PYTHON 金融工程

偏微分方程有限差分

Partial Differential Equation, Finite Difference

王的机器出品

1.1. 偏微分方程基础

有限差分法是一种微分方程 (常微分或者偏微分) 数值方法，是通过有限差分來近似导数，从而寻求微分方程的近似解。在量化金融中，由于一个金融产品的价值是至少和其原生资产 (变量 1) 和时间 (变量 2) 有关，因此该金融产品对应的随机微分方程 (stochastic differential equation, SDE) 一定含有偏导数 (因为至少有 2 个变量) 从而是偏微分方程 (partial differential equation, PDE)。基于以上原因，本章的有限差分方法是适用在 PDE 上。首先如何得到它？用费曼卡兹定理!

费曼卡兹定理 (Feynman-Kac Theorem) 是 SDE 和 PDE 的纽带。通常对于一个金融衍生品 V，已知

- 其原生资产 x 的随机微分方程
- 该衍生品在到期日时的支付函数 h

我们用费曼卡兹定理可以推出 V 的 PDE。

有个笨方法可以推导 V 的 PDE，步骤总结如下：

1. 构建投资组合 $\Pi = 1$ 单位衍生物 $V + \Delta$ 单位原生资产 x
2. 利用伊藤公式写出 $d\Pi$ 的表达式
3. 选取适当的 Δ 值将 $d\Pi$ 里的随机项去掉，通常 Δ 是 V 对 x 的一阶导
4. 由于组合没有随机项无风险，它的回报也是无风险的，因此 $d\Pi = r\Pi dt$，其中 r 是无风险利率
5. 整理上式得到 V 的 PDE

但每次这样推导 PDE 太累，用费曼卡兹定理可以一步到位推出 PDE。

费曼卡兹定理

给定原生资产 x 的 SDE

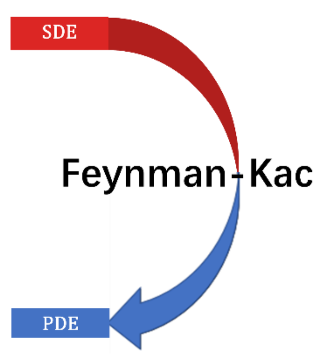
$$dx(t) = \mu(t,x)dt + \sigma(t,x)dB(t)$$

给定衍生品 V 在到期日 T 的支付函数为

$$V(x(T),T) = h(x(T))$$

那么衍生品在 t 时点的价值$V(x,t)$ 满足下述偏微分方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mu(t,x)\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - rV = 0$$



因为该定理太美秒，我认为还是有必要写写其证明过程的。证明所需的三个引理和一个假设：

a) 无套利原则“**现值 = 折现因子 × 支付函数的期望**”
b) 伊藤公式
c) 鞅随机变量的漂移项为零
d) 假设无风险利率不是随机变量

根据引理 a 可得

$$V(t)=e^{-r(T-t)}\cdot\mathbb{E}_t\left[h\big(x(T)\big)\right]=\mathbb{E}_t\left[e^{-r(T-t)}\cdot h\big(x(T)\big)\right]$$

构建变量 $Y(t)=e^{-rt}\cdot V(t)$ 是个鞅，证明如下，当$s<t$ 时

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_s\left[e^{-rt}\cdot V(t)\right]&=\overbrace{\mathbb{E}_s\left[e^{-rt}\cdot E_t\left[e^{-r(T-t)}\cdot h\big(x(T)\big)\right]\right]}^{\text{将 }V(t)\text{ 带入}}\\&=\overbrace{\mathbb{E}_s\left[e^{-rt}\cdot e^{-r(T-t)}\cdot h\big(x(T)\big)\right]}^{\text{塔法则}}\\&=\overbrace{\mathbb{E}_s\left[e^{-rs}\cdot e^{-r(T-s)}\cdot h\big(x(T)\big)\right]}^{\text{将 }t\text{ 换成 }s}\\&=\overbrace{e^{-rs}\cdot V(s)}^{\text{将 }V(s)\text{ 带出}}\end{aligned}$$

上式用第二步用到的塔性质 (tower property)，直观的理解就是当求 50 个数的均值，可以

- 先分成 10 堆求每堆 5 个数的均值，再求这 10 个平均数的均值
- 直接求这 50 个数的均值

两种方法求出来的结果是一样的。

再根据引理 b，对 $Y(t)$ 使用伊藤公式

$$\begin{aligned}dY&=d\left[e^{-rt}\cdot V\right]\\&=-re^{-rt}Vdt+e^{-rt}dV\\&=-re^{-rt}Vdt+e^{-rt}\cdot\left[\frac{\partial V}{\partial t}dt+\frac{\partial V}{\partial x}dX+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}d^2X\right]\\&=e^{-rt}\cdot\left[\frac{\partial V}{\partial t}dt+\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}d^2x-rVdt\right]\\&=e^{-rt}\cdot\left[\frac{\partial V}{\partial t}+\mu(t,x)\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\sigma^2(t,x)}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-rV\right]dt+e^{-rt}\sigma(t,x)\frac{\partial V}{\partial x}dB(t)\end{aligned}$$

最后根据引理 c，$dY(t)$ 的漂移项为零，将 dt 项前面系数设为零可得

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\mu(t,x)\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-rV=0$$

衍生品 $V(t,x)$ 是关于时间变量 t 和空间变量 x 的函数，下节会用个极简看跌期权的例子讲明用有限差分解 PDE 的过程，大体分五步：

1. **方程解域** (solution domain)
2. **网格打点** (grid construction)
3. **终边条件** (terminal and boundary condition)
4. **时空离散**(spatial and time discretization)
5. **差分格式** (difference scheme)

1.2. 有限差分框架 - 简单版

在**布莱尔-斯科尔斯** (Black-Scholes, BS) 模型下，股票价格 $S(t)$ 的 SDE 为

$$dS(t) = [r - q]S(t)dt + \sigma S(t)dB(t)$$

其中

$S(t)$ = t时点的股票价格
r = 常数型连续利率
q = 常数型连续红利率
σ = 常数型瞬时波动率

将上节 SDE 一般形式和 BS 模型的 SDE 类比，得到

属性	一般形式	BS 形式
随机微分方程	$dx(t) = \mu(t,x)dt + \sigma(t,x)dB(t)$	$dS(t) = [r - q]S(t)dt + \sigma S(t)dB(t)$
漂移项	$\mu(t,x)$	$[r - q]S(t)$
扩散项	$\sigma(t,x)$	$\sigma S(t)$

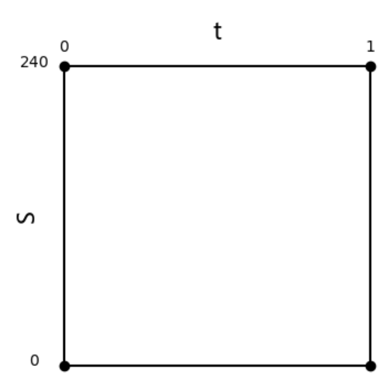
考虑一个看跌期权，它的特征如下表所示：

属性	股票价格	行权价格	连续利率	连续红利率	波动率	到期年限
符号	S	K	r	q	σ	T
值	50	60	3%	1%	40%	1

1.2.1. 方程解域

给定偏微分方程，第一件事就是定下它的解域，因为你不可能求出它在无限域的解。金融产品一般都会有个有限的到期日 T，而股票价格 S 值也应该有个范围。在本例中期权 1 年后到期因此将 T 设为 1。股价通常是整数，因此将 $S_{\min}$ 设为 0，通常 $S_{\max}$ 设为股票价格和行权价格最大值的 4 倍，即 $4 \times \max(50, 60)$ 为 240。

这样解域就确定下来了，$t \in [0,1]$ 和 $S \in [0,240]$。图示如下：



1.2.2. 网格打点

上图解域中有无限个点，偏微分方程在任何一个点上都成立，但在所有点上求出方程显然不现实，实操上只需在有限个点求解方程，而这些点组成了网格。

网格分为等距网格 (equidistant grids) 和不等距网格 (non-equidistant grids)，为了简化，这里只考虑等距网格。

在 S-轴和 t-轴上等分成 4 份，即每个轴上有五个点。

$$S \in \{S_j\}_{j=0}^{4} \quad \Rightarrow \quad S_j = S_{\min} + j\Delta_S = 0 + 60j,$$

