Paralelización de Red-Black Gauss-Seidel

Análisis Numérico
Facultad de Ingeniería, UNMDP

Fantini, Luis Mariano - Mateos, Wenceslao - Pablos Di Marco, Braulio Leonel

Resolución de sistemas de ecuaciones

- Problema recurrente en diversas ramas de la ingeniería.
- Son varios los métodos numéricos que dependen de la resolución de sistemas de ecuaciones.
- Los métodos vistos en la materia no escalan adecuadamente:
    - Problemas de rendimiento
    - Problemas de inestabilidad

Paralelización de métodos para resolver SELs

- **Gauss o Gauss-Jordan:** triangular en paralelo para un pivote.
- **Jacobi:** cada incógnita se puede calcular en paralelo por iteración.
- **Gauss-Seidel:** el valor nuevo de una incógnita depende de lo ya calculado en la misma iteración. No paralelizable a priori...

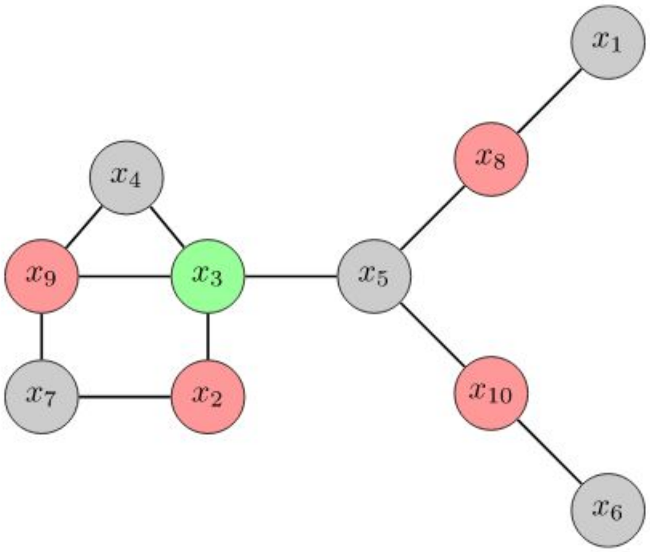
Un ejemplo particular...

Supongamos que tenemos la siguiente matriz de coeficientes:

$$
\begin{bmatrix}
3.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 3.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 15.0 & 7.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 8.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 7.0 & 28.0 & 9.0 & 9.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 3.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 9.0 & 18.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 9.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 9.0 & 0.0 & 20.0 & 0.0 & 0.0 & 8.0 & 0.0 & 3.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 8.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 8.0 \\
0.0 & 8.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 14.0 & 0.0 & 6.0 & 0.0 \\
3.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 8.0 & 0.0 & 0.0 & 11.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 3.0 & 9.0 & 0.0 & 0.0 & 6.0 & 0.0 & 18.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 3.0 & 8.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 11.0
\end{bmatrix}
$$

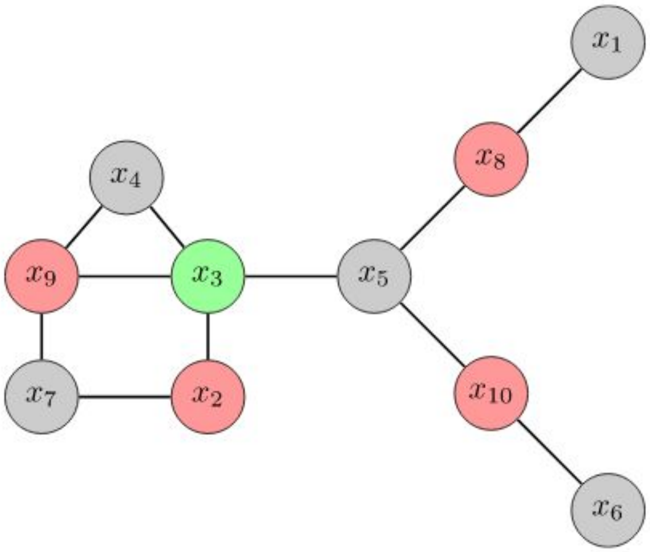
Un ejemplo particular...

