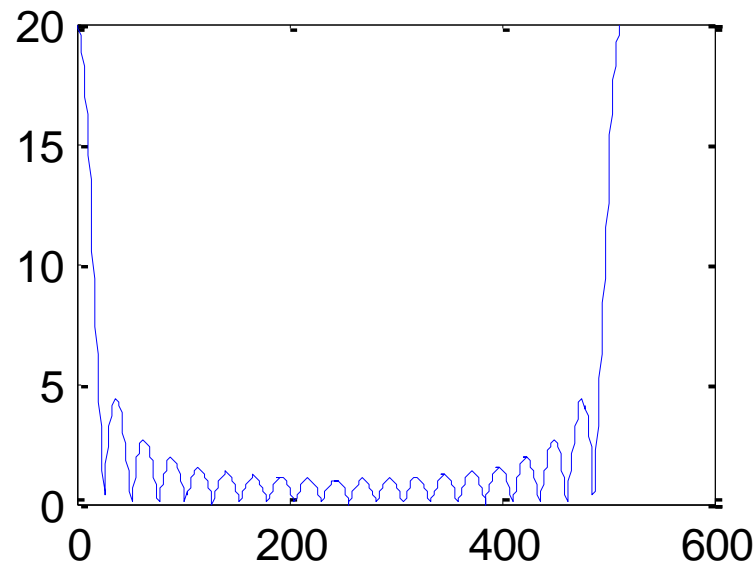
幅度谱 (频谱坐标原点在中央)



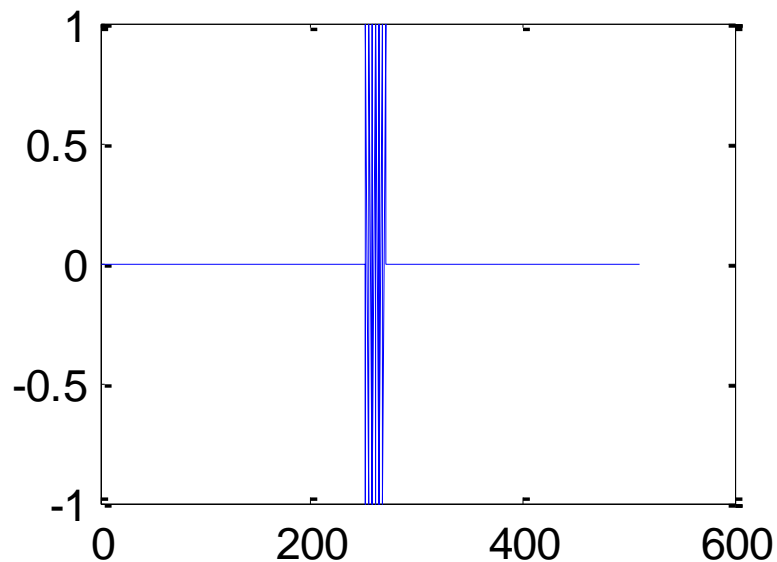
宽度为20的窗口函数



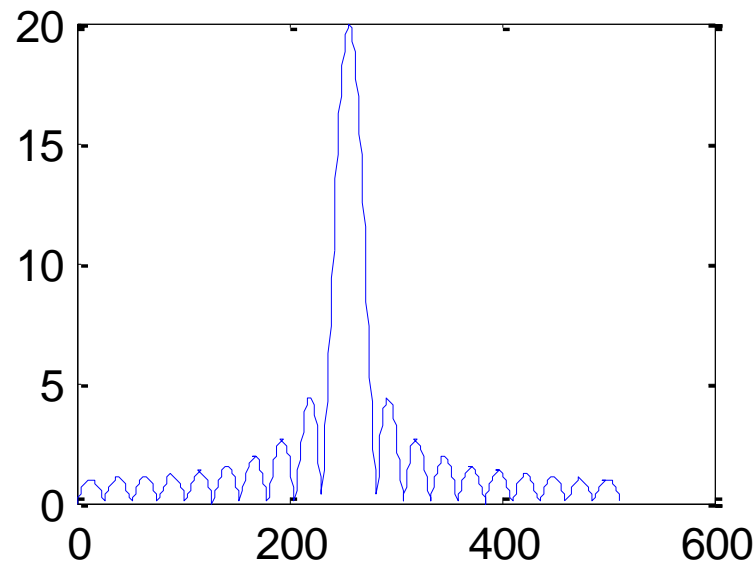
幅度谱 (频谱坐标原点在左边界处)