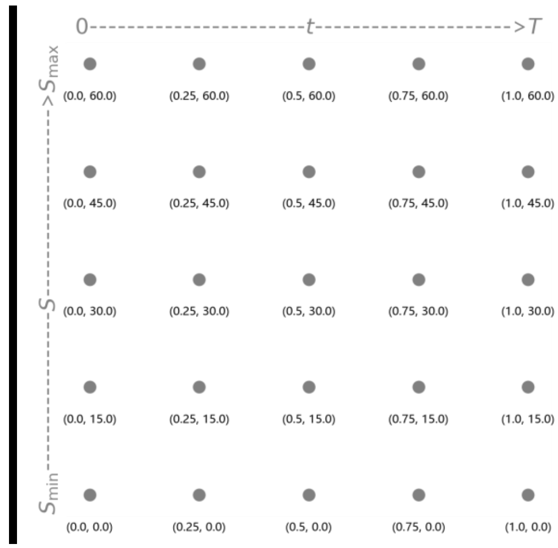
$$\Delta_S = \frac{S_{\max} - S_{\min}}{4} = \frac{240 - 0}{4} = 60$$

$$t \in \{t_i\}_{i=0}^{4} \quad \Rightarrow \quad t_i = i\Delta_t = 0.25i, \quad \Delta_t = \frac{T}{n} = \frac{1}{4} = 0.25$$

具体将网格点写成 (t_i, S_j) 形式，总共 25 个，在 S-轴第 3 个和 t-轴第 2 个点的坐标为 (t_1, S_2)，因此下标是从零开始计数的。

$$[S_0, S_1, S_2, S_3, S_4] = [0, 60, 120, 180, 240]$$

$$[t_0, t_1, t_2, t_3, t_4] = [0, 0.25, 0.5, 0.75, 1]$$

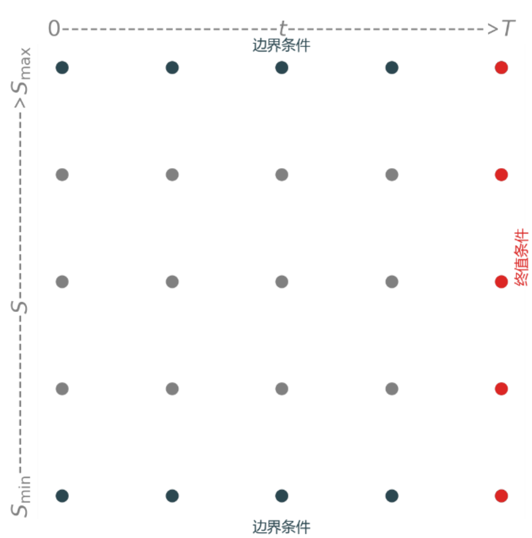


1.2.3. 终边条件

终边条件指的是终值条件和边界条件。当网格打好之后，我们的目标就是求出所有点上期权的值。每一个点对应着一个 S 和 t 值，而期权值 V 是它们的函数，记做 $V(t, S)$。但是求解是一个“从已知到未知”的过程：

- 已知的是“**终值条件**”和“**边界条件**”，即在 (t_4, S), (t, S_0) 和 (t, S_4) 这三条边上每个点对应的期权值。
- 未知的是其他点对应的期权值。

下图在网格上用**红色**标注终止条件下的点，用**深青色**标注边界条件下的点。



在 $t_4 = T$ 处施加终值条件 $V(T,S) = h(S)$ 非常简单，因为任何一个金融产品在到期日的支付函数都会清楚的写在交易合约里面。以看跌期权来讲，支付函数是 $(K - S)^+$，给定 K 为 60，S 为 [0, 60, 120, 180, 240]，那么终值条件为

$$
\begin{aligned}
&[V(t_4,S_0),V(t_4,S_1),V(t_4,S_2),V(t_4,S_3),V(t_4,S_4)]\\
&=[(K-S_0)^+,(K-S_1)^+,(K-S_2)^+,(K-S_3)^+,(K-S_4)^+]\\
&=[(60-0)^+,(60-60)^+,(60-120)^+,(60-180)^+,(60-240)^+]\\
&=[60,0,0,0,0]
\end{aligned}
$$

在 S_0 和 S_4 处施加边界条件，就拿狄利克雷 (Dirichlet) 型条件举例，看跌期权在股价很低时 $S_0 = 0$ 支付为 K，而在股价很高时 $S_4 = 240$ 支付为 0，因此已经基本失去期权的特征了，相当于卖一个远期。卖远期在 t 时点的价值为

$$K \cdot e^{-r(T-t)} - S(t) \cdot e^{-q(T-t)}$$

由于我们只关注 $S(t)$ 等于 S_0 和 S_4 情况，在本例中 $t_4 = T$，推出两个边界条件分别为

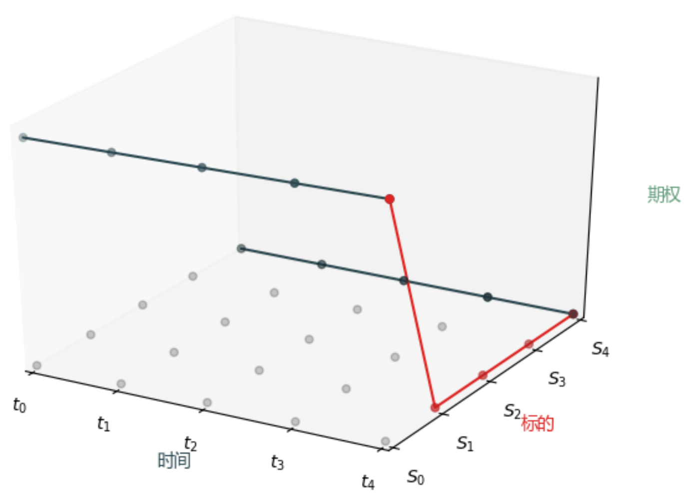
$$
\begin{aligned}
V(t_i,S_0) &= \max\left(K \cdot e^{-r(t_4-t_i)} - S_0 \cdot e^{-q(t_4-t_i)}, 0\right)\\
V(t_i,S_4) &= \max\left(K \cdot e^{-r(t_4-t_i)} - S_4 \cdot e^{-q(t_4-t_i)}, 0\right)
\end{aligned}
$$

将 $K = 60, r = 0.03, q = 0.01, [t_0,t_1,t_2,t_3,t_4] = [0,0.25,0.5,0.75,1]$ 带入上式得到

$$[V(t_0,S_0),V(t_1,S_0),V(t_2,S_0),V(t_3,S_0),V(t_4,S_0)] = [58.23,58.67,59.11,59.55,60]$$

$$[V(t_0,S_4),V(t_1,S_4),V(t_2,S_4),V(t_3,S_4),V(t_4,S_4)] = [0,0,0,0,0]$$

网格是 t-S 的两维平面图，加上期权价值 $V(t,S)$ 信息就是三维图了。用**红色**标注**终值条件**上的期权值 $V(t_4,S)$，用**深青色**标注两个**边界条件**上的期权值 $V(t,S_0)$ 和 $V(t,S_4)$，如下图所示：



1.2.4. 时空离散

时空离散指的是离散时间变量 t 和空间变量 S。在打好网格和设置好终值和边界条件 (已知期权价值的点) 设置后，下一步就要用有限差分求解偏微分方程（计算未知期权价值的点)。有限差分就是将 PDE 中偏导数微分形式 (differential) 离散成差分形式 (difference)。

$$\underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}}_{\text{时间维度}} + (r-q)S\underbrace{\frac{\partial V}{\partial S}}_{\text{空间维度}} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}}_{\text{空间维度}} - rV = 0$$

为了简化符号，用 $V_j(t)$ 来表示 $V(t_i, S_j)$。接下来就来分析上面 PDE 在 (t_i, S_j) 点的离散形式。

在时间维度上可“用时点 t_{i+1} 和 t_i 上 V 的差再除以 Δ_t”来表示

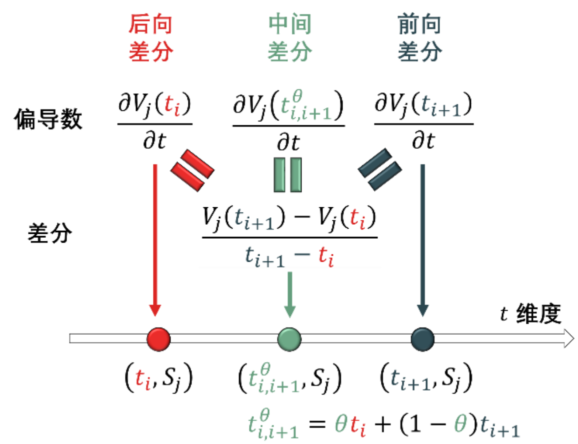
- $\partial V_j(t_{i+1})/\partial t$，称为**后向差分** (backward difference),
- $\partial V_j(t_i)/\partial t$，称为**前向差分** (forward difference)
- $\partial V_j(\theta t_i + (1-\theta)t_{i+1})/\partial t$，其中 $\theta \in [0,1]$，称为**中间差分** (middle difference)

