

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/359578311>

Helmert variance component estimation with non-negative constraint of covariance matrix

Article in *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica* · March 2022

DOI: 10.11947/j.AGCS.2022.20200333

CITATIONS

0

6 authors, including:



Leyang Wang
East China University of Technology

140 PUBLICATIONS 426 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



Xiong Zhao
Wuhan University

9 PUBLICATIONS 21 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



Wenbin Xu
Central South University

78 PUBLICATIONS 831 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



Chisheng Wang
Shenzhen University

78 PUBLICATIONS 663 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Time-Series Analysis on PS-InSAR results for monitoring bridges [View project](#)



inversion and adjustment [View project](#)

引文格式: 王乐洋, 赵雄, 许文斌, 等. 协方差阵非负约束的赫尔默特方差分量估计 [J]. 测绘学报, 2022, 51(3): 351-360. DOI: 10.11947/j. AGCS.2022.20200333.



WANG Leyang, ZHAO Xiong, XU Wenbin, et al. Helmert variance component estimation with non-negative constraint of covariance matrix [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2022, 51 (3): 351-360. DOI: 10. 11947/j. AGCS. 2022.20200333.

协方差阵非负约束的赫尔默特方差分量估计

王乐洋^{1,7}, 赵 雄^{1,2}, 许文斌^{3,4}, 汪驰升⁵, 方 楠^{3,4}, 谢 磊⁶

1. 东华理工大学测绘工程学院,江西 南昌 330013; 2. 武汉大学测绘学院,湖北 武汉 430079; 3. 中南大学地球科学与信息物理学院,湖南 长沙 410083; 4. 有色金属成矿预测与地质环境监测教育部重点实验室,湖南 长沙 410083; 5. 深圳大学自然资源部大湾区地理环境监测重点实验室,广东 深圳 518060; 6. 香港理工大学土地测量及地理资讯学系,香港 999077; 7. 自然资源部环鄱阳湖区域矿山环境监测与治理重点实验室,江西 南昌 330013

Helmert variance component estimation with non-negative constraint of covariance matrix

WANG Leyang^{1,7}, ZHAO Xiong^{1,2}, XU Wenbin^{3,4}, WANG Chisheng⁵, FANG Nan^{3,4}, XIE Lei⁶

1. Faculty of Geomatics, East China University of Technology, Nanchang 330013, China; 2. School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China; 3. School of Geosciences and Info-Physics, Central South University, Changsha 410083, China; 4. Key Laboratory of Metallogenetic Prediction of Nonferrous Metals and Geological Environment Monitoring, Ministry of Education, Changsha 410083, China; 5. Key Laboratory of Geo-Environmental Monitoring of Great Bay Area, MNR, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China; 6. Department of Land Surveying and Geo-Informatics, The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong 999077, China; 7. Key Laboratory of Mine Environmental Monitoring and Improving around Poyang Lake, Ministry of Natural Resources, Nanchang 330013, China

Abstract: How to determine the relative weight ratio in geodetic data inversion among various datasets is one of the challenging topics. In recent years, Helmert variance component estimation method (HVCE) has been widely used in the field of relative weights of joint inversion slip distributions due to its advantage of simultaneously estimating the scale factors between virtual and actual observations. However, the HVCE method sometimes suffers from the occurrence of negative variance. To overcome these problems, we propose linear inequality constraints based helmert variance component estimation method (LC-HVCE). We carry out synthetic experiment to verify the effectiveness and robustness of the LC-HVCE method and estimate the uncertainty of LC-HVCE method by Monte carlo method. We apply the proposed method to invert for the source parameters of the 2009 Mw6.3 L'Aquila earthquake (Italy). We find that LC-HVCE method is more applicable and stability than HVCE method in determining relative weight ratio and regularization parameter.

Key words: Helmert variance component estimation; relative weight ratio; regularization parameter; linear inequality constraints

Foundation support: The National Natural Science Foundation of China (Nos. 41874001; 42174011; 41664001; 41804015); The National Key Research and Development Program (No. 2019YFC1509205)

摘要: 在多源数据联合反演同震滑动分布过程中,各类观测数据之间相对权比的确定是当今大地测量与地球物理联合反演领域的研究热点和难点。近年来,赫尔默特方差分量估计法因其可以同时估计虚拟观测数据及实际观测数据之间的比例因子的优势,在联合反演滑动分布领域中得到了广泛应用。然而,利用 HVCE 法确定多源数据联合反演相对权比过程中易出现负方差现象。针对以上问题,本文提出在 HVCE 法确定联合反演相对权比过程中添加线性不等式约束,利用带有线性不等式约束的平差模型

进行求解(LC-HVCE),解决计算过程中出现负方差问题。为了验证 LC-HVCE 法的有效性,开展模拟地震试验,结果表明 LC-HVCE 法可以有效地解决 HVCE 法在确定联合反演相对权比过程中存在的不足,保证了同震滑动分布反演精度。蒙特卡洛模拟试验及拉奎拉实际地震反演结果进一步表明了 LC-HVCE 法在确定正则化参数与相对权比过程中较 HVCE 法的适用性与稳定性。

关键词:赫尔默特方差分量估计;相对权比;正则化参数;线性不等式约束

中图分类号:P228

文献标识码:A

文章编号:1001-1595(2022)03-0351-10

基金项目:国家自然科学基金(41874001; 42174011; 41664001; 41804015);国家重点研发计划(2019YFC1509205)

高精度地表形变信息是研究地震孕震机理的必要信息。随着大地测量技术的发展,大地测量数据精度逐渐满足地表形变监测要求,在大地测量与地球物理反演领域的应用越来越广泛。从地震波数据到大地测量数据,多元化的观测数据具有不同的优势与不足^[1-3]。例如,全球定位系统(GPS)数据具有高时间分辨率、水平形变监测精度高,但其空间分辨率低;合成孔径雷达干涉测量(interferometric synthetic aperture radar, InSAR)数据空间分辨率高,但其时间分辨率相对较低^[4];水准测量数据垂直形变探测精度高,但其观测点布设密度受地形等外界环境限制等。

联合多类数据进行同震滑动分布反演,可反演出更为精细、全面的滑动分布。然而,在多类观测数据联合反演时,如何有效融合各类观测数据是当前大地测量地震反演领域研究重点之一^[4-5]。本文以多源数据联合反演同震滑动分布为研究背景,探讨有效、通用的相对权比的确定方法,以获得精细、准确、全面的滑动分布结果。

