

博士 学位 论 文

基于移动可变形组件法和共形参数化技术的 复杂曲面薄壁结构拓扑优化研究

Research on Topology Optimization for Thin-walled Structures
with Complex Surfaces Based on the Moving Morphable
Components (MMC) Method and the Conformal
Parameterization Technique

作 者 姓 名: 霍文栋

学 号: 11903005

指 导 教 师: 郭旭 教授

刘畅副教授

学科、专业: 固体力学

答 辩 日 期: 2025 年 11 月 13 日

大连理工大学

Dalian University of Technology

学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经指明引用的内容外，学位论文不含任何其他个人、法人或者非法人组织已经发表或尚未发表的作品，且学位论文中已经指明作者姓名或者名称、作品名称的内容，不影响该作品的正常使用，也不存在不合理地损害相关权利人的合法权益的任何情形。对学位论文研究做出重要贡献的个人和法人或者非法人组织，均已在论文中以明确方式标明，且不存在任何著作权纠纷。

若因声明不实，本人愿意为此承当相应的法律责任。

学位论文题目： 基于移动可变形组件法和共形参数化技术的复杂曲面薄壁结构拓扑优化研究

作者签名： 霍文栋 日期：2025年11月17日

大连理工大学学位论文版权使用授权书

本人完全了解大连理工大学有关学位论文知识产权的规定，在校攻读学位期间论文工作的知识产权属于大连理工大学，允许论文被查阅和借阅。学校有权保留论文并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印、或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

学位论文题目： 基于移动可变形组件法和共形参数化技术的复杂曲面薄壁结构拓扑优化研究

作者签名： 霍文栋 日期：2025年11月17日
导师签名： 苏海 日期：2025年11月17日

博士学位论文答辩委员会

答辩人：霍文栋

答辩委员会委员：

大连理工大学教授：亢战（注：主席）

大连理工大学教授：张维声

大连理工大学教授：杨迪雄

杭州电子科技大学教授：徐岗

合肥工业大学教授：余波

答辩日期：2025.11.13

答辩地点：海宇楼 602 会议室

摘要

薄壁结构凭借其轻量化、大跨度、造型灵活等方面的优势而被广泛应用于诸多重大工业装备中。对薄壁结构进行优化设计能够降低装备成本、增强服役性能、提高材料利用效率，因此长期以来始终是工业装备研发过程中的关键研究课题。结构优化设计主要分为尺寸优化、形状优化和拓扑优化，其中拓扑优化设计自由度最大、具备“无中生有”的能力，符合工程中所需的创新型设计的需求，从而受到了学术界的广泛关注和深入研究。然而，薄壁结构通常具有复杂的曲面几何特征，这无疑给拓扑优化方法的应用带来了挑战。

本文围绕复杂曲面薄壁结构的拓扑优化这一核心问题，通过共形参数化、曲面切割操作和多面片拼接等技术处理几何模型的复杂性，基于壳体模型和实体模型进行力学建模，采用显式的移动可变形组件法描述材料布局，形成了“曲面映射-平面设计”的研究思路，针对不同工程需求开展了多方面的工作，主要包括以下三部分的内容。

1、基于移动可变形组件法和共形参数化技术，构建了一种适用于壳体模型的显式拓扑优化算法，实现了复杂曲面上材料布局的高效描述和优化。壳体模型兼具少量自由度和较高求解精度等优点，因而被广泛应用于薄壁结构的力学建模中。显式的移动可变形组件法具备设计变量少、收敛速度快、无须过滤操作等优点，但应用于壳体模型将面临在复杂曲面上定义和优化组件的挑战。为解决该问题，本文引入共形参数化技术，映射壳体模型中面得到相应的平面参数域，在平面内构建组件并逆映射回原始曲面、形成薄壁结构的材料分布描述。为提升算法处理复杂几何的能力，本文进一步集成了曲面切割操作和多面片拼接技术以应对一般化的曲面模型。在具体结构优化问题求解时，本文采用了“物理空间分析-参数平面设计”的策略，数值算例验证了所提算法的有效性和对复杂曲面薄壁结构进行材料布局优化的能力。该工作一方面实现了薄壁结构的拓扑设计，另一方面为后续工作提供了基础的研究思路。

2、基于嵌入式形貌和样条组件描述，提出了一种新型的形貌设计方法，拓展了提升薄壁结构性能的途径。受几何诱导的各向异性现象启发，本文将曲面形貌变化引入薄壁结构设计中，作为一种特定的优化手段来增强结构刚度。为实现薄壁结构的形貌设计，本文基于拓扑优化的思想，采用移动可变形组件法和嵌入式形貌描述方法刻画定义在曲面上的形貌变化。考虑到优化过程中设计域的实时变动，本文引入形状灵敏度分析方法推导了结构响应的灵敏度公式，并通过有限元离散得到了具体的计算方法。数值算例验证了形貌作为一种结构特征增强刚度的能力，以及所提方法的有效性、高效性和设计薄壁结构形貌的能力。

3、发展了一种基于实体模型的薄壁结构显式设计方法，采用移动可变形组件法实现了拓扑优化、加筋优化与夹芯层优化问题的统一建模与求解。壳体模型通常基于特定的假设建立，一方面通过自由度缩减的方式提高了模型的效率，但另一方面也从厚度层面限制了模型的应用范围和边界条件的施加。相比之下，实体模型不受壳体假设约束，在边界条件施加、多类薄壁结构设计问题的统一建模方面具有优势。因此，本文基于曲面组件描述方法和投影操作，提出了一种新型实体组件，并通过厚度坐标实现多类设计问题的统一建模。问题求解方面，本文提出了一种基于偏置操作的实体网格生成技术来简化材料分布的计算，并通过集成的自由度删除技术有效地提升了优化问题的求解效率。数值算例验证了该方法处理边界条件的优势，以及统一建模并求解薄壁结构多类优化问题的能力。得益于底层的移动可变形组件法，该算法优化迭代过程收敛速度快，所得设计结果传力路径清晰、易于工程解读。

关键词：薄壁结构；结构拓扑优化；薄壁结构拓扑优化；移动可变形组件法；共形参数化技术

ABSTRACT

Thin-walled structures are widely utilized in major industrial equipment due to their advantages, including lightweight characteristics, long-span capacity, and flexible shaping ability. Designing and optimizing thin-walled structures are essential for reducing equipment costs, enhancing operational performance, and improving material utilization efficiency. As a result, the design and optimization of thin-walled structures has long been a central research focus in the development of industrial equipment. Structural optimization can generally be classified into size optimization, shape optimization, and topology optimization. Among these, topology optimization allows the largest design freedom and possesses the capability of “creating something from nothing,” aligning well with the need for innovative engineering designs. Hence, it has attracted considerable attention and deep investigation in the academic community. However, the complex surface geometries inherent to thin-walled structures pose significant challenges to the direct application of topology optimization methods.

This work addresses the core problem of topology optimization for thin-walled structures, which adopts techniques such as conformal parameterization, surface cutting, and multi-patch stitching to handle the complexity of geometric models, and employs the explicit Moving Morphable Components (MMC) method to describe material layouts. A research framework of "mapping from surface and designing in planar domain" is proposed, and a series of studies have been conducted to meet different engineering needs, as outlined below.

1. Based on the MMC method and conformal parameterization technique, an explicit topology optimization algorithm suitable for shell models is constructed, achieving efficient description and optimization of material layout on complex surfaces. Shell models are widely employed in the mechanical modeling of thin-walled structures due to their ability to achieve high solution accuracy with relatively few degrees of freedom. The explicit MMC method offers benefits such as a small number of design variables, fast convergence, and no need for filtering. Nevertheless, its application to shell models poses challenges in defining components on complex curved surfaces. To address this issue, a conformal parameterization technique is introduced to map the middle surfaces of shell models to planar parametric domains, where components are constructed and then inversely mapped back to the original surfaces to describe material layouts. To enhance the capability of handling complex geometries, surface cutting and multi-patch stitching techniques are further integrated to tackle general surface models. In solving the practical structural optimization problem, a strategy of “analysis in the physical space and design in the parameter domain” is employed. Numerical examples demonstrate the effectiveness of the proposed algorithm and its ability to optimize material

layouts. This work not only enables topology design for thin-walled structures but also provides a fundamental research framework for further studies.

2. A novel topography design method is proposed based on the embedded topography and spline-based components, which expands the approaches to enhance the performance of thin-walled structures. Inspired by the geometry-induced anisotropy phenomenon, surface topography variations are introduced into thin-walled structure design as a specific optimization strategy to enhance structural stiffness. To implement topography design of thin-walled structures, this thesis adopts the concept of topology optimization and employs the MMC method along with an embedded topography description approach to characterize surface-defined topography variations. Considering the evolution of the design domain during optimization, shape sensitivity analysis is employed to derive the sensitivity of structural responses, and the finite element discretization approach is adopted to obtain the specific computational method. Numerical examples verify the ability of topography as a structural feature that enhances stiffness, as well as the effectiveness, efficiency, and capability of designing topography of thin-walled structures.

3. An explicit design method for thin-walled structures based on solid models is developed, which unifies the modeling and solution of topology, stiffener, and sandwich-layer optimization problems within the framework of the MMC method. Shell models are typically based on specific assumptions that improve computational efficiency by reducing degrees of freedom but simultaneously limit the application scope and boundary condition implementation. In contrast, solid models are free from shell-specific assumptions, offering advantages in applying boundary conditions and unified modeling across multiple design problems of thin-walled structures. In this context, a novel solid component is proposed using surface-based component description and projection operations, and the thickness coordinate is introduced to achieve unified modeling of diverse design tasks. For problem solving, an offset-based solid mesh generation technique is proposed to simplify material layout computation, and an integrated degree-of-freedom deletion strategy is used to enhance optimization efficiency. Numerical examples validate the advantages of the proposed method in handling boundary conditions and solving various optimization problems of thin-walled structures in a unified framework. Owing to the underlying MMC method, the optimization process demonstrates fast convergence, and the resulting structural designs feature clear load paths and are easily interpretable for engineering applications.

Key Words: Thin-walled Structure; Structural Topology Optimization; Topology Optimization for Thin-walled Structures; Moving Morphable Components method; Conformal Parameterization Technique

目 录

摘要	I
ABSTRACT	III
目录	V
TABLE OF CONTENTS	IX
图目录	XIII
1 绪论	1
1.1 研究背景与意义	1
1.2 相关研究进展	3
1.2.1 壳体模型的发展概述	3
1.2.2 拓扑优化方法的研究进展	5
1.2.3 薄壁结构拓扑优化的研究进展	10
1.2.4 共形参数化的涵义阐述	15
1.2.5 曲面形貌的研究进展	17
1.3 本文主要研究内容	19
1.3.1 拟解决的科学问题	19
1.3.2 章节安排	20
2 理论基础	22
2.1 共形参数化	22
2.1.1 数学背景	22
2.1.2 数值实现	24
2.2 壳体的力学模型	30
2.2.1 壳体的几何关系	30
2.2.2 线弹性通用壳体的基本模型	33
2.2.3 线弹性通用壳体的退化模型	36
2.3 移动可变形组件法	39
2.4 本章总结	40
3 基于壳体模型的薄壁结构显式拓扑优化方法	41
3.1 引言	41
3.2 复杂曲面的组件布局描述	41
3.2.1 单连通零亏格开曲面的组件布局描述	41

3.2.2 基于曲面切割操作的组件布局描述	42
3.2.3 面向一般复杂曲面的组件布局描述	43
3.3 优化列式与灵敏度分析	44
3.3.1 优化列式	44
3.3.2 灵敏度分析	46
3.4 数值实现与算法流程	48
3.4.1 数值实现	48
3.4.2 离散灵敏度求解	49
3.4.3 算法流程	49
3.5 算例验证	50
3.5.1 鞍面算例	50
3.5.2 环面算例	52
3.5.3 莫比乌斯面算例	55
3.5.4 三通管道算例	57
3.6 本章总结	61
4 薄壁结构的显式形貌优化设计方法	62
4.1 引言	62
4.2 嵌入式形貌描述	63
4.2.1 单连通零亏格开曲面的形貌嵌入	64
4.2.2 复杂曲面的形貌嵌入	65
4.2.3 平面形貌函数的构造	67
4.2.4 样条组件描述方法	68
4.3 优化列式与灵敏度分析	69
4.3.1 优化列式	69
4.3.2 灵敏度分析	71
4.4 数值实现与设计流程	72
4.4.1 速度场的推导和计算	72
4.4.2 离散灵敏度的计算方法	74
4.4.3 设计流程	74
4.5 算例验证	75
4.5.1 机理验证	75

4.5.2 平板结构形貌设计	77
4.5.3 基于共形参数化技术的形貌设计	83
4.5.4 复杂曲面薄壁结构的形貌设计	84
4.6 本章总结	87
5 基于实体模型的薄壁结构拓扑优化方法	89
5.1 引言	89
5.2 嵌入式实体组件的构造方法	89
5.3 优化列式与灵敏度分析	92
5.3.1 优化列式	92
5.3.2 灵敏度分析	93
5.4 数值实现	93
5.4.1 基于偏置操作的实体网格生成技术	93
5.4.2 结构响应与离散灵敏度求解	95
5.4.3 自由度删除技术	97
5.4.4 优化流程与技术备注	97
5.5 算例验证	98
5.5.1 摆线形薄壁结构算例	98
5.5.2 瓶状薄壁结构算例	104
5.5.3 三通管道算例	109
5.6 本章总结	115
6 结论与展望	117
6.1 研究结论	117
6.2 创新点总结	118
6.3 未来研究展望	118
参考文献	120
附录 1 共形参数化实现过程的相关证明	131
攻读博士学位期间科研成果及科研项目	137
致 谢	139
作者简介	141

TABLE OF CONTENTS

ABSTRACT	III
TABLE OF CONTENTS	IX
List of figures	XIII
1 Introduction	1
1.1 Research background and significance	1
1.2 Relevant research progress	3
1.2.1 Overview of the development of shell models	3
1.2.2 Research progress of topology optimization methods	5
1.2.3 Research progress of topology optimization for thin-walled structures ..	10
1.2.4 Explanation of the meaning of conformal parameterization	15
1.2.5 Research progress of surface topography	17
1.3 Main research contents	19
1.3.1 Scientific problems to be solved	19
1.3.2 Chapter arrangement	20
2 Theoretical basis	22
2.1 Conformal parameterization	22
2.1.1 Mathematical background	22
2.1.2 Numerical implementation	24
2.2 Mechanics models of a shell	30
2.2.1 Geometrical relationships in a shell	30
2.2.2 Fundamental model of a general linear elastic shell	33
2.2.3 Degenerate models of a general linear elastic shell	36
2.3 Moving morphable components method	39
2.4 Chapter summary	40
3 Explicit topology optimization design method based on the shell model	41
3.1 Introduction	41
3.2 Component layout description of complex surfaces	41
3.2.1 Component layout for a simply-connected genus-zero open surface	41
3.2.2 Component layout description based on surface-cutting operation	42
3.2.3 Component layout description towards generally complex surfaces	43
3.3 Optimization formulation and sensitivity analysis	44
3.3.1 Optimization formulation	44
3.3.2 Sensitivity analysis	46
3.4 Numerical implementation and algorithm flow	48

3.4.1 Numerical implementation	48
3.4.2 Solution of discrete sensitivities.....	49
3.4.3 Algorithm flow	49
3.5 Example validation.....	50
3.5.1 Saddle example	50
3.5.2 Torus example	52
3.5.3 Möbius surface example.....	55
3.5.4 Tee-branched pipe example	57
3.6 Chapter summary	61
4 Explicit topography optimization and design method for shell structures	62
4.1 Introduction	62
4.2 Embedded topography description.....	63
4.2.1 Topography embedding of simply connected zero-genus open surfaces	64
4.2.2 Topography embedding of complex surfaces	65
4.2.3 Construction of planar topography functions.....	67
4.2.4 Spline component description method	68
4.3 Optimization formulation and sensitivity analysis.....	70
4.3.1 Optimization formulation.....	70
4.3.2 Sensitivity analysis.....	71
4.4 Numerical implementation and design flow	72
4.4.1 Derivation and calculation of the velocity field	72
4.4.2 Computational methods of discrete sensitivities.....	74
4.4.3 Design flow	74
4.5 Example validation.....	75
4.5.1 Mechanism validation	75
4.5.2 Topography design of a flat plate structure.....	77
4.5.3 Topography design based on conformal parameterization technology	83
4.5.4 Topography design of complex surface shell structures	84
4.6 Chapter summary	87
5 Shell structure topology optimization method based on the solid model.....	91
5.1 Introduction	91
5.2 Construction method of embedded solid components	91
5.3 Optimization formulation and sensitivity analysis	92
5.3.1 Optimization formulation.....	92
5.3.2 Sensitivity analysis.....	93

5.4 Numerical implementation	93
5.4.1 Solid mesh generation technology based on offset operations	93
5.4.2 Structural response and solution of discrete sensitivities.....	95
5.4.3 Degree-of-freedom deletion technology	97
5.4.4 Optimization processes and technical remarks	97
5.5 Example validation.....	100
5.5.1 Cycloid-shaped example	100
5.5.2 Bottle-shaped shell structure example.....	104
5.5.3 Tee-branched pipe example	109
5.6 Chapter summary	115
6 Conclusions and outlook	117
6.1 Research conclusions	117
6.2 Innovation Summary	118
6.3 Future research outlook.....	118
References	120
Appendix 1 Relevant proofs in the implementation of conformal parameterization....	131
Research achievements and projects during the pursuit of a doctoral degree.....	137
Acknowledgements	139
About the author.....	141

图目录

图 1.1 薄壁结构被广泛应用于诸多重大工业装备中	1
图 1.2 结构优化设计类别	2
图 1.3 Chladni 图案的介绍: (a) 受到特定频率激励的平板上形成的 Chladni 图案 ^[9] ; (b) 不同激励条件下平板上形成的 Chladni 图案 ^[10] ; (c) 利用 Chladni 图案组装 微结构 ^[8]	3
图 1.4 拓扑优化的先驱性研究工作	5
图 1.5 SIMP 材料插值模型与符合模型的微结构 ^[57]	6
图 1.6 ESO 方法和 BESO 方法迭代过程对比	7
图 1.7 水平集函数采用高维函数的等值面表示边界 ^[72]	8
图 1.8 相场法被应用于晶体生长模拟和应力相关的拓扑优化	8
图 1.9 移动可变形组件法优化机理简介 ^[78]	9
图 1.10 移动可变形组件法的多种应用场景	9
图 1.11 基于均匀化方法、SIMP 法的薄壁结构拓扑优化	10
图 1.12 采用曲纹坐标的水平集函数表示边界 ^[95]	11
图 1.13 采用等几何分析方法实现薄壁结构拓扑优化的研究	11
图 1.14 采用裁剪曲面分析技术的薄壁结构等几何拓扑优化	12
图 1.15 基于 T 样条模型的薄壁结构等几何拓扑优化 ^[111]	13
图 1.16 薄壁结构拓扑优化方法应用于多种复杂力学设计问题求解	14
图 1.17 共形映射在数学物理中的经典应用	15
图 1.18 曲面参数化在计算机工业中的经典应用	16
图 1.19 地图绘制中的不同投影方法: (a) 球极投影; (b) 墨卡托投影; (c) 兰伯特 方位等积投影	16
图 1.20 自然界中多种曲面形貌的案例: (a) 植物叶片与花瓣 ^[143,145] ; (b) 人类表皮 细节图 ^[149] ; (c) 通过有限元方法模拟表皮形貌 ^[146]	17
图 1.21 曲面形貌能够提升结构性能、调控结构响应: (a) 相比平板结构, 波纹板具 有较高的抗弯刚度 ^[159] ; (b) 用以实现应力波定向引导的曲面形貌 ^[160] ; (c) 曲面 形貌可用来控制材料失效并引导裂纹扩展 ^[161]	18
图 2.1 共形参数化技术中边界法向量的定义	25
图 2.2 单位正方形映射边界条件示意图	28
图 2.3 基于拟共形映射复合的曲面共形参数化求解思路示意图	29

图 2.4 壳体模型的转角自由度定义 ^[18]	34
图 2.5 移动可变形组件法的优化机理示意图	39
图 2.6 经典二维结构组件的几何描述	40
图 3.1 单连通零亏格开曲面的拓扑描述函数定义	41
图 3.2 非零亏格曲面通过切割操作实现参数化过程	42
图 3.3 非零亏格曲面的拓扑描述函数定义	43
图 3.4 通过曲面分解的方式降低原始曲面的复杂性	43
图 3.5 采用多面片拼接技术的复杂曲面拓扑描述函数构造	44
图 3.6 本工作采用中面模型对薄壁结构进行建模	44
图 3.7 鞍面薄壁结构算例的问题设置	50
图 3.8 通过共形映射技术对鞍面薄壁结构中面进行参数化	51
图 3.9 鞍面薄壁结构算例的初始组件布局	51
图 3.10 鞍面薄壁结构算例的迭代历程	52
图 3.11 鞍面算例优化结构	52
图 3.12 环面薄壁结构问题设置	53
图 3.13 通过切割操作实现环面参数化	53
图 3.14 环面算例的组件初始布局	54
图 3.15 环面算例的迭代历程	54
图 3.16 环面算例的设计结果	54
图 3.17 莫比乌斯面算例的边界条件	55
图 3.18 采用多面片拼接技术的莫比乌斯曲面拓扑描述函数构造	56
图 3.19 莫比乌斯面算例的迭代历程	56
图 3.20 莫比乌斯面算例最终设计	57
图 3.21 三通管道算例几何尺寸与边界条件	58
图 3.22 三通管道算例几何处理	58
图 3.23 接头曲面片的几何处理	59
图 3.24 三通管道算例初始组件布局	59
图 3.25 三通管道算例迭代历程	60
图 3.26 三通管道算例最终设计	60
图 3.27 不同曲面片上组件的最终布局	60
图 4.1 由薄壁特性引起的刚度差异的示意图	62

图 4.2 形貌变化可以被用来改变薄壁结构的承重方式并提升结构性能	62
图 4.3 通过法向扰动来规范构型的变化	63
图 4.4 形貌嵌入的实施过程示意图	64
图 4.5 采用曲面切割操作对流形曲面进行预处理（以柱面为例）	65
图 4.6 通过多面片拼接技术定义曲面形貌	66
图 4.7 平面形貌场函数构建过程示意图	67
图 4.8 参数设置为 $nr = 8$ 的样条组件示意图	68
图 4.9 中面与实体域关系的示意图	73
图 4.10 方形板算例边界条件	75
图 4.11 不同形貌设置下位移量的比较	76
图 4.12 基础形貌组件位置对于柔度目标函数的影响	76
图 4.13 平板结构基础形貌设计问题的迭代历史和中间结果	77
图 4.14 通过不同视角和不同高度截面来展示平板算例的最终设计结果	78
图 4.15 不同厚度设置下的最终设计：(a-d) 厚度分别设置为 0.05, 0.1, 0.4 和 0.8	79
图 4.16 不同最大形貌高度设置的最终设计	80
图 4.17 平板结构在面内力作用下的形貌设计迭代历史及中间结果	81
图 4.18 修改后的中曲面及相应的最终设计	82
图 4.19 鞍形薄壁结构算例的问题设置	83
图 4.20 不同组件布局的初始设计、迭代曲线以及最终设计	84
图 4.21 八字形环面算例的问题设置	85
图 4.22 八字环曲面的几何前处理（以左半部分为例）	85
图 4.23 八字环算例的迭代历史、中间结果以及最终设计（第 300 步）：(a) 初始设计 ($C = 31631.04$)；(b) 第 25 步的设计 ($C = 5110.71$)；(c) 第 150 步的设计 ($C = 3458.74$)；(d) 最终设计 ($C = 2876.67$)	86
图 4.24 花瓶算例的问题设置（厚度为 0.05）	87
图 4.25 花瓶算例的迭代历史、中间结果以及最终设计：(a) 初始设计 ($C = 36268.51$)；(b) 最终设计 ($C = 7623.96$)；(c-e) 最终设计的不同视图	88
图 5.1 嵌入式组件必要性的示意图：(a) 定义在欧氏空间中的组件在优化过程中存在贯穿设计域的问题；(b) 嵌入式组件能够有效地适应薄壁结构的形状变化	89
图 5.2 TDF 函数构建过程示意图：(a) 将曲面按照几何特征分解为多个简单曲面片从而降低几何复杂度；(b) 在各面片上进行 TDF 函数的构建；(c) 将局部曲面	89

片上定义的 TDF 函数延拓至整体曲面; (d) 原始曲面的 TDF 函数定义由各面片装配而成.....	90
图 5.3 嵌入式组件示意图: (a) 实体域材料分布通过中曲面的投影操作获得; 嵌入式组件不同的应用场景包括: (b) 拓扑优化, (c) 加筋设计, (d) 三明治夹芯结构设计	91
图 5.4 本研究的核心问题为: 最小化薄壁结构的柔度优化.....	92
图 5.5 基于偏置的实体网格生成技术示意图: (a) 单元的单位法向量定义; (b) 基于偏置操作生成节点; (c) 通过 1-ring neighborhood 方法定义节点法向量; (d) 生成实体网格的节点; (e) 曲面单元生成; (f) 实体单元生成	94
图 5.6 自由度删除技术示意图: (a) 原始的计算模型; (b) 依据加载路径识别算法区分结构外组件(橙色)和结构内的组件(绿色); (c) 移除的网格; (d) 根据自由度删除技术生成的窄带网格.....	96
图 5.7 摆线形薄壁结构的问题设置: (a) 通过中曲面网格(左侧)生成实体网格(右侧); (b) 摆线形薄壁结构的位移与外载荷边界条件(外力为中心点处沿厚度方向施加的线载荷, 如右下角所示)	99
图 5.8 摆线形薄壁结构的初始设置: (a) 摆线形薄壁结构的共形映射; (b-d) 组件在参数域、中曲面、实体域的初始布局.....	99
图 5.9 摆线形薄壁结构的迭代历史和中间结果.....	100
图 5.10 摆线形薄壁结构的优化结果: (a) 俯视图; (b) 侧视图.....	100
图 5.11 中曲面调整结果的展示: 从 Case 1 到 Case 6, 参数 γ 分别取为 0, 0.025, 0.05, 0.10, 0.15, 0.30.....	101
图 5.12 不同曲率最终设计之间的比较.....	101
图 5.13 基于壳体模型的方法与本工作所提方法的对比: (a) 在壳体模型上施加的边界条件; (b) 基于壳体模型方法的最终设计, $C_{opt} = 1.93$; (c) 施加在基于实体方法的边界条件; (d) 基于实体方法的最终设计, $C_{opt} = 8.12$	102
图 5.14 采用/不采用自由度删除技术的优化结果对比: (a) 有限元时间对比; (b) 最终设计结果对比; 左侧为采用自由度删除技术结果, 右侧则为不采用的设计结果	103
图 5.15 瓶子算例的几何与边界条件: (a) 中曲面模型; (b) 实体模型与边界条件	104
图 5.16 通过基于单面片的全局映射(a-c)和多面片缝合技术(d-f)的组件布局对比	105

图 5.17 瓶子算例的组件初始布局; (a) 参数域中;	105
图 5.18 瓶子算例的迭代历史和中间结果	106
图 5.19 瓶子算例最终设计由三类具有不同功能的分层式组件构成	106
图 5.20 瓶子算例不同参数设置的组件初始布局	106
图 5.21 瓶子算例不同初始布局的最终设计	107
图 5.22 瓶子算例加筋结构设计的问题设置	108
图 5.23 加筋结构的两个代表性设计: (a) 第一组参数设计的优化结果, $C_{opt} = 1.25$; (b) 第一组参数设计结果的无蒙皮展示; (c) 第二组参数设计的优化结果, $C_{opt} = 0.54$; (d) 第二组参数设计结果的无蒙皮展示	108
图 5.24 三通管道算例的几何与边界条件: (a) 中曲面模型; (b) 实体模型与边界条件	109
图 5.25 三通管道算例的原始曲面分割为四个面片	110
图 5.26 三通管道算例各曲面片的参数化	110
图 5.27 三通管道薄壁结构的初始组件布局	111
图 5.28 三通管道算例的迭代历史与中间设计	112
图 5.29 三通管道算例拓扑优化的最终设计柔度为 43.38	112
图 5.30 三通管道算例不同边界条件的最终设计	113
图 5.31 三通管道算例非对称的条件设置	114
图 5.32 非对称算例的迭代曲线与优化历史	114
图 5.33 三通管道非对称算例的最终设计	115
图 5.34 三明治类型增强结构设计的厚度设置	115
图 5.35 三明治类型增强结构的最终设计: 从(a)到(c), 体积分数分别设置为 0.375, 0.45 和 0.55, 非设计层的杨氏模量分别设置为 0.15, 0.3 和 0.5	116

1 绪论

1.1 研究背景与意义

薄壁结构指具有曲面形状，且厚度远小于其他尺寸的结构。平板结构是薄壁结构中面曲率为零的退化。薄壁结构凭借其轻量化、大跨度、造型灵活等方面的优势而被广泛应用于诸多重大工业装备中，包括运载火箭、大飞机、高速列车和破冰船等，如图 1.1 所示。对薄壁结构进行设计能够降低装备成本、增强服役性能、提高材料利用效率，因此长期以来始终是工业装备研发过程中的关键研究课题。然而，在近年来工业装备结构复杂化、服役环境极端化的背景下，传统理念下经验式的试错调整设计将导致研发周期长、制造成本高、难以得到满足性能指标要求的可行结构等问题。因此，亟需面向薄壁结构开展基于严格理论的结构优化设计研究，从而提供更加高效、可靠的解决方案。



图 1.1 薄壁结构被广泛应用于诸多重大工业装备中

Fig. 1.1 Thin-walled structures are widely applied in diverse major engineering fields

结构优化设计指在满足特定约束（如材料用量）的前提下，基于力学理论、优化方法和计算技术获得性能指标（刚度、强度和基频等）最优化的结构构型设计过程^[1]。结构优化设计的早期研究可追溯到工程师米歇尔关于桁架的设计工作^[2]，其在学者麦克斯韦工作^[3]基础上，提出了著名的满应力准则，并用以解析地求解集中载荷下的最优桁架构型。自上世纪六十年代起，随着运筹学^[4]相关理论的引入与有限元分析等数值技术^[5]的发展，基于数学规划的结构优化设计的系统性方法逐渐成型，其问题的一般提法为

$$\text{Find } \mathbf{D} \quad (1.1a)$$

$$\text{Minimize } I = I(\mathbf{D}) \quad (1.1b)$$

S.t.

$$g_i(\mathbf{D}) \leq 0, i = 1, \dots, n_g, \quad (1.1c)$$

$$h_i(\mathbf{D}) = 0, i = 1, \dots, n_h, \quad (1.1d)$$

$$\mathbf{D} \in \mathcal{U}_{\mathbf{D}}, \quad (1.1e)$$

式中符号 \mathbf{D} 代表设计变量，表示控制结构构型的参数，属于可行集合 $\mathcal{U}_{\mathbf{D}}$ ；符号 I 代表目标函数，表示需要优化的性能指标； $g_i(\mathbf{D})$ 和 $h_i(\mathbf{D})$ 分别代表不等式约束函数和等式约束函

数, n_g 和 n_h 分别为不等式约束个数和等式约束个数; 目标函数和约束函数统称为结构响应。由于能够带来巨大的经济效益, 结构优化设计已经成为众多领域内装备研制的核心技术。

根据设计变量种类, 结构优化设计主要分为尺寸优化、形状优化和拓扑优化。尺寸优化主要考虑结构中的尺寸参数, 比如杆件宽度等; 形状优化通过调整结构外形提高其性能, 对应的设计变量通常是几何建模时采用的控制点、型值点等; 拓扑优化的设计自由度最大, 需要考虑材料的布局和构件的连接关系等。在实际工程中, 结构优化设计的经典环节为: 拓扑优化-形状优化-尺寸优化, 如图 1.2 所示。其中, 拓扑优化用来为结构找型, 实现概念设计、定下初始设计原型; 其次, 形状优化进一步对结构的特征进行修改, 实现构型的细化; 最后, 尺寸优化对结构中的尺寸数据精细调整, 得到最终设计。由于拓扑优化具备“无中生有”的能力, 符合工程中所需的创新型设计的需求, 因此受到了学术界的广泛关注和深入研究。

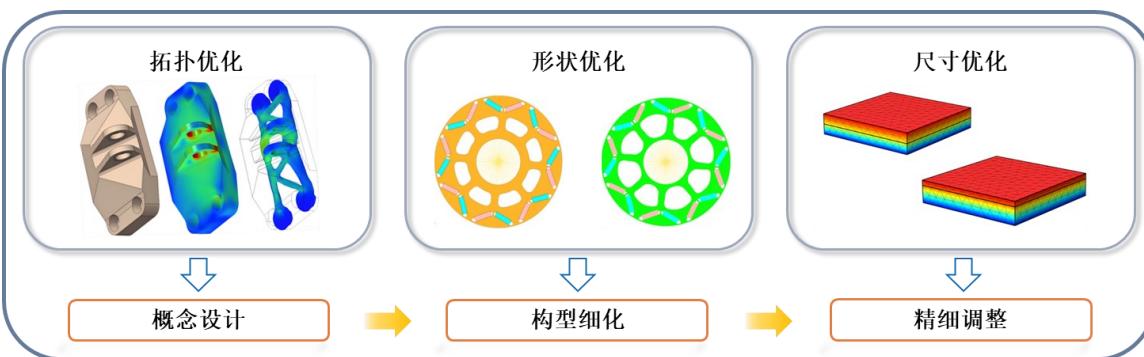


图 1.2 结构优化设计类别

Fig. 1.2 Categories of structure optimization and design

对薄壁结构进行拓扑优化本质上相当于在曲面(例如结构中面)上寻求材料的最优分布。在迭代设计过程中, 材料用量逐渐从曲面上的低效区域(比如刚度优化中薄壁结构上的低应变能单元等)转移到高效区域, 从而提升材料利用效率、实现轻量化设计、获得创新的构型设计。然而, 区别于平直结构和实体块状结构, 薄壁结构通常具有更为复杂的曲面几何特征, 例如非均匀的曲率分布以及非零亏格的中面拓扑等。这些几何复杂性无疑给拓扑优化的算法设计带来了挑战。为此, 本文基于显式的移动可变形组件法, 充分利用其设计变量少、收敛速度快、无需过滤操作以及优化结果边界清晰等优点, 结合共形参数化技术处理几何复杂性, 开展了面向复杂曲面薄壁结构的拓扑优化方法研究。

1.2 相关研究进展

1.2.1 壳体模型的发展概述

壳体模型作为力学的重要分支，已经存在数百余年，其早期的研究可追溯至声学之父、科学家、音乐家 Ernst Chladni 关于平板振动的实验^[6,7]。Chladni 通过在薄板上放置沙子显示平板的多种振动模式；当平板受到特定频率的激励时，入射波和反射波叠加形成驻波，沙子则会聚集到驻波的波节上从而形成特定的 Chladni 图案，如图 1.3 (a) 所示。Chladni 图案的作用包括指导乐器的研制和组装微结构等^[8]，如图 1.3 (b-c) 所示。

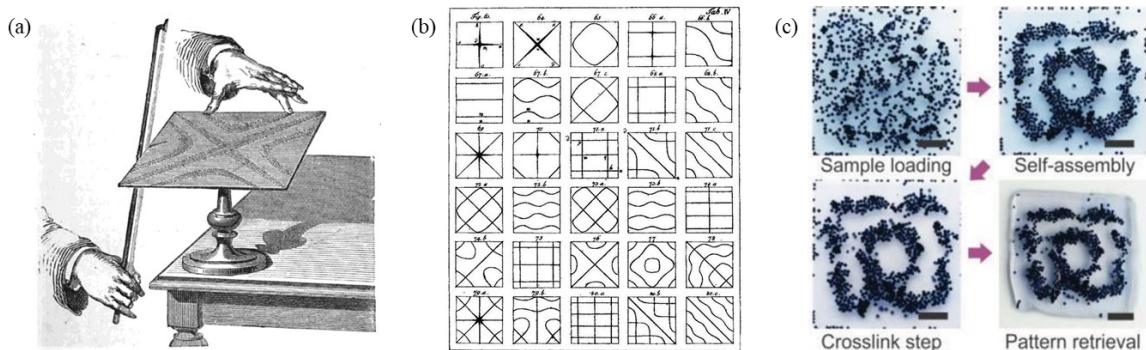


图 1.3 Chladni 图案的介绍：(a) 受到特定频率激励的平板上形成的 Chladni 图案^[9]；(b) 不同激励条件下平板上形成的 Chladni 图案^[10]；(c) 利用 Chladni 图案组装微结构^[8]

Fig. 1.3 Introduction of Chladni figures: (a) a Chladni figure formed on a plate excited at a specific frequency^[9]; (b) various Chladni figures formed under different excitation conditions^[10]; (c) microstructures assembly via Chladni figures^[8]

这样有趣的实验现象激发了数学家们对于背后机理研究的热情，并进一步催生了壳体模型的建立。法国科学家 Sophie Germain 于 1809 年至 1816 年期间经过多次努力最终推导得到平板振动的偏微分方程^[11]。数学家 Joseph-Louis Lagrange 是这项工作的评审人之一，他修正了 Germain 的结果并补全了缺失项，因此也是历史上第一个正确提出一般平板方程（即 Germain–Lagrange equation）的学者。同时期研究的科学家还包括 Augustin-Louis Cauchy 和 Siméon Poisson，他们通过对弹性力学方程进行一阶展开的方式得到了与 Germain–Lagrange 方程一致的挠度控制方程^[12]。

上述工作均建立了平板弯曲问题的微分方程，但仍然存在一些问题，包括边界条件的适定性与弹性系数的界定等^[13,14]。1850 年德国科学家 Gustav Kirchhoff 发表了一篇关于薄板弯曲理论的重要论文^[15]，提出了著名的 Kirchhoff 假设：(1) 变形前垂直于中面的直法线，在变形过程中保持直线并且垂直于中面，中面法线的长度在变形过程中保持不变；(2) 中面在弯曲后保持不受拉伸。上述第一条假设表明所有沿中面法向的应变分

量（包括正应变和剪切应变）均为零（由于对应的应变能为零，相关的物理方程在列式中不再考虑；但相关应力是维持平衡所必须的）。第二条假设的推论是中面上的点仅沿中面垂直方向移动。在上述假设基础上，Kirchhoff 将三维弹性理论的能量泛函简化至二维，根据驻值条件得到了作为欧拉方程的 Germain–Lagrange 方程，并且指出板的一个边界仅存在两个边界条件（之前的工作普遍认为板的一个边界应该包括三个边界条件）。这篇论文纠正了先前工作的错误，得到了 Kirchhoff 薄板理论（即经典薄板理论），其简洁性和有效性使其沿用至今，被公认为现代板壳理论的奠基之作。在此基础上，Augustus Love 进一步引入小厚度假设（不考虑横向剪切效应）和小挠度假设（厚度方向的位移远小于板壳厚度，包含了小应变和小转角两个要求），并将平板的控制方程推广至壳体结构^[16,17]。因此，学界通常统称为 Kirchhoff–Love 板壳模型。

Kirchhoff–Love 板壳理论基于力学直觉和维数缩减得到了一条高效的求解途径，在处理薄板变形问题时可以得到满意的结果，因此一直以来是科学与工程领域中相关计算分析和设计的重要基础。然而，该理论同时也存在一些明显的局限性，比如：应用于中厚板壳和中大转角问题时求解精度较差，无法有效处理弯矩、扭矩和横向剪切力边界条件^[18]等。为解决上述问题，Eric Reissner^[19,20]将横向剪切效应引入平板弯曲理论中，通过混合变分原理得到了广义应力表示的中厚板弯曲理论^[21]。其后，Raymond Mindlin^[22]类比 Timoshenko 一维梁模型理论^[23]，通过假设位移模式、引入剪切修正因子，独立发展了一套理论，得到了应用广泛的、以挠度和转角为未知数的偏微分方程与相关的边界条件。上述两位力学家对板壳的一阶剪切变形理论（First-order Shear Deformation Theory, FSDT）做出了奠基性的贡献，因此一些文献中也会联合称为 Reissner–Mindlin 板壳理论。另外，关于 Reissner 工作和 Mindlin 工作的关系，请参考文献^[24]。一阶剪切变形理论基于下列三个假设建立^[12]：（1）变形前垂直于中面的直线，在变形过程中长度不变并且保持直线；（2）中面在弯曲后保持不受拉伸；（3）垂直于中面的正应力相比其他方向的法向应力分量较小，可忽略不计。相比于 Kirchhoff–Love 板壳理论，一阶剪切变形理论在力学机理上放松了变形模式的约束，继而引出额外的转角自由度，并且沿厚度方向指向面外的剪切应变不再忽略不计，相应的物理方程也会用来联系应力–应变关系。

鉴于本文核心关注点在于薄壁结构的优化设计方法研究，此处仅对相关的理论与模型进行简要回顾，其他重要内容如扁壳理论^[25,26]、振动问题^[27,28]、非线性变形问题^[29–31]、屈曲问题^[32–35]、高阶剪切变形理论^[36,37]、复合材料层合板壳问题^[38,39]、Cosserat 壳体模型^[40–43]、智能化壳体^[44–46]、生物壳体的生长问题^[47,48]等，均不再介绍。

1.2.2 拓扑优化方法的研究进展

上世纪 80 年代初，我国学者程耿东院士与丹麦学者 Niels Olhoff 在实心弹性薄板的最大刚度设计问题中发现了求解结果的网格依赖性问题，并且依据数值实验做出最优设计的某些区域会出现数目无限多、厚度无限小的筋条的判断^[49]，如图 1.4 (a) 所示。为避免这种物理上不存在的解，程耿东院士与 Olhoff 教授提出微结构的概念（如图 1.4 (b) 所示）对优化列式进行正则化处理^[50]，从而引发了持续至今的拓扑优化研究热潮，这些工作也被认为是近代结构布局优化（即拓扑优化）的先驱^[51]。

在此基础上，Bendsøe 和 Kikuchi 将周期性分布的微结构引入二维连续体的材料布局优化中^[52]（如图 1.4 (c) 所示），提出了均匀化方法（homogenization method），标志着拓扑优化的正式诞生。均匀化方法采用多尺度分析方法构建宏观的材料等效模型，从而将复杂的拓扑优化问题转换为较易求解的尺寸优化问题，通过微结构的变化实现整体构型的设计。

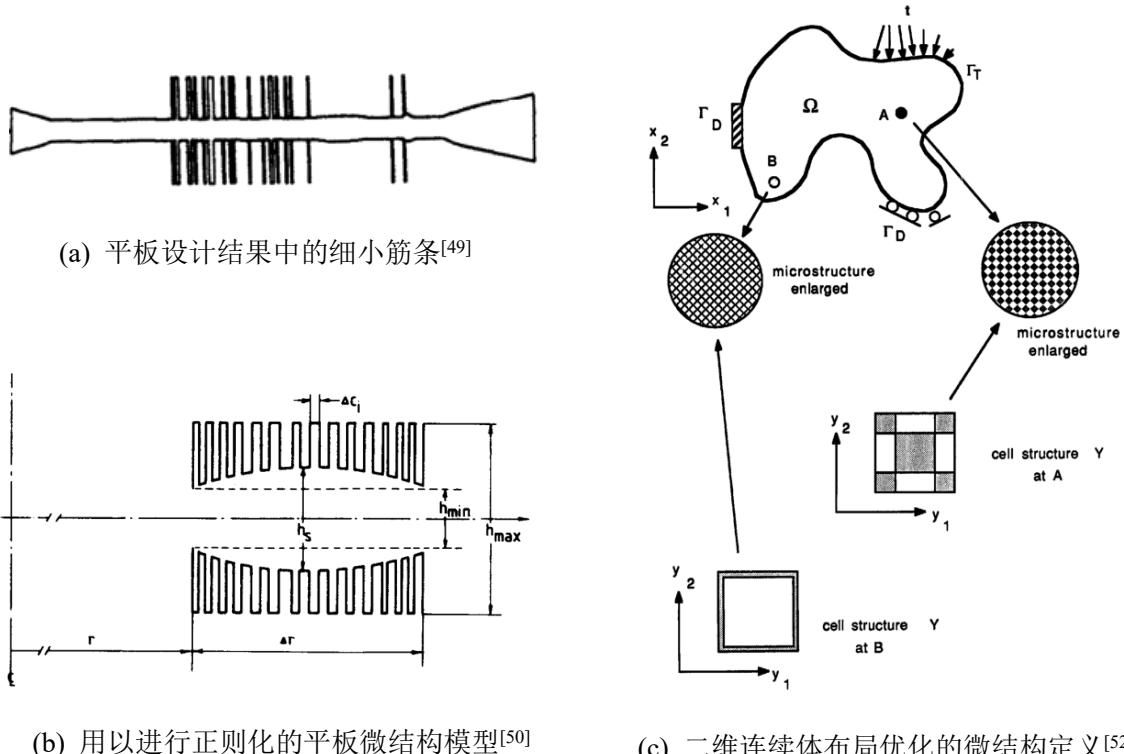


图 1.4 拓扑优化的先驱性研究工作

Fig. 1.4 Pioneering research works of topology optimization

在均匀化方法出现不久后，Bendsøe^[53]、Zhou 等人^[54]进一步提出了所谓的 SIMP (Simplified Isotropic Material with Penalization^[55]) 方法，该方法通过引入单元密度和人

为设定的材料幂律模型（如图 1.5 (a)所示），对均匀化方法进行了简化，同时增强了结构优化结果的二值化特性^[56]。其后，Bendsøe 等人在后续工作中^[57]引入了能够实现 SIMP 模型的微结构形式（如图 1.5 (b)所示），并基于复合材料细观力学的界限分析方法，对 SIMP 模型的物理合理性进行了讨论。SIMP 方法在实际应用中主要面临孤岛单元、棋盘格现象以及灰度单元等问题。为有效抑制这些数值不稳定现象，当前最常用的处理手段是引入各类过滤技术^[58-61]，包括密度过滤和灵敏度过滤。

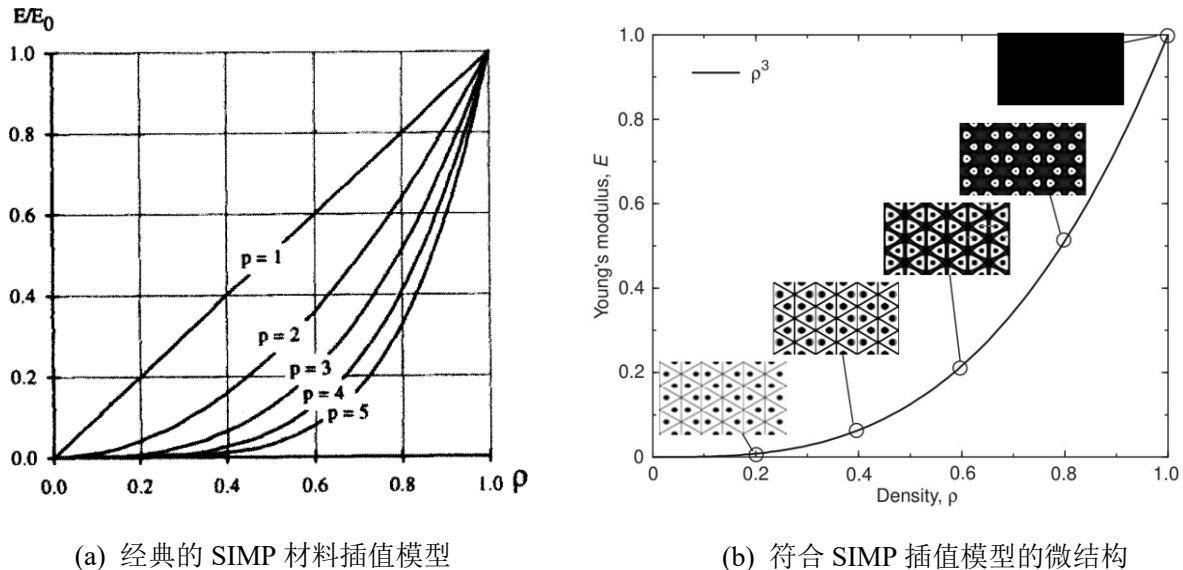


图 1.5 SIMP 材料插值模型与符合模型的微结构^[57]

Fig. 1.5 SIMP material interpolation model and microstructures that conform to the model

类似于 SIMP 法，谢亿民教授等人提出的渐进结构优化（Evolutionary Structural Optimization, ESO）方法^[62]同样采用单元密度描述结构。但是，该方法核心思想是引入生物进化中“优胜劣汰”的机制，基于经验式的准则直接删除低应力单元，如图 1.6 (a) 所示。后续 Chu 等人^[63]则针对最大刚度问题将应力准则替换为单元应变能准则。然而，这种“硬杀”的策略（hard-kill strategy）将导致材料一旦被删除就无法再被恢复，进而使得优化迭代陷入局部解。为此，Querin 等人^[64]则进一步引入材料的生长机制，提出了双向渐进结构优化（Bidirectional Evolutionary Structural Optimization, BESO）方法，从而使得结构演化过程中单元材料的删除具备可逆性（如图 1.6 (b)所示）、增大了优化设计空间。

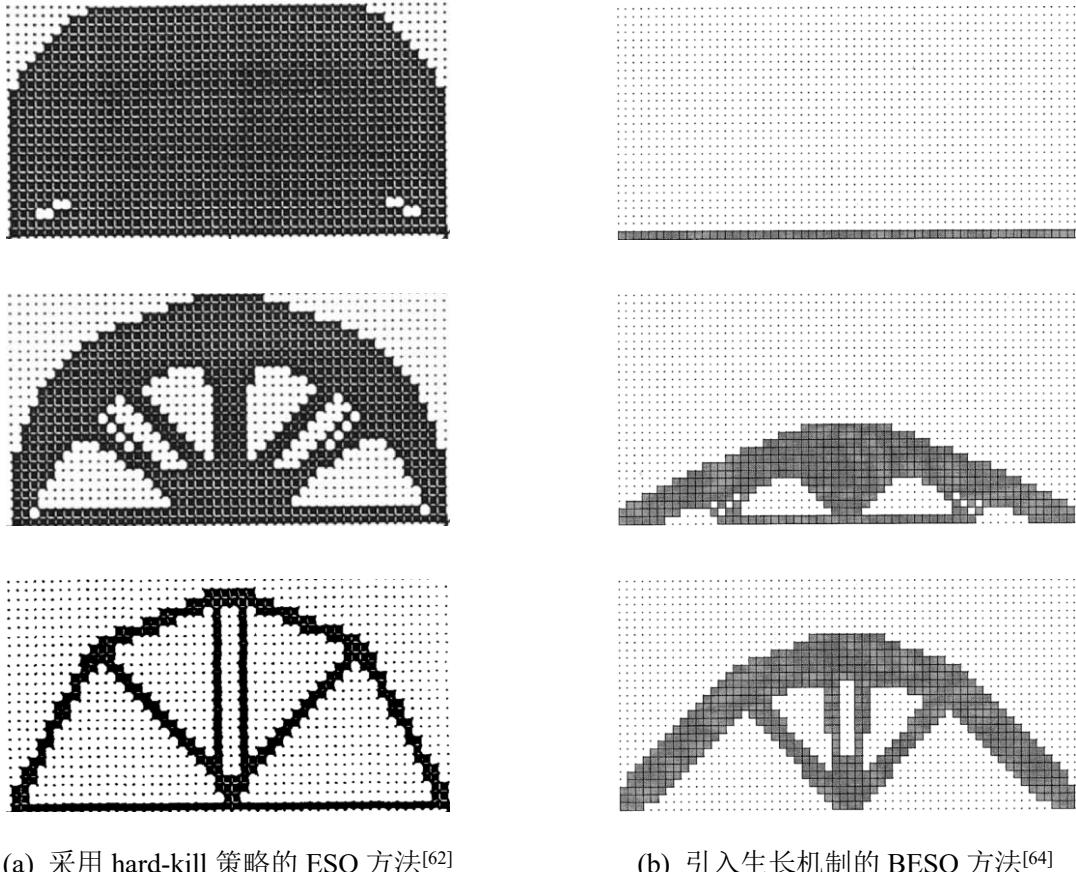
(a) 采用 hard-kill 策略的 ESO 方法^[62](b) 引入生长机制的 BESO 方法^[64]

图 1.6 ESO 方法和 BESO 方法迭代过程对比

Fig. 1.6 Comparison of the iterative processes of the ESO method and the BESO method

水平集函数 (Level Set Function, LSF) 最初由 Osher 和 Sethian 提出^[65], 用于处理多相流中的界面演化问题, 其核心思想是通过一个高维度的隐式函数的等值面表示边界, 如图 1.7 所示。Sethian 等人^[66]于 2000 年基于演化思想 (类似 ESO 方法) 提出了一种水平集的结构优化方法。该工作中, 代表结构拓扑变化的孔洞是通过演变应力准则的方式实现的。Wang 等人^[67]则引入 Hamilton–Jacobi 方程来控制边界的演化, 提出了一个通用的水平集拓扑优化框架, 从而实现结构的有效更新。Allaire 等人^[68]通过形状灵敏度分析的方法确定边界的法向速度, 并验证了其方法在多种结构设计问题中的有效性。上述三个研究工作为水平集方法 (Level Set Method, LSM) 做出了奠基性贡献。为克服经典水平集方法中求解 Hamilton–Jacobi 方程的难题, 多种参数化水平集方法 (Parameterized Level Set Method, LSM) 被相继提出^[69–71]。水平集方法提供了一种无需显式追踪边界即

可实现形状和拓扑变化的有效框架，克服了传统方法在处理边界模糊、拓扑变化和数值不稳定性方面的不足。

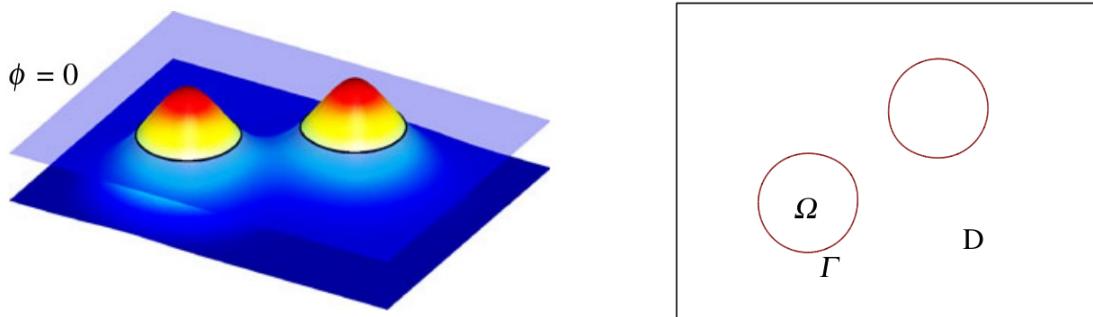
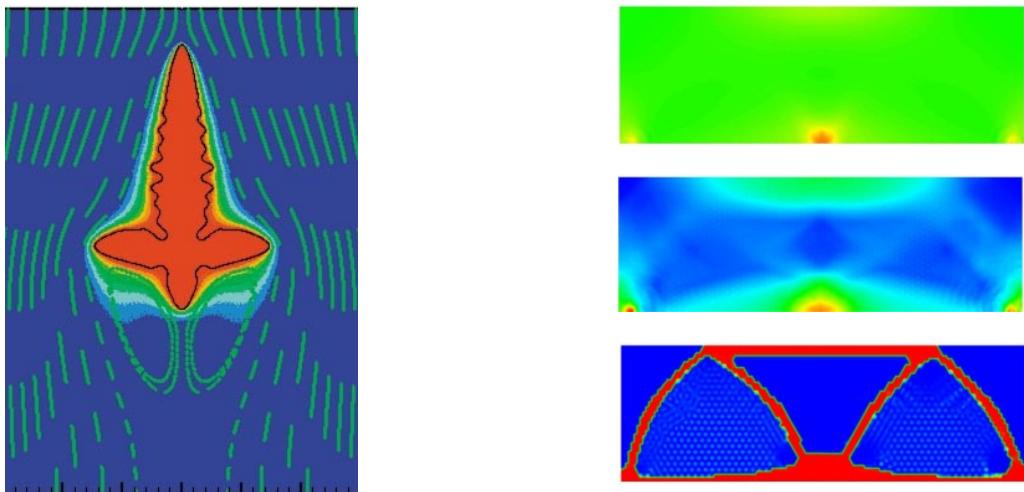


图 1.7 水平集函数采用高维函数的等值面表示边界^[72]

Fig. 1.7 LSF uses iso-surfaces of a higher-dimensional function to represent boundaries

类似于水平集函数，相场（phase field^[73]）函数通过引入连续的相场变量，实现对物质相界面的演化描述，但区别在于相场通过最小化包含势能项和界面能的能量泛函来驱动界面的扩展与演化。相场方法在材料微观界面演化^[74]、晶体生长模拟^[75]等领域获得了巨大的成功（如图 1.8 (a)所示），并被应用于拓扑优化领域^[76]。得益于将间断问题连续化和对奇异问题进行规范化的能力，相场拓扑优化在处理应力优化问题^[77]（如图 1.8 (b)所示）方面具备优势。



(a) 自由枝晶生长的二维模拟^[74]

(b) 在应力优化中通过 ϵ -continuation
进行结构边界描述的细化^[77]

图 1.8 相场法被应用于晶体生长模拟和应力相关的拓扑优化

Fig. 1.8 Phase field method has been applied to crystal growth simulation and stress-related topology optimization

为解决经典密度类方法中存在的数值不稳定（灰度单元、棋盘格等）、结构特征尺寸难以控制以及设计变量数目巨大等问题，基于组件思想的移动可变形组件法（Moving Morphable Components, MMC）被提出^[78]。该方法采用一组显式几何参数表达的移动可变形组件搭接结构（如图 1.9 (a)所示），其中组件的位置、方向和尺寸是优化设计变量。在迭代过程中，组件移动并改变形状，组件之间相互覆盖和相交，从而实现最终设计中的拓扑优化和形状优化（如图 1.9 (b)所示）。另外，MMC 方法的一个对偶方法即为 MMV（Moving Morphable Voids）方法^[79]：不同于组件搭接结构的思想，MMV 方法引入孔洞对原始设计域进行裁剪，剔除低效的材料分布区域。

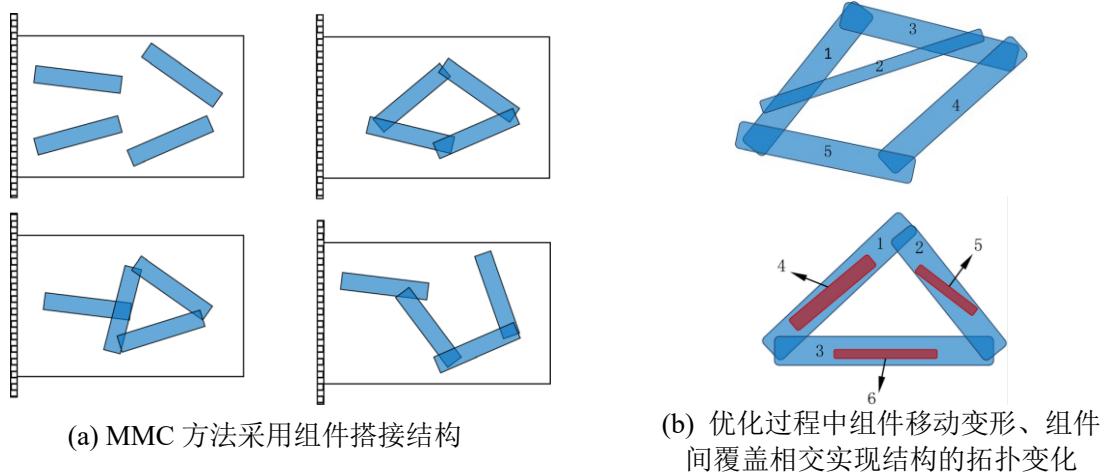


图 1.9 移动可变形组件法优化机理简介^[78]

Fig. 1.9 Introduction to the optimization mechanism of the MMC method

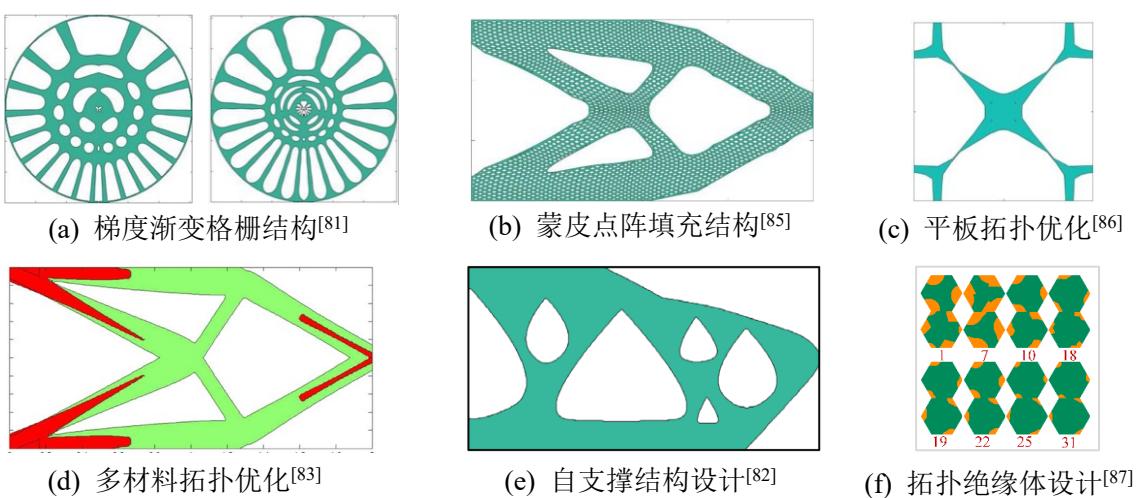


图 1.10 移动可变形组件法的多种应用场景

Fig. 1.10 Diverse application scenarios of the MMC method

移动可变形组件法不仅为拓扑优化问题提供了具体的求解方案，还为结构设计构建了全新的框架，被广泛推广并应用于多个领域，例如，特征尺寸控制问题^[80]、梯度渐变的格栅结构设计^[81]、增材制造结构的自支撑设计^[82]、多材料拓扑优化^[83]、考虑屈曲约束的平板加筋设计^[84]、蒙皮点阵填充结构^[85]、引入生长机制的平板结构拓扑优化^[86]、量子谷效应的拓扑绝缘体设计^[87]等，如图 1.10 所示。

1.2.3 薄壁结构拓扑优化的研究进展

薄壁结构拓扑优化相关工作主要分为两大部分：一是各类拓扑优化方法应用于薄壁结构的研究，二是利用薄壁结构拓扑优化技术求解不同问题的研究。基于密度类方法的薄壁结构拓扑优化研究起步较早，可追溯到 Tenek 等人将均匀化方法应用于线性薄壁结构拓扑设计的工作^[88]，如图 1.11 (a)所示。其后，Swan 等人^[89]结合复合材料细观力学中的 Reuss 界和 Voigt 界^[90-92]得到 Reuss-Voigt 材料插值模型，并构造拓扑优化算法设计汽车引擎盖的材料布局。Maute 等人^[93]基于人工幂律材料模型构建了面向薄壁结构的自适应拓扑优化方法，通过引入边界形状优化的方法在迭代过程中分段细化模型的分辨率（如图 1.11 (b)所示），从而有效地提升了数值求解与优化设计的效率。Li 等人^[94]将 ESO 方法拓展到受热载荷的薄壁结构拓扑优化问题中，从而成功地剔除低效单元并获得更为高效的材料布局。

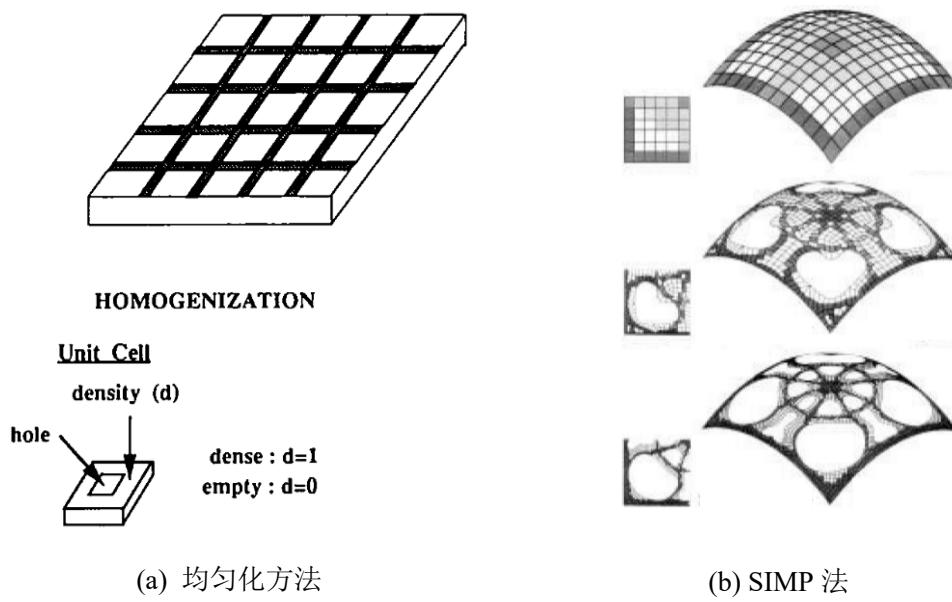


图 1.11 基于均匀化方法、SIMP 法的薄壁结构拓扑优化

Fig. 1.11 Topology optimization for thin-walled structures based on the homogenization method and the SIMP method