宽度为20的调制窗口函数



幅度谱 (频谱坐标原点在中央)



(2) 空域移位:

$$DFT[f(x - x^0, y - y^0)]$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x - x_0, y - y_0) \cdot e^{-j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x - x_0, y - y_0) \cdot e^{-j2\pi \left(\frac{u(x - x_0 + x_0)}{M} + \frac{v(y - y_0 + y_0)}{N} \right)} \\ &= e^{-j \left(\frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N} \right) \cdot 2\pi} \cdot \sum_{x=-x_0}^{M-1-x_0} \sum_{y=-y_0}^{N-1-y_0} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \\ &= e^{-j \left(\frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N} \right) \cdot 2\pi} \cdot \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \\ &= e^{-j \left(\frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N} \right) \cdot 2\pi} \cdot F(u, v) \end{aligned}$$

➤ 周期性和共轭对称性

周期性:

$$\begin{cases} F(u, v) = F(u + mM, v + nN) \\ f(x, y) = f(x + mM, y + nN) \end{cases}$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

共轭对称性:

$$\begin{aligned} F(u, v) &= F^*(-u, -v) \\ |F(u, v)| &= |F(-u, -v)| \end{aligned}$$

证明： (1) 周期性：

$$\begin{cases} F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \\ f(x, y) = \frac{1}{MN} \cdot \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \cdot e^{j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \end{cases}$$

$$e^{-j2\pi m} = 1$$

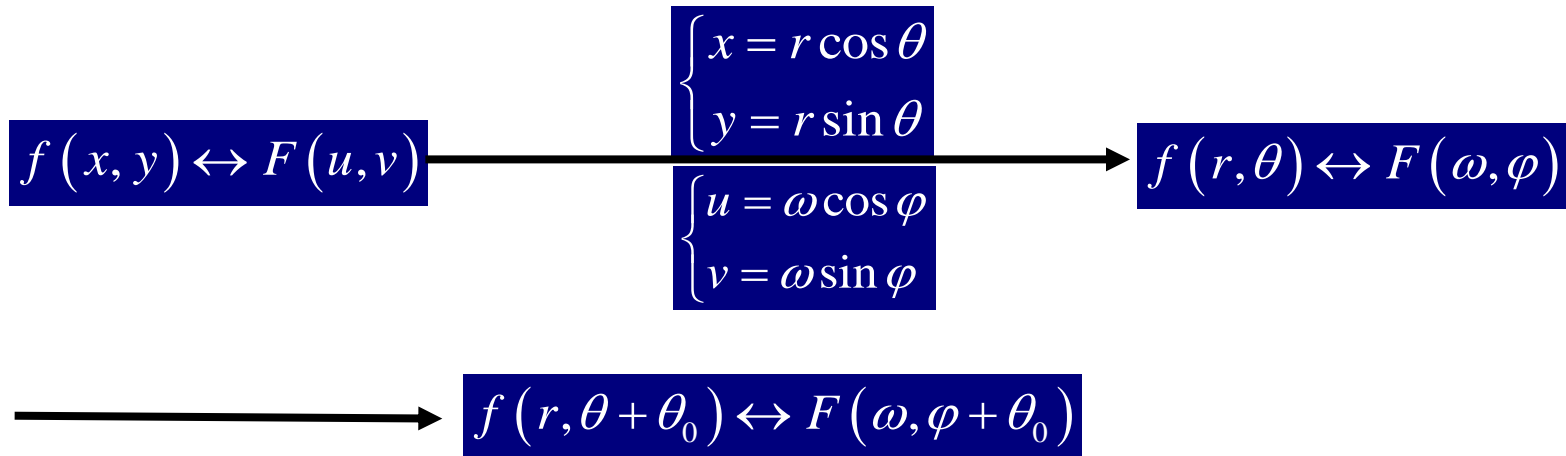
$$\begin{cases} F(u + mM, v + nN) = F(u, v) \\ f(x + mM, y + nN) = f(x, y) \end{cases}$$