Cada ecuación depende de variables particulares. Si tratamos a cada variable como un nodo, podríamos representar dichas dependencias mediante un grafo:



Un ejemplo particular...

Podemos apreciar que los nodos de un color dado son independientes entre ellos...



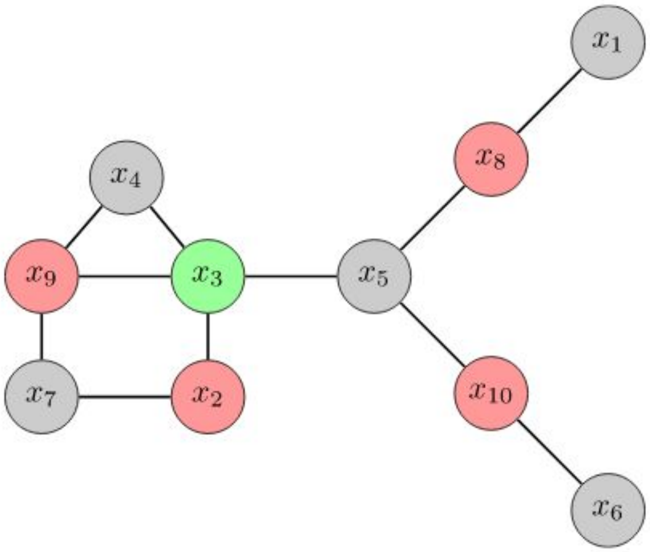
Gauss-Seidel coloreado

- Variación del método de Gauss-Seidel.
- Identifica conjuntos o “colores” de variables, incógnitas o nodos directamente independientes entre sí.
- Permite calcular las variables de un conjunto en forma simultánea, con lo que se logra brindar paralelismo a Gauss-Seidel.
- Es semi-paralelo, ya que aún sigue existiendo una secuencialidad entre conjuntos.

Gauss-Seidel coloreado

En nuestro ejemplo anterior, podríamos resolver el sistema aplicando la siguiente secuencia:

GRIS -> ROJO -> VERDE

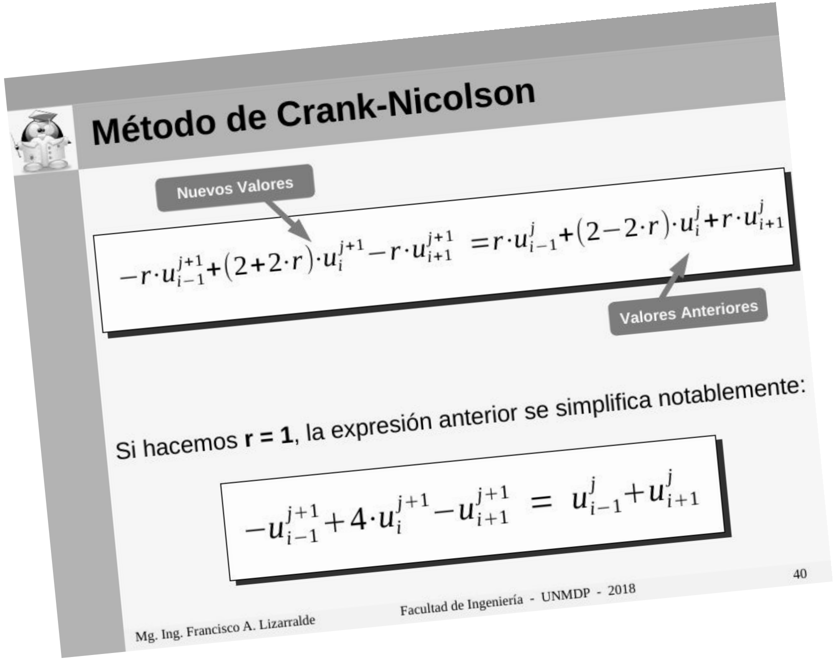


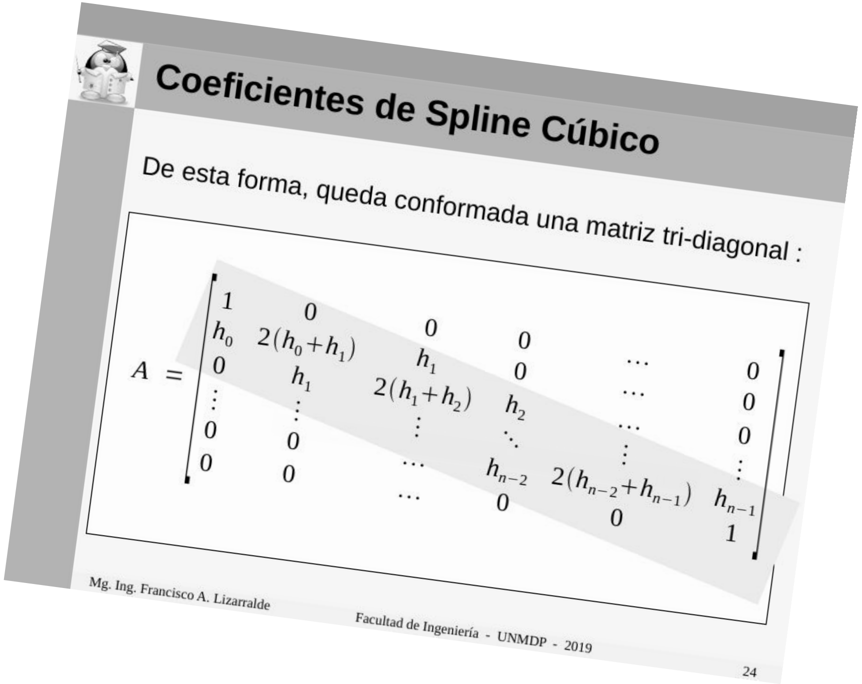
Gauss-Seidel coloreado

Consideraciones:

- El principal desafío para aplicar este esquema es encontrar los conjuntos de nodos independientes.
- Identificar dichos conjuntos es algorítmicamente complejo.
- Puede resultar más costoso realizar esta búsqueda que simplemente aplicar algún método exclusivamente secuencial desde el principio.