水平集方法主要通过求解 Hamilton–Jacobi 方程实现边界的演化与设计变量的更新。然而，传统方法中 Hamilton–Jacobi 方程通常定义于平直的二维平面或者三维空间，因此难以直接推广至薄壁结构拓扑优化中。在这样的背景下，Park 等人^[95]利用曲纹水平集函数^[96]（如图 1.12 所示）解决了以上难题，并采用数值稳定的最小二乘有限元方法^[97]求解得到相应的演化方向，最终算例验证了所构造的拓扑优化算法的有效性和灵活性。水平集方法实现薄壁结构拓扑优化还有另外一条基于曲面映射的途径，Ye 等人^[98]利用共形几何理论^[99]，将具有流形特征的薄壁结构中面映射至平面参数域，从而定义和求解决定演化方向的参数化 Hamilton–Jacobi 方程。

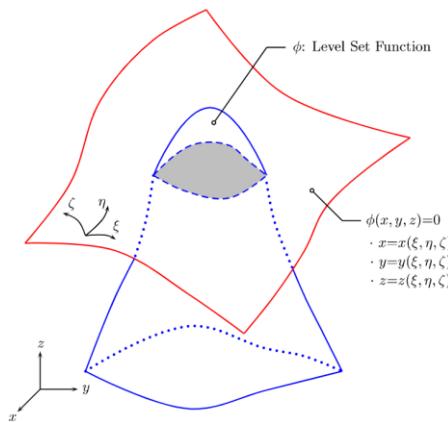


图 1.12 采用曲纹坐标的水平集函数表示边界^[95]

Fig. 1.12 Boundary representation via curvilinear level set function

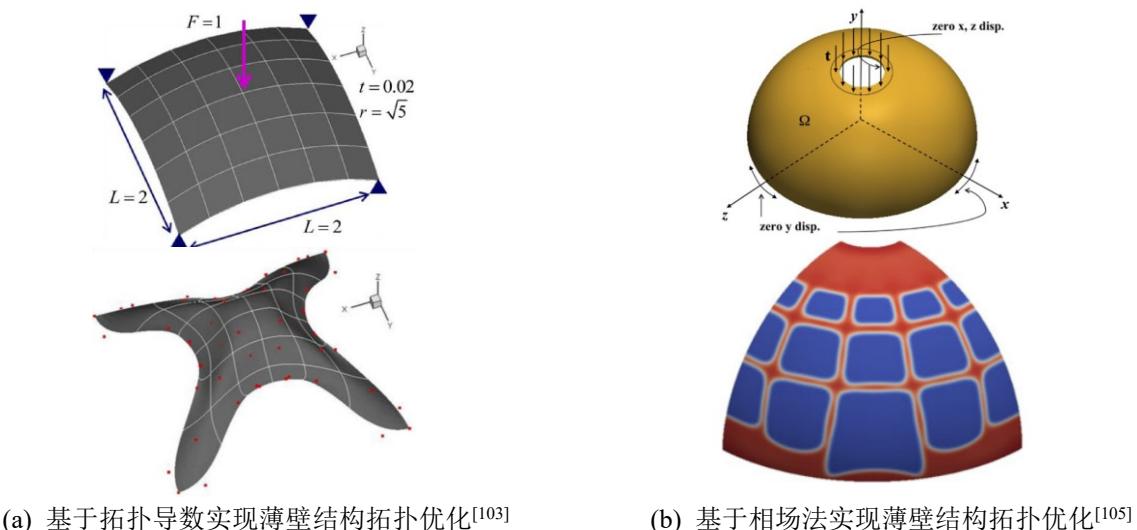


图 1.13 采用等几何分析方法实现薄壁结构拓扑优化的研究

Fig. 1.13 Research on topology optimization for thin-walled structures via IGA methods

由于等几何分析（IsoGeometric Analysis, IGA）方法具备求解高阶问题的精度优势^[100]（比如板壳问题^[101,102]），基于等几何分析的薄壁结构拓扑优化工作逐渐引起了研究人员的兴趣。Seo 等人^[103]采用集成拓扑导数^[104]的形状优化框架，实现了薄壁结构的等几何拓扑优化（如图 1.13 (a)所示）。Dedè 等人^[105]利用基于广义 Cahn-Hilliard 方程的相场模型描述薄壁结构的材料布局，构建柔度驱动的拓扑优化列式，从而将等几何分析应用于薄壁结构的拓扑优化中（如图 1.13 (a)所示）。

另外，薄壁结构本源的复杂曲面特性将导致等几何优化算法实现的困难。针对这样的挑战，学界主要存在三类解决方案：（1）开发裁剪曲面分析技术（trimmed surface analysis, TSA）^[106,107]；（2）构造建模能力更强的先进样条模型^[108]；（3）采用多面片拼接方案^[109]。裁剪曲面分析技术可直接处理已有模型，因此无需重新建模，这方面代表性工作包括：Kang 等人^[106]采用基于裁剪曲面分析技术的等几何分析方法，引入 NURBS 裁剪曲线来表达优化过程中生成的孔洞（如图 1.14 (a)所示），从而有效地处理具有复杂拓扑特性的薄壁结构拓扑优化问题；Zhang 等人结合移动可变形孔洞法和裁剪曲面分析技术实现材料布局和孔洞建模（如图 1.14 (b)所示），并采用等几何分析方法求解薄壁结构响应，从而解决薄壁结构拓扑优化的刚度问题^[110]。

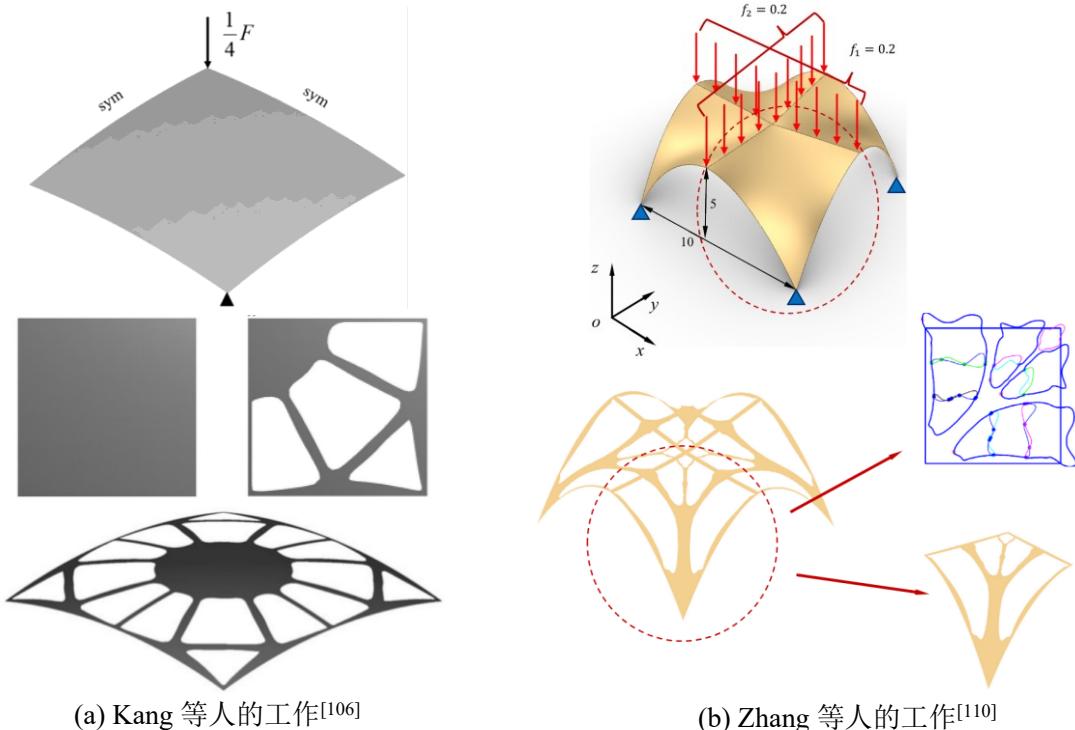


图 1.14 采用裁剪曲面分析技术的薄壁结构等几何拓扑优化

Fig. 1.14 Isogeometric topology optimization of thin-walled structures using the TSA technique

经典样条曲面模型基于张量积结构建立，这一定程度上影响了复杂薄壁结构建模的有效性和效率。得益于新式样条理论的提出，薄壁结构等几何拓扑优化中的模型表达能力不断得到增强。Zhang 等人^[111]采用基于 T-网格和 T-样条的等几何分析技术对于薄壁结构进行建模和求解（如图 1.15 所示），从而有效提高了处理复杂曲面薄壁模型的精度和效率。PHT (polynomial splines over hierarchical T-meshes) 样条是 T-样条的一种推广，通过在分层 T-网格上定义多项式样条构建而成^[112]。PHT 样条的分层特性和自适应局部细化特性使其可以天然地和自适应拓扑优化^[93]结合，从而极大地提升薄壁结构拓扑优化中模型的建模精度和适用性^[108,113]。

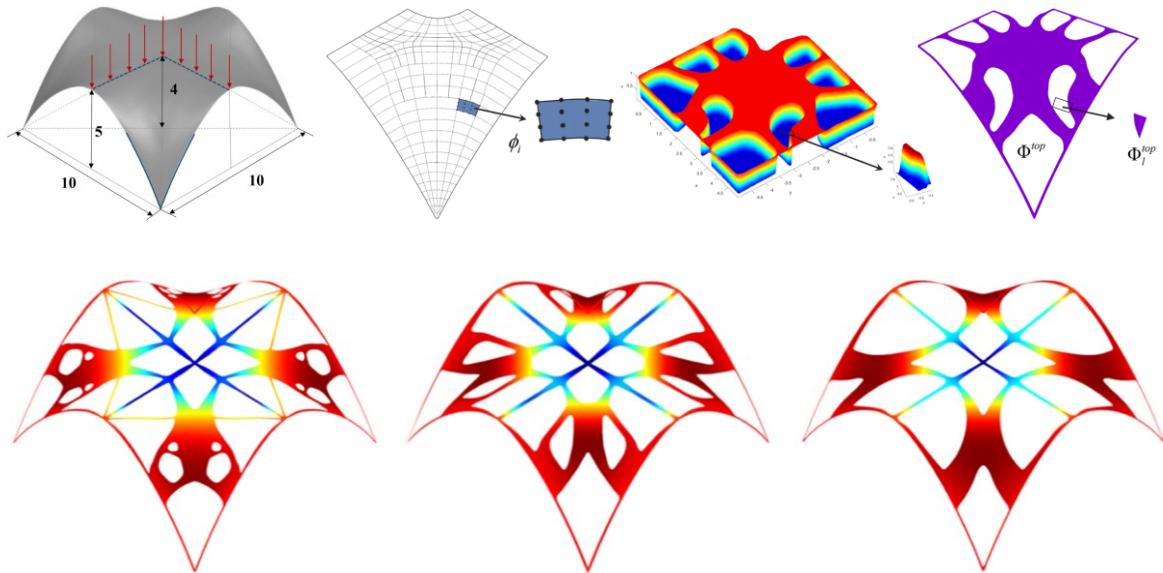


图 1.15 基于 T 样条模型的薄壁结构等几何拓扑优化^[111]

Fig. 1.15 Isogeometric topology optimization for thin-walled structures based on the T-spline model

另外，在薄壁结构等几何分析中，多面片框架下的几何模型由多个较为简单的曲面片构成，具备在不修改样条类型的情况下对网格进行局部细化的能力，从而为复杂问题的几何建模提供极大的灵活性^[114,115]。因此，多面片技术在薄壁结构拓扑优化中逐渐受到重视。Scherer 等人^[109]采用描述薄壁结构中面的 NURBS 样条构造水平集函数和拓扑描述，并进一步结合多面片等几何分析实现薄壁结构的拓扑优化求解。优化结果表明该方法具有较高的数值精度并且可以得到边界光滑的最终设计。Pan 等人^[116]基于多面片技术构建了薄壁结构几何的参数化模型，通过 SIMP 法对材料模型进行插值，采用一阶剪切变形理论对薄壁结构变形进行力学建模分析，从而实现复杂曲面薄壁结构的拓扑优化设计。

前述工作以算法构造为核心思路,求解的问题主要集中于静柔度最小化驱动的线弹性各向同性均匀材料分布优化。另一方面,薄壁结构拓扑优化方法凭借其提升性能、实现轻量化等方面的价值而被广泛应用于其他复杂力学设计问题的求解中,如图 1.16 所示。Mayer 等人^[117]采用微结构模型描述结构拓扑,并基于均匀化方法建立了材料微元的密度-性能关系,通过 Reissner-Mindlin 单元模拟弹塑性力学响应,最终在此框架下实现了以碰撞能量吸收最大化为目标的薄壁结构拓扑优化设计。Belblidia 等人^[118]结合 ESO 方法和均匀化方法,提出了一种约束自适应的混合算法,从而实现薄壁结构基频最大化的拓扑优化。Stegmann 等人^[119]类比结构拓扑优化,基于梯度信息和数学规划法提出了一种面向复合材料层合壳的离散材料优化(Discrete Material Optimization, DMO)方法,用以求解正交各向异性材料的取向问题和材料布局问题。后续,Erik Lund 教授^[120]进一步将此方法拓展应用于多材料层合薄壁结构的屈曲载荷因子最大化设计问题中。在实际工程中,航天器、汽车等外壳结构通常会附着一层粘弹性阻尼材料从而抑制共振,而传统的全覆盖设计往往不仅无法有效地提升阻尼,反而会大幅增加结构重量、导致系统性能的下降。因此,Kim 等人^[121]基于薄壁结构拓扑优化方法对结构表面附着的阻尼材料进行了布局设计,从而破除了传统全覆盖设计的困境。类似地,Chen 等人^[122]采用 SIMP 法对薄壁结构表面的吸声材料进行布局描述,基于细分曲面的等几何边界元方法对声学问题进行求解,从而实现结构表面吸声材料分布的声学拓扑优化。另外,最先发展于薄壁结构中的曲面拓扑优化技术还被进一步推广至众多复杂物理设计问题中,包括电渗透的电极模式优化^[123]、压电板壳致动器的设计^[124-126]和曲面散热器设计^[127-129]等。

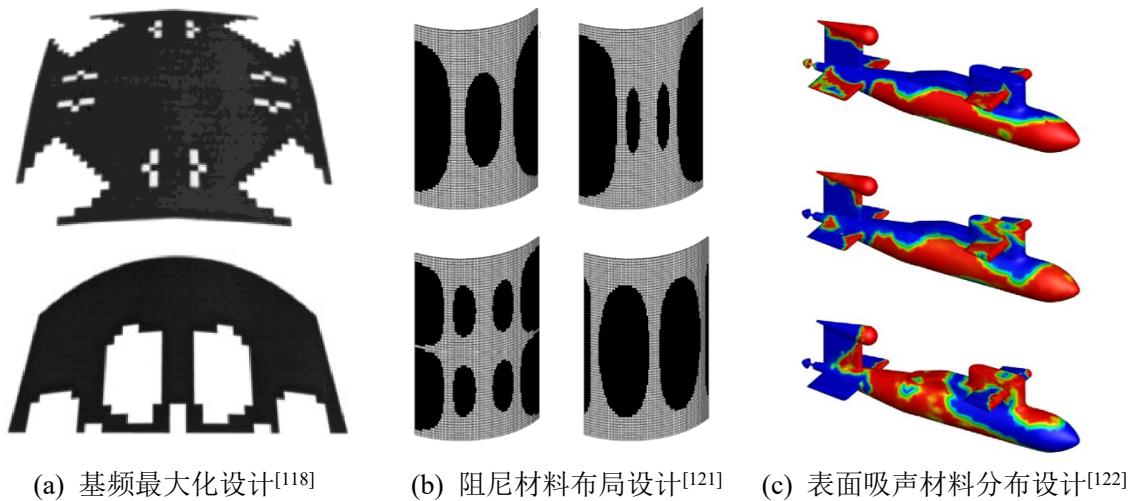


图 1.16 薄壁结构拓扑优化方法应用于多种复杂力学设计问题求解

Fig. 1.16 Topology optimization methods for thin-walled structures are applied to solve various complex mechanical design problems

1.2.4 共形参数化的涵义阐述

共形参数化 (conformal parameterization) 是本论文的重要基础之一，是结合了共形映射 (conformal mapping) 和曲面参数化 (surface parameterization) 概念的一种特殊映射技术，旨在将三维曲面映射到二维参数域的同时保持局部角度不变。在复分析中，共形映射定义在二维复平面上^[130]，这类平面共形映射被广泛应用于各类力学和物理问题的求解，包括：复杂边界内平面应力和平面应变问题解析解的推导^[131]、流场中机翼的受力分析^[132]、复杂几何中电磁波导问题的求解^[133]、光学隐身概念的实现^[134]等，如图 1.17 所示。这些工作的共同点在于，共形映射均被用来处理几何复杂性。另外，微分几何中的曲面共形映射是平面共形映射的推广，用来研究不同曲面之间的几何结构关系^[135]。在本文中，共形参数化可视为经典二维平面共形映射在曲面上的推广，基于离散网格实现数值求解。

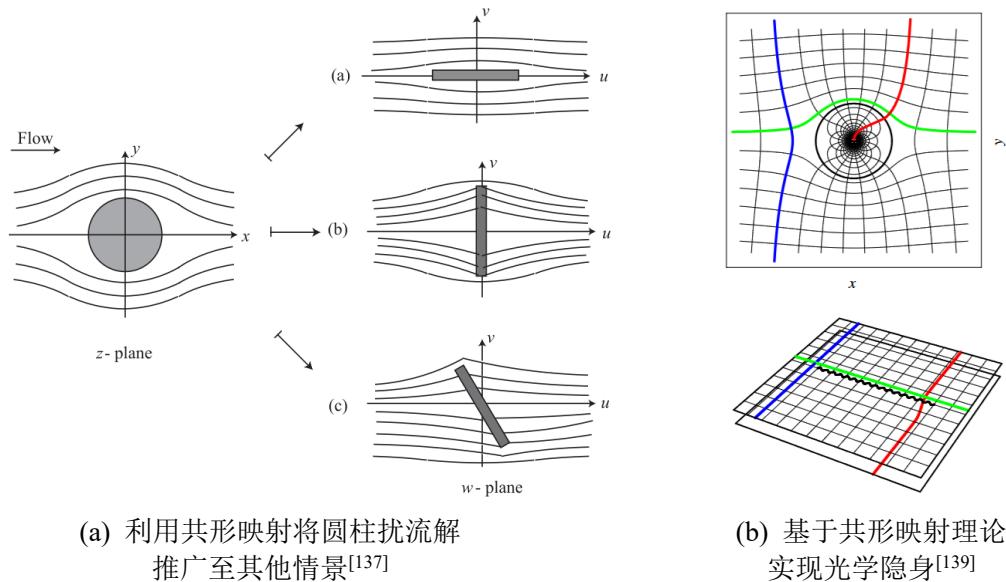


图 1.17 共形映射在数学物理中的经典应用

Fig. 1.17 Classic applications of conformal mapping in mathematical physics

曲面参数化指的是在曲面（包含连续曲面和网格曲面，本文侧重于网格曲面）和具有同样拓扑性质的参数域之间寻找双射对应关系的过程^[136]。曲面参数化是计算机图形学和计算机视觉等领域的基础算法之一，在纹理映射^[137]、曲面注册^[138]、曲面逼近和网格重划分^[139]等任务中扮演核心的角色，如图 1.18 所示。曲面参数化的关键在于保持原对象的拓扑性质，而根据曲面不同的拓扑性质和形状，参数化过程可以分为以下几类：平面参数化（用于拓扑上与平面区域等价的曲面，比如平面四边形等）、球面参数化（通

常用于封闭曲面，目标映射区域为单位球面）、圆环参数化（将曲面展开为二维圆环或矩形区域）以及多联通域参数化（针对具有多个边界的复杂曲面）。

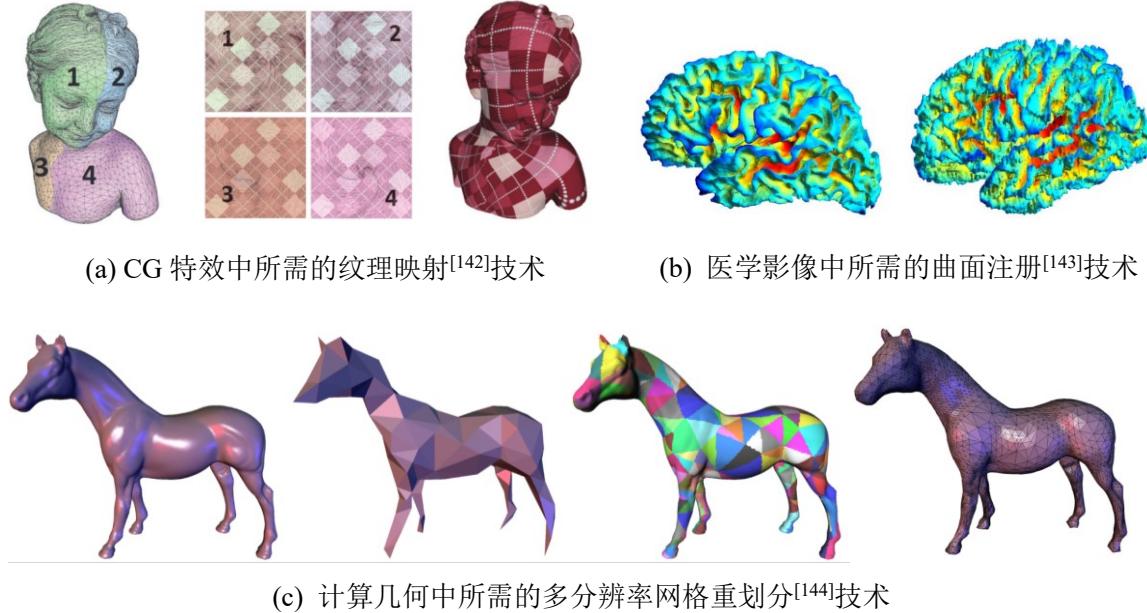


图 1.18 曲面参数化在计算机工业中的经典应用

Fig. 1.18 Classic applications of surface parameterization in the computer industry

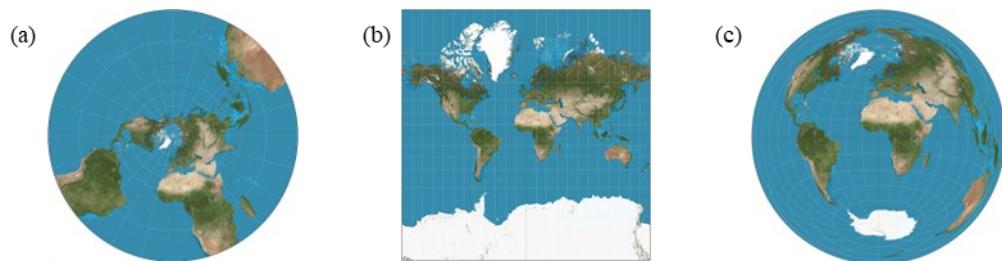


图 1.19 地图绘制中的不同投影方法：(a) 球极投影；(b) 墨卡托投影；(c) 兰伯特方位等积投影

Fig. 1.19 Different projection methods in cartographic drawings: (a) stereographic projection; (b) Mercator projection; (c) Lambert azimuthal equal-area projection

曲面参数化的一个经典比拟即为地图的绘制^[140]，其内在的科学问题为：如何将弯曲的地球表面映射到平面地图上，并尽量减少信息的失真。由于球体表面无法无扭曲地映射至平面上，因此航海家和地理学家根据各自的目的做出调整，并提出了一系列的投影方式（如图 1.19 所示），包括：适用于绘制极区航空地图的球极投影（stereographic projection），适用于航海图的墨卡托投影（Mercator projection，需保持局部角度的精确

性，但极地区域的面积被严重夸大），以及保留面积比例但造成形状和距离失真的兰伯特方位等积投影（Lambert azimuthal equal-area projection）。

类比地图绘制，曲面参数化也可根据目标分类为：保持映射过程中角度不变的共形参数化^[99,141]（conformal parameterization），保持面积不变的等积参数化（authalic parameterization），保持曲面距离不变的等距参数化（isometric parameterization），以及结合多种目标、平衡多方需求的混合参数化等（hybrid parameterization）。其中，等距参数化的条件最强，可以推导出等积和共形的性质，但仅对于特殊的可展曲面（每一点处高斯曲率为零的曲面，包括平面、柱面、锥面和 Oloid 可展曲面^[142]）存在真实解，对于一般曲面仅存在能量最低意义上的逼近解。共形参数化凭借其保角、保形和保局部几何特性等优势而被医学影像处理、计算机图形学和虚拟物理仿真等重要工程领域大量研究与应用。

1.2.5 曲面形貌的研究进展

曲面形貌是自然界中普遍存在的结构特征，指几何外形的曲率变化和表面起伏。典型的例子包括植物叶片与花瓣^[143-145,47]以及动物表皮^[146-150]等，如图 1.20 所示。

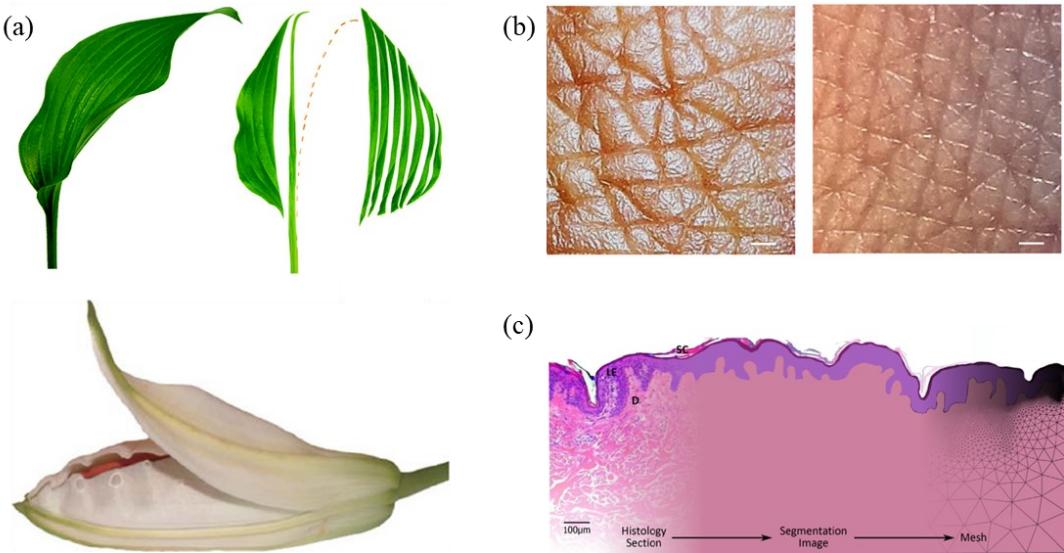


图 1.20 自然界中多种曲面形貌的案例：(a) 植物叶片与花瓣^[143,145]；(b) 人类表皮细节图^[149]；(c) 通过有限元方法模拟表皮形貌^[146]

Fig. 1.20 Cases of various surface topography found in nature: (a) plant leaves and petals; (b) detailed images of human epidermis; (c) simulating the epidermal topography using the finite element method

上述形貌虽然形式各异，但其背后所遵循的形成规律却存在联系（主要原因在于机体生长诱导的失稳现象^[151]），从而引发了科学界的广泛关注。对其底层力学机理的探索与解读^[152-154,48]，已成为该领域的重要研究方向。这方面早期的研究可追溯至 Hsu^[155]的工作，其首次将连续介质力学应用于可变形组织生长现象的研究，揭示了特定类型机械载荷对生物表面形貌的影响。Dervaux 等人^[156]基于广义的 Föppl-von Kármán (FvK) 方程，在连续介质框架下对软组织的力学性能进行了分析，采用乘法分解的方法将变形梯度张量拆分为弹性项和生长项，最终构建了生物软体组织形貌生成的预测模型。Zhao 等人^[157]结合理论分析和傅里叶谱方法，对曲率在软材料形貌模式演变中的影响进行了量化研究，模拟结果表明形貌的模式取决于曲率的各项异性、冗余应力、一个无量纲化的曲率参数以及曲率梯度。Xu 等人^[158]采用渐进数值方法，针对膜-基结构建立了通用的多尺度分析框架，并对后屈曲过程中形成的正弦和方形棋盘格形貌图案进行了定量的预测。

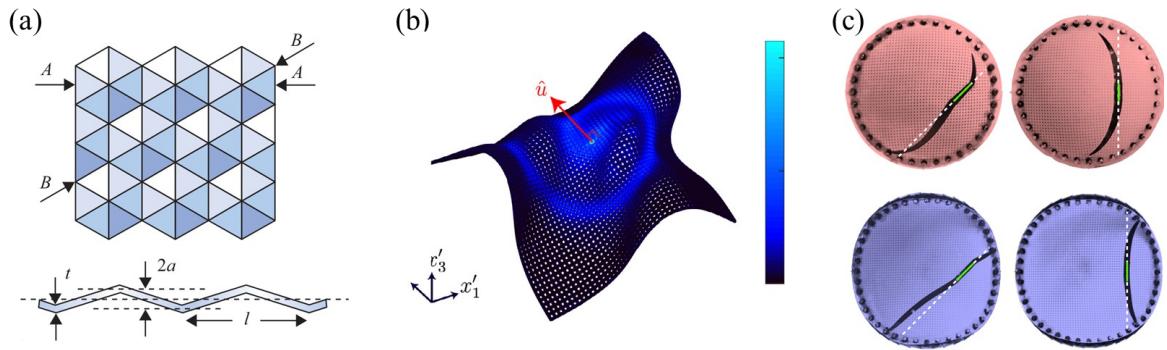


图 1.21 曲面形貌能够提升结构性能、调控结构响应：(a) 相比平板结构，波纹板具有较高的抗弯刚度^[159]；(b) 用以实现应力波定向引导的曲面形貌^[160]；(c) 曲面形貌可用来控制材料失效并引导裂纹扩展^[161]

Fig. 1.21 Surface topography is capable of improving structural properties and manipulating structural responses: (a) the corrugated plate has a higher bending stiffness compared with the plate structure; (b) the surface topography used to achieve directional guidance of stress wave; (c) surface topography can be used to manipulate material failure and guide crack propagation

另一方面，相比平坦的几何构型，曲面形貌具有提升结构性能、调控结构响应的能力，如图 1.21 所示。工程中常见的波纹板便是典型的案例^[159]：相比于平板结构，通过形貌变化得到的波纹板具有更优的抗弯性能（惯性矩得到了提升），如图 1.21 (a)所示。Liu 等人^[162]基于波纹状的曲面形貌开发了一种具有多稳态构型的新型结构，通过理论模型量化了其力学行为并通过有限元分析和实验进行验证，从而为多稳态结构在形状可变结构、软机器人技术和传感器技术等领域的应用提供指导。Faber 等人^[163]利用穹顶模式

(dome-patterned) 的形貌构造了一种可编程的双稳态机械超材料。其中，穹顶状的形貌具有局部尺度上可逆翻转的能力，从而在全局尺度上生成可编程的多稳态结构和可调控的机械响应。Dorn 等人^[160]利用曲面形貌实现了非周期结构中应力波的定向引导（如图 1.21 (b)所示），该工作突破传统的带隙工程范畴，证实了带隙在波导和衰减中并非是必需的。Mitchell 等人^[161]通过平坦的弹性薄片构建了一种用于控制断裂行为的几何工具，并验证了曲面形貌控制材料失效并引导裂纹扩展的能力（如图 1.21 (c)所示），相关工作还有^[164,165]。

上述工作利用曲面形貌变化的底层力学机理，实现了结构性能的提高和新功能的拓展。然而，当前工作中的形貌变化往往局限于简单的模式，例如波纹板、穹顶形貌、正弦扰动等，并且针对曲面形貌的设计理念仍然处于试错调整的初级阶段，尚未建立起基于严格结构优化理论的研究框架，因而可能错失更优的解决方案、导致低效的结构与产品设计。

1.3 本文主要研究内容

1.3.1 拟解决的科学问题

本文拟解决的科学问题如下所示。

（一）虽然结构拓扑优化已经得到了长足的发展，但是针对薄壁结构的工作相对较少，并且大多数基于像素描述材料分布的隐式方法开展。壳体模型兼具少量自由度和较高求解精度等优点，因而被广泛应用于薄壁结构的力学建模中。采用显式几何描述结构的移动可变形组件法具有设计变量少、收敛速度快、无需过滤操作以及优化结果边界清晰等优点，但受限于薄壁结构的复杂曲面几何特征而难以得到直接的应用。因此，**如何基于移动可变形组件法和壳体模型对薄壁结构进行拓扑优化设计**是本论文需要解决的首要问题。

（二）形貌变化具有提高薄壁结构性能、调控结构响应的能力。然而，现有研究中的形貌往往局限于较为简单的几何形式、并未考虑结构优化设计，因此可能导致低效的最终构型。从数学和工程的角度来看，一个具有挑战性和实际意义的问题是：**如何设计曲面形貌来提升薄壁结构的性能**。考虑到曲面形貌的变化涵盖了拓扑的改变，拓扑优化可为形貌的设计问题提供思路。然而在具体的技术实现层面，形貌设计仍面临三大核心挑战：复杂曲面的形貌描述、复杂形貌的高效参数化表达，以及如何构建优化列式并推导解析灵敏度从而驱动设计迭代。

（三）壳体模型通常基于特定的假设建立，一方面通过自由度缩减的方式提高了模型的效率，但另一方面也从厚度层面限制了模型的应用范围和边界条件的施加。相比之

下，实体模型不受壳体假设约束，在边界条件施加、多类薄壁结构设计问题的统一建模方面具有优势。若基于实体模型、直接采用经典的三维组件进行薄壁结构优化设计，弯曲的几何将导致组件难以贴合，进而降低建模和优化的精度与效率。因此如何构建自然贴合曲面几何的新型实体组件，并实现多类薄壁结构设计问题的统一建模优化，形成了第三个待解决的问题。

1.3.2 章节安排

本文后续研究路线与章节安排如下所示。具体来说，第二章介绍整体博士论文的理论基础，包括共形参数化技术、壳体模型和移动可变形组件法。共形参数化方面主要包含相关的数学背景和数值实现过程的推导，用以完成几何前处理任务。本文涉及厚壁/薄壁的曲壳，因此第二章进一步给出基础的通用壳体模型以及通过施加额外约束退化得到的厚壳模型和薄壳模型。最后，移动可变形组件法是贯穿本文的核心结构优化方法，第二章介绍详细的实施过程。

第三章针对复杂曲面薄壁结构的显式拓扑优化问题展开研究，采用壳体模型进行力学建模。首先，结合共形参数化技术、曲面切割操作与多面片拼接技术，构建了适用于复杂曲面的拓扑描述函数，并将其引入壳体模型的本构建模中，从而实现材料分布的描述。在此基础上，整理并建立了优化问题的数学列式，并对结构响应函数进行了灵敏度分析。随后，基于有限元离散模型和分析结果，推导了离散形式下的灵敏度计算方法。最后，多个数值算例验证了所提方法在求解曲面薄壁结构拓扑优化问题的有效性与高效性，以及处理复杂几何模型的能力。

第四章聚焦于薄壁结构的显式形貌优化问题，所采用的力学建模方法与前章保持一致，仍基于壳体模型。首先，基于规范化的曲面法向扰动与共形参数化技术，提出了一种嵌入式的形貌描述方法，并引入曲面切割操作与多面片拼接技术，以增强对复杂几何的处理能力。在此基础上，借助移动可变形组件法的思想，利用样条工具构造出样条组件和平面形貌函数，从而以少量设计变量高效表达复杂的形貌变化。随后，建立了基于移动可变形组件法的形貌优化列式，并通过形状灵敏度分析方法推导出柔度函数的解析灵敏度表达式。其次，基于曲面几何的构造过程推导出形貌变化诱导的虚拟速度场，并结合有限元分析结果计算离散灵敏度。最后，通过多个数值算例验证了形貌作为结构特征提升薄壁结构刚度的有效性，以及所提方法在形貌设计中的高效性与对复杂曲面模型的良好适应性。

第五章采用实体模型对薄壁结构进行建模，旨在提出一种便于施加边界条件、可统一描述与求解多类设计问题的新型结构优化方法。首先，基于第三章构建的曲面拓扑描述函数与投影操作定义嵌入式实体组件，以解决传统三维组件在应用于弯曲薄壁结构时

所面临的几何贴合约束问题。随后，引入厚度坐标用于材料分布的表达，实现对多类设计问题的统一描述。在此基础上，建立了相应的优化问题列式，并推导了结构响应的灵敏度表达式。进一步地，基于偏置操作提出一种新的网格生成技术，用于降低嵌入式实体组件中材料分布的计算难度。最后，通过多个具有代表性的数值算例对所提方法进行验证，结果表明该方法不仅能有效地施加复杂边界条件，还能高效且统一地处理复杂曲面薄壁结构的拓扑优化、加筋优化与夹芯板优化多类设计问题。

最后，第六章对全文的研究内容和创新点进行了总结和梳理，并对未来的研究方向做出展望。综合来看，第三章的工作构成了全文的算法核心，提出了基于壳体模型的复杂曲面薄壁结构显式拓扑优化方法。第四章在此基础上，进一步推广至形貌设计问题。第五章则对第三章中的建模方法进行了补充与拓展，利用实体模型提升了结构优化方法在边界条件施加和多类设计问题统一建模方面的能力。

2 理论基础

2.1 共形参数化

在曲面参数化中，参数域本身通常是一个相比原始曲面更为简单的曲面，构造参数化意味着将一个曲面映射到另一个曲面。对于规则曲面，如柱面、球面、锥面等，其解析表达式代表了参数化过程，类似的是计算机辅助几何设计（Computer-Aided Geometric Design, CAGD）中常见的样条模型。

对于离散情况，曲面通常由网格或点云^[166]表达，相关参数化的计算涉及几何偏微分方程的求解。由于结构优化中存在避免结构描述扭曲的需求，本文选取共形参数化作为几何处理的技术核心。共形参数化的主流求解方法包括：circle pattern 方法^[141]、能量最小化方法^[167]、几何流方法（包括 Yamabe 流^[168]和 Ricci 流^[169]等）、复合拟共形映射方法^[170]等。考虑到算法的易实现性，以及在该研究中所采用的显式结构优化方法的特性（有映射目标区域为长方形的需求），本文选取复合拟共形映射方法进行共形参数化的求解。根据曲面的拓扑属性进行定性，该方法可实现单连通零亏格开曲面（在拓扑意义上同胚于二维欧氏平面中的一个有界四边形区域，即平面四边形）的映射。下面介绍相关数学背景和数值实现过程。

2.1.1 数学背景

本小节主要介绍后续数值实现章节中出现的概念，包括共形映射（conformal mapping）、拟共形映射（quasi-conformal mapping）、调和映射（harmonic mapping）等。用来定义这些映射的空间包括复平面、二维流形曲面、黎曼面（一般的情形）等，本小节则根据后续数值计算的需求在定义中进行具体的限制。

定义 2.1（共形映射）设复平面 \mathbb{C} 内某个开区域 $D \subset \mathbb{C}$ 上定义的映射 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ，其形式为 $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + jv(x, y)$ ，其中 $z = x + jy$ 为复坐标， $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 为实值函数， j 为虚数单位。若映射 f 在区域 D 上连续可微，满足下列 Cauchy-Riemann 方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \end{cases} \quad (2.1)$$

且导数 $f'(z)$ 在区域 D 处处处存在且不为零，则 f 是 D 上的一个共形映射。

共形映射具有优越的保角性质，因此被广泛应用于诸多科学与工程领域^[99]。作为共形映射的推广，拟共形映射^[171]则允许一定的局部角度失真（同时限制了失真程度）。具体而言，拟共形映射具有以下定义。

定义 2.2 (拟共形映射) 映射 f 被称为拟共形映射当且仅当其满足下列 Beltrami 方程

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \mu_f(z) \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (2.2)$$

上式中 μ_f 被称为函数 f 的 Beltrami 系数，是衡量共形扭曲的核心指标，并且要求 $\|\mu_f\|_\infty < 1$ 以及 $\frac{\partial f}{\partial z}$ 几乎处处非零（非退化）。另外，符号 $(\bar{\cdot})$ 代表 (\cdot) 的共轭复数，复导数根据下列公式计算

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = f_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \text{and} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = f_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - j \frac{\partial f}{\partial y} \right). \quad (2.3)$$

可以看出，当系数 μ_f 为零时，Beltrami 方程退化为 Cauchy-Riemann 方程。另外，对于两个拟共形映射的复合映射，其 Beltrami 系数可按照下列命题显式写出^[171]。

命题 2.1 令 $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ 和 $g: \Omega_2 \rightarrow \Omega_3$ 为两个拟共形映射，各自的 Beltrami 系数分别为 μ_f 和 μ_g ，则复合映射 $g \circ f$ 的 Beltrami 系数为

$$\mu_{g \circ f} = \frac{\mu_f + \mu_g(\bar{f})_{\bar{z}}/f_z}{1 + \bar{\mu}_f \mu_g(\bar{f})_{\bar{z}}/f_z}. \quad (2.4)$$

上式是本文求解共形参数化方法的理论核心，证明见附录 1 中的证明 A.1.1。当映射 f 和 g 具有关系 $\mu_{f^{-1}} = \mu_g$ 时，可得 $\mu_g = -\left(f_z/(\bar{f})_{\bar{z}}\right)\mu_f$ 。因此，我们有

$$\mu_{g \circ f} = \frac{\mu_f + \left(-\left(f_z/(\bar{f})_{\bar{z}}\right)\mu_f\right)(\bar{f})_{\bar{z}}/f_z}{1 + \bar{\mu}_f \left(-\left(f_z/(\bar{f})_{\bar{z}}\right)\mu_f\right) \left((\bar{f})_{\bar{z}}/f_z\right)} = 0. \quad (2.5)$$

此时映射 $g \circ f$ 即为共形映射，证明见附录 1 中的证明 A.1.2。后续数值实现章节的思路便是根据给定的限制条件，求解得到两个合适的拟共形映射，满足上述关系。

由于本文涉及复杂曲面的映射求解，下面介绍定义在黎曼面（配备共形结构的拓扑曲面，具有角度、面积和长度的测量）上的共形映射^[172]。令 $f: (\mathcal{S}, g_{\mathcal{S}}) \rightarrow (\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}})$ 为两个黎曼面之间的可逆映射，如果映射诱导的后拉度量 $f^* g_{\mathcal{M}}$ 与初始度量 $g_{\mathcal{S}}$ 之间相差一个标量函数 $\varrho: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ ，使得

$$f^* g_{\mathcal{M}} = \varrho g_{\mathcal{S}}, \quad (2.6)$$

则该映射被称为共形映射（上式的直观解释即为共形映射具有保角的特性）。共形参数化的核心目的在于求解给定曲面到合适参数域的共形映射，而映射存在的底层理论依据是下列的单值化定理，证明见^[173]。

定理 2.1 (单值化定理) 任何一个单连通黎曼面与下列三种标准黎曼面之一共形等价: 单位黎曼球面 \mathbb{S}^2 、复平面 \mathbb{C} 或者单位圆盘 \mathbb{D} 。

通常来说, 曲面共形映射的求解是高度非线性的几何问题。因此, 合理且高效的初始化映射显得尤为重要。其中, 调和映射因其以下优势而被广泛采用^[172]: (1) 算法简洁且计算稳定; (2) 具有微分同胚性质; (3) 曲面的角度畸变较小, 接近共形映射。

定义 2.3 (调和映射) 设 \mathcal{S} 为嵌入在三维欧氏空间 \mathbb{R}^3 中的二维黎曼面, $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ 为从曲面到复平面的双射。若映射 f 极小化下列调和能量 (harmonic energy, 亦称为 Dirichlet energy^[174])

$$E_h(f) = \int_{\mathcal{S}} |\nabla_{\mathcal{S}} f|^2 dA, \quad (2.7)$$

则称其为调和映射。上式中 $\nabla_{\mathcal{S}}(\cdot)$ 为曲面切向梯度算子(函数沿曲面切向量方向的变化率), 通过三维欧氏空间的梯度算子 $\nabla_{3d}(\cdot)$ 向切线方向投影得到, 即

$$\nabla_{\mathcal{S}}(\cdot) = \nabla_{3d}(\cdot) - \mathbf{N}(\mathbf{N} \cdot \nabla_{3d}(\cdot)), \quad (2.8)$$

其中 \mathbf{N} 为曲面单位法向量。在当前求解流程中, 由于目标区域为二维平直参数域, 能量泛函(2.7)的 Euler-Lagrange 方程^[175]退化为 Laplace-Beltrami 方程^[176], 即 $\Delta_{\mathcal{S}} f = 0$, 其中符号 $\Delta_{\mathcal{S}}(\cdot) = \nabla_{\mathcal{S}} \cdot \nabla_{\mathcal{S}}(\cdot)$ 代表定义在曲面 \mathcal{S} 上的 Laplace-Beltrami 算子, $\nabla_{\mathcal{S}} \cdot (\cdot)$ 为曲面散度算子。需要注意的是, 能量泛函(2.7)和控制方程中相关的算子均涉及在每一点处向切空间投影的操作, 因此存在几何诱导的“非线性”^[172]。另外, 由于满足上述方程的解不唯一, 需进一步施加边界条件确定唯一映射, 详情见下一节。

2.1.2 数值实现

本工作主要采用有限元方法求解曲面共形参数化。不同于其他方法中直接求解共形映射本身, 本文采取的求解策略是先获得具有合适条件的拟共形映射, 再通过拟共形映射复合形成所需的共形映射。该方法所得映射的双射性和共形性是避免后续结构优化问题列式中非线性和奇异性的关键。共形映射的求解具有高度非线性, 合适的初始值可以显著提升最终结果的质量。因此, 我们首先将前述的调和映射作为初始映射(确保了能量的最小化, 比较接近共形映射, 这样的性质有助于提供一个较好的初值)。

给定亏格为零的单连通可定向开曲面 \mathcal{S} , 假设映射目标区域为定义在复平面 \mathbb{C} 中的单位圆盘 \mathbb{D} , 则调和映射 $f_1: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{D}$ 的求解等价于调和能量泛函 $E_h(f_1)$ 的最小化问题。考虑到前述求解调和映射的挑战, 本文采用文献中^[172]所提的离散线性化方法。具体来说, 采用有限单元(一阶单元)对曲面 \mathcal{S} 进行离散, 得到欧氏三角面片集合 $\{\mathcal{S}_{\Delta}^e, e = 1, \dots, ne\}$, 原始的光滑调和映射 f_1 由此通过一系列的分片线性映射 $f_{\Delta}^e: \mathcal{S}_{\Delta}^e \rightarrow \mathcal{D}_{\Delta}^e$ 逼近, 其中 \mathcal{D}_{Δ}^e 为参数域 \mathbb{D} 中对应 \mathcal{S}_{Δ}^e 的平面三角面片, ne 为单元个数。考虑三角面片 \mathcal{S}_{Δ}^e , 设其顶点坐标分别为

$\mathbf{v}_1^e, \mathbf{v}_2^e, \mathbf{v}_3^e$, 各顶点对应的三角形内角为 $\theta_i^e, i = 1, 2, 3$, 面片的单位法向量为 $\mathbf{N}^e = (\mathbf{v}_2^e - \mathbf{v}_1^e) \times (\mathbf{v}_3^e - \mathbf{v}_2^e) / \|(\mathbf{v}_2^e - \mathbf{v}_1^e) \times (\mathbf{v}_3^e - \mathbf{v}_2^e)\|$ 。对于面内任一点 \mathbf{x} , 其离散映射采用线性插值表示为

$$f_\Delta^e(\mathbf{x}) = \lambda_1 f_\Delta^e(\mathbf{v}_1^e) + \lambda_2 f_\Delta^e(\mathbf{v}_2^e) + \lambda_3 f_\Delta^e(\mathbf{v}_3^e), \quad (2.9)$$

其中 $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ 为形函数, 通过面积坐标定义

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{(\mathbf{v}_2^e - \mathbf{x}) \times (\mathbf{v}_3^e - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{N}^e}{(\mathbf{v}_2^e - \mathbf{v}_1^e) \times (\mathbf{v}_3^e - \mathbf{v}_1^e) \cdot \mathbf{N}^e}, \\ \lambda_2 = \frac{(\mathbf{v}_3^e - \mathbf{x}) \times (\mathbf{v}_1^e - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{N}^e}{(\mathbf{v}_3^e - \mathbf{v}_2^e) \times (\mathbf{v}_1^e - \mathbf{v}_2^e) \cdot \mathbf{N}^e}, \\ \lambda_3 = \frac{(\mathbf{v}_1^e - \mathbf{x}) \times (\mathbf{v}_2^e - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{N}^e}{(\mathbf{v}_1^e - \mathbf{v}_3^e) \times (\mathbf{v}_2^e - \mathbf{v}_3^e) \cdot \mathbf{N}^e}. \end{cases} \quad (2.10)$$

另外, $f_\Delta^e(\mathbf{v}_i^e)$ 的含义为 $f_\Delta^e(\cdot)$ 将 \mathbf{v}_i^e 映射至 \mathcal{D}_Δ^e 对应的角点。当 \mathbf{v}_i^e 为曲面的内部节点时, $f_\Delta^e(\mathbf{v}_i^e)$ 为待求的未知量; 当 \mathbf{v}_i^e 为边界节点时, $f_\Delta^e(\mathbf{v}_i^e)$ 为预设的边界条件 (边界条件设置的方法为弧长参数化, 实施过程见附录 1 中的算法 A.1.1)。

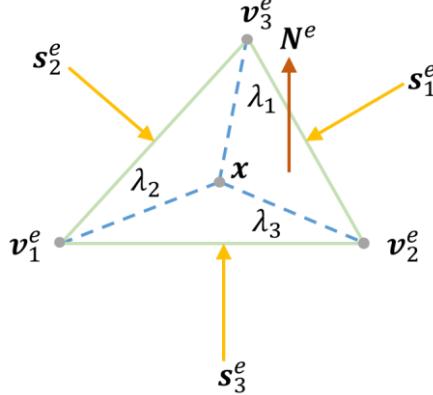


图 2.1 共形参数化技术中边界法向量的定义

Fig. 2.1 Definition of boundary normal vectors in the conformal parameterization technique

定义三条边 (与节点对应) 的法向量 (图 2.1 所示) 分别为

$$\begin{cases} \mathbf{s}_1^e = \mathbf{N}^e \times (\mathbf{v}_3^e - \mathbf{v}_2^e), \\ \mathbf{s}_2^e = \mathbf{N}^e \times (\mathbf{v}_1^e - \mathbf{v}_3^e), \\ \mathbf{s}_3^e = \mathbf{N}^e \times (\mathbf{v}_2^e - \mathbf{v}_1^e), \end{cases} \quad (2.11)$$

则离散映射的梯度 (推导见附录 1 中的证明 A.1.3) 为

$$\nabla_{\mathcal{S}}^e f_\Delta^e(\mathbf{x}) = \frac{1}{2A^e} \sum_{i=1}^3 f_\Delta^e(\mathbf{v}_i^e) \mathbf{s}_i^e, \quad (2.12)$$

式中 A^e 为三角面片 \mathcal{S}_Δ^e 的面积。面片的调和能量为

$$E_h^e = \int_{S_\Delta^e} |\nabla_S^e f_\Delta^e(\mathbf{x})|^2 dA, \quad (2.13)$$

带入方程(2.12)并简化可得 (推导过程见附录 1 中的证明 A.1.3)

$$\begin{aligned} E_h^e = & \frac{\cot\theta_1^e}{2} (f_\Delta^e(\mathbf{v}_2^e) - f_\Delta^e(\mathbf{v}_3^e))^2 + \frac{\cot\theta_2^e}{2} (f_\Delta^e(\mathbf{v}_3^e) - f_\Delta^e(\mathbf{v}_1^e))^2 \\ & + \frac{\cot\theta_3^e}{2} (f_\Delta^e(\mathbf{v}_1^e) - f_\Delta^e(\mathbf{v}_2^e))^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

令未知量向量为 $\mathbf{P}_e^\top = [f_\Delta^e(\mathbf{v}_1^e), f_\Delta^e(\mathbf{v}_2^e), f_\Delta^e(\mathbf{v}_3^e)]$, 令单刚 \mathbf{M}_Δ^e 为

$$\mathbf{M}_\Delta^e = \begin{bmatrix} \cot\theta_2^e + \cot\theta_3^e & -\cot\theta_3^e & -\cot\theta_2^e \\ -\cot\theta_3^e & \cot\theta_1^e + \cot\theta_3^e & -\cot\theta_1^e \\ -\cot\theta_2^e & -\cot\theta_1^e & \cot\theta_1^e + \cot\theta_2^e \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

则单元调和能量进一步写为

$$E_h^e = \frac{1}{2} \mathbf{P}_e^\top \mathbf{M}_\Delta^e \mathbf{P}_e. \quad (2.16)$$

注意到这里单刚半正定, 因此调和能量非负, 即 $E_h^e \geq 0$ 。在得到单刚后, 按照单元自由度与全局自由度的关系将求解调和映射的总体刚度矩阵组装为

$$\mathbf{M} = \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{L}_e^\top \mathbf{M}_\Delta^e \mathbf{L}_e, \quad (2.17)$$

式中 \mathbf{L}_e 为将单元 S_Δ^e 的单刚对应的局部节点编号投射到全局节点编号的稀疏组装矩阵。同理, 全局未知量向量为

$$\mathbf{P} = \sum_{e=1}^n \mathbf{L}_e^\top \mathbf{P}_e. \quad (2.18)$$

因此, 整体离散曲面的调和能量为

$$E_h(f_1) = \sum_{e=1}^{ne} E_h^e = \frac{1}{2} \mathbf{P}^\top \mathbf{M} \mathbf{P}. \quad (2.19)$$

在所有边界条件允许的可能位移中, 真实解使得整体调和能量达到极小值 (凸函数), 因此有

$$\frac{\partial E_h(f_1)}{\partial \mathbf{P}} = \mathbf{0}, \quad (2.20)$$

即

$$\mathbf{M} \mathbf{P} = \mathbf{0}. \quad (2.21)$$

由于还未施加边界条件, 此处总体刚度矩阵 \mathbf{M} 具有奇异性。为了进一步求解未知量, 我们根据边界条件 (弧长参数化, 附录 1 中的算法 A.1.1) 对总体刚度矩阵进行处理。设上述总体刚度方程分块为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{BB} & \mathbf{M}_{BI} \\ \mathbf{M}_{IB} & \mathbf{M}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_B \\ \mathbf{P}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_B \\ \mathbf{0}_I \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

式中下标B代表边界节点相关的几何量,下标I代表内部节点相关的几何量, $\mathbf{M}_{IB} = \mathbf{M}_{BI}^T$ 。根据边界条件有 $\mathbf{P}_B = \bar{\mathbf{P}}_B$ (弧长参数化的计算结果)。因此,上述方程进一步处理为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{BB} & \mathbf{0}_{BI} \\ \mathbf{M}_{IB} & \mathbf{M}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_B \\ \mathbf{P}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_B \\ \mathbf{0}_I \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

式中 \mathbf{I}_{BB} 代表和 \mathbf{M}_{BB} 同维度的单位矩阵, $\mathbf{0}_{BI}$ 代表和 \mathbf{M}_{BI} 同维度的零矩阵。通过边界条件的处理,原始总体刚度矩阵被处理为满秩,因此上述方程可直接通过矩阵求逆求解,并获得调和映射的计算结果:对于曲面网格上的任意节点 \mathbf{v}_e^i ,均有目标域内的点 $f_\Delta^e(\mathbf{v}_e^i)$ 与之对应;对于曲面网格上非节点的任意一点,则通过插值函数(2.9)获得目标域中的对应点。

对于零亏格的闭合曲面,共形映射等价于调和映射^[177]。然而我们处理的是带边曲面,此时固定边界条件下的调和映射通常是非共形的。下面进一步介绍纠正共形畸变的LBS (Linear Beltrami Solver) 方法^[137]。目前已经求解获得映射 $f_1: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{D}$,由于该映射的双射特性,我们可以得到逆映射 $f_1^{-1}: \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{S}$ 。利用逆映射我们可以得到曲面 \mathcal{S} 的第一基本形式 (Riemann 度量)

$$ds^2 = a_{11}dx^2 + 2a_{12}dxdy + a_{22}dy^2, \quad (2.24)$$

式中 a_{11} , a_{12} , a_{22} 为曲面的第一基本量,而逆映射的 Beltrami 系数则进一步计算^[172]为

$$\mu_{f_1^{-1}} = \frac{a_{11} - a_{22} + 2a_{12}j}{a_{11} + a_{22} + 2\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}. \quad (2.25)$$

根据拟共形映射的复合特性,我们需要在映射 f_1 的基础上求解得到第二个映射 f_2 ,使得 $\mu_{f_2} = \mu_{f_1^{-1}}$ (解的存在性与唯一性见文献^[171]第五章)。令 $\mu_{f_1^{-1}} = \rho + j\tau$ 为逆映射 f_1^{-1} 的 Beltrami 算子,其中 ρ 和 τ 分别代表实部和虚部。令 $f_2(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y): \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{M}$ 为所需的拟共形映射,这里 (x, y) 和 (u, v) 分别是定义在圆盘 \mathbb{D} 和参数域 \mathcal{M} 上的复坐标,待求未知量为 u 和 v ,未知量个数与条件 $\mu_{f_2} = \mu_{f_1^{-1}}$ 对应的独立方程个数相等。具体而言,未知数需满足偏微分方程组 (推导过程见附录 1 中的证明 A.1.4)

$$\begin{cases} \nabla_{2d}^\top \cdot (\mathbf{A} \cdot \nabla_{2d} u) = 0, & \text{in } \mathbb{D}, \\ \nabla_{2d}^\top \cdot (\mathbf{A} \cdot \nabla_{2d} v) = 0, & \text{in } \mathbb{D}, \end{cases} \quad (2.26)$$

式中 $\nabla_{2d}^\top = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $\nabla_{2d}^\top(\cdot)$ 为定义于参数域中的欧氏梯度算子, $\nabla_{2d}^\top \cdot (\cdot)$ 为相应的散度算子, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}$, $\alpha_1 = \frac{(\rho-1)^2+\tau^2}{1-\rho^2-\tau^2}$, $\alpha_2 = -\frac{2\tau}{1-\rho^2-\tau^2}$, $\alpha_3 = \frac{(\rho+1)^2+\tau^2}{1-\rho^2-\tau^2}$ 。

需要注意的是,满足上述方程的解不唯一。为了让问题适定,我们需要进一步定义边界条件。最终映射的结果会用来构建移动可变形组件法,因此要求映射得到的参数域 \mathcal{M} 为长方形,从而得到 Dirichlet 边界条件:“圆形边界上取四个点,映射至长方形的角

点上；圆的边缘映射至长方形的边”。然而在实际计算中，“零亏格单连通开曲面共形映射至平面域”问题解的唯一性通过三点对应(three-point correspondences)关系保证^[99]，四个角点的选取则形成过定约束，导致共形映射求解的失败。

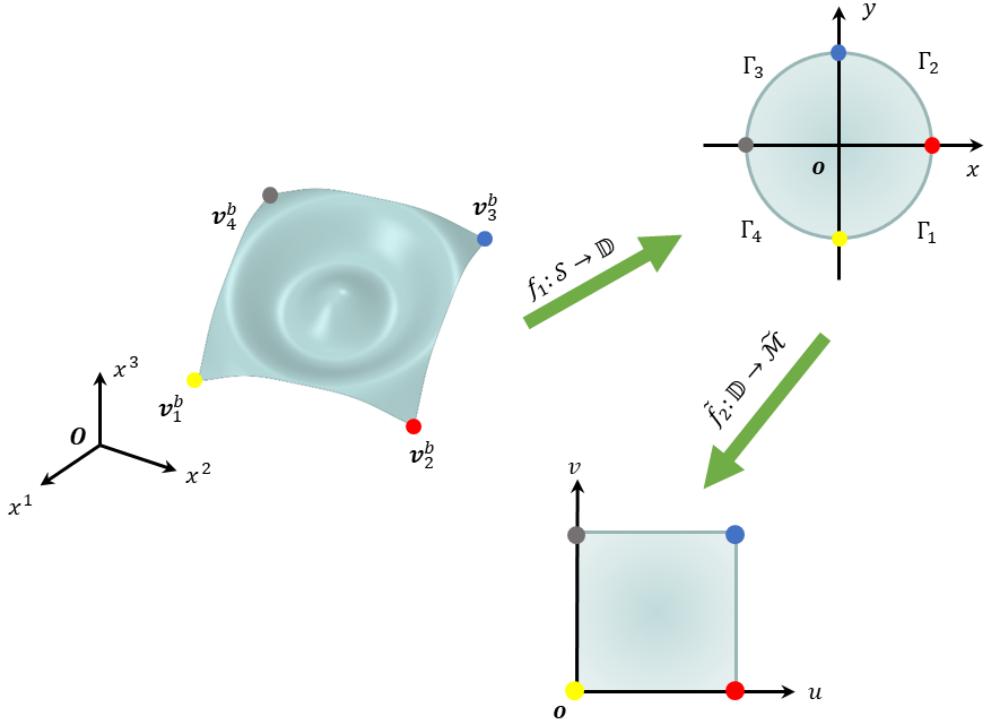


图 2.2 单位正方形映射边界条件示意图

Fig. 2.2 Schematic diagram of the boundary conditions of the unit square mapping

为解决上述问题，此处将共形畸变的修正工作分解为单位正方形映射（将圆盘映射至单位正方形 \tilde{M} ）和宽度优化两部分完成。对于单位正方形映射，其区域内部满足方程(2.26)，而边界则做出以下额外设置。首先根据几何特征在原始曲面上选取四个点 $\{\mathbf{v}_1^b, \mathbf{v}_2^b, \mathbf{v}_3^b, \mathbf{v}_4^b\}$ ，则圆盘 \mathbb{D} 的边界曲线 Γ 依据映射 $f_1: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{D}$ 被分为对应的四段 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ ，如图 2.2 所示。因此单位正方形映射对应的边界条件为：

$$\begin{cases} u|_{\Gamma_4} = 0, \\ u|_{\Gamma_2} = 1, \\ v|_{\Gamma_1} = 0, \\ v|_{\Gamma_3} = 1. \end{cases} \quad (2.27)$$

综上所述，映射 f_2 的求解需要先完成下面两个广义 Laplace 方程的求解（分别对应映射 f_2 的实部与虚部）

$$\begin{cases} \nabla_{2d}^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \nabla_{2d} u) = 0, & \text{in } \mathbb{D}, \\ u|_{\Gamma_4} = 0, \\ u|_{\Gamma_2} = 1, \end{cases} \quad (2.28a)$$

以及

$$\begin{cases} \nabla_{2d}^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \nabla_{2d} v) = 0, & \text{in } \mathbb{D}, \\ v|_{\Gamma_1} = 0, \\ v|_{\Gamma_3} = 1. \end{cases} \quad (2.28b)$$