目前,在多源数据联合反演同震滑动分布中,对于如何确定各类观测数据之间的相对权比,已有研究方法主要有下几类:①根据数据质量、数量等因素确定相对权比^[6-8],该方法计算简单,但过于主观。②基于先验信息确定相对权比,将两类观测数据单位权方差之比或者尺度之比视为两类观测数据相对权比,该方法只考虑不同类观测数据精度问题,而良好的反演结果不仅与数据的精度有关,且与数据的空间分辨率有关^[9]。③基于观测数据拟合精度最小化原则确定相对权比,该方法先根据观测数据拟合度与模型粗糙度确定联合反演过程中的正则化参数,再根据数据拟合度大小来确定各类观测数据之间的相对权比^[10-11]。但是,各类观测数据之间的相对权比与正则化参数大小是相互影响的,随着各类观测数据之间相对权比大小的改变,模型粗糙度与观测数据之间

的折中关系也会随着改变,使得此前所确定的正则化参数大小不准确。④基于观测数据个数以及模型不确定性确定联合反演相对权比^[12-14],设第 1 类数据的单位权中误差为 σ_{01} ,观测数据个数为 n_1 ;第 2 类数据的单位权中误差为 σ_{02} ,个数为 n_2 ,在联合反演中,它们所占的权重分别为: $\lambda_1 =$

$$\frac{n_1}{\frac{\sigma_{01}}{n_1 + n_2}}, \lambda_2 = \frac{\frac{n_2}{\sigma_{02}}}{\frac{n_1}{\sigma_{01}} + \frac{n_2}{\sigma_{02}}}, \text{通过以上公式可以看出,}$$

该方法过度依赖于观测数据个数。⑤基于贝叶斯方法确定联合反演相对权比^[15-16],该方法存在计算流程烦冗、计算效率低等不足^[17]。⑥利用 U 曲线法与判别函数最小化法确定联合反演时的正则化参数与各类观测数据之间的相对权比^[18-19],该方法目前没有推导出 3 类及 3 类以上数据联合反演相对权比的确定的计算公式。

文献[17]将 HVCE 法应用到多类观测数据联合反演相对权比确定中,该方法将正则化参数视为虚拟观测数据的权重,目标是统一反演过程中各类观测数据的单位权方差,该方法具有计算简单以及避免了主观确定相对权比等优势,是近年来应用较为广泛的相对权比确定方法^[20-21];然而,该方法在求解计算过程中易出现负方差^[22]。针对以上问题,本文提出以下解决方案:在 HVCE 法确定联合反演相对权比过程中引入线性不等式约束,利用带有线性不等式约束的平差模型^[23]进行求解,解决 HVCE 法计算过程中出现负方差问题。

1 改进的赫尔默特方差分量估计法基本原理

1.1 赫尔默特方差分量估计法

在大地测量与地球物理反演领域,不同种类观测数据因观测精度不同,使联合反演结果存在一定的随机性^[24]。在线性同震滑动分布反演模型中,为了获得最优估计解,通常需要一个恰当的

方差矩阵,方差分量估计法为有效地融合不同精度观测数据提供有效途径。目前方差分量估计法主要有以下几种形式:赫尔默特方差分量估计(HVCE)、最小范数二次无偏估计、最优不变二次无偏估计、最小二乘方差分量估计等^[25-27]。本文基于 HVCE 法进行研究,利用 HVCE 法确定联合反演相对权比,相关公式推导如下。

(1) 将正则化参数视为虚拟观测数据的权比,则联合反演函数模型可表达为

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{d}_1 = \mathbf{G}_1 \mathbf{m} + \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \mathbf{d}_2 = \mathbf{G}_2 \mathbf{m} + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_n = \mathbf{G}_n \mathbf{m} + \boldsymbol{\varepsilon}_n \\ \mathbf{d}_v = \mathbf{T} \mathbf{m} + \boldsymbol{\varepsilon}_v \end{array} \right\} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n, \mathbf{d}_v$ 分别为各类实际观测数据对应的形变值组成的向量; $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \dots, \mathbf{G}_n$ 为各类实际观测数据对应的格林矩阵; \mathbf{m} 为断层单元滑动量; \mathbf{T} 为拉普拉斯二阶平滑矩阵 ($\mathbf{T}^T \mathbf{T}$ 为正则化矩阵); $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_v$ 为各类数据对应的观测误差向量。

(2) 联合反演随机模型

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{(obs)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{(v)} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} n_1 - 2\text{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_1) + \text{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_1)^2 & \text{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_1 \mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_2) & \cdots & \text{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_1 \mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_v) \\ \text{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_2 \mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_1) & n_2 - 2\text{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_2) + \text{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_2)^2 & \cdots & \text{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_2 \mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_v) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_v \mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_1) & \text{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_v \mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_2) & \cdots & n_v - 2\text{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_v) + \text{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}_v)^2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\sigma}_{01}^2 \quad \hat{\sigma}_{02}^2 \quad \cdots \quad \hat{\sigma}_{0v}^2]$$

$$\mathbf{W} = [\mathbf{V}_1^T \mathbf{p}_1 \times \lambda_1 \mathbf{V}_1 \quad \mathbf{V}_2^T \mathbf{p}_2 \times \lambda_2 \mathbf{V}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{V}_v^T \mathbf{p}_v \times \lambda_v \mathbf{V}_v]$$

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{G}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{G}_i \quad (i=1,2,\dots,n), \quad \mathbf{N} = \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \cdots + \mathbf{N}_n + \mathbf{T}^T \mathbf{P} \mathbf{T}$$

式中, \mathbf{S} 为对称矩阵, 则待估的单位权方差估值个数为 $n+1$ 个, 根据赫尔默特方差分量估计法原则, 需要迭代求解, 直到 $n+1$ 个单位权方差估值近似相等时结束迭代。其中, 在第 j 次迭代过程中第 i 类数据的权比可表达如下

$$\lambda_i^j = \frac{c}{\sigma_{i,j}^2} \lambda_i^{j-1} \quad (7)$$

式中, c 为任意数据集第 j 次迭代过程中的单位权方差估值, 则该类数据在迭代过程中对应的权值始终为 1。

1.2 改进的方差分量估计法

对于方差分量估计法中出现负方差问题, 相关学者展开相应研究。其中, 文献[22]给出了非负最小二乘方差分量估计, 其原理在利用最小二

式中, \mathbf{D} 为方差矩阵; $\mathbf{D}_{(obs)}$ 为实际观测数据对应的方差矩阵; $\mathbf{D}_{(v)}$ 为虚拟观测数据对应的方差矩阵。

(3) 观测数据权阵。 \mathbf{P} 为观测数据与虚拟观测数据构成的权阵

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{(obs)}^{-1} \sigma_0^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{(v)}^{-1} \sigma_0^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中, σ_0^2 为单位权方差因子。