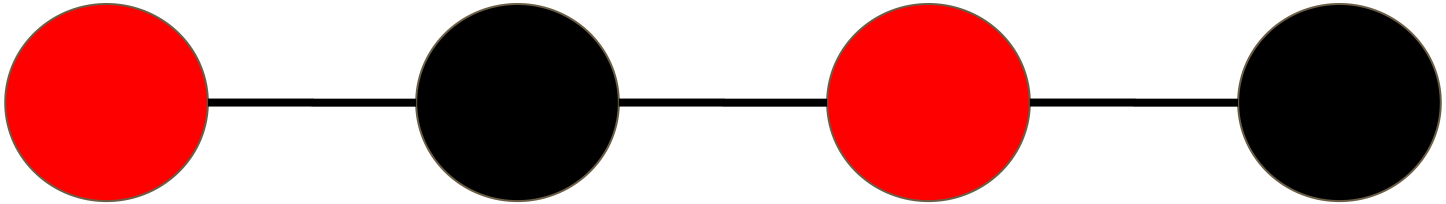
Recordando algunos temas vistos





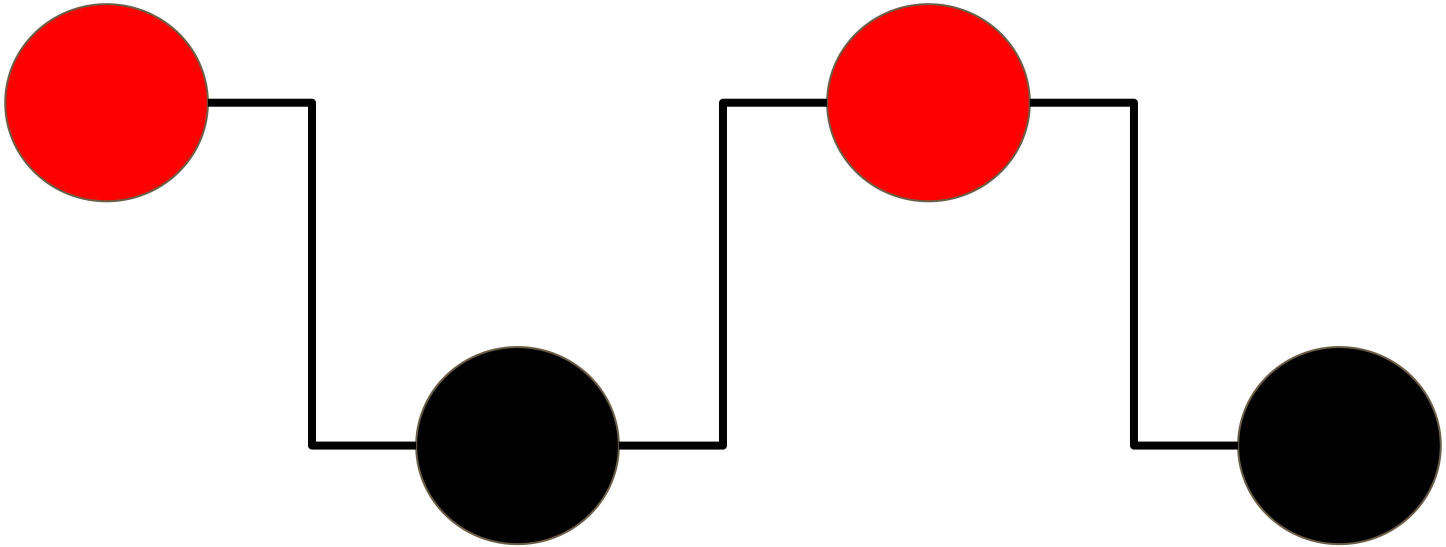
Matrices tridiagonales

Ambos métodos requieren la resolución de un sistema de ecuaciones con una matriz de coeficientes tridiagonal. El grafo de dependencias para este esquema sería el siguiente:



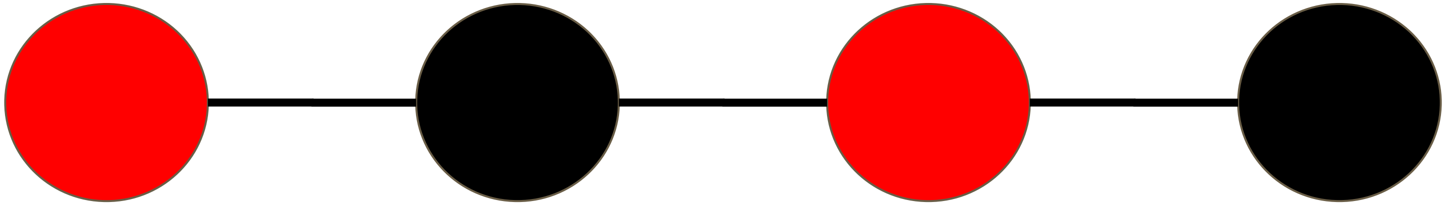
Matrices tridiagonales

Podríamos calcular la solución con una secuencia **ROJO** **->** **NEGRO**



Red-Black Gauss-Seidel 1D

- Es un caso de Gauss-Seidel coloreado con dos conjuntos independientes.
- Primero actualiza la componentes “rojas” y luego las “negras”.
- Se aplica en problemas donde los nodos conforman una “línea”, o sea, una variable solo depende de la anterior y la siguiente.