注意用差分只能近似微分，用泰勒公式可以得出相差的高阶项，当 Δ_t 很小时，先不严谨的认为两者相等。

$$\frac{\partial V_j(t_{i+1})}{\partial t} \approx \frac{V_j(t_{i+1}) - V_j(t_i)}{\Delta_t} \qquad \text{后向差分}$$

$$\frac{\partial V_j(t_i)}{\partial t} \approx \frac{V_j(t_{i+1}) - V_j(t_i)}{\Delta_t} \qquad \text{前向差分}$$

$$\frac{\partial V_j(\theta t_i + (1-\theta)t_{i+1})}{\partial t} \approx \frac{V_j(t_{i+1}) - V_j(t_i)}{\Delta_t} \qquad \text{中间差分}$$



在空间维度上，我们通常用**中央差分** (central difference)，表达式如下：

$$\frac{\partial V_2(t_2)}{\partial S} \approx \frac{V_3(t_2) - V_1(t_2)}{2\Delta_S}$$

$$\frac{\partial V_2^2(t_2)}{\partial S^2} \approx \frac{V_3(t_2) - 2V_2(t_2) + V_1(t_2)}{\Delta_S^2}$$

1.2.5. 差分格式

后向差分之完全显式法

为了便于讲解，首先将 (t_i, S_j) 具体化为 (t_3, S_2)。将时间维度上**后向差分**的形式带入上面 PDE 中得到下式（注意 V 用 $V_2(t_3)$ 替代）

$$\underbrace{\frac{V_2(t_3) - V_2(t_2)}{\Delta_t}}_{\text{时间维度}} + (r-q)S_2 \underbrace{\frac{V_3(t_3) - V_1(t_3)}{2\Delta_S}}_{\text{空间维度}} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_2^2 \underbrace{\frac{V_3(t_3) - 2V_2(t_3) + V_1(t_3)}{\Delta_S^2}}_{\text{空间维度}} - rV_2(t_3) = 0$$

整理项数得到

$$V_2(t_3)-V_2(t_2)+\frac{(r-q)S_2\Delta_t}{2\Delta_S}[V_3(t_3)-V_1(t_3)]+\frac{\sigma^2S_2^2\Delta_t}{2\Delta_S^2}[V_3(t_3)-2V_2(t_3)+V_1(t_3)]-r\Delta_tV_2(t_3)=0$$

⇨

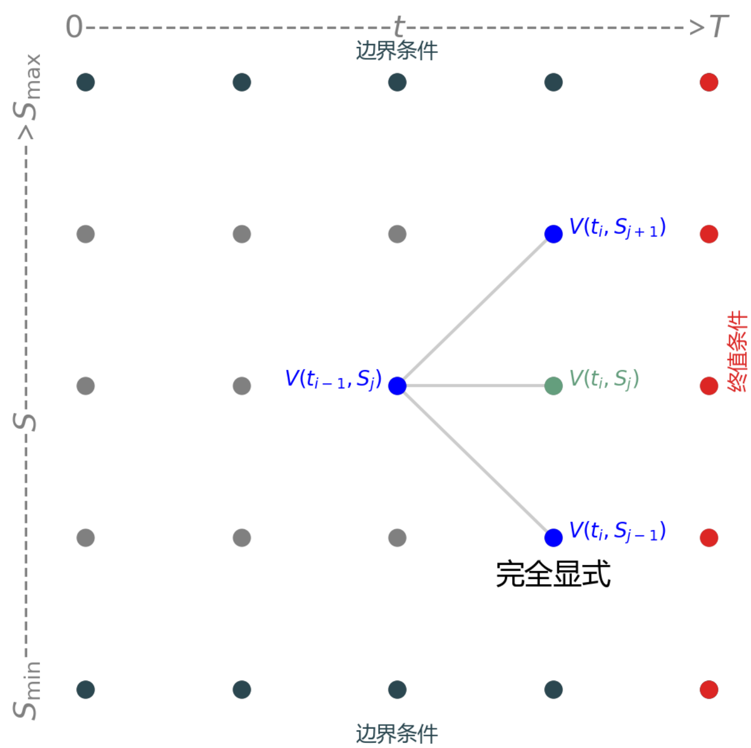
$$V_2(t_2)=\left[\left(\underbrace{\frac{\sigma^2S_2^2}{2\Delta_S^2}-\frac{(r-q)S_2}{2\Delta_S}}_{l_2}\right)\Delta_t\right]V_1(t_3)+\left[1+\left(\underbrace{-2\frac{\sigma^2S_2^2}{2\Delta_S^2}-r}_{c_2}\right)\Delta_t\right]V_2(t_3)+\left[\left(\underbrace{\frac{\sigma^2S_2^2}{2\Delta_S^2}+\frac{(r-q)S_2}{2\Delta_S}}_{u_2}\right)\Delta_t\right]V_3(t_3)$$

⇨

$$\underbrace{V_2(t_2)}_{\substack{\text{前时点}\\\text{期权值}}}=l_2\Delta_t\times\underbrace{V_1(t_3)}_{\substack{\text{后时点}\\\text{期权值}}}+[1+c_2\Delta_t]\times\underbrace{V_2(t_3)}_{\substack{\text{后时点}\\\text{期权值}}}+u_2\Delta_t\times\underbrace{V_3(t_3)}_{\substack{\text{后时点}\\\text{期权值}}}$$

从上式可看出，等式左边是**未知**的前时点 t_2 的期权值，等式右边是**已知**的后时点 t_3 的期权值，t_2 上的 $V_2(t_2)$ 和 3 个 t_3 上的 $V_1(t_3),V_2(t_3),V_3(t_3)$ 产生了关系。注意 l_2,c_2,u_2 的下标 2 和 S_2 的下标一致。

在每个等式中，从 3 个已知量推出 1 个未知量，因此单凭一个算术等式就可以求出一个值。从 $t_4=T$ 的期权值开始，我们可以向后一步步解出 t_0 时的期权值。上述这种离散得到的是**完全显式法** (Fully Explicit, FE)，如下图所示：



固定 t，从单个 S 到多个 S

现在只是完成了在一个点 (t_3,S_2) 上从微分到差分的离散，在两个点 (t_3,S_1) 和 (t_3,S_3) 上可以得到类似的方程：

$$\begin{aligned}
V_1(t_2)&=l_1\Delta_t\times V_0(t_3)+[1+c_1\Delta_t]\times V_1(t_3)+u_1\Delta_t\times V_2(t_3) && \text{在 }(t_3,S_1)\text{ 上离散}\\
V_2(t_2)&=l_2\Delta_t\times V_1(t_3)+[1+c_2\Delta_t]\times V_2(t_3)+u_2\Delta_t\times V_3(t_3) && \text{在 }(t_3,S_2)\text{ 上离散}\\
V_3(t_2)&=l_3\Delta_t\times V_2(t_3)+[1+c_3\Delta_t]\times V_3(t_3)+u_3\Delta_t\times V_4(t_3) && \text{在 }(t_3,S_3)\text{ 上离散}
\end{aligned}$$

上式灰色高亮的 $V_0(t_3)$ 和 $V_4(t_3)$ 是边界条件。将以上 3 个等式整理成矩阵形式可得

$$\underbrace{\begin{bmatrix}V_1(t_2)\\V_2(t_2)\\V_3(t_2)\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{V}(t_2)} = \begin{bmatrix}1+c_1\Delta_t & u_1\Delta_t & 0\\ l_2\Delta_t & 1+c_2\Delta_t & u_2\Delta_t\\ 0 & u_3\Delta_t & 1+c_3\Delta_t\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}V_1(t_3)\\V_2(t_3)\\V_3(t_3)\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{V}(t_3)} + \begin{bmatrix}l_1\Delta_t V_0(t_3)\\0\\u_3\Delta_t V_4(t_3)\end{bmatrix}$$

$$= \Delta_t \underbrace{\begin{bmatrix}c_1 & u_1 & 0\\ l_2 & c_2 & u_2\\ 0 & u_3 & c_3\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}(t_3)}\begin{bmatrix}V_1(t_3)\\V_2(t_3)\\V_3(t_3)\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{I}}\begin{bmatrix}V_1(t_3)\\V_2(t_3)\\V_3(t_3)\end{bmatrix} + \Delta_t \underbrace{\begin{bmatrix}l_1 V_0(t_3)\\0\\u_3 V_4(t_3)\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Omega}(t_2)}$$