(4) 将权阵进一步表达如下

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} \cdot \lambda \quad (4)$$

式中, \mathbf{p} 为观测数据内部观测值的权阵, 由先验信息确定; λ 为不同类观测数据之间的相对权比。

(5) 最优化准则可表达为

$$\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = \mathbf{V}_1^T \mathbf{p}_1 \cdot \lambda_1 \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2^T \mathbf{p}_2 \cdot \lambda_2 \mathbf{V}_2 + \cdots + \mathbf{V}_v^T \mathbf{p}_v \cdot \lambda_v \mathbf{V}_v \quad (5)$$

式中, $\mathbf{V}_i = \mathbf{d}_i - \mathbf{G}_i \mathbf{m}, i=1,2,\dots,v$ 。

在利用 HVCE 确定联合反演相对权比过程中, 需要调节不同观测数据之间的相对权比, 即式(5)中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_v$ 的比值大小。根据赫尔默特方差分量估计推导公式, 则可以写出各类观测数据单位权方差估值与残差平方和之间的关系

$$\mathbf{S}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{W} \quad (6)$$

式中

乘方差分量估计(LS-VCE)过程中, 添加非负约束条件, 解决了 LS-VCE 法中出现的负方差问题, 并将其应用到 GPS 数据处理中。本文针对 HVCE 法计算过程中出现的负方差情况, 提出不等式约束的方差分量估计法进行求解(LC-HVCE), 即在式(6)中添加线性不等式约束条件 $\hat{\boldsymbol{\theta}} \geq \xi$, 约束单位权方差估值矩阵 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 中元素均大于 0, ξ 中元素为大于 0 且接近于 0 的元素($10^{-8} \sim 10^{-6}$), 并采用文献[23]中提到的不等式约束平差模型进行求解, 其相关计算公式推导如下。

在式(6)添加线性约束条件后, 可将式(6)表达为如下形式

$$\begin{aligned} \min & (\mathbf{S}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{W})^T (\mathbf{S}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{W}) \\ \text{s.t.} & \hat{\boldsymbol{\theta}} \geq \xi \end{aligned} \quad (8)$$

式中, ξ 为 $m \times 1$ 维向量, 其中元素大于 0 且接近于 $0(10^{-8} \sim 10^{-6})$ 。根据最小二乘平差准则, 将式(8)转换成带有线性不等式约束的二次规划问题进行求解^[23]

$$\left. \begin{array}{l} \min \frac{1}{2} \mathbf{D}\beta^T \mathbf{D}\beta - \mathbf{D}\beta^T \mathbf{c} \\ \text{s.t.} \quad \beta_i \geq 0 \end{array} \right\} \quad (9)$$

式中, $\mathbf{c} = \xi - (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{W}$, $\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1}$ 。由二次规划理论可知, $\hat{\beta}$ 是式(6)最优解的条件是 $\hat{\beta}$ 满足 Kuhn-Tucker 条件^[23]

$$\left. \begin{array}{l} \beta_i \geq 0 \\ \mathbf{D}\beta - \mathbf{c} = \mathbf{0} \\ \mathbf{D}\beta - \mathbf{c} \geq 0 \end{array} \right\} \quad (10)$$

设 $\beta = [\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_m]^T$, $\mathbf{D}\beta - \mathbf{c} = [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \cdots \ \gamma_m]^T$, 其中 $\gamma_i = \beta_1 b_{i1} + \beta_2 b_{i2} + \cdots + \beta_m b_{im} - c_i$, $i=1, 2, \dots, m$ 。因此, 式(10)可以写成

$$\left. \begin{array}{l} (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)^T \geq 0 \\ \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \cdots + \beta_m \gamma_m = 0 \\ (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)^T \geq 0 \end{array} \right\} \quad (11)$$

对于式(11)中, 若给定一组初始解: $\beta^0 = [\beta_1^0 \ \beta_2^0 \ \cdots \ \beta_m^0]^T \geq 0$, 对于方程组

$$\beta_1 b_{i1} + \beta_2 b_{i2} + \cdots + \beta_m b_{im} = c_i \quad (12)$$

进行一次迭代, 得到迭代解 $\beta = [\beta_1^0 \ \beta_2^0 \ \cdots \ \beta_m^0]^T$, 若 $\beta_i^0 \geq 0 (i=1, 2, \dots, m)$, 则 β 为式(11)的可行解。若存在 $k (1 \leq k \leq m)$ 使得 $\beta_k^0 < 0$, 则方程组中第 k 个方程

$$\beta_1^0 b_{k1} + \beta_2^0 b_{k2} + \cdots + \beta_{k-1}^0 b_{kk-1} + \beta_{k+1}^0 b_{kk+1} + \cdots + \beta_m^0 b_{km} - c_k = -\beta_k^0 b_{kk} > 0 \quad (13)$$

因此, 令 $\beta^1 = [\beta_1^1 \ \beta_2^1 \ \cdots \ \beta_m^1]^T$, 其中 $\beta_i^1 = \begin{cases} \beta_i^0 & \beta_i^0 \geq 0 \\ 0 & \beta_i^0 < 0 \end{cases}$ 。显然, β^1 中元素均大于等于 0, 由于

m 是一个有限整数, 最多 m 步迭代就可以求得其可行解。由以上公式推导便可得到一个式(9)的求解方法, 从而根据文献[23]便可得到带有不等式约束的平差模型的最小二乘估计

$$\hat{\theta}_{ls} = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{W} + \frac{1}{2} (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \hat{\beta} \quad (14)$$

通过以上约束便可解决 HVCE 法确定联合反演相对权比出现负方差情况。综上, 本文利用改进的赫尔默特方差分量估计法(LC-HVCE)确定多源数据联合反演相对权比以及正则化参数具体流程可表达如下。

(1) 将观测数据分类, 并进行验前权估计, 即

确定各类观测数据内部权, 并赋予各类观测数据初始相对权比值: $P_i, \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_v = 1$ 。

(2) 进行平差计算, 求得 $\mathbf{V}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{V}_i$ 。

(3) 对式(6)添加线性不等式约束, 并利用附有线性不等式约束条件的最小二乘估计求解各类观测数据单位权方差估值 $\hat{\sigma}_{oi}^2$ 。

(4) 根据式(7)更新各类观测数据相对权比 λ_i 。

(5) 重复步骤(2)—步骤(4), 直到各类单位权方差的估值近似相等为止, 输出各类观测数据的相对权比 λ_i 。

2 模拟地震算例

为了验证本文算法的有效性及优势, 本文设计系统的模拟试验, 在模拟试验中, 断层参数设置如下: 断局长和宽分别为 30 km, 断层走向角为 60°, 倾角为 45°, 断层顶深为 0 km。基于以上断层参数, 本文设计了模拟试验。本文模拟了 49 个 GPS 观测形变, 400 个 InSAR 观测形变数据, 其数据分布如图 1 所示, 并分别给 GPS 数据及 InSAR 数据施加不同的随机观测误差, 其观测误差符合正态分布, 即对 GPS 数据施加期望为 0, 标准差为 ϵ_1 的正态分布误差; 对 InSAR 数据施加期望为 0, 标准差为 ϵ_2 的正态分布误差。改变 ϵ_1, ϵ_2 大小, 以及断层面上滑动复杂程度, 利用 HVCE 法和 LC-HVCE 法确定 GPS 数据与 InSAR 数据联合反演时的相对权比与正则化参数大小见表 1, 其各个方案确定的相对权比与正则化参数大小反演同震滑动分布结果如图 2 所示。