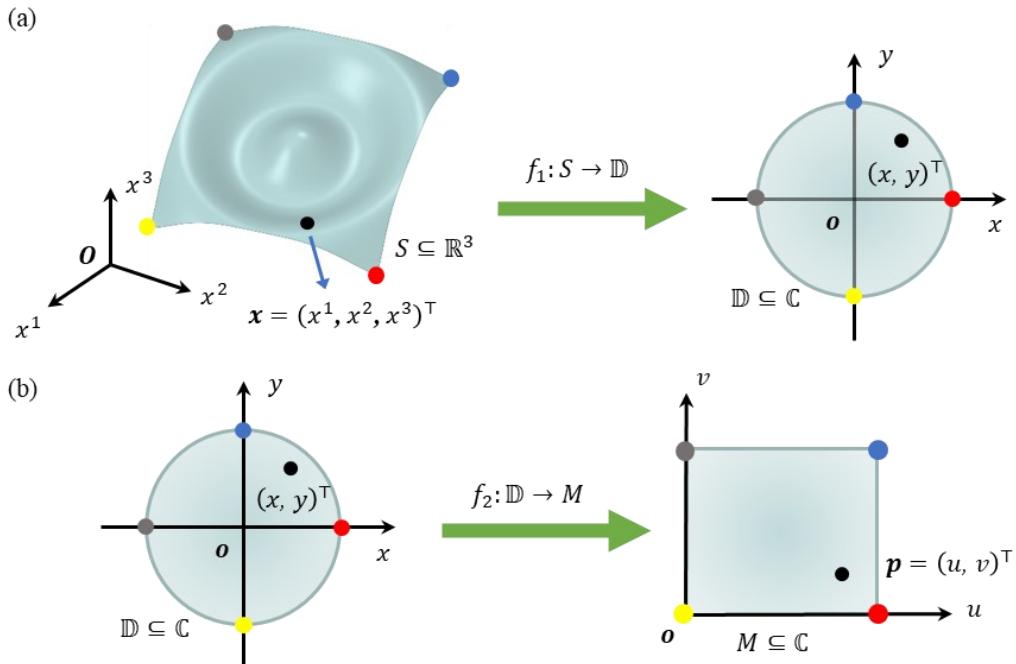


图 2.3 基于拟共形映射复合的曲面共形参数化求解思路示意图

Fig. 2.3 Schematic diagram of the solution idea for surface conformal parameterization based on the composition of quasi-conformal mappings

以分量函数 u 的求解为例, 令 h 为圆盘边界上为零的测试函数, 则问题(2.28a)的弱形式为

$$L(h, u) = \int_{\mathbb{D}} (h \nabla_{2d}^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \nabla_{2d} u)) dA, \quad (2.29)$$

利用高斯定理, 上式简化为

$$\begin{aligned} L(h, u) &= \int_{\mathbb{D}} (\nabla_{2d}^T \cdot (h \mathbf{A} \cdot \nabla_{2d} u) - \nabla_{2d}^T h \cdot \mathbf{A} \cdot \nabla_{2d} u) dA \\ &= \int_{\partial \mathbb{D}} (\mathbf{n} \cdot (h \mathbf{A} \cdot \nabla_{2d} u)) dA - \int_{\mathbb{D}} (\nabla_{2d}^T h \cdot \mathbf{A} \cdot \nabla_{2d} u) dA = - \int_{\mathbb{D}} (\nabla_{2d}^T h \cdot \mathbf{A} \cdot \nabla_{2d} u) dA. \end{aligned} \quad (2.30)$$

上式中 \mathbf{n} 为边界 $\partial \mathbb{D}$ 的外法向。将上述弱形式采用有限元离散求解后, 并施加相应的边界条件, 得到未知量 u , 未知量 v 同理可得。因此, 单位正方形映射的显式表达式为 $\tilde{f}_2 = u +$

$jv: \mathbb{D} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ 。正如前文所述，该映射需进行系数优化从而得到最终映射 $f_2: \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{M}$ ，优化问题列式为

$$\text{find } \lambda \in \mathbb{R}^+: \min \text{obj}(\lambda) = \int_{\mathbb{D}} |\mu_{g_\lambda} - \mu_{f_1^{-1}}|^2 ds, \quad (2.31)$$

式中 μ_{g_λ} 为函数 g_λ 的 Beltrami 系数， $g_\lambda = g_\lambda(u, v) = u + j\lambda v$ 为对映射 \tilde{f}_2 进行线性变换得到的函数族。求解上述优化问题，得到最优宽度系数（即共形模，conformal module） λ^* 和映射 $f_2 = u + j\lambda^* v$ 。至此，我们已经求解得到所需的共形映射 $f = f_2 \circ f_1: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{M}$ ，整体求解思路总结如图 2.3 所示。上述求解策略合理性的证明见论文^[170]。

2.2 壳体的力学模型

在第三章和第四章研究中，力学模型涵盖薄壁/厚壁的壳体，因此须采用通用壳体模型（无需小厚度、规则壳、小曲率扁壳等额外的几何假设）降低算法的冗杂度。考虑线弹性壳体：材料线弹性，应力通过线性本构与应变关联；变形线弹性，应变线性依赖于位移。另外，材料设置为各向同性、均匀分布。下面本节对相应的理论模型进行简要介绍，相关文献请参考^[12,31,39,178-182]。

2.2.1 壳体的几何关系

相比于平板理论，壳理论主要需额外考虑几何所带来的复杂性，因此在描述其内在的力学原理之前，需先确定壳体模型的几何关系，此节采用经典著作^[178]中的符号表示。

不同于实体模型，壳体模型通常采用中面建模的方式描述几何。令壳体所占据的区域为 \mathcal{B} ，其中面为 \mathcal{S} ，根据壳体的几何特征有基于笛卡尔积的分解 $\mathcal{B} = \mathcal{S} \times \mathcal{W}$ 成立，其中 \mathcal{W} 为厚度坐标取值区间。中面 \mathcal{S} 通过二维坐标卡（chart）定义，即 $\mathcal{S} = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{w})$ ，其中 $\boldsymbol{\phi}: \boldsymbol{w} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ ， \boldsymbol{w} 为曲面对应的参数域。同理，利用三维坐标卡定义实体区域，即 $\boldsymbol{\Phi}: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ ， Ω 为三维参数域，定义为

$$\Omega = \{(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \mathbb{R}^3 | (\xi^1, \xi^2) \in \boldsymbol{w}, \xi^3 \in \mathcal{W}\}. \quad (2.32)$$

需要注意的是，由于曲纹坐标 (ξ^1, ξ^2) 和厚度坐标 ξ^3 的解耦性，此处厚度取值区间无需通过坐标卡定义，且有 $\mathcal{W} = [-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}]$ ， t 为壳体厚度。另外，虽然区域 \mathcal{B} 和 Ω 都定义在三维空间内，但是壳体区域 \mathcal{B} 属于真实物理空间而参数域 Ω 属于额外定义的参数空间，二者通过坐标卡 $\boldsymbol{\Phi}(\Omega)$ 联结，对于 \mathcal{S} 和 \boldsymbol{w} 同理。曲面上的协变基向量（切向量）为

$$\boldsymbol{a}_\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.33)$$

这里符号 α ，包括后文中希腊字母下标 β 、 γ 等，若未作特殊声明均用来索引面内的曲纹坐标，取值均为 1 和 2，后续不再作特殊说明。曲面的单位法向量则进一步计算为

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|}. \quad (2.34)$$

利用上述单位法向量，三维坐标卡可显式地写为

$$\Phi(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \phi(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \mathbf{a}_3(\xi^1, \xi^2), \quad (2.35)$$

因此，对于参数域 Ω 中任意一点 (ξ^1, ξ^2, ξ^3) ，其三维物理空间中所对应的点为 $\Phi(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ 。需要注意的是，对于复杂的几何构型，壳体中面可拆解为多个坐标卡，这些坐标卡共同组合形成图册(atlas)，此处仅讨论最为普通的壳体中面仅由单个坐标卡定义的场景。利用协变基向量定义逆变基向量：

$$\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta = \delta_\alpha^\beta, \quad \beta = 1, 2, \quad (2.36)$$

其中 δ_α^β 为Kronecker-delta符号。根据微分几何^[183]，曲面的第一基本形式(first fundamental form)的计算公式为

$$d\phi(\xi^1, \xi^2) \cdot d\phi(\xi^1, \xi^2) = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta d\xi^\alpha d\xi^\beta, \quad (2.37)$$

其中曲面的第一类基本量(度量张量)为

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta, \quad (2.38)$$

并且有

$$a^{\alpha\beta} = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta, \quad (2.39)$$

以及曲面第二基本形式(second fundamental form)的计算公式为

$$d^2\phi(\xi^1, \xi^2) \cdot \mathbf{a}_3 = -d\phi(\xi^1, \xi^2) \cdot d\mathbf{a}_3, \quad (2.40)$$

展开得

$$-d\phi(\xi^1, \xi^2) \cdot d\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_{3,\beta} \cdot \mathbf{a}_\alpha d\xi^\alpha d\xi^\beta, \quad (2.41)$$

其中曲面的第二类基本量为

$$b_{\alpha\beta} = -\mathbf{a}_{3,\beta} \cdot \mathbf{a}_\alpha. \quad (2.42)$$

按照协变-逆变的形式表达为

$$b_\alpha^\beta = a^{\beta\gamma} b_{\gamma\alpha} = -a^{\beta\gamma} \mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_\gamma = -\mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}^\beta. \quad (2.43)$$

由于 $\mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \phi(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^\alpha}$ ， $\mathbf{a}_{\alpha,\beta} = \frac{\partial^2 \phi(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta} = \mathbf{a}_{\beta,\alpha}$ ， $-\mathbf{a}_{3,\beta} \cdot \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{\beta,\alpha} = -\mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_\beta$ ，因此 $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$ 。最后，曲面的第三基本形式(third fundamental form)为

$$d\mathbf{a}_3 \cdot d\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta, \quad (2.44)$$

其中曲面的第三类基本量为

$$c_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_{3,\beta}, \quad (2.45)$$

根据(2.42)和(2.43)，上式可简化为

$$c_{\alpha\beta} = b_\alpha^\gamma b_{\gamma\beta}, \quad (2.46)$$

根据公式(2.45), 有 $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$ 成立。曲面的基本形式和基本量是描述曲面几何特性的主要工具, 同时与壳体的形变、弯曲等力学行为密切相关。其中, 第一基本形式描述的是曲面上两点间内蕴的距离关系, 可以用来计算曲面上的长度、角度、面积等; 第二基本形式刻画的是曲面上法向量场和切平面之间的关系, 描述了曲面在各点处的面外弯曲程度(曲率); 第三基本形式实际上并非是独立变量^[183], 但也被用来描述壳体的变形。最后, 我们基于实体区域的参数化推导其配备的协变基向量。根据定义, 我们可以直接得到

$$\mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \Phi(\xi^1, \xi^2, \xi^3)}{\partial \xi^\alpha}, \quad (2.47)$$

以及

$$\mathbf{g}_3 = \frac{\partial \Phi(\xi^1, \xi^2, \xi^3)}{\partial \xi^3}. \quad (2.48)$$

将三维坐标卡的显式表达式(2.35)带入可得

$$\mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \Phi(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^\alpha} + \xi^3 \frac{\partial \mathbf{a}_3(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^\alpha}, \quad (2.49)$$

以及

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3. \quad (2.50)$$

公式(2.49)可进一步简化为

$$\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{a}_\alpha + \xi^3 \mathbf{a}_{3,\alpha} = \mathbf{a}_\alpha + \xi^3 (\mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}^\beta) \mathbf{a}_\beta = \mathbf{a}_\alpha - \xi^3 b_\alpha^\beta \mathbf{a}_\beta = (\delta_\alpha^\beta - \xi^3 b_\alpha^\beta) \mathbf{a}_\beta. \quad (2.51)$$

类似地, 定义逆变基向量

$$\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}^\beta = \delta_\alpha^\beta. \quad (2.52)$$

因此, 逆变形式的度量张量为 $g^{\alpha\beta} = \mathbf{g}^\alpha \cdot \mathbf{g}^\beta$ 。需要注意的是曲面度量张量 $a_{\alpha\beta}$ (或者 $a^{\alpha\beta}$)是定义在壳体面上的, 而此处 $g^{\alpha\beta}$ 是定义在壳体所占据的整个实体 \mathcal{B} 上的, 并且根据定义可以判断 $a^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}|_{\xi^3=0}$ 。曲面向量 $\mathbf{v} = v_\beta \mathbf{a}^\beta$ 关于坐标 ξ^α 的偏导数为

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi^\alpha} = v_{\beta,\alpha} \mathbf{a}^\beta + v_\beta \mathbf{a}_{,\alpha}^\beta, \quad (2.53)$$

其中 $v_{\beta,\alpha}$ 为协变分量 v_β 关于坐标 ξ^α 的导数; 向量 $\mathbf{a}_{,\alpha}^\beta$ 按照面内外分量分解的形式表示为

$$\mathbf{a}_{,\alpha}^\beta = (\mathbf{a}_{,\alpha}^\beta \cdot \mathbf{a}_\gamma) \mathbf{a}^\gamma + (\mathbf{a}_{,\alpha}^\beta \cdot \mathbf{a}_3) \mathbf{a}_3. \quad (2.54)$$

采用曲面 Christoffel 符号^[178]

$$\Gamma_{\gamma\alpha}^\beta = \mathbf{a}_{\gamma,\alpha} \cdot \mathbf{a}^\beta, \quad (2.55)$$

由于 $\mathbf{a}_\gamma \cdot \mathbf{a}^\beta = \delta_\gamma^\beta$, $(\mathbf{a}_\gamma \cdot \mathbf{a}^\beta)_{,\alpha} = 0$, 因此

$$\Gamma_{\gamma\alpha}^\beta = \mathbf{a}_{\gamma,\alpha} \cdot \mathbf{a}^\beta = -\mathbf{a}_\gamma \cdot \mathbf{a}_{,\alpha}^\beta = -\mathbf{a}_{,\alpha}^\beta \cdot \mathbf{a}_\gamma. \quad (2.56)$$

另外

$$\mathbf{a}_{,\alpha}^{\beta} \cdot \mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}^{\beta} \cdot \mathbf{a}_{3,\alpha} = b_{\alpha}^{\beta}. \quad (2.57)$$

因此公式(2.53)简化为

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi^{\alpha}} = v_{\beta,\alpha} \mathbf{a}^{\beta} - v_{\beta} \Gamma_{\gamma\alpha}^{\beta} \mathbf{a}^{\gamma} + v_{\beta} b_{\alpha}^{\beta} \mathbf{a}_3, \quad (2.58)$$

进一步整理得

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi^{\alpha}} = (v_{\beta,\alpha} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma} v_{\gamma}) \mathbf{a}^{\beta} + v_{\gamma} b_{\alpha}^{\gamma} \mathbf{a}_3. \quad (2.59)$$

定义协变分量 v_{β} 对坐标 ξ^{α} 的协变导数^[178]为

$$v_{\beta|\alpha} = v_{\beta,\alpha} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma} v_{\gamma}, \quad (2.60)$$

因此有

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi^{\alpha}} = v_{\gamma|\alpha} \mathbf{a}^{\gamma} + v_{\gamma} b_{\alpha}^{\gamma} \mathbf{a}_3. \quad (2.61)$$

可以看出在平直坐标系中，协变导数退化为普通偏导数，并且曲率 b_{α}^{γ} 为零。另外，考虑面外单位法向量 \mathbf{a}_3 关于坐标 ξ^{α} 的偏导数

$$\mathbf{a}_{3,\alpha} = (\mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_{\gamma}) \mathbf{a}^{\gamma} + (\mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_3) \mathbf{a}_3, \quad (2.62)$$

由于 $\mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_3 = 0$, $\mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_{\gamma} = -b_{\alpha\gamma}$, 我们有

$$\mathbf{a}_{3,\alpha} = -b_{\alpha\gamma} \mathbf{a}^{\gamma} = -b_{\alpha}^{\gamma} \mathbf{a}_{\gamma}. \quad (2.63)$$

2.2.2 线弹性通用壳体的基本模型

构建壳体模型的第一步是在几何关系的基础上引入运动学假设来预设结构的位移模式。本文采用经典的 Reissner-Mindlin 运动学假设 (Reissner-Mindlin kinematical assumption), 该假设适用于厚壳模型, 而针对薄壳模型则需要引入更为严格的 Kirchhoff-Love 运动学假设, 实现过程见下一小节。

对于实体区域内任意一点 $\Phi(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$, 其在三维空间中的位移 $\mathbf{U}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ 可分解为中面位移 $\mathbf{u}(\xi^1, \xi^2)$ 和厚度方向上转角 $\boldsymbol{\theta}(\xi^1, \xi^2)$ 引起的位移的叠加, 并且该点与中面上投影点连接形成的材料线在变形过程中保持直线且未被拉伸 (变形后可能不垂直于中面), 公式表达为

$$\mathbf{U}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \mathbf{u}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \theta_{\gamma}(\xi^1, \xi^2) \mathbf{a}^{\gamma}(\xi^1, \xi^2). \quad (2.64)$$

其中 $\theta_{\gamma}, \gamma = 1, 2$ 为 $\boldsymbol{\theta}$ 的分量, 符号 $\xi^3 \theta_1 \mathbf{a}^1$ 代表由距离中面 ξ^3 处、关于中面点 \mathbf{o} 、绕向量 \mathbf{a}^2 转动所造成的位移 (幅值为 $\xi^3 \theta_1$, 方向沿单位向量为 \mathbf{a}^1) ; 同理符号 $\xi^3 \theta_2 \mathbf{a}^2$ 代表由距离中面 ξ^3 处、关于中面点 \mathbf{o} 、绕向量 $-\mathbf{a}^1$ 转动所造成的位移, 如图 2.4 所示 (这里材料线

material line 垂直于壳体中曲面）。注意，此处将 θ_2 定义为关于向量 \mathbf{a}^1 的旋转角度主要是考虑我们采用的是右手系^[184]，并且需要保证正负号的统一。

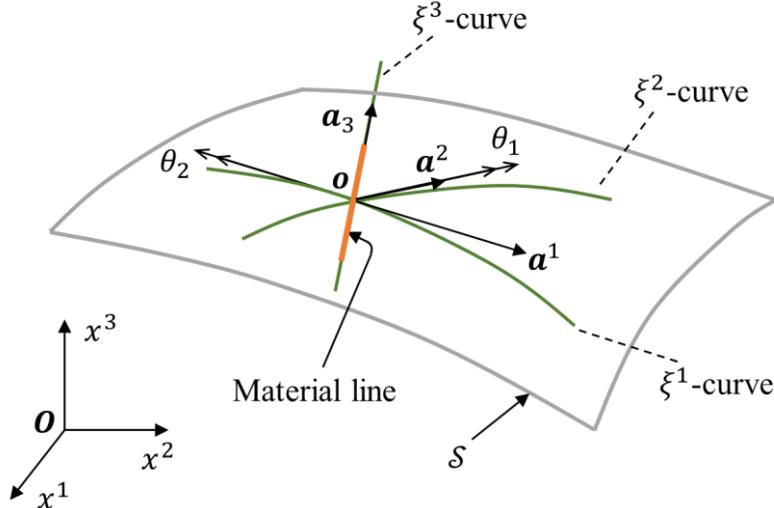


图 2.4 壳体模型的转角自由度定义^[181]

Fig. 2.4 Definition of rotational degrees of freedom for the shell model

下面考虑应变-位移关系。根据文献^[185]，曲纹坐标系中的小应变定义为

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}(g_{ik}^* - g_{ik})_{linear}, \quad i, k = 1, 2, 3, \quad (2.65)$$

其中为 g_{ik}^* 变形后的度量张量，由变形后的协变坐标计算得到，即 $g_{ik}^* = \mathbf{g}_i^* \cdot \mathbf{g}_k^*$ ，因此

$$g_{ik}^* = \mathbf{g}_i^* \cdot \mathbf{g}_k^* = (\mathbf{g}_i + \mathbf{U}_{,i}) \cdot (\mathbf{g}_k + \mathbf{U}_{,k}). \quad (2.66)$$

取线性化部分可得

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{U}_{,k} + \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{U}_{,i}). \quad (2.67)$$

根据(2.64)，位移向量有以下分解

$$\mathbf{U} = (u_\gamma + \xi^3 \theta_\gamma) \mathbf{a}^\gamma + u_3 \mathbf{a}_3. \quad (2.68)$$

利用前面推导的公式(2.61)以及(2.63)，可得关于位移向量的偏导数

$$\mathbf{U}_{,\alpha} = U_{\gamma\alpha} \mathbf{a}^\gamma + U_{3\alpha} \mathbf{a}_3, \quad (2.69)$$

其中

$$\begin{cases} U_{\gamma\alpha} = u_{\gamma|\alpha} - u_3 b_{\alpha\gamma} + \xi^3 \theta_{\gamma|\alpha} \\ U_{3\alpha} = u_{\gamma|\alpha} b_\gamma + u_{3,\alpha} + \xi^3 \theta_\gamma b_\gamma^\alpha. \end{cases} \quad (2.70)$$

另外有

$$\mathbf{U}_3 = \theta_\gamma \mathbf{a}^\gamma. \quad (2.71)$$

将(2.50 – 2.51)以及(2.69)带入(2.67)可得

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{U}_{,\beta} + \mathbf{g}_\beta \cdot \mathbf{U}_{,\alpha}) = \frac{1}{2}\left(U_{\gamma\beta}(\delta_\alpha^\mu - \xi^3 b_\alpha^\mu)\delta_\mu^\gamma + U_{\gamma\alpha}(\delta_\beta^\mu - \xi^3 b_\beta^\mu)\delta_\mu^\gamma\right). \quad (2.72)$$

这里利用了 $\mathbf{a}^\gamma \cdot \mathbf{a}_\mu = \delta_\mu^\gamma$ 以及 $\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_\mu = 0$ 。上式进一步整理为

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(U_{\alpha\beta} - \xi^3 b_\beta^\mu U_{\mu\alpha} + U_{\beta\alpha} - \xi^3 b_\alpha^\mu U_{\mu\beta}\right). \quad (2.73)$$

将(2.70)带入上式可得

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(u_{\alpha|\beta} - u_3 b_{\beta\alpha} + \xi^3 \theta_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha} - u_3 b_{\alpha\beta} + \xi^3 \theta_{\beta|\alpha}) \\ &\quad - \frac{1}{2}\xi^3(b_\beta^\mu(u_{\mu|\alpha} - u_3 b_{\alpha\mu} + \xi^3 \theta_{\mu|\alpha}) + b_\alpha^\mu(u_{\mu|\beta} - u_3 b_{\beta\mu} + \xi^3 \theta_{\mu|\beta})). \end{aligned} \quad (2.74)$$

利用方程(2.46)以及对称关系 $b_{\beta\alpha} = b_{\alpha\beta}$ 和 $c_{\beta\alpha} = c_{\alpha\beta}$, 上式可简化为

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta}u_3 + \xi^3\left(\frac{1}{2}(\theta_{\alpha|\beta} + \theta_{\beta|\alpha} - b_\beta^\mu u_{\mu|\alpha} - b_\alpha^\mu u_{\mu|\beta}) + c_{\alpha\beta}u_3\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\xi^3)^2(b_\beta^\mu \theta_{\mu|\alpha} + b_\alpha^\mu \theta_{\mu|\beta}). \end{aligned} \quad (2.75)$$

另外有

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{U}_{,3} + \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{U}_{,\alpha}) = \frac{1}{2}(\theta_\gamma(\delta_\alpha^\mu - \xi^3 b_\alpha^\mu)\delta_\mu^\gamma + U_{3\alpha}). \quad (2.76)$$

将公式(2.70)第二项带入上式可得

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2}(\theta_\alpha - \xi^3 b_\alpha^\mu \theta_\mu + U_{3\alpha}) = \frac{1}{2}(\theta_\alpha + b_\alpha^\mu u_\mu + u_{3,\alpha}). \quad (2.77)$$

另外, 应变分量 ε_{33} 推导可得 $\varepsilon_{33} = 0$ 。根据厚度的阶次, 应变可进一步定义为

$$\begin{cases} \varepsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + \xi^3 \chi_{\alpha\beta} - (\xi^3)^2 \kappa_{\alpha\beta}, \\ \varepsilon_{\alpha 3} = \zeta_\alpha, \\ \varepsilon_{33} = 0, \end{cases} \quad (2.78)$$

其中

$$\begin{cases} e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta}u_3, \\ \chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\theta_{\alpha|\beta} + \theta_{\beta|\alpha} - b_\beta^\mu u_{\mu|\alpha} - b_\alpha^\mu u_{\mu|\beta}) + c_{\alpha\beta}u_3, \\ \kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(b_\beta^\mu \theta_{\mu|\alpha} + b_\alpha^\mu \theta_{\mu|\beta}), \\ \zeta_\alpha = \frac{1}{2}(\theta_\alpha + b_\alpha^\mu u_\mu + u_{3,\alpha}). \end{cases} \quad (2.79)$$

上式中, 张量 $e_{\alpha\beta}$ 、 $\chi_{\alpha\beta}$ 以及 ζ_α 分别称为膜应变 (membrane strain)、弯曲应变 (bending strain) 与剪切应变 (shearing strain)。膜应变描述壳体在外力作用下的面内拉伸与压缩变形, 由面内位移的协变导数和面外变形关于曲率的累积 ($b_{\alpha\beta}u_3$) 构成, 不随厚度方向的坐标变化, 且与角度自由度无关。弯曲应变虽然也是定义在曲面内的张量分量, 但其

在整体应变中与厚度耦合，导致整体位移（即应变关于坐标的积分）随厚度变化，因此壳体宏观上表现出弯曲变形；该项是角度自由度和平动自由度同时贡献的结果。剪切应变的指向为曲面法向，也就是面外方向，描述材料沿厚度方向的错动，这种剪切效应对于较厚的壳体尤为显著。另外，即使此处采用了小应变假设，壳体本身的曲率仍然诱导了应变分量关于厚度的高次项（平板情况退化为零），即应变分量 $-(\xi^3)^2 \kappa_{\alpha\beta}$ 。

在考虑平面应力假设的壳体中，各向同性、均匀分布、线弹性材料的本构关系按照曲线坐标系表达为

$$\begin{cases} \sigma^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\gamma\mu} \varepsilon_{\gamma\mu}, \\ \sigma^{\alpha 3} = \frac{1}{2} D^{\alpha\gamma} \varepsilon_{\gamma 3}, \end{cases} \quad (2.80)$$

且有

$$\begin{cases} C^{\alpha\beta\gamma\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)} (g^{\alpha\gamma} g^{\beta\mu} + g^{\alpha\mu} g^{\beta\gamma} + \frac{2\nu}{1-\nu} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\mu}), \\ D^{\alpha\gamma} = \frac{2E}{1+\nu} g^{\alpha\gamma}. \end{cases} \quad (2.81)$$

其中， E 和 ν 分别为杨氏模量和泊松比。因此，壳体的弹性势能为

$$U_{\text{basic}} = \frac{1}{2} \int_B (\sigma^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} + 2\sigma^{\alpha 3} \varepsilon_{\alpha 3}) dV = \frac{1}{2} \int_B (C^{\alpha\beta\gamma\mu} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\mu} + D^{\alpha\gamma} \varepsilon_{\alpha 3} \varepsilon_{\gamma 3}) dV, \quad (2.82)$$

其中 $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{U}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}))$, $\varepsilon_{\alpha 3} = \varepsilon_{\alpha 3}(\mathbf{U}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}))$ 。假设壳体承受外力 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\Phi}(\xi^1, \xi^2, \xi^3))$ ，在边界 Γ_1 上受固定端约束（即本质边界条件 $u_\alpha = 0$, $\theta_\alpha = 0$, $u_3 = 0$ ），边界 Γ_2 自由；并且 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\mathcal{B}$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ 。那么系统的外力势能为

$$V_{\text{basic}} = - \int_B \mathbf{F} \cdot \mathbf{U} dV, \quad (2.83)$$

系统总势能为

$$\Pi_{\text{basic}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) = U_{\text{basic}} + V_{\text{basic}} = \frac{1}{2} \int_B (C^{\alpha\beta\gamma\mu} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\mu} + D^{\alpha\gamma} \varepsilon_{\alpha 3} \varepsilon_{\gamma 3}) dV - \int_B \mathbf{F} \cdot \mathbf{U} dV. \quad (2.84)$$

根据最小势能原理^[182]，真实位移解在满足本质边界条件的同时使得系统总势能取最小，即

$$\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}\} = \arg \min \{\Pi_{\text{basic}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) \text{ s. t. essential BCs}\}. \quad (2.85)$$

上述问题列式即代表了通用壳体的基本模型。

2.2.3 线弹性通用壳体的退化模型

在实际数值计算中，本文采用了商业软件 Abaqus 中的 S3 单元进行结构响应的模拟，该单元在具体应用中会根据厚度自适应调整相应的壳体模型（厚度较厚时对应厚壳

模型，厚度较薄时对应薄壳模型）。厚壳模型和薄壳模型都可以通过在通用壳体的基本模型上施加约束退化得到，下面详细介绍实施过程。

首先，保留基本模型中的 Reissner-Mindlin 运动学假设，忽略应变关于厚度的二次项，基本模型退化为厚壳模型（即一阶剪切变形模型、考虑横向剪切效应的剪切-膜-弯曲模型）。该模型的应变为

$$\begin{cases} \varepsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + \xi^3 \chi_{\alpha\beta}, \\ \varepsilon_{\alpha 3} = \zeta_\alpha, \\ \varepsilon_{33} = 0, \end{cases} \quad (2.86)$$

其中

$$\begin{cases} e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta}u_3, \\ \chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\theta_{\alpha|\beta} + \theta_{\beta|\alpha} - b_\beta^\mu u_{\mu|\alpha} - b_\alpha^\mu u_{\mu|\beta}) + c_{\alpha\beta}u_3, \\ \zeta_\alpha = \frac{1}{2}(\theta_\alpha + b_\alpha^\mu u_\mu + u_{3,\alpha}). \end{cases} \quad (2.87)$$

另外，整体壳体所占区域的本构关系利用中面的本构代替，即

$$\begin{cases} C_0^{\alpha\beta\gamma\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)}(a^{\alpha\gamma}a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu}a^{\beta\gamma} + \frac{2\nu}{1-\nu}a^{\alpha\beta}a^{\gamma\mu}), \\ D_0^{\alpha\gamma} = \frac{2E}{1+\nu}a^{\alpha\gamma}. \end{cases} \quad (2.88)$$

因此剪切-膜-弯曲模型中壳体的弹性势能为

$$\begin{aligned} U_{s-m-b} &= \frac{1}{2} \int_B (C_0^{\alpha\beta\gamma\mu} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\mu} + \bar{\kappa} D_0^{\alpha\gamma} \varepsilon_{\alpha 3} \varepsilon_{\gamma 3}) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_S \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (C_0^{\alpha\beta\gamma\mu} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\mu} + \bar{\kappa} D_0^{\alpha\gamma} \varepsilon_{\alpha 3} \varepsilon_{\gamma 3}) dl dA. \end{aligned} \quad (2.89)$$

其中， $\bar{\kappa}$ 为考虑厚度方向剪切应变非线性分布的剪切修正因子（在各向同性材料中 $\bar{\kappa} = \frac{5}{6}$ ，在正交各向异性材料中 $\bar{\kappa} = \frac{2}{3}$ ）。另外，系统的外力势能保持不变，即

$$V_{s-m-b} = - \int_B \mathbf{F} \cdot \mathbf{U} dV = - \int_S \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}) dl dA, \quad (2.90)$$

因此系统总势能为

$$\begin{aligned} \Pi_{s-m-b}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) &= U_{s-m-b} + V_{s-m-b} \\ &= \frac{1}{2} \int_S \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (C_0^{\alpha\beta\gamma\mu} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\mu} + \bar{\kappa} D_0^{\alpha\gamma} \varepsilon_{\alpha 3} \varepsilon_{\gamma 3}) dl dA - \int_S \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}) dl dA. \end{aligned} \quad (2.91)$$

根据最小势能原理，真实位移解为

$$\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}\} = \arg \min \{\Pi_{s-m-b}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) \text{ s.t. essential BCs}\}. \quad (2.92)$$

上述问题列式即代表了厚壳模型。

在上述厚壳模型基础上做出更严格的要求，即变形前垂直于中曲面的材料线不仅需要保持直线、不受拉伸还需要在变形过程中始终垂直于中面，可得剪切应力 $\varepsilon_{\alpha 3}$ 为零的推论^[186]。根据方程(2.87)第三项，可得 $\theta_\alpha = -b_\alpha^\mu u_\mu - u_{3,\alpha}$ 。将该约束条件代入 Reissner-Mindlin 运动学假设可得 Kirchhoff-Love 运动学假设，即

$$\mathbf{U}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \mathbf{u}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3(-u_{3,\gamma} - b_\gamma^\mu u_\mu) \mathbf{a}^\gamma(\xi^1, \xi^2). \quad (2.93)$$

将该运动学假设应用于基本模型中，我们得到薄壳模型（即经典壳体模型、膜-弯曲模型、Kirchhoff-Love 薄壳模型）。具体地，应变分量简化为

$$\begin{cases} \varepsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + \xi^3 \chi_{\alpha\beta}, \\ \varepsilon_{\alpha 3} = 0, \\ \varepsilon_{33} = 0, \end{cases} \quad (2.94)$$

其中

$$\begin{cases} e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} u_3, \\ \chi_{\alpha\beta} = -u_{3|\alpha\beta} - b_{\alpha|\beta}^\mu u_\mu - b_\alpha^\mu u_{\mu|\beta} - b_\beta^\mu u_{\mu|\alpha} + c_{\alpha\beta} u_3. \end{cases} \quad (2.95)$$

上式中，应变分量 $e_{\alpha\beta}$ 对应曲面的第一类基本量（度量）的变化， $-\chi_{\alpha\beta}$ 代表第二类基本量（曲率）的变化^[187]，壳体的整体弹性势能为

$$U_{m-b} = \frac{1}{2} \int_B (C_0^{\alpha\beta\gamma\mu} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\mu}) dV = \frac{1}{2} \int_S \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} C_0^{\alpha\beta\gamma\mu} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\mu} dl dA. \quad (2.96)$$

假设壳体所受外力和边界条件与剪切-膜-弯曲模型一致，那么系统的外力势能为

$$V_{m-b} = - \int_S \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}) dl dA, \quad (2.97)$$

系统总势能为

$$\Pi_{m-b}(\mathbf{u}) = U_{m-b} + V_{m-b} = \frac{1}{2} \int_S \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} C_0^{\alpha\beta\gamma\mu} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\mu} dl dA - \int_S \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}) dl dA. \quad (2.98)$$

此处位移 \mathbf{U} 遵循方程(2.93)的模式，独立未知量为 \mathbf{u} 。根据最小势能原理，真实位移解为

$$\{\tilde{\mathbf{u}}\} = \arg \min \{\Pi_{m-b}(\mathbf{u}) \text{ s.t. essential BCs}\}. \quad (2.99)$$

尽管该模型无需额外的转角自由度，但是代价是涉及曲面曲率的求导计算（如式(2.95)中的 $b_{\alpha|\beta}^\mu$ ），因此几何的连续性比剪切-膜-弯曲模型更为严格（不允许出现曲率不连续的区域）。

2.3 移动可变形组件法

移动可变形组件法的核心思想在于利用显式描述的几何组件（类比经典力学中的杆、梁、板、壳体模型）刻画整体结构，结构的拓扑变化通过组件的移动和变形、组件间的交叠和覆盖等行为实现^[78]。本文着重采用平面二维的移动可变形组件法，如图 2.5 所示。

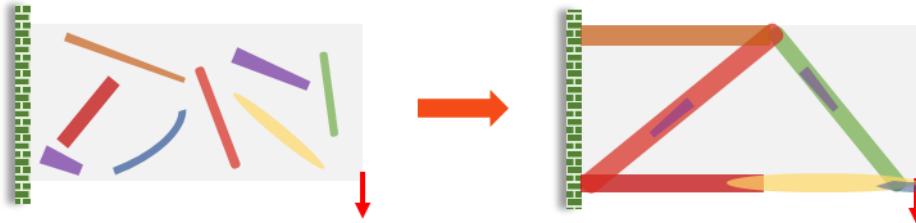


图 2.5 移动可变形组件法的优化机理示意图

Fig. 2.5 Schematic diagram of the optimization mechanism of the MMC method

移动可变形组件法采用拓扑描述函数（Topological Description Function, TDF） ϕ^s 来描述整体结构：

$$\begin{cases} \phi^s(x) > 0, & \text{if } x \in \Omega_s \\ \phi^s(x) = 0, & \text{if } x \in \partial\Omega_s \\ \phi^s(x) < 0, & \text{if } x \in D \setminus (\Omega_s \cup \partial\Omega_s) \end{cases} \quad (2.100)$$

式中D代表设计域， Ω_s 为结构占据的区域。结构由组件（假设数量为 nc 根）搭接而成，该力学过程在数学上通过 K-S 凝聚函数^[188]实现：

$$\phi^s = \mathcal{KS}(\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^{nc}) = \frac{\left(\ln \left(\sum_{i=1}^{nc} \exp(\iota \phi^i) \right) \right)}{\iota}, \quad (2.101)$$

其中， ϕ^i 代表第*i*根组件的拓扑描述函数， ι 为较大的正实数（在该研究中，如无特殊声明均取 $\iota = 100$ ）。在单个组件层面，我们采用改进的六次超椭圆方程来描述其形状；相比经典的超椭圆方程，此处引入了开方的操作，主要目的在于保证数值稳定性^[189]；本研究采用二维组件描述，具体如下：

$$\phi^i = 1 - \left(\left(\frac{x'}{L^i} \right)^6 + \left(\frac{y'}{f^i(x')} \right)^6 \right)^{\frac{1}{6}}, \quad (2.102)$$

其中

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta^i & \sin\theta^i \\ -\sin\theta^i & \cos\theta^i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0^i \\ y - y_0^i \end{pmatrix}, \quad (2.103)$$

$$f^i(x') = \frac{t_i^1 + t_i^2 - 2t_i^3}{2(L^i)^2} (x')^2 + \frac{t_i^2 - t_i^1}{2L^i} x' + t_i^3, \quad (2.104)$$

式中, x_0^i, y_0^i, θ^i 分别代表第 i 根组件的中心点坐标以及关于全局笛卡尔坐标系的旋转角, 如图 2.6 所示。

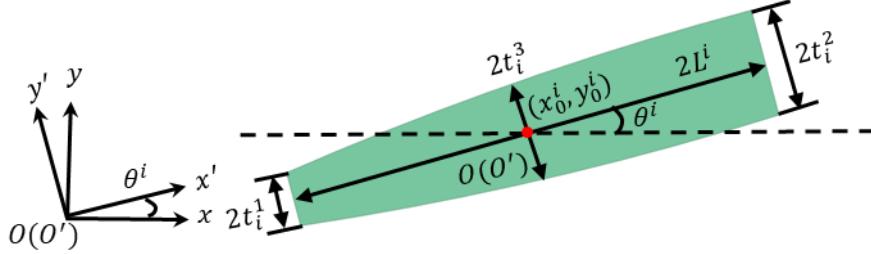


图 2.6 经典二维结构组件的几何描述

Fig. 2.6 Geometry description of a typical 2D structural component

第 i 根组件的设计变量向量表达为 $\mathbf{D}_i = (x_0^i, y_0^i, \theta^i, L^i, t_i^1, t_i^2, t_i^3)^\top$, 整体结构的设计变量向量则组装为 $\mathbf{D} = (\mathbf{D}_1^\top, \mathbf{D}_2^\top, \dots, \mathbf{D}_{nc}^\top)^\top$ 。偏导数 $\partial\phi^s(\mathbf{x}; d)/\partial d$ 可通过式(2.100 – 2.104)得到, 具体公式不再赘述。在前述拓扑描述函数基础上, 我们引入归一化的 Heaviside 函数 $H(\cdot)$ 描述材料分布 (函数 $H(\cdot)$ 的具体公式见方程(3.28))。由于本文聚焦于刚度优化, 此处以杨氏模量的属性分布为例可得

$$E(\mathbf{x}) = H(\phi^s(\mathbf{x}))E^s. \quad (2.105)$$

其中符号 E^s 代表实体材料的杨氏模量, $E(\mathbf{x})$ 代表点 \mathbf{x} 处的杨氏模量, 这样便建立了优化模型与材料分布的联系。

2.4 本章总结

本章分别介绍了共形参数化、壳体的力学模型和移动可变形组件法三方面的内容, 这些内容共同组成本文的研究基础。其中, 壳体的力学模型对应第三章和第四章优化列式中所描述的虚位移原理, 具体形式根据优化问题进行调整; 移动可变形组件法是核心的结构拓扑优化方法, 共形参数化则是将移动可变形组件法应用于复杂曲面的关键技术。

3 基于壳体模型的薄壁结构显式拓扑优化方法

3.1 引言

本章基于移动可变形组件法和共形参数化技术提出了一种面向复杂曲面薄壁结构的显式拓扑优化方法，采用壳体模型进行建模（和第五章的实体模型进行区分），优化问题聚焦为材料体积分数约束下的静柔度最小化问题（即刚度优化）。相比二维和三维空间中定义的拓扑优化问题，本研究的核心难点在于如何实现复杂曲面上的材料布局描述与对应的优化。为此，本章首先通过共形参数化技术、曲面切割操作和多面片拼接技术将平面域的拓扑描述函数推广至复杂曲面上；再根据壳体模型特性推导了优化列式的具体细节和解析灵敏度；其后介绍问题的具体数值实现并在有限元网格基础上推导了离散灵敏度的求解公式；最后以多个具有代表性的拓扑优化问题为例，验证了所提算法的有效性和处理具有复杂曲面特征的薄壁结构的能力。

3.2 复杂曲面的组件布局描述

在第二章理论基础部分，我们介绍了二维平面的移动可变形组件法。其中，显式几何参数控制的拓扑描述函数 $\phi^s(x)$ 被用来描述结构布局和材料分布。在推广至壳体模型时，最直接的难题在于如何将这样的显式描述应用于曲面上。为解决该问题，我们采用第二章中所提到的共形参数化技术，实现壳体模型材料分布的显式描述。

3.2.1 单连通零亏格开曲面的组件布局描述

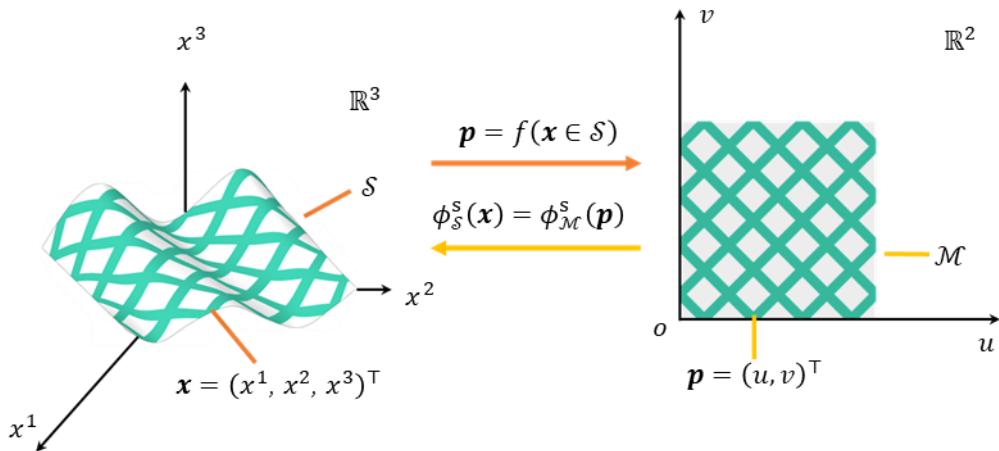


图 3.1 单连通零亏格开曲面的拓扑描述函数定义

Fig. 3.1 TDF definition on a simply-connected open surface with genus zero

首先讨论最简单的情况。当壳体模型的中面 \mathcal{S} 为单连通零亏格开曲面时，此时的处理方式最为直接。如图 3.1 所示，第一步采用前述章节的共形参数化技术构建共形映射 $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{M}$ ，其中 \mathcal{M} 为曲面 \mathcal{S} 对应的参数域。其次，我们根据章节 2.3 中的组件布局规则，在平面参数域中布置组件（设计变量向量为 \mathbf{D} ），形成拓扑描述函数 $\phi_{\mathcal{M}}^{\mathcal{S}}(\mathbf{p})$ ，其中 $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ ，这里函数 $\phi_{\mathcal{M}}^{\mathcal{S}}(\mathbf{p})$ 即为前文的 $\phi^{\mathcal{S}}(\mathbf{x})$ ，如图 3.1 右侧所示。根据双射关系，对于参数域内点 \mathbf{p} ，存在曲面上一点 $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ 与之对应，即 $\mathbf{x} = f^{-1}(\mathbf{p})$ 。借此，曲面上的拓扑描述函数定义为 $\phi_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) = \phi_{\mathcal{M}}^{\mathcal{S}}(\mathbf{p})$ ，如图 3.1 左侧所示。

3.2.2 基于曲面切割操作的组件布局描述

对于具有非零亏格的复杂流形曲面以及零亏格闭曲面（即球面），这些曲面与平面参数域之间不存在拓扑同胚关系，因此本工作引入曲面切割操作来获得中间曲面 \mathcal{S}^* （单连通零亏格开曲面），用来实现媒介传递作用。在该中间曲面上，我们可以定义拓扑描述函数 $\phi_{\mathcal{S}^*}^{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) = \phi_{\mathcal{M}}^{\mathcal{S}}(f^*(\mathbf{x}))$ ，其中 $f^*: \mathcal{S}^* \rightarrow \mathcal{M}$ 为采用共形参数化技术获得的共形映射， \mathcal{M} 为中间曲面对应的平面参数域。需要注意的是曲面切割操作仅修改点与点的连接关系，而不会变更点的具体坐标位置。下面以典型圆环曲面为例，详细介绍具体的操作细节。首先我们根据几何特征将环面裁剪为中间曲面（对于一般流形曲面，裁剪路径根据计算拓扑学算法^[190]确定），如图 3.2 所示。

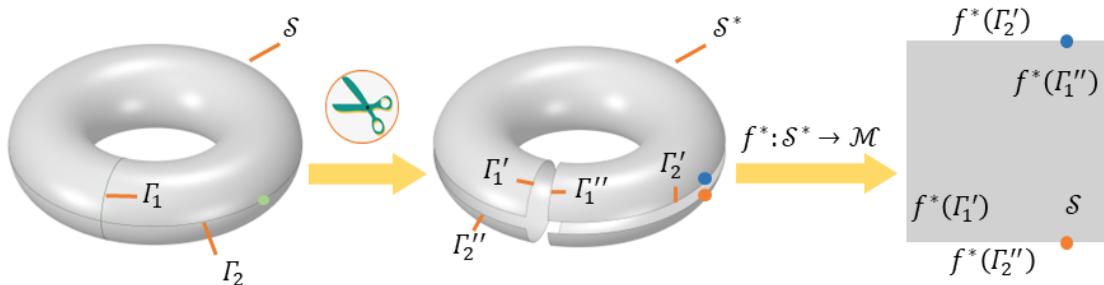


图 3.2 非零亏格曲面通过切割操作实现参数化过程

Fig. 3.2 Parameterization of a surface with non-zero genus via the cutting operation

考虑到在切割过程中出现的新的边界和顶点（如图 3.2 中曲线 Γ_1 和 Γ_2 在切割后派生为边界 Γ_1' 、 Γ_1'' 和 Γ_2' 、 Γ_2'' ），我们进一步采用凝聚的方式确保原始曲面上拓扑描述函数定义的规范性：

$$\phi_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \phi_{\mathcal{M}}^{\mathcal{S}}(f^*(\mathbf{x})), & \text{if } \mathbf{x} \in \mathcal{S} \setminus \Gamma_i, \\ \mathcal{KS}\left(\phi_{\mathcal{M}}^{\mathcal{S}}(f^*(\mathbf{x}')), \phi_{\mathcal{M}}^{\mathcal{S}}(f^*(\mathbf{x}''))\right), & \text{if } \mathbf{x} \in \Gamma_i, \mathbf{x}' \in \Gamma_i' \text{ and } \mathbf{x}'' \in \Gamma_i'' \end{cases} \quad (3.1)$$

式中 $f^*(\mathbf{x}')$ 和 $f^*(\mathbf{x}'')$ 分别代表 f^* 取在点 $\mathbf{x}' \in \Gamma_i'$ 和 $\mathbf{x}'' \in \Gamma_i''$ 处的值。最终材料分布如图 3.3 所示。

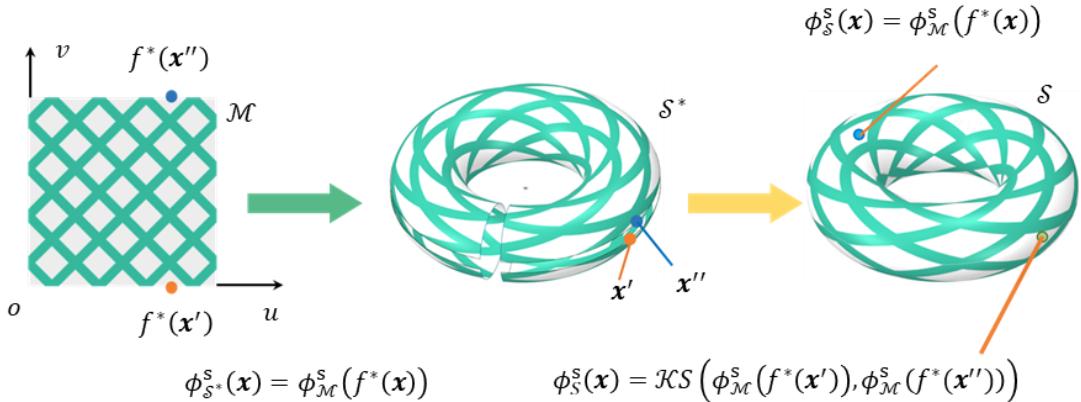


图 3.3 非零亏格曲面的拓扑描述函数定义

Fig. 3.3 TDF definition of a surface with non-zero genus

3.2.3 面向一般复杂曲面的组件布局描述

尽管上述操作原则上可处理任意复杂流形曲面，但其构造的全局映射函数通常会有刚性过大的问题，并且可能在形成曲面拓扑描述函数时诱导数值不稳定的现象。该问题可通过所谓的多面片拼接技术（multi-patch stitching scheme）解决。该技术可有效地降低曲面参数化的畸变量，并极大地提升组件几何描述的保真度，特别是当所设计的曲面具有较大局部曲率和非流形特征时。在该方法中，如图 3.4 所示，曲面 \mathcal{S} 首先被按照几何特征分解为 n_p 个面片的组合，从而降低原始曲面的复杂性，即 $\mathcal{S} = \bigcup_{k=1}^{n_p} \mathcal{P}_k$ ，且有 $\mathcal{P}_k \cap \mathcal{P}_l \neq \emptyset$, $k, l = 1, \dots, n_p$ 。在此处图片所示案例中， $n_p = 3$ 。

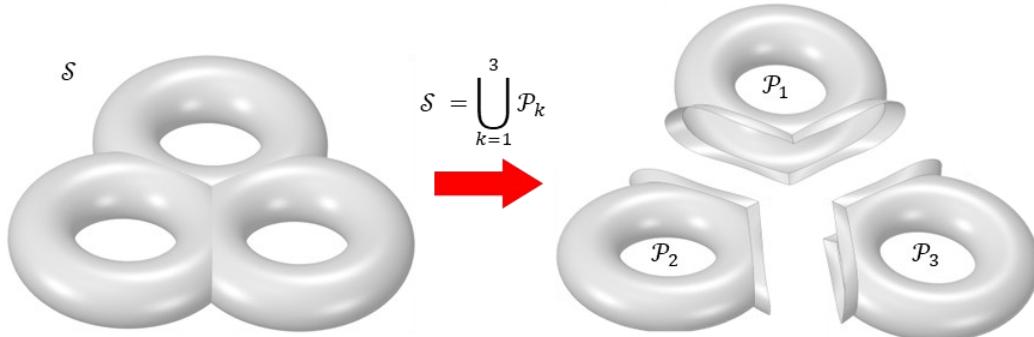


图 3.4 通过曲面分解的方式降低原始曲面的复杂性

Fig. 3.4 Reducing the complexity of the original surface through surface decomposition

对任一面片 \mathcal{P}_k , 我们采用前述方法计算获得其对应的拓扑描述函数 $\phi_{\mathcal{P}_k}^s(\mathbf{x})$ 。考虑到曲面片之间可能存在交集, 即 $\mathcal{P}_k \cap \mathcal{P}_l \neq \emptyset$, 这将导致相邻区域在边界处材料描述的歧义性问题。因此, 对于曲面 \mathcal{S} 的全局拓扑描述函数, 即 $\phi_{\mathcal{S}}^s = \phi_{\mathcal{S}}^s(\mathbf{x})$, 我们通过各面片组装的方式进行规范化的定义(参考图 3.5) :

$$\phi_{\mathcal{S}}^s(\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathcal{P}_i) = \begin{cases} \phi_{\mathcal{P}_i}^s(\mathbf{x}), & \text{if } \mathbf{x} \in \mathcal{P}_i \setminus \bigcup_{k=1, k \neq i}^{n_p} \mathcal{P}_k, \\ \mathcal{KS}\left(\phi_{\mathcal{P}_i}^s(\mathbf{x}), \dots, \phi_{\mathcal{P}_j}^s(\mathbf{x})\right), & \text{if } \mathbf{x} \in \mathcal{P}_i \cap \dots \cap \mathcal{P}_j. \end{cases} \quad (3.2)$$

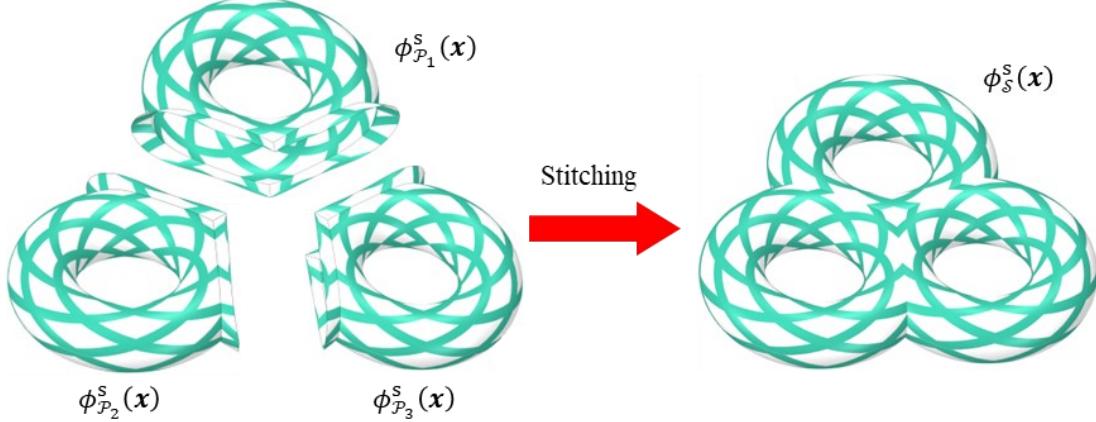


图 3.5 采用多面片拼接技术的复杂曲面拓扑描述函数构造

Fig. 3.5 TDF construction on a complex surface by the multi-patch stitching technique

3.3 优化列式与灵敏度分析

3.3.1 优化列式

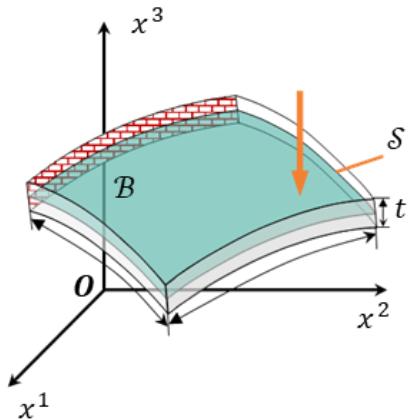


图 3.6 本工作采用中面模型对薄壁结构进行建模

Fig. 3.6 This work employs the mid-surface model to construct the thin-walled structure

如图 3.6 所示, 薄壁结构所占区域 \mathcal{B} 可按照中面 \mathcal{S} 和厚度方向进行分解, 即 $\mathcal{B} = \mathcal{S} \times \mathcal{W}$, 其中 $\mathcal{W} = [-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}]$ 为厚度坐标 ξ^3 取值区间, t 为厚度。在第 3.2 节中我们已经得到中面 \mathcal{S} 的拓扑描述函数 $\phi_{\mathcal{S}}^s(\mathbf{x})$, 进一步地薄壁结构中面的杨氏模量 $E(\mathbf{x})$ 可应用公式 (2.105) 确定为

$$E(\mathbf{x}) = H(\phi_{\mathcal{S}}^s(\mathbf{x})) E^s. \quad (3.3)$$

根据壳体模型的本构关系(2.88), 此处拓扑描述函数作用下的中面弹性张量为

$$\begin{cases} C_0^{\alpha\beta\gamma\mu}(\mathbf{x}) = \frac{E(\mathbf{x})}{2(1+\nu)} (a^{\alpha\gamma}a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu}a^{\beta\gamma} + \frac{2\nu}{1-\nu}a^{\alpha\beta}a^{\gamma\mu}) = H(\phi_{\mathcal{S}}^s(\mathbf{x}))C_0^{\alpha\beta\gamma\mu}, \\ D_0^{\alpha\gamma}(\mathbf{x}) = \frac{2E(\mathbf{x})}{1+\nu}a^{\alpha\gamma} = H(\phi_{\mathcal{S}}^s(\mathbf{x}))D_0^{\alpha\gamma}, \end{cases} \quad (3.4)$$

其中弹性张量 $C_0^{\alpha\beta\gamma\mu}$ 和 $D_0^{\alpha\gamma}$ 分别为实体材料对应的面内弹性张量和面外弹性张量, 通过方程(2.88)得到。由于在壳体模型中, 整体区域的本构张量通过中面本构进行替代, 因此我们已经得到薄壁结构整体的材料分布描述。

本研究求解的静柔度最小化、体积分数上限 \bar{V} 约束的、薄壁结构线弹性各向同性材料的最优分布问题的优化列式整理为:

$$\text{Find } \mathbf{D}, \mathbf{U}(\mathbf{x}; \mathbf{D}) \quad (3.5a)$$

$$\text{Minimize } C = C(\mathbf{U}(\mathbf{x}; \mathbf{D}), \mathbf{D}) = \int_{\mathcal{S}} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}(\mathbf{x}; \mathbf{D})) dldA \quad (3.5b)$$

S. t.

$$\int_{\mathcal{S}} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (H(\phi_{\mathcal{S}}^s(\mathbf{x}; \mathbf{D})) W_C(\mathbf{U}, \mathbf{V})) dldA = \int_{\mathcal{S}} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{V}) dldA, \quad \forall \mathbf{V} \in \mathcal{U}_{ad}, \quad (3.5c)$$

$$\int_{\mathcal{S}} t H(\phi_{\mathcal{S}}^s(\mathbf{x}; \mathbf{D})) dA \leq \bar{V} \int_{\mathcal{S}} t dA, \quad (3.5d)$$

$$\mathbf{U} \in \mathcal{U}, \mathbf{D} \in \mathcal{U}_D. \quad (3.5e)$$

式中真实位移 \mathbf{U} 属于预设的约束集 \mathcal{U} , 虚位移 \mathbf{V} 属于可行集 \mathcal{U}_{ad} , $\phi_{\mathcal{S}}^s(\mathbf{x}; \mathbf{D}) = \phi_{\mathcal{S}}^s(\mathbf{x})$ 即为前述的曲面拓扑描述函数, 需要注意的是此处设计变量 \mathbf{D} 和相关组件是在参数域中定义的。式(3.5c)代表壳体模型的虚位移原理: 厚壳模型对应问题(2.92), 薄壳模型对应问题(2.99)。另外, 我们采用 $W_C(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ 代表关于 \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 的能量泛函, 即广义应变能密度函数的二倍。对于厚壳结构有

$$W_C(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = C_0^{\alpha\beta\gamma\mu} (e_{\alpha\beta}(\mathbf{U}) + \xi^3 \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{U})) (e_{\gamma\mu}(\mathbf{V}) + \xi^3 \chi_{\gamma\mu}(\mathbf{V})) + \bar{\kappa} D_0^{\alpha\gamma} \zeta_{\alpha}(\mathbf{U}) \zeta_{\gamma}(\mathbf{V}). \quad (3.6a)$$

对于薄壳结构有

$$W_C(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = C_0^{\alpha\beta\gamma\mu} (e_{\alpha\beta}(\mathbf{U}) + \xi^3 \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{U})) (e_{\gamma\mu}(\mathbf{V}) + \xi^3 \chi_{\gamma\mu}(\mathbf{V})). \quad (3.6b)$$

在方程(3.6b)中, \mathbf{U} 代表薄壳模型的独立未知量, 即中面位移, \mathbf{V} 代表相应的虚位移。将 $W_c(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ 延厚度方向进行积分可得厚度能量泛函 $R_c(\mathbf{U}, \mathbf{V})$, 即

$$R_c(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (W_c(\mathbf{U}, \mathbf{V})) \mathrm{d}l, \quad (3.7)$$

将方程(3.6)带入上式并化简可得厚壳结构的厚度能量泛函为

$$R_c(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = t C_0^{\alpha\beta\gamma\mu} e_{\alpha\beta}(\mathbf{U}) e_{\gamma\mu}(\mathbf{V}) + \frac{t^3}{12} C_0^{\alpha\beta\gamma\mu} \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{U}) \chi_{\gamma\mu}(\mathbf{V}) + t \bar{\kappa} D_0^{\alpha\gamma} \zeta_\alpha(\mathbf{U}) \zeta_\gamma(\mathbf{V}), \quad (3.8a)$$

以及薄壳结构的厚度能量泛函为

$$R_c(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = t C_0^{\alpha\beta\gamma\mu} e_{\alpha\beta}(\mathbf{U}) e_{\gamma\mu}(\mathbf{V}) + \frac{t^3}{12} C_0^{\alpha\beta\gamma\mu} \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{U}) \chi_{\gamma\mu}(\mathbf{V}). \quad (3.8b)$$

由于柔度函数为

$$C = C(\mathbf{U}(\mathbf{D}), \mathbf{D}) = \int_S \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} H(\phi_s^s(x; \mathbf{D})) W_c(\mathbf{U}, \mathbf{U}) \mathrm{d}l \mathrm{d}A. \quad (3.9)$$

利用前述关于厚度能量泛函所推导的关系(材料分布与厚度方向积分可调换次序), 柔度函数简化为面积分

$$C = C(\mathbf{U}(\mathbf{D}), \mathbf{D}) = \int_S H(\phi_s^s(x; \mathbf{D})) R_c(\mathbf{U}, \mathbf{U}) \mathrm{d}A, \quad (3.10)$$

上述处理将积分域从实体转换为中面, 从而为后续灵敏度分析提供了较大的便利。

3.3.2 灵敏度分析

根据前述优化列式, 在基于壳体模型的薄壁结构拓扑优化中, 主要需考虑以下形式的目标/约束函数

$$I(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \int_S H(\phi_s^s(x; \mathbf{D})) R(\mathbf{U}, \mathbf{U}) \mathrm{d}A, \quad (3.11)$$

例如方程(3.10)和(3.5d)分别代表结构柔度和体积, 式中 $R = R(\mathbf{U}, \mathbf{U})$ 为关于真实位移 \mathbf{U} 的泛函。为简化推导过程, 采用任一元素 d 代替设计变量向量 \mathbf{D} , 那么函数 $I(\mathbf{U}, \mathbf{U})$ 关于扰动 δd 的变分为

$$\delta I(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \int_S \delta H(\phi_s^s(x; \delta d)) R(\mathbf{U}, \mathbf{U}) + H(\phi_s^s(x; d)) \delta R(\mathbf{U}, \mathbf{U}) \mathrm{d}A, \quad (3.12)$$

其中 $\delta R(\mathbf{U}, \mathbf{U})$ 代表泛函 $R(\mathbf{U}, \mathbf{U})$ 关于扰动 δd 的变分, 且有

$$\delta H(\phi_s^s(x; \delta d)) = \frac{\partial H(\phi_s^s(x; d))}{\partial \phi_s^s(x; d)} \delta \phi_s^s(x; \delta d). \quad (3.13)$$

符号 $\delta \phi_s^s(x; \delta d)$ 代表 $\phi_s^s = \phi_s^s(x; d)$ 关于扰动 δd 的变分。由于 $\mathcal{P} = \bigcup_{k=1}^{n_p} \mathcal{P}_k$, 我们有

$$\delta\phi_s^s(\mathbf{x}; \delta d) = \begin{cases} \left(\frac{\partial\phi_{\mathcal{P}_k}^s(\mathbf{x}; d)}{\partial d} \right) \delta d, & \text{if } \mathbf{x} \in \mathcal{P}_k \setminus \bigcup_{l=1, l \neq k}^{n_p} \mathcal{P}_l, \\ \left(\frac{\partial \mathcal{KS}(\phi_{\mathcal{P}_k}^s(\mathbf{x}; d), \dots, \phi_{\mathcal{P}_m}^s(\mathbf{x}; d), \dots)}{\partial d} \right) \delta d, & \text{if } \mathbf{x} \in \mathcal{P}_k \cap \dots \cap \mathcal{P}_m, \end{cases} \quad (3.14)$$