⇨

$$\boldsymbol{V}(t_2) = [\boldsymbol{I} + \Delta_t \boldsymbol{A}(t_3)] \times \boldsymbol{V}(t_3) + \Delta_t \boldsymbol{\Omega}(t_3)$$

从单个 t 到多个 t

从时点 t_2 到时点 t_1 的过程弄清楚了，那么从时点 t_4 到时点 t_0 只不过把之前的过程重复四遍。因此有

步骤	方程
$t_4 \to t_3$	$\underbrace{\boldsymbol{V}(t_3)}_{\text{中间过程}} = [\boldsymbol{I} + \Delta_t \boldsymbol{A}(t_4)] \times \underbrace{\boldsymbol{V}(t_4)}_{\text{终值条件}} + \Delta_t \underbrace{\boldsymbol{\Omega}(t_4)}_{\text{边界条件}}$
$t_3 \to t_2$	$\underbrace{\boldsymbol{V}(t_2)}_{\text{中间过程}} = [\boldsymbol{I} + \Delta_t \boldsymbol{A}(t_3)] \times \underbrace{\boldsymbol{V}(t_3)}_{\text{中间过程}} + \Delta_t \underbrace{\boldsymbol{\Omega}(t_3)}_{\text{边界条件}}$
$t_2 \to t_1$	$\underbrace{\boldsymbol{V}(t_1)}_{\text{中间过程}} = [\boldsymbol{I} + \Delta_t \boldsymbol{A}(t_2)] \times \underbrace{\boldsymbol{V}(t_2)}_{\text{中间过程}} + \Delta_t \underbrace{\boldsymbol{\Omega}(t_2)}_{\text{边界条件}}$
$t_1 \to t_0$	$\underbrace{\boldsymbol{V}(t_0)}_{\text{PDE 的解}} = [\boldsymbol{I} + \Delta_t \boldsymbol{A}(t_1)] \times \underbrace{\boldsymbol{V}(t_1)}_{\text{中间过程}} + \Delta_t \underbrace{\boldsymbol{\Omega}(t_1)}_{\text{边界条件}}$

完全显式法的优点是快，因为只涉及矩阵和向量相乘，并没有矩逆运算，在下面介绍的**完全隐式法**和**克兰克尼克尔森法**中有矩阵逆运算。**完全显式法**的缺点是不稳定，在时间和空间上分点时要注意 Δ_t 和 Δ_S 的关系，当 Δ_t 很小时结果会收敛，反之有可能发散。

前向差分之完全隐式法

为了便于讲解，首先将 (t_i, S_j) 具体化为 (t_2, S_2)。将时间维度上**前向差分**的形式带入上面 PDE 中得到下式（注意 V 用 $V_2(t_2)$ 替代）

$$\underbrace{\frac{V_2(t_3) - V_2(t_2)}{\Delta_t}}_{\text{时间维度}} + (r-q)S_2 \underbrace{\frac{V_3(t_2) - V_1(t_2)}{2\Delta_S}}_{\text{空间维度}} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_2^2 \underbrace{\frac{V_3(t_2) - 2V_2(t_2) + V_1(t_2)}{\Delta_S^2}}_{\text{空间维度}} - rV_2(t_2) = 0$$

整理项数得到

$$V_2(t_3) - V_2(t_2) + \frac{(r-q)S_2\Delta_t}{2\Delta_S}[V_3(t_2) - V_1(t_2)] + \frac{\sigma^2 S_2^2 \Delta_t}{2\Delta_S^2}[V_3(t_2) - 2V_2(t_2) + V_1(t_2)] - r\Delta_t V_2(t_2) = 0$$

⇨

$$V_2(t_3) = \left[\left(\underbrace{\frac{(r-q)S_2}{2\Delta_S} - \frac{\sigma^2 S_2^2}{2\Delta_S^2}}_{-l_2}\right)\Delta_t\right] V_1(t_2) + \left[1 + \left(\underbrace{2\frac{\sigma^2 S_2^2}{2\Delta_S^2} + r}_{-c_2}\right)\Delta_t\right] V_2(t_2) + \left[\left(\underbrace{-\frac{(r-q)S_2}{2\Delta_S} - \frac{\sigma^2 S_2^2}{2\Delta_S^2}}_{-u_2}\right)\Delta_t\right] V_3(t_2)$$

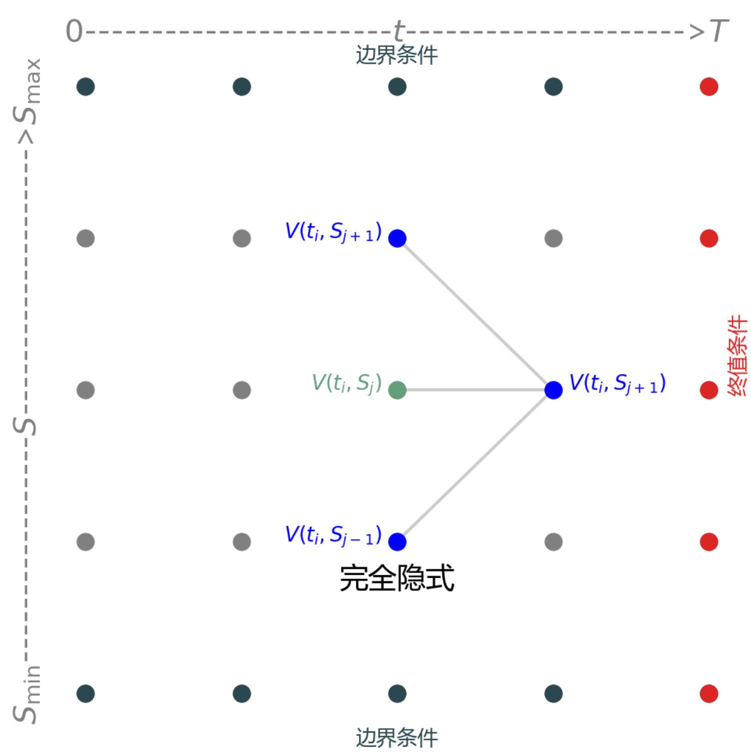
⇨

$$\underbrace{V_2(t_3)}_{\substack{\text{后时点}\\\text{期权值}}} = -l_2\Delta_t \times \underbrace{V_1(t_2)}_{\substack{\text{后时点}\\\text{期权值}}} + [1 - c_2\Delta_t] \times \underbrace{V_2(t_2)}_{\substack{\text{后时点}\\\text{期权值}}} - u_2\Delta_t \times \underbrace{V_3(t_2)}_{\substack{\text{后时点}\\\text{期权值}}}$$

从上式可看出，等式左边是**已知**的后时点 t_3 的期权值，等式右边是**未知**的前时点 t_2 的期权值，t_3 上的 $V_2(t_3)$ 和 3 个 t_2 上的 $V_1(t_2), V_2(t_2), V_3(t_2)$ 产生了关系。注意 $-l_2, -c_2, -u_2$ 的下标 2 和 S_2 的下标一致，而且它们的表达式和完全显性法中的表达式互为相反数。

方法	$\pm l_2$	$\pm c_2$	$\pm u_2$
完全显性法	$\frac{\sigma^2 S_2^2}{2\Delta_S^2} - \frac{(r-q)S_2}{2\Delta_S}$	$-2\frac{\sigma^2 S_2^2}{2\Delta_S^2} - r$	$\frac{\sigma^2 S_2^2}{2\Delta_S^2} + \frac{(r-q)S_2}{2\Delta_S}$
完全隐性法	$\frac{(r-q)S_2}{2\Delta_S} - \frac{\sigma^2 S_2^2}{2\Delta_S^2}$	$2\frac{\sigma^2 S_2^2}{2\Delta_S^2} + r$	$-\frac{(r-q)S_2}{2\Delta_S} - \frac{\sigma^2 S_2^2}{2\Delta_S^2}$

和完全显性法不同的是，在每个等式中，要从 1 个已知量推出 3 个未知量。从单个等式中是不可能求解的，必须整合成矩阵来求解。上述这种离散得到的是**完全隐性法** (Fully Implicit, FI)，如下图所示：