(2) 共轭对称性：

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} = \left\{ \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi \left[\frac{(-u)x}{M} + \frac{(-v)y}{N} \right]} \right\}^* \\ &= F^*(-u, -v) \end{aligned}$$

$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)|, \text{ 即 } F(u, v) \text{ 关于原点对称}$$

➤ 旋转不变性



证明:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi(ux+vy)} \cdot dx dy$$

若 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \begin{cases} u = \omega \cos \varphi \\ v = \omega \sin \varphi \end{cases}$, 则:

$$F(\omega, \varphi) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \cdot e^{-j2\pi \cdot \omega \cdot r \cdot \cos(\varphi - \theta)} \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$F(\omega, \varphi + \theta_0) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \cdot e^{-j2\pi r \omega \cos[\varphi - (\theta - \theta_0)]} \cdot r dr d\theta$$

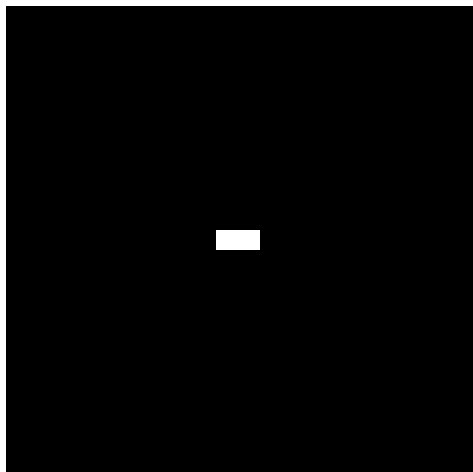
$$= \int_0^\infty \int_{-\theta_0}^{2\pi - \theta_0} f(r, \theta + \theta_0) \cdot e^{-j2\pi r \omega \cos(\varphi - \theta)} \cdot r dr d\theta$$

$$\begin{aligned} f(r, \theta) &= f(r, \theta + 2\pi) \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r, \theta + \theta_0) \cdot e^{-j2\pi r \omega \cos(\varphi - \theta)} \cdot r dr d\theta \end{aligned}$$

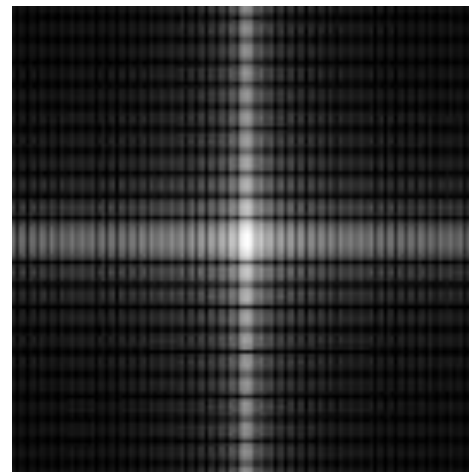
注：为看清问题的实质、简化旋转不变性的证明，以上用二维连续傅里叶变换进行证明。实际上，由连续积分公式进行离散化处理，即可得到离散公式，证明可参照连续情况进行。

```
f=zeros(512,512);  
f(246:266,230:276)=1;  
subplot(221);  
imshow(f,[])  
title('原图')  
F=fftshift(fft2(f));  
subplot(222);  
imshow(log(1+abs(F)),[])  
title('原图的频谱')  
f=imrotate(f,45,'bilinear','crop');  
subplot(223)  
imshow(f,[])  
title('旋转45^0图')  
Fc=fftshift(fft2(f));  
subplot(224);  
imshow(log(1+abs(Fc)),[])  
title('旋转图的频谱')
```