其中 $\phi_{\mathcal{P}_k}^s(\mathbf{x}; d) = \phi_{\mathcal{M}}^s(\mathbf{p}; d)$, \mathbf{p} 为参数域中与 \mathbf{x} 对应的点, 通过求解共形映射得到。因此 $\partial\phi_{\mathcal{P}_k}^s(\mathbf{x}; d)/\partial d = \partial\phi_{\mathcal{M}}^s(\mathbf{p}; d)/\partial d$, 并且计算方法和二维移动可变形组件法一致, 通过式 (2.100 – 2.104) 得到。得益于 3.2 章节的定义, 此处薄壁结构显式拓扑优化问题的灵敏度分析并不会引入共形映射的导数而增加求解难度。

下面对于求解问题中涉及的具体响应函数进行灵敏度分析。首先考虑体积分数约束 I_V , 根据方程(3.5d)我们有

$$I_V = \frac{\int_S H(\phi_s^s(\mathbf{x}; d)) dA}{\int_S dA}, \quad (3.15)$$

其中分母 $\int_S dA$ 为常数, 代表薄壁结构中曲面的面积。体积分数约束关于设计变量 d 的灵敏度为

$$\frac{\partial I_V}{\partial d} = \frac{\int_S \frac{\partial H(\phi_s^s(\mathbf{x}; d))}{\partial \phi_s^s(\mathbf{x}; d)} \frac{\partial \phi_s^s(\mathbf{x}; d)}{\partial d} dA}{\int_S dA}, \quad (3.16)$$

其中偏导数 $\frac{\partial H(\phi_s^s(\mathbf{x}; d))}{\partial \phi_s^s(\mathbf{x}; d)}$ 由具体采用的 Heaviside 函数决定, $\frac{\partial \phi_s^s(\mathbf{x}; d)}{\partial d}$ 由 $\delta\phi_s^s(\mathbf{x}; \delta d)$ 决定, 即方程(3.14)。对于柔度函数 C , 我们首先对于方程(3.5c)两侧取变分, 并利用厚度能量泛函简化可得

$$\int_S (\delta H(\phi_s^s(\mathbf{x}; \delta d)) R_C(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + H(\phi_s^s(\mathbf{x}; d)) \delta R_C(\mathbf{U}, \mathbf{V})) dA = \int_S \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{V}) dl dA. \quad (3.17)$$

其中 $\delta R_C(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ 根据式(2.65) – (2.67) 以及(3.8) 可得

$$\delta R_C(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = R_C(\delta \mathbf{U}, \mathbf{V}) + R_C(\mathbf{U}, \delta \mathbf{V}). \quad (3.18)$$

柔度函数关于扰动 δd 的变分为

$$\delta C = \int_S \delta H(\phi_s^s(\mathbf{x}; \delta d)) R_C(\mathbf{U}, \mathbf{U}) + H(\phi_s^s(\mathbf{x}; d)) \delta R_C(\mathbf{U}, \mathbf{U}) dA, \quad (3.19)$$

根据对称性有

$$\delta R_C(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = 2R_C(\delta \mathbf{U}, \mathbf{U}) = 2R_C(\mathbf{U}, \delta \mathbf{U}). \quad (3.20)$$

因此

$$\delta C = \int_S (\delta H(\phi_s^s(\mathbf{x}; \delta d)) R_C(\mathbf{U}, \mathbf{U}) + 2H(\phi_s^s(\mathbf{x}; d)) R_C(\delta \mathbf{U}, \mathbf{U})) dA. \quad (3.21)$$

根据 $\delta\mathbf{V}$ 的任意性，将其带入方程(3.5c)并利用厚度能量泛函简化可得

$$\int_S \left(H(\phi_s^s(x; d)) R_C(\mathbf{U}, \delta\mathbf{V}) \right) dA = \int_S \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{V}) dl dA. \quad (3.22)$$

根据(3.17) – (3.18)和(3.22)可得

$$\int_S \left(\delta H(\phi_s^s(x; \delta d)) R_C(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + H(\phi_s^s(x; d)) R_C(\delta\mathbf{U}, \mathbf{V}) \right) dA = 0, \quad (3.23)$$

即

$$\int_S \left(H(\phi_s^s(x; d)) R_C(\delta\mathbf{U}, \mathbf{V}) \right) dA = - \int_S \left(\delta H(\phi_s^s(x; \delta d)) R_C(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \right) dA. \quad (3.24)$$

利用上式，变分(3.21)可简化为

$$\delta C = - \int_S \delta H(\phi_s^s(x; \delta d)) R_C(\mathbf{U}, \mathbf{U}). \quad (3.25)$$

进一步地

$$\frac{\partial C}{\partial d} = - \int_S \frac{\partial H(\phi_s^s(x; d))}{\partial \phi_s^s(x; d)} \frac{\partial \phi_s^s(x; d)}{\partial d} R_C(\mathbf{U}, \mathbf{U}). \quad (3.26)$$

至此，体积分数灵敏度和柔度灵敏度均已推导简化至可计算的程度，需要注意的是这里并未区分厚壳模型还是薄壳模型。也就是说，在厚壳与薄壳模型实际拓扑优化问题求解中，推导所得的响应灵敏度具有相同的结构。下面具体介绍所提方法的数值实现技术。

3.4 数值实现与算法流程

3.4.1 数值实现

为了能够对具有复杂曲面特征的薄壁结构进行建模，本研究采用灵活的三角形非结构化网格来进行有限元离散，采用商业软件 Abaqus 中的 S3 单元（同时具备处理薄壳和厚壳的能力）进行结构响应的模拟。需要注意的是 S3 单元是一种根据厚度调整的自适应通用壳单元，根据实际应用范围来决定壳体模型，其中厚壳模型对应问题(2.92)，薄壳模型对应问题(2.99)。特别地，该单元对于薄壳情况采用 DKC (Discrete Kirchhoff Constraint^[191]) 技术，有效地解决了传统 Kirchhoff 单元的收敛性问题。由于本文仅考虑线弹性薄壁结构的静力学响应问题，此范围内该单元的精度是被广泛认可的。

考虑到计算效率，此处采用人工材料模型来计算单元的物理属性。对于第 e 号单元，其等效杨氏模量 E_e 可根据实体材料的杨氏模量 E^s 计算为

$$E_e = \frac{\sum_{i=1}^3 H_{\alpha, e}((\phi_\Delta^s)_{e,i})}{3} E^s, \quad (3.27)$$

式中

$$H_{\alpha,\epsilon}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x > \epsilon, \\ \frac{3(1-\alpha)}{4} \left(\frac{x}{\epsilon} - \frac{x^3}{3\epsilon^3} \right) + \frac{1+\epsilon}{2}, & \text{if } |x| \leq \epsilon, \\ \alpha, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (3.28)$$

代表规范化的 Heaviside 函数（在本工作中， $\epsilon = 0.1$ 且 $\alpha = 10^{-3}$ ）。另外， $(\phi_\Delta^s)_{e,i}$ 代表拓扑描述函数 $\phi_\Delta^s(\mathbf{x})$ 离散后取在第 e 号单元的第 i 号节点的值。

3.4.2 离散灵敏度求解

由于本文采用有限元法进行结构分析，有关响应函数的灵敏度可按离散形式进行计算。以柔度函数为例（其他响应函数类似），方程(3.10)可离散为

$$C = \sum_{e=1}^{ne} C_e = \sum_{e=1}^{ne} \sum_{i=1}^3 H_{\alpha,\epsilon}((\phi_\Delta^s)_{e,i}) \frac{C_e^0}{3}, \quad (3.29)$$

式中 ne 代表单元个数， C_e 代表单元应变能， C_e^0 代表按照能量泛函 R_C 直接计算的虚拟应变能。根据方程(3.26)，柔度灵敏度可离散为

$$\frac{\partial C}{\partial d} = \sum_{e=1}^{ne} \frac{\partial C_e}{\partial d}, \quad (3.30)$$

其中

$$\frac{\partial C_e}{\partial d} = - \frac{3C_e}{\sum_{i=1}^3 H_{\alpha,\epsilon}((\phi_\Delta^s)_{e,i})} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial H_{\alpha,\epsilon}((\phi_\Delta^s)_{e,i})}{\partial d}. \quad (3.31)$$

这里单元应变能通过提取结构响应分析结果得到，偏导数 $\frac{\partial H_{\alpha,\epsilon}((\phi_\Delta^s)_{e,i})}{\partial d}$ 通过(3.14)和(3.28)计算得到。可以看出，此处提供的灵敏度计算方法对于厚壳模型和薄壳模型均可适用。

3.4.3 算法流程

最后，基于移动可变形组件法和壳体模型的薄壁结构显式拓扑优化算法流程总结为：
(曲面前处理)

- 1、对于给定的待设计的薄壁结构（其几何信息可通过 CAD 模型获得，或者可直接通过三维扫描获得），基于中曲面 \mathcal{S} 得到三角网格模型 \mathcal{S}_Δ ；
- 2、将曲面网格 \mathcal{S}_Δ 根据几何特征划分为多个曲面片 \mathcal{P}_k , $k = 1, \dots, n_p$ ，使得 $\mathcal{S} = \bigcup_{k=1}^{n_p} \mathcal{P}_k$ ；
- 3、对每个面片 \mathcal{P}_k 定义其切割线 Γ_k ，获得中间曲面 \mathcal{P}_k^* （单连通零亏格开曲面）。
- 4、从 $k = 1$ 到 n_p 循环中间曲面片 \mathcal{P}_k^* ，采用共形参数化技术对每个面片进行参数化，从而获得共形映射 $f_k: \mathcal{P}_k^* \rightarrow \mathcal{M}_k$ 。

(曲面显式拓扑优化)

- 5、从 $k = 1$ 到 n_p 循环参数域 \mathcal{M}_k , 在参数域中放置组件;
- 6、在各参数域中循环组件, 计算参数域的拓扑描述函数 $\phi_{\mathcal{M}_k}^s(\mathbf{p})$, 基于逆映射关系, 得到曲面片对应的拓扑描述函数 $\phi_{p_k}^s(\mathbf{x})$;
- 7、将不同曲面片组装, 得到原始曲面拓扑描述函数 $\phi_s^s(\mathbf{x})$ 和材料分布;
- 8、计算结构响应与灵敏度并提交至优化求解器中, 获得更新的设计变量;
- 9、根据预设条件判断是否收敛, 若未收敛则转至第 5 步; 若收敛则结束迭代历程, 保存优化信息。

3.5 算例验证

本节基于前述章节中所提供的结构优化算法, 进行了一系列的数值实验, 从而验证所提算法的有效性并展示应用于具体工程结构中的能力。复杂曲面几何采用三角网格表达 (同样用来进行有限元分析)。为不失一般性, 所有相关的几何尺寸与物理参数都进行了无量纲化处理。若没有特殊说明, 薄壁结构厚度设为 1, 弹性模量与泊松比分别设置为 1 和 0.3, 体积分数上限设置为 0.4。优化求解器采用移动渐近线法。相邻迭代步的设计变量相对改变量小于预设值的 0.1% 时或者迭代到达给定步数时, 中止优化进程。

3.5.1 鞍面算例

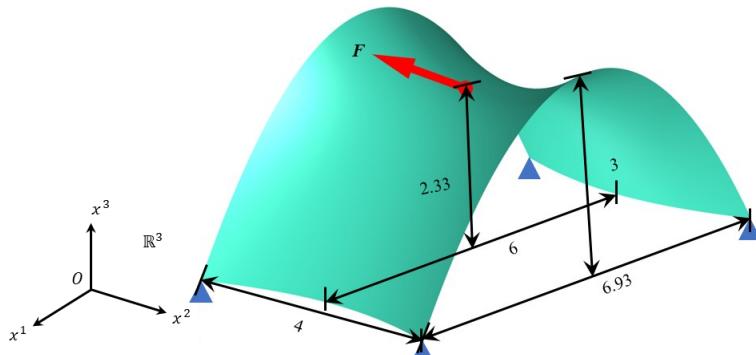


图 3.7 鞍面薄壁结构算例的问题设置

Fig. 3.7 Problem setting of the saddle thin-walled structure example

在该算例中, 我们考虑一个具有鞍面形状中曲面的薄壁结构拓扑优化问题, 其几何与边界条件如图 3.7 所示。其中, 设计域被离散成包含 29216 个三角单元和 14868 个节点的网格模型。该鞍面结构在鞍点处受水平方向的集中力, 而四个角点处固支。尽管该问题是对称的, 但为了测试所提方法的稳健性, 该算例仍然对整体结构进行优化, 并且不做任何对称性处理。

从拓扑性质来说，鞍面是零亏格的单连通开曲面，因此可以直接映射至平面，如图 3.8 所示，相应的映射函数与参数域直接通过共形参数化技术获得。材料初始布局如图 3.9 所示，总共包括 16 个组件，设计变量个数总计 $7 \times 16 = 112$ 。图 3.9 右图则展示了通过逆映射得到的物理空间中的材料布局。

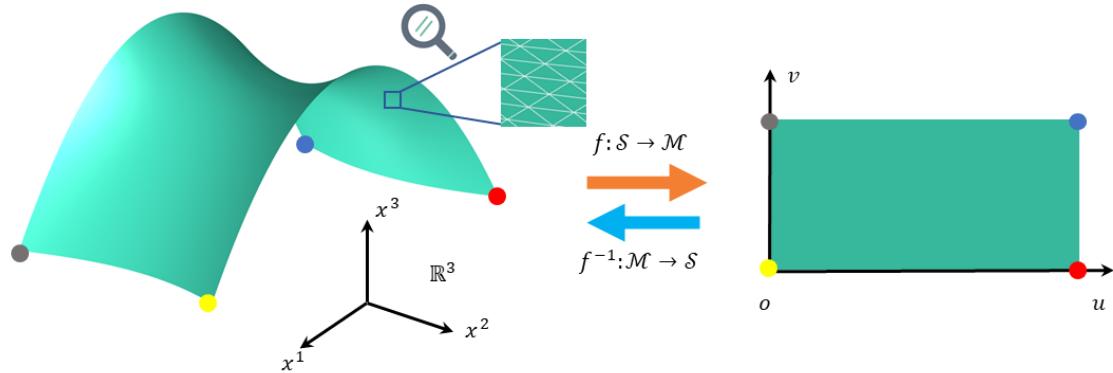


图 3.8 通过共形映射技术对鞍面薄壁结构中面进行参数化

Fig. 3.8 Parameterization of the middle surface of the saddle thin-walled structure by the conformal parameterization technique

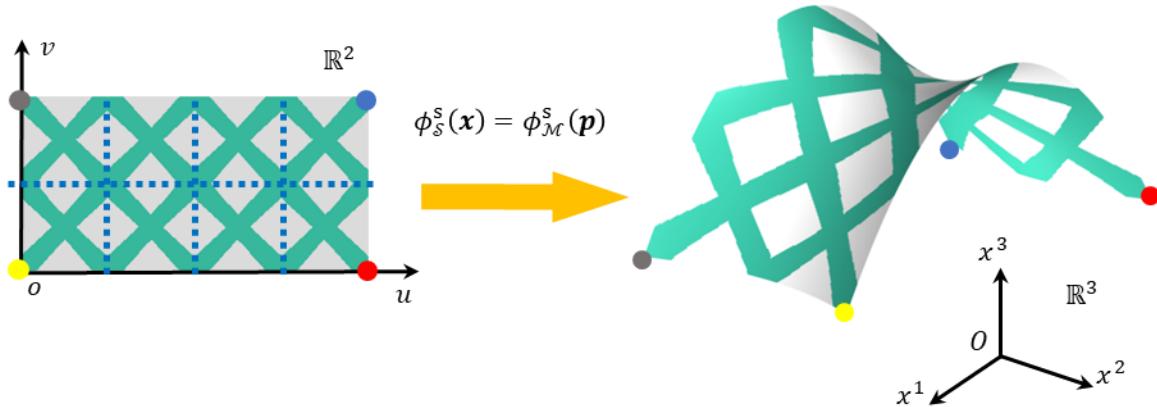


图 3.9 鞍面薄壁结构算例的初始组件布局

Fig. 3.9 Initial component layout of the saddle thin-walled structure example

优化迭代历史如图 3.10 所示，从中可以看出结构柔度函数在前 5 步中快速下降，而在后续步骤中逐渐降低并于第 120 步时收敛至 $C^{\text{opt}} = 22.56$ 。图 3.10 同样展示了中间优化结果：随着优化迭代的进行，组件逐渐在加载点与结构固支边界之间形成传力路径。另外，在 80 步左右的结构已经接近最终设计。

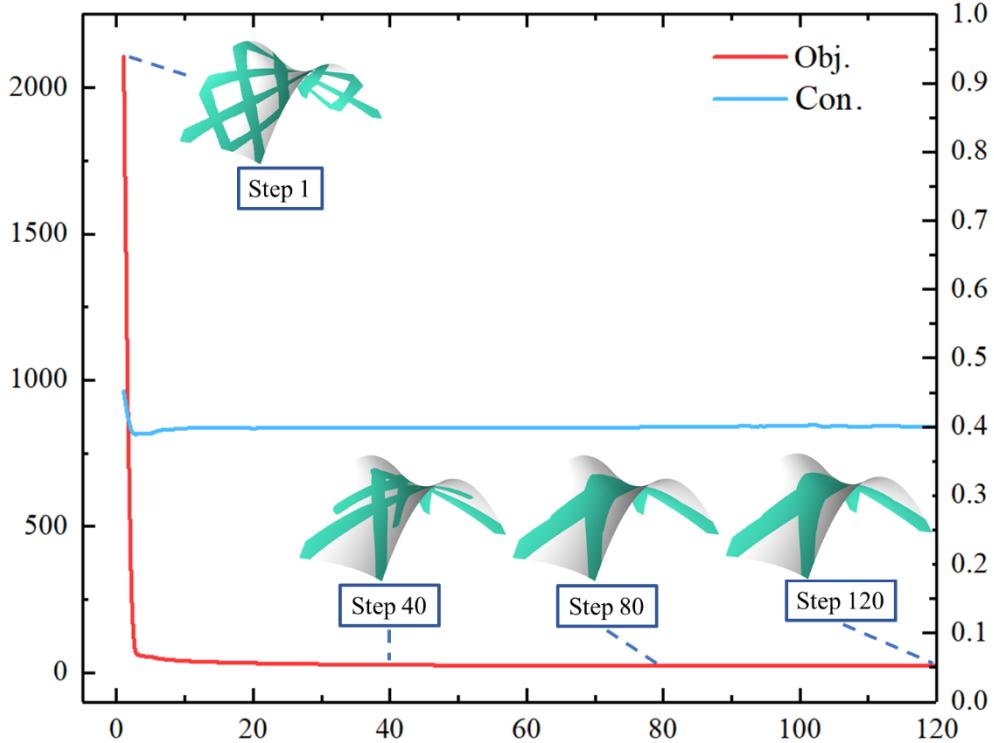


图 3.10 鞍面薄壁结构算例的迭代历程

Fig. 3.10 Iteration history of the saddle thin-walled structure example

最终设计如图 3.11 所示，可以看出相应的组件在薄壁结构中曲面上形成了清晰的载荷传递路径。虽然本算例没有对优化问题施加对称约束，但优化后的结构仍然保持了较好的对称性。在该问题中，由于集中力（即鞍点）附近的应力较高，组件在优化驱动下在该区域形成椭圆，这有效地抑制了应力集中现象。



图 3.11 鞍面算例优化结构

Fig. 3.11 Optimized structures of the saddle example

3.5.2 环面算例

该算例主要通过环面薄壁结构的拓扑设计，证明所提算法处理非零亏格曲面的能力，以及与三维扫描技术无缝衔接的潜力。问题设置如图 3.12 所示，其中薄壁结构内环固

定，外环的四个点施加四个旋转对称的切向力（幅值为 100）。现代三维扫描技术可以高效地生成高精度离散点云，并以标准的 PLY (Polygon) 格式^[192]导出表达曲面几何形状的相应数据^[192]。本算法则可以直接利用 PLY 数据，通过顶点和面片信息生成几何描述和有限元分析所需的三角网格，而无需进一步的后处理步骤。如图 3.12 所示，三维扫描生成的离散几何模型中，包含 31840 个顶点和 63680 个三角面片。

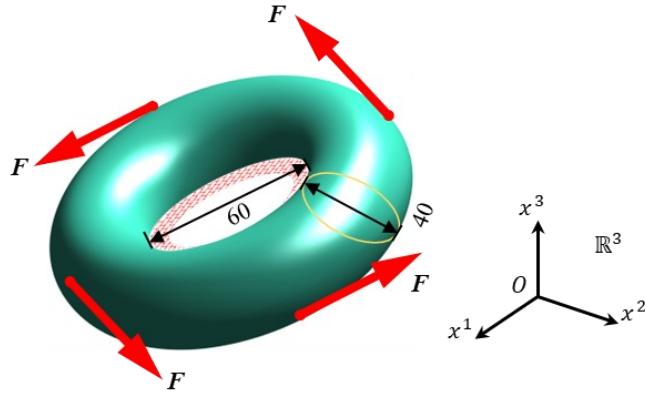


图 3.12 环面薄壁结构问题设置

Fig. 3.12 Problem settings of the torus thin-walled structure

由于环面的亏格非零，因此它不能直接被共形映射至单个平面矩形域中。在这种情况下，如图 3.13 所示，我们首先沿着两个相交的圆形路径切割环面，然后将切割操作得到的中间曲面映射到一个矩形上。

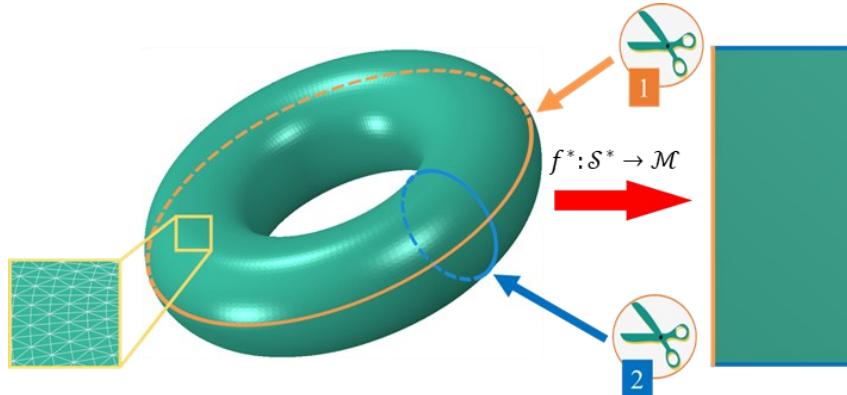


图 3.13 通过切割操作实现环面参数化

Fig. 3.13 Torus surface parameterization via the cutting operation

在建立了中间曲面与平面矩形之间映射关系后，我们对薄壁结构进行了拓扑优化。图 3.14 展示了初始材料布局，包括 64 个组件，分别分布在矩形域和环面上。

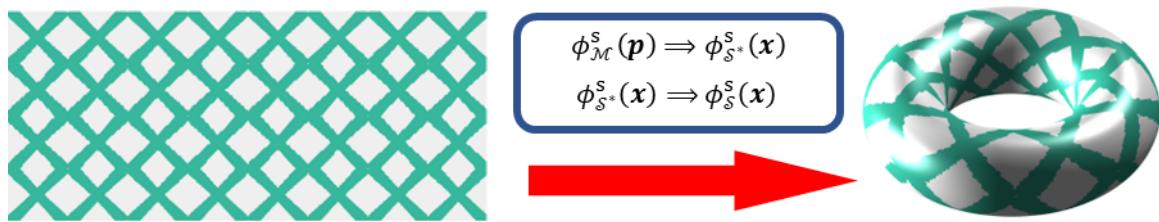


图 3.14 环面算例的组件初始布局

Fig. 3.14 Initial component layouts of the torus-shaped example

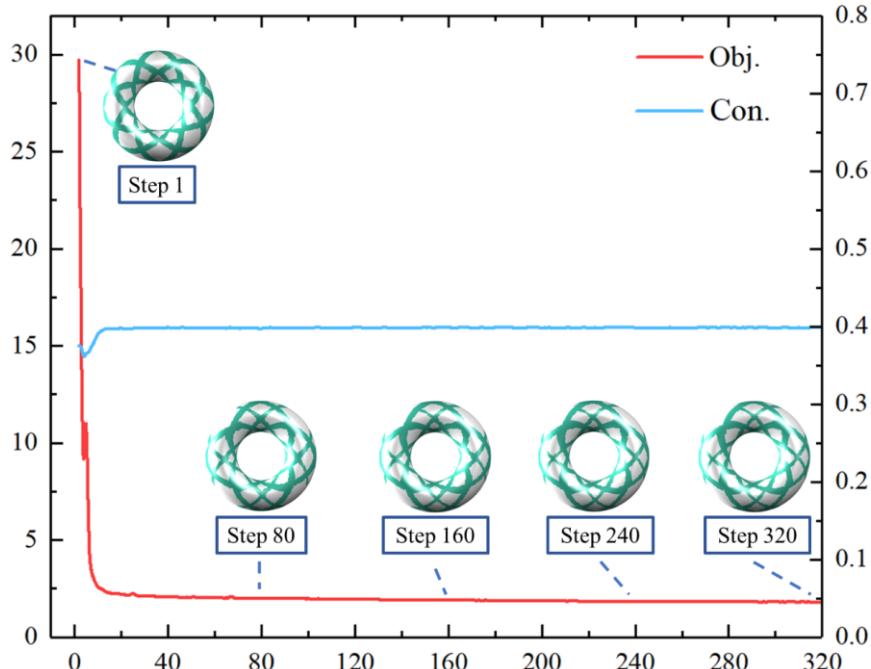


图 3.15 环面算例的迭代历程

Fig. 3.15 The iteration history of the torus surface example



图 3.16 环面算例的设计结果

Fig. 3.16 The optimized design of the tour surface example

迭代历史和最终设计分别如图 3.15 和图 3.16 所示。在经过 80 步迭代后，优化进程得到了一个稳定的结构拓扑，而后续步骤仅仅是微小的调整。在优化设计中，组件在环面上形成格栅状结构，这对于提升整体设计的抗扭转变形十分有效。在经过 320 步后，我们得到了设计结果，其结构柔度函数为 $C^{\text{opt}} = 1.80$ 。从图中可以看出，随着优化算法的驱动，即使没有引入特殊的约束条件，组件也会自动沿着切割边界平滑连接。

3.5.3 莫比乌斯面算例

莫比乌斯面 (Möbius surface) 是几何中非定向曲面的一个著名案例，其单侧曲面的属性长期以来吸引着几何^[193]、物理^[194]和化学^[195]等领域的科研工作者的研究兴趣。此数值实验旨在通过莫比乌斯面，说明多面片拼接技术的灵活性以及本工作所提算法对于复杂曲面的适用性。曲面几何通过下列方程显式描述

$$\begin{cases} x^1 = -\left(3 + u \cos\left(\frac{v}{2}\right)\right) \cos(v), \\ x^2 = \left(3 + u \cos\left(\frac{v}{2}\right)\right) \sin(v), \\ x^3 = u \sin(v), \end{cases} \quad (3.32)$$

其中， $u \in [-2, 2]$ 并且 $v \in [0, 2\pi]$ ，具体几何图形如图 3.17 所示。另外，点 P_1 和 P_2 坐标为 $(3, 0, 0)$ 和 $(-5, 0, 0)$ ，分别受切向集中力 $(0, -10000, 0)$ 和 $(0, 0, 10000)$ 。点 P_{3-6} 均受固定端约束，坐标分别为 $(0.514, 4.294, 1.496)$, $(0.518, 1.730, -1.604)$, $(0.556, -1.734, 1.615)$ 以及 $(0.514, -4.295, -1.496)$ 。该薄壁结构的厚度设置为 0.4，体积分数上限为 0.4，杨氏模量和泊松比分别设置为 210000 和 0.3。

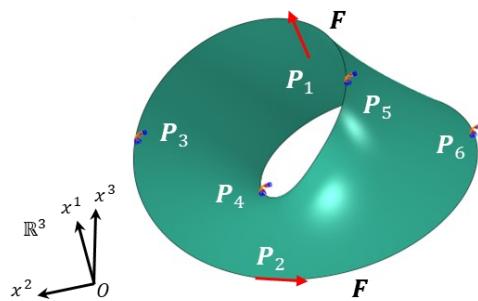


图 3.17 莫比乌斯面算例的边界条件

Fig. 3.17 Boundary conditions of the Möbius surface example

由于莫比乌斯面不属于黎曼面，我们无法直接进行映射得到其参数域。因此，如图 3.18 左侧所示，我们首先根据几何特征对原始曲面进行分割，形成两个曲面片，再对两

个曲面片进行映射与组件布局（两个面片均按照 6×3 的单胞进行布局，整体结构共采用 72 个组件，504 个设计变量），最终形成如图 3.18 所示的初始设计。需要注意的是初始设计由两个独立面片粘接得到，面片连接处会有组件不匹配的缝隙，该缺陷会在后续优化中逐步得到改善。

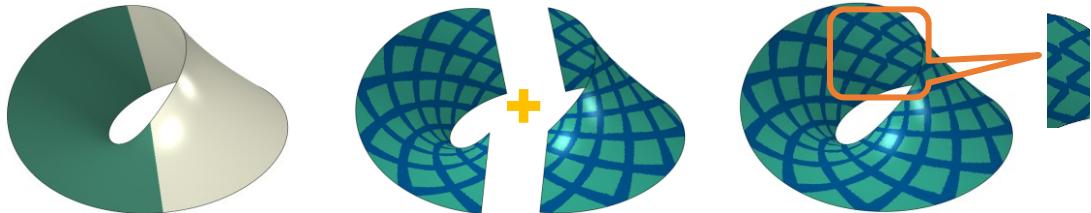


图 3.18 采用多面片拼接技术的莫比乌斯曲面拓扑描述函数构造

Fig. 3.18 Construction of the TDF function of the Möbius surface using the multi-patch stitching scheme

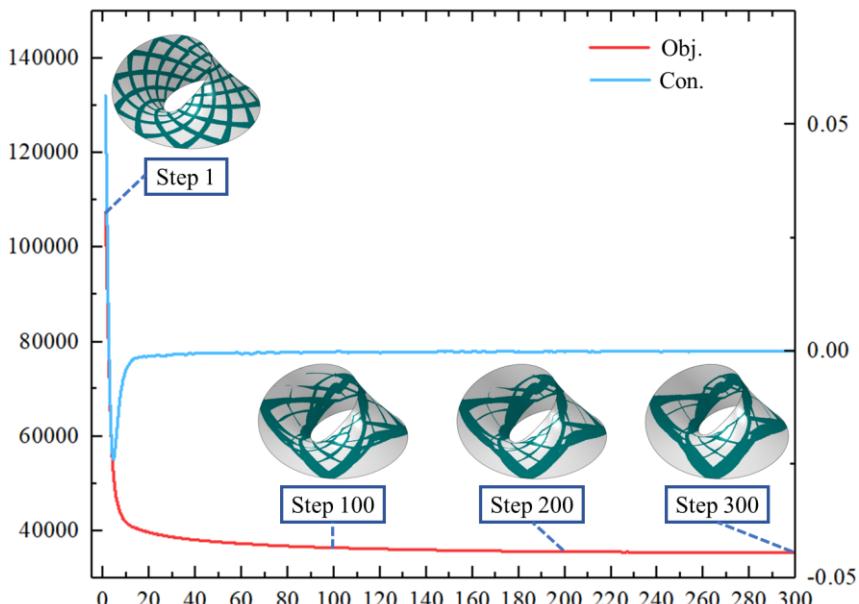


图 3.19 莫比乌斯面算例的迭代历程

Fig. 3.19 Iteration history of the Möbius surface example

迭代历程如图 3.19 所示（设置迭代步数为 300 步），包括目标函数（红色曲线）和约束函数（蓝色曲线）的迭代历史，并且在不同步骤给出了相应的优化结构。在初始设计时，目标函数值较高、结构性能较差，这是初始构型没有经过加载点和固定端导致的。随着优化过程的进行，目标函数快速下降，结构性能得到迅速改善。在到达约 20 步左右，目标函数下降速度逐渐减缓，并趋于稳定，最终收敛。在第 100 步，结构已经接

近最终设计，后续的优化效果逐渐变弱，主要集中于细节的调整。另外，虽然约束函数在初始设计中并未能够满足预设要求，但在后续迭代历程中（如第 20 步及以后）以及最终优化完成时接近于零，说明对应的设计满足约束条件。上述数值现象表明所采用的优化算法具有较强的收敛性以及较高的优化效率。

最终设计如图 3.20 所示，从中我们可以发现优化得到的设计结果比较复杂但边界清晰光滑。通过连接各加载点与固定端，最终设计形成外轮廓与主传力路径。一些细小组件连接在这些主传力路径间，从而进一步提高整体结构的刚度与性能。两个加载点处的局部子结构具有明显的差异：点 P_1 处于四个固定端约束的中心位置，因此设计结果中该点处于多条组件的交汇处；另一方面，点 P_2 处仅存在一个切线方向，并且几何局部类似平板，因此此处受力情况与二维平面应力问题的短梁算例接近，最终结果也具有相似性。在柔度的驱动下，前文所提的初始设计中的结构连接性问题在最终设计中也得到了很好的解决，这也表明前文关于薄壁结构的材料布局定义对于稳定优化过程和保证各面片间组件的平稳过渡都是非常有效的。最后，虽然本算例并未施加任何的对称操作，整体设计呈现一定程度的旋转对称性，这也进一步验证了所提算法的稳定性。

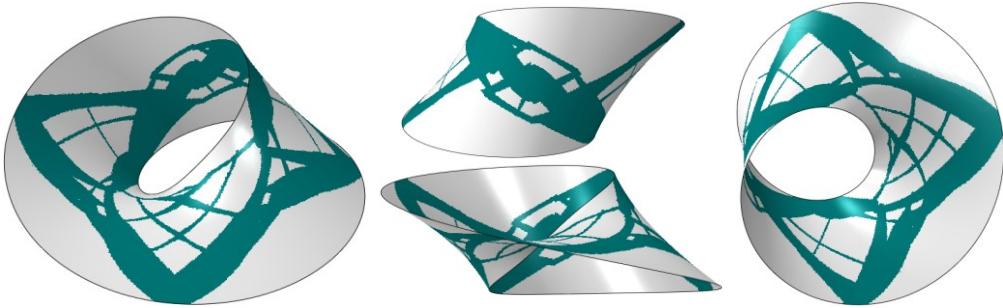


图 3.20 莫比乌斯面算例最终设计

Fig. 3.20 Final design of the Möbius surface example

3.5.4 三通管道算例

此处我们采用工程中常见的复杂三通管道结构来进行拓扑优化，其几何形状、外载荷和边界条件如图 3.21 所示。需要注意的是，该模型不仅具有复杂的拓扑结构，而且各个分支管道也具有不同形状的非均匀截面。

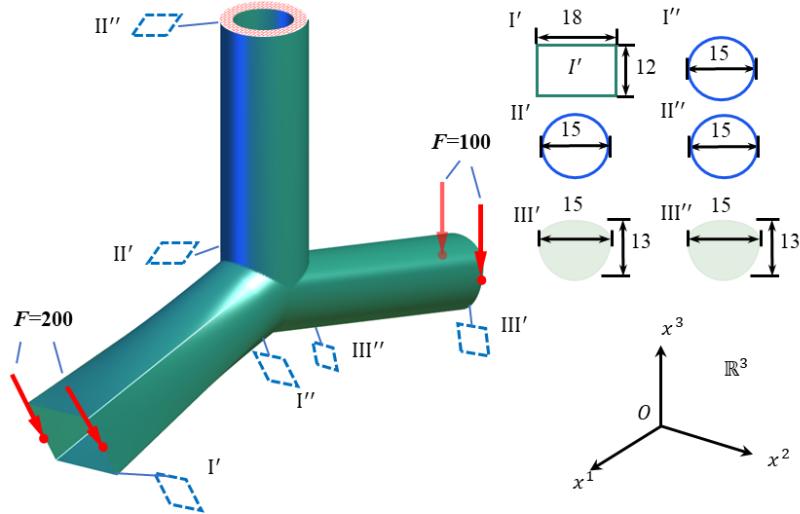


图 3.21 三通管道算例几何尺寸与边界条件

Fig. 3.21 Geometric sizes and boundary conditions of the tee-branch pipe example

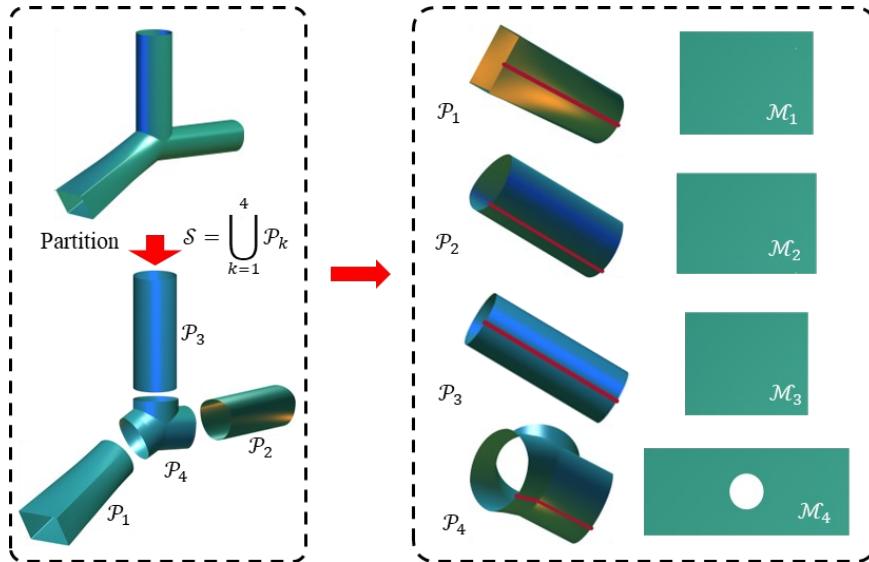


图 3.22 三通管道算例几何处理

Fig. 3.22 Geometric processing of the tee-branch pipe example

实际上，该结构可以直接采用切割操作，并进一步建立全局共形映射，但该模型的拓扑复杂性将不可避免地导致曲面结构组件的过度扭曲。因此，根据此三通管道结构的几何特征，我们首先如图 3.22 左图所示将其划分为的四个曲面片（包括三个分支面片和一个接头面片），然后采用曲面切割操作对每个面片进行相应的处理，最后采用共形参数化技术建立各面片的共形参数化。

对于各分支面片，其拓扑等价于圆柱面，因此在沿着母线方向切割后可直接映射到矩形域。然而对于接头面片，在沿着选定的线切割后其内部仍然存在孔洞，即形成了多连通域，因此仍然无法与矩形平面建立拓扑同胚关系，如图 3.22 右侧所示。为解决该问题，一种方法是再做一个切口，把曲面片转化为一个单连通的开曲面。而在这里，我们采用另一种方法来解决这个问题，首先通过 Delaunay 三角化(Delaunay triangularization)将接头面片中的“孔洞”填充^[196,197]，使其在拓扑上等同于矩形，再建立共形映射关系，最后删除矩形中“孔洞”对应的三角形网格，如图 3.23 所示。

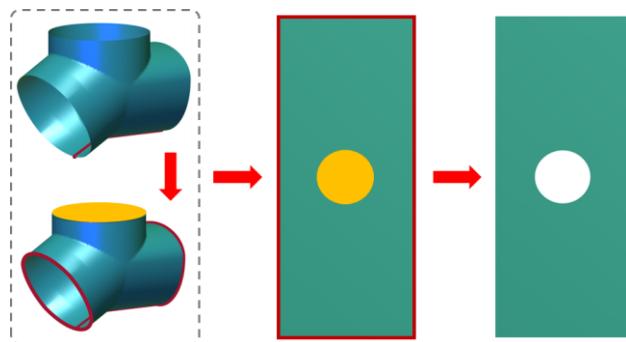


图 3.23 接头曲面片的几何处理

Fig. 3.23 Geometric processing of the joint surface patch

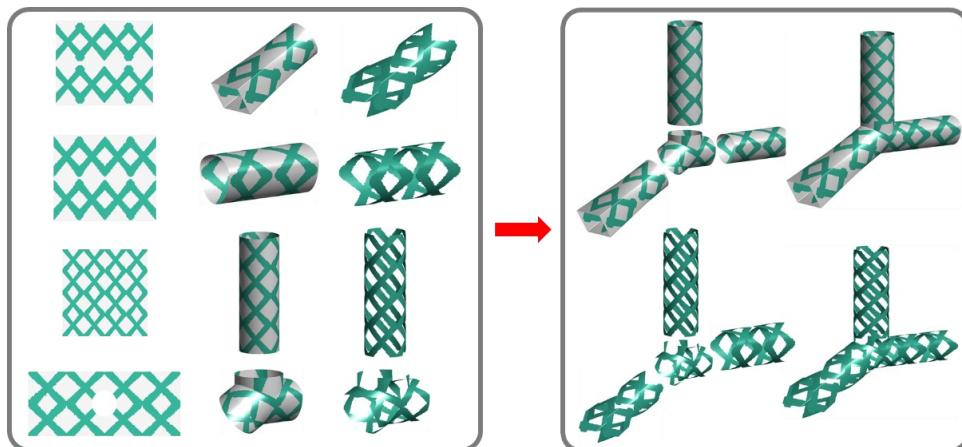


图 3.24 三通管道算例初始组件布局

Fig. 3.24 Initial component layout of the tee-branch pipe example

在完成各曲面片的共形参数化后，我们进一步采用全局拓扑描述函数来表征整体结构的材料分布。图 3.24 展示了初始组件布局和不同面片组装组件的过程。

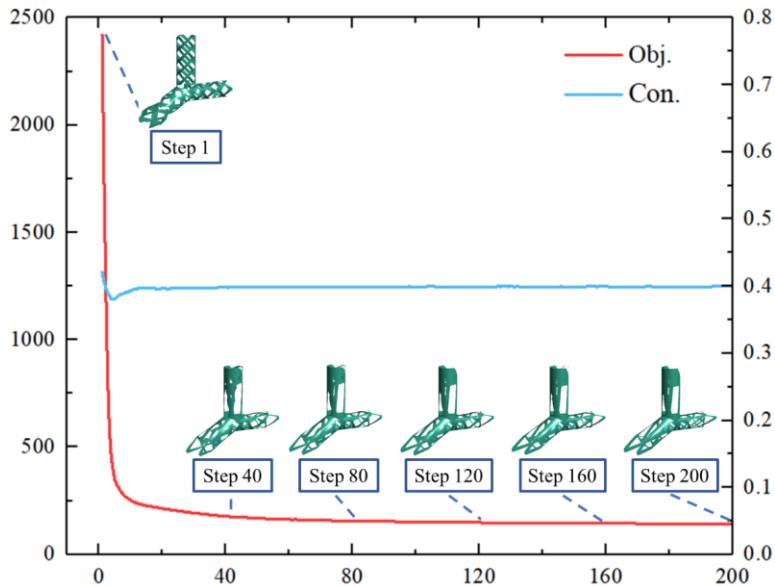


图 3.25 三通管道算例迭代历程

Fig. 3.25 Iteration history of the tee-branch pipe example



图 3.26 三通管道算例最终设计

Fig. 3.26 Final design of the tee-branch pipe example

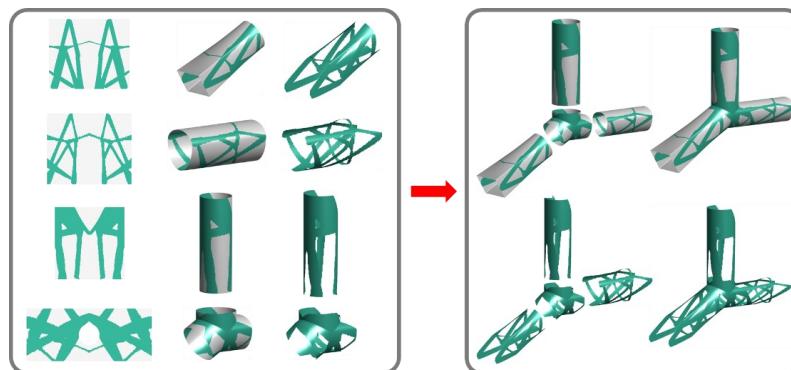


图 3.27 不同曲面片上组件的最终布局

Fig. 3.27 Final component layouts on different surface patches

优化过程的迭代历史如图 3.25 所示，在经过 200 步后优化设计收敛。图 3.26 展示了最终优化设计结果 ($C^{\text{opt}} = 141.04$)，其中下侧两个管道分支的材料分布和二维短梁的结果十分相似，而优化后的三通管道的整体结构拓扑与经典的平面 L 型短梁^[198]的优化结构具有相似性。图 3.27 展示了各曲面片上组件的最终布局，以及优化结果的组装过程。

3.6 本章总结

本工作提出了一种基于壳体模型的薄壁结构拓扑优化方法。核心技术为移动可变形组件法、共形参数化技术以及集成的曲面切割操作和多面片拼接技术。在该方法中，曲面几何采用非结构化三角网格描述，这可以通过划分 CAD 模型获取，也可以通过三维扫描技术或者直接提取 CAE 模型信息得到。采用的共形参数化技术可以准确地获取薄壁结构中面的参数域，并实现原始曲面的材料布局描述。此外，集成的曲面切割技术和多面片拼接技术有效地降低了全局单一参数化的刚性，并极大地提升了几何建模的保真度。采用移动可变形组件法进行拓扑优化，可以显著减少设计变量的数量，并形成易于识别的传力路径。值得注意的是，所有面片的前处理工作（包括分割、切割、映射和拼接等）只会在优化前进行一次，因此不会引入太多的计算成本。

4 薄壁结构的显式形貌优化设计方法

4.1 引言

薄壁结构在厚度方向上的尺寸远小于其面内方向尺寸，其面内刚度与面外刚度在量级上存在显著差异^[199]。如图 4.1 (a)所示，考虑一个由线性各向同性弹性材料构成的平板结构，其一端固定，另一端承受沿平面方向的集中载荷，对应的位移分布如图 4.1 (b)所示（面内变形主导）。将集中载荷方向旋转为垂直于初始中面时，板的变形模式转变为以面外位移为主，且位移幅值显著增加，如图 4.1 (c)所示。该案例直观地表明薄壁结构的面内刚度远高于其面外刚度。

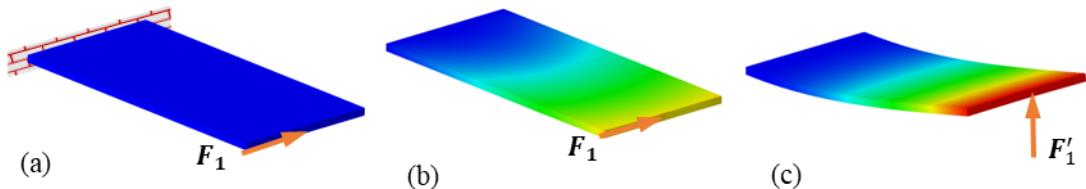


图 4.1 由薄壁特性引起的刚度差异的示意图

Fig. 4.1 Schematic illustration of the stiffness difference induced by the thin-walled property

这种几何特性诱导的各向异性现象，启发我们利用较高的面内刚度、避免较低的面外刚度，从而设计出更加高效的结构。如图 4.2 所示^[200]，因此我们引入形貌变化作为一种特定的结构设计元素来修改承重模式。

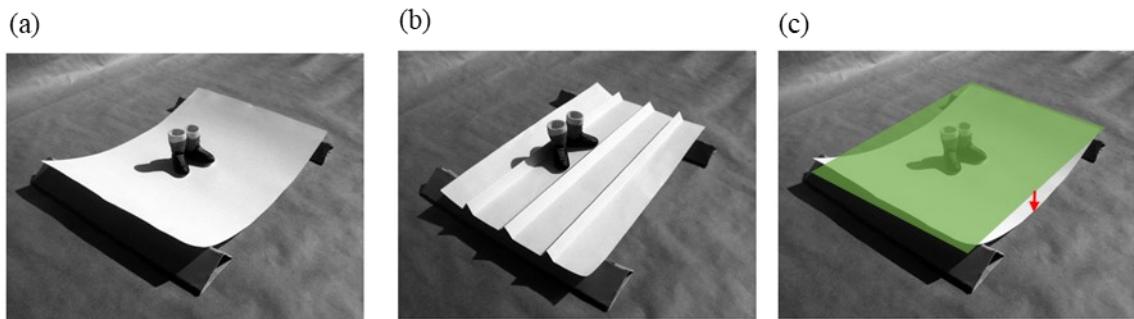


图 4.2 形貌变化可以被用来改变薄壁结构的承重方式并提升结构性能

Fig. 4.2 Topography variation can be exploited to modify the load-bearing mode of thin-walled structures and enhance structural performances

图 4.2 (a)中平板在竖向荷载作用下发生严重弯曲；而图 4.2 (b)中波纹形式的形貌显著降低了结构的变形。类似于加筋结构，这里的波纹形貌有效地抑制了整块板材的面

外变形（此处的“面外”是从原始构型的整体板结构角度定义的，如图 4.2(c)所示），从而提升了整体结构的刚度。同时，每一个波纹组件本身主要通过面内受力来承载载荷（此处的“面内”是从波纹局部形貌的标架定义的），否则这些波纹将会发生面外的弯曲变形。

对于形貌的概念，科学界已经在不同尺度和学科领域展开了广泛研究，包括几何诱导刚度^[201]、波导传播^[160]、超结构^[202]、晶体学^[203]以及裂纹控制^[161,165,164]等方向。然而，这些研究中的形貌往往较为简单、可能错失更加高效的设计构型。从数学和工程的角度来看，一个兼具挑战性和实际意义的问题是如何通过形貌设计来优化结构性能，即求解这一领域的逆问题，这正是本章工作讨论的核心。在求解曲面薄壁结构形貌设计问题时，我们需要考虑以下关键问题：如何描述一般复杂曲面形貌，如何参数化复杂形貌的变化，以及如何构建优化列式并推导解析灵敏度从而驱动设计的迭代。

考虑到曲面形貌的变化可分解为两个子问题：哪些区域需要调整形貌以及形貌变化的幅值应当是多少，这一过程本质上涵盖了形貌的拓扑改变。因此，本文采用拓扑优化的思想来开展形貌设计。基于此，我们提出了一种显式的形貌优化方法，从而解决前述难题并实现形貌的理性设计。该方法的核心在于嵌入式形貌组件：通过共形映射及其逆映射（采用共形参数化技术求解得到），我们将基于样条描述的移动可变形组件从简单平面域嵌入原始的复杂曲面上。得益于显式移动可变形组件法的描述框架，样条组件能够以少量的设计变量实现复杂形貌的精确描述。同时，共形参数化技术将曲面映射到标准平面域，使该方法能够有效处理具有复杂几何形状的薄壁结构。

4.2 嵌入式形貌描述

设曲面 \mathcal{S}_0 是待设计薄壁结构的原始中曲面，我们采用法向扰动来规范构型的变化模式。具体而言，对曲面 \mathcal{S}_0 上的任意一点 x ，其坐标沿着法向量 $N(x, \mathcal{S}_0)$ 被移动到 $\tilde{x}(x)$ ，即

$$\tilde{x}(x) = x + h_{\mathcal{S}_0}(x) \cdot N(x, \mathcal{S}_0), \quad (4.1)$$

式中 $h_{\mathcal{S}_0}(x)$ 为曲面形貌扰动场函数，代表形貌变化的幅度，如图 4.3 所示。法向量 $N(x, \mathcal{S}_0)$ 含义为曲面 \mathcal{S}_0 在点 x 处的正法向；对于光滑曲面，该向量采用经典微分几何的定义；而针对非光滑曲面，法向量采用离散微分几何^[204]的定义。

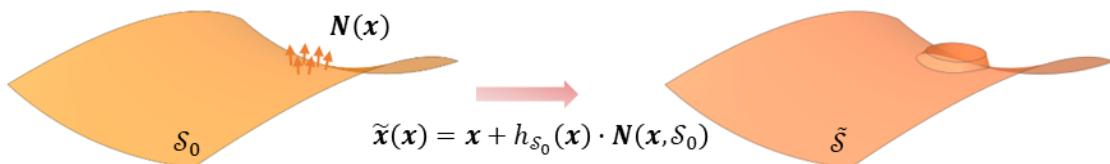


图 4.3 通过法向扰动来规范构型的变化

Fig. 4.3 Regulating configuration variation through normal perturbation

进一步地，形貌扰动场函数通过设计变量向量 \mathbf{D} 控制（需要注意的是，此处实际方程形式由具体设计问题决定），即

$$h_{\mathcal{S}_0}(\mathbf{x}) = h_{\mathcal{S}_0}(\mathbf{x}; \mathbf{D}). \quad (4.2)$$

构造上述逐点函数会涉及曲面操作，并且在扩展到复杂模型时会遇到几何的泛化问题。在此背景下，我们提出了所谓的嵌入式形貌描述。

4.2.1 单连通零亏格开曲面的形貌嵌入

首先以单连通零亏格开曲面为例，我们通过共形映射 $f = \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{M}$ 将中面映射至平面参数域 \mathcal{M} ，如图 4.4 (a) 所示。此时曲面形貌扰动场函数的定义被降维至参数域，即

$$h_{\mathcal{S}_0}(\mathbf{x}; \mathbf{D}) = h_{\mathcal{S}_0}(f^{-1}(\mathbf{p}); \mathbf{D}) = h_{\mathcal{M}}(\mathbf{p}; \mathbf{D}), \quad (4.3)$$

其中 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{p}$ 代表参数域中 \mathbf{x} 的对应点， $h_{\mathcal{M}}$ 代表平面形貌扰动函数，如图 4.4 (b) 所示。进一步地，曲面形貌扰动的表达则调整为

$$\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + h_{\mathcal{M}}(\mathbf{p}; \mathbf{D}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathcal{S}_0), \quad (4.4)$$

这意味着在嵌入式形貌描述中，每个点 \mathbf{x} 扰动幅值的构造域从曲面 \mathcal{S}_0 简化至平面 \mathcal{M} 。最后，结合公式(4.1)和逆向映射，平面形貌设计被嵌入原始曲面，如图 4.4 (c) 所示。

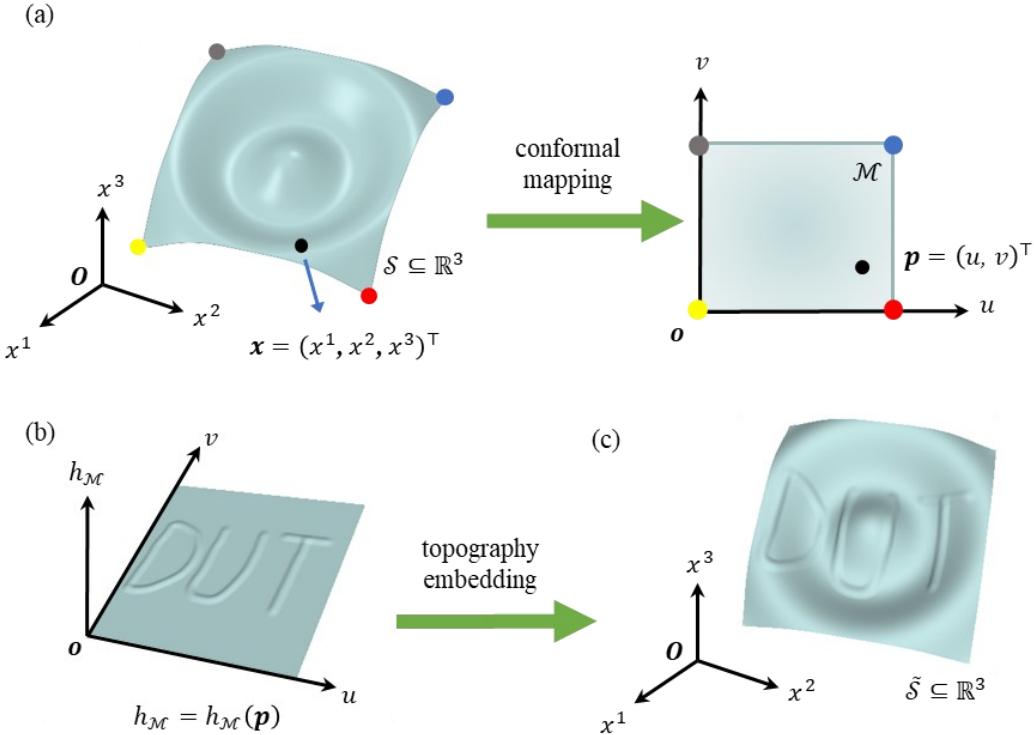


图 4.4 形貌嵌入的实施过程示意图

Fig. 4.4 Schematic illustration of the implementation process of topography embedding

4.2.2 复杂曲面的形貌嵌入

为适应更复杂的曲面，我们引入曲面切割操作和多面片拼接技术，以提升算法对复杂几何的适用性。

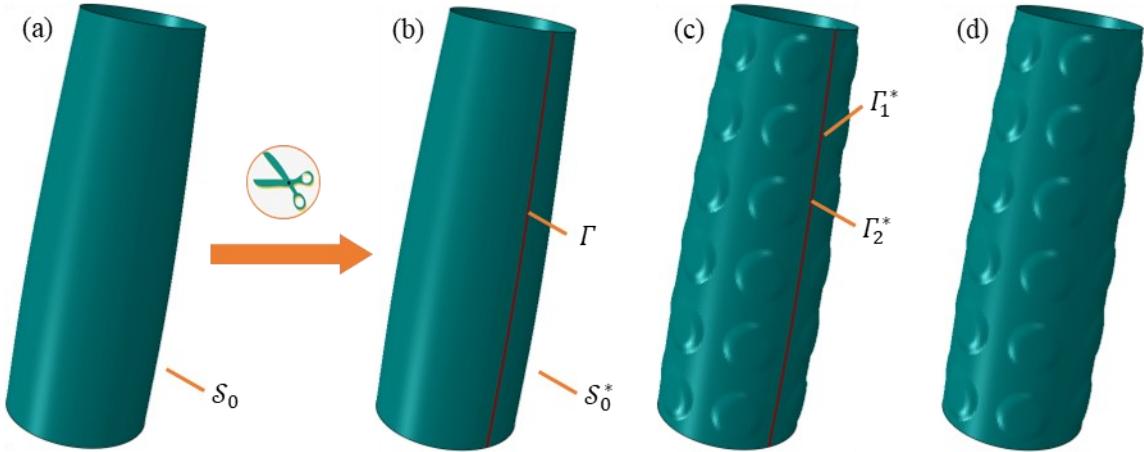


图 4.5 采用曲面切割操作对流形曲面进行预处理（以柱面为例）

Fig. 4.5 Pre-processing manifold surface using the surface cutting operation (taking the cylindrical surface as an example)

首先考虑曲面具有非平凡拓扑的情况（比如多连通、非零亏格等），此时曲面仍限于流形曲面范畴。在这种情况下，我们引入曲面切割操作来对原始曲面进行预处理。以图 4.5 (a)所示的柱面为例，我们首先沿着母线 Γ 进行切割（对于任意流形曲面，切割线通过计算拓扑学算法获得），得到过程曲面 S_0^* ，如图 4.5 (b)所示。此时，曲面 S_0^* 拓扑同胚于平面四边形，因此可以采用共形参数技术获得共形映射 $f: S_0^* \rightarrow \mathcal{M}$ ，式中 \mathcal{M} 代表相应的参数域。

考虑曲面 S_0^* 的形貌扰动场函数，其构造过程遵循前述规则，即 $h_{S_0^*}(\mathbf{x}^*; \mathbf{D}) = h_{\mathcal{M}}(\mathbf{p}; \mathbf{D})$ ，式中符号 \mathbf{x}^* 和 \mathbf{p} 分别代表曲面 S_0^* 上的点和平面参数域中的对应点，得到图 4.5 (c)所示的经过形貌扰动的构型。注意原始曲面 S_0 的曲线 Γ 在裁剪后派生为曲面 S_0^* 上的两个曲线 Γ_1^* 和 Γ_2^* 。因此，任一点 $\mathbf{x} \in \Gamma$ 均分裂为两个点 \mathbf{x}_1^* 和 \mathbf{x}_2^* ，这进一步导致了函数 h_{S_0} 在曲线 Γ 上取值的歧义性。为解决该问题，我们通过凝聚的方式定义以下原始曲面 S_0 的形貌扰动场函数 h_{S_0} ：

$$h_{S_0}(\mathbf{x}; \mathbf{D}) = \begin{cases} h_{S_0^*}(\mathbf{x}^*; \mathbf{D}), & \text{if } \mathbf{x} \in S_0 \setminus \Gamma, \\ \max(h_{S_0^*}(\mathbf{x}_1^*; \mathbf{D}), h_{S_0^*}(\mathbf{x}_2^*; \mathbf{D})), & \text{if } \mathbf{x} \in \Gamma. \end{cases} \quad (4.5)$$

在上述规范化处理后，我们得到最终模型，如图 4.5 (d)所示。

对于更一般的曲面，本文采用多面片拼接的方式定义结构整体的形貌扰动场函数。以图 4.6(a)所示的三通管道曲面，首先根据其几何特征划分为 4 个曲面片；对于每个曲面片，我们采用前述的曲面切割操作构造方法得到扰动后的构型，如图 4.6(b)所示；其次，我们对于相邻面片连接处采用公式(4.6)进行规范化处理；最后，各扰动后的面片通过拼接的方式形成最终构型，如图 4.6(c)所示。

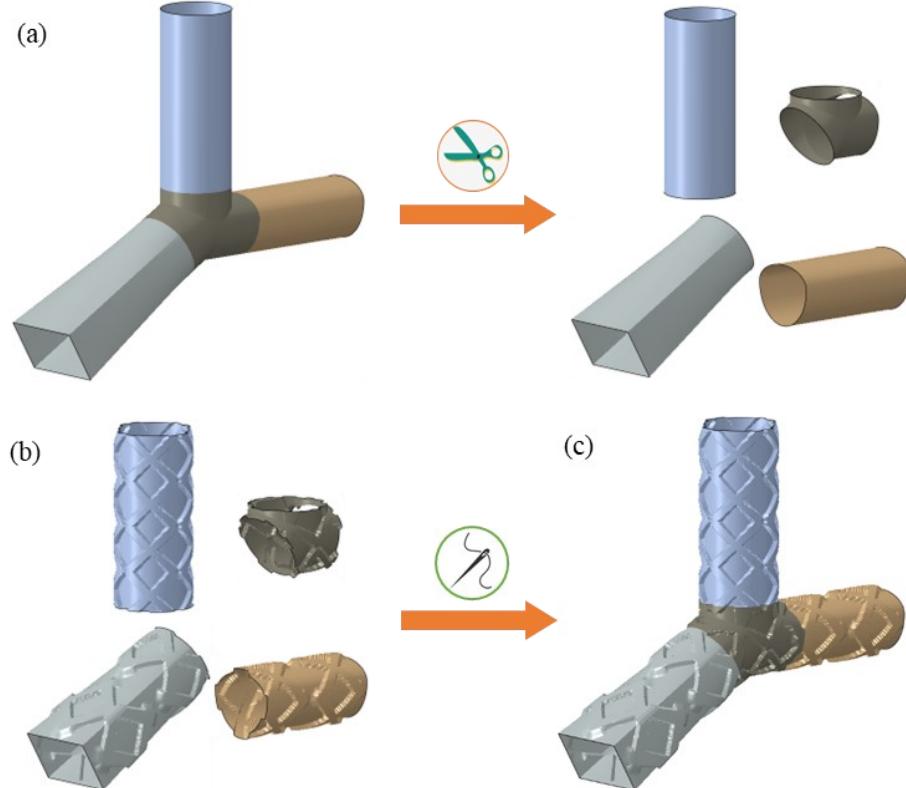


图 4.6 通过多面片拼接技术定义曲面形貌

Fig. 4.6 Defining surface topography via the multi-patch stitching scheme

类似前文的曲面切割操作，此处同样需要采用规范化处理才能实现多个面片上形貌的拼接。假设 $\mathcal{S}_0 = \bigcup_{i=1}^{ns} \mathcal{P}_i$ 为一种曲面分解，其中 \mathcal{P}_i 为第 i 块曲面片（对于上述三通管道算例， $ns = 3$ ）。对于任一面片 \mathcal{P}_i ，其形貌刻画为 $h_{\mathcal{P}_i}$ （通过方程(4.3 – 4.5)实现）。为了定义整体曲面的形貌，局部形貌扰动场函数 $h_{\mathcal{P}_i}$ 延拓至全局定义域：

$$h_{\mathcal{P}_i}^s(\mathbf{x}; \mathbf{D}^i) = \begin{cases} h_{\mathcal{P}_i}(\mathbf{x}; \mathbf{D}^i), & \text{if } \mathbf{x} \in \mathcal{P}_i, \\ 0, & \text{if } \mathbf{x} \notin \mathcal{P}_i, \end{cases} \quad (4.6)$$