固定 t，从单个 S 到多个 S

现在只是完成了在一个点 (t_2, S_2) 上从微分到差分的离散，在两个点 (t_2, S_1) 和 (t_2, S_3) 上可以得到类似的方程：

$$
\begin{aligned}
V_1(t_3) &= -l_1\Delta_t \times V_0(t_2) + [1 - c_1\Delta_t] \times V_1(t_2) - u_1\Delta_t \times V_2(t_2) && \text{在 } (t_2, S_1) \text{ 上离散} \\
V_2(t_3) &= -l_2\Delta_t \times V_1(t_2) + [1 - c_2\Delta_t] \times V_2(t_2) - u_2\Delta_t \times V_3(t_2) && \text{在 } (t_2, S_2) \text{ 上离散} \\
V_3(t_3) &= -l_3\Delta_t \times V_2(t_2) + [1 - c_3\Delta_t] \times V_3(t_2) - u_3\Delta_t \times V_4(t_2) && \text{在 } (t_2, S_3) \text{ 上离散}
\end{aligned}
$$

上式灰色高亮的 $V_0(t_2)$ 和 $V_4(t_2)$ 是边界条件。将以上 3 个等式整理成矩阵形式可得

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\begin{bmatrix} V_1(t_3) \\ V_2(t_3) \\ V_3(t_3) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{V}(t_3)} &= \begin{bmatrix} 1 - c_1\Delta_t & -u_1\Delta_t & 0 \\ -l_2\Delta_t & 1 - c_2\Delta_t & -u_2\Delta_t \\ 0 & -u_3\Delta_t & 1 - c_3\Delta_t \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} V_1(t_2) \\ V_2(t_2) \\ V_3(t_2) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{V}(t_2)} + \begin{bmatrix} -l_1\Delta_t V_0(t_2) \\ 0 \\ -u_3\Delta_t V_4(t_2) \end{bmatrix} \\
&= -\Delta_t \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & u_1 & 0 \\ l_2 & c_2 & u_2 \\ 0 & u_3 & c_3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}(t_2)} \begin{bmatrix} V_1(t_2) \\ V_2(t_2) \\ V_3(t_2) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{I}} \begin{bmatrix} V_1(t_2) \\ V_2(t_2) \\ V_3(t_2) \end{bmatrix} - \Delta_t \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 V_0(t_2) \\ 0 \\ u_3 V_4(t_2) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Omega}(t_2)}
\end{aligned}
$$

⇨

$$\boldsymbol{V}(t_3) = [\boldsymbol{I} - \Delta_t \boldsymbol{A}(t_2)] \times \boldsymbol{V}(t_2) - \Delta_t \boldsymbol{\Omega}(t_2)$$

⇨

$$\boldsymbol{V}(t_2) = [\boldsymbol{I} - \Delta_t \boldsymbol{A}(t_2)]^{-1} \times [\boldsymbol{V}(t_3) + \Delta_t \boldsymbol{\Omega}(t_2)]$$

下表类比完全显性法和完全隐性法的解出 $\boldsymbol{V}(t_2)$ 的矩阵运算。

方法	方程
完全显性法	$\boldsymbol{V}(t_2) = [\boldsymbol{I} + \Delta_t \boldsymbol{A}(t_3)] \times \boldsymbol{V}(t_3) + \Delta_t \boldsymbol{\Omega}(t_3)$
完全隐性法	$\boldsymbol{V}(t_2) = [\boldsymbol{I} - \Delta_t \boldsymbol{A}(t_2)]^{-1} \times [\boldsymbol{V}(t_3) + \Delta_t \boldsymbol{\Omega}(t_2)]$

两种方法求解的方式完全不同，前者需要矩阵运算，而后者需要矩阵逆运算。

从单个 t 到多个 t

从时点 t_2 到时点 t_1 的过程弄清楚了，那么从时点 t_4 到时点 t_0 只不过把之前的过程重复四遍。和 FE 法作类比得到

步骤	FE	FI
$t_4 \to t_3$	$\underbrace{\boldsymbol{V}(t_3)}_{\text{中间过程}} = [\boldsymbol{I} + \Delta_t \boldsymbol{A}(t_4)] \times \underbrace{\boldsymbol{V}(t_4)}_{\text{终值条件}} + \Delta_t \underbrace{\boldsymbol{\Omega}(t_4)}_{\text{边界条件}}$	$\underbrace{\boldsymbol{V}(t_3)}_{\text{中间过程}} = [\boldsymbol{I} - \Delta_t \boldsymbol{A}(t_3)]^{-1} \times \left[\underbrace{\boldsymbol{V}(t_4)}_{\text{终值条件}} + \Delta_t \underbrace{\boldsymbol{\Omega}(t_3)}_{\text{边界条件}}\right]$
$t_3 \to t_2$	$\underbrace{\boldsymbol{V}(t_2)}_{\text{中间过程}} = [\boldsymbol{I} + \Delta_t \boldsymbol{A}(t_3)] \times \underbrace{\boldsymbol{V}(t_3)}_{\text{中间过程}} + \Delta_t \underbrace{\boldsymbol{\Omega}(t_3)}_{\text{边界条件}}$	$\underbrace{\boldsymbol{V}(t_2)}_{\text{中间过程}} = [\boldsymbol{I} - \Delta_t \boldsymbol{A}(t_2)]^{-1} \times \left[\underbrace{\boldsymbol{V}(t_3)}_{\text{中间过程}} + \Delta_t \underbrace{\boldsymbol{\Omega}(t_2)}_{\text{边界条件}}\right]$
$t_2 \to t_1$	$\underbrace{\boldsymbol{V}(t_1)}_{\text{中间过程}} = [\boldsymbol{I} + \Delta_t \boldsymbol{A}(t_2)] \times \underbrace{\boldsymbol{V}(t_2)}_{\text{中间过程}} + \Delta_t \underbrace{\boldsymbol{\Omega}(t_2)}_{\text{边界条件}}$	$\underbrace{\boldsymbol{V}(t_1)}_{\text{中间过程}} = [\boldsymbol{I} - \Delta_t \boldsymbol{A}(t_1)]^{-1} \times \left[\underbrace{\boldsymbol{V}(t_2)}_{\text{中间过程}} + \Delta_t \underbrace{\boldsymbol{\Omega}(t_1)}_{\text{边界条件}}\right]$
$t_1 \to t_0$	$\underbrace{\boldsymbol{V}(t_0)}_{\text{PDE 的解}} = [\boldsymbol{I} + \Delta_t \boldsymbol{A}(t_1)] \times \underbrace{\boldsymbol{V}(t_1)}_{\text{中间过程}} + \Delta_t \underbrace{\boldsymbol{\Omega}(t_1)}_{\text{边界条件}}$	$\underbrace{\boldsymbol{V}(t_0)}_{\text{PDE 的解}} = [\boldsymbol{I} - \Delta_t \boldsymbol{A}(t_0)]^{-1} \times \left[\underbrace{\boldsymbol{V}(t_1)}_{\text{中间过程}} + \Delta_t \underbrace{\boldsymbol{\Omega}(t_0)}_{\text{边界条件}}\right]$

中间差分之克兰克尼克尔森法

在 FE 和 FI 法中我们用 (t_2, S_2) 举例来解释离散过程，它是网格中一个实实在在的点。在 θ-法中，我们在一个网格中不存在的点上离散，该点记做 $(t_{2,3}^{\theta}, S_2)$，其中 $t_{2,3}^{\theta} = \theta t_2 + (1-\theta)t_3$

- 当 $\theta = 0$ 时，$t_{2,3}^{\theta} = t_3$，这时 θ-法就是 FE 法
- 当 $\theta = 1$ 时，$t_{2,3}^{\theta} = t_2$，这时 θ-法就是 FI 法
- 当 $\theta = 0.5$ 时，$t_{2,3}^{\theta}$ 是 t_2 和 t_3 的中点，这时 θ-法又称为克兰克尼克尔森 (Crank-Nicolson, CN) 法

为了缩短公式长度，用 θ_a 和 θ_b 代表 θ 和 $1-\theta$。

$$\underbrace{\frac{V_2(t_3)-V_2(t_2)}{\Delta_t}}_{\text{时间维度}} + (r-q)S_2 \underbrace{\left[\theta_a \frac{V_3(t_2)-V_1(t_2)}{2\Delta_S} + \theta_b \frac{V_3(t_3)-V_1(t_3)}{2\Delta_S}\right]}_{\text{空间维度}}$$
$$+\frac{1}{2}\sigma^2 S_2^2 \underbrace{\left[\theta_a \frac{V_3(t_2)-2V_2(t_2)+V_1(t_2)}{\Delta_S^2} + \theta_b \frac{V_3(t_3)-2V_2(t_3)+V_1(t_3)}{\Delta_S^2}\right]}_{\text{空间维度}}$$
$$-r[\theta_a V_2(t_2) + \theta_b V_2(t_3)] = 0$$