由表 1 可知, 随着给 GPS 与 InSAR 数据施加误差大小的改变, 利用 HVCE 法确定各类观测数据相对权比会出现负方差现象。并且可以看出, 给观测数据施加的误差越小, 负方差越容易出现。显然, 负方差的出现在理论上是不合理的, 负方差的出现使得 HVCE 法确定相对权比为负。结合图 2 可以发现, 当负方差出现时, 其同震滑动分布反演结果要远远偏离模拟值, 严重地影响到同震滑动分布反演精度。而本文提出的解决负方差的 LC-HVCE 法避免了反演过程中负方差的出现, 约束方差不为负, 使得相对权比大小不为负, 从而保证了同震滑动分布反演精度。由表 1 试验 D 可知, 在利用 HVCE 法确定联合反演相对权比过程中未出现负方差情况下, 其确定的各

类观测数据相对权比大小与 LC-HVCE 法一致,即当没有负方差出现的情况下,LC-HVCE 法确定联合反演相对权比与 HVCE 法确定的相对权

比结果是等价的。由图 2 可以看出,本文提出的 LC-HVCE 对含有相对复杂滑动分布模型依旧是可行的。

表 1 模拟试验各种方案确定联合反演相对权比与正则化参数大小

Tab.1 The relative weight ratio and regularization parameters of synthetic experiments

试验	$\varepsilon_1/10^{-3}$ m	$\varepsilon_2/10^{-3}$ m	λ_1	λ_2	λ_3
试验 A	0.1	0.1	1	14.310 9	-4.099 7e-05
	0.1	0.1	1	1.811	3.433e-05
试验 B	0.1	0.5	1	2.151 8	-2.187e-05
	0.1	0.5	1	2.388	2.979 6e-06
试验 C	0.5	1	1	-22.85	6.659 8e-05
	0.5	1	1	71.19	6.693 6e-05
试验 D	1	1	1	70.942 4	4.583 1e-04
	1	1	1	70.942 4	4.583 1e-04
试验 E	0.1	0.5	1	-0.004	-4.442 0e-10
	0.1	0.5	1	0.06	1.425 3e-07

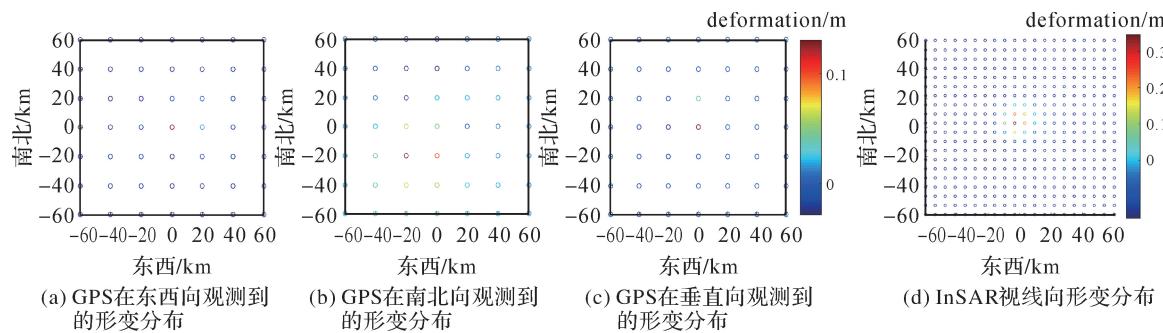


图 1 模拟试验 GPS 与 InSAR 观测形变分布

Fig.1 The distributions of GPS and InSAR deformations in simulation experiments

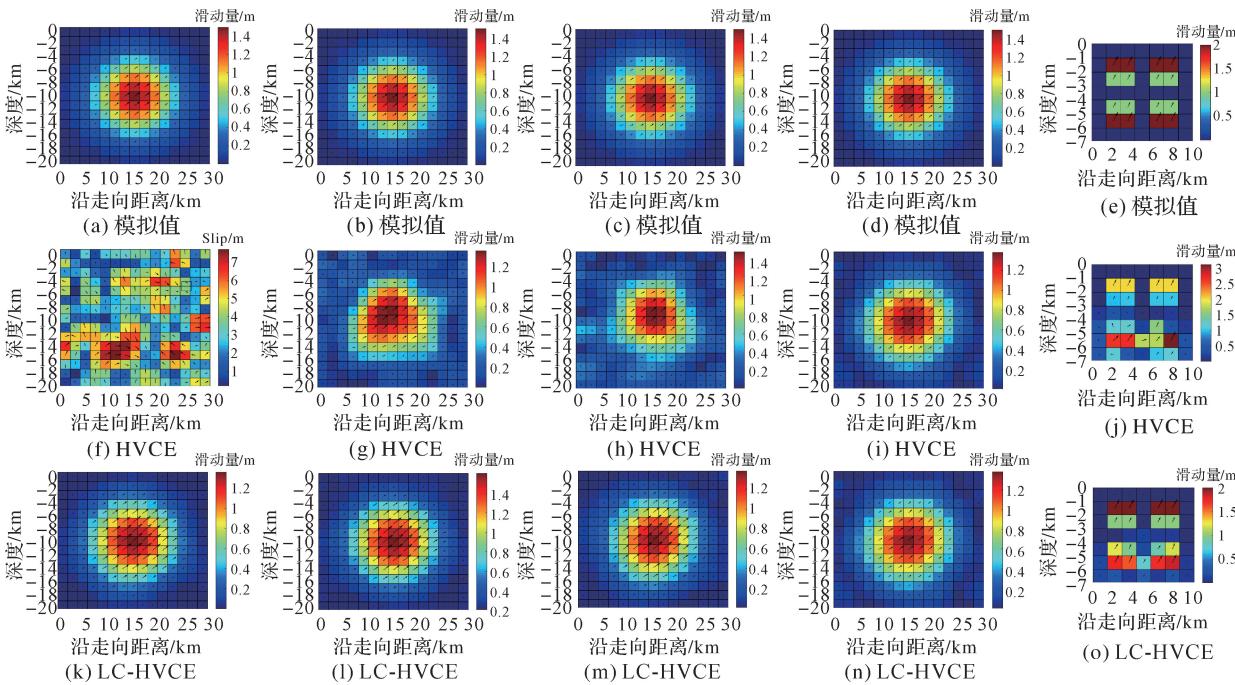


图 2 模拟试验各种方案反演同震滑动分布

Fig.2 The inversion results of the coseismic slip distribution in synthetic experiment