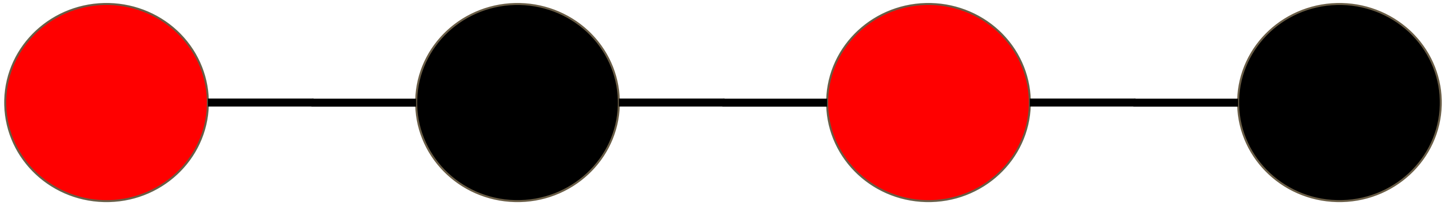
Red-Black Gauss-Seidel 1D

Rojos

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{i,i}} \cdot \left(b_i - a_{i,i-1} \cdot x_{i-1}^{k} - a_{i,i+1} \cdot x_{i+1}^{k}\right)$$

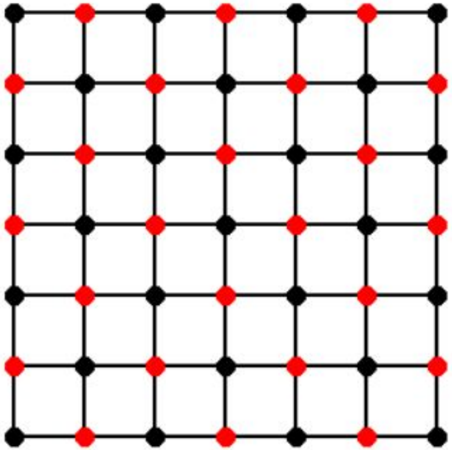
Negros

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{i,i}} \cdot \left(b_i - a_{i,i-1} \cdot x_{i-1}^{k+1} - a_{i,i+1} \cdot x_{i+1}^{k+1}\right)$$