整理得到

$$\left[\left(\underbrace{\frac{(r-q)S_2}{2\Delta_S} - \frac{\sigma^2 S_2^2}{2\Delta_S^2}}_{-l_2}\right)\theta_a\Delta_t\right]V_1(t_2) + \left[1+\left(\underbrace{2\frac{\sigma^2 S_2^2}{2\Delta_S^2} + r}_{-c_2}\right)\theta_a\Delta_t\right]V_2(t_2) + \left[\left(\underbrace{\frac{(r-q)S_2}{2\Delta_S} + \frac{\sigma^2 S_2^2}{2\Delta_S^2}}_{-u_2}\right)\theta_a\Delta_t\right]V_3(t_2) =$$
$$\left[\left(\underbrace{\frac{\sigma^2 S_2^2}{2\Delta_S^2} - \frac{(r-q)S_2}{2\Delta_S}}_{l_2}\right)\theta_b\Delta_t\right]V_1(t_3) + \left[1+\left(\underbrace{-2\frac{\sigma^2 S_2^2}{2\Delta_S^2} - r}_{c_2}\right)\theta_b\Delta_t\right]V_2(t_3) + \left[\left(\underbrace{-\frac{\sigma^2 S_2^2}{2\Delta_S^2} - \frac{(r-q)S_2}{2\Delta_S}}_{u_2}\right)\theta_b\Delta_t\right]V_3(t_3)$$

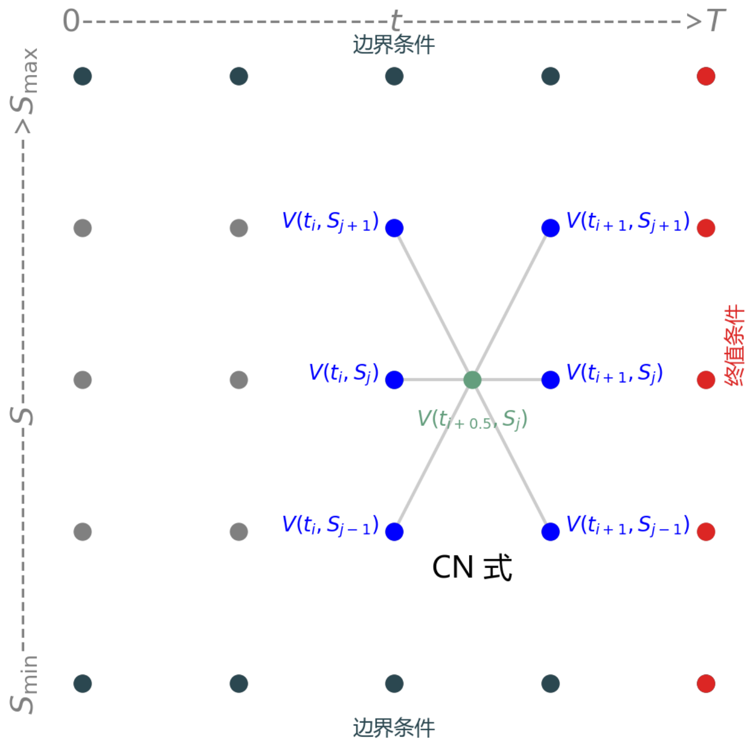
⇨

$$-l_2\theta_a\Delta_t \times \underbrace{V_1(t_2)}_{\substack{\text{后时点}\\\text{期权值}}} + [1-c_2\theta_a\Delta_t] \times \underbrace{V_2(t_2)}_{\substack{\text{后时点}\\\text{期权值}}} - u_2\theta_a\Delta_t \times \underbrace{V_3(t_2)}_{\substack{\text{后时点}\\\text{期权值}}}$$
$$= l_2\theta_b\Delta_t \times \underbrace{V_1(t_3)}_{\substack{\text{前时点}\\\text{期权值}}} + [1+c_2\theta_b\Delta_t] \times \underbrace{V_2(t_3)}_{\substack{\text{前时点}\\\text{期权值}}} + u_2\theta_b\Delta_t \times \underbrace{V_3(t_3)}_{\substack{\text{前时点}\\\text{期权值}}}$$

将 θ_a 设置为 0 和 1 可验证出 FE 和 FI 是 CN 的特殊形式。

参数	方程	方法
$\theta_a = 0$ $\theta_b = 1$	$\underbrace{V_2(t_2)}_{\substack{\text{前时点}\\\text{期权值}}} = l_2\Delta_t \times \underbrace{V_1(t_3)}_{\substack{\text{后时点}\\\text{期权值}}} + [1+c_2\Delta_t] \times \underbrace{V_2(t_3)}_{\substack{\text{后时点}\\\text{期权值}}} + u_2\Delta_t \times \underbrace{V_3(t_3)}_{\substack{\text{后时点}\\\text{期权值}}}$	完全 显性法
$\theta_a = 1$ $\theta_b = 0$	$\underbrace{V_2(t_3)}_{\substack{\text{前时点}\\\text{期权值}}} = -l_2\Delta_t \times \underbrace{V_1(t_2)}_{\substack{\text{后时点}\\\text{期权值}}} + [1-c_2\Delta_t] \times \underbrace{V_2(t_2)}_{\substack{\text{后时点}\\\text{期权值}}} - u_2\Delta_t \times \underbrace{V_3(t_2)}_{\substack{\text{后时点}\\\text{期权值}}}$	完全 隐性法

CN 法的离散示意图如下图所示：



固定 t，从单个 S 到多个 S

现在只是完成了在一个点 $(t_{2,3}^{\theta}, S_2)$ 上从微分到差分的离散，在两个点 $(t_{2,3}^{\theta}, S_1)$ 和 $(t_{2,3}^{\theta}, S_3)$ 上可以得到类似的方程：

$$\begin{aligned} & l_1(1-\theta)\Delta_t \times V_0(t_3) + [1 + c_1(1-\theta)\Delta_t] \times V_1(t_3) + u_1(1-\theta)\Delta_t \times V_2(t_3) \\ & \quad = -l_1\theta\Delta_t \times V_0(t_2) + [1 - c_1\theta\Delta_t] \times V_1(t_2) - u_1\theta\Delta_t \times V_2(t_2) \qquad \text{在 } (t_{2,3}^{\theta}, S_1) \text{ 上离散} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & l_2(1-\theta)\Delta_t \times V_1(t_3) + [1 + c_2(1-\theta)\Delta_t] \times V_2(t_3) + u_2(1-\theta)\Delta_t \times V_3(t_3) \\ & \quad = -l_2\theta\Delta_t \times V_1(t_2) + [1 - c_2\theta\Delta_t] \times V_2(t_2) - u_2\theta\Delta_t \times V_3(t_2) \qquad \text{在 } (t_{2,3}^{\theta}, S_2) \text{ 上离散} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & l_3(1-\theta)\Delta_t \times V_2(t_3) + [1 + c_3(1-\theta)\Delta_t] \times V_3(t_3) + u_3(1-\theta)\Delta_t \times V_4(t_3) \\ & \quad = -l_3\theta\Delta_t \times V_2(t_2) + [1 - c_3\theta\Delta_t] \times V_3(t_2) - u_3\theta\Delta_t \times V_4(t_2) \qquad \text{在 } (t_{2,3}^{\theta}, S_3) \text{ 上离散} \end{aligned}$$

上式灰色高亮的 $V_0(t_2)$, $V_4(t_2)$, $V_0(t_3)$ 和 $V_4(t_3)$ 是边界条件。将以上 3 个等式整理成矩阵形式可得

$$\begin{bmatrix} 1 + c_1(1-\theta)\Delta_t & u_1(1-\theta)\Delta_t & 0 \\ l_2\Delta_t & 1 + c_2(1-\theta)\Delta_t & u_2(1-\theta)\Delta_t \\ 0 & u_3(1-\theta)\Delta_t & 1 + c_3(1-\theta)\Delta_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(t_3) \\ V_2(t_3) \\ V_3(t_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1(1-\theta)\Delta_t V_0(t_3) \\ 0 \\ u_3(1-\theta)\Delta_t V_4(t_3) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 - c_1\theta\Delta_t & -u_1\theta\Delta_t & 0 \\ -l_2\theta\Delta_t & 1 - c_2\theta\Delta_t & -u_2\theta\Delta_t \\ 0 & -u_3\theta\Delta_t & 1 - c_3\theta\Delta_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(t_2) \\ V_2(t_2) \\ V_3(t_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_1\theta\Delta_t V_0(t_2) \\ 0 \\ -u_3\theta\Delta_t V_4(t_2) \end{bmatrix}$$