从本文模拟试验可以看出,观测数据误差大小是导致 HVCE 法计算过程中出现负方差的主要原因之一。另外,文献[28]介绍各类观测数据初始权重也可导致负方差的出现。为了进一步探讨改变观测数据误差及各类观测数据的初始相对权重情况下,LC-HVCE 法对 HVCE 法中出现负方差的有效约束情况,本文设计以下两个试验:①试验 1,利用蒙特卡洛模拟方法在 GPS 数据及 InSAR 数据中施加 10 000 组期望为 0 标准差为 5×10^{-3} 的正态分布随机误差。将模拟断层划分

为 100 个子单元,并给每个单元赋予滑动量值。利用 HVCE 法与 LC-HVCE 法确定 10 000 组联合反演时相对权比,两种方法计算相对权比的结果如图 3 所示。②试验 2,在上文模拟地震试验的基础上,改变初始相对权比大小,模拟 10 000 次试验,利用 HVCE 法与 LC-HVCE 法确定 10 000 组联合反演试验中各类观测数据的相对权比,两种方法计算相对权比的结果如图 4 所示。两组试验中,两种方法 10 000 次计算相对权比正负情况见表 2。

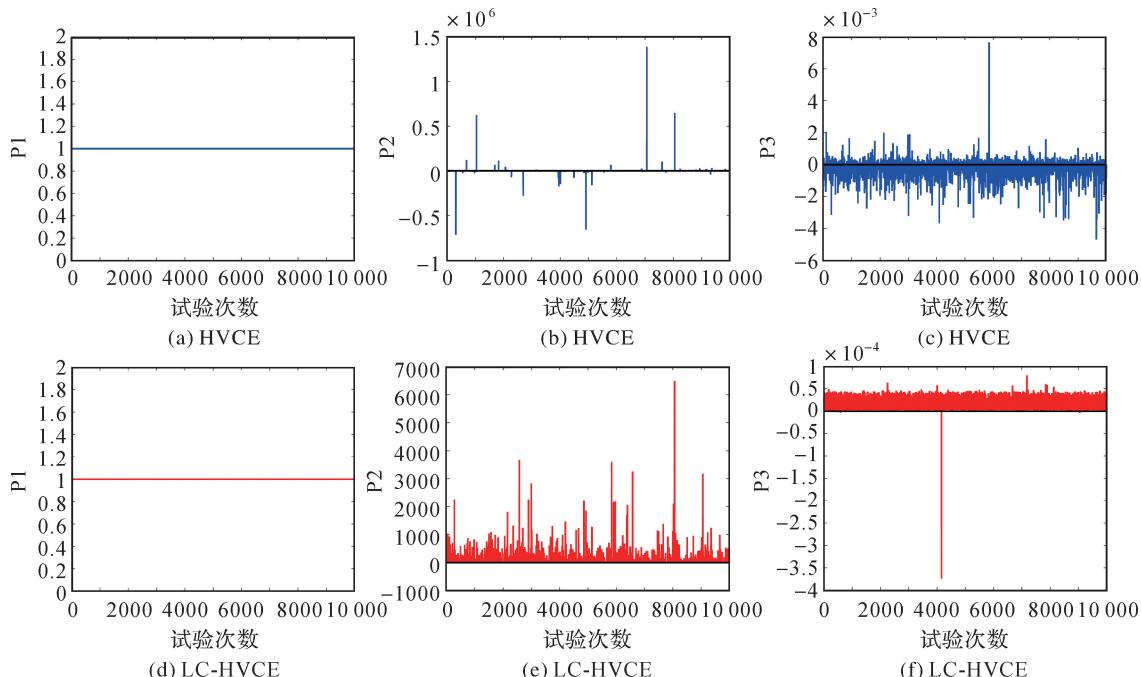


图 3 利用 HVCE 法与 LC-HVCE 法确定 10 000 次相对权比结果

Fig.3 The results of relative weight ratios of 10 000 experiments determined by HVCE method and LC-HVCE method

表 2 两组试验 10 000 次模拟计算出现负方差(负权重)的次数

Tab.2 The occurrence of negative variance (negative weight) was simulated for 10 000 times in two groups of experiments

试验	方法	λ_1	λ_2	λ_3
试验 1	HVCE	0	3591	6606
	LC-HVCE	0	4	14
	有效约束比例* / (%)	-	99.89	99.79
试验 2	HVCE	0	4186	4217
	LC-HVCE	0	0	0
	有效约束比例* / (%)	-	100	100

注:有效约束比例指利用 LC-HVCE 法确定相对权比可以改善 HVCE 法确定相对权比时出现负方差的比例。

机误差的 10 000 次试验中,利用 HVCE 法计算 λ_2 和 λ_3 时,分别出现了 3591 和 6606 次负相对权比(负方差),而利用 LC-HVCE 法确定 λ_2 和 λ_3 时,分别出现了 4 次和 14 次负的相对权比,相较于 HVCE 法,有效约束负方差的比例分别为 99.89% 和 99.79%;在改变各类观测数据的初始相对权重的 10 000 次试验中,利用 HVCE 法计算 λ_2 和 λ_3 时,分别出现 4186 和 4217 次负方差现象,而在 LC-HVCE 法的约束下,所有试验均未出现负方差现象,有效约束负方差的比例均为 100%。综上可知,本文提出的 LC-HVCE 法可以有效地改善 HVCE 法在确定多类观测数据联合反演相对权比确定过程中出现的负方差,且具有一定的稳定性。