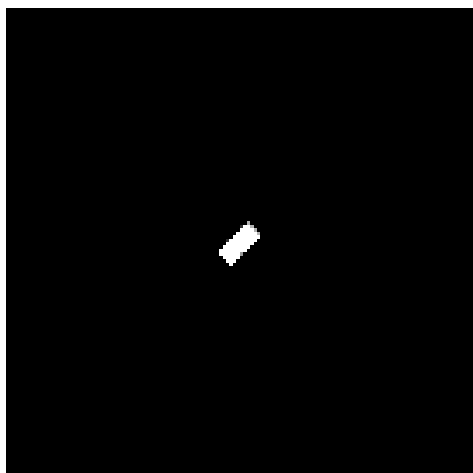
原图



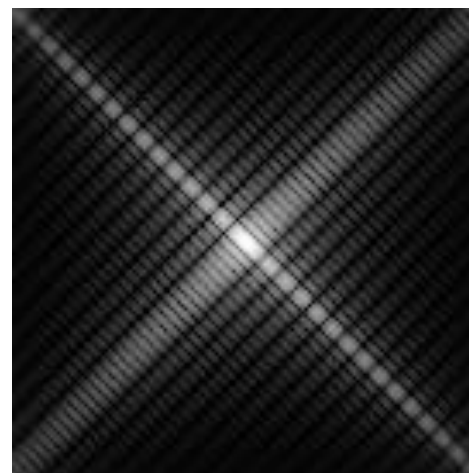
原图的频谱



旋转 45° 图



旋转图的频谱



➤ 离散卷积定理

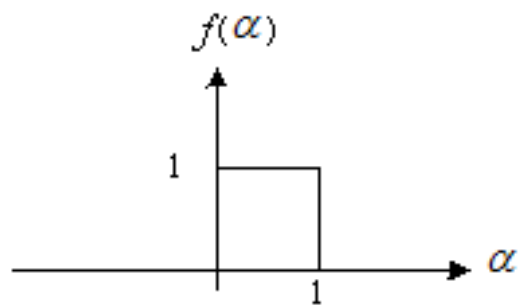
1) 连续卷积 $f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)g(x-a)da$

$$f(x, y) * g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v)g(x-u, y-v)dudv$$

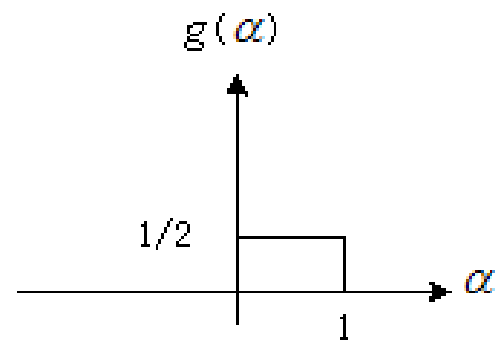
例1 求以下两个函数的卷积

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

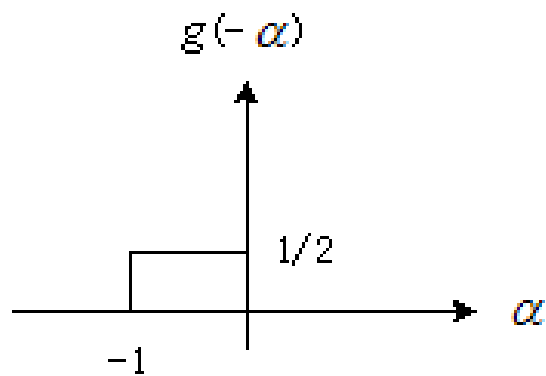
$$g(x) = \begin{cases} 1/2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



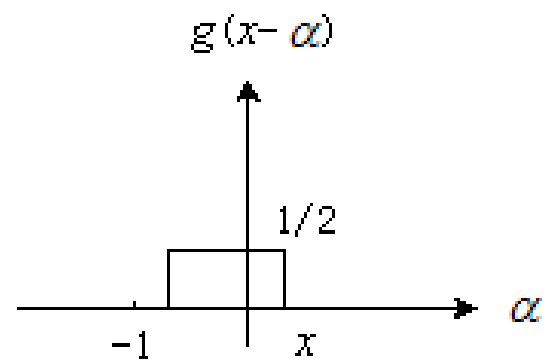
(a)