⇨

$$(1-\theta)\Delta_t \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & u_1 & 0 \\ l_2 & c_2 & u_2 \\ 0 & u_3 & c_3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}(t_2)} \underbrace{\begin{bmatrix} V_1(t_3) \\ V_2(t_3) \\ V_3(t_3) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{V}(t_3)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{I}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_1(t_3) \\ V_2(t_3) \\ V_3(t_3) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{V}(t_3)} + (1-\theta)\Delta_t \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 V_0(t_3) \\ 0 \\ u_3 V_4(t_3) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Omega}(t_3)}$$

$$= -\theta\Delta_t \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & u_1 & 0 \\ l_2 & c_2 & u_2 \\ 0 & u_3 & c_3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}(t_2)} \underbrace{\begin{bmatrix} V_1(t_2) \\ V_2(t_2) \\ V_3(t_2) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{V}(t_2)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{I}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_1(t_2) \\ V_2(t_2) \\ V_3(t_2) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{V}(t_2)} - \theta\Delta_t \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 V_0(t_2) \\ 0 \\ u_3 V_4(t_2) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Omega}(t_2)}$$

⇨

$$[\boldsymbol{I}-\theta\Delta_t\boldsymbol{A}(t_2)]\times\boldsymbol{V}(t_2)=[\boldsymbol{I}+(1-\theta)\Delta_t\boldsymbol{A}(t_3)]\times\boldsymbol{V}(t_3)+(1-\theta)\Delta_t\boldsymbol{\Omega}(t_3)+\theta\Delta_t\boldsymbol{\Omega}(t_2)$$

将 θ 设置为 0 和 1 可验证出 FE 和 FI 是 CN 的特殊形式。

方法	方程
CN	$\boldsymbol{V}(t_2)=[\boldsymbol{I}-\theta\Delta_t\boldsymbol{A}(t_2)]^{-1}\times\big[[\boldsymbol{I}+(1-\theta)\Delta_t\boldsymbol{A}(t_3)]\times\boldsymbol{V}(t_3)+(1-\theta)\Delta_t\boldsymbol{\Omega}(t_3)+\theta\Delta_t\boldsymbol{\Omega}(t_2)\big]$
FE ($\theta=0$)	$\boldsymbol{V}(t_2)=[\boldsymbol{I}+\Delta_t\boldsymbol{A}(t_3)]\times\boldsymbol{V}(t_3)+\Delta_t\boldsymbol{\Omega}(t_3)$
FI ($\theta=1$)	$\boldsymbol{V}(t_2)=[\boldsymbol{I}-\Delta_t\boldsymbol{A}(t_2)]^{-1}\times[\boldsymbol{V}(t_3)+\Delta_t\boldsymbol{\Omega}(t_2)]$

从单个 t 到多个 t

从时点 t_2 到时点 t_1 的过程弄清楚了，那么从时点 t_4 到时点 t_0 只不过把之前的过程重复四遍，

步骤	方程
$t_4\to t_3$	$\underbrace{\boldsymbol{V}(t_3)}_{\text{中间过程}}=[\boldsymbol{I}-\theta\Delta_t\boldsymbol{A}(t_3)]^{-1}\times\Big[[\boldsymbol{I}+(1-\theta)\Delta_t\boldsymbol{A}(t_4)]\times\underbrace{\boldsymbol{V}(t_4)}_{\text{终值条件}}+\Delta_t\underbrace{(1-\theta)\Delta_t\boldsymbol{\Omega}(t_4)+\theta\Delta_t\boldsymbol{\Omega}(t_3)}_{\text{边界条件}}\Big]$
$t_3\to t_2$	$\underbrace{\boldsymbol{V}(t_2)}_{\text{中间过程}}=[\boldsymbol{I}-\theta\Delta_t\boldsymbol{A}(t_2)]^{-1}\times\Big[[\boldsymbol{I}+(1-\theta)\Delta_t\boldsymbol{A}(t_3)]\times\underbrace{\boldsymbol{V}(t_3)}_{\text{中间过程}}+\Delta_t\underbrace{(1-\theta)\Delta_t\boldsymbol{\Omega}(t_3)+\theta\Delta_t\boldsymbol{\Omega}(t_2)}_{\text{边界条件}}\Big]$
$t_2\to t_1$	$\underbrace{\boldsymbol{V}(t_1)}_{\text{中间过程}}=[\boldsymbol{I}-\theta\Delta_t\boldsymbol{A}(t_1)]^{-1}\times\Big[[\boldsymbol{I}+(1-\theta)\Delta_t\boldsymbol{A}(t_2)]\times\underbrace{\boldsymbol{V}(t_2)}_{\text{中间过程}}+\Delta_t\underbrace{(1-\theta)\Delta_t\boldsymbol{\Omega}(t_2)+\theta\Delta_t\boldsymbol{\Omega}(t_1)}_{\text{边界条件}}\Big]$
$t_1\to t_0$	$\underbrace{\boldsymbol{V}(t_0)}_{\text{PDE 的解}}=[\boldsymbol{I}-\theta\Delta_t\boldsymbol{A}(t_0)]^{-1}\times\Big[[\boldsymbol{I}+(1-\theta)\Delta_t\boldsymbol{A}(t_1)]\times\underbrace{\boldsymbol{V}(t_1)}_{\text{中间过程}}+\Delta_t\underbrace{(1-\theta)\Delta_t\boldsymbol{\Omega}(t_1)+\theta\Delta_t\boldsymbol{\Omega}(t_0)}_{\text{边界条件}}\Big]$

1.2.6. 具体例子

回到看跌期权的例子，用 PDE 有限差分解出期权价值只需求解下面方程 4 次，对 $i = 0, 1, 2, 3$，求解

$$\underbrace{[\boldsymbol{I} - \theta\Delta_t \boldsymbol{A}(t_i)]}_{\text{三对角稀疏矩阵}} \times \boldsymbol{V}(t_i) = \underbrace{[\boldsymbol{I} + (1-\theta)\Delta_t \boldsymbol{A}(t_{i+1})]}_{\text{三对角稀疏矩阵}} \times \boldsymbol{V}(t_{i+1}) + \underbrace{(1-\theta)\Delta_t \boldsymbol{\Omega}(t_i) + \theta\Delta_t \boldsymbol{\Omega}(t_{i+1})}_{\text{边界条件}}$$

其中

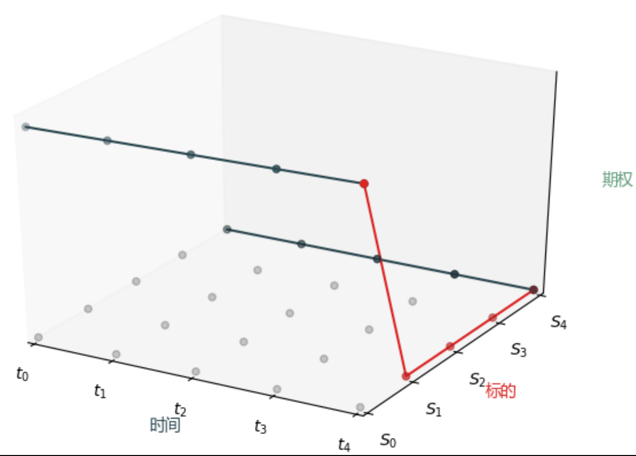
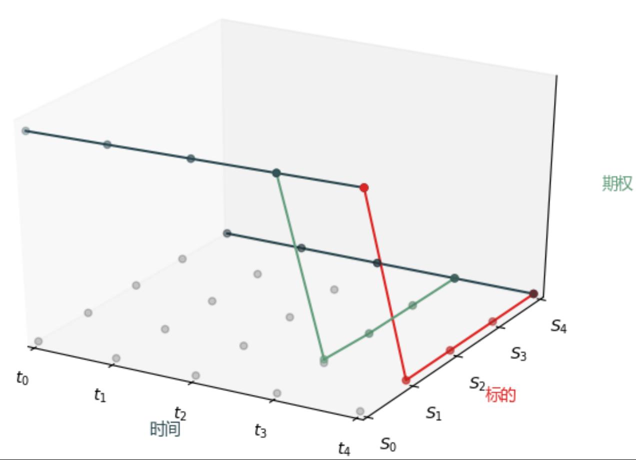
$\boldsymbol{I}$ 是 3×3 的单位矩阵