式中 \mathbf{D}^i 为对应曲面片 \mathcal{P}_i 的设计变量向量。在方程(4.6)中，数字零代表 \mathcal{P}_i 以外区域不定义扰动。通过延拓的定义，整体曲面的形貌扰动场函数组装为：

$$h_{\mathcal{S}_0}(\mathbf{x}; \mathbf{D}) = \max(h_{\mathcal{P}_1}^s, h_{\mathcal{P}_2}^s, \dots, h_{\mathcal{P}_{ns}}^s). \quad (4.7)$$

上述多面片拼接方法不仅能够处理一般的复杂曲面，而且可以有效地避免由单一映射所导致的数值不稳定性（单一映射的全局特性导致其刚性过强）。

4.2.3 平面形貌函数的构造

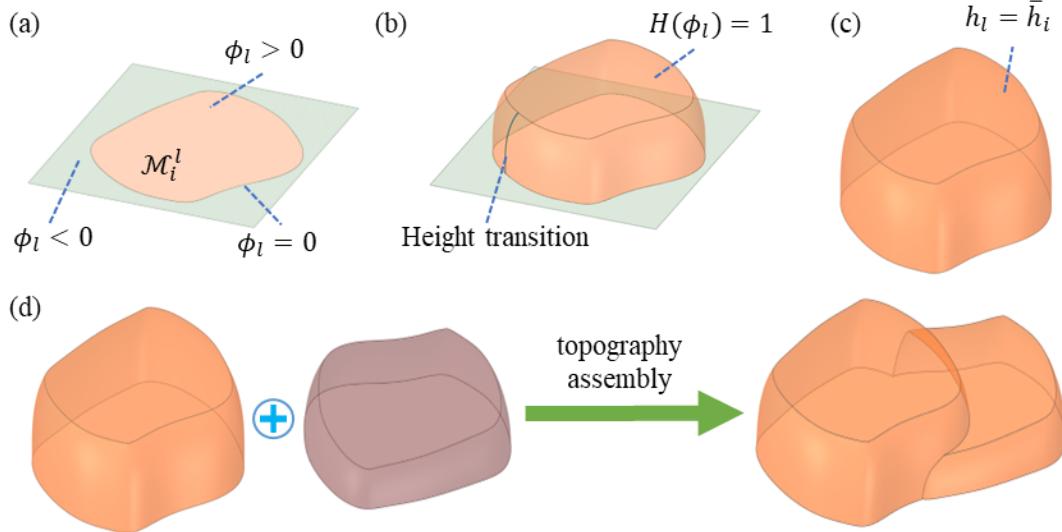


图 4.7 平面形貌场函数构建过程示意图

Fig. 4.7 Schematic illustration of the construction process of the planar topography field function

类似于结构拓扑优化，本工作同样引入移动可变形组件法来构造平面形貌函数，即 $h_{\mathcal{M}_i}(\mathbf{p}; \mathbf{D}^i)$ ，其中 $\mathbf{p} = (u, v)$ 代表参数域 \mathcal{M}_i 中任意一点， \mathbf{D}^i 代表该参数域对应的设计变量向量。复杂且连续变化的形貌由移动、变形、交叠的结构组件构成，这使得所提算法具有少量设计变量、结构边界清晰且光滑、最终设计易于解释等优点。具体而言，以参数域 \mathcal{M}_i 为例，该区域的第 l 号组件，其拓扑描述函数表达为

$$\begin{cases} \phi_l(u, v) > 0, & \text{if } (u, v) \in \mathcal{M}_i^l, \\ \phi_l(u, v) = 0, & \text{if } (u, v) \in \partial \mathcal{M}_i^l, \\ \phi_l(u, v) < 0, & \text{if } (u, v) \in \mathcal{M}_i \setminus (\mathcal{M}_i^l \cup \partial \mathcal{M}_i^l), \end{cases} \quad (4.8)$$

式中 \mathcal{M}_i^l 为参数域 \mathcal{M}_i 的子集，表示被第 l 号组件覆盖的区域（如图 4.7 (a) 所示）。注意，拓扑描述函数仅仅刻画了区域是否被扰动而缺乏高度信息。因此，如图 4.7 (b-c) 所示，形貌函数进一步构造为

$$h_l(u, v) = \bar{h}_l \cdot H(\phi_l(u, v)), \quad (4.9)$$

式中符号 \bar{h}_l 为设计变量，代表第 l 号形貌组件的高度， $H(\cdot)$ 是规范化的 Heaviside 函数（方程(3.28)），用来将自变量映射至区间 $[0, 1]$ 。在整体结构层面（如图 4.7(d)所示），平面形貌函数 $h_{\mathcal{M}_i}$ 由每一个组件的形貌场函数组成：

$$h_{\mathcal{M}_i} = \max(h_1, \dots, h_l, \dots, h_{nc}), \quad (4.10)$$

式中 nc 代表设计域中组件的总量。

4.2.4 样条组件描述方法

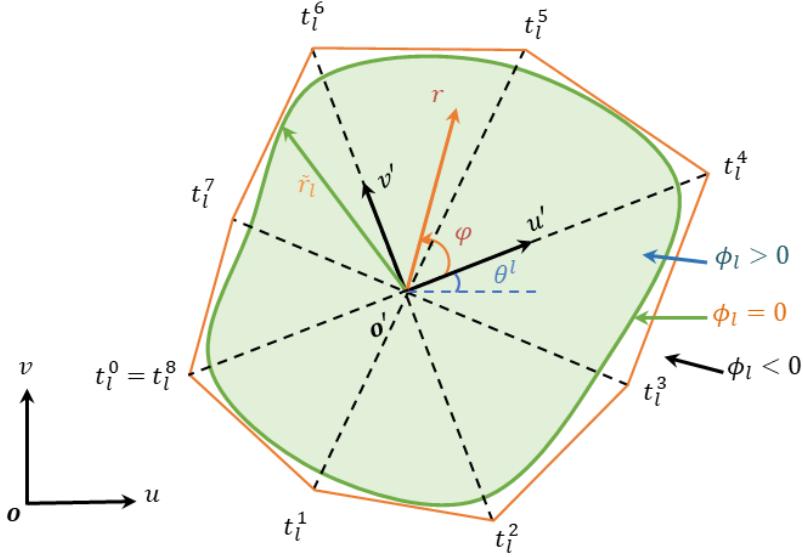


图 4.8 参数设置为 $nr = 8$ 的样条组件示意图

Fig. 4.8 Schematic illustration of a spline component with $nr = 8$

不同于现有工作中的拓扑描述函数构造，本工作提出一个新式的样条组件描述来高效地参数化形貌函数，使得能够以较少的设计变量描述复杂的曲面形貌。值得注意的是，形貌的复杂性不仅来源于高度的变化（可通过方程(4.9 – 4.10)解决），还来源于扰动区域的边界。因此，描述边界的连续指示函数 $\phi_l(u, v)$ 需要特殊的定义。为了解决上述难题，我们利用样条组件来描述扰动区域的形状，如图 4.8 所示。首先，我们通过下式来构建局部坐标系 (u', v') ：

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta^l & \sin\theta^l \\ -\sin\theta^l & \cos\theta^l \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u - u_0^l \\ v - v_0^l \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

式中 u_0^l 和 v_0^l 是第 l 号组件的中心点坐标， θ^l 是关于全局笛卡尔坐标系的旋转角。这些设计变量赋予了组件刚体移动的能力。其次，我们将笛卡尔坐标转换至极坐标 (r, φ) ：

$$\begin{cases} r = \sqrt{(u')^2 + (v')^2}, \\ \varphi = \arctan(v'/u'). \end{cases} \quad (4.12)$$

这样，第 l 号组件的边界可通过环形方向的基函数表达为：

$$\tilde{r}_l(\varphi) = \sum_{k=0}^{nr} R_{k,p}(\varphi) t_l^k, \quad (4.13)$$

式中 t_l^k 是第 l 号组件的第 k 号形状系数（ $t_l^0 = t_l^{nr}$ 从而使得边界形成闭环），且 $R_{k,p}$ 是 p 阶 NURBS 基函数（本研究中 $p = 2$ ），并具有下列形式：

$$R_{k,p}(\varphi) = \frac{N_{k,p}(\varphi) w_k}{\sum_{l=0}^{nr} N_{l,p}(\varphi) w_l}. \quad (4.14)$$

在上式中， w_k 为第 k 号基函数相对应的权重（本研究中 $w_k = 1$ ），且 $N_{k,p}(\varphi)$ 为通过 Cox-de Boor 递归列式定义的第 k 号 B-样条基函数：

$$N_{k,0}(\varphi) = \begin{cases} 1, & \text{if } \varphi^k \leq \varphi \leq \varphi^{k+1}, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (4.15)$$

且有

$$N_{k,p}(\varphi) = \frac{\varphi - \varphi^k}{\varphi^{k+p} - \varphi^k} N_{k,p-1}(\varphi) + \frac{\varphi^{k+p+1} - \varphi}{\varphi^{k+p+1} - \varphi^{k+1}} N_{k+1,p-1}(\varphi), p \geq 1 \quad (4.16)$$

式中 φ^k 为属于结点矢量 $\Xi = \{\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^{nr+p+1}\}$ 的第 k 号结点。最后，指示函数 $\phi_l(u, v)$ 通过下列的规范化形式定义：

$$\phi_l(u, v) = 1 - \left(\frac{r}{\tilde{r}_l(\varphi) + eps} \right)^q. \quad (4.17)$$

其中符号 q 代表形状指数（本研究中 $q = 2$ ），且 $eps = 10^{-15}$ 是避免奇异性的小量。得益于 NURBS 描述较强的变形能力，定义(4.17)可以较为容易地刻画扰动区域的复杂形貌。另一方面，样条基函数的局部支撑性避免了插值（即方程(4.13)）中出现龙格-库塔现象的风险。进一步地，这也确保了优化过程的数值稳定性。总结而言，参数域 \mathcal{M}_i 中第 l 号基于组件的设计变量向量定义为 $\mathbf{D}_l^i = (u_0^l, v_0^l, \theta^l, t_l^1, t_l^2, \dots, t_l^{nr}, \bar{h}_l)$ ，而所有的形貌描述设计变量则按照组件索引 l 和子域索引 i 组装为向量 \mathbf{D} 。另外，前述形貌构造过程中采用的 max 算子，即(4.5)、(4.7)和(4.10)，均通过第二章中所提到的 K-S 凝聚函数实现，即方程(2.101)。

4.3 优化列式与灵敏度分析

4.3.1 优化列式

假设 $\mathcal{S}(\mathbf{D})$ 为薄壁结构形貌扰动后的中面。我们有 $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}(\mathbf{0})$ 代表原始中曲面， $\mathcal{B}(\mathbf{D}) = \mathcal{S}(\mathbf{D}) \times \mathcal{W}$ 代表扰动后薄壁结构所占的区域， $\mathcal{W} = [-t/2, t/2]$ 代表厚度坐标 ξ^3 的取值区间， t 为薄壁结构的厚度。为不失一般性，薄壁结构形貌设计的典型问题列式写为

$$\text{Find } \mathbf{D}, \mathbf{U}(\mathbf{x}; \mathbf{D}) \quad (4.18a)$$

$$\text{Minimize } I = I(W) = \int_{\mathcal{B}(\mathbf{D})} W(\mathbf{U}(\mathbf{x}; \mathbf{D}), \mathbf{D}) dV \quad (4.18b)$$

S. t.

$$g_i(\mathbf{D}) \leq 0, i = 1, \dots, n_g \quad (4.18c)$$

$$h_i(\mathbf{D}) = 0, i = 1, \dots, n_h \quad (4.18d)$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}; \mathbf{D}) \in \mathcal{U}_{\mathbf{U}}, \mathbf{D} \in \mathcal{U}_{\mathbf{D}}, \quad (4.18e)$$

式中符号 $\mathbf{U}(\mathbf{x}; \mathbf{D})$ 代表结构状态函数, I 代表一般化的目标函数, $W(\mathbf{U}(\mathbf{x}; \mathbf{D}), \mathbf{D})$ 代表对应的泛函, $\mathcal{U}_{\mathbf{U}}$ 是满足约束条件的结构状态函数的集合, $\mathcal{U}_{\mathbf{D}}$ 为设计变量向量从属的可行集。当 I 代表局部结构响应时(比如单点位移和区域应力等), $W(\mathbf{U}(\mathbf{x}; \mathbf{D}), \mathbf{D})$ 具备 δ 函数特征。另外, 方程(4.18)中符号 $g_i(\mathbf{D})$ 和 $h_i(\mathbf{D})$ 分别代表不等式约束函数和等式约束函数, 符号 n_g 和 n_h 分别代表不等式约束个数和等式约束个数。

具体而言, 我们在本文中主要考虑薄壁结构柔度最小化(即刚度最大化)的形貌优化问题, 材料设定为线弹性、各向同性和均匀分布, 对应的问题可列式为

$$\text{Find } \mathbf{D}, \mathbf{U}(\mathbf{x}; \mathbf{D}) \quad (4.19a)$$

$$\text{Minimize } C = C(\mathbf{U}(\mathbf{x}; \mathbf{D}), \mathbf{D}) = \int_{\mathcal{B}(\mathbf{D})} (\mathbf{F}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{x}; \mathbf{D})) dV \quad (4.19b)$$

S. t.

$$\int_{\mathcal{B}(\mathbf{D})} W_C(\mathbf{U}(\mathbf{x}; \mathbf{D}), \mathbf{V}(\mathbf{x}; \mathbf{D})) dV = \int_{\mathcal{B}(\mathbf{D})} (\mathbf{F}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}; \mathbf{D})) dV, \forall \mathbf{V}(\mathbf{x}; \mathbf{D}) \in \mathcal{U}_{ad}, \quad (4.19c)$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}; \mathbf{D}) \in \mathcal{U}, \mathbf{D} \in \mathcal{U}_{\mathbf{D}}, \quad (4.19d)$$

式中符号 C 和 $\mathbf{F}(\mathbf{D})$ 分别代表结构柔度函数和外力, 真实位移 $\mathbf{U}(\mathbf{x}; \mathbf{D})$ 属于预设的约束集 \mathcal{U} , 虚位移 $\mathbf{V}(\mathbf{x}; \mathbf{D})$ 属于可行集 \mathcal{U}_{ad} 。符号 $W_C(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ 即为方程(3.5c)中的能量泛函, 对于厚壳和薄壳模型分别具有方程(3.6a)和(3.6b)的形式。方程(4.19c)代表该形貌优化问题的虚位移原理。区别于拓扑优化的虚位移原理(3.5c), 此处无需考虑材料布局的变化, 但需对于随设计变量向量 \mathbf{D} 变动的积分域 $\mathcal{B}(\mathbf{D})$ 进行额外处理, 即后续介绍的形状灵敏度分析方法。另外, $\mathcal{U}_{\mathbf{D}}$ 是用来避免不可行形貌描述的集合。需要注意的是, 不同于经典的拓扑优化列式, 此处形貌优化不需要体积分数约束来规范优化问题, 而其几何变动的规范性限制均包含在集合 $\mathcal{U}_{\mathbf{D}}$ 中。

我们采用商业软件 Abaqus 中通用的 S3 壳单元进行有限元分析, 该单元可以精确且高效地获取厚壳和薄壳的结构响应。采用的非结构化三角网格可有效降低描述具有复杂曲面特征的薄壁结构的难度。沿厚度方向的积分点个数选为 5, 厚度方向积分策略采用 Simpson 方法。

4.3.2 灵敏度分析

如方程(4.18)所示, 结构响应的积分域(即 $\mathcal{B}(\mathbf{D})$)在迭代过程中不断变化。因此, 我们采用形状灵敏度分析方法来处理这种变化。为简化表达, 此处采用符号 d (设计变量向量的任一元素)来替代 \mathbf{D} , 表示控制薄壁形貌的参数。假设 $I(W) = \int_{\mathcal{B}(d)} W dV$ 为广义结构响应函数, W 为关于响应 I 的泛函, 且 $I(W)$ 满足设计域的规范性要求并具有足够的光滑性。根据 Raynold 输运定理, $I(W)$ 关于参数 d 的材料时间导数^[205](即全导数)为

$$\frac{D}{Dd} I(W) = \int_{\mathcal{B}(d)} \left(\frac{\partial W}{\partial d} + \operatorname{div}(W \mathbf{v}) \right) dV, \quad (4.20)$$

式中 $\operatorname{div}(\cdot)$ 为散度算子, 符号 \mathbf{v} 为参数 d 的瞬时变动所诱导的形状速度场。通过利用高斯定理, 方程(4.20)中的第二项可降维至边界 $\partial\mathcal{B}(d)$, 即

$$\int_{\mathcal{B}(d)} \operatorname{div}(W \mathbf{v}) dV = \int_{\partial\mathcal{B}(d)} W V_n dS, \quad (4.21)$$

其中 $V_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{N}$ 且 \mathbf{N} 代表定义在边界 $\partial\mathcal{B}(d)$ 上的外法向, 因此有

$$\frac{D}{Dd} I(W) = \int_{\mathcal{B}(d)} \left(\frac{\partial W}{\partial d} \right) dV + \int_{\partial\mathcal{B}(d)} W V_n dS. \quad (4.22)$$

下面, 我们基于上述列式对柔度函数进行具体的灵敏度分析。根据式(2.65)–(2.67)以及(3.6)可得

$$\frac{\partial W_C(\mathbf{U}(\mathbf{x}; d), \mathbf{V}(\mathbf{x}; d))}{\partial d} = W_C(\mathbf{U}'(\mathbf{x}; d), \mathbf{V}(\mathbf{x}; d)) + W_C(\mathbf{U}(\mathbf{x}; d), \mathbf{V}'(\mathbf{x}; d)), \quad (4.23)$$

式中 $(\cdot)' = \frac{\partial}{\partial d}(\cdot)$ 代表局部导数(即空间导数)。根据方程(4.22), 方程(4.19c)左端项的材料时间导数为

$$\frac{D}{Dd} I(W) = \int_{\mathcal{B}(d)} \left(W_C(\mathbf{U}'(\mathbf{x}; d), \mathbf{V}(\mathbf{x}; d)) + W_C(\mathbf{U}(\mathbf{x}; d), \mathbf{V}'(\mathbf{x}; d)) \right) dV + \int_{\partial\mathcal{B}(d)} W_C V_n dS. \quad (4.24)$$

令 $W_F = W_F(\mathbf{U}(\mathbf{x}; d), \mathbf{V}(\mathbf{x}; d))$ 为方程(4.19c)右端项的被积函数, 我们有

$$\frac{D}{Dd} I(W_F) = \int_{\mathcal{B}(d)} \left(\frac{\partial W_F}{\partial d} \right) dV + \int_{\partial\mathcal{B}(d)} W_F V_n dS, \quad (4.25)$$

式中 $W_F = \mathbf{F}(d) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}; d)$, 且有

$$\frac{\partial W_F}{\partial d} = \frac{d}{dd} \mathbf{F}(d) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}; d) + W_F(\mathbf{U}(\mathbf{x}; d), \mathbf{V}'(\mathbf{x}; d)). \quad (4.26)$$

假设形貌和速度场描述具有充分的光滑性(由 $\mathcal{U}_{\mathbf{D}}$ 保证), $\mathbf{V}'(\mathbf{x}; d)$ 属于 Hilbert 空间 $H^1(\mathcal{B}(d))$, 这意味着 $\mathbf{V}'(\mathbf{x}; d) \in \mathcal{U}_{ad}$ 。因此,

$$\int_{\mathcal{B}(d)} W_C(\mathbf{U}(\mathbf{x}; d), \mathbf{V}'(\mathbf{x}; d)) dV = \int_{\mathcal{B}(d)} W_F(\mathbf{U}(\mathbf{x}; d), \mathbf{V}'(\mathbf{x}; d)) dV. \quad (4.27)$$

注意到

$$\frac{D}{Dd} I(W_C) = \frac{D}{Dd} I(W_F). \quad (4.28)$$

替代方程(4.24 – 4.26)到方程(4.28)并且利用方程(4.27), 则有

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{B}(d)} W_C(\mathbf{U}'(\mathbf{x}; d), \mathbf{V}(\mathbf{x}; d)) dV + \int_{\partial\mathcal{B}(d)} W_C V_n dS \\ &= \int_{\mathcal{B}(d)} \frac{d}{dd} \mathbf{F}(d) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}; d) dV + \int_{\partial\mathcal{B}(d)} W_F V_n dS. \end{aligned} \quad (4.29)$$

由于在当前柔度最小问题中, $\mathbf{U}(\mathbf{x}, d) = \mathbf{V}(\mathbf{x}, d)$, 柔度函数满足

$$C = \int_{\mathcal{B}(d)} W_C(\mathbf{U}(\mathbf{x}; d), \mathbf{U}(\mathbf{x}; d)) dV. \quad (4.30)$$

利用方程(4.24)和方程(4.29 – 4.30), 我们可以推导材料时间导数 $\frac{DC}{Dd}$ 为

$$\begin{aligned} \frac{DC}{Dd} &= 2 \int_{\mathcal{B}(d)} W_C(\mathbf{U}'(\mathbf{x}; d), \mathbf{U}(\mathbf{x}; d)) dV + \int_{\partial\mathcal{B}(d)} W_C V_n dS \\ &= 2 \int_{\mathcal{B}(d)} \frac{d}{dd} \mathbf{F}(d) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{x}; d) dV + \int_{\partial\mathcal{B}(d)} (2W_F - W_C) V_n dS. \end{aligned} \quad (4.31)$$

需要说明的是此处的全导数和公式(3.26)内涵是一致的: 公式(3.26)的偏导数是为了区分其他设计变量, 此处采用全导数符号是为了区分空间导数。通过上述推导, 方程(4.24)中导数 \mathbf{U}' 的计算已经成功被消除了, 这极大地提升了灵敏度的计算效率。另外, 本文并未考虑载荷相关的结构设计问题, 因此方程(4.31)可进一步简化为

$$\frac{DC}{Dd} = - \int_{\partial\mathcal{B}(d)} W_C V_n dS. \quad (4.32)$$

4.4 数值实现与设计流程

4.4.1 速度场的推导和计算

到目前为止, 柔度灵敏度的导数计算中, 仍然有变量 $\partial\mathcal{B}(d)$ 和 $V_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{N}$ 尚待解决。注意到几何量 V_n 仅仅在区域 $\partial\mathcal{B}(d)$ 上进行计算。由于 $\mathcal{B}(d) = \mathcal{S}(d) \times [-t/2, t/2]$ (如图 4.9 (a) 所示), 我们有

$$\partial\mathcal{B}(d) = \bigcup_{i=1}^3 \Gamma^i, \quad (4.33)$$

且有

$$\begin{cases} \Gamma^1 = \mathcal{B}(d)|_{\xi^3=t/2}, \\ \Gamma^2 = \mathcal{B}(d)|_{\xi^3=-t/2}, \\ \Gamma^3 = \partial\mathcal{S}(d) \times [-t/2, t/2], \end{cases} \quad (4.34)$$

如图 4.9 (b) 所示。

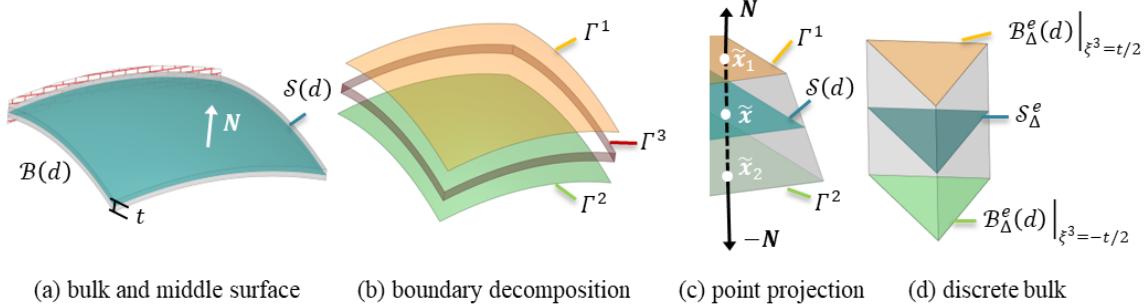


图 4.9 中面与实体域关系的示意图

Fig. 4.9 Schematic illustration of the relationship between the middle surface and the bulk domain

对于中面 $\mathcal{S}(d)$ 上任一点 $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}; d)$, 其位置通过原始曲面 \mathcal{S}_0 上的点 \mathbf{x} 的扰动得到, 即

$$\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}; d) = \mathbf{x} + h_{\mathcal{S}_0}(\mathbf{x}; d) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathcal{S}_0), \quad (4.35)$$

式中 $\mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathcal{S}_0)$ 为曲面 \mathcal{S}_0 正法向量在点 \mathbf{x} 处的取值。将点 $\tilde{\mathbf{x}}$ 沿法向量投影至上曲面 Γ^1 和下曲面 Γ^2 (如图 4.9 (c) 所示), 其对应的投影点表达为

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}_1 = \tilde{\mathbf{x}} + \frac{t}{2} \mathbf{N}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathcal{S}(d)), \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 = \tilde{\mathbf{x}} - \frac{t}{2} \mathbf{N}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathcal{S}(d)), \end{cases} \quad (4.36)$$

式中 $\mathbf{N}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathcal{S}(d))$ 代表曲面 $\mathcal{S}(d)$ 取在点 $\tilde{\mathbf{x}}$ 处的正法向量。下面, 我们以上边界 Γ^1 为例, 推导其对应的由参数 d 瞬时变化所诱导的速度场。将方程(4.35)带入(4.36)第一个式中得到

$$\tilde{\mathbf{x}}_1(\mathbf{x}; d) = \mathbf{x} + h_{\mathcal{S}_0}(\mathbf{x}; d) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathcal{S}_0) + \frac{t}{2} \mathbf{N}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathcal{S}(d)). \quad (4.37)$$

曲面 Γ^1 的速度场 \mathbf{v}_1 定义为 $\tilde{\mathbf{x}}$ 关于 d 的材料时间导数, 即

$$\mathbf{v}_1 = \frac{D}{Dd} \tilde{\mathbf{x}}_1(\mathbf{x}; d) = \frac{\partial}{\partial d} h_{\mathcal{S}_0}(\mathbf{x}; d) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathcal{S}_0) + \frac{t}{2} \frac{\partial \mathbf{N}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathcal{S}(d))}{\partial d}, \quad (4.38)$$

并且有

$$\mathbf{v}_1^1 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{N}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \Gamma^1), \quad (4.39)$$

式中 $\mathbf{N}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \Gamma^1)$ 为边界 Γ^1 上 $\tilde{\mathbf{x}}_1$ 点处的外法向。边界 Γ^2 的速度场的推导和上述过程类似, 此处不在赘述。另外, 由于结构的细长特性, 在边界 Γ^3 上的积分则忽略不计。考虑到形貌场函数通过曲面切割操作和多面片拼接技术定义, $h_{\mathcal{S}_0}(\mathbf{x}; d)$ 关于 d 的导数推导为

$$\frac{\partial}{\partial d} h_{\mathcal{S}_0}(\mathbf{x}; d) = \frac{\partial h_{\mathcal{S}_0}}{\partial h_{\mathcal{P}_i}^s} \frac{\partial h_{\mathcal{P}_i}^s}{\partial h_{\mathcal{P}_i}} \frac{\partial h_{\mathcal{P}_i}}{\partial h_{\mathcal{P}_i^*}} \frac{\partial h_{\mathcal{P}_i^*}}{\partial d}, \quad (4.40)$$

式中 $h_{\mathcal{P}_i}$ 代表定义在曲面片 \mathcal{P}_i 上的形貌场，符号 $h_{\mathcal{P}_i}^s$ 代表相应的延拓定义，符号 \mathcal{P}_i^* 代表对应于 \mathcal{P}_i 的被切割后形成中间曲面。这里， $h_{\mathcal{P}_i^*}$ 通过 $h_{\mathcal{P}_i^*}(\mathbf{x}; d) = h_{\mathcal{M}_i}(\mathbf{p}; d)$ 得到，且有 $f_i(\mathbf{x}_0) = \mathbf{p}: \mathcal{P}_i^* \rightarrow \mathcal{M}_i$ 代表第 i 个曲面片的共形映射。函数 $h_{\mathcal{M}_i}(\mathbf{p}; d)$ 关于 d 的偏导数通过下式计算：

$$\frac{\partial}{\partial d} h_{\mathcal{M}_i}(\mathbf{p}; d) = \frac{\partial h_{\mathcal{M}_i}(\mathbf{p}; d)}{\partial h_l(\mathbf{p}; d)} \frac{\partial h_l(\mathbf{p}; d)}{\partial d}, \quad (4.41)$$

其中 $h_l(\mathbf{p}; d)$ 为定义在第 i 块子域的第 l 号组件的形貌场函数，即方程(4.9) – (4.17)。需要注意的是，由于这里曲面的形貌函数采用了“与平面形貌函数相等”的方式定义，即 $h_{\mathcal{P}_i^*}(\mathbf{x}; d) = h_{\mathcal{M}_i}(\mathbf{p}; d)$ ，共形映射本身并不会参与到灵敏度的计算中，这无疑降低了问题求解的难度。

4.4.2 离散灵敏度的计算方法

对于方程(4.32)，其对应的离散灵敏度通过有限元计算得到。令 $\mathcal{S}_\Delta(d) = \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathcal{S}_\Delta^e(d)$ 为曲面 $\mathcal{S}(d)$ 的三角网格，其中 $\mathcal{S}_\Delta^e(d)$ 代表第 e 号壳单元。离散的实体区域表达为 $\mathcal{B}_\Delta(d) = \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathcal{B}_\Delta^e(d) = \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathcal{S}_\Delta^e(d) \times [-t/2, t/2]$ ，其中 $\mathcal{B}_\Delta^e(d)$ 代表对应第 e 号壳单元的实体区域。在具体实现层面，方程(4.32)离散为

$$\frac{DC}{Dd} = - \sum_{e=1}^{n_e} ((W_C V_n)_e^{\text{upper}} + (W_C V_n)_e^{\text{lower}}) A_e, \quad (4.42)$$

式中符号 $(\cdot)_e^{\text{upper}}$ 和 $(\cdot)_e^{\text{lower}}$ 分别代表物理量 (\cdot) 在 $\mathcal{B}_\Delta^e(d)|_{\xi^3=t/2}$ 和 $\mathcal{B}_\Delta^e(d)|_{\xi^3=-t/2}$ 处取的值（如图 4.9(d)所示）。在方程(4.42)中， A_e 代表三角网格 \mathcal{S}_Δ^e 的面积。从上式中我们可以看出，具体求解过程中离散灵敏度需要薄壁结构所占实体区域的厚度方向边界上的物理量，这可以通过提取前文所提到的 Simpson 积分点的信息巧妙实现。如果采用 Gauss 积分策略进行响应的求解，此处则需要进行外插计算，这无疑降低了整体算法的精度。

4.4.3 设计流程

薄壁结构的显式形貌优化设计流程可分解为三个主要模块：曲面预处理，显式形貌描述和优化迭代。具体细节如下所示：(1) 根据几何特征将曲面划分为子面片，通过对每个子面片进行曲面切割操作获得中间曲面，使用共形参数化技术获得相应平面参数域；(2) 在各参数域中构建具体的形貌扰动函数，通过逆向映射实现原始曲面片的形貌扰动。其次，将扰动后的各面片进行装配，形成变化后的薄壁构型；(3) 提交更新后的模型进行有限元分析，得到修改后薄壁结构的响应和灵敏度。然后，使用优化求解器求解

优化问题并更新设计变量；（4）最后，迭代上述步骤（形貌场函数的构造，薄壁结构的修改，响应和灵敏度计算，设计变量的更新）直到满足收敛要求。

4.5 算例验证

在本小节中，我们首先验证了形貌变化对薄壁结构力学性能的提升效果，其次通过实例验证了所提算法的有效性，另外还对影响最终形貌设计的主要因素进行了详细的探索。在数值实验中，几何尺寸与材料属性均设置为无量纲化。材料设置为各向异性线弹性，杨氏模量为 $E = 1$ ，泊松比取为 $\nu = 0.3$ 。优化问题的目标为最小化结构柔度，优化进程设置为在 300 步时停止。每个组件的形貌控制系数取为 9 ($nr = 8$)，NURBS 描述中节点矢量采用常见的均匀形式，即 $\Xi = \{-\pi, -\pi, -\pi, -\pi + 1 * \frac{2\pi}{7}, -\pi + 2 * \frac{2\pi}{7}, \dots, -\pi + 6 * \frac{2\pi}{7}, \pi, \pi, \pi\}$ 。

4.5.1 机理验证

为消除映射过程和原始薄壁结构弯曲几何形状的影响，这里首先采用四角固支、中心点处受竖向单位集中力作用的方板作为基本实例。如图 4.10 所示，边长设为 80，厚度设为 0.2。

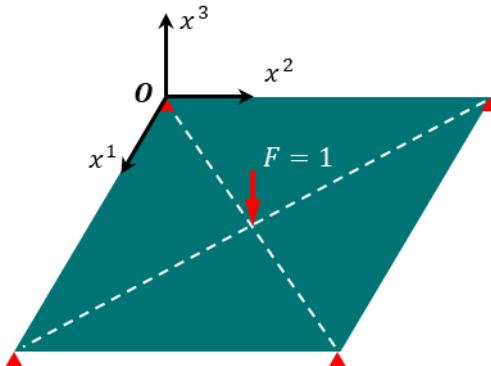


图 4.10 方形板算例边界条件

Fig. 4.10 Boundary conditions of the square plate example

为证明形貌对于提升结构响应的作用，该验证实验设置了不同的参数、产生不同的设计，如图 4.11 所示。其中，图 4.11(a-d)的形貌设置分别为：无形貌的平坦设计（柔度为 $2.51e5$ ）、基础形貌设计（所有形貌系数设置为 8、高度设置为 4、柔度为 $1.88e5$ ）、扩大形貌设计（所有形貌系数设置为 16、高度设置为 4、柔度为 $1.22e5$ ）以及增高形貌设计（所有形貌系数设置为 8、高度设置为 8、柔度为 $1.87e5$ ）。与图 4.11(a)中的平坦设计相比，图 4.11(b-d)中突出的圆台显著降低了位移幅度，提高了结构刚度。我们可以

观察到，扩大的形貌，即图 4.11 (c) 的性能优于基本形貌设置（图 4.11 (b)）。一个自然的结论是，形貌越大，结构性能越好。然而，这种观点并不成立：假设基本形貌不断扩大，直至其中心均匀区域覆盖整个平板，所得到的结构将回归到平坦形貌设计，这就会获得更差的结构性能。这种现象也是形貌优化中不需要体积分数约束的重要原因。

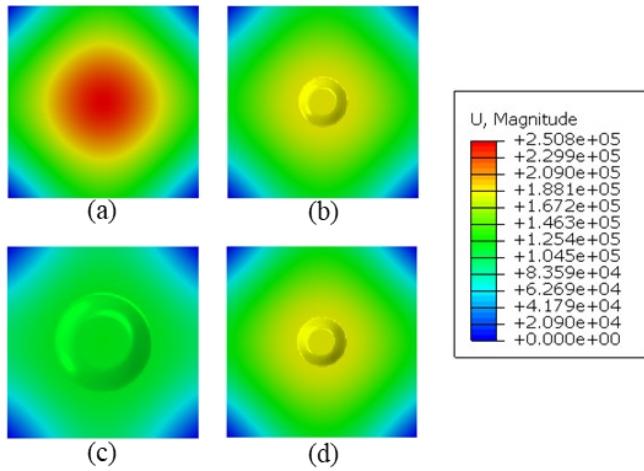


图 4.11 不同形貌设置下位移量的比较

Fig. 4.11 Comparison between the displacement magnitudes of different topography settings

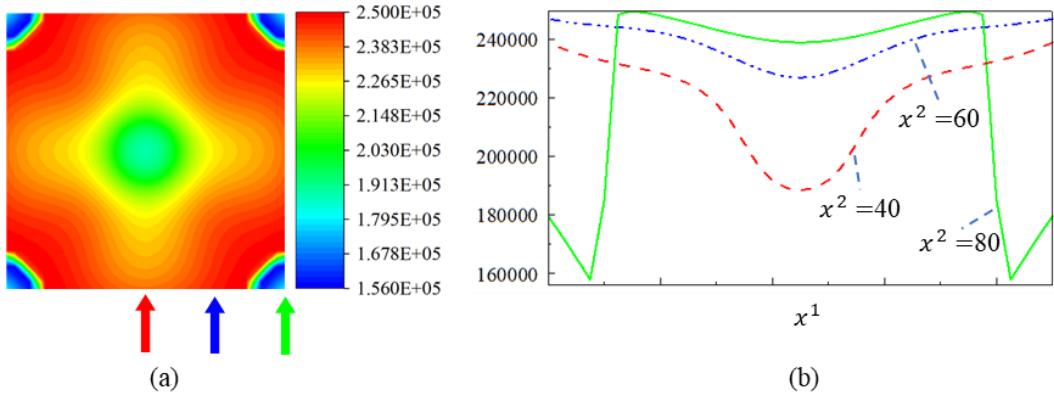


图 4.12 基础形貌组件位置对于柔度目标函数的影响

Fig. 4.12 Effect of the location of the basic topography component

我们进一步探讨了形貌位置的影响。通过改变基本形貌组件（图 4.11 (b)）中心点的坐标，加载点处的最终位移幅度云图如图 4.12 (a)所示。该云图中的每个点都被赋予一个特定的值，表示基本形貌组件位于该位置时，结构加载点处的最大位移幅度。图 4.12 (b)给出了代表低维分布特征的三条曲线，分别对应左图中不同取值的云图剖面，从中可以看出该优化问题的非凸性，这也验证了构造算法来设计薄壁结构形貌的必要性。

4.5.2 平板结构形貌设计

在本算例中，我们将探讨问题设置参数（即薄壁结构厚度、边界条件和几何模型的初始曲率）对最终设计的影响。考虑到映射过程和弯曲的几何形状均可能会阻碍实验现象的观察，我们这里仍然采用图 4.10 中的平板算例。首先，我们在不改变任何问题设置参数的情况下进行了基本的形貌优化。组件初始设计为 4×4 的组件布局，如图 4.13(a) 所示。初始形貌高度和最大形貌高度（即 \bar{h}_i 和 \bar{h}_i^{max} ）均设置为 4。迭代历史如图 4.13 所示，从中可以看出，形貌边界在整个优化过程中均光滑；由于移动可变形组件法的收敛优势，柔度函数在前 20 步迅速降低；在第 20 步之后，优化进程逐渐趋向于形貌细节的修改；在第 50 步之后，目标函数逐渐收敛到稳定值。

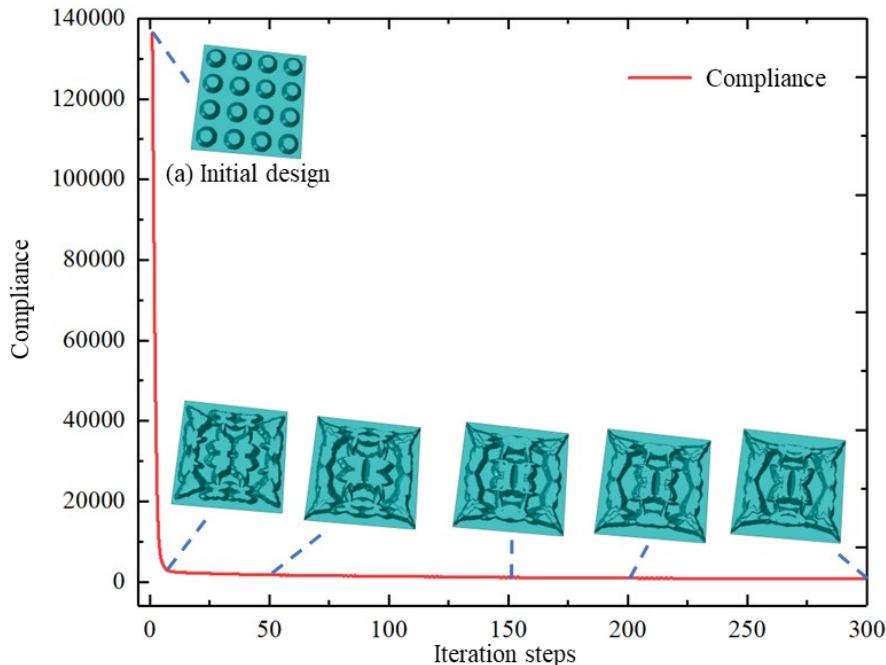


图 4.13 平板结构基础形貌设计问题的迭代历史和中间结果

Fig. 4.13 Iteration histories and intermediate results of the basic topography design problem of the plate structure

根据迭代顺序，图 4.13 所展示的结构分别代表第 1 步 ($C = 136443.80$)、第 5 步 ($C = 4868.34$)、第 50 步 ($C = 1768.73$)、第 150 步 ($C = 1145.91$)、第 200 步 ($C = 959.54$) 以及第 300 步 ($C = 876.03$) 的中间结构。原始结构（图 4.10）的柔度函数值为 $C = 2.51e5$ 。最终设计如图 4.14 所示，实现了约 99.36% 的位移幅值降低（柔度函数从 136443.80 减小到 876.03）。如图 4.14(a-h) 所示，刚度的显著提升主要是通过截面上的波纹结构实现的。优化结果显示，四个固定端附近均形成了尖锐的山形子

结构，而横截面则演化出多个峰谷。这些结构特征有效地抑制了由支撑反力引起的面外变形。图 4.14 (i-1)展示了不同的高度过滤图，这也证明了形貌描述的复杂性和相关构造方法的有效性。

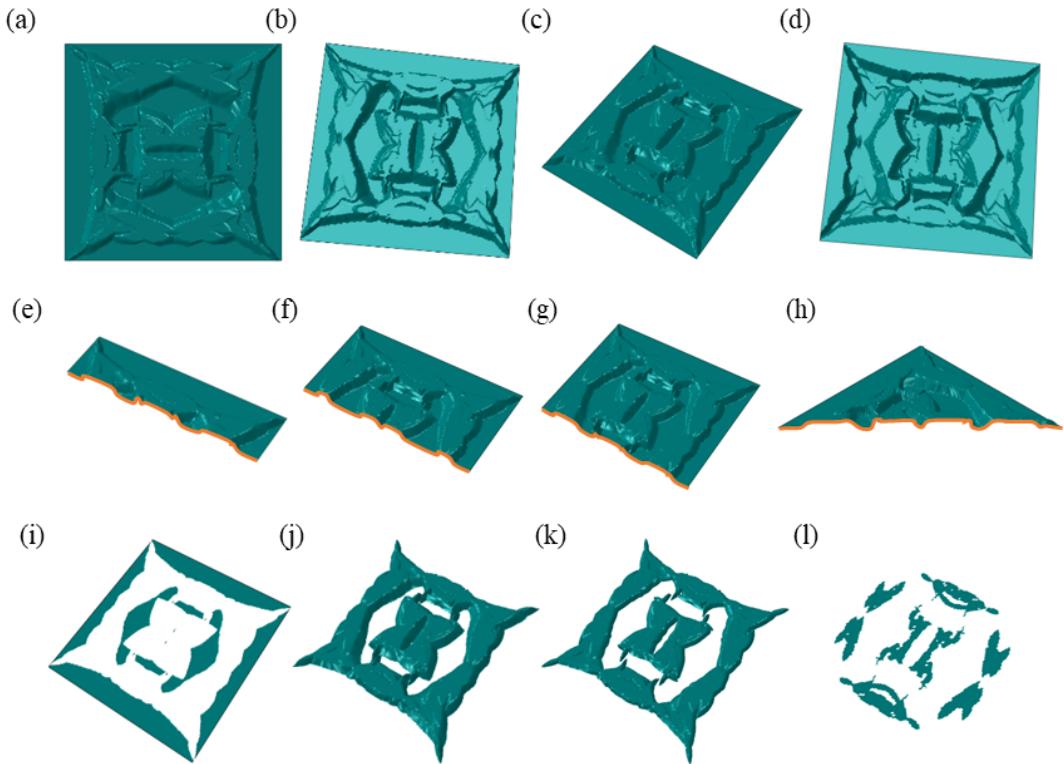


图 4.14 通过不同视角和不同高度截面来展示平板算例的最终设计结果
Fig. 4.14 Presenting the final design result of the flat plate example from different perspectives and by different height sections

考虑到厚度因素会显著影响面内方向和面外方向刚度的量级差异，从而影响算法的提升效果，我们在平板设计算例中设置 $0.05 \sim 0.8$ 的不同厚度，其他参数保持不变。设计结果如图 4.15 所示。这些最终设计的柔度函数分别为 $2.20\text{e}4$ 、 $2.24\text{e}3$ 、 312.66 和 262.56 。这六个算例的初始组件布局均与图 4.13 (a) 相同，其初始柔度函数分别为 $7.21\text{e}6$ 、 $9.53\text{e}5$ 、 17182.94 和 2356.02 ，柔度函数的降低率（通过最终位移大小与初始设计位移大小之比得出）分别为 99.69% 、 99.76% 、 98.18% 和 88.86% 。整体来说，厚度越薄，算法的提升效果越强。随着厚度的增加，最终设计中形貌组件逐渐从中心区域向周边扩散，形成环形区域。这里主要原因是横向弯曲刚度和剪切刚度随着厚度的增加而增加，这削弱了形貌的提升作用，促使形貌形成更多的起伏（比如，图 4.15 (a) 剖面图中高度变化 3 次，图 4.15 (d) 剖面图高度变化 7 次）。尽管最终设计存在诸多差异，但这些设

计结果中形成了一些共同的结构特征。例如，在四个固定端附近均形成了尖锐的山状结构。另外，在所有最终结构的中心点都出现了狭长的槽状结构，这也证明了该结构形式提高加载点局部刚度的有效性。

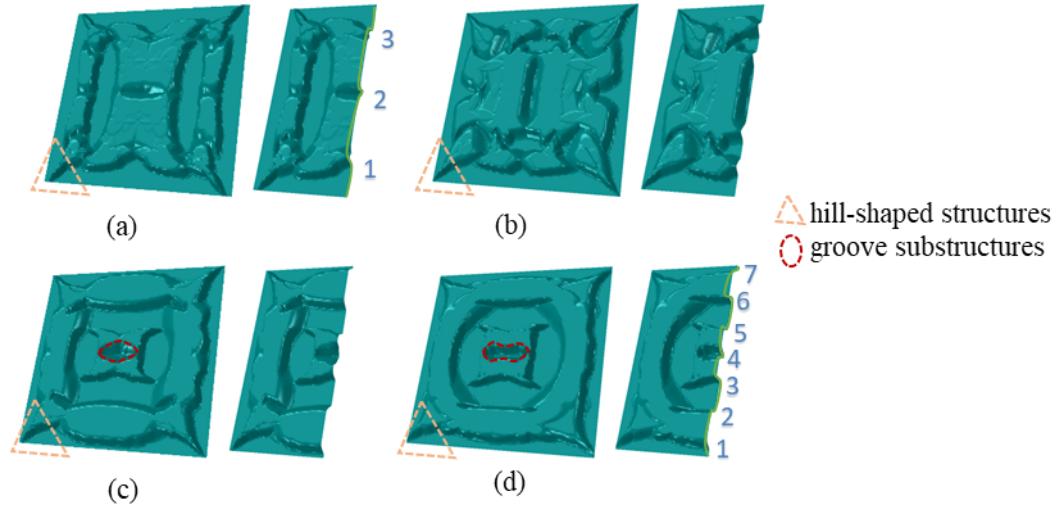


图 4.15 不同厚度设置下的最终设计：(a-d) 厚度分别设置为 0.05, 0.1, 0.4 和 0.8
Fig. 4.15 Final designs of different thickness settings. (a-d) The thicknesses are 0.05, 0.1, 0.4, and 0.8, respectively

此外，扰动高度对形貌的优化结果也有较大影响。因此，我们进一步探讨了高度在形貌设计中的作用。在图 4.16 (b)所示的五种情况中，形貌高度（包括初始高度和最大高度）分别设置为 1、2、4、8 和 16，其他参数保持不变。其中，高度设置为 4 的情况即为图 4.13 所示的设计案例。这五种初始设计方案的刚度值分别为 149410.66、142453.00、136443.80、130516.98 和 124903.23。可以观察到随着高度的增加，柔度逐渐减小，结构刚度逐渐增大。然而值得注意的是，在这些初始设计中，尽管高度呈指指数级增长（即材料体积用量的增量呈指指数级增长），但刚度的提升速度却比较低。这说明了理性和系统设计的必要性：如果我们直接采用“经验性”的初始设计，材料就不能得到充分利用。不同设置的迭代曲线如图 4.16 (a)所示，从中可以看出这些曲线从不同的初值出发、变化趋势相似、收敛于各自的最终值。对比不同的迭代曲线，我们可以发现初始设计的柔度和最终设计的柔度都随着高度的增加而减小。这说明形貌高度的升高会提高结构的刚度和最终设计的优化效果。

图 4.16(c)展示了最大形貌高度设置为 1、2、4、8 和 16 的最终设计方案，刚度值分别为 8007.17、2560.21、876.03、350.29 和 160.26。结果进一步验证了所提形貌优化设计方法的必要性：利用所提出的形貌优化方法，最终设计的柔度呈指指数级下降（形貌

最大高度每增加一倍，柔度降低 1/2~5/7)。另外，高度极限的变化还导致了优化结构的差异。如图 4.16 (c)所示，随着高度的提升，原本相连的整体形貌逐渐分离，形成了几个独立的形貌孤岛。此外，不同设计中仍存在相似的结构特征，即在载荷点处均形成槽状子结构，在四个角点处均形成山状结构（如图 4.16 (c)所示）。

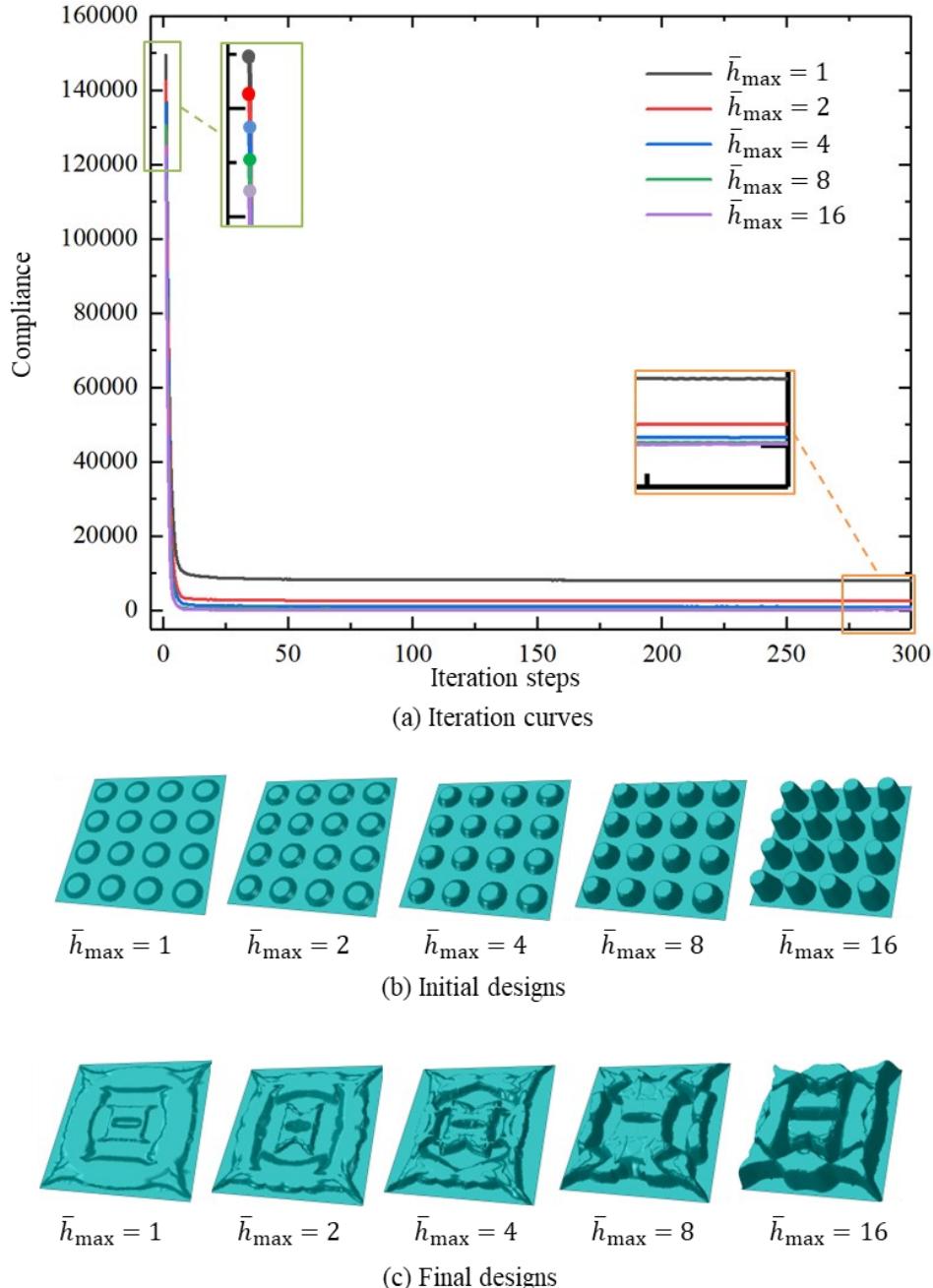


图 4.16 不同最大形貌高度设置的最终设计

Fig. 4.16 Final designs with different maximum topography height settings

形貌设计的有效性在前面的算例中已经得到了验证。然而，不平坦的设计是否总是比平坦的设计更好呢？答案是否定的。接下来我们提供一个直观的例子来反驳这种观点，并探讨边界条件对最终设计的影响。当前算例的几何形状和材料设置与图 4.10 相同；唯一的区别是此处的集中力方向旋转至 x^2 方向，而加载点仍然是板的中心。初始设计如图 4.13 (a) 所示，迭代历史如图 4.17 所示。

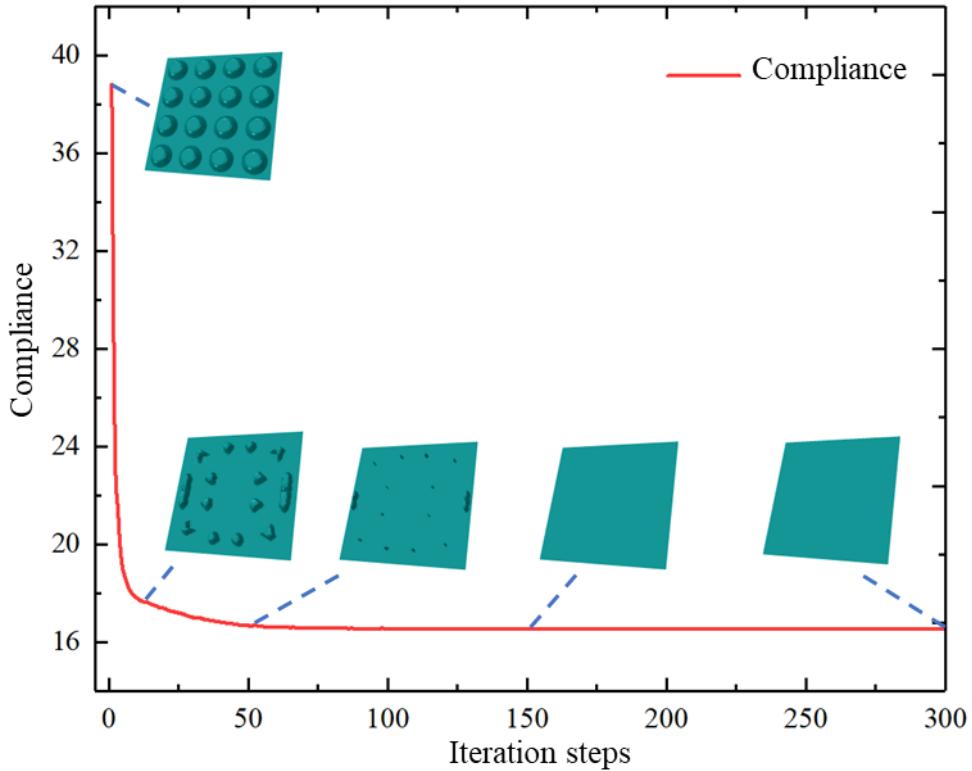


图 4.17 平板结构在面内力作用下的形貌设计迭代历史及中间结果

Fig. 4.17 Iteration histories and intermediate results of the topography design problem of the plate structure subjected to in-plane force

从曲线上可以看出，优化进程收敛速度较快，柔度函数逐渐下降。最值得注意的是结构的演化过程，突出的形貌是逐步消失的。然而，该现象和本研究的基础理念是一致的：本例中载荷按面内方向施加，最优形貌应尽可能地利用面内刚度，从而驱动初始突出的形貌组件逐渐消失。

曲率对薄壁结构力学性能的影响是十分显著的，并且受到各种额外因素耦合作用的影响。例如，曲率较高的薄壁结构在特定类型的载荷（特别是那些垂直于表面的载荷）下往往更硬^[201]，以及曲率可能导致更好的承载模式^[13]。因此，我们在这个例子中进一步研究了几何曲率对最终设计的影响。

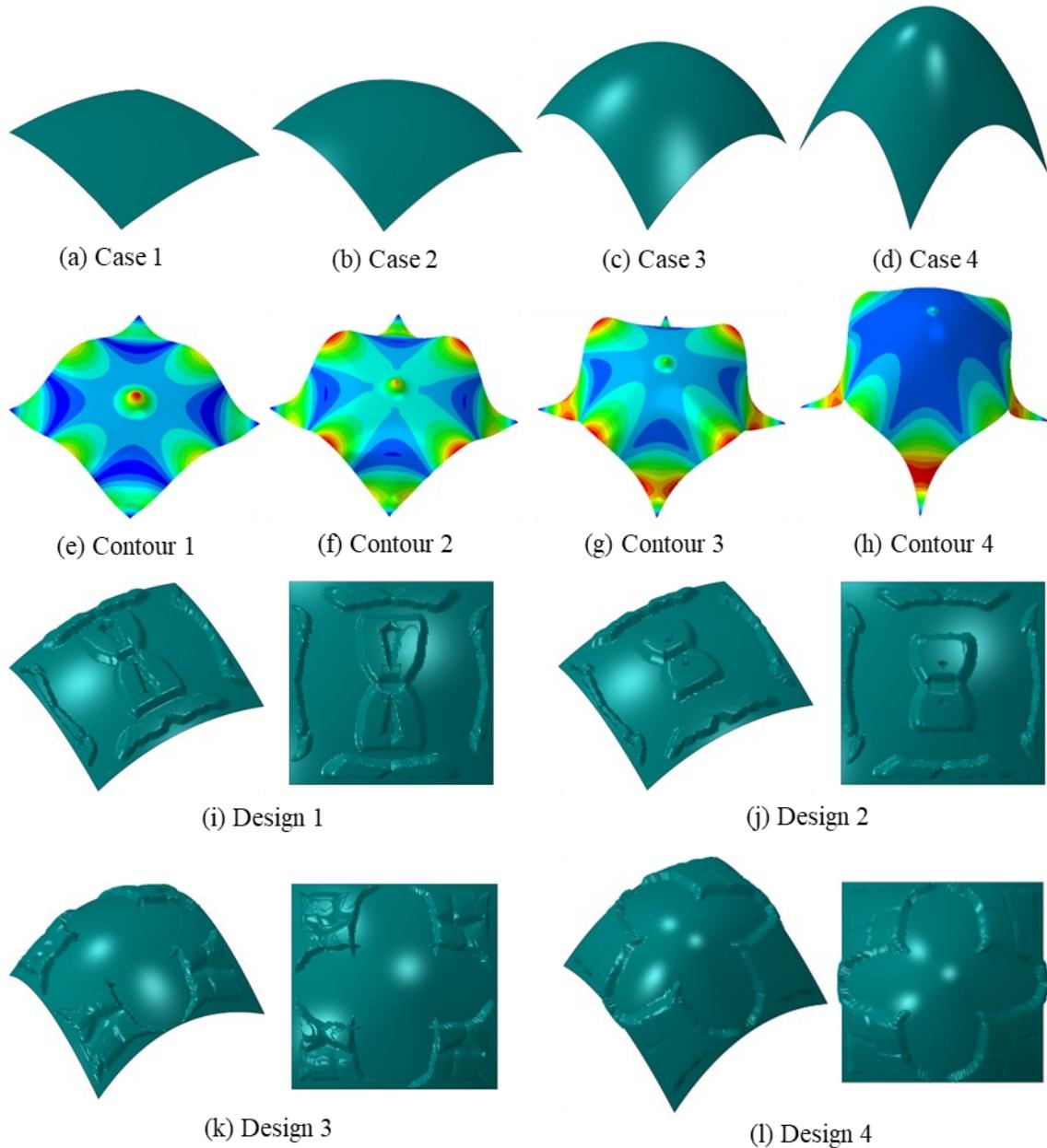


图 4.18 修改后的中曲面及相应的最终设计

Fig. 4.18 Modified middle surfaces and the corresponding final designs

原始的平板中平面依据下列方程调整为曲面（如图 4.18 (a-d)所示，参数 γ 分别设定为 10、20、40 和 80）：

$$x^3 = \gamma * \frac{((x^1 - 40)^2 + (x^2 - 40)^2)}{3200}. \quad (4.43)$$

另外，边界条件、厚度、材料参数保持与图 4.10 算例一致。初始布局设置与图 4.13 (a) 相同。图 4.18 (e-h) 展示了 Case 1-4 无形貌设计的位移云图，柔度函数分别为 2095.38、1351.56、1119.50 和 1260.84。图 4.18 (i-l) 展示了 Case 1-4 的最终设计，柔度函数分别为 156.36、169.44、426.60 和 216.72，柔度函数的降低率分别为 92.54%、87.46%、61.89% 和 82.82%。

我们注意到，在适当的范围内，即图 4.18 (a-c)，曲率越高，原始薄壁结构越硬。然而在案例 4 中，四个支撑点处结构较弱，导致较大的位移幅值，如图 4.18 (h) 所示。因此，案例 4 的结构整体刚度小于案例 3。形貌设计的提升程度随着原始结构刚度的增大而减小（按照案例 1、2、4、3 的顺序）。对于较大曲率结构（案例 3、4），中心点周围形成的拱形区域刚度足够大，而四个支撑点周围的薄弱区域则相对较弱，这导致了形貌组件逐渐聚集到了角点处，用以增强结构局部刚度。

4.5.3 基于共形参数化技术的形貌设计

对于弯曲的薄壁结构，共形参数化技术是获得其形貌设计结果的必要手段。本节提供了具有代表性的模型来验证算法在处理薄壁结构方面的有效性。第一个例子是一个鞍形算例（厚度设定为 0.02），其几何尺寸和边界条件（四个角点处固定，在鞍点处承受沿 $-x^2$ 方向施加的单位集中力）如图 4.19 所示。

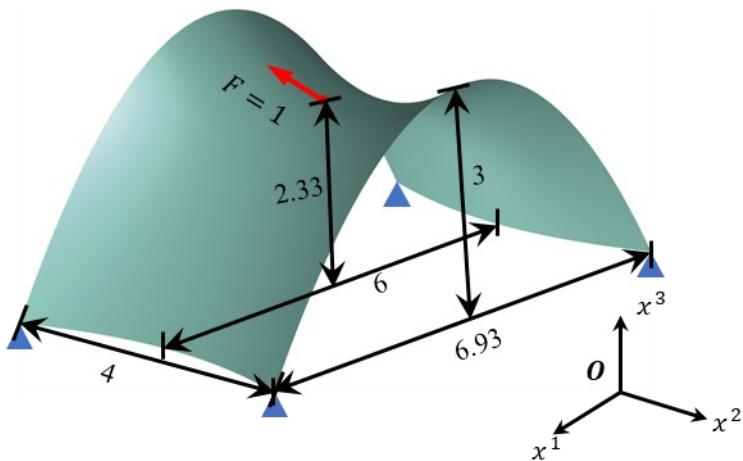


图 4.19 鞍形薄壁结构算例的问题设置

Fig. 4.19 Problem settings of the saddle-shaped thin-walled structure example

该算例构造曲面形貌的过程相对简单，直接利用共形参数化技术和嵌入式形貌描述即可。此处我们测试了初始组件布局对最终设计的影响。图 4.20 (a-c) 展示了三种类型的初始结构，其中组件分别放置为 4×2 、 6×3 和 8×4 ，对应的柔度函数分别为 4077.04、