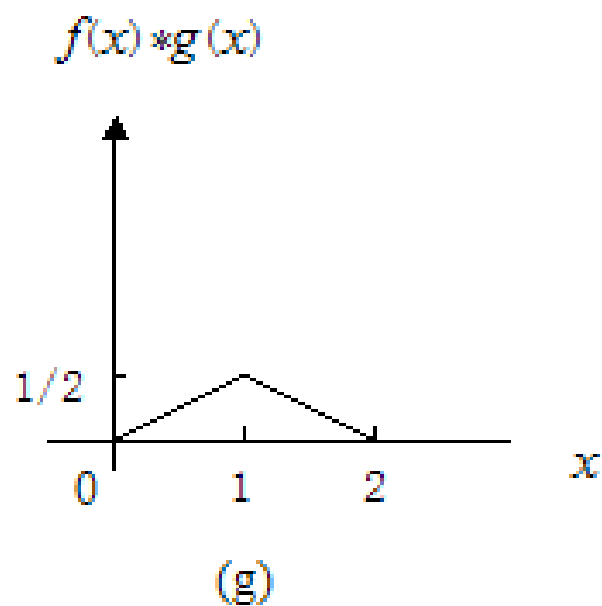
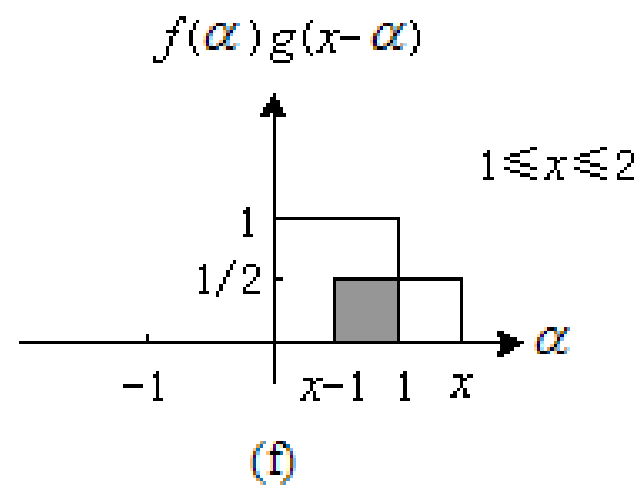
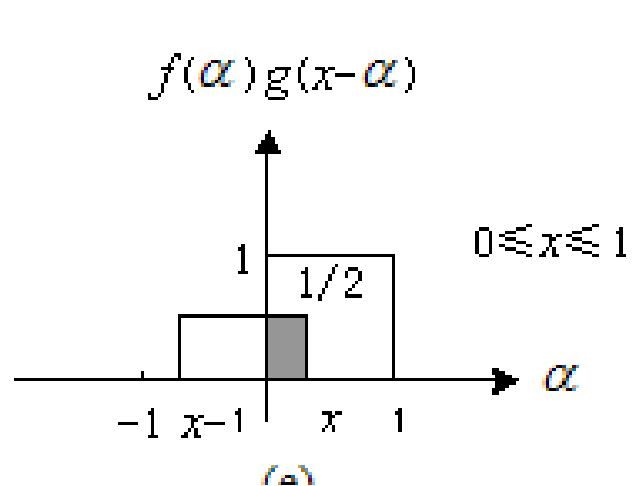
(b)



(c)



(d)



$$f(x) * g(x) = \begin{cases} x/2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - x/2 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

2) 离散卷积定理

离散卷积定义: $f_e(x) * g_e(x) = \sum_{m=0}^{M-1} f_e(m) g_e(x-m)$

$$f(x, y) * g(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) g(x-m, y-n)$$

空间滤波输出: $g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x+s, y+t)$

结论: 空间域进行滤波的过程就是“卷积”的过程。

$$\begin{cases} f(x, y) \leftrightarrow F(u, v) \\ g(x, y) \leftrightarrow G(u, v) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x, y) * g(x, y) \leftrightarrow F(u, v) \cdot G(u, v) \\ f(x, y) \cdot g(x, y) \leftrightarrow \frac{1}{MN} F(u, v) * G(u, v) \end{cases}$$