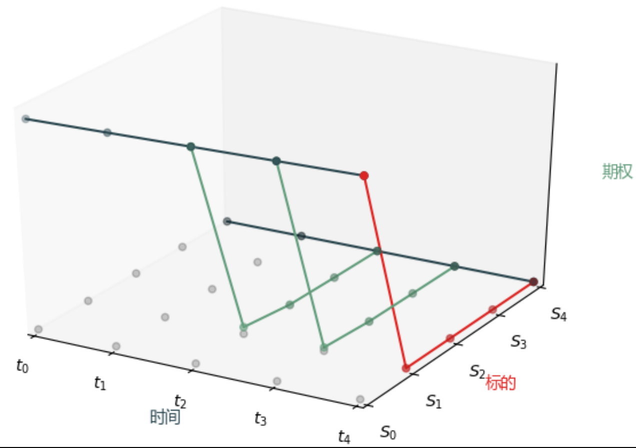
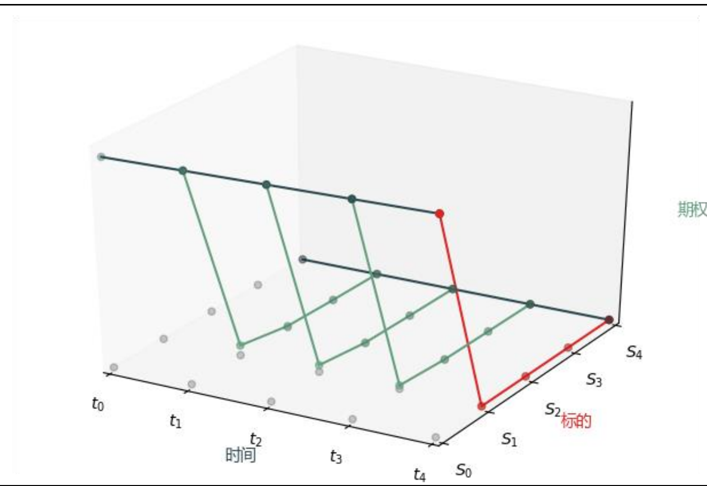
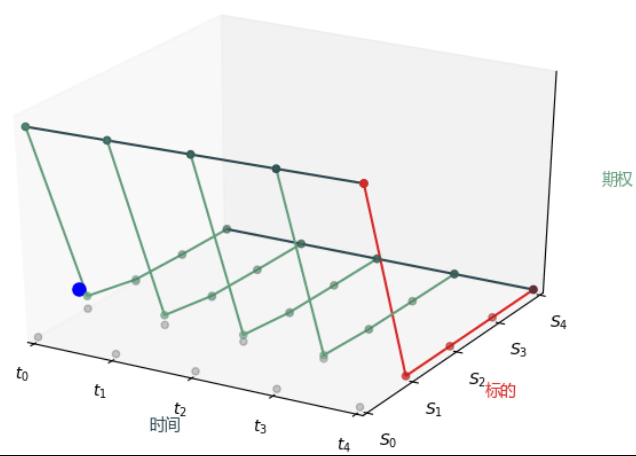
$\boldsymbol{A}(t)$ 是 3×3 的三对角线矩阵

$$\boldsymbol{A}(t) = \begin{bmatrix} c_1 & u_1 & 0 \\ l_2 & c_2 & u_2 \\ 0 & u_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad \text{对于 } j = 1,2,3 \quad \begin{aligned} l_j &= 0.5\left[\sigma^2 S_j^2 \Delta_S^{-2} - (r-q) S_j \Delta_S^{-1}\right] \\ c_j &= -\sigma^2 S_j^2 \Delta_S^{-2} - r \\ u_j &= 0.5\left[\sigma^2 S_j^2 \Delta_S^{-2} + (r-q) S_j \Delta_S^{-1}\right] \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\Omega}(t) = [l_1 V_0(t), \quad 0, \quad u_3 V_4(t)]^T$ 是 3×1 向量 (存储边界条件值)

上面求解 PDE 过程的可视化如下:

时点	图
$t_4 = T$	
t_3	

<table>
<tr><td>t_2</td><td>
</td></tr>
<tr><td>t_1</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$t_0 = 0$</td><td>
</td></tr>
</table>

上面蓝色的点就是期权价值，在时点 $t_0 = 0$ 解得向量 $\boldsymbol{V}(t_0)$，

$$\boldsymbol{V}(t_0) = [58.23, 3.70, 0.54, 0.12, 0]$$
$$[S_0, S_1, S_2, S_3, S_4] = [0, 60, 120, 180, 240]$$

该看跌期权的 S 为 50，因此在 $S_0 = 0$ 和 $S_1 = 60$ 线性插值得出 3.70 + (50-60)/(0-60) × (58.23-3.70) = 12.79。

如果理解了上面所有内容，只要把“S-轴和 t-轴上等分成 4 份”扩展到“等分成 N_s 和 N_t 份”即可计算出期权准确值。

$$
S \in \{S_j\}_{j=0}^{4} \quad \Rightarrow \quad S_j = S_{\min} + j\Delta_S = 0 + 60j, \quad \Delta_S = \frac{S_{\max} - S_{\min}}{4} = \frac{240 - 0}{4} = 60
$$

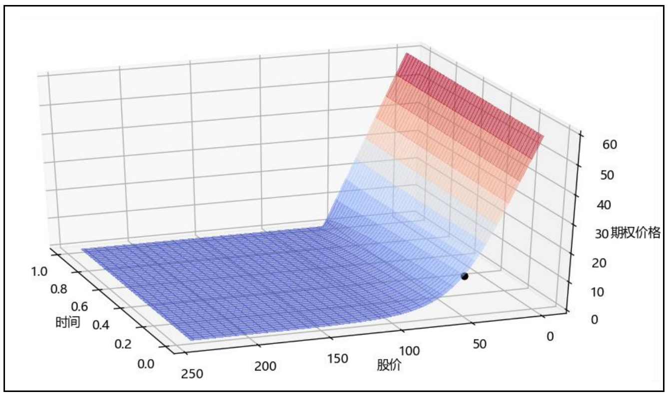
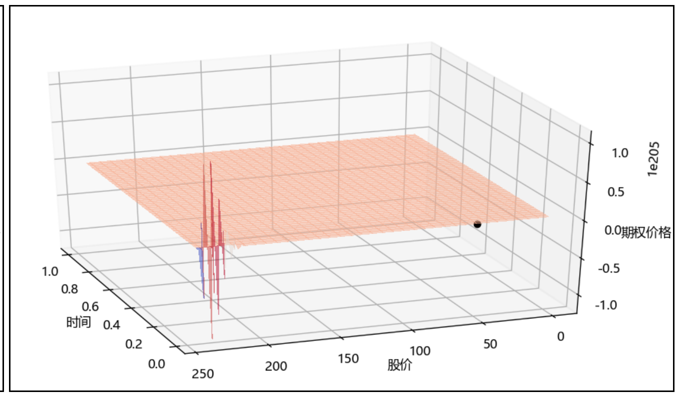
$$
t \in \{t_i\}_{i=0}^{4} \quad \Rightarrow \quad t_i = i\Delta_t = 0.25i, \quad \Delta_t = \frac{T}{n} = \frac{1}{4} = 0.25
$$

$$
\xrightarrow{\text{扩展}}
$$

$$
S \in \{S_j\}_{j=0}^{N_s} \quad \Rightarrow \quad S_j = S_{\min} + j\Delta_S, \quad \Delta_S = \frac{S_{\max} - S_{\min}}{N_s}
$$

$$
\mathrm{t} \in \{\mathrm{t_i}\}_{\mathrm{i}=0}^{N_t} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{t_i} = \mathrm{i}\Delta_\mathrm{t}, \quad \Delta_\mathrm{t} = \frac{\mathrm{T}}{N_t}
$$

设置 $N_s = 100, N_t = 1000$，检查 FE 和 FI 的结果是否收敛，由两图发现 FI 收敛，FE 不收敛，因此通常用 FI 方法。

完全隐性法 (FI)	完全显性法 (FE)
	

检查 FI 和 CN 的结果是否收敛，发现两者都收敛，而且 CN 收敛速度更快。