3910.32、3749.56。迭代曲线如图 4.20 所示，从中可以看出总体趋势是一致的，所有的优化过程都收敛到接近的目标函数值，相应的最终形貌设计如图 4.20 (d-f)所示，柔度函数分别为 463.62、444.84、435.84。设计结果表明，各模型中心区域的形貌分布相似，均形成狭窄的沟槽。此外，随着组件数量的增加，边缘区域会出现更多的结构细节，从而进一步提高结构性能。

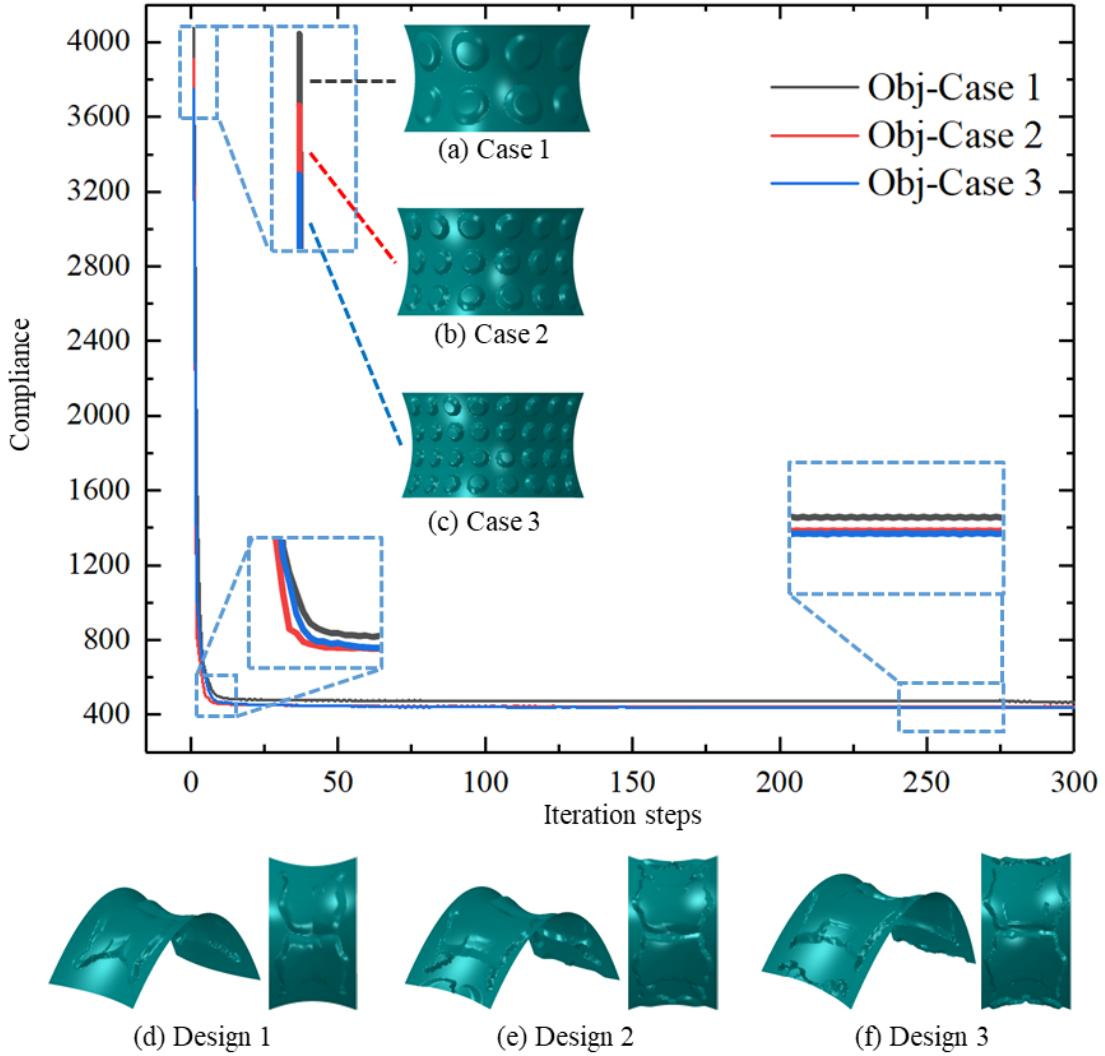


图 4.20 不同组件布局的初始设计、迭代曲线以及最终设计

Fig. 4.20 Initial designs, iteration curves, and final designs of different component layouts

4.5.4 复杂曲面薄壁结构的形貌设计

在当前小节中，我们利用两个复杂的薄壁结构来演示曲面切割操作和多面片拼接技术的重要性。第一个算例为八字形环面结构，如图 4.21 所示。其中，橙色的圆圈表示沿

圆周方向分布的固定边界条件，其环向坐标（即 α^1 和 α^2 ）分别为 $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$ ；红色箭头表示垂直于表面施加的集中力，环向坐标分别为 $0, \frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{15\pi}{8}$ ；加载点到圆心的径向距离均设定为 20。此算例中的厚度设置为 0.01，弹性模量设定为 210000，力的大小设定为 100。

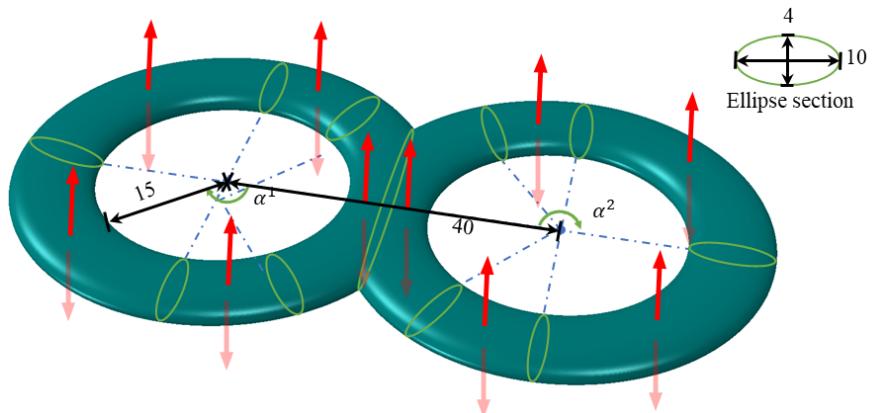


图 4.21 八字形环面算例的问题设置

Fig. 4.21 Problem settings of the eight-shaped torus example

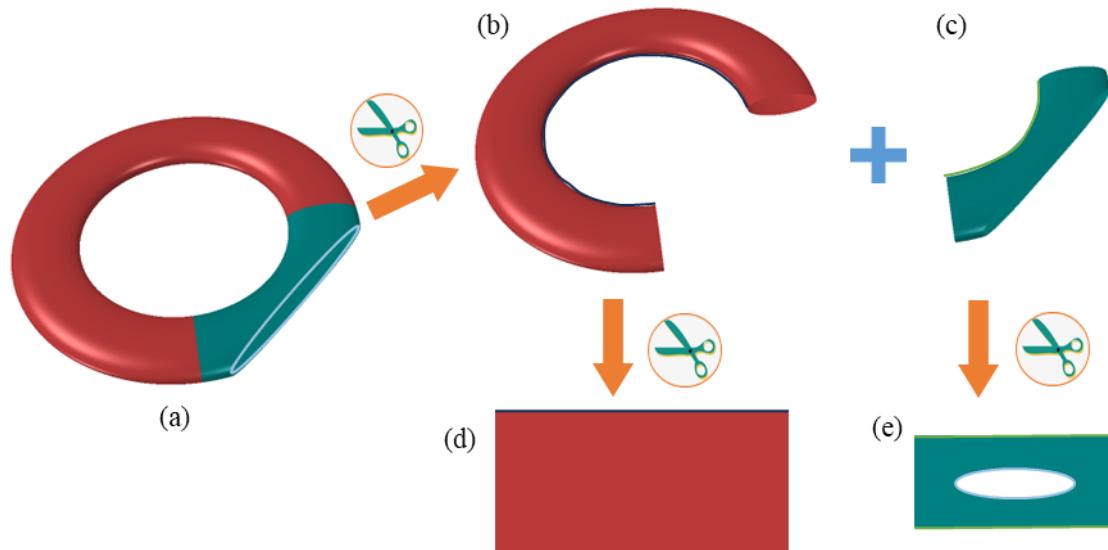


图 4.22 八字环曲面的几何前处理（以左半部分为例）

Fig. 4.22 Geometry preprocessing of the eight-shaped torus surface (taking the left half as the example)

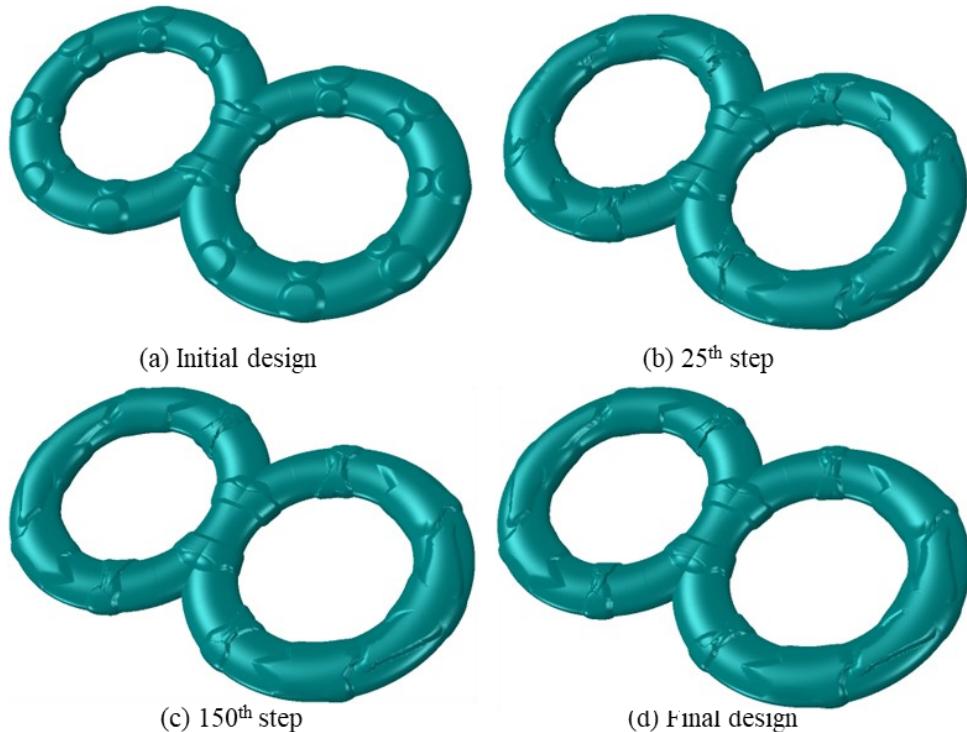


图 4.23 八字环算例的迭代历史、中间结果以及最终设计（第 300 步）：(a) 初始设计 ($C = 31631.04$)；(b) 第 25 步的设计 ($C = 5110.71$)；(c) 第 150 步的设计 ($C = 3458.74$)；(d) 最终设计 ($C = 2876.67$)

Fig. 4.23 Iteration histories, intermediate results, and the final design (300th step) of the eight-shaped torus example: (a) initial design ($C = 31631.04$); (b) design of the 25th step ($C = 5110.71$); (c) design of the 150th step ($C = 3458.74$). (d) final design ($C = 2876.67$)

显然，这个模型不能直接映射到平面矩形域上。因此，需要利用额外的操作来构建曲面形貌，如图 4.22 所示。以左半部分为例（该模型是一个具有开放边界的环面），首先我们根据几何特征将原始曲面划分为两个独立的区域，如图 4.22 (b-c)所示。其次，在进行曲面切割操作后，每个区域都被映射到一个平面矩形区域，如图 4.22 (d-e)所示；注意此处图 4.22 (c)的模型采用了图 3.23 中接头曲面同样的处理方法，而原始曲面的边界在图 4.22 (e)中被映射为一个平面孔洞。初始组件如图 4.23 (a)所示，中间设计如图 4.23 (b-c)所示。从图中可以看出，第 150 步优化后的结构已经接近最终设计，最终柔度函数则降低到初始布局的 9.09%。

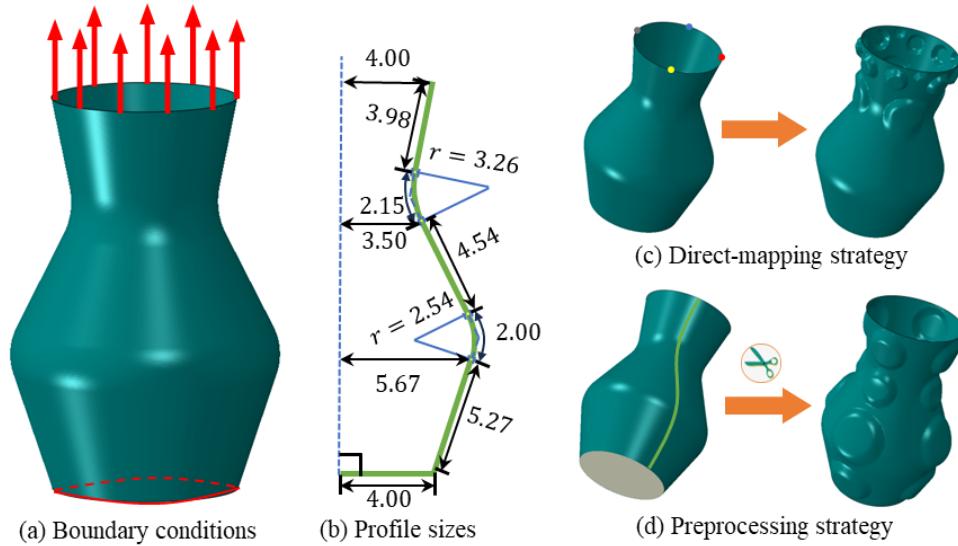


图 4.24 花瓶算例的问题设置（厚度为 0.05）

Fig. 4.24 Problem settings of the vase example (the thickness is 0.05)

第二个算例采用图 4.24 所示的花瓶结构，底部受固定端约束，边界承受竖直方向的单位线载荷。花瓶的几何按照图 4.24 (b)所示的轮廓线绕中心轴线旋转得到。从算法实现的角度来看，其实无需进行额外的预处理；也就是说，共形参数化技术可以直接应用到中曲面的映射。然而，如图 4.24 (c)所示，直接映射策略不可避免地会引入较大的全局扭曲。因此，本工作利用多面片拼接技术。整个曲面按照几何特征分解为待设计的瓶体面片和作为不可设计域的底面两部分，初始组件布局如图 4.24 (d)所示。可以看出，形貌扭曲问题得到了很好的解决。

迭代历史和最终设计如图 4.25 所示。随着优化的进行，形貌组件逐渐向瓶颈处移动，从而增大瓶颈处的半径，减小局部曲率。另一方面，底部区域逐渐形成四个环形分布的杆状形貌组件，增强了固定端附近的局部刚度。与初始设计相比，最终设计的柔度函数减小了 78.98%。

4.6 本章总结

本工作受薄壁结构几何诱导的各向异性现象启发，采用嵌入式形貌描述，结合移动可变形组件法和共形参数化技术，提出了一种显式的形貌设计方法。其中，嵌入式描述使得该方法能够将形貌组件完美地附着在曲面上，移动可变形组件法使得该算法具有以少量设计变量描述复杂形貌的能力，还使得算法能够自适应地调整形貌设计的局部区域。另外，曲面切割操作和多面片拼接技术极大地扩展了该方法的适用范围，并很好地解决

了映射失真问题。考虑到优化过程中结构响应积分域的动态变化，我们推导了广义结构响应函数及结构柔度的形状灵敏度表达式。此外，我们进一步推导了由设计变量瞬时扰动引起的几何速度场，并给出了具体的离散灵敏度计算公式。数值算例验证了所提设计方法提高刚度的有效性、高效性和几何通用性。

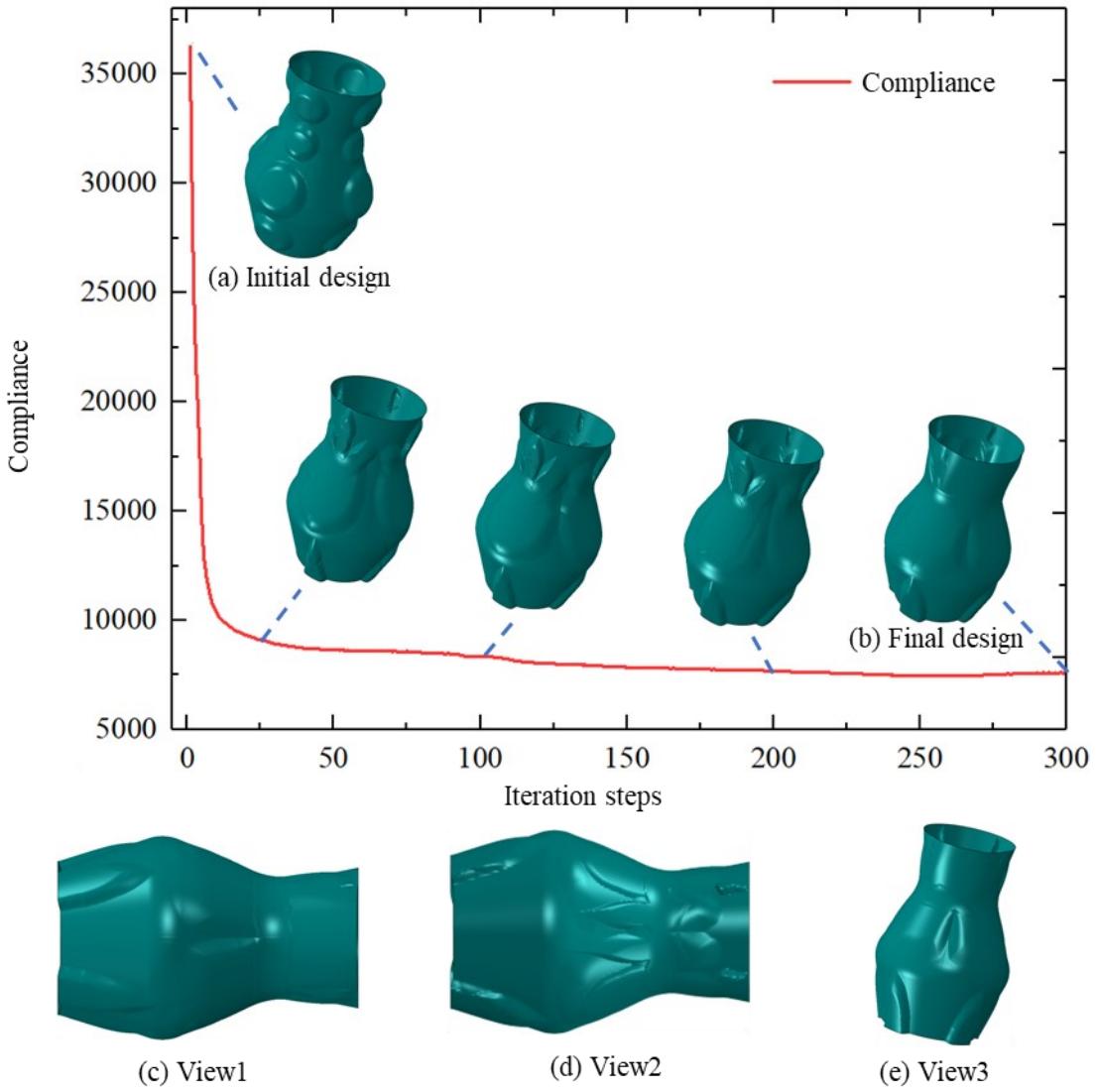


图 4.25 花瓶算例的迭代历史、中间结果以及最终设计：(a) 初始设计 ($C = 36268.51$)；(b) 最终设计 ($C = 7623.96$)；(c-e) 最终设计的不同视图

Fig. 4.25 Iteration histories, intermediate results, and the final design of the vase example: (a) initial design ($C = 36268.51$); (b) final design ($C = 7623.96$); (c-e) different views of the final design

5 基于实体模型的薄壁结构拓扑优化方法

5.1 引言

薄壁结构的复杂性来源于其多样化的设计需求和厚度变化。一方面，多样化的设计需求（例如中面拓扑设计、加筋设计等）增加了材料自动化描述的难度。另一方面，不同厚度范围的薄壁结构需要采用对应的理论假设（例如 Kirchhoff-Love 壳理论和 Reissner-Mindlin 壳理论）以确保结构响应的求解精度。然而，对于无法满足壳体模型假设的情况，响应的精度损失在优化过程中是不可忽略的，这是因为在迭代求解中误差的累计会导致完全不同的优化设计结果。

为解决上述挑战，本研究基于实体模型（不同于第三章和第四章的壳体模型）和移动可变形组件法提出了一种新型嵌入式实体组件，为薄壁结构的多类典型设计问题（包括拓扑优化、加筋布局优化以及三明治夹芯结构优化）提供统一的求解方案。同时，组件自然贴合曲面的几何约束能够自动满足，如图 5.1 所示。最后，我们将所提出的方法应用于一系列的具有代表性的算例中，从而验证其有效性、高效性、多功能性以及在处理复杂结构方面的能力。

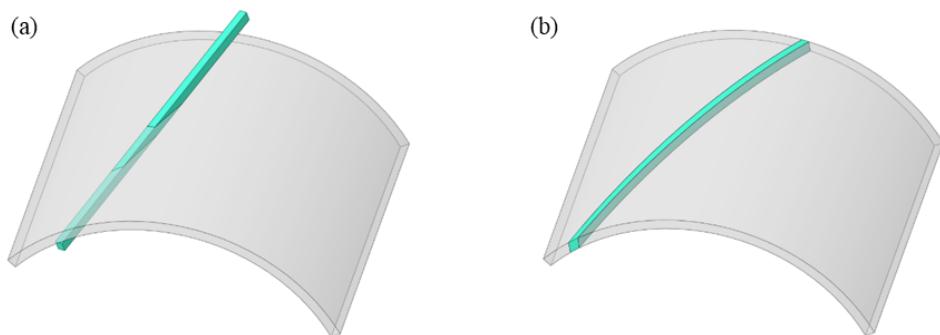


图 5.1 嵌入式组件必要性的示意图：(a) 定义在欧氏空间中的组件在优化过程中存在贯穿设计域的问题；(b) 嵌入式组件能够有效地适应薄壁结构的形状变化

Fig. 5.1 Schematic illustration of the necessity of the embedded component: (a) component defined in Euclidean space intrudes into the base panel during the optimization process; (b) embedded component effectively follows the shape variation of thin-walled structure

5.2 嵌入式实体组件的构造方法

在该节中，我们基于前置研究中（即第 3 章）曲面的组件描述方法，进一步构造嵌入式组件。

令符号 \mathcal{B} 代表所考虑的薄壁结构占据的区域， \mathcal{S} 为 \mathcal{B} 的中曲面。实体区域 \mathcal{B} 可基于笛卡尔积分解，即 $\mathcal{B} = \mathcal{S} \times \mathcal{W}$ 。其中 $\mathcal{W} = [-t/2, t/2]$ 代表厚度坐标 ξ^3 的变化范围，参数 t 代表沿曲面方向变化的厚度，并且有 $\mathcal{S} = \mathcal{B}|_{\xi^3=0}$ 成立。在这样的处理后，原始实体区域的几何复杂性便转换至中曲面上，而中曲面用以描述材料分布的 TDF 函数则通过前述章节定义（第 3 章，方程(3.1 – 3.2)），构建过程概述为图 5.2。

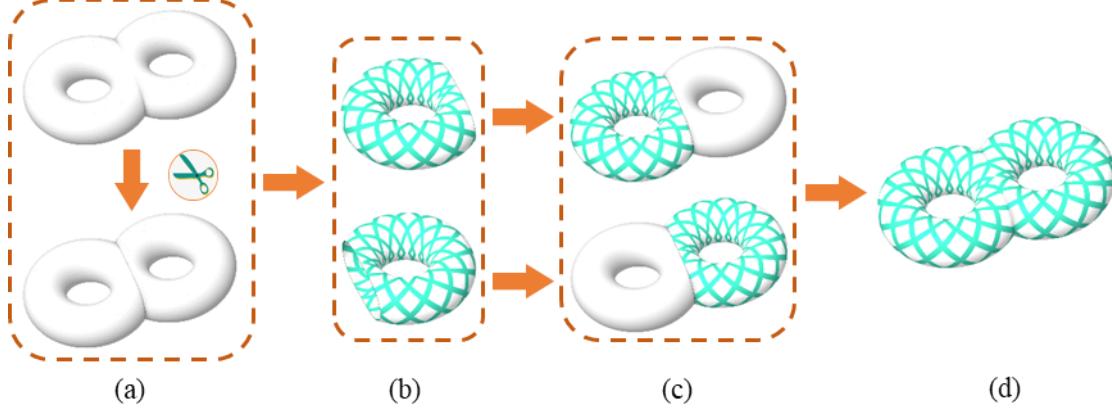


图 5.2 TDF 函数构建过程示意图：(a) 将曲面按照几何特征分解为多个简单曲面片从而降低几何复杂度；(b) 在各面片上进行 TDF 函数的构建；(c) 将局部曲面片上定义的 TDF 函数拓展至整体曲面；(d) 原始曲面的 TDF 函数定义由各面片装配而成

Fig. 5.2 Schematic illustration of the TDF construction process of a general complex surface:
(a) decomposing the concerned surface into individual patches according to geometric features; (b) TDF construction on each patch; (c) TDF extensions from surface patches to the original surface; (d) TDF definition on the original surface

为构建实体的嵌入式组件，此处我们采用投影操作来描述材料分布。对区域 \mathcal{B} 内任一点 \mathbf{x} ，其拓扑描述函数定义为

$$\phi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}}(\mathbf{x}; \mathbf{D}) = \phi_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(\mathbf{x}_{\perp}; \mathbf{D}). \quad (5.1)$$

上式中 $\phi_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(\mathbf{x}_{\perp}; \mathbf{D})$ 即为定义在中曲面上的拓扑描述函数， \mathbf{D} 为设计变量向量， \mathbf{x}_{\perp} 为点 \mathbf{x} 到曲面 \mathcal{S} 的投影点，并通过求解下列最小化欧氏距离的极值问题获得

$$\mathbf{x}_{\perp} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}_{\perp} \in \mathcal{S}} (\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\perp}\|_2). \quad (5.2)$$

因此 \mathbf{x} 的厚度坐标（即从点 \mathbf{x} 到投影点 \mathbf{x}_{\perp} 的距离）为 $\xi^3(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\perp}\|_2$ 。通过利用投影操作，区域 \mathcal{B} 的材料布局构建为 $\rho_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}}(\mathbf{x}; \mathbf{D}) = H(\phi_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(\mathbf{x}_{\perp}; \mathbf{D}))$ ，式中 $H(\cdot)$ 代表用来正则化的 Heaviside 函数，具体公式见方程(3.28)。为发展求解薄壁结构多类优化问题（包括拓扑优化、加筋设计和三明治夹芯结构设计）的统一方法，我们进一步提出了下列材料布局描述：

$$\rho_B^s(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{D}) = \begin{cases} \rho_1, & \text{if } \xi^3(\boldsymbol{x}) \in [-\frac{t}{2}, -\frac{t}{2} + \bar{\xi}_2^3], \\ H(\phi_s^s(\boldsymbol{x}_\perp; \boldsymbol{D})), & \text{if } \xi^3(\boldsymbol{x}) \in \left[-\frac{t}{2} + \bar{\xi}_2^3, \frac{t}{2} - \bar{\xi}_1^3\right], \\ \rho_2, & \text{if } \xi^3(\boldsymbol{x}) \in \left(\frac{t}{2} - \bar{\xi}_1^3, \frac{t}{2}\right], \end{cases} \quad (5.3)$$

式中 $\bar{\xi}_1^3$ 和 $\bar{\xi}_2^3$ 代表两侧基底的厚度， ρ_1 和 ρ_2 分别代表对应的预设密度。

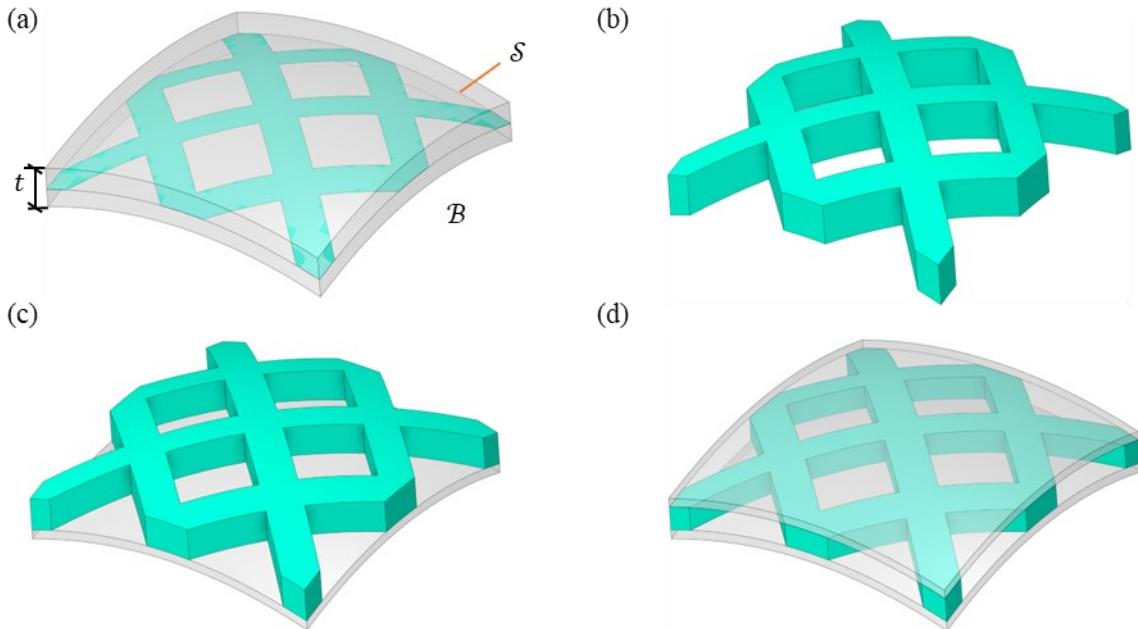


图 5.3 嵌入式组件示意图: (a) 实体域材料分布通过中曲面的投影操作获得; 嵌入式组件不同的应用场景包括: (b) 拓扑优化, (c) 加筋设计, (d) 三明治夹芯结构设计

Fig. 5.3 Schematic illustration of the embedded components: (a) material distribution of the solid domain is obtained via the projection operation from the middle surface; different application scenarios of the embedded components include: (b) topology optimization, (c) rib-reinforcing structure design, and (d) sandwich structure design

上述定义可通过取不同的参数值，有效地将各类设计问题按照厚度坐标区分，如图 5.3 所示。例如，当预设的厚度参数取值为 $\bar{\xi}_1^3 = 0$ 以及 $\bar{\xi}_2^3 = 0$ ，此处拓扑描述函数刻画了拓扑优化下的结构形式（如图 5.3 (b) 所示）；当仅有一个厚度参数取零时，拓扑描述函数可用来设计加筋结构（如图 5.3 (c) 所示）；当所有厚度参数均非零时（如图 5.3 (d) 所示），拓扑描述函数可用来优化中间的夹层结构。另外，考虑到筋条和蒙皮通常由不同的材料构成，设置不同的参数 ρ_1 和 ρ_2 可用来描述这类多材料的情况。

5.3 优化列式与灵敏度分析

5.3.1 优化列式

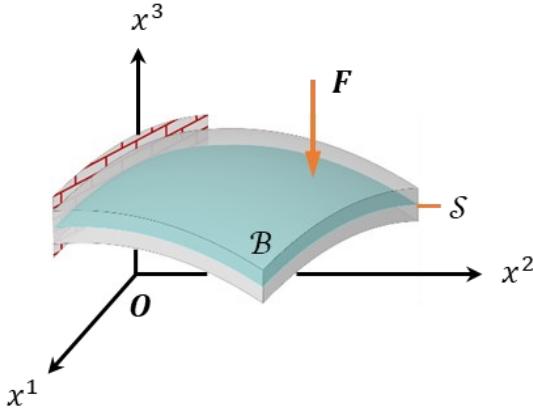


图 5.4 本研究的核心问题为：最小化薄壁结构的柔度优化

Fig. 5.4 Core issue of this study: minimizing the compliance of thin-walled structures

本章工作主要考虑体积分数约束下（作为上限）薄壁结构的静柔度最小化问题。不同于第三章和第四章采用壳体模型进行建模的方式，此处采用实体模型对薄壁结构进行建模，对应三维弹性力学问题^[206]。如图 5.4 所示，假设 \mathcal{B} 为所考虑的薄壁结构所占据的区域，材料设置为线弹性各向同性材料，在基于移动可变形组件法的求解中，设计问题可列为如下形式：

$$\text{Find } \mathbf{D}, \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (5.4a)$$

$$\text{Minimize } C = \int_{\mathcal{B}} \rho_{\mathcal{B}}^s(\mathbf{x}; \mathbf{D}) \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS \quad (5.4b)$$

S.t.

$$\int_{\mathcal{B}} \rho_{\mathcal{B}}^s(\mathbf{x}; \mathbf{D}) \mathbb{E} : \boldsymbol{\varepsilon}_{3d}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}_{3d}(\mathbf{v}) dV = \int_{\mathcal{B}} \rho_{\mathcal{B}}^s(\mathbf{x}; \mathbf{D}) \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_{ad}^{3d}, \quad (5.4c)$$

$$\int_{\mathcal{B}} \rho_{\mathcal{B}}^s(\mathbf{x}; \mathbf{D}) dV \leq \bar{V} \int_{\mathcal{B}} dV, \quad (5.4d)$$

$$\mathbf{u} \in \mathcal{U}^{3d}, \mathbf{D} \in \mathcal{U}_D. \quad (5.4e)$$

这里 \mathbf{u} 为三维弹性力学位移向量，属于约束集 \mathcal{U}^{3d} ，虚位移 \mathbf{v} 为属于可行集 \mathcal{U}_{ad}^{3d} 的虚位移， $\boldsymbol{\varepsilon}_{3d}(\cdot)$ 为三维弹性力学问题应变张量，方程(5.4c)代表三维弹性力学的虚位移原理； \mathbb{E} 为实体材料的三维弹性力学四阶弹性张量， $\rho_{\mathcal{B}}^s(\mathbf{x}; \mathbf{D}) \mathbb{E}$ 则表示嵌入式实体组件描述下的、点 \mathbf{x} 处的材料四阶弹性张量，由设计变量向量 \mathbf{D} 显式控制。符号 \mathbf{F} 和 \mathbf{t} 分别代表预设的体力和面力。另外， C 为静柔度， \bar{V} 为材料体积分数， \mathcal{U}_D 为设计变量向量 \mathbf{D} 所属集合。

5.3.2 灵敏度分析

在该拓扑优化问题中，主要需考虑以下形式的响应函数

$$I(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\mathcal{B}} \rho_B^S(\mathbf{x}; \mathbf{D}) W(\mathbf{u}, \mathbf{u}) dV, \quad (5.5)$$

式中 $W(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ 为关于真实位移 \mathbf{u} 的泛函。为简化推导过程，此处采用 d 代替设计变量向量 \mathbf{D} ，函数 $I(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ 关于扰动 δd 的变分为

$$\delta I(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\mathcal{B}} \delta \rho_B^S(\mathbf{x}; d) W(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \rho_B^S(\mathbf{x}; d) \delta W(\mathbf{u}, \mathbf{u}) dA, \quad (5.6)$$

此处和方程(3.12)形式一致，灵敏度推导流程也一致，可以直接写出体积分数约束和柔度目标函数的灵敏度。首先对于体积分数约束，其计算公式为

$$I_V = \frac{\int_{\mathcal{B}} \rho_B^S(\mathbf{x}; d) dV}{\int_{\mathcal{B}} dV}, \quad (5.7)$$

因此体积分数约束的灵敏度为

$$\frac{\partial I_V}{\partial d} = \frac{\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial \rho_B^S(\mathbf{x}; d)}{\partial d} dV}{\int_{\mathcal{B}} dV}, \quad (5.8)$$

其中偏导数 $\frac{\partial \rho_B^S(\mathbf{x}; d)}{\partial d}$ 由方程(5.3)计算得到，即

$$\frac{\partial \rho_B^S(\mathbf{x}; d)}{\partial d} = \begin{cases} 0, & \text{if } \xi^3(\mathbf{x}) \in [-\frac{t}{2}, -\frac{t}{2} + \bar{\xi}_2^3], \\ \frac{\partial H(\phi_S^S(\mathbf{x}_\perp; d))}{\partial d}, & \text{if } \xi^3(\mathbf{x}) \in \left[-\frac{t}{2} + \bar{\xi}_2^3, \frac{t}{2} - \bar{\xi}_1^3\right], \\ 0, & \text{if } \xi^3(\mathbf{x}) \in \left(\frac{t}{2} - \bar{\xi}_1^3, \frac{t}{2}\right], \end{cases} \quad (5.9)$$

其中 $\frac{\partial H(\phi_S^S(\mathbf{x}_\perp; d))}{\partial d}$ 计算方法和第三章中方程(3.16)一致，此处不再赘述。另外，柔度函数为

$$C = \int_{\mathcal{B}} \rho_B^S(\mathbf{x}; d) \mathbb{E}: \boldsymbol{\varepsilon}_{3d}(\mathbf{u}): \boldsymbol{\varepsilon}_{3d}(\mathbf{u}) dV. \quad (5.10)$$

柔度灵敏度可写为（推导过程与(3.17) – (3.26)一致）

$$\frac{\partial C}{\partial d} = - \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial \rho_B^S(\mathbf{x}; d)}{\partial d} \mathbb{E}: \boldsymbol{\varepsilon}_{3d}(\mathbf{u}): \boldsymbol{\varepsilon}_{3d}(\mathbf{u}). \quad (5.11)$$

5.4 数值实现

5.4.1 基于偏置操作的实体网格生成技术

到目前为止，我们已经完成了构建嵌入式组件和刻画薄壁结构材料分布的任务。然而，前述定义和实际计算仍然存在间隙。具体来说，对任一给定点 \mathbf{x} ，我们难以确定其

在曲面 \mathcal{S} 上的最近点 \mathbf{x}_\perp ，并且难以获得距离 $\xi^3(\mathbf{x})$ 。为此，我们基于厚度偏置的概念提出一种实体网格生成技术从而简化上述任务。

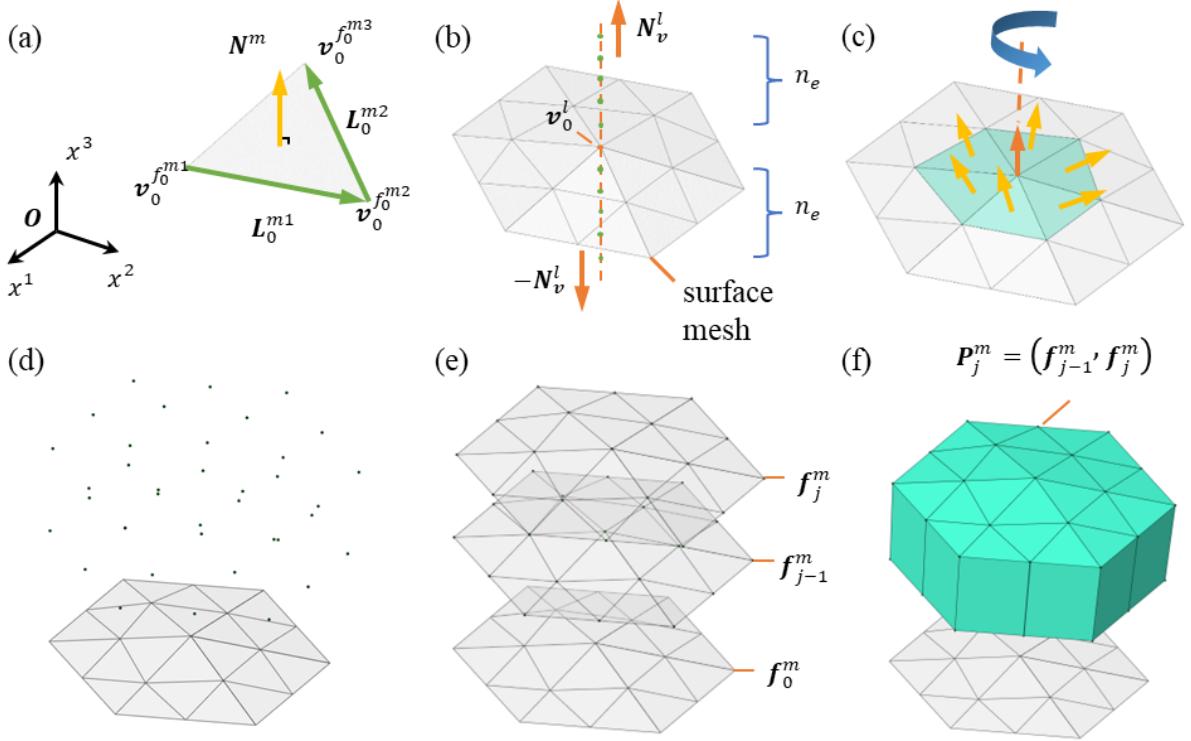


图 5.5 基于偏置的实体网格生成技术示意图：(a) 单元的单位法向量定义；(b) 基于偏置操作生成节点；(c) 通过 1-ring neighborhood 方法定义节点法向量；(d) 生成实体网格的节点；(e) 曲面单元生成；(f) 实体单元生成

Fig. 5.5 Schematic illustration of the process of offset-based solid mesh generation scheme: (a) definition of the unit normal vector of an element; (b) generating nodes according to the offset operation; (c) normal vector definition at a node via the 1-ring neighborhood scheme; (d) generating nodes of the solid mesh (taking the positive normal direction as example); (e) surface element generation; (f) solid element generation

令 $\mathcal{S}_\Delta = \{\mathbf{V}_0, \mathbf{F}_0\}$ 代表曲面 \mathcal{S} 的三角网格（ \mathcal{S}_Δ 可通过 CAD 模型生成或者直接从三维扫描得到），其中 $\mathbf{V}_0 = \{v_0^l | 1 \leq l \leq n_v\}$ 代表节点集， v_0^l 代表第 l 号节点的笛卡尔坐标， $\mathbf{F}_0 = \{f_0^m | 1 \leq m \leq n_f\}$ 代表单元集， $f_0^m = (f_0^{m1}, f_0^{m2}, f_0^{m3})$ 为第 m 号单元的节点编号顺序。以第 m 号单元为例（如图 5.5 (a) 所示），其单位法向量 \mathbf{N}^m 定义为：

$$\mathbf{N}^m = \frac{\mathbf{L}_0^{m1} \times \mathbf{L}_0^{m2}}{\|\mathbf{L}_0^{m1} \times \mathbf{L}_0^{m2}\|}, \quad (5.12)$$

式中 $\mathbf{L}_0^{m1} = \mathbf{v}_0^{f_0^{m2}} - \mathbf{v}_0^{f_0^{m1}}$ 和 $\mathbf{L}_0^{m2} = \mathbf{v}_0^{f_0^{m3}} - \mathbf{v}_0^{f_0^{m2}}$ 分别代表单元的两条边。构建实体网格 \mathcal{B}_Δ 的第一步为节点的生成。假设沿厚度方向生成的实体网格数量为 $2n_e$, 整体厚度为 t 。以曲面网格的第 l 号节点为例, 实体网格的节点根据厚度偏置操作生成为 (如图 5.5 (b) 所示) :

$$\mathbf{v}_j^l = \mathbf{v}_0^l + j \cdot \mathbf{N}_v^l \cdot \frac{t}{2n_e}, -n_e \leq j \leq n_e, \quad (5.13)$$

式中 \mathbf{N}_v^l 为第 l 号节点的法向量。在经典微分几何中, 假设 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(u, v)$ 为参数化的可微曲面, 其上点 $\mathcal{S}(u_0, v_0)$ 处的单位法向量定义为 $\mathbf{N}(u_0, v_0) = \mathbf{S}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{S}_v(u_0, v_0) / \|\mathbf{S}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{S}_v(u_0, v_0)\|$ 。然而, 离散网格的曲面连续性已经被破坏, 通常仅具备 G^0 连续性。因此, 此处采用了“1-ring neighborhood”的方法^[207]来将连续情况下的法向定义推广至离散情况。令 $\mathbf{f}_{0l} = \{\mathbf{f}_{0l}^m | 1 \leq m \leq n_f^l\}$ 为包含节点 \mathbf{v}_0^l 的单元集, 在该节点处的法向量定义为 (如图 5.5 (c) 所示) :

$$\mathbf{N}_v^l = \frac{\sum_{\mathbf{f}_{0l}^m \in \mathbf{f}_{0l}} |\mathbf{f}_{0l}^m| \mathbf{N}^m}{\left\| \sum_{\mathbf{f}_{0l}^m \in \mathbf{f}_{0l}} |\mathbf{f}_{0l}^m| \mathbf{N}^m \right\|}, \quad (5.14)$$

式中 \mathbf{N}^m 和 $|\mathbf{f}_{0l}^m|$ 分别代表单元 \mathbf{f}_{0l}^m 的法向量和面积。从 $l = 1$ 到 n_v 遍历每个节点, 实体网格的节点即可如图 5.5 (d) 所示生成。另外, 实体网格的单元同样通过偏置操作获得。从 $m = 1$ 到 n_f 遍历原始曲面网格上每个单元, 第 j 层曲面网格定义为:

$$\mathbf{f}_j^m = \mathbf{f}_0^m + j n_v = (f_0^{m1} + j n_v, f_0^{m2} + j n_v, f_0^{m3} + j n_v). \quad (5.15)$$

上式意味着每一层节点均保留了原始曲面网格的拓扑连接关系 (如图 5.5 (e) 所示)。进一步地, 第 j 层沿着正法向的实体网格定义为 $\mathbf{P}_j^m = (\mathbf{f}_{j-1}^m, \mathbf{f}_j^m)$, 如图 5.5 (f) 所示。

总结而言, 实体网格装配为 $\mathcal{B}_\Delta = \{\mathbf{V}_\mathcal{B}, \mathbf{P}_\mathcal{B}\}$, 其中 $\mathbf{V}_\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_j^l | 1 \leq l \leq n_v, -n_e \leq j \leq n_e\}$ 为节点集, $\mathbf{P}_\mathcal{B} = \{\mathbf{P}_j^m | 1 \leq m \leq n_f, -n_e \leq j \leq n_e\}$ 为单元集。基于前述定义, 刻画薄壁结构材料布局的障碍 (即求解拓扑描述函数 $\phi_{\mathcal{B}_\Delta}^s(\mathbf{v}_j^l; \mathbf{D})$) 已经被移除。具体而言, 对于任意节点 \mathbf{v}_j^l , 其在网格曲面 \mathcal{S}_Δ 上的最近点为 \mathbf{v}_0^l , 这意味着我们通过定义结构化网格, 将投影点的求解转化为易于实现的下标修改操作。

5.4.2 结构响应与离散灵敏度求解

在当前工作中, 结构响应采用商业软件 Abaqus 中的 C3D6 实体单元求解。此工作采用人工材料模型^[208]来计算物理属性的分布。对于第 e 号实体单元, 其等效杨氏模量 E_e 可根据实体材料的杨氏模量 E^s 计算为

$$E_e = \frac{\sum_{i=1}^6 (\rho_\mathcal{B}^s)_{e,i}}{6} E^s, \quad (5.16)$$

式中 $(\rho_B^s)_{e,i}$ 代表材料分布描述函数 $\rho_B^s(\mathbf{x}; d)$ 离散后取在第 e 号单元的第 i 号节点的值。因此，单元刚度阵可通过人工材料模型表达。以第 e 号单元为例，其单元刚度阵计算为：

$$\mathbf{k}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^\top \mathbf{D}_e \mathbf{B} dV = \frac{E_e}{E^s} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^\top \mathbf{D}^s \mathbf{B} dV = \frac{E_e}{E^s} \mathbf{k}_0, \quad (5.17)$$

式中符号 Ω_e 代表由第 e 号单元占据的区域，符号 \mathbf{B} 代表应变位移矩阵， ρ_e 和 \mathbf{D}^s 分别代表人工密度和实体材料的本构矩阵，且有 $\mathbf{D}_e = \rho_e \mathbf{D}^s$ 成立， $\mathbf{k}_0 = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^\top \mathbf{D}^s \mathbf{B} dV$ 代表该单元取作实体的刚度阵。因此，前述灵敏度分析过程根据有限元计算结果实现。具体而言，柔度的灵敏度具有以下形式：

$$\frac{\partial C}{\partial d} = -\mathbf{U}^\top \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial d} \mathbf{U} = -\sum_e^{n_e} \frac{\partial E_e}{\partial d} \frac{\mathbf{U}_e^\top \mathbf{k}_0 \mathbf{U}_e}{E^s} = -\sum_e^{n_e} \frac{\partial E_e}{\partial d} \frac{C_e}{E_e}, \quad (5.18)$$

其中 \mathbf{U} 为区域 B_Δ 的位移向量， \mathbf{U}_e 为第 e 号单元的位移向量， \mathbf{K} 为总体刚度阵，符号 C_e 代表第 e 号单元通过有限元分析得到的单元柔度，即单元应变能的二倍。偏导数 $\frac{\partial E_e}{\partial d}$ 通过公式(5.9)关于节点的离散形式进行计算。另外，体积分数关于设计变量 d 的离散灵敏度同理。

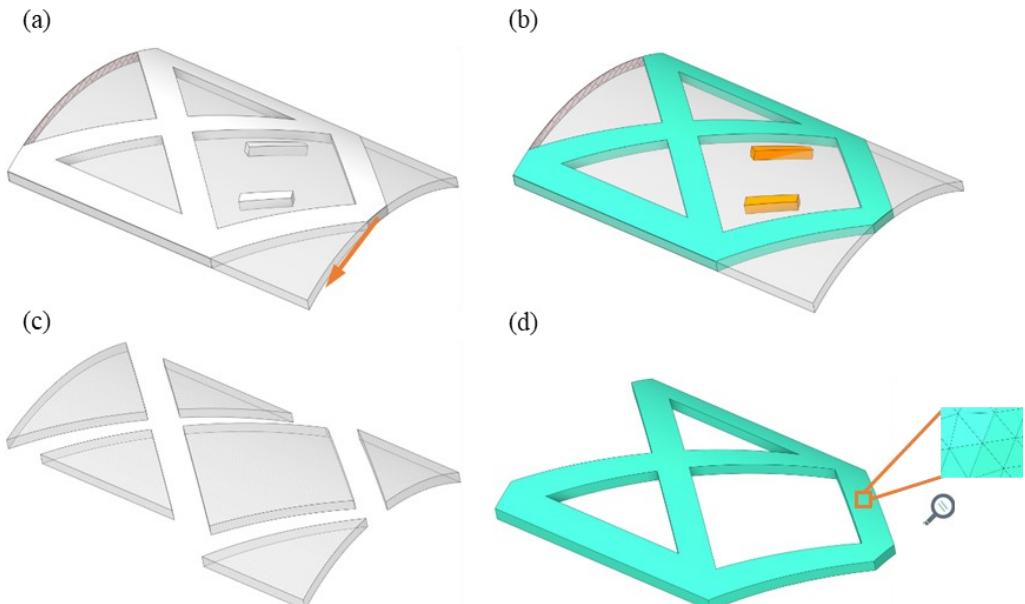


图 5.6 自由度删除技术示意图：(a) 原始的计算模型；(b) 依据加载路径识别算法区分结构外组件（橙色）和结构内的组件（绿色）；(c) 移除的网格；(d) 根据自由度删除技术生成的窄带网格

Fig. 5.6 Schematic diagram of the DOF removal technique: (a) original computational model; (b) distinguishing structural components (visualized in green) from unstructured components (visualized in orange) according to the loading path identification algorithm; (c) removed mesh; (d) narrow-band mesh generated from the DOF removal technique

5.4.3 自由度删除技术

得益于 MMC 方法中组件边界的显式化描述，目前工作中的材料布局同样具备清晰的二值特性。因此，我们采用自由度删除技术（DOF removal technique）^[209]进一步提升优化问题的求解效率。该技术在每一迭代步中均产生一个窄带网格，如图 5.6 所示（以单加载点情况为例）。具体而言，我们首先实施加载测试来确保外力和位移边界条件均施加于结构上。其次，利用加载路径识别算法^[189]来区分对结构有贡献的组件和结构外组件（如图 5.6 (b)所示）。最后，自由度删除技术剔除结构外组件，并选择出对结构有贡献的组件所覆盖的单元与节点，进而形成一个新的用以实际结构分析的窄带网格（如图 5.6 (d)所示）。

对于该过程中剔除的弱单元，其相应的离散灵敏度也是零，因此自由度删除技术不会对于灵敏度的求解结果造成影响。值得注意的是，自由度删除技术类似于网格重划分技术，因为二者均会在每次迭代中重建网格。然而，自由度删除技术生成新网格的成本更低。另外，窄带网格模型不受灰度单元影响，这极大地提升了问题求解的精度。

5.4.4 优化流程与技术备注

作为技术章节的结尾，此处整理并总结所提出的薄壁结构设计方法流程。该流程主要包括三个核心步骤，即几何前处理，嵌入式组件布局，以及结构优化的实施。

首先，基于给定的网格曲面 \mathcal{S}_Δ （作为所考虑的薄壁结构中曲面 \mathcal{S} 的逼近），我们生成对应的实体网格 \mathcal{B}_Δ ，并施加边界条件。根据几何特征，将网格曲面分解为多个面片，即 $\mathcal{S}_\Delta = \bigcup_{k=1}^{n_p} \mathcal{P}_k$ 。对每一个面片，我们通过曲面切割操作生成对应的中间曲面 \mathcal{P}_k^* （亏格为零的单连通开曲面），并通过共形参数化技术获得共形映射 $f_k: \mathcal{P}_k^* \rightarrow \mathcal{M}_k, k = 1, \dots, n_p$ ，其中 \mathcal{M}_k 代表第 k 号参数域。

其次，在参数域 \mathcal{M}_k 中设置组件变量 \mathbf{D}^k ，从而生成初始拓扑描述函数 $\phi_{\mathcal{M}_k}^s(\mathbf{p}; \mathbf{D}^k)$ 。中曲面 \mathcal{S} 的材料分布则由曲面拓扑描述函数刻画为 $\phi_{\mathcal{S}}^s(\mathbf{x}; \mathbf{D}^k)$ 。投影操作则进一步用于实体结构中嵌入式组件的布置。

在建立嵌入式组件后，本方法集成自由度删除技术，调用有限元分析来求解结构响应和灵敏度，并进一步提交至优化求解器从而更新设计变量。这些步骤与组件布局一起迭代进行，直到满足收敛准则。最后，本研究能够以较少的设计变量和自由度为代价，获得具有清晰载荷传递路径和结构边界的最终设计。

为进一步解释实现细节，下面提供一些技术备注：

- (1) 灵敏度的求解与雅可比转换阵 \mathbf{J} （表示物理空间到参数域的转换）无关，这极大简化了计算过程；

- (2) 为了简化和通用性的考虑，目前的方法采用三角曲面网格和棱柱实体网格；然而，其他类型的单元包括四边形曲面网格、四面体实体网格和高阶单元，也可以集成到当前方法中；
- (3) 嵌入式组件也可以使用两个外曲面而不是中曲面来构造；这可以通过将笛卡尔积改为 $\mathcal{B} = \mathcal{S}_1 \times [0, t]$ 或 $\mathcal{B} = \mathcal{S}_2 \times [-t, 0]$ 的形式实现，这里符号 \mathcal{S}_1 和 \mathcal{S}_2 表示两个外曲面；
- (4) 构造嵌入式组件的另一种方法是实体映射：将薄壁结构直接映射到三维标准参数域；然而，三维实体域的缺乏类似的二维共形结构^[210]，因此这种方案具有诸多实现上的障碍。

5.5 算例验证

本节通过三个代表性的具有复杂几何的数值算例来验证所提方法的有效性和高效性，并进一步研究影响薄壁结构设计结果的一些关键因素，比如中面曲率、边界条件和体积分数等。在不失一般性的情况下，材料设置为无量纲化。具体而言，各向同性实体材料的杨氏模量和泊松比分别取为 $E = 1$ 以及 $\nu = 0.3$ 。所有算例均采用三棱柱单元进行有限元分析。除非特殊说明外，所有数值算例的体积分数上限均为 40%，采用自由度删除技术，优化求解器采用移动渐近线方法。当每个设计变量在相邻迭代步间的相对变化量低于规定的阈值时（即 $Tol=0.0001$ ），优化进程中止。

5.5.1 摆线形薄壁结构算例

在该算例中，我们测试了摆线形薄壁结构的拓扑优化设计效果，该结构厚度为 0.5，问题设置如图 5.7 所示。该模型中曲面的结构边界由下列参数方程精确描述：

$$\begin{cases} x^1 = (a + b) * \cos(\theta) - \frac{1}{n} * b * \cos\left((a + b) * \frac{\theta}{b}\right), \\ x^2 = (a + b) * \sin(\theta) - \frac{1}{n} * b * \sin\left((a + b) * \frac{\theta}{b}\right), \\ x^3 = 0, \end{cases} \quad (5.19)$$

式中 $\theta \in [0, 2\pi]$ 为参数坐标，且有 $a = 4$, $b = 1$, $n = 2$ 。该算例的厚长比在 1/11 到 1/9 之间。曲面网格包括 69290 个单元和 34982 个节点，实体网格则是通过基于偏置的网格技术生成，且厚度方向上划分 9 个单元。该算例的边界条件展示于图 5.7 (b) 中，其四角施加固定端约束，中心点处沿厚度方向施加幅值为 200 的线荷载（由于该线段长度为 0.5，合力的幅值为 100）。

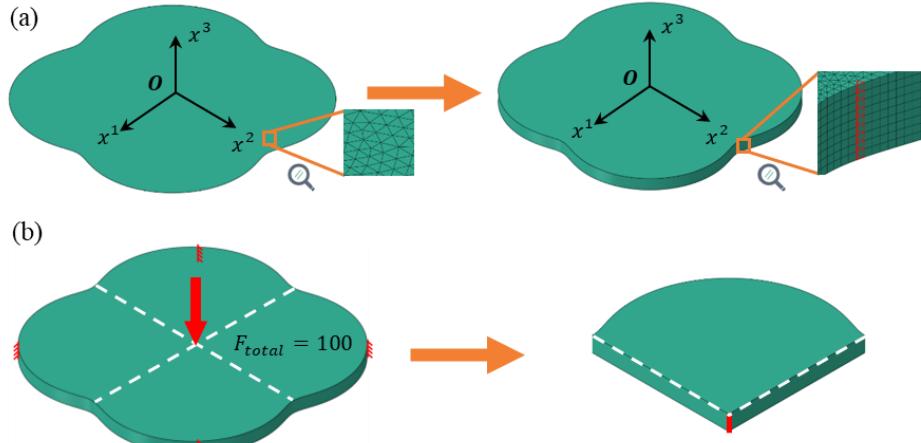


图 5.7 摆线形薄壁结构的问题设置: (a) 通过中曲面网格 (左侧) 生成实体网格 (右侧); (b) 摆线形薄壁结构的位移与外载荷边界条件 (外力为重心点处沿厚度方向施加的线载荷, 如右下角所示)

Fig. 5.7 Problem settings of the cycloid-shaped thin-walled structure: (a) generating the solid mesh (right) from the middle surface mesh (left); (b) displacement and external load conditions of the cycloid-shaped thin-walled structure (the external load is a line load (right) applied at the center point along the thickness direction)

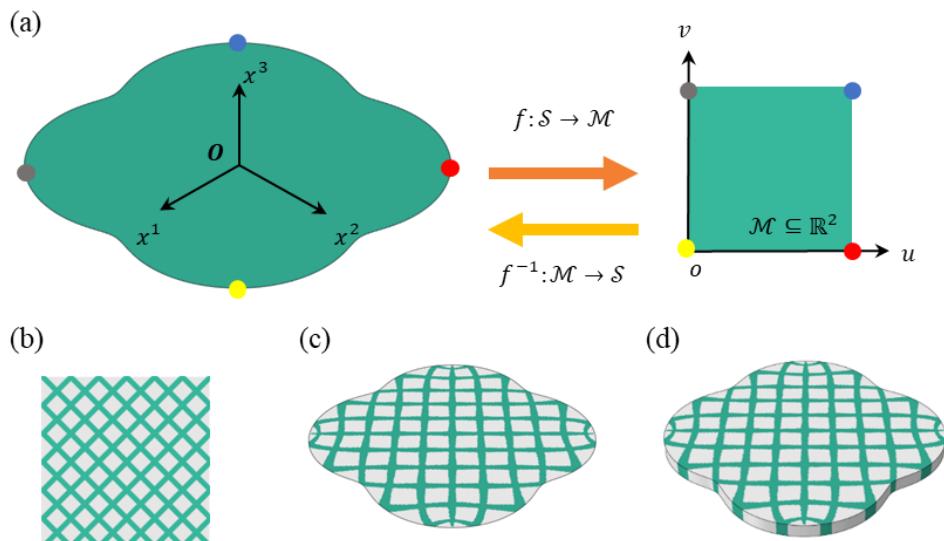


图 5.8 摆线形薄壁结构的初始设置: (a) 摆线形薄壁结构的共形映射; (b-d) 组件在参数域、中曲面、实体域的初始布局

Fig. 5.8 Initial settings of the epicycloid-shaped thin-walled structure: (a) conformal mapping of the middle surface of the epicycloid-shaped thin-walled structure; (b-d) initial layout of components in (b) parametric domain, (c) middle surface, and (d) solid domain

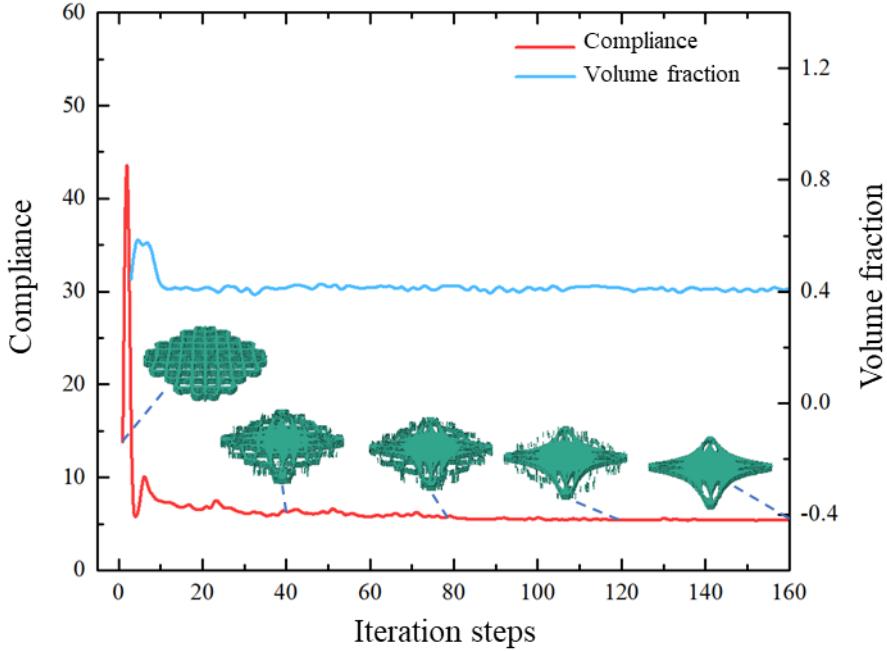


图 5.9 摆线形薄壁结构的迭代历史和中间结果

Fig. 5.9 Iteration histories and intermediate results of the epicycloid-shaped thin-walled structure

图 5.8 展示了从中曲面到标准参数域的映射过程，以及初始布局中的 72 个组件。图 5.9 展示了优化迭代历史，从中可以看出在经历了前几十步的振荡后，结构响应在大约 160 步时趋于稳定，并收敛至 $C^{\text{opt}} = 5.34$ 。此外，图 5.9 展示了一些中间的优化结果，其中部分组件在迭代过程中逐渐形成加载点与固定端之间的主要承重结构，而其他组件则随着迭代的进行而逐渐消失。最后，图 5.10 展示了最终的设计方案 ($C^{\text{opt}} = 5.34$)，其结果与膜结构的拓扑优化结果相似。