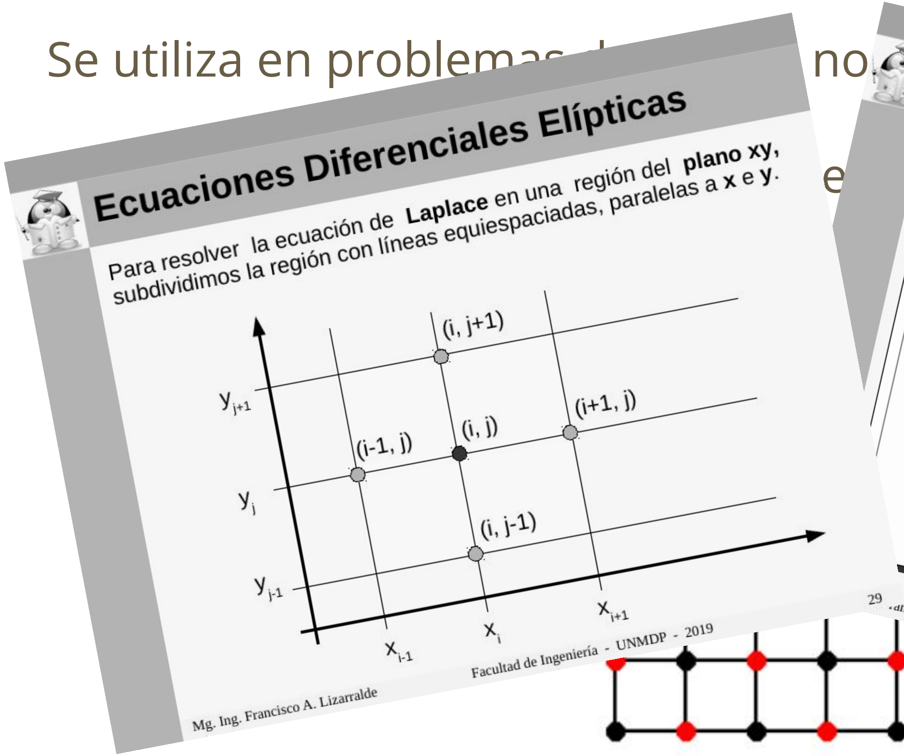
Red-Black Gauss-Seidel 2D

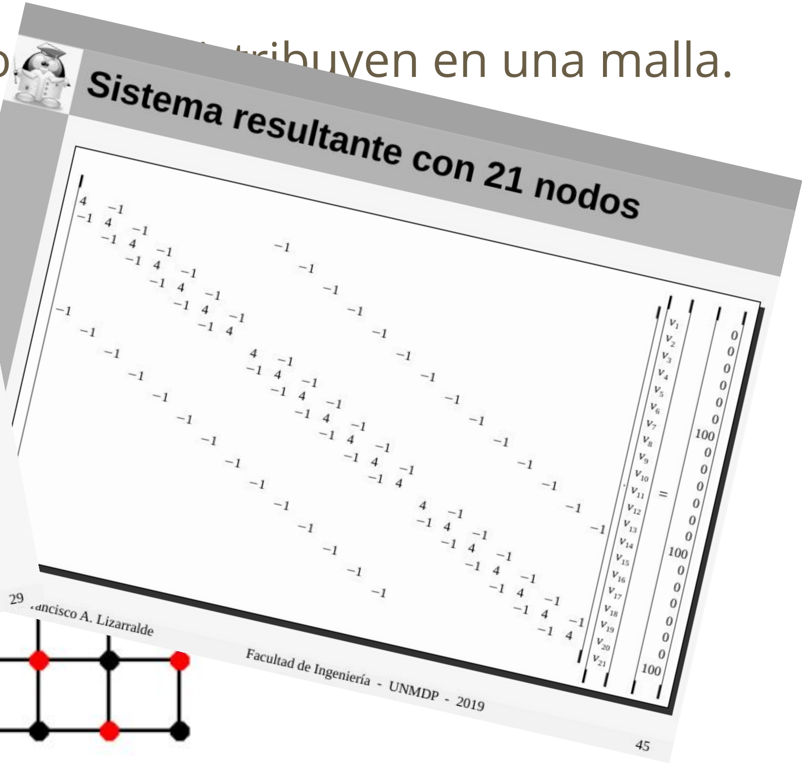
- Se utiliza en problemas donde los nodos se distribuyen en una malla.
- La matriz de coeficientes asociada es de cinco bandas.



Red-Black Gauss-Seidel 2D

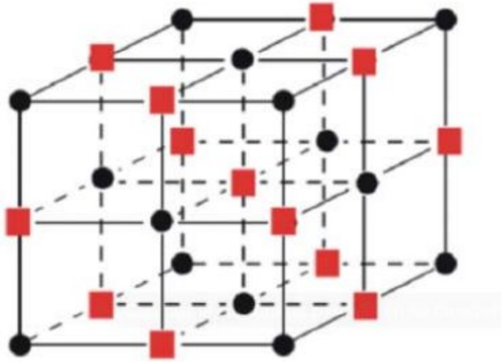
- Se utiliza en problemas d… no… tribuyen en una malla.
- … e