证明：（1）空域卷积和

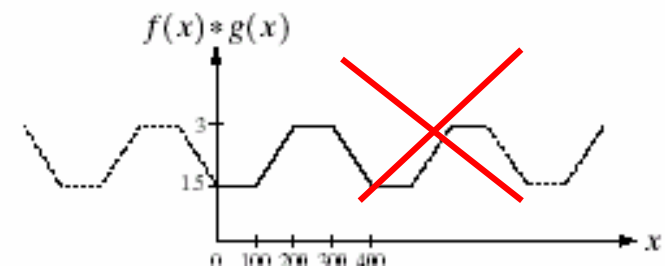
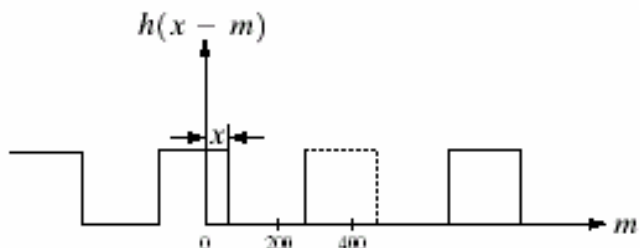
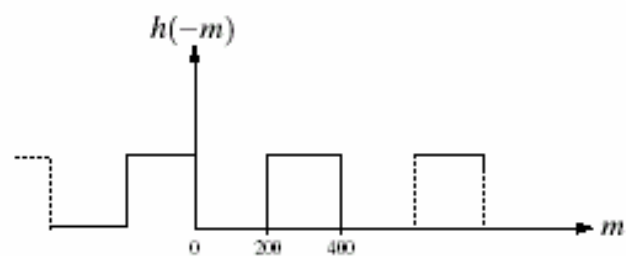
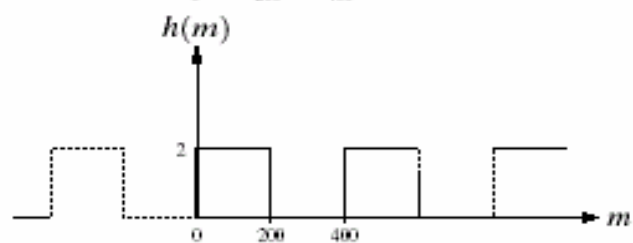
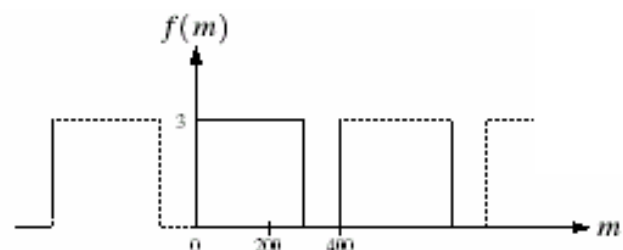
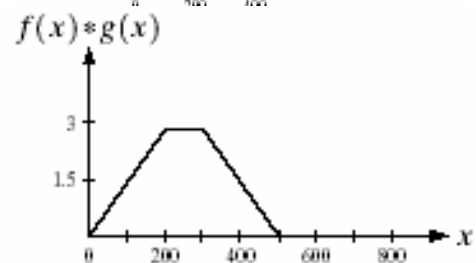
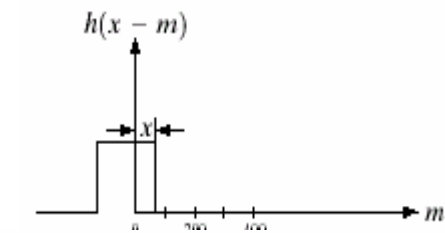
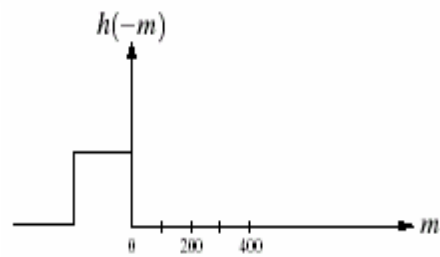
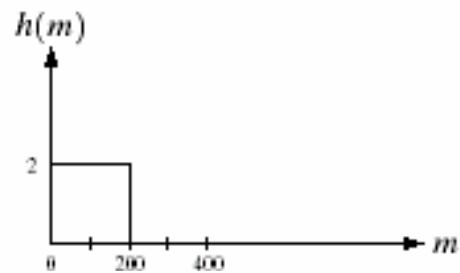
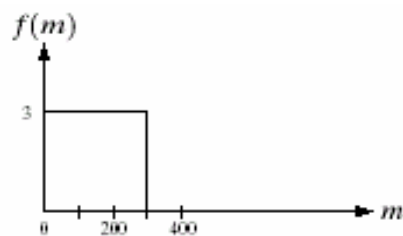
$$\begin{aligned} & DFT[f(x, y) * g(x, y)] \\ &= DFT\left[\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cdot g(x-m, y-n)\right] \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cdot DFT[g(x-m, y-n)] \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N}\right)} \cdot G(u, v) \\ &= F(u, v) \cdot G(u, v) \end{aligned}$$