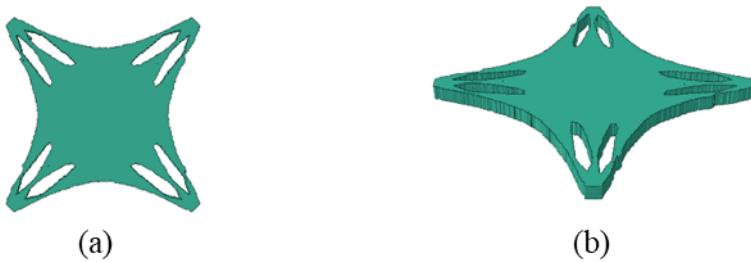


图 5.10 摆线形薄壁结构的优化结果：(a) 俯视图；(b) 侧视图

Fig. 5.10 Optimized design of the epicycloid-shaped thin-walled structure: (a) top view; (b) side view

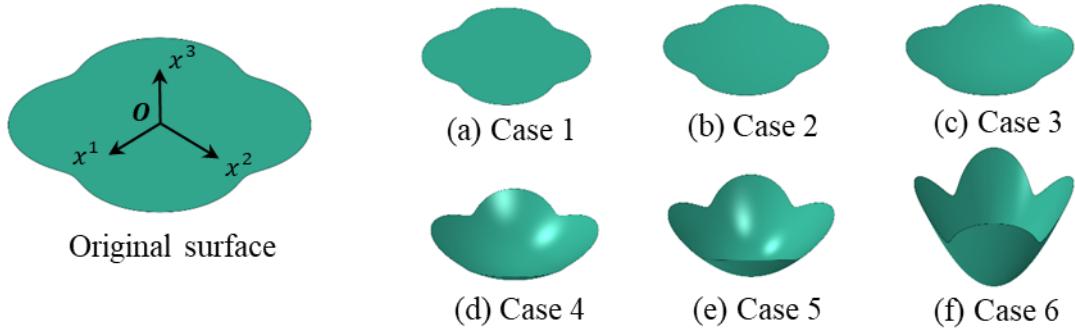


图 5.11 中曲面调整结果的展示: 从 Case 1 到 Case 6, 参数 γ 分别取为 0, 0.025, 0.05, 0.10, 0.15, 0.30

Fig. 5.11 Illustration of modifications of the middle surface: from case 1 to 6, the parameter γ is set as 0, 0.025, 0.05, 0.10, 0.15, 0.30, respectively

为研究曲率对于最终设计的影响, 原始薄壁结构的中曲面坐标按照下列方程调整为:

$$x^3 = \gamma * ((x^1)^2 + (x^2)^2), \quad (5.20)$$

其中, 参数 γ 控制曲面的弯曲程度, 不同参数取值所得中曲面如图 5.11 所示。这里网格生成的过程不再赘述, 边界条件与图 5.7(c)保持一致, 即四角点固支, 中心点处受线荷载。优化结果如图 5.12 所示。

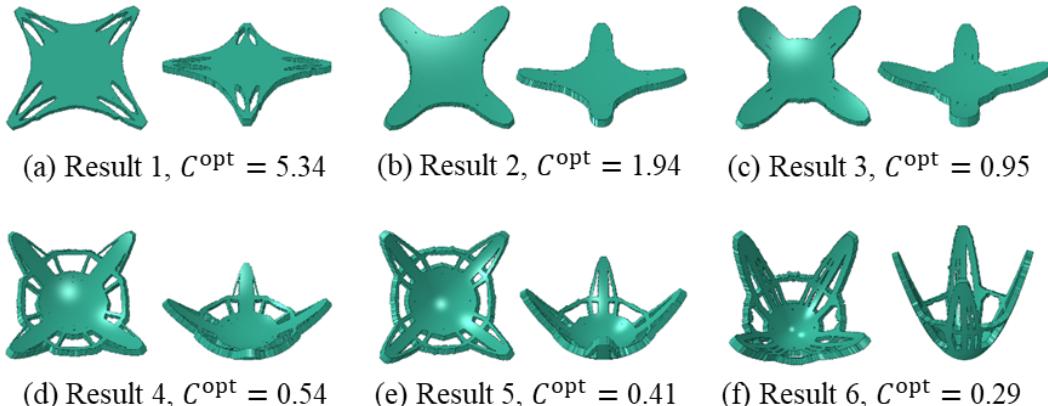


图 5.12 不同曲率最终设计之间的比较

Fig. 5.12 Comparison between the final designs with different curvatures

Case 1 和 Case 2 在曲率上略有不同, 但这导致了外力传递机制的突变, 并最终形成了不同的优化结构。对于 Case 1, 结构主要通过面外弯曲和横向剪切来抵抗外部荷载(由于几何为平面模型, 面内应力相对较小)。而在 Case 2 中, 曲率的微小变化使结构隆起, 这极大地提升了面内刚度的利用程度和内力沿曲面方向变形能所占的比例。结果 2 和结果 3 具有类似的材料分布, 但在曲率的影响下, 柔度函数差异较大, 这可以通过几何诱

导刚度 (geometric-induced rigidity, GIR) 效应解释^[201,211,212]。因此，薄壁结构的形状和形貌优化设计均具有提高结构性能的能力。从结果 3 到结果 4，构型的差异不仅仅来源于不同类型应变能（剪切、膜、弯曲）比例的变化，也可能来自于结构优化中的分岔现象^[213]，即结构优化问题的解在分岔点处不稳定，问题设置参数的微小变化也可能导致最终设计的突变。在结果 4-6 中，最终设计在中间区域形成了环状结构，这可以有效地提高整体刚度。上述数值算例表明，在当前边界条件下，四个支座间的连接结构在高圆顶情况下比在低圆顶结构中更有效（在后三个高圆顶案例中均生成了前三个低圆顶案例所不具备的环状连接结构）。

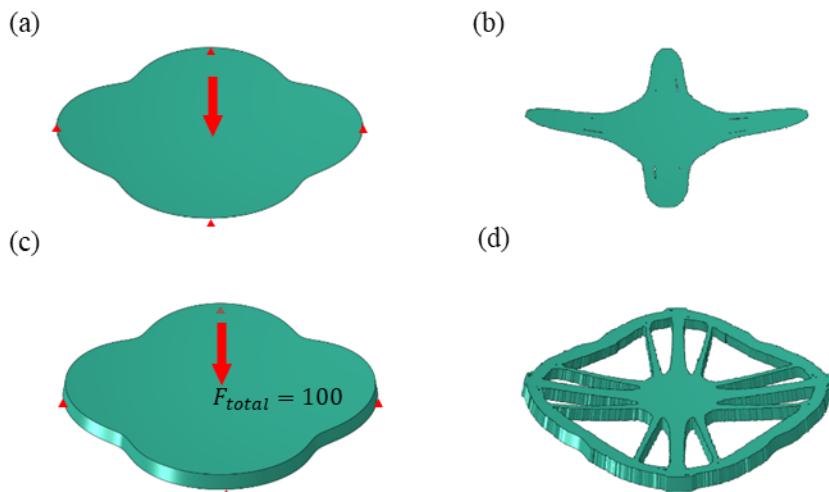


图 5.13 基于壳体模型的方法与本工作所提方法的对比：(a) 在壳体模型上施加的边界条件；(b) 基于壳体模型方法的最终设计， $C^{\text{opt}} = 1.93$ ；(c) 施加在基于实体方法的边界条件；(d) 基于实体方法的最终设计， $C^{\text{opt}} = 8.12$

Fig. 5.13 Comparison of the shell-based approach and the proposed approach: (a) boundary conditions applied in the shell model; (b) final design ($C^{\text{opt}} = 1.93$) of the shell-based approach; (c) boundary conditions applied in the solid-based approach, which is out of the middle surface; (d) final design ($C^{\text{opt}} = 8.12$) of the solid-based approach

在本算例中，我们还比较了基于壳体模型的设计方法（即本文第三章所提方法）和基于实体计算模型的设计方法所得的优化结果，以证明实体网格在厚度方向上处理边界条件的能力。首先，我们验证了两种方法的关联性。图 5.13 (a) 描述了一个与图 5.11 (b) 中 Case 2 相同几何形状的壳体模型，其角点固定，且在中心点处施加了大小为 100 的法向力。基于壳体模型的设计方法最终结果如图 5.13 (b) 所示，这与基于实体的方法（如图 5.12 (b) 所示）所得结果类似，柔度函数的相对误差为 0.52%。仅基于上述结果，我们可能会得出基于实体的方法可以被基于壳体模型的方法所取代的观点。然而，下一个数

值实验则驳斥了这个论断。图 5.13 (c)展示了与图 5.12 (b)结果 2 具有相同几何形状和外载荷条件的模型，但这里的固定边界改为底面上的四个点（在中曲面外）。优化结果如图 5.13 (d)所示，从中可以看出最终设计形成了环形的轮廓和多个分叉的杆件结构，而非直接从加载点连接到固定端。

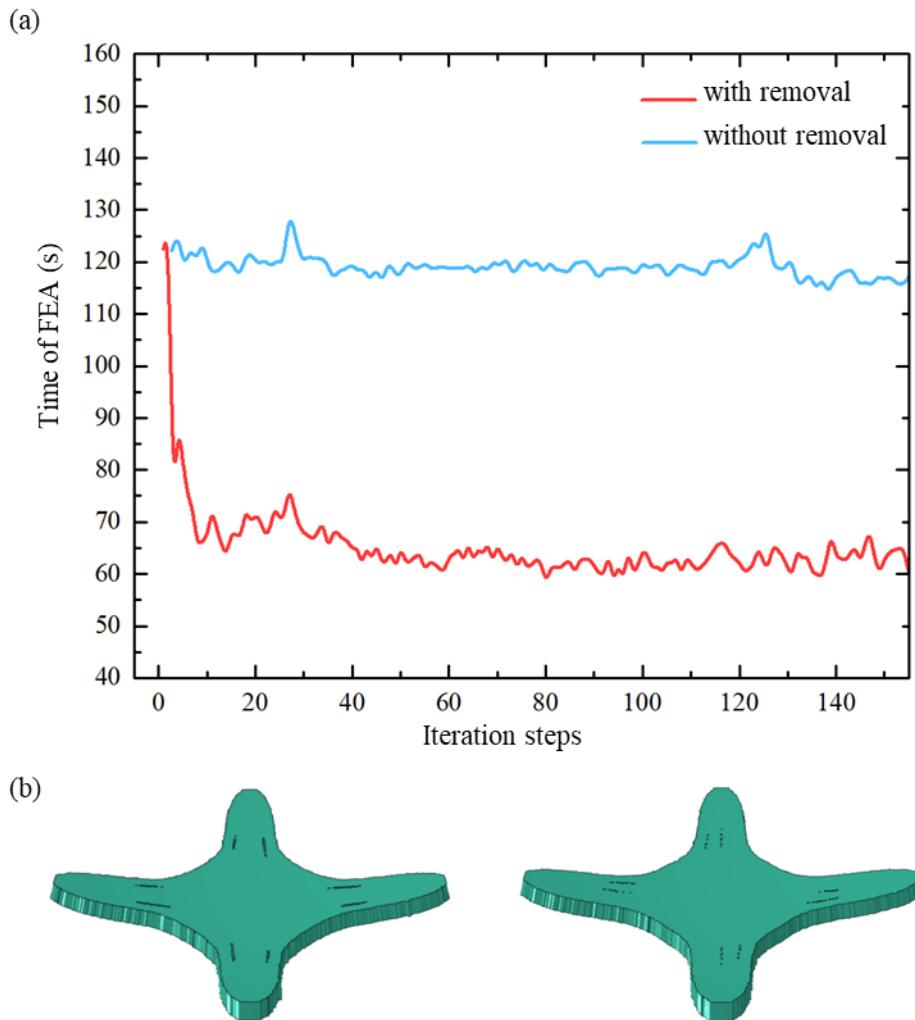


图 5.14 采用/不采用自由度删除技术的优化结果对比：(a) 有限元时间对比；(b) 最终设计结果对比；左侧为采用自由度删除技术结果，右侧则为不采用的设计结果

Fig. 5.14 Optimized results with/without the DOF removal technique: (a) comparison of FEA times with and without the DOF removal technique; (b) comparison of final designs with and without the DOF removal technique

需要注意的是，壳体模型是基于所谓的中面建模假设构建的，因此基于壳体模型的方法无法准确地求解上述算例（如图 5.13 (c-d)所示；壳体模型对于中面外的位移边界

条件通常可以采用运动学假设进行施加，但是针对中面外的力边界条件通常采用积分或简化手段处理而带来近似误差）。这也是许多类似的基于壳体模型的结构优化方法所面临的常见问题。相比之下，本章节所提出的方法利用实体网格，可有效解决上述挑战。然而，实体网格可能会导致沉重的计算负担，因此本研究进一步采用自由度删除技术来提高计算效率。为证实该技术的有效性和准确性，我们采用图 5.12 (b) 中结果 2 所对应的几何模型和边界条件，对比了该算例中使用和不使用该技术的优化结果。如图 5.14 所示，结果表明在不影响优化结构的情况下，有限元分析的平均时间从 118.46（秒/步）降低到 65.26（秒/步），减少 44.91% 的结构分析时间。

5.5.2 瓶状薄壁结构算例

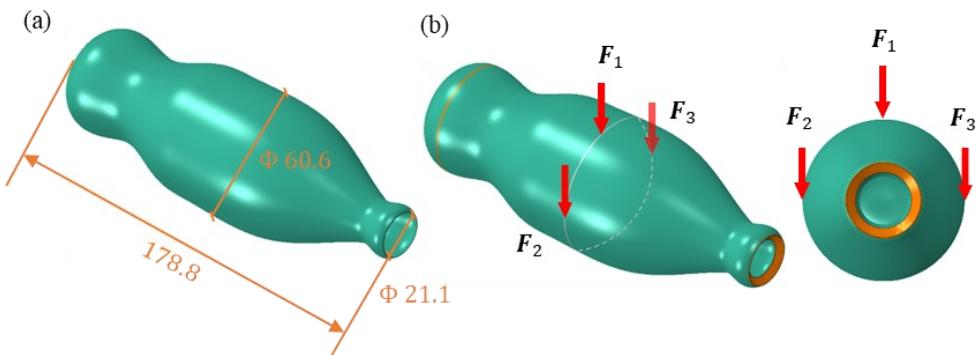


图 5.15 瓶子算例的几何与边界条件：(a) 中曲面模型；(b) 实体模型与边界条件

Fig. 5.15 Geometry and boundary conditions of the bottle-shaped structure example: (a) middle surface model; (b) solid model and boundary conditions

在第二个算例中，我们考虑回转型瓶体的结构设计，如图 5.15 所示。瓶子模型的几何信息主要展示在图 5.15 (a) 中，其中瓶子的总高为 178.8，最大直径为 60.6，瓶颈处的直径为 21.1。曲体模型根据曲面模型生成，包括 117040 个单元和 58568 个节点，厚度为 4，厚度方向上划分 6 个单元。图 5.15 (b) 展示了边界条件的施加情况，其中在瓶子的中间环（灰色）上施加了三个具有同样幅值的集中力 ($|F_1| = |F_2| = |F_3| = 100$)，瓶子的顶部和底部（橙色）固定。

对于这样的回转体，我们可以不同的方式进行映射。最简单的方式即为将曲面直接映射至平面参数域。或者是将曲面先划分为两部分：底部直接映射，而主体曲面则先施加曲面切割操作再进行映射。不同映射策略的效果可以通过组件布局的方式直观地展示。图 5.16 (a-c) 展示通过单面片直接映射的过程，其中瓶颈处（红色）被映射至长方形的边界（如图 5.16 (b) 所示）。组件首先被布置于参数域中（如图 5.16 (b) 所示）然后映射至原始结构上。然而，图 5.16 (c) 说明了即使该单面片映射是双射且保拓扑的，薄壁结构

的组件布局仍然严重失真，这是全局映射固有的刚性导致的。我们采用多面片策略解决该难题。如图 5.16 (d-f) 所示，瓶体曲面首先沿着红线切割，再映射到参数域，即图 5.16 (e) 上。由此产生的基于多面片思想的组件布局如图 5.16 (f) 所示，其中组件的构型是清晰可见的（为了展示，底部没有放置组件）。多面片拼接方案保留了几何建模的保真度和结构的承载性能，同时显著降低了单面片框架下全局映射的畸变。因此，后续的瓶子设计算例均采用图 5.16 (d-f) 所对应的共形参数化策略。

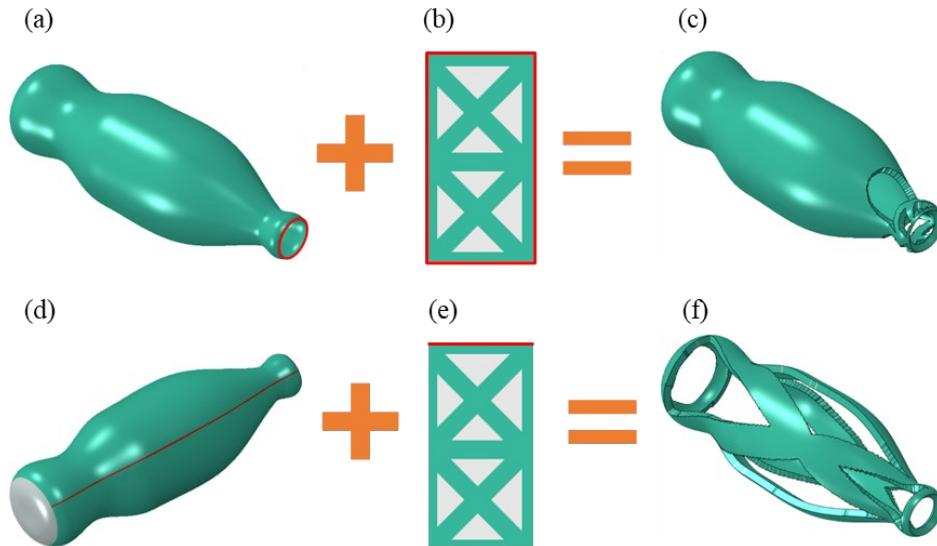


图 5.16 通过基于单面片的全局映射(a-c)和多面片缝合技术(d-f)的组件布局对比

Fig. 5.16 Comparison of component layouts via a single-patch-based global mapping (a-c) and the multi-patch stitching scheme (d-f)



图 5.17 瓶子算例的组件初始布局；(a) 参数域中；(b) 原始薄壁结构上

Fig. 5.17 Initial layout of components of the bottle example: (a) in the parametric domain; (b) on the original thin-walled structure

初始组件设置为 3×6 的单胞布局，如图 5.17 所示。优化的迭代历程如图 5.18 所示，从中可以看出，柔度函数迅速收敛到一个平坦值。在第 30 步，主承力结构已经清晰形成，随后的优化过程集中在较小组件和结构刚度的微调上。最终设计的柔度为 $C^{\text{opt}} = 0.6462$ ，如图 5.19 所示。

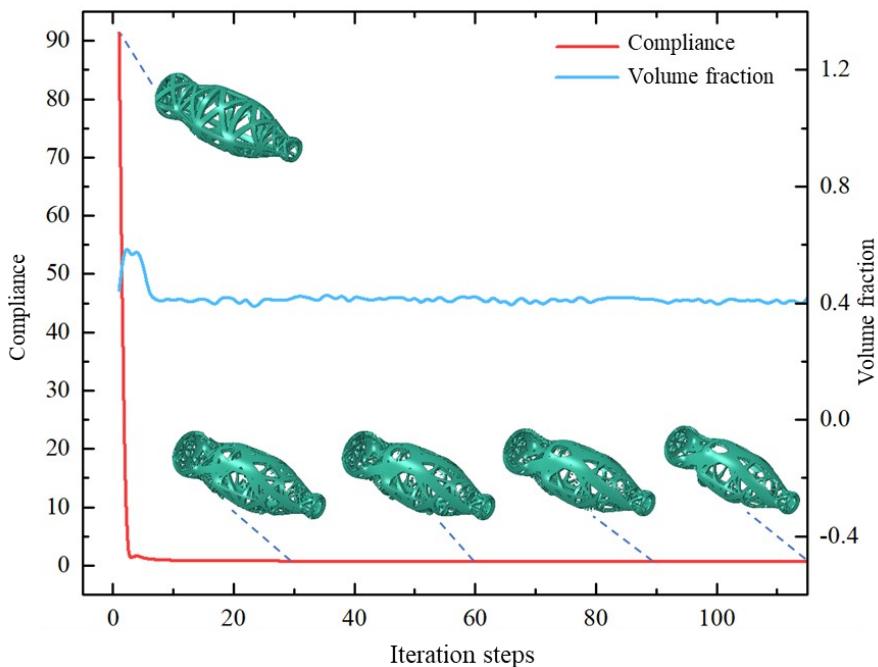


图 5.18 瓶子算例的迭代历史和中间结果

Fig. 5.18 Iteration histories and intermediate results of the bottle-shaped structure

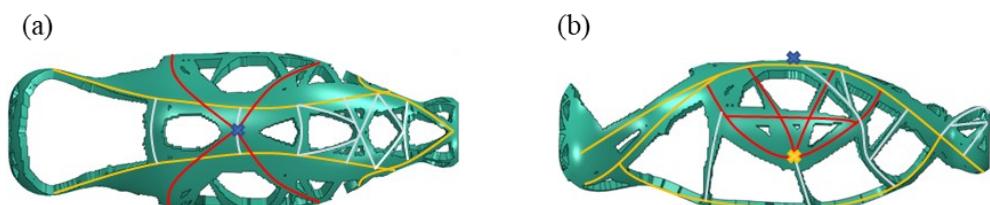


图 5.19 瓶子算例最终设计由三类具有不同功能的分层式组件构成

Fig. 5.19 Final design of the bottle-shaped shell structure example is composed of three categories of hierarchical components with different functionalities

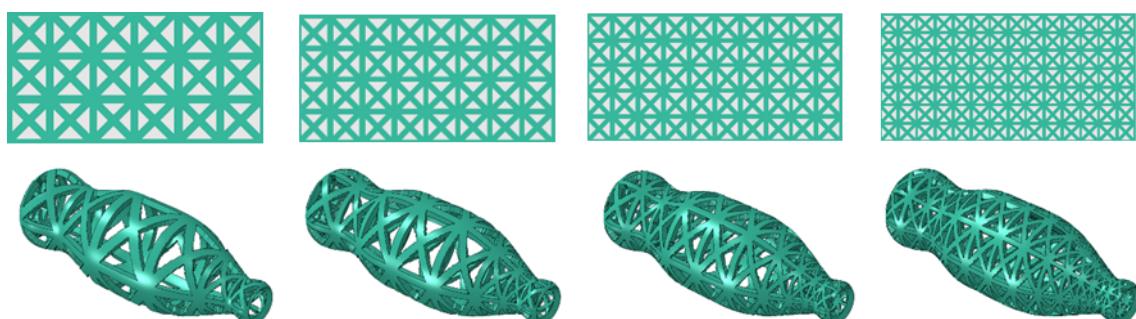


图 5.20 瓶子算例不同参数设置的组件初始布局

Fig. 5.20 Initial layouts of components of the bottle example with different parameter settings

从俯视图可以看出，最终设计由三种类型的分级组件构成，每一种都具有抵抗外力的独特功能。如图 5.19 (a)所示，红色组件在集中力 \mathbf{F}_1 的加载点（标记为蓝色十字）形成一个平台来承受外部载荷，因此这些组件为承力型组件。但由于加载点离固定端较远，因此需要采用桥连组件（金色）将加载平台连接至固定端，形成主要的传力路径（而非机构）。除此之外，最终设计还演变出一系列的增强型组件（灰色，第三类），以增强整个结构的刚度和稳定性。这些组件主要分布在不同的桥连组件之间，形成多个三角形子结构。在图 5.19 (b)中，最终结构的侧视图显示了沿曲面施加的切向集中力 \mathbf{F}_2 的影响。承力型组件（红色）形成爪形子结构，从而抓取横向的桥连组件（金色），并进一步抵抗加载点周围的剪切变形。从以上结果可以看出，本章所提方法具备 MMC 方法的多种优势，比如优化后的结构边界清晰，无需过滤算子处理灰度单元和棋盘格现象，组件具有特定的力学意义，可为工程师理解和解释最终设计提供便利等。在本例中，我们还检验了组件初始布局对优化结果的影响。如图 5.20 所示，我们采用了不同的组件布局设置，其中底部所有组件布局设置为 2×2 的单胞，瓶体部分组件布局设置从左到右依次为 3×6 单胞， 4×8 单胞， 5×10 单胞， 7×14 单胞。

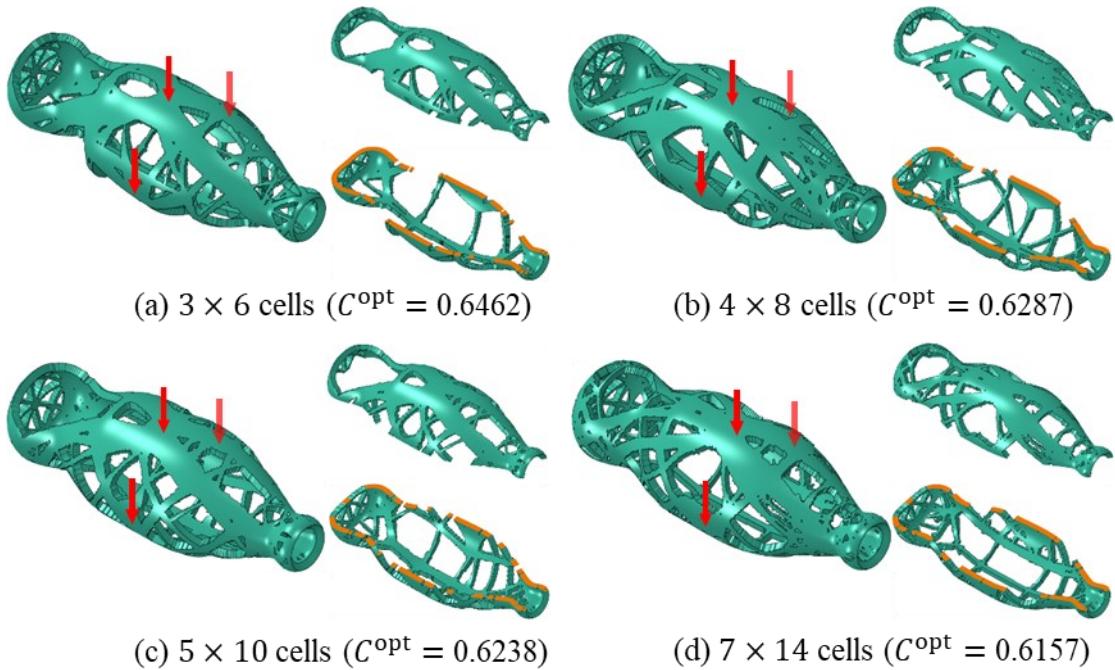


图 5.21 瓶子算例不同初始布局的最终设计

Fig. 5.21 Final designs of different initial layouts for the bottle example

图 5.21 为各种布局的最终设计，从中可以看出，不同的主承重结构和柔度函数比较相近。然而，随着组件布局的细化，更多的细节，如增强型组件被添加到最终设计中。

因此，我们建议目前的方法可以使用初始组件数量较少的优化结果来快速构建主力传递路径，而初始组件数量较多的优化结果可以实现具有更多细节的设计。

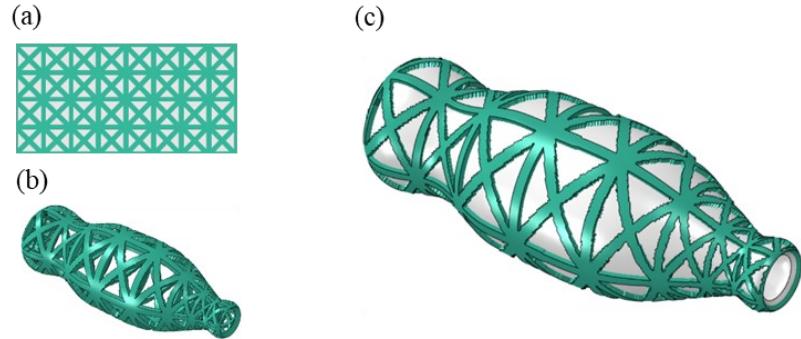


图 5.22 瓶子算例加筋结构设计的问题设置

Fig. 5.22 Problem settings of rib-reinforced structure design for the bottle example

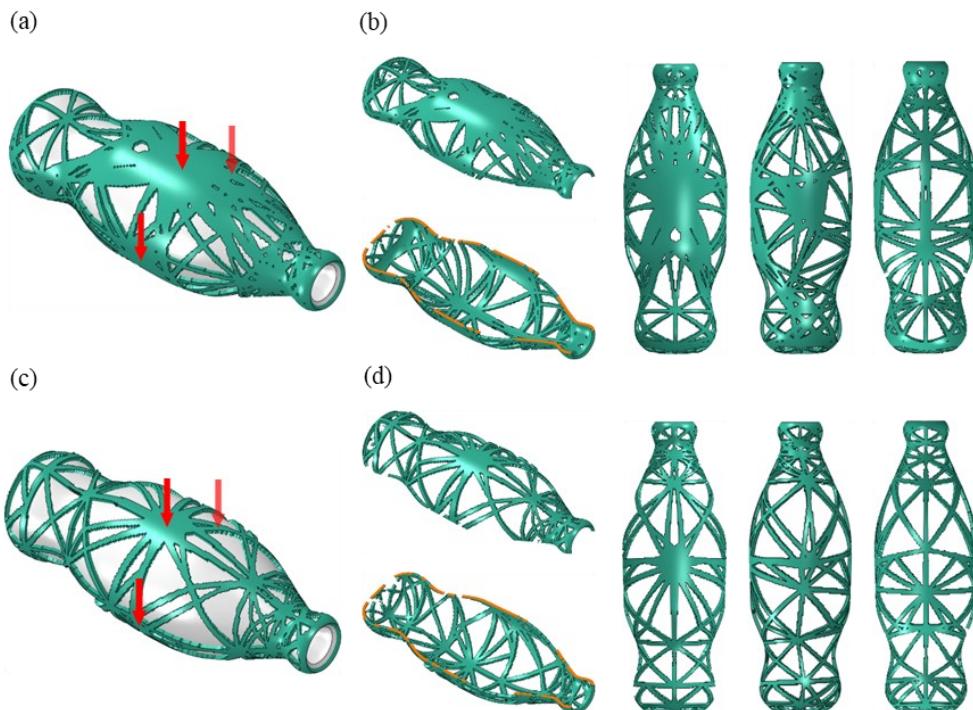


图 5.23 加筋结构的两个代表性设计：(a) 第一组参数设计的优化结果， $C^{\text{opt}} = 1.25$ ；
 (b) 第一组参数设计结果的无蒙皮展示；(c) 第二组参数设计的优化结果， $C^{\text{opt}} = 0.54$ ；(d) 第二组参数设计结果的无蒙皮展示

Fig. 5.23 Two representative designs of rib-reinforced structures; (a) optimized result of the first parameter setting ($C^{\text{opt}} = 1.25$); (b) skin-free display of the design results of the first parameter setting; (c) optimized result of the second parameter setting ($C^{\text{opt}} = 0.54$); (d) skin-free display of the design results of the second parameter setting

加筋结构设计是薄壁结构设计的一个重要领域，这在现有算法下可以很容易实现。如图 5.22 所示，初始组件布局为 4×8 单胞，蒙皮（灰色）厚度设为 2，即整体厚度的一半。在该算例中，我们展示了两种设置下（蒙皮材料的杨氏模量分别设置为 0.2 和 0.7，加筋体积分数分别为 0.225 和 0.10）加筋优化的结果，如图 5.23 (a) 和图 5.23 (c) 所示，展示时显示蒙皮。图 5.23 (b) 和图 5.23 (d) 给出了两种设置的优化结果，展示时隐藏蒙皮。如图 5.23 (b) 所示，由于蒙皮的承载能力较弱，加强筋布置与拓扑优化结果，即图 5.21 (b) 相似。相比之下，在第二种设置中，材料体积分数要小得多，从而导致加强筋的路径更加清晰，如图 5.23 (d) 所示。

5.5.3 三通管道算例

最后，我们考虑工程中常见的三通管道算例，从而证明所提算法对实际工程结构的适用性。图 5.24 (a) 给出了中曲面模型的主要几何信息。如图所示，三通管道不仅拓扑结构复杂，而且每个分支都有特定的形状。图 5.24 (b) 展示了沿厚度方向生成的实体网格（厚度为 0.002，包含 8 个单元），该实体网格同时也施加了外载荷和位移边界条件。

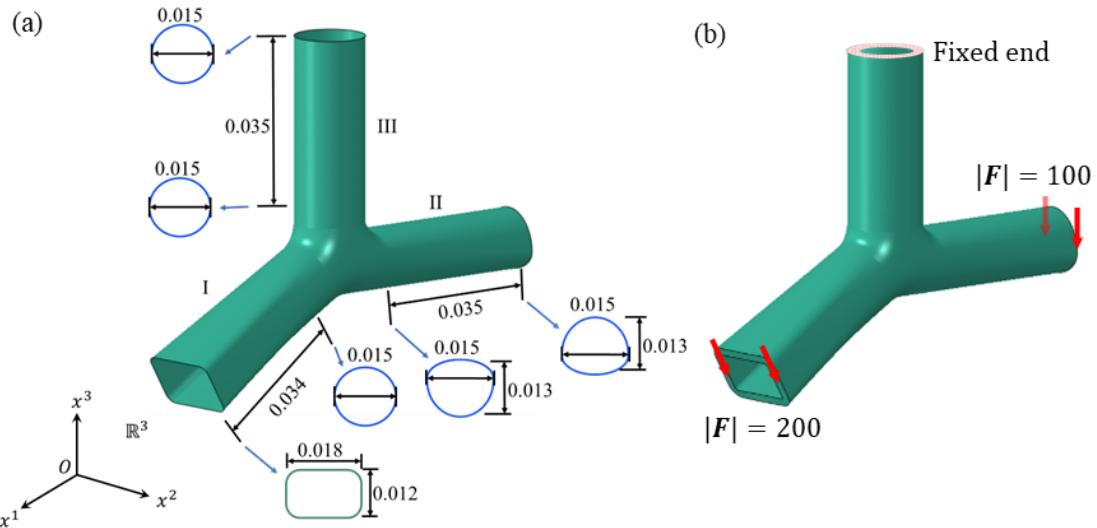


图 5.24 三通管道算例的几何与边界条件：(a) 中曲面模型；(b) 实体模型与边界条件

Fig. 5.24 Geometry and boundary conditions of the tee-branch pipe example; (a) middle surface model; (b) solid model and boundary conditions

考虑到该曲面难以直接进行参数化，我们采用多面片拼接技术，如图 5.25 和图 5.26 所示。原始曲面根据几何特征划分为 4 个面片（如图 5.25 所示），第 4 个面片与圆域（灰色）缝合，形成拓扑圆柱体，如图 5.26 所示。对于每个面片，我们采用曲面切割操

作获得中间面片，并利用共形参数化技术为四个中间面片构建参数域，以及计算全局拓扑描述函数。

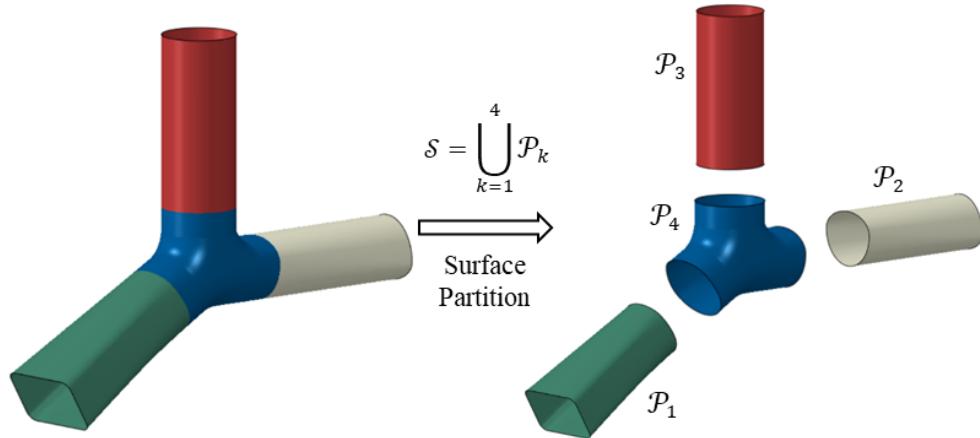


图 5.25 三通管道算例的原始曲面分割为四个面片

Fig. 5.25 Partitioning the original surface of the tee-branch pipe example into four patches

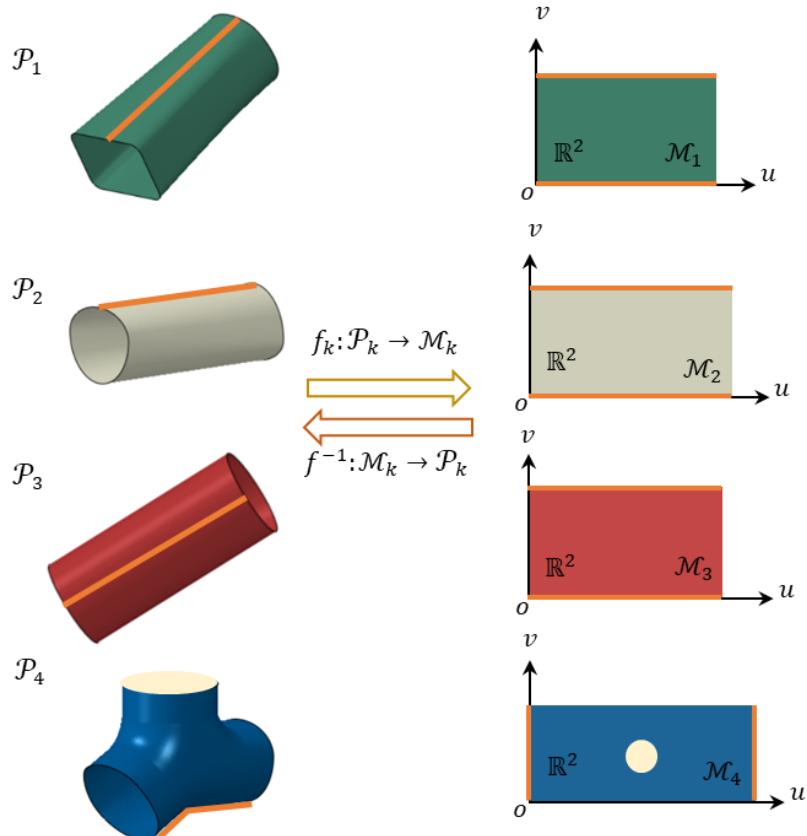


图 5.26 三通管道算例各曲面片的参数化

Fig. 5.26 Parameterization of each patch of the tee-branch pipe example

图 5.27 展示了薄壁结构上每个面片的初始组件布局和材料分布。迭代历史如图 5.28 所示（在完成第 160 步后中止）。由于 MMC 方法具有设计变量较少的优势，该优化进程在第 30 步即得到主荷载传递路径，最终得到 $C^{\text{opt}} = 43.38$ 的设计，如图 5.29 所示。这里两个受力的管道分支上的组件布局类似于二维短梁算例。

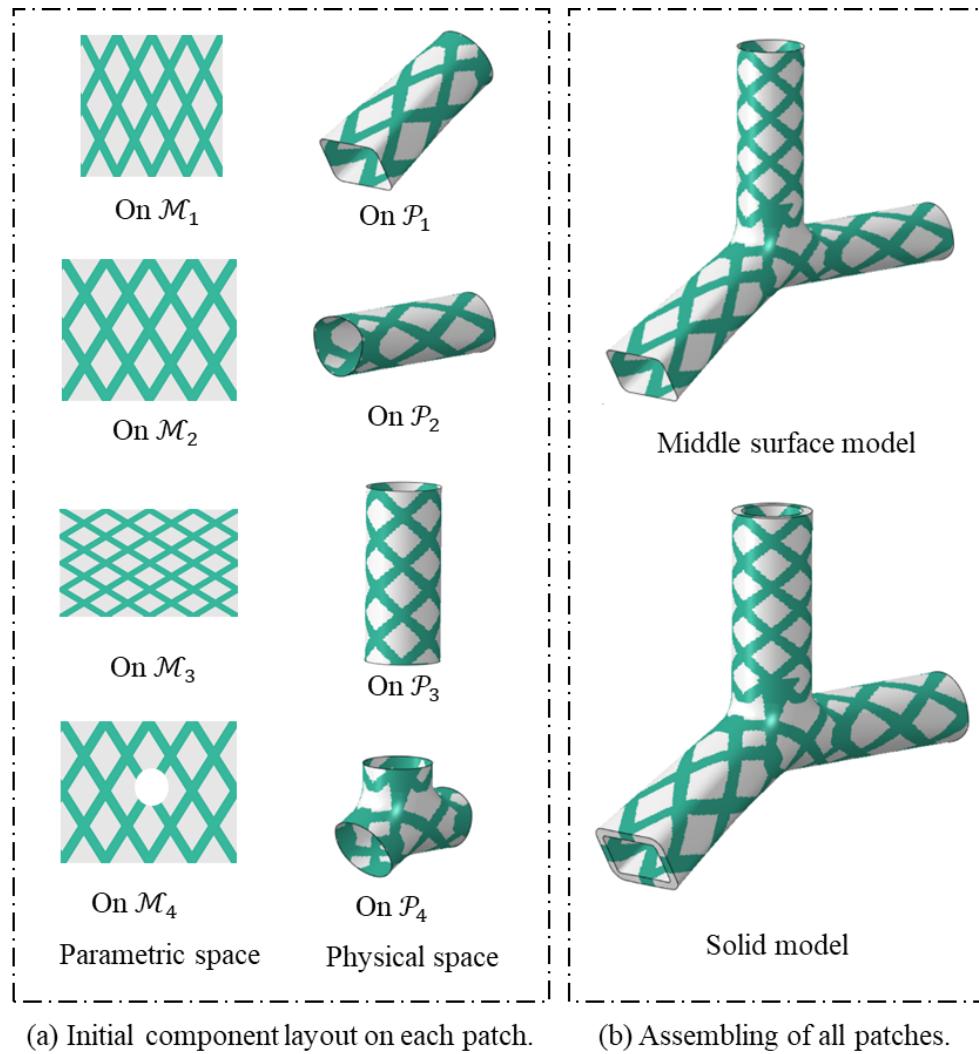


图 5.27 三通管道薄壁结构的初始组件布局

Fig. 5.27 Initial component layout of the tee-branch pipe thin-walled structure

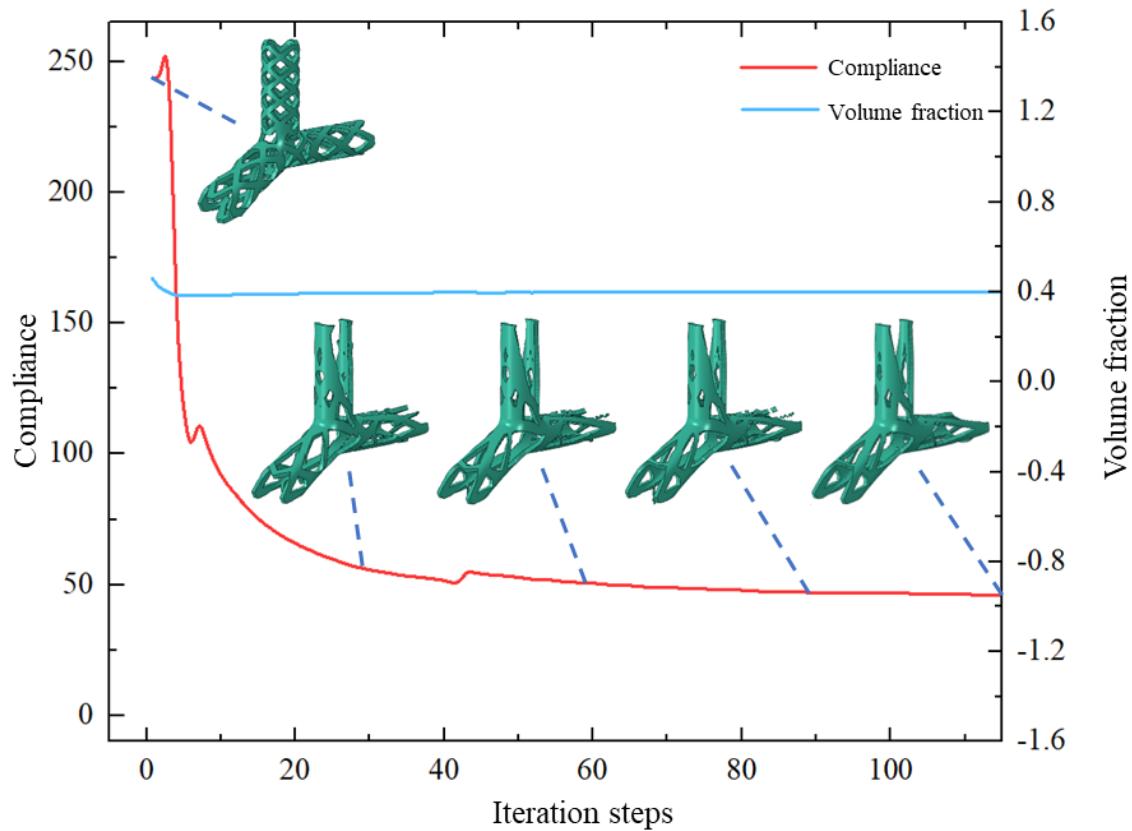


图 5.28 三通管道算例的迭代历史与中间设计

Fig. 5.28 Iteration history and intermediate designs of the tee-branch pipe example

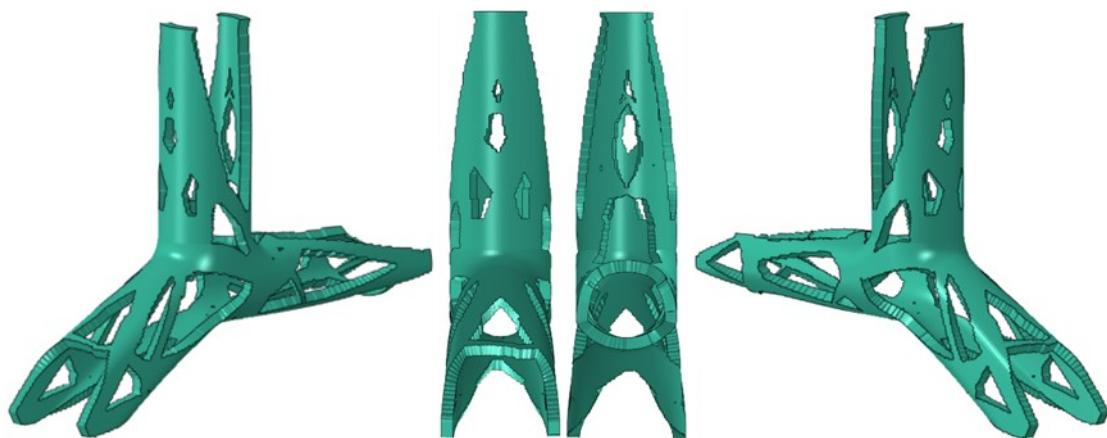


图 5.29 三通管道算例拓扑优化的最终设计柔度为43.38

Fig. 5.29 The final compliance of the topology optimization for the tee-branch pipe example is 43.38

此外，我们在三通管道上施加了四种不同的边界条件，以研究它们对最终设计的影响，如图 5.30 (a-d)所示。优化结果如图 5.30 (e-h)所示。从案例 1 到案例 2，施加在左管上的集中力的大小减小了一半。这一变化导致两个加力管道的设计结果略有改变，并且在固定端附近的构型完全不同。可能的原因在于：固定的管道分支起到了屏障的作用，阻碍了载荷在两个下面的管道分支之间传递。因此，集中力只影响应变能的局部分布。相反，两根加力的管道分支通过固定管道将其载荷传递给固定端。因此，集中力大小分布的变化导致固定的管道的弯矩差异，并最终导致不同的设计构型。此外，在图 5.30 (g)中，右侧管道的最终设计与顶部管道相似，这是边界条件均设置为固定端约束所导致的。图 5.30 (h)中左侧管道的最终设计相对较弱，这可能是因为弯矩相互抵消、进而导致的较低的应变能分布水平。

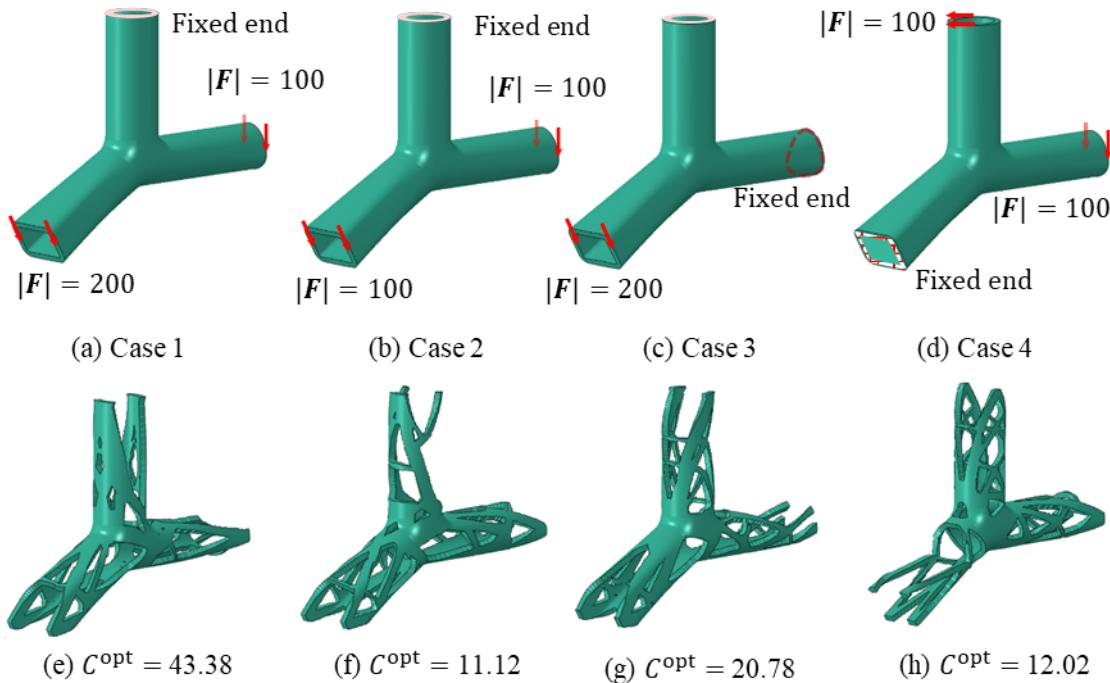


图 5.30 三通管道算例不同边界条件的最终设计

Fig. 5.30 Final designs of the tee-branch pipe example with different boundary conditions

从上述不同边界条件的算例我们可以看出，即使该方法未强制施加相连面片间的连接性约束，但最终结果并未出现组件断开的情况。为避免该现象是对称边界条件下特例，我们进一步设置了非对称的边界条件（如图 5.31 (a)所示），验证所提方法可以自然地保证相邻面片界面上的材料连续性。曲面参数化过程同前文设置保持一致，因此存在图 5.31 (b)所示的三个界面。组件初始布局和前文一致，如图 5.31 (c)所示，从中可以看出不同界面处在初始迭代步中确实存在材料不连续的情况。

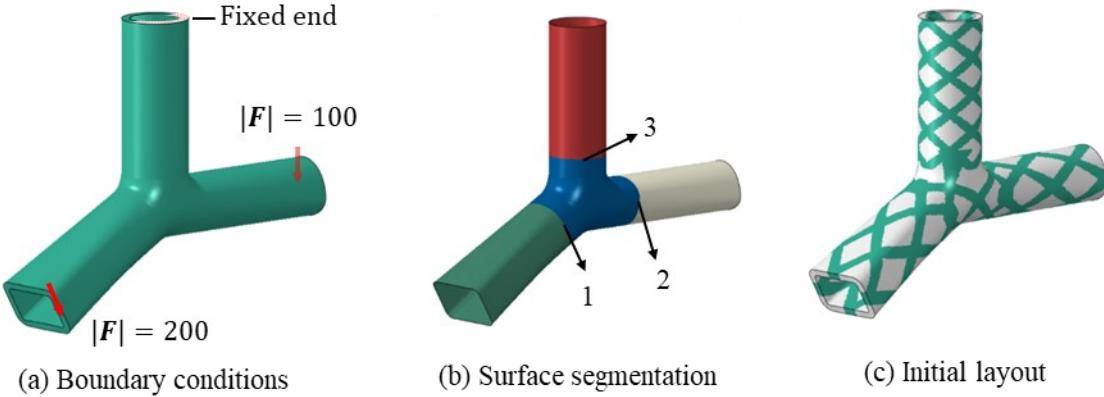


图 5.31 三通管道算例非对称的条件设置

Fig. 5.31 Asymmetric condition setting for the tee-branch pipe example

图 5.32 和图 5.33 分别展示了迭代历史（在第 114 步收敛）和最终设计。我们可以看出，优化结果中相邻界面上的材料是连续的。这主要是本文结构优化受柔度函数驱动：若界面处存在不连续现象，则可以认为是仍然存在提升的空间，因而优化过程将自然趋向于消除这些不连续特征，以获得更优的结构性能。

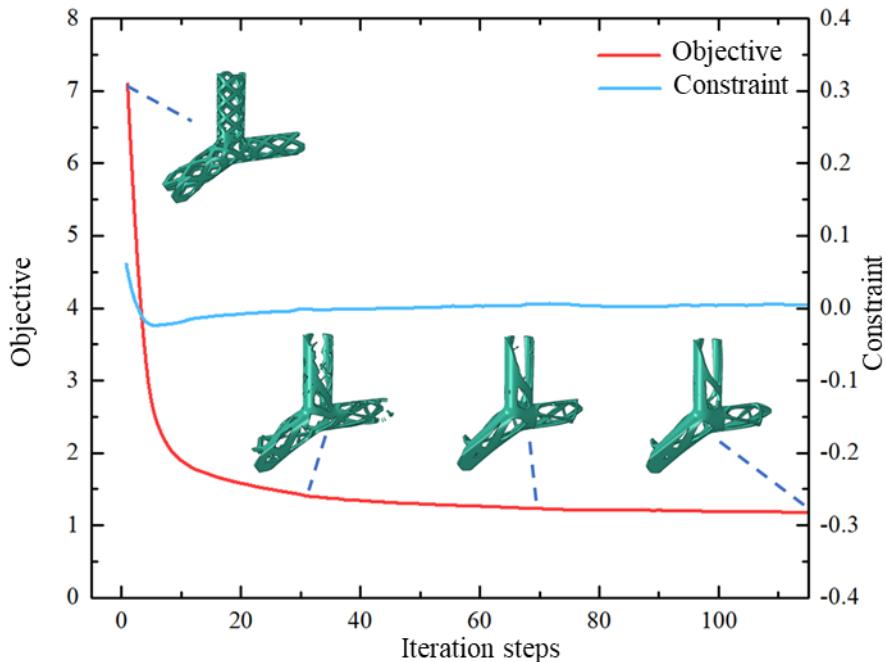


图 5.32 非对称算例的迭代曲线与优化历史

Fig. 5.32 Iteration curves and optimization history of the asymmetric example



图 5.33 三通管道非对称算例的最终设计

Fig. 5.33 Final design of the asymmetric example of the tee-branch pipe

最后，本算例考虑夹层式增强结构设计（即夹芯结构的中间夹层设计），边界条件如图 5.30 (b)所示，初始构件布置与图 5.27 一致。如图 5.34 所示，外层和内层（视为不可设计域）的厚度为 0.0005，而设计层的厚度为 0.001。此处设置三种不同的参数进行分析：体积分数分别为 0.375、0.45 和 0.55，非设计层的杨氏模量分别为 0.15、0.3 和 0.5。在所有情况下，设计层的杨氏模量都设置为 1。优化结果如图 5.35 (a-c)所示，我们可以发现优化结果中形成了板和桁架的组合结构，这都是传统基于壳体模型的优化方法无法刻画和实现的。



图 5.34 三明治类型增强结构设计的厚度设置

Fig. 5.34 Thickness setting of the sandwich-type reinforced structure design

5.6 本章总结

本章工作基于实体模型和移动可变形组件法提出了一种复杂曲面薄壁结构优化的新方法。该方法在曲面材料布局的基础上利用投影操作构造了嵌入式的实体组件，并利用厚度坐标为多类薄壁结构优化问题的材料描述提供了统一的定义。优化列式对应体积分数约束下的静柔度最小化问题，灵敏度分析部分在连续框架下对体积分数约束和柔度

目标函数的灵敏度进行了详细的推导。为进一步实现优化问题的求解，本章进一步开发了基于偏置操作的网格生成技术，从而简化实体嵌入式组件描述下的材料分布计算。本工作还进一步集成了自由度删除技术，从而提升有限元和优化问题的求解效率。数值算例表明，本章所提出的设计算法具有迭代次数少、收敛速度快的优点，并且可通过较少的设计变量和有限元分析自由度为代价，便可获得边界清晰的结构。另外，对比基于壳单元的设计方法，所提方法可自然地处理沿厚度方向上施加的边界条件、可实现多类设计问题（包括拓扑优化、加筋设计以及夹芯板优化）的统一求解。

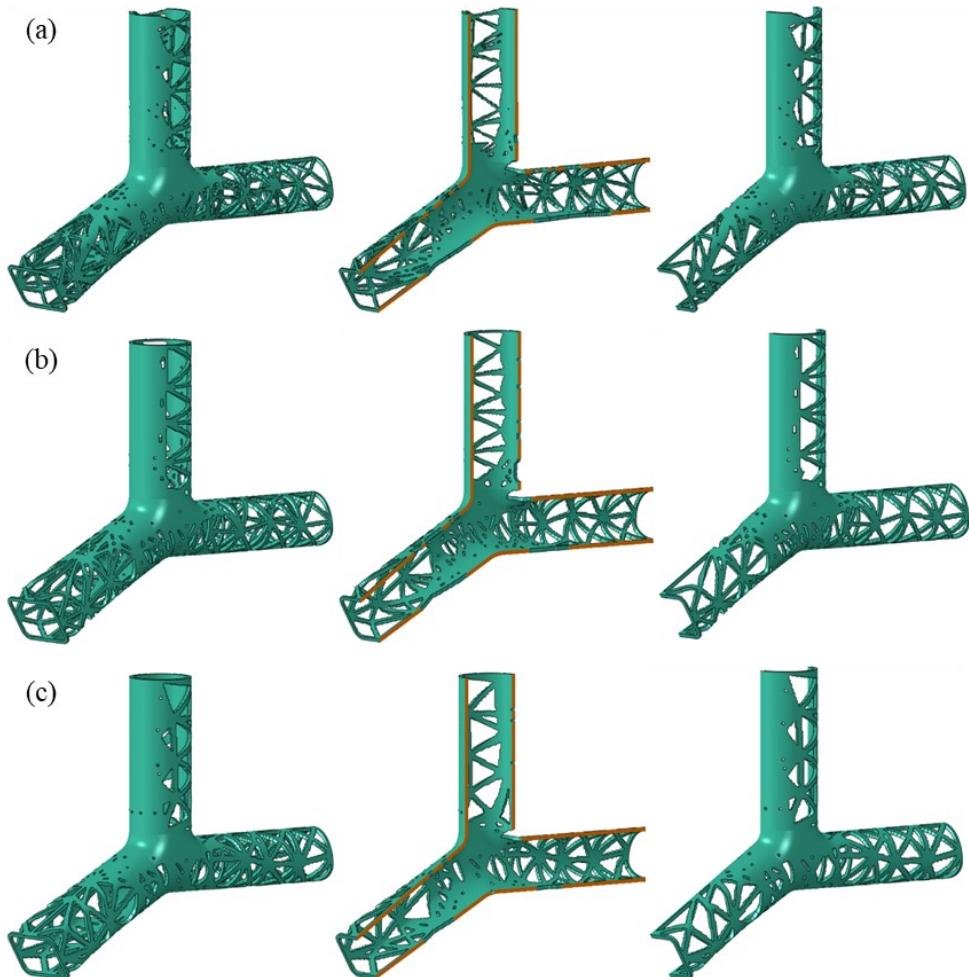


图 5.35 三明治类型增强结构的最终设计：从(a)到(c)，体积分数分别设置为 0.375，0.45 和 0.55，非设计层的杨氏模量分别设置为 0.15，0.3 和 0.5

Fig. 5.35 Final structures of the designed domains in the sandwich-type reinforced structure: from (a) to (c), the volume fractions are set as 0.375, 0.45 and 0.55, and the Young's modulus of the undesigned layers are set as 0.15, 0.3, 0.5, respectively

6 结论与展望

6.1 研究结论

本文基于共形参数化技术和移动可变形组件法，面向薄壁结构开展了基于壳体模型的拓扑优化、形貌设计以及基于实体模型的拓扑优化三个方面的研究，主要研究结论如下。

(1) 针对壳体拓扑优化问题，本文结合共形参数化技术、曲面切割操作和多面片拼接技术解决了拓扑描述函数推广至复杂曲面的难题，并进一步构建了薄壁结构材料布局的显式描述和优化列式。在此基础上，本文基于一般化的壳体能量泛函推导了柔度的灵敏度表达式，并依据有限元结果推导了离散化的求解方法，最终得到了同时适用于厚壳与薄壳模型的计算公式。得益于底层的移动可变形组件法，该研究工作具有设计变量少、收敛速度快、无需过滤处理等优点，且优化结果边界清晰光滑。另外，数值算例还验证了所提算法结合三维扫描技术的能力以及对于复杂曲面模型的适用性。

(2) 受薄壁结构几何诱导的各向异性现象启发，本文引入曲面形貌扰动作为一种特定的结构特征来增强刚度，并基于显式拓扑优化思想提出一种新型的形貌优化方法来设计薄壁结构。其中，拓扑描述函数和样条组件表达使得该方法具有描述复杂形貌的能力，基于共形参数化技术的嵌入式描述使得该方法能够在曲面上进行形貌变化的刻画，集成的曲面切割操作和多面片拼接技术则拓展了该方法的几何适用范围，并有效地解决了映射失真问题。机理验证部分证实了形貌作为一种结构特征增强刚度的能力，同时也揭示了目标函数关于形貌设计变量的复杂性。优化算例验证了所提设计算法的有效性、高效性和设计复杂曲面薄壁结构形貌的能力。

(3) 相比壳体模型，实体模型在应对薄壁结构多样化的设计需求和处理边界条件时更具灵活性。因此，本文基于实体模型和移动可变形组件法构建了一种新型的薄壁结构显式优化方法。其中，基于共形参数化技术构造的嵌入式组件可自然贴合壳体几何，从而提升几何建模的精度与效率；根据厚度坐标定义的材料分布实现了多类设计问题的统一描述；实体模型使得该方法不受壳体模型假设的限制、能够自然地处理沿厚度方向上施加的边界条件。数值算例验证了该方法统一建模并求解薄壁结构拓扑优化、加筋优化与夹芯结构优化问题的能力。底层的移动可变形组件法使得该方法设计变量少、迭代收敛快、并且可以集成自由度删除技术从而进一步提升优化求解效率。

综合上述，本文面向薄壁结构的优化设计开展了三方面的研究工作，核心支柱为移动可变形组件法和共形参数化技术。其中，移动可变形组件法作为基础的结构优化方法，

使得提出的算法具备设计变量少、优化效率高等优点；共形参数化技术（结合曲面切割操作和多面片拼接技术）主要用以处理薄壁结构的网格并获取参数化平面，进而实现对不同设计问题显式优化方案的构造。

6.2 创新点总结

创新点 1：基于移动可变形组件法和共形参数化技术，构建了一种适用于壳体模型的显式拓扑优化算法，实现了复杂曲面上材料布局的高效描述和优化。为解决显式拓扑描述函数推广至曲面的难题，本文引入共形参数化技术构建壳体模型中面的平面参数域，通过映射-逆映射的方式实现原始薄壁结构的材料分布描述。为进一步提升算法在处理复杂几何方面的能力，本文结合了曲面切割操作和多面片拼接技术。在优化求解方面，本文基于一般化的壳体能量泛函推导了灵敏度表达式，所得结果同时适用于厚壳与薄壳模型。移动可变形组件法使得所提出的优化算法具有设计变量少、收敛速度快、无须过滤操作等优点，并且优化结果边界清晰、形状光滑。共形参数化技术使得该算法能够直接处理灵活的网格曲面，从而提升了算法的几何适用性。

创新点 2：基于嵌入式形貌和样条组件描述，提出了一种新型的形貌设计方法，拓展了提升薄壁结构性能的途径。受几何诱导的各向异性现象启发，本文将曲面形貌变化引入薄壁结构设计中，作为一种特定的结构特征来增强结构刚度。为实现薄壁结构的形貌刻画，本文基于规范化的曲面法向扰动和共形参数化技术构建了一种嵌入式的形貌描述方法。鉴于形貌变化的灵活性和复杂性，本文结合移动可变形组件法和样条工具，提出了一种新型的样条形貌组件。为实现形貌优化问题的求解，本文采用形状灵敏度分析方法推导了结构响应的灵敏度表达式，并结合有限元技术给出了具体的离散计算方法。

创新点 3：发展了一种基于实体模型的薄壁结构显式设计方法，采用移动可变形组件法实现了拓扑优化、加筋优化与夹芯层优化问题的统一建模与求解。实体模型在对多类薄壁结构设计问题进行建模和对边界条件进行处理方面具有优势，但经典三维组件应用于弯曲的薄壁结构将面临组件贴合的几何约束难题。因此本文基于曲面组件描述方法和投影操作，提出了一种可自然贴合薄壁结构几何的新型嵌入式组件，并利用厚度坐标实现多类设计问题的统一建模。为简化嵌入式实体组件的材料分布计算，本文进一步提出了一种基于偏置操作的实体网格生成技术。得益于移动可变形组件法与有限元网格解耦的特性，本工作进一步集成了自由度删除技术，有效提升了优化问题的求解效率。

6.3 未来研究展望

本文开展了曲壳拓扑优化、薄壁结构形貌设计以及基于实体模型的薄壁结构优化三个方面研究，未来可按以下方向进一步探索。

首先对于曲壳模型的拓扑优化研究，虽然本工作聚焦于薄壁结构承受静载荷时的柔度最小问题，但所提出的方法具有良好的通用性，可进一步扩展应用于其他关键力学设计问题的求解，例如考虑大变形、屈曲、基频等问题的薄壁结构拓扑优化中。

其次对于形貌设计研究，在该工作中形貌本质上是一种几何域的调整，因此同样具有提升其他物理响应的能力，例如热传导效率、声压级性能等；曲面形貌扰动还具有调控结构的潜力，例如控制裂纹扩展路径、控制曲面波导路径等；另外，本工作所提的形貌扰动与一些制造技术具有天然的联系，例如钣金、数字渐进成型、一体化压铸等，因此值得进一步探索考虑制造工艺的形貌设计工作。

最后对于基于实体模型的薄壁结构优化研究，该工作核心是为薄壁结构的拓扑优化、加筋优化和夹芯板优化问题提供统一的设计方法，对于细分场景可进一步细化实施过程，比如考虑加筋设计中筋条的截面优化、如何将复合材料的本构融入夹芯板设计中等，这些问题都具有一定的工程意义和实用价值，因此值得后续进一步探索。

参考文献

- [1] 程耿东. 工程结构优化设计基础[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2012.
- [2] Michell A G M. LVIII. The limits of economy of material in frame-structures[J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1904, 8(47): 589-597.
- [3] Maxwell J C. XLV. On reciprocal figures and diagrams of forces[J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1864, 27(182): 250-261.
- [4] Dantzig G B, Thapa M N. Linear programming: theory and extensions: Vol. 2[M]. New York: Springer, 2003.
- [5] Gander M J, Wanner G. From Euler, Ritz, and Galerkin to modern computing[J]. SIAM Review, 2012, 54(4): 627-666.
- [6] Chladni E F F. Entdeckungen über die theorie des klanges[M]. Leipzig: Weidmanns Erben und Reich, 1787.
- [7] Chladni E F F. Die akustik[M]. Leipzig: Breitkopf & Härtel, 1802.
- [8] Chen P, Luo Z, Güven S, et al. Microscale assembly directed by liquid-based template[J]. Advanced Materials, 2014, 26(34): 5936.
- [9] Stone W H. Elementary lessons on sound[M]. London: Macmillan & Company, 1879.
- [10] Ullmann D. Life and work of EFF Chladni[J]. The European Physical Journal Special Topics, 2007, 145(1): 25-32.
- [11] Todhunter I. A history of the theory of elasticity and of the strength of materials: Vol. 2[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.
- [12] Ventsel E, Krauthammer T, Carrera E. Thin plates and shells: theory, analysis, and applications[J]. Appl. Mech. Rev., 2002, 55(4): B72-B73.
- [13] Bischoff M, Bletzinger K U, Wall W A, et al. Models and finite elements for thin-walled structures[M]. In: Encyclopedia of Computational Mechanics. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2004.
- [14] Niordson F I. Shell theory[M]. Amsterdam: Elsevier, 2012.
- [15] Kirchhoff G. Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe[J]. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. 1850: 51-88.
- [16] Love A E H. XVI. The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London.(A.), 1888(179): 491-546.
- [17] Love A E H. A treatise on the mathematical theory of elasticity[M]. Mineola, New York: Courier Corporation, 1944.
- [18] Goodier J N. discussion: “the effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates” (Reissner, Eric, 1945, ASME J. Appl. Mech., 12, pp. A69–A77)[J]. Journal of Applied Mechanics, 2021, 13(3): A251-A252.
- [19] Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates[J]. Journal of Applied Mechanics, 1945, 12(2): A69-A77.
- [20] Reissner E. On bending of elastic plates[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1947, 5(1): 55-68.
- [21] 段铁城, 李录贤. 厚板的高阶剪切变形理论研究[J]. 力学学报, 2016, 48(05): 1096-1113.
- [22] Mindlin R. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates[J].