由图 3、图 4 及表 2 可知,在改变观测数据随

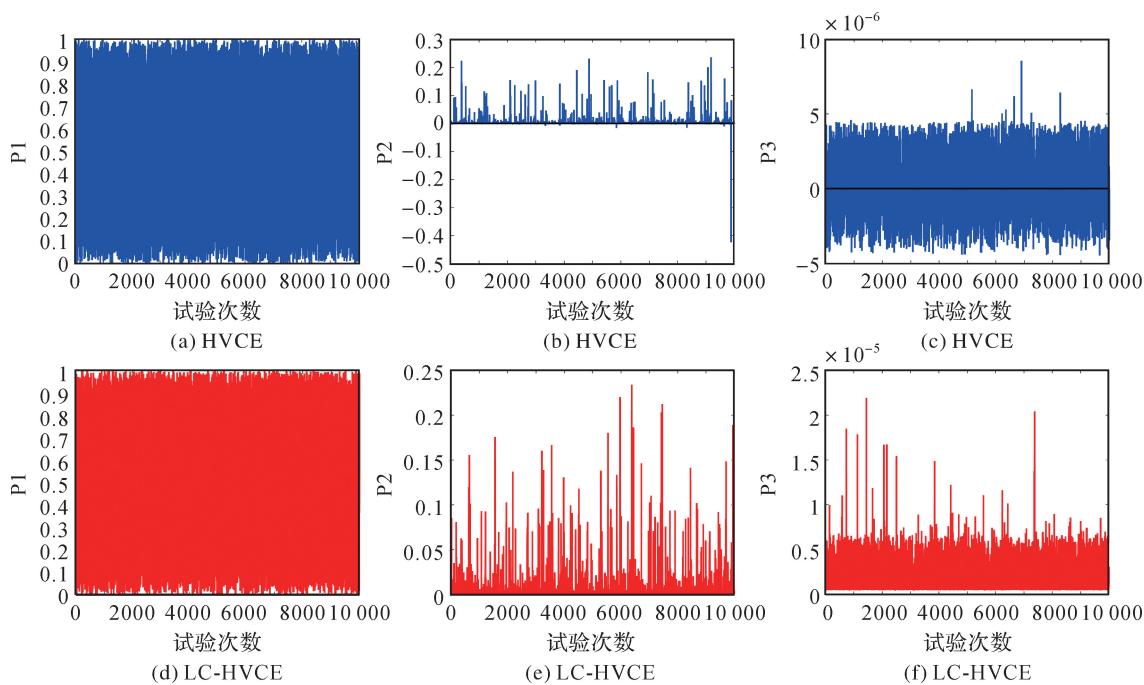


图4 利用 HVCE 法与 LC-HVCE 法确定 10 000 次相对权比结果

Fig 4 The results of relative weight ratios of 10 000 experiments determined by HVCE method and LC-HVCE method

3 2009年4月6日拉奎拉地震反演

2009年4月6日,意大利中部拉奎拉地区发生Mw6.3级地震,据美国地质调查局(USGS)网站发布,地震震中位置为(13.334° E, 42.334° N),震源深度为8.8 km。地震造成一千余人的伤亡,大量的房屋被损毁或破坏^[29]。本文联合126个GPS形变观测数据(第1类观测数据)、2536个InSAR升降轨数据(第2类观测数据),其数据分布如图5所示。另外,为了突出本文所提方法的优势,本文给观测数据施加期望为0,中误差为 0.5×10^{-3} m的高斯分布随机误差,利用文献[30]通过非线性反演方法反演得到的拉奎拉地震断层的走向、倾角及断层中心位置等参数来固定断层破裂面,在此基础上将断层破裂面沿断层走向、倾向把断层

长度、宽度分别扩展至30 km,并将破裂面延伸至地表,将断层面均匀剖分成 $2\text{ km} \times 2\text{ km}$ 大小的矩形单元。利用HVCE法与LC-HVCE法确定GPS数据与InSAR数据联合反演时的相对权比与正则化参数大小见表3,其各个方案确定的相对权比与正则化参数大小反演同震滑动分布结果如图6所示。

由表3可以看出,在拉奎拉实际震例反演中,利用HVCE、LC-HVCE法确定GPS数据与InSAR数据之间的相对权比。利用HVCE法计算过程中出现负方差情况,而本文提出的LC-HVCE法却较好地避免了负方差的出现,两种相对权比情况下,反演拉奎拉地震滑动分布结果如图6所示。

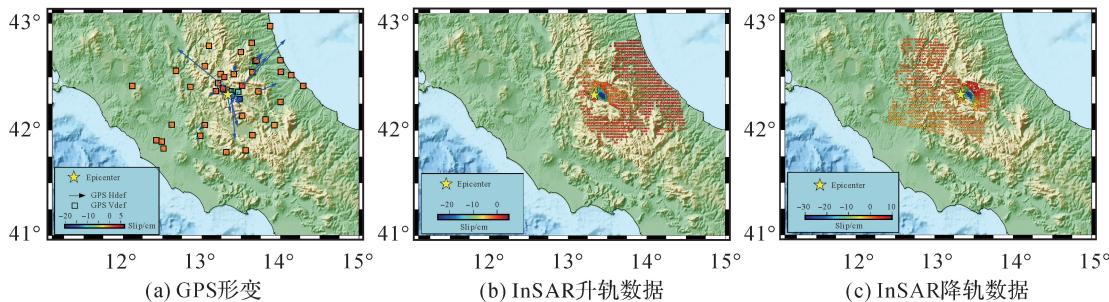


图5 拉奎拉地震 GPS 与 InSAR 观测形变分布

Fig.5 The InSAR deformation data and GPS deformation data of the L'Aquila earthquake

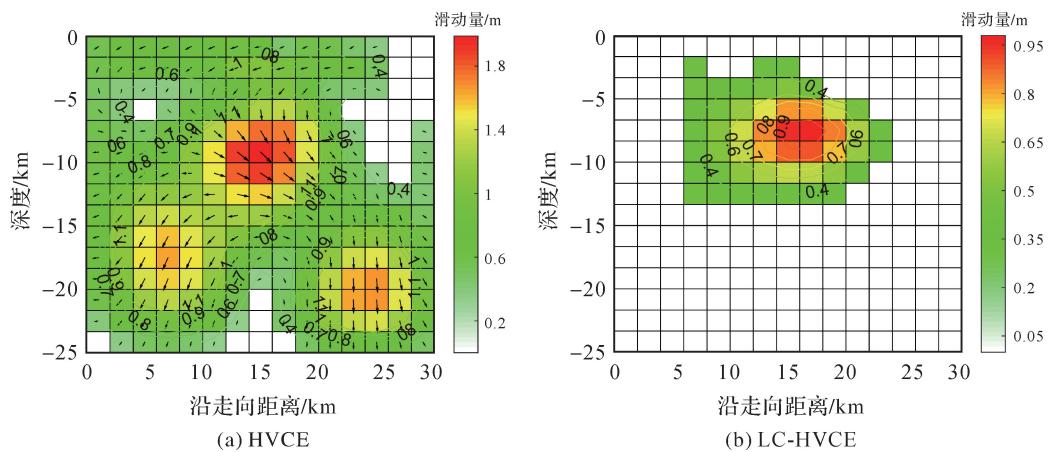


图 6 拉奎拉地震联合反演同震滑动分布结果

Fig.6 The coseismic slip distribution inversion results of the L'Aquila earthquake