(2) 频域卷积和:

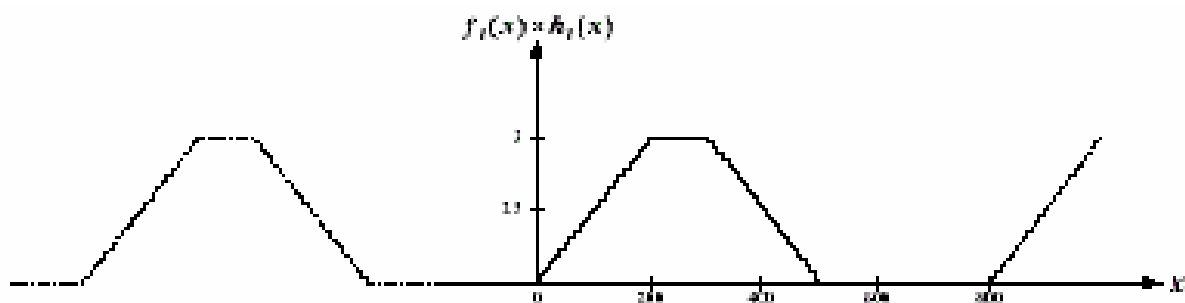
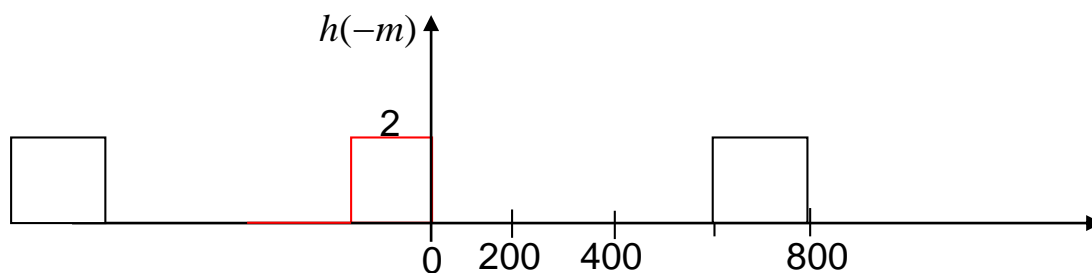
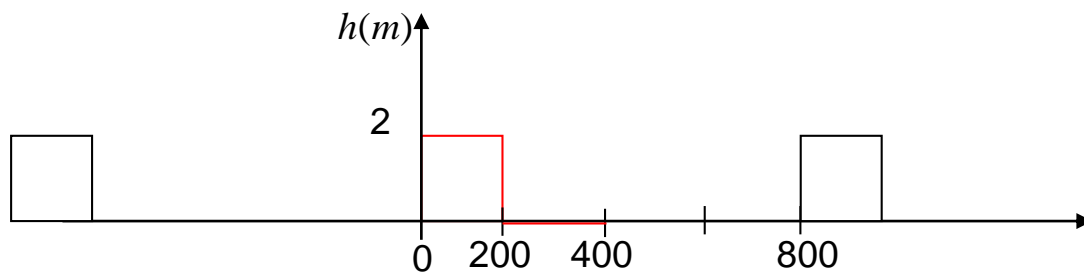
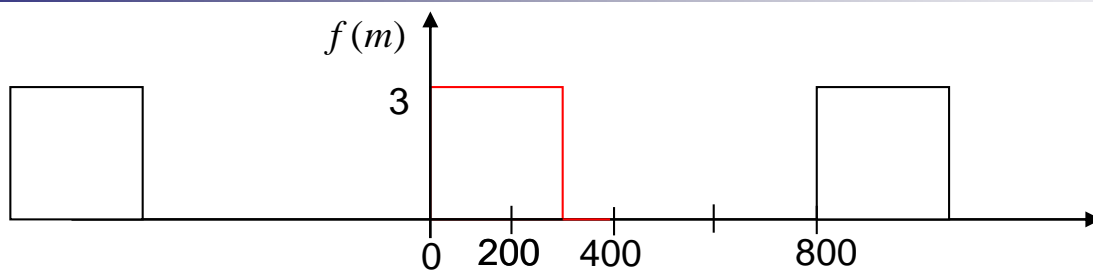
$$\begin{aligned} & DFT \left[f(x, y) \cdot g(x, y) \right] \\ &= DFT \left[\frac{1}{MN} \cdot \sum_{u'=0}^{M-1} \sum_{v'=0}^{N-1} F(u', v') \cdot e^{j2\pi \left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N} \right)} \cdot g(x, y) \right] \\ &= \frac{1}{MN} \cdot \sum_{u'=0}^{M-1} \sum_{v'=0}^{N-1} F(u', v') \cdot DFT \left[e^{j2\pi \left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N} \right)} \cdot g(x, y) \right] \\ &= \frac{1}{MN} \cdot \sum_{u'=0}^{M-1} \sum_{v'=0}^{N-1} F(u', v') \cdot G(u - u', v - v') \\ &= \frac{1}{MN} \cdot F(u, v) * G(u, v) \end{aligned}$$