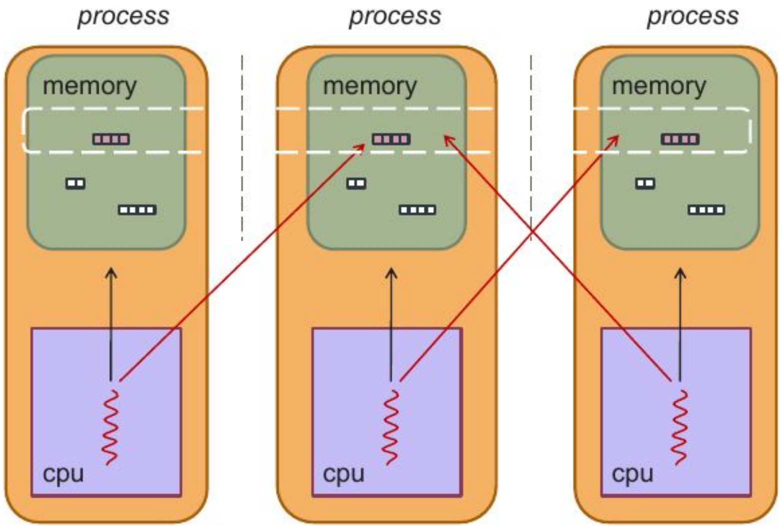
Red-Black Gauss-Seidel 3D

- Se aplica en problemas en donde las variables se distribuyen en una región cúbica.
- La matriz de coeficientes asociada es de 7 bandas.



Paralelización en Fortran - Coarrays

- SPMD (Programa Único, Datos Múltiples).
- PGAS (Espacio de Direcciones Global Particionado).
- Uso de imágenes.



Coarrays - Sentencias

- SYNC ALL
- SYNC IMAGES
- num_images()
- this_image()

Coarrays - Declaración

- **Declaración:**
  - real, dimension(10), codimension[*] :: x
  - integer :: y[*]
- **Acceso:**
  - y[2]

Comparación de tiempos

- Red Black Gauss-Seidel

- Método directo Thomas

- Método indirecto Gauss-Seidel

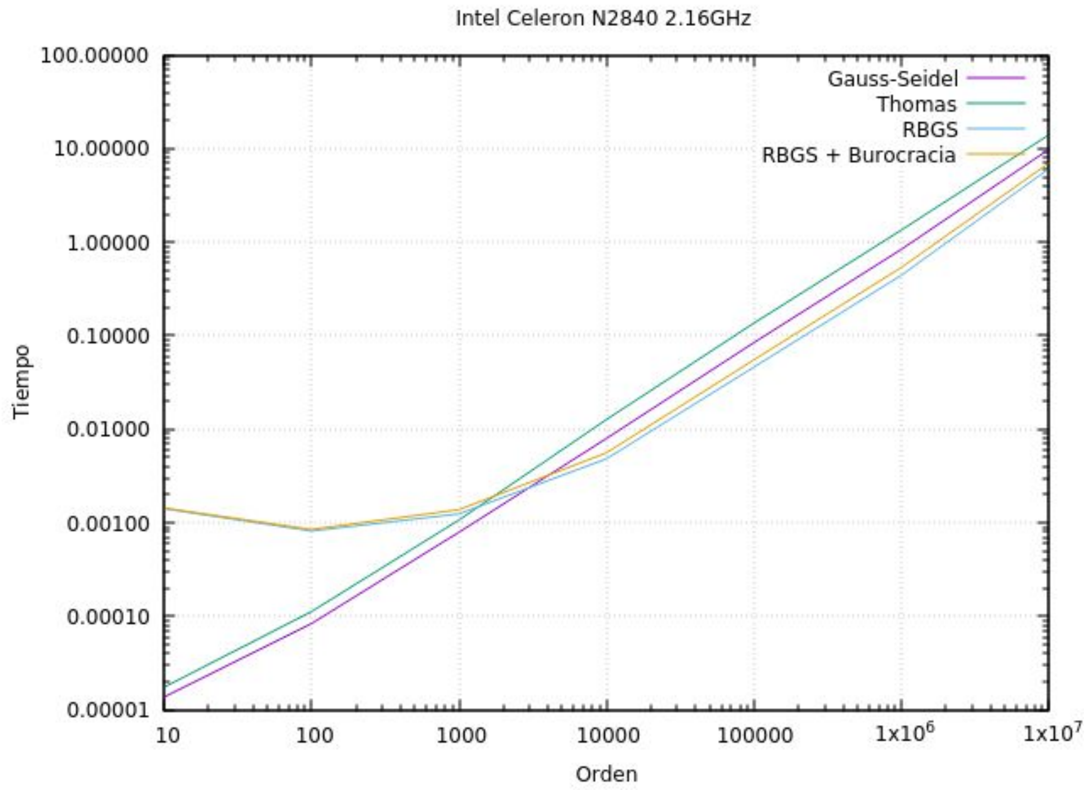
Casos de prueba generados

- Valores iniciales y términos independientes aleatorios.
- Misma matriz para los tres métodos.
- Diagonal principal 4 y el resto -1.