表 3 拉奎拉地震反演同震滑动分布结果

Tab.3 The coseismic slip distribution inversion results of the L'Aquila earthquake

Schemes	λ_1	λ_2	λ_3	Max slip/m	Moment magnitude/Mw
HVCE	1	-0.005	-1.25×10^{-4}	1.99	6.83
LC-HVCE	1	0.024	0.0029	0.98	6.31
文献[31]	-	-	-	1.07	6.32
文献[32]	-	-	-	1.15	6.36
文献[30]	-	-	-	0.66	6.23
文献[33]	-	-	-	0.49	6.32
文献[34]	-	-	-	1.1	6.36
USGS	-	-	-	-	6.29

由图 6(a)可以看出,当利用 HVCE 法确定的相对权比为负时,反演出的滑动分布是无序的,出现不收敛现象,反演拉奎拉地震滑动分布主要区域分布在地下 5~25 km 范围内,与其他机构研究结果相差较大。而本文 LC-HVCE 法确定的相对权比反演滑动分布结果显示拉奎拉地震主要滑动区域分布在地下 4~15 km 范围内,该结果与文献[34]研究结果一致;利用 HVCE 法反演拉奎拉地震最大滑动量为 1.99 m,为其他学者研究结果的 2~3 倍左右;而 LC-HVCE 法反演最大滑动量结果为 0.98 m,略小于文献[31],文献[32]和文献[34]。对于矩震级参数,HVCE 法反演结果 Mw6.83,与其他机构研究结果差异较大;利用 LC-HVCE 法反演结果为 Mw6.32,在其他机构研究范围内;文献[33]利用 GPS 数据反演拉奎拉地震同震滑动分布,计算矩震级大小为 Mw6.32;USGS 公布拉奎拉地震矩震级大小为 Mw6.29;文献[34]利用 GPS 数据反演了拉奎拉

地震同震及余震的滑动分布,反演结果为 Mw 6.36;文献[31]反演结果为 Mw6.43;文献[32]利用 InSAR 数据,采用不等权拉普拉斯平滑约束反演结果为 Mw6.36。

综上可以看出,不同研究机构因观测数据来源及断层模型构建差异使得反演结果略有不同。本文 LC-HVCE 法确定联合反演相对权比与正则化参数反演拉奎拉地震同震滑动分布结果均在其他学者研究范围内。由于利用 HVCE 法确定联合反演相对权比过程中出现负方差,即确定的相对权比为负,使得其反演拉奎拉地震滑动分布结果与其他机构差异较大,从而进一步说明负方差的出现会严重影响滑动分布反演精度。

4 讨论与总结

本文针对利用 HVCE 法确定联合反演相对权比过程中出现的负方差问题,提出附有线性不等式约束条件的赫尔默特方差分量估计法,即 LC-HVCE;本文设计了系统的模拟试验,并将所提方案应用在 2009 年 4 月 6 日拉奎拉实际地震同震滑动分布反演中,验证了本文方法的优势与可行性。通过模拟试验与实际震例试验反演,可以得出以下相关结论:模拟试验及拉奎拉实际地震反演结果表明,在利用 HVCE 法确定联合反演相对权比过程中易出现负方差现象,当计算过程中出现负方差时,本文提出的 LC-HVCE 可以解决负方差问题,保证了同震滑动分布反演精度;当未出现负方差时,LC-HVCE 法与 HVCE 法确定相对权比具有同等效果。模拟试验、拉奎拉实际震例及蒙特卡洛随机模拟试验表明,无论观测数

据误差大小及各类观测数据初始相对权比怎样改变,本文所提的LC-HVCE法在有效约束HVCE法中出现的负方差方面具有一定的稳定性,从而保证了联合多类观测数据反演同震滑动分布结果的精度。

参考文献:

- [1] JI C, HELMBERGER D, WALD D, et al. Slip history and dynamic implications of the 1999 Chi-Chi, Taiwan, earthquake[J]. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 2003, 108(B9): 476-482.
- [2] JI C, WALD D, HELMBERGER D. Source description of the 1999 hector mine, California, earthquake, part I: wavelet domain inversion theory and resolution analysis [J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 2002, 92(4): 1192-1207.
- [3] AMMON C J, JI C, THIO H K, et al. Rupture process of the 2004 Sumatra-Andaman earthquake [J]. Science, 2005, 308(5725): 1133-1139.
- [4] 许才军.大地测量联合反演理论和方法研究进展[J].武汉大学学报(信息科学版),2001,26(6): 555-561.
XU Caijun. Progress of joint inversion on geodesy and geophysics[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2001, 26(6): 555-561.
- [5] LIU Chengli, ZHENG Yong, XIONG Xiong, et al. Rupture process of the 23 October 2011 Mw7.1 van earthquake in Eastern Turkey by joint inversion of teleseismic, GPS and strong-motion data[J]. Pure and Applied Geophysics, 2015, 172(6):1383-1396.
- [6] DELOUIS B, GIARDINI D, LUNDGREN P, et al. Joint inversion of InSAR, GPS, teleseismic, and strong-motion data for the spatial and temporal distribution of earthquake slip: application to the 1999 Izmit mainshock[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 2002, 92 (1): 278-299.
- [7] WANG Chisheng, DING Xiaoli, SHAN Xinjian, et al. Slip distribution of the 2011 Tohoku earthquake derived from joint inversion of GPS, InSAR and seafloor GPS/acoustic measurements[J]. Journal of Asian Earth Sciences, 2012 (57):128-135.
- [8] FENG Guangcai, HETLAND E A, DING Xiaoli, et al. Coseismic fault slip of the 2008 Mw 7.9 Wenchuan earthquake estimated from InSAR and GPS measurements[J]. Geophysical Research Letters, 2010(37): L01302.
- [9] XU Caijun, DING Kaihua, CAI Jianqing, et al. Methods of determining weight scaling factors for geodetic-geophysical joint inversion[J]. Journal of Geodynamics, 2009, 47 (1):0-46.
- [10] ZHANG Guohong, QU Chunyan, SHAN Xinjian, et al. Slip distribution of the 2008 Wenchuan Ms7.9 earthquake by joint inversion from GPS and InSAR measurements: a resolution test study [J]. Geophysical Journal International, 2011, 186(1):207-220.
- [11] 申文豪,李永生,焦其松,等.联合强震记录和InSAR/GPS结果的四川九寨沟7.0级地震震源滑动分布反演及其地震学应用[J].地球物理学报,2019, 62(1):121-135.
SHEN Wenhao, LI Yongsheng, JIAO Qisong, et al. Joint inversion of strong motion and InSAR /GPS data for fault slip distribution of the Jiuzhaigou 7.0 earthquake and its application in seismology[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2019, 62(1):121-135.
- [12] JONSSON S, ZEBKER H, SEGALL P, et al. Fault slip distribution of the 1999 Mw 7.1 hector mine, California, earthquake, estimated from satellite radar and GPS measurements[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 2002, 92: 1377-1389.
- [13] TAKUYA N, TETSURO I. A preliminary fault model of the 2003 July 26, M6.4 northern Miyagi earthquake, northeastern Japan, estimated from joint inversion of GPS, leveling, and InSAR data[J]. Earth, Planets and Space, 2003, 55(12):751-757.
- [14] PEDERSEN R, SIGURJON J, THORA A, et al. Fault slip distribution of two June 2000 M_w6.5 earthquakes in South Iceland estimated from joint inversion of InSAR and GPS measurements[J]. Earth and Planetary Science Letters, 2003, 213(3):487-502.
- [15] FUKUDA J, JOHNSON K M. A fully Bayesian inversion for spatial distribution of fault slip with objective smoothing[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 2008, 98(3): 1128-1146.
- [16] FUKUDA J, JOHNSON K M. Mixed linear—non-linear inversion of crustal deformation data: Bayesian inference of model, weighting and regularization parameter[J]. Geophysical Journal International, 2010, 181 (3): 1441-1458.
- [17] 许才军,邓长勇,周力璇.利用方差分量估计的地震同震滑动分布反演[J].武汉大学学报(信息科学版),2016, 41 (1): 37-44.
XU Caijun, DENG Changyong, ZHOU Lixuan. Co-seismic slip distribution inversion method based on the variance component estimation [J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2016, 41(1): 37-44.
- [18] 王乐洋,许才军,张朝玉.一种确定联合反演中相对权比的两步法[J].测绘学报,2012,41(1):19-24.
WANG Leyang, XU Caijun, ZHANG Chaoyu. A two-step method determine relative weight ratio factors in joint inversion [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2012, 41(1):19-24.
- [19] WANG Leyang, ZHAO Xiong, GAO Hua. A method for determining the regularization parameter and the relative weight ratio of the seismic slip distribution with multi-source data[J]. Journal of Geodynamics, 2018, 118(7):