离散的卷积原理基本上是和连续卷积相同，其差别仅仅是在与抽样间隔对应的离散增量处发生位移，用求和代替微分，由于离散傅里叶变换和它的逆傅里叶变换都是周期函数，那么离散卷积定理应该和这个周期联系起来，就是让在计算卷积时让这两个离散函数具有同样的周期，否则将产生错误。

注意：利用FFT计算卷积时，为防止频谱混叠误差，需对离散的二维函数补零，即周期延拓，对两个函数同时添加零，使它们具有相同的周期。



周期延拓



周期延拓

$f(x, y)$ 的大小为 $A \times B$ $g(x, y)$ 的大小为 $C \times D$

$$f_e(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & 0 \leq x \leq A-1, 0 \leq y \leq B-1 \\ 0 & A \leq x \leq M-1, B \leq y \leq N-1 \end{cases}$$

$$g_e(x, y) = \begin{cases} g(x, y) & 0 \leq x \leq C-1, 0 \leq y \leq D-1 \\ 0 & C \leq x \leq M-1, D \leq y \leq N-1 \end{cases}$$

$$M \geq A + C - 1, N \geq B + D - 1$$

$$z_e(x, y) = f_e(x, y) * g_e(x, y)$$

空间域滤波和频域滤波的关系

$$\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} s(x, y) \delta(x, y) = s(0, 0)$$

$$\frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \delta(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} = \frac{1}{MN}$$

$$\delta(x, y) * h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \delta(m, n) h(x-m, y-n) = \frac{h(x, y)}{MN}$$

$$f(x, y) * h(x, y) \Rightarrow F(u, v) H(u, v)$$

$$\delta(x, y) * h(x, y) \Rightarrow H(u, v)$$

$$h(x, y) \Rightarrow H(u, v)$$

空间域和频域的
滤波器构成
傅里叶变换对

➤ 相关定理

$$f(x, y) \circ g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) g(x + \beta, y + \beta) d\alpha d\beta$$

$$f(x, y) \circ g(x, y) \Rightarrow F(u, v) G^*(u, v)$$

$$f(x, y) \circ g^*(x, y) \Rightarrow F(u, v) G(u, v)$$

证明:

$$\begin{aligned} & DFT \left[f(x, y) \circ g(x, y) \right] \\ &= DFT \left[\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cdot g(x+m, y+n) \right] \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cdot DFT \left[g(x+m, y+n) \right] \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cdot e^{j2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right)} \cdot G(u, v) \\ &= \left[\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cdot e^{-j2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right)} \right]^* \cdot G(u, v) \\ &= F^*(u, v) \cdot G(u, v) \end{aligned}$$