- Journal of Applied Mechanics, 1951, 18(1): 31-38.
- [23] Weaver Jr W, Timoshenko S P, Young D H. *Vibration problems in engineering*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1991.
- [24] Wang C M, Lim G T, Reddy J N, et al. Relationships between bending solutions of Reissner and Mindlin plate theories[J]. *Engineering Structures*, 2001, 23(7): 838-849.
- [25] Flügge W, Conrad D A. A note on the calculation of shallow shells[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1959, 26(4): 683-685.
- [26] Flügge W. *Stresses in shells*[M]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960.
- [27] Chu H N, Herrmann G. Influence of large amplitudes on free flexural vibrations of rectangular elastic plates[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1956, 23(4): 532-540.
- [28] Leissa A W. *Vibration of plates*[M]. Scientific and Technical Information Division, National Aeronautics and Space Administration, 1969.
- [29] Sanders Jr J L. Nonlinear theories for thin shells[J]. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1963, 21(1): 21-36.
- [30] Naghdi P M, Nordgren R P. On the nonlinear theory of elastic shells under the Kirchhoff hypothesis[J]. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1963, 21(1): 49-59.
- [31] Budiansky B. Notes on nonlinear shell theory[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1968, 35(2): 393-401.
- [32] Donnell L H. A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending[J]. *Journal of Fluids Engineering*, 1934, 56(8): 795-806.
- [33] Von Karman T, Dunn L G, Tsien H S. The influence of curvature on the buckling characteristics of structures[J]. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 1940, 7(7): 276-289.
- [34] Von Karman T, Tsien H S. The buckling of thin cylindrical shells under axial compression[J]. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 1941, 8(8): 303-312.
- [35] Koiter W T. On the stability of elastic equilibrium[M]. National Aeronautics and Space Administration, 1967.
- [36] Reddy J. A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation[J]. *International Journal of solids and structures*, 1984, 20(9-10): 881-896.
- [37] Reddy J N. A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1990, 25(6): 677-686.
- [38] Reddy J N. A simple higher-order theory for laminated composite plates[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1984, 51(4): 745-752.
- [39] Reddy J N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*[M]. Boca Raton: CRC press, 2003.
- [40] Rubin M B. *Cosserat theories: shells, rods and points*: Vol. 79[M]. Dordrecht: Springer Netherlands, 2000.
- [41] Simo J C, Fox D D. On a stress resultant geometrically exact shell model. Part I: Formulation and optimal parametrization[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1989, 72(3): 267-304.
- [42] Simo J C, Fox D D, Rifai M. On a stress resultant geometrically exact shell model. Part II: The linear theory; computational aspects[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1989, 73(1): 53-92.

- [43] Nebel L J, Sander O, Bîrsan M, et al. A geometrically nonlinear Cosserat shell model for orientable and non-orientable surfaces: Discretization with geometric finite elements[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2023, 416: 116309.
- [44] Carpi F, Bauer S, De Rossi D. Stretching dielectric elastomer performance[J]. Science, 2010, 330(6012): 1759-1761.
- [45] Yin S, Li B, Feng X Q. Bio-chemo-mechanical theory of active shells[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2021, 152: 104419.
- [46] Lee J H, Park H S, Holmes D P. Stimuli-responsive shell theory[J]. Mathematics and Mechanics of Solids, 2024, 29(6): 1089-1124.
- [47] Zhang Y, Cohen O Y, Moshe M, et al. Geometrically frustrated rose petals[J]. Science, 2025, 388(6746): 520-524.
- [48] Wang T, Fu C, Potier-Ferry M, et al. Morphomechanics of growing curled petals and leaves[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2024, 184: 105534.
- [49] Cheng K T, Olhoff N. An investigation concerning optimal design of solid elastic plates[J]. International Journal of Solids and Structures, 1981, 17(3): 305-323.
- [50] Cheng K T, Olhoff N. Regularized formulation for optimal design of axisymmetric plates[J]. International Journal of Solids and Structures, 1982, 18(2): 153-169.
- [51] Bendsøe M P, Sigmund O. Topology optimization: theory, methods, and applications[M]. Berlin: Springer Science & Business Media, 2013.
- [52] Bendsøe M P, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1988, 71(2): 197-224.
- [53] Bendsøe M P. Optimal shape design as a material distribution problem[J]. Structural Optimization, 1989, 1: 193-202.
- [54] Zhou M, Rozvany G I. The COC algorithm, Part II: Topological, geometrical and generalized shape optimization[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1991, 89(1-3): 309-336.
- [55] Mlejnek H P. Some aspects of the genesis of structures[J]. Structural Optimization, 1992, 5(1): 64-69.
- [56] Sigmund O, Maute K. Topology optimization approaches: A comparative review[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2013, 48(6): 1031-1055.
- [57] Bendsøe M P, Sigmund O. Material interpolation schemes in topology optimization[J]. Archive of Applied Mechanics, 1999, 69(9): 635-654.
- [58] Sigmund O. Morphology-based black and white filters for topology optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2007, 33(4): 401-424.
- [59] Lazarov B S, Sigmund O. Filters in topology optimization based on Helmholtz-type differential equations[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2011, 86(6): 765-781.
- [60] Wang F W, Lazarov B S, Sigmund O. On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2011, 43(6): 767-784.
- [61] Sigmund O, Maute K. Sensitivity filtering from a continuum mechanics perspective[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2012, 46(4): 471-475.
- [62] Xie Y M, Steven G P. A simple evolutionary procedure for structural optimization[J]. Computers & Structures, 1993, 49(5): 885-896.
- [63] Chu D N, Xie Y M, Hira A, et al. Evolutionary structural optimization for problems with stiffness

- constraints[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 1996, 21(4): 239-251.
- [64] Querin O M, Steven G P, Xie Y M. Evolutionary structural optimisation (ESO) using a bidirectional algorithm[J]. Engineering Computations, 1998, 15(8): 1031-1048.
- [65] Osher S, Sethian J A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations[J]. Journal of Computational Physics, 1988, 79(1): 12-49.
- [66] Sethian J A, Wiegmann A. Structural boundary design via level set and immersed interface methods[J]. Journal of Computational Physics, 2000, 163(2): 489-528.
- [67] Wang M Y, Wang X, Guo D. A level set method for structural topology optimization[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003, 192(1-2): 227-246.
- [68] Allaire G, Jouve F, Toader A M. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method[J]. Journal of Computational Physics, 2004, 194(1): 363-393.
- [69] Wang S, Wang M Y. Radial basis functions and level set method for structural topology optimization[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, 65(12): 2060-2090.
- [70] Luo Z, Tong L, Wang M Y, et al. Shape and topology optimization of compliant mechanisms using a parameterization level set method[J]. Journal of Computational Physics, 2007, 227(1): 680-705.
- [71] Wei P, Wang M Y, Xing X. A study on X-FEM in continuum structural optimization using a level set model[J]. Computer-Aided Design, 2010, 42(8): 708-719.
- [72] Van Dijk N P, Maute K, Langelaar M, et al. Level-set methods for structural topology optimization: a review[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2013, 48(3): 437-472.
- [73] Caginalp G. An analysis of a phase field model of a free boundary[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1986, 92: 205-245.
- [74] Boettger W J, Warren J A, Beckermann C, et al. Phase-field simulation of solidification[J]. Annual Review of Materials Research, 2002, 32(1): 163-194.
- [75] Chen L Q. Phase-field models for microstructure evolution[J]. Annual Review of Materials Research, 2002, 32(1): 113-140.
- [76] Wang M Y, Zhou S. Phase field: a variational method for structural topology optimization[J]. CMES-Computer Modeling in Engineering and Sciences, 2004, 6(6): 547-566.
- [77] Burger M, Stainko R. Phase-field relaxation of topology optimization with local stress constraints[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2006, 45(4): 1447-1466.
- [78] Guo X, Zhang W S, Zhong W L. Doing topology optimization explicitly and geometrically—a new moving morphable components based framework[J]. Journal of Applied Mechanics, 2014, 81(8): 081009.
- [79] Zhang W S, Chen J S, Zhu X F, et al. Explicit three dimensional topology optimization via Moving Morphable Void (MMV) approach[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2017, 322: 590-614.
- [80] Zhang W S, Li D, Zhang J, et al. Minimum length scale control in structural topology optimization based on the Moving Morphable Components (MMC) approach[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2016, 311: 327-355.
- [81] Liu C, Du Z L, Zhang W S, et al. Additive manufacturing-oriented design of graded lattice structures through explicit topology optimization[J]. Journal of Applied Mechanics, 2017, 84(8): 081008.
- [82] Guo X, Zhou J H, Zhang W S, et al. Self-supporting structure design in additive manufacturing through

- explicit topology optimization[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2017, 323: 27-63.
- [83] Zhang W S, Song J F, Zhou J H, et al. Topology optimization with multiple materials via moving morphable component (MMC) method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2018, 113(11): 1653-1675.
- [84] Zhang W S, Liu Y, Du Z L, et al. A moving morphable component based topology optimization approach for rib-stiffened structures considering buckling constraints[J]. Journal of Mechanical Design, 2018, 140(11): 111404.
- [85] Liu C, Du Z L, Zhu Y C, et al. Optimal design of shell-graded-infill structures by a hybrid MMC-MMV approach[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2020, 369: 113187.
- [86] Cui T C, Sun Z, Liu C, et al. Topology optimization of plate structures using plate element-based moving morphable component (MMC) approach[J]. Acta Mechanica Sinica, 2020, 36(2): 412-421.
- [87] Luo J C, Du Z L, Liu C, et al. Moving morphable components-based inverse design formulation for quantum valley/spin hall insulators[J]. Extreme Mechanics Letters, 2021, 45: 101276.
- [88] Tenek L H, Hagiwara I. Optimal rectangular plate and shallow shell topologies using thickness distribution or homogenization[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1994, 115(1-2): 111-124.
- [89] Swan C C, Kosaka I. Voigt-Reuss topology optimization for structures with linear elastic material behaviours[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1997, 40(16): 3033-3057.
- [90] Yu W B. An introduction to micromechanics[J]. Applied Mechanics and Materials, 2016, 828: 3-24.
- [91] Zohdi T I, Wriggers P. An introduction to computational micromechanics[M]. Berlin: Springer Science & Business Media, 2008.
- [92] Stefaniuk D, Kachanov M. Voigt-Reuss and Hashin-Shtrikman bounds revisited[J]. International Journal of Engineering Science, 2023, 191: 103903.
- [93] Maute K, Ramm E. Adaptive topology optimization of shell structures[J]. AIAA journal, 1997, 35(11): 1767-1773.
- [94] Li Q, Steven G P, Querin O M, et al. Optimization of thin shell structures subjected to thermal loading[J]. Structural Engineering and Mechanics, 1999, 7(4): 401-412.
- [95] Park K S, Youn S K. Topology optimization of shell structures using adaptive inner-front (AIF) level set method[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2008, 36(1): 43-58.
- [96] Takahira H, Horiuchi T, Banerjee S. An Improved Three-Dimensional Level Set Method for Gas-Liquid Two-Phase Flows[J]. Journal of Fluids Engineering, 2004, 126(4): 578-585.
- [97] Jiang B. The least-squares finite element method: theory and applications in computational fluid dynamics and electromagnetics[M]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1998.
- [98] Ye Q, Guo Y, Chen S Q, et al. Topology optimization of conformal structures on manifolds using extended level set methods (X-LSM) and conformal geometry theory[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2019, 344: 164-185.
- [99] Gu X F, Wang Y L, Chan T F, et al. Genus zero surface conformal mapping and its application to brain surface mapping[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2004, 23(8): 949-958.
- [100] Bartezzaghi A, Dede L, Quarteroni A. Isogeometric analysis of high order partial differential equations on surfaces[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2015, 295: 446-469.

- [101] Benson D J, Bazilevs Y, Hsu M C, et al. Isogeometric shell analysis: the Reissner–Mindlin shell[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2010, 199(5-8): 276-289.
- [102] Benson D J, Bazilevs Y, Hsu M C, et al. A large deformation, rotation-free, isogeometric shell[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011, 200(13-16): 1367-1378.
- [103] Seo Y D, Kim H J, Youn S K. Shape optimization and its extension to topological design based on isogeometric analysis[J]. International Journal of Solids and Structures, 2010, 47(11-12): 1618-1640.
- [104] Burger M, Hackl B, Ring W. Incorporating topological derivatives into level set methods[J]. Journal of Computational Physics, 2004, 194(1): 344-362.
- [105] Dedè L, Borden M J, Hughes T J R. Isogeometric analysis for topology optimization with a phase field model[J]. Archives of Computational Methods in Engineering, 2012, 19(3): 427-465.
- [106] Kang P, Youn S K. Isogeometric topology optimization of shell structures using trimmed NURBS surfaces[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2016, 120: 18-40.
- [107] Seo Y D, Kim H J, Youn S K. Isogeometric topology optimization using trimmed spline surfaces[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2010, 199(49-52): 3270-3296.
- [108] Wen Z P, Pan Q, Zhai X Y, et al. Adaptive isogeometric topology optimization of shell structures based on PHT-splines[J]. Computers & Structures, 2024, 305: 107565.
- [109] Scherer F H, Zarroug M, Naceur H, et al. Topology optimization of curved thick shells using level set method and non-conforming multi-patch isogeometric analysis[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2024, 430: 117205.
- [110] Zhang W S, Li D, Kang P, et al. Explicit topology optimization using IGA-based moving morphable void (MMV) approach[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2020, 360: 112685.
- [111] Zhang X, Xiao M, Gao L, et al. A T-splines-oriented isogeometric topology optimization for plate and shell structures with arbitrary geometries using Bézier extraction[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2024, 425: 116929.
- [112] Deng J S, Chen F L, Li X, et al. Polynomial splines over hierarchical T-meshes[J]. Graphical Models, 2008, 70(4): 76-86.
- [113] Gupta A, Mamidlapelly B, Karuthedath P L, et al. Adaptive isogeometric topology optimization using PHT splines[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2022, 395: 114993.
- [114] Sommerwerk K, Woidt M, Haupt M C, et al. Reissner–Mindlin shell implementation and energy conserving isogeometric multi-patch coupling[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2017, 109(7): 982-1012.
- [115] Farahat A, Verhelst H M, Kiendl J, et al. Isogeometric analysis for multi-patch structured Kirchhoff–Love shells[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2023, 411: 116060.
- [116] Pan Q, Zhai X Y, Kang H M, et al. Isogeometric topology optimization of multi-patch shell structures[J]. Computer-Aided Design, 2024, 174: 103733.
- [117] Mayer R R, Kikuchi N, Scott R A. Application of topological optimization techniques to structural crashworthiness[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1996, 39(8): 1383-1403.
- [118] Belblidia F, Bulman S. A hybrid topology optimization algorithm for static and vibrating shell structures[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, 54(6): 835-852.

- [119] Stegmann J, Lund E. Discrete material optimization of general composite shell structures[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, 62(14): 2009-2027.
- [120] Lund E. Buckling topology optimization of laminated multi-material composite shell structures[J]. Composite Structures, 2009, 91(2): 158-167.
- [121] Kim S Y, Mechefske C K, Kim I Y. Optimal damping layout in a shell structure using topology optimization[J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(12): 2873-2883.
- [122] Chen L L, Lu C, Lian H J, et al. Acoustic topology optimization of sound absorbing materials directly from subdivision surfaces with isogeometric boundary element methods[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2020, 362: 112806.
- [123] Deng Y B, Zhou T, Liu Z Y, et al. Topology optimization of electrode patterns for electroosmotic micromixer[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2018, 126: 1299-1315.
- [124] Raulli M, Maute K. Topology optimization of electrostatically actuated microsystems[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2005, 30: 342-359.
- [125] Kögl M, Silva E C. Topology optimization of smart structures: design of piezoelectric plate and shellactuators[J]. Smart Materials and Structures, 2005, 14(2): 387.
- [126] Zhai J J, Shang L Y, Zhao G Z. Topology optimization of piezoelectric curved shell structures with active control for reducing random vibration[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2020, 61(4): 1439-1452.
- [127] Deng Y B, Liu Z Y, Korvink J G. Topology optimization on two-dimensional manifolds[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2020, 364: 112937.
- [128] 于明豪. 液冷散热器流道与热源分布拓扑优化研究[D]. 大连: 大连理工大学. 2021.
- [129] Pan S, Yu M H, Li H, et al. An integrated two-step strategy for an optimal design of liquid-cooled channel layout based on the MMC-density approach[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2022, 65(8): 221.
- [130] Nehari Z. Conformal mapping[M]. Mineola, New York: Courier Corporation, 2012.
- [131] Muskhelishvili N I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity: Vol. 15[M]. Groningen: Noordhoff Groningen, 1953.
- [132] Kythe P K. Handbook of conformal mappings and applications[M]. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2019.
- [133] Schinzing R, Laura P A. Conformal mapping: methods and applications[M]. Mineola, New York: Courier Corporation, 2012.
- [134] Leonhardt U. Optical conformal mapping[J]. Science, 2006, 312(5781): 1777-1780.
- [135] O’neill B. Elementary differential geometry[M]. Burlington, MA: Elsevier, 2006.
- [136] Floater M S, Hormann K. Surface parameterization: a tutorial and survey[C]. Advances in multiresolution for geometric modelling. Berlin, Heidelberg. 2005: 157-186.
- [137] Lui L M, Lam K C, Wong T W, et al. Texture map and video compression using Beltrami representation[J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2013, 6(4): 1880-1902.
- [138] Yeo B T, Sabuncu M R, Vercauteren T, et al. Spherical demons: fast diffeomorphic landmark-free surface registration[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2009, 29(3): 650-668.
- [139] Lee A W, Sweldens W, Schröder P, et al. MAPS: Multiresolution adaptive parameterization of surfaces[C]. Proceedings of the 25th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive

- Techniques. New York, NY: ACM, 1998: 95-104.
- [140] Bugayevskiy L M, Snyder J. Map projections: a reference manual[M]. Boca Raton: CRC Press, 1995.
- [141] Kharevych L, Springborn B, Schröder P. Discrete conformal mappings via circle patterns[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2006, 25(2): 412-438.
- [142] Dirnböck H, Stachel H. The development of the oloid[J]. J. Geom. Graph, 1997, 1(1997): 105-118.
- [143] Liang H Y, Mahadevan L. The shape of a long leaf[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2009, 106(52): 22049-22054.
- [144] Xu F, Fu C B, Yang Y F. Water affects morphogenesis of growing aquatic plant leaves[J]. Physical Review Letters, 2020, 124(3): 038003.
- [145] Liang H Y, Mahadevan L. Growth, geometry, and mechanics of a blooming lily[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2011, 108(14): 5516-5521.
- [146] Leyva-Mendivil M F, Page A, Bressloff N W, et al. A mechanistic insight into the mechanical role of the stratum corneum during stretching and compression of the skin[J]. Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials, 2015, 49: 197-219.
- [147] Limbert G. Mathematical and computational modelling of skin biophysics: a review[J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2017, 473(2203): 20170257.
- [148] Limbert G. Skin biophysics: vol. 7[M]. Cham: Springer, 2019.
- [149] Chavoshnejad P, More S, Razavi M J. From surface microrelief to big wrinkles in skin: a mechanical in-silico model[J]. Extreme Mechanics Letters, 2020, 36: 100647.
- [150] Chu S, Bai J, Feng X Q. Cracking and wrinkling morphomechanics of animal skins[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2025: 106167.
- [151] Wang T, Potier-Ferry M, Xu F. A nonlinear toroidal shell model for surface morphologies and morphogenesis[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2025, 200: 106135.
- [152] Sharon E, Roman B, Swinney H L. Geometrically driven wrinkling observed in free plastic sheets and leaves[J]. Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics, 2007, 75(4): 046211.
- [153] Dervaux J, Ben Amar M. Morphogenesis of growing soft tissues[J]. Physical Review Letters, 2008, 101(6): 068101.
- [154] Li Z F, Wang J, Hossain M, et al. A general theoretical scheme for shape-programming of incompressible hyperelastic shells through differential growth[J]. International Journal of Solids and Structures, 2023, 265: 112128.
- [155] Hsu F H. The influences of mechanical loads on the form of a growing elastic body[J]. Journal of Biomechanics, 1968, 1(4): 303-311.
- [156] Dervaux J, Ciarletta P, Amar M B. Morphogenesis of thin hyperelastic plates: a constitutive theory of biological growth in the Föppl–von Kármán limit[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2009, 57(3): 458-471.
- [157] Zhao Y, Zhu H L, Jiang C, et al. Wrinkling pattern evolution on curved surfaces[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2020, 135: 103798.
- [158] Xu F, Potier-Ferry M. A multi-scale modeling framework for instabilities of film/substrate systems[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2016, 86: 150-172.
- [159] Ashby M F. Materials selection in mechanical design[M]. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2016.
- [160] Dorn C, Kochmann D M. Conformally graded metamaterials for elastic wave guidance[J]. Extreme

- Mechanics Letters, 2023, 65: 102091.
- [161] Mitchell N P, Koning V, Vitelli V, et al. Fracture in sheets draped on curved surfaces[J]. Nature Materials, 2017, 16(1): 89-93.
- [162] Liu Y, Meng Z Q, Wang Y F, et al. Corrugated sheets with loading-position-dependent bistability[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2025, 196: 106042.
- [163] Faber J A, Udani J P, Riley K S, et al. Dome-patterned metamaterial sheets[J]. Advanced Science, 2020, 7(22): 2001955.
- [164] Liu M Q, Zhen Y, Sun Y, et al. Universal shielding effect of curvature on two interacting cracks[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2023, 179: 105389.
- [165] Feng S Z, Wang W X, Wang S J, et al. Controlling and visualizing fracture of 2D crystals by wrinkling[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2023, 174: 105253.
- [166] Liang J, Lai R, Wong T W, et al. Geometric understanding of point clouds using Laplace-Beltrami operator[C]. 2012 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Providence, RI: IEEE, 2012: 214-221.
- [167] Yueh M H, Lin W W, Wu C T, et al. An efficient energy minimization for conformal parameterizations[J]. Journal of Scientific Computing, 2017, 73: 203-227.
- [168] Wang Y, Lui L M, Gu X F, et al. Brain surface conformal parameterization using Riemann surface structure[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2007, 26(6): 853-865.
- [169] Jin M, Kim J, Luo F, et al. Discrete surface Ricci flow[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2008, 14(5): 1030-1043.
- [170] Meng T W, Choi G P T, Lui L M. Tempo: feature-endowed Teichmuller extremal mappings of point clouds[J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2016, 9(4): 1922-1962.
- [171] Ahlfors L V. Lectures on quasiconformal mappings: vol. 38[M]. Providence, RI: American Mathematical Soc., 2006.
- [172] Gu X F, Yau S T. Computational conformal geometry[M]. Boston, MA: International Press, 2008.
- [173] Schoen R M, Yau S T. Lectures on differential geometry[M]. Boston, MA: International Press, 1994.
- [174] Courant R. Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces[M]. Mineola, New York: Courier Corporation, 2005.
- [175] Eells J, Sampson J H. Harmonic mappings of Riemannian manifolds[J]. American journal of mathematics, 1964, 86(1): 109-160.
- [176] Pinkall U, Polthier K. Computing discrete minimal surfaces and their conjugates[J]. Experimental mathematics, 1993, 2(1): 15-36.
- [177] Jost J, Jost J. Riemannian geometry and geometric analysis: vol. 42005[M]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [178] 黄克智, 薛明德, 陆明万. 张量分析[第二版][M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.
- [179] Naghdi P M. The theory of shells and plates[M]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1973.
- [180] Bathe K, Dvorkin E N. A formulation of general shell elements—the use of mixed interpolation of tensorial components[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1986, 22(3): 697-722.
- [181] Chapelle D, Bathe K J. The finite element analysis of shells—fundamentals[M]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003.

- [182] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1981.
- [183] 陈维桓. 微分几何 (第二版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2017.
- [184] Reddy J N. Theory and analysis of elastic plates and shells[M]. Boca Raton: CRC press, 2006.
- [185] Green A E, Zerna W. Theoretical elasticity[M]. Mineola, New York: Courier Corporation, 1992.
- [186] 徐芝纶. 弹性力学 (下册) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [187] Budiansky B, Sanders J L Jr. On the 'best' first-order linear shell theory[J]. Progress in Applied Mechanics (the Prager Anniversary Volume), 1963: 129–140.
- [188] Kreisselmeier G, Steinhauser R. Systematic control design by optimizing a vector performance index [M]. In: Computer Aided Design of Control Systems. Oxford, United Kingdom: Pergamon, 1980: 113–117.
- [189] Du Z L, Cui T C, Liu C, et al. An efficient and easy-to-extend MATLAB code of the Moving Morphable Component (MMC) method for three-dimensional topology optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2022, 65(5): 158.
- [190] Dey T K, Li K, Sun J, et al. Computing geometry-aware handle and tunnel loops in 3D models[C]. ACM SIGGRAPH 2008. Los Angeles, California: Association for Computing Machinery, 2008: Article 45: 1-9.
- [191] Dhatt G, Marcotte L, Matte Y. A new triangular discrete Kirchhoff plate/shell element[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1986, 23(3): 453-470.
- [192] Nan L, Wonka P. Polyfit: Polygonal surface reconstruction from point clouds[C]. Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision. Venice, Italy: IEEE, 2017: 2353-2361.
- [193] Lee E T Y, Lucian M L. Möbius reparametrizations of rational B-splines[J]. Computer Aided Geometric Design, 1991, 8(3): 213-215.
- [194] Wang J, Valligatla S, Yin Y, et al. Experimental observation of Berry phases in optical Möbius-strip microcavities[J]. Nature Photonics, 2023, 17(1): 120-125.
- [195] Herges R. Topology in chemistry: designing Möbius molecules[J]. Chemical reviews, 2006, 106(12): 4820-4842.
- [196] Shewchuk J R. Triangle: Engineering a 2D quality mesh generator and Delaunay triangulator[C]. Workshop on Applied Computational Geometry. Philadelphia, PA: ACM, 1996: 203-222.
- [197] Persson P O, Strang G. A simple mesh generator in MATLAB[J]. SIAM review, 2004, 46(2): 329-345.
- [198] Zhang W S, Li D, Zhou J H, et al. A moving morphable void (MMV)-based explicit approach for topology optimization considering stress constraints[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018, 334: 381-413.
- [199] Pogorelov A V. Bendings of surfaces and stability of shells: Vol. 72[M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 1988.
- [200] Adriaenssens S, Block P, Veenendaal D, et al. Shell structures for architecture: form finding and optimization[M]. Abingdon: Routledge, 2014.
- [201] Lazarus A, Florijn H C B, Reis P M. Geometry-induced rigidity in nonspherical pressurized elastic shells[J]. Physical Review Letters, 2012, 109(14): 144301.
- [202] Udani J P, Arrieta A F. Programmable mechanical metastructures from locally bistable domes[J]. Extreme mechanics letters, 2021, 42: 101081.
- [203] Vitelli V, Lucks J B, Nelson D R. Crystallography on curved surfaces[J]. Proceedings of the National

- Academy of Sciences, 2006, 103(33): 12323-12328.
- [204] Meyer M, Desbrun M, Schröder P, et al. Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds[C]. Visualization and Mathematics III. Berlin/Heidelberg, Germany: Springer, 2003: 35-57.
- [205] Fung Y. A first course in continuum mechanics [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1969.
- [206] 徐芝纶. 弹性力学（上册）[M]. 北京: 高等教育出版社, 2016.
- [207] Taubin G. Estimating the tensor of curvature of a surface from a polyhedral approximation[C]. Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision. Boston, MA: IEEE, 1995: 902-907.
- [208] Zhang W S, Yuan J, Zhang J, et al. A new topology optimization approach based on Moving Morphable Components (MMC) and the ersatz material model[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2016, 53: 1243-1260.
- [209] Xue R Y, Liu C, Zhang W S, et al. Explicit structural topology optimization under finite deformation via moving morphable void (MMV) approach[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2019, 344: 798-818.
- [210] Pan M D, Chen F L, Tong W H. Volumetric spline parameterization for isogeometric analysis[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2020, 359: 112769.
- [211] Vella D, Ajdari A, Vaziri A, et al. Indentation of ellipsoidal and cylindrical elastic shells[J]. Physical Review Letters, 2012, 109(14): 144302.
- [212] Pezzulla M, Stoop N, Steranka M P, et al. Curvature-induced instabilities of shells[J]. Physical Review Letters, 2018, 120(4): 048002.
- [213] Watada R, Ohsaki M, Kanno Y. Non-uniqueness and symmetry of optimal topology of a shell for minimum compliance[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2011, 43: 459-471.

附录 1 共形参数化实现过程的相关证明

本附录旨在为章节 2.1 的命题提供详细的推导。首先是复合拟共形映射的 Beltrami 系数计算。

命题 A.1.1 令 $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ 和 $g: \Omega_2 \rightarrow \Omega_3$ 为两个拟共形映射，各自的 Beltrami 系数分别为 μ_f 和 μ_g ，则复合映射 $g \circ f$ 的 Beltrami 系数为

$$\mu_{g \circ f} = \frac{\mu_f + \mu_g(\bar{f})_{\bar{z}}/f_z}{1 + \overline{\mu_f \mu_g}(\bar{f})_{\bar{z}}/f_z}. \quad (\text{A.1.1})$$

证明 A.1.1 令 $z \in \Omega_1$ ，并且 $w = f(z) \in \Omega_2$ 。对于复函数的复合 $g \circ f$ ，根据直接计算^[172]，我们有复链式法则

$$\begin{cases} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial z} = (g_w \circ f) \cdot f_z + (g_{\bar{w}} \circ f) \cdot (\bar{f})_z, \\ \frac{\partial(g \circ f)}{\partial \bar{z}} = (g_w \circ f) \cdot f_{\bar{z}} + (g_{\bar{w}} \circ f) \cdot (\bar{f})_{\bar{z}}. \end{cases} \quad (\text{A.1.2})$$

上式中 $(\bar{f})_z = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}$ ，另外有 $(\bar{f})_{\bar{z}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)}$ 。此处用括号是为了强调共轭算子和偏导算子的顺序关系，防止混淆。由于

$$\mu_{g \circ f} = \frac{\partial(g \circ f)}{\partial \bar{z}} / \frac{\partial(g \circ f)}{\partial z}, \quad (\text{A.1.3})$$

我们将方程(A.1.2)带入上式可得

$$\mu_{g \circ f} = \frac{(g_w \circ f) \cdot f_{\bar{z}} + (g_{\bar{w}} \circ f) \cdot (\bar{f})_{\bar{z}}}{(g_w \circ f) \cdot f_z + (g_{\bar{w}} \circ f) \cdot (\bar{f})_z}. \quad (\text{A.1.4})$$

上式中分子分母同除以 $(g_w \circ f) \cdot f_z$ ，可得

$$\mu_{g \circ f} = \frac{\mu_f + \mu_g \cdot (\bar{f})_{\bar{z}}/f_z}{1 + \mu_g \cdot (\bar{f})_z/f_z}. \quad (\text{A.1.5})$$

由于 $\overline{\mu_f} = \overline{(\bar{f}_z/f_z)} = (\bar{f})_z / \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)}$ ，上式可进一步写为

$$\mu_{g \circ f} = \frac{\mu_f + \mu_g(\bar{f})_{\bar{z}}/f_z}{1 + \overline{\mu_f \mu_g}(\bar{f})_{\bar{z}}/f_z}, \quad (\text{A.1.6})$$

得证。

命题 A.1.2 当拟共形映射 f 和 g 具有关系 $\mu_{f^{-1}} = \mu_g$ 时， $\mu_{g \circ f} = 0$ 。

证明 A.1.2 根据方程(A.1.2)，以 $(g_w \circ f)$ 和 $(g_{\bar{w}} \circ f)$ 为未知量，求解线性方程组^[171]可得

$$\begin{cases} g_w \circ f = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z} (\bar{f})_{\bar{z}} - \frac{\partial(g \circ f)}{\partial \bar{z}} (\bar{f})_z \right), \\ g_{\bar{w}} \circ f = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial(g \circ f)}{\partial \bar{z}} f_z - \frac{\partial(g \circ f)}{\partial z} f_{\bar{z}} \right). \end{cases} \quad (\text{A.1.7})$$

上式中 $J = f_z(\bar{f})_{\bar{z}} - f_{\bar{z}}(\bar{f})_z = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$, 第二个方程除以第一个方程可得

$$\mu_g = \frac{\frac{\partial(g \circ f)}{\partial \bar{z}} f_z - \frac{\partial(g \circ f)}{\partial z} f_{\bar{z}}}{\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z} (\bar{f})_{\bar{z}} - \frac{\partial(g \circ f)}{\partial \bar{z}} (\bar{f})_z}, \quad (\text{A.1.8})$$

分子分母同除以 $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z}$, 可得

$$\mu_g = \frac{f_z}{(\bar{f})_{\bar{z}}} \cdot \frac{\mu_{g \circ f} - \mu_f}{1 - \mu_{g \circ f} \mu_f}, \quad (\text{A.1.9})$$

当映射 f 和 g 具有关系 $\mu_{f^{-1}} = \mu_g$ 时, 可得

$$\mu_g = \mu_{f^{-1}} = \frac{f_z}{(\bar{f})_{\bar{z}}} \cdot \frac{\mu_{f^{-1} \circ f} - \mu_f}{1 - \mu_{f^{-1} \circ f} \mu_f} = - \left(f_z / (\bar{f})_{\bar{z}} \right) \mu_f. \quad (\text{A.1.10})$$

上式中函数 $f^{-1} \circ f$ 将坐标映射为自身, 因此其系数 $\mu_{f^{-1} \circ f}$ 为零。上式带入(A.1.6), 我们有

$$\mu_{g \circ f} = \frac{\mu_f + \left(- \left(f_z / (\bar{f})_{\bar{z}} \right) \mu_f \right) (\bar{f})_{\bar{z}} / f_z}{1 + \mu_f \left(- \left(f_z / (\bar{f})_{\bar{z}} \right) \mu_f \right) ((\bar{f})_{\bar{z}} / f_z)} = 0. \quad (\text{A.1.11})$$

得证。

共形参数化中, 边界条件不仅影响映射的求解质量、数值稳定性, 更是决定底层几何理论是否适用的关键因素, 其设置主要需要考虑形状和分布。形状的考虑即为目标参数域的边界形状, 前文限制为圆形 (调和映射 $f_1: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{D}$ 将零亏格单连通可定向开曲面 \mathcal{S} 映射至复平面中的单位圆盘 \mathbb{D}), 而分布方面则是考虑使得映射的边界 (即 $f_1|_{\partial \mathcal{S}}$) 尽可能接近共形。基于上述目的, 我们采用下列弧长参数化算法, 该算法根据边界上线段的长度比例, 将原始曲面边界映射至单位圆上, 从而尽可能地保角, 接近共形。

算法 A.1.1 (弧长参数化) 设边界节点的集合为 $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^{nb}$, 该集合中节点预设了单向的路径顺序。相邻节点连线构成一系列线段, 其长度序列为 $\{s_i\}_{i=1}^{nb}$, 其中

$$\begin{cases} s_i = |\boldsymbol{v}_{i+1} - \boldsymbol{v}_i|, i \neq nb, \\ s_{nb} = |\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_{nb}|. \end{cases} \quad (\text{A.1.12})$$

因此, 总弧长即为 $s = \sum_{i=1}^{nb} s_i$, 相邻节点构成的线段弧长角度即为 $\{\theta_i\}_{i=1}^{nb}$, 其中 $\theta_i = 2\pi s_i / s$ 。根据弧长比例关系, 按照顺序将边界节点映射至单位圆的边界

$$f_1(\boldsymbol{v}_i) = (\cos \theta_i, \sin \theta_i), \quad (\text{A.1.13})$$

其中 $\vartheta_i = \sum_{k=1}^i \theta_k$ 代表角度的累积。至此，算法结束。

下面我们给出离散单元层面的线性函数梯度、三角面片调和能量的推导。

命题 A.1.3 设 $\mathcal{S}_\Delta^e = \{\mathbf{v}_1^e, \mathbf{v}_2^e, \mathbf{v}_3^e\}$ 为欧氏三角形单元， $\theta_i^e, i = 1, 2, 3$ 为各顶点对应的三角形内角，单元法向量为 \mathbf{N}^e ， \mathbf{x} 为单元内部任意一点。该单元上定义的线性函数 $f_\Delta^e(\mathbf{x})$ 按照插值形式可表达为

$$f_\Delta^e(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i f_\Delta^e(\mathbf{v}_i^e), \quad (\text{A.1.14})$$

其中 $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ 为形函数。函数 $f_\Delta^e(\mathbf{x})$ 的梯度为

$$\nabla_{\mathcal{S}}^e f_\Delta^e(\mathbf{x}) = \frac{1}{2A^e} \sum_{i=1}^3 f_\Delta^e(\mathbf{v}_i^e) \mathbf{s}_i^e, \quad (\text{A.1.15})$$

其中 A^e 为单元面积， $\mathbf{s}_i^e, i = 1, 2, 3$ 为单元三条边的法向量，见公式(2.16)。面片 \mathcal{S}_Δ^e 的调和能量为

$$\begin{aligned} E_h^e &= \frac{\cot\theta_1^e}{2} (f_\Delta^e(\mathbf{v}_2^e) - f_\Delta^e(\mathbf{v}_3^e))^2 + \frac{\cot\theta_2^e}{2} (f_\Delta^e(\mathbf{v}_3^e) - f_\Delta^e(\mathbf{v}_1^e))^2 \\ &\quad + \frac{\cot\theta_3^e}{2} (f_\Delta^e(\mathbf{v}_1^e) - f_\Delta^e(\mathbf{v}_2^e))^2. \end{aligned} \quad (\text{A.1.16})$$

证明 A.1.3 由于单元上的点 \mathbf{x} 满足 $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{v}_i^e$ ，根据函数 $f_\Delta^e(\mathbf{x})$ 的线性性质，可得方程(A.1.14)。下面推导方程(A.1.15)以及(A.1.16)。

如图 A.1.1 所示，以二号节点对应的面积坐标 λ_2 为例，法向量 \mathbf{s}_2^e 的含义为模长为 $|\mathbf{v}_1^e - \mathbf{v}_3^e|$ 、垂直于向量 $\mathbf{v}_1^e - \mathbf{v}_3^e$ 、指向单元内部的向量。因此，顶点 \mathbf{v}_1^e 、 \mathbf{v}_3^e 和 \mathbf{x} 构成的三角形面积为 $\lambda_2 A^e = (\mathbf{x} - \mathbf{v}_1^e) \cdot \mathbf{s}_2^e / 2 = (\mathbf{x} - \mathbf{v}_3^e) \cdot \mathbf{s}_2^e / 2$ 。

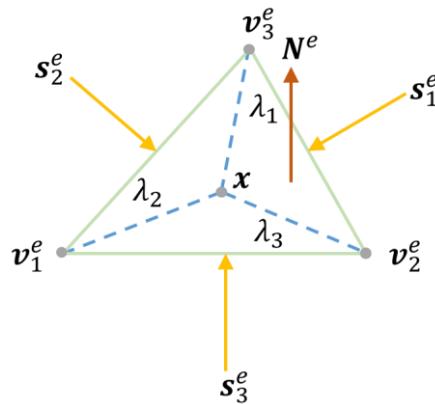


图 A.1.1 边界法向量的定义

Fig. A.1.1 Definition of boundary normal vectors

类似地，对于任一面积坐标 λ_i ，其表达式按照单元边界的法向量表示为

$$\lambda_i = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{v}_k^e) \cdot \mathbf{s}_i^e}{2A^e}, \quad (\text{A.1.17})$$

其中 $k = 1, 2, 3; k \neq i$ 。将上式带入方程(A.1.14)可得

$$f_\Delta^e(\mathbf{x}) = \frac{1}{2A^e} \sum_{i=1}^3 (\mathbf{x} \cdot \mathbf{s}_i^e f_\Delta^e(\mathbf{v}_i^e) - \mathbf{v}_k^e \cdot \mathbf{s}_i^e f_\Delta^e(\mathbf{v}_i^e)), \quad (\text{A.1.18})$$

其中 $\mathbf{v}_k^e \cdot \mathbf{s}_i^e f_\Delta^e(\mathbf{v}_i^e)$ 是关于 \mathbf{x} 的常量，因此

$$\nabla_{\mathcal{S}}^e f_\Delta^e(\mathbf{x}) = \frac{1}{2A^e} \sum_{i=1}^3 f_\Delta^e(\mathbf{v}_i^e) \mathbf{s}_i^e. \quad (\text{A.1.19})$$

面片 \mathcal{S}_Δ^e 的调和能量为

$$E_h^e = \int_{\mathcal{S}_\Delta^e} |\nabla_{\mathcal{S}}^e f_\Delta^e(\mathbf{x})|^2 dA. \quad (\text{A.1.20})$$

定义记号 $g_i = f_\Delta^e(\mathbf{v}_i^e), i = 1, 2, 3$ 。将方程(A.1.19)带入上式可得

$$4A^e E_h^e = \sum_{i=1}^3 (g_i)^2 \mathbf{s}_i^e \cdot \mathbf{s}_i^e + 2(g_1 g_2 \mathbf{s}_1^e \cdot \mathbf{s}_2^e + g_1 g_3 \mathbf{s}_1^e \cdot \mathbf{s}_3^e + g_2 g_3 \mathbf{s}_2^e \cdot \mathbf{s}_3^e). \quad (\text{A.1.21})$$

由于

$$\begin{cases} \mathbf{s}_1^e \cdot \mathbf{s}_1^e = -\mathbf{s}_1^e \cdot \mathbf{s}_2^e - \mathbf{s}_1^e \cdot \mathbf{s}_3^e, \\ \mathbf{s}_2^e \cdot \mathbf{s}_2^e = -\mathbf{s}_2^e \cdot \mathbf{s}_1^e - \mathbf{s}_2^e \cdot \mathbf{s}_3^e, \\ \mathbf{s}_3^e \cdot \mathbf{s}_3^e = -\mathbf{s}_3^e \cdot \mathbf{s}_1^e - \mathbf{s}_3^e \cdot \mathbf{s}_2^e, \end{cases} \quad (\text{A.1.22})$$

方程(A.1.21)可进一步简化得到

$$-4A^e E_h^e = (g_1 - g_2)^2 \mathbf{s}_1^e \cdot \mathbf{s}_2^e + (g_1 - g_3)^2 \mathbf{s}_1^e \cdot \mathbf{s}_3^e + (g_2 - g_3)^2 \mathbf{s}_2^e \cdot \mathbf{s}_3^e, \quad (\text{A.1.23})$$

其中

$$\mathbf{s}_1^e \cdot \mathbf{s}_2^e = -2A^e \cot \theta_3^e, \quad \mathbf{s}_2^e \cdot \mathbf{s}_3^e = -2A^e \cot \theta_1^e, \quad \mathbf{s}_3^e \cdot \mathbf{s}_1^e = -2A^e \cot \theta_2^e. \quad (\text{A.1.24})$$

因此我们有

$$E_h^e = \frac{1}{2} ((g_1 - g_2)^2 \cot \theta_3^e + (g_1 - g_3)^2 \cot \theta_1^e + (g_2 - g_3)^2 \cot \theta_2^e), \quad (\text{A.1.25})$$

带入 $g_i = f_\Delta^e(\mathbf{v}_i^e)$ 可得方程(A.1.16)，得证。

下面我们推导给定 Beltrami 系数重构拟共形映射时所需满足的方程。

命题 A.1.4 令 $\mu_{f_1^{-1}} = \rho + j\tau$ 为逆映射 f_1^{-1} 的 Beltrami 算子， $f_2(x + jy) = u(x, y) + j\nu(x, y): \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{M}$ 为重构的拟共形映射。根据条件 $\mu_{f_2} = \mu_{f_1^{-1}}$ ，函数 f_2 的分量满足

$$\begin{cases} \nabla_{2d}^\top \cdot (\mathbf{A} \cdot \nabla_{2d} u) = 0, & \text{in } \mathbb{D}, \\ \nabla_{2d}^\top \cdot (\mathbf{A} \cdot \nabla_{2d} \nu) = 0, & \text{in } \mathbb{D}, \end{cases} \quad (\text{A.1.26})$$

其中 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}$ ， $\alpha_1 = \frac{(\rho-1)^2 + \tau^2}{1-\rho^2-\tau^2}$ ， $\alpha_2 = -\frac{2\tau}{1-\rho^2-\tau^2}$ ， $\alpha_3 = \frac{(\rho+1)^2 + \tau^2}{1-\rho^2-\tau^2}$ 。

证明 A.1.4 利用 Beltrami 方程可得

$$\mu_{f_2} = \frac{\frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}}}{\frac{\partial f_2}{\partial z}} = \frac{u_x + jv_x + j(u_y + jv_y)}{u_x + jv_x - j(u_y + jv_y)}, \quad (\text{A.1.27})$$

因此

$$(u_x - v_y + j(v_x + u_y)) = (\rho + j\tau)(u_x + v_y + j(v_x - u_y)), \quad (\text{A.1.28})$$

化简可得

$$\begin{cases} u_x - v_y = \rho(u_x + v_y) - \tau(v_x - u_y), \\ v_x + u_y = \rho(v_x - u_y) + \tau(u_x + v_y). \end{cases} \quad (\text{A.1.29})$$

因此

$$\begin{cases} (\rho - 1)u_x + (\rho + 1)v_y - \tau v_x + \tau u_y = 0, \\ (\rho - 1)v_x - (\rho + 1)u_y + \tau u_x + \tau v_y = 0. \end{cases} \quad (\text{A.1.30})$$

写成矩阵形式可以得到

$$\begin{bmatrix} (\rho - 1) & \tau \\ \tau & -(\rho + 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau & -(\rho + 1) \\ (1 - \rho) & -\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1.31})$$

并且有

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} (\rho - 1) & \tau \\ \tau & -(\rho + 1) \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\tau^2 + \rho^2 - 1} \begin{bmatrix} (\rho + 1) & \tau \\ \tau & (1 - \rho) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \tau & -(\rho + 1) \\ (1 - \rho) & -\tau \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\tau^2 + \rho^2 - 1} \begin{bmatrix} \tau & -(\rho + 1) \\ (1 - \rho) & -\tau \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (\text{A.1.32})$$

由于 $\|\mu_f\|_\infty < 1$, 上式左侧的两个矩阵求逆运算成立。将 u_x 和 u_y 用 v_x 和 v_y 表示, 以及将 v_x 和 v_y 用 u_x 和 u_y 表示, 得到

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \frac{1}{\tau^2 + \rho^2 - 1} \begin{bmatrix} 2\tau & -\tau^2 - (1 + \rho)^2 \\ \tau^2 + (1 - \rho)^2 & -2\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \frac{1}{\tau^2 + \rho^2 - 1} \begin{bmatrix} -2\tau & \tau^2 + (1 + \rho)^2 \\ -\tau^2 - (1 - \rho)^2 & 2\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (\text{A.1.33})$$

因此

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} u_y \\ -u_x \end{bmatrix} = \frac{1}{\tau^2 + \rho^2 - 1} \begin{bmatrix} \tau^2 + (1 - \rho)^2 & -2\tau \\ -2\tau & \tau^2 + (1 + \rho)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} -v_y \\ v_x \end{bmatrix} = \frac{1}{\tau^2 + \rho^2 - 1} \begin{bmatrix} \tau^2 + (1 - \rho)^2 & -2\tau \\ -2\tau & \tau^2 + (1 + \rho)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (\text{A.1.34})$$

令 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}$, 其中 $\alpha_1 = \frac{(\rho - 1)^2 + \tau^2}{1 - \rho^2 - \tau^2}$, $\alpha_2 = -\frac{2\tau}{1 - \rho^2 - \tau^2}$, $\alpha_3 = \frac{(\rho + 1)^2 + \tau^2}{1 - \rho^2 - \tau^2}$, 上式可整理为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} -u_y \\ u_x \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \nabla_{2d} v, \\ \begin{bmatrix} v_y \\ -v_x \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \nabla_{2d} u. \end{cases} \quad (\text{A.1.35})$$

由于 $\nabla_{2d}^T \cdot (-u_y, u_x) = 0$, $\nabla_{2d}^T \cdot (v_y, -v_x) = 0$, 我们得到方程(A.1.26), 得证。

攻读博士学位期间科研成果及科研项目

学位相关期刊论文

- [1] **Wendong Huo**, Chang Liu*, Zongliang Du, Xudong Jiang, Zhenyu Liu, Xu Guo*. Topology optimization on complex surfaces based on the moving morphable components (MMCs) method and computational conformal mapping (CCM). *Journal of Applied Mechanics-Transactions of The ASME* 2022 89(5): 051008. (SCI: 000777735100004, IF: 2.6, 本学位论文第三章).
- [2] **Wendong Huo**, Chang Liu*, Yilin Guo, Zongliang Du, Weisheng Zhang, Xu Guo*. Explicit topography design for complex shell structures based on embedded spline components. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 2025 196: 105974. (SCI: 001390328800001, IF: 6.0, 本学位论文第四章).
- [3] **Wendong Huo**, Chang Liu*, Yunpu Liu, Zongliang Du, Weisheng Zhang, Xu Guo*. A novel explicit design method for complex thin-walled structures based on embedded solid moving morphable components. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2023, 417: 116431. (SCI: 001097388400001, IF: 7.3, 本学位论文第五章).
- [4] Xudong Jiang, **Wendong Huo***, Chang Liu*, Zongliang Du, Xiaoyu Zhang, Xiao Li, Xu Guo*. Explicit layout optimization of complex rib-reinforced thin-walled structures via computational conformal mapping (CCM). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2023 404: 115745. (SCI: 000896882700007, IF: 7.3, 本学位论文第四章).
- [5] Xudong Jiang, Chang Liu*, Zongliang Du, **Wendong Huo**, Xiaoyu Zhang, Feng Liu, Xu Guo*. A unified framework for explicit layout/topology optimization of thin-walled structures based on Moving Morphable Components (MMC) method and adaptive ground structure approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2022 396: 115047. (SCI: 000806012900002, IF: 7.3, 本学位论文第三章、第五章部分内容).

其他期刊论文

- [1] 黄孟成, 霍文栋, 刘畅, 杜宗亮*, 郭旭*. 基于模板的子结构多分辨率拓扑优化. *力学进展* 2021 51: 901-909. (EI: 20215111333007, IF: 1.82).
- [2] Chang Liu, Yanbo Ren, Shixin Zhao, Xianglong Cao, Yilin Guo, **Wendong Huo***, Xu Guo. Hierarchical shape optimization for complex shell structures considering global and local shape perturbations. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 2025 68.10: 1-23. (SCI: 001578325300002, IF: 3.6, 本学位论文第四章、第五章部分内容).

学术会议报告

- [1] **Wendong Huo**, Chang Liu, Xu Guo. Explicit design of complex shell structures based on the moving morphable component approach. The 26th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM-26), Daegu, Korea, 2024.08.
- [2] **Wendong Huo**, Chang Liu, Xu Guo. Explicit design framework of shell structures based on the moving morphable component method and the dimensionality reduction mapping technique. The Asian Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization 2024 (ACSMO-2024), Zhengzhou, China, 2024.05.
- [3] 刘畅, 郭一麟, 霍文栋, 曹祥龙, 郭旭. 面向复杂薄壁结构的显式优化设计软件. 第二届开源工业软件产品化集成赛, 苏州, 中国, 2024.04.
- [4] **Wendong Huo**, Chang Liu, Xu Guo. Topology optimization on complex surfaces based on the moving morphable component method and computational conformal mapping. The 15th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-15), Cork, Ireland, 2023.06.

发明专利

- [1] 郭旭, 刘畅, 蒋旭东, 霍文栋; 杜宗亮. 一种薄壁加筋结构的加筋布局优化方法: 中国. 专利类型: 发明专利. 授权公告号: CN115630542B, 授权公布日: 2023.09.01.
- [2] 郭旭, 刘畅, 霍文栋, 张维声, 杜宗亮. 一种基于嵌入式组件的复杂薄壁结构优化设计方法: 中国. 专利类型: 发明专利. 授权公告号: CN116484509B, 授权公布日: 2024.01.30.
- [3] 郭旭, 刘畅, 霍文栋, 张维声, 杜宗亮. 基于嵌入式样条组件的复杂壳体结构显式形貌优化方法: 中国. 专利类型: 发明专利. 发明公告号: CN118965894A, 发明公开日: 2024.11.15.

参与科研项目

- [1] 国家自然科学基金重点项目(11732004): 显式几何描述下考虑非概率不确定性的连续体结构拓扑优化研究, 2018-2022, 负责人: 郭旭.
- [2] 国家重点研发计划青年项目(2022YFB3303000): 基于体细分表示的复杂设计域超大规模等几何拓扑优化研究, 2022-2025, 负责人: 刘畅.
- [3] 国家重点研发项目(2023YFB3309104): 通用 CAE 隐式求解引擎研发, 2023-, 负责人: 郭旭.

致 谢

时光如梭！六年的研究生阶段已悄然过去，在这场神奇的经历开始前我曾以为前路漫漫，没想到蓦然回首也是弹指一挥间。故事启始于二〇一八年暑期的某个下午，当时有幸参与大工举办的暑期夏令营，近距离地去了解科研以及向往的计算力学。在那次活动上我联系了后来的导师郭旭教授，一场宏大的冒险就此展开。

读博之前，我听说过所谓的三篇或两篇论文毕业的说法，但实际上对于博士的涵义与内核一无所知。所幸能够在郭老师的悉心指导下，深化认识并探索未知。不同于传统意义的指导，郭老师对我的引导和启发可追溯至前文所述的夏令营活动。当时我表达了内心的纠结：如果以后想走科研相关的道路，本科期间所接受的工科教育是否会造成一定程度的弱势，毕竟力学有着非常强烈的数理结合的特征。郭老师的一席话则直接打消了我的疑虑：知识应该是主动追得来的，而不是被动地靠老师送来的。这也彻底地改变了我的学习模式——从为了完成课业而应付考试、到为了解决问题而追根溯源。其实，这种颠覆性的场景在这些年里可谓数不胜数，传达的理念也成为了我的无价之宝，千金不换；例如，科研的目的与真问题和真学问、“论文-程序-项目”的三位一体式教育模式等等。类似的还有一些科学观念上的革新，比如，在力学与泛函分析的课堂上带着我们从无到有逐步搭建理论的“基础设施”、在讲座中为我们阐释最小作用量原理和优化的关系、MMC 和 MMV 方法的对偶关系等。

在科研工作的指导上，郭老师向来是以身作则、以事揭理。犹记二一年年底，当时我正在整理第一个壳体拓扑优化的科研工作，写出来的“东西”却是一言难尽，远称不上论文。郭老师则从百忙之中抽出时间带领我，从文章的组织架构到行文的安排逻辑、从创新点的提取凝练到解题的思路表述、从符号的规范表达达到图表的数据可视化…事无巨细、全方位地进行修改与更正，历经一周时间不断迭代更新形成的终版相比初始已经脱胎换骨，这也让我感叹和自愧不已。类似的还有教我们如何采用幻灯片介绍科研工作等。还有一点需要特别感谢的是，开明的郭老师长期以来提供的信任和支持，给予我在学习、科研、项目、编程等多方面的自由度，让我能够不受拘束地一展身手。吾有此师，何其幸哉！

第二位必须特别感谢的是我的副导师刘畅老师，刘老师也是全程参与了我读博期间的每个部分与环节。从做科研、做项目，到出差、参加比赛…这么多美好的回忆！和刘老师一起参与的第一个项目是一个螺栓优化相关的工作，沿用了马奔奔师兄的螺栓和接触模型，在此一并感谢。当时我还从未做过工程项目、不知从哪下手，幸好刘老师逐步引导、步步为营并最终达到验收要求、顺利完成项目。在这样细致指导的基础上，我后

来再遇到工程项目问题，也知道需要将一个遥远和宏大的指标分解为多个细小的进程加以解决。其他参与的项目还有一些，每次习得的经验都不尽相同；例如，参与华为音频振膜设计的项目时感受到了过程管理的必要性与高效性，参与加筋与整流壳设计时意识到科研选题应当格物致知以避免流于虚空之学等等。这些经验不仅对于科研、项目有用，一定程度上也塑造了我的行事准则，在此对于一起参与项目的各位同伴表示感谢！所谓读万卷书和行万里路，与刘老师出差便是万里之行的具象化解释。在这些出差经历中，我增长了见识、拓宽了视野、加深了我对交流沟通和时间观念重要性的认识，而在多次比赛的过程中，我则学习了商业运作的少量知识以及明白了算法集成为软件的必要性。此外，还要感谢杜宗亮老师在板壳力学方面的指导，感谢张维声老师在博士论文写作思路上的宝贵建议，以及梅跃老师平日的关心。感谢预答辩、送审与正式答辩中的评委老师抽出宝贵时间，对我的论文进行指导，并提出了许多宝贵的意见和建议。

感谢五零九室及其它教研室的师兄弟姐妹们。从一九年夏天入校时崔师兄替我们找空位，到二一年跟着旭东师兄学习加筋设计算法与程序，到同年和旭兵、徐武等同届伙伴一起组织新生培训，再到后来和文字、祥龙、晓洋、彦博等师弟一同攻克工程项目难题...一路走来我们风雨同舟、携手共济；也正因为有你们相伴，我的博士之旅才不觉孤单和漫长。

特别感谢本科导师余波教授在大学期间提供的科研机会。自一七年十月开始，我便加入了余老师的课题组，在余老师的指导下先后学习了边界元、有限元和样条函数等数值工具，并逐步开始了等几何边界元底层算法的开发。到现在我仍然记得，当时所在的103b室曾经放置过岛津试验机，门上还留着疲劳实验室的牌子；也非常怀念那些学习到疲倦的夜晚，与闯哥、月哥等师兄一同到西门口隔壁超市买小零食的惬意。感谢本科期间教授过我基础力学知识的牛忠荣、刘一华等诸位老师。感谢本科期间同学好友的相伴。

感谢中国共产党、感谢人民政府，在当今不甚太平的世界局势中，保护我们国家免受外敌侵扰；也让我有幸能够在个人成长期间见证人民共和国的日益强大。感谢学校、学院和力学系这么多年来提供优越的科研环境，尤其在临近毕业之际让我更是觉得平时的这些条件实属来之不易。感谢了不起的0801，这里的问题关乎重大装备的服役安全，必须予以高度关注；也让我在本真理想与具身现实之间找到了平衡与可行解。

感恩生我养我的父母，这篇论文也凝聚着你们的牵挂，感恩你们无私的倾注和给予。

珍贵的时光总是短暂。最后再次感谢所有指导、帮助和支持过我的老师、同学、亲人朋友们。

霍文栋

07.15.2025

一〇九室，大学生活动中心，大连理工大学

作者简介

姓名：霍文栋

性别：男

出生年月：1997 年 11 月

民族：汉族

籍贯：安徽省合肥市

研究方向：固体力学 结构优化 薄壁结构

学习经历：

2015 年 9 月—2019 年 6 月，合肥工业大学，工程力学，学士学位

2019 年 9 月—至今，大连理工大学，固体力学，直接攻博