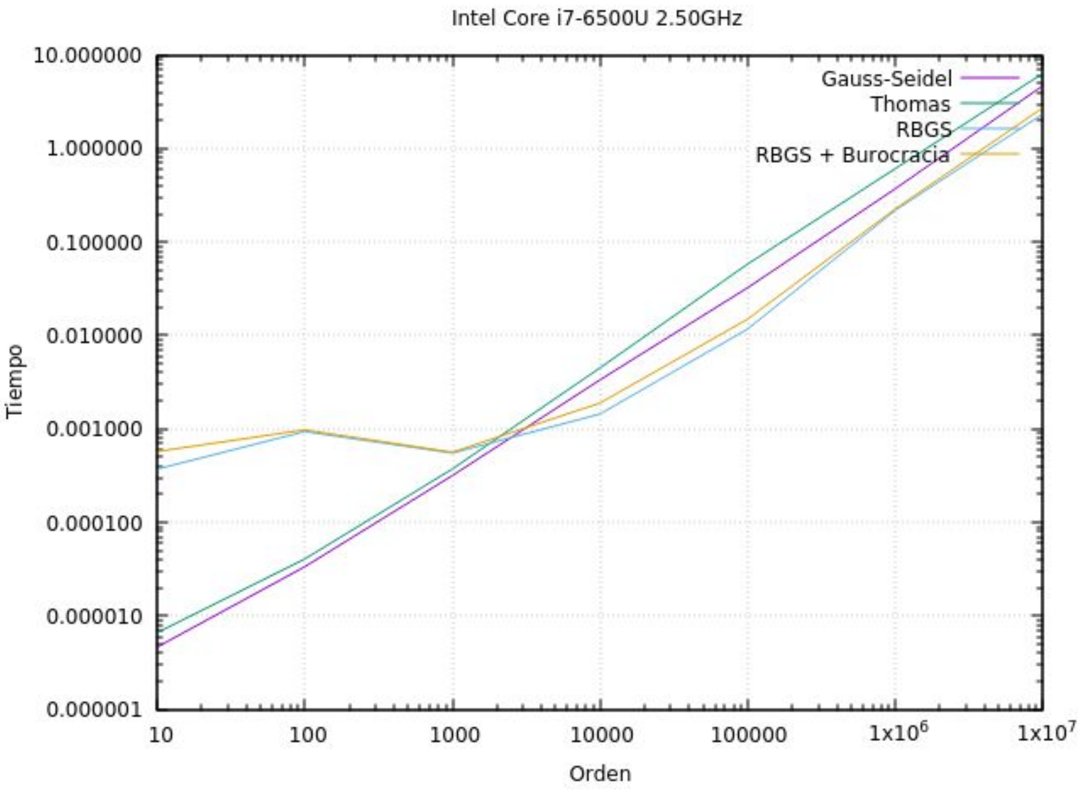
Consideraciones para los tiempos

- Para el cálculo del tiempo del procesamiento, en todos los métodos se hace un promedio.
- Gauss-Seidel y Thomas no incluyen el tiempo de armado de matriz.
- Red Black Gauss-Seidel incluye el tiempo de armado de coarrays.

Resultados obtenidos para 2 núcleos



Resultados obtenidos para 4 núcleos



Conclusiones

- La velocidad depende del orden de la matriz y la cantidad de núcleos del procesador.

- Para matrices con orden menor a 10.000, RBGS demora más que Gauss-Seidel.

- Los coarreglos aportan sencillez a la codificación de algoritmos en paralelo.