- 1-10.
- [20] HU Jun, LI Zhiwei, DING Xiaoli, et al. Derivation of 3D coseismic surface displacement fields for the 2011 Mw 9.0 Tohoku-Oki earthquake from InSAR and GPS measurements[J]. *Geophysical Journal International*, 2013, 192(2):573-585.
- [21] 方进, 许才军, 温扬茂, 等. 基于方差分量估计的 2015 年尼泊尔 M_W7.8 地震同震滑动分布[J]. *地球物理学报*, 2019, 62(3):113-129.
- FANG Jin, XU Caijun, WEN Yangmao, et al. Co-seismic slip distribution of 2015 Gorkha (Nepal) Mw7.8 earthquake determined using the helmert variance component estimation[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2019, 62(3):113-129.
- [22] AMIRI-SIMKOOEI AR. Non-negative least-squares variance component estimation with application to GPS time series[J]. *Journal of Geodesy*, 2016, 90(5):451-466.
- [23] 宋迎春, 左延英, 朱建军. 带有线性不等式约束平差模型的算法研究[J]. *测绘学报*, 2008, 37(4): 433-437.
- SONG Yingchun, ZUO Yanying, ZHU Jianjun. Research on algorithm of adjustment model with linear inequality constrained parameters [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2008, 37(4):433-437.
- [24] AMIRI-SIMKOOEI A R. Application of least squares variance component estimation to errors-in-variables models [J]. *Journal of Geodesy*, 2013, 87(10):935-944.
- [25] AMIRI-SIMKOOEI A R. Least-squares variance component estimation: theory and GPS applications[D]. Delft: Delft University of Technology, 2007.
- [26] TEUNISSEN P J G. Towards a least-squares framework for adjusting and testing of both functional and stochastic models[J]. *Mathematical Geodesy and Positioning Series*, 2004(26): 267-274.
- [27] TEUNISSEN P J G, AMIRI-SIMKOOEI A R. Least-squares variance component estimation[J]. *Journal of Geodesy*, 2008, 82(2):65-82.
- [28] XU Peiliang, SHEN Yunzhong, FUKUDA Y C, et al. Variance component estimation in linear inverse ill-posed models[J]. *Journal of Geodesy*, 2006, 80: 69-81.
- [29] WALTERS R J, ELLIOTT J R, DAGOSTINO N, et al. The 2009 L'Aquila earthquake (Central Italy): a source mechanism and implications for seismic hazard[J]. *Geophysical Research Letters*, 2009, 36: 17-24.
- [30] 王乐洋, 李海燕, 温扬茂, 等. 地震同震滑动分布反演的总体最小二乘法[J]. *测绘学报*, 2017, 46(3): 307-315. DOI: 10.11947/j.AGCS.20160212.
- WANG Leyang, LI Haiyan, WEN Yangmao, et al. Total least squares method inversion for coseismic slip distribution[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2017, 46(3): 307-315. DOI: 10.11947/j.AGCS.20160212.
- [31] 温扬茂, 何平, 许才军, 等. 联合 Envisat 和 ALOS 卫星影像确定 L'Aquila 地震震源机制[J]. *地球物理学报*, 2012, 55(1):53-65.
- WEN Yangmao, HE Ping, XU Caijun, et al. Source parameters of the 2009 L'Aquila earthquake, Italy from Envisat and ALOS satellite SAR images[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2012, 55(1):53-65.
- [32] WANG Leyang, ZHAO Xiong, et al. Co-seismic slip distribution inversion with unequal weighted Laplacian smoothness constraints[J]. *Geophysical Journal International*, 2019, 218:145-162.
- [33] ANZIDEI M, BOSCHI E, CANNELLI V, et al. Coseismic deformation of the destructive April 6, 2009 L'Aquila earthquake (Central Italy) from GPS data [J]. *Geophysical Research Letters*, 2009, 36(17):L17307.
- [34] CHELONI D, DAGOSTINO N, DAGOSTINO E, et al. Coseismic and initial post-seismic slip of the 2009 Mw6.3 L'Aquila earthquake, Italy, from GPS measurements[J]. *Geophysical Journal International*, 2010, 181 (3): 1539-1546.

(责任编辑:陈品馨)

收稿日期: 2020-07-24

修回日期: 2021-08-18

第一作者简介: 王乐洋(1983—),男,博士,教授,研究方向为大地测量反演及大地测量数据处理。

First author: WANG Leyang(1983—), male, PhD, professor, majors in geodetic inversion and geodetic data processing.

E-mail: wleyang@163.com

通信作者: 许文斌

Corresponding author: XU Wenbin

E-mail: wenbin.xu@csu.edu.cn