介质阻挡放电等离子体激发器在湍流减阻中的应用研究

（申请清华大学工学博士学位论文）

培养单位：航天航空学院
学　　科：力学
研 究 生：王哲夫
指导教师：符松教授

二〇一八年三月

Study of the application of Dielectric-Barrier-Discharge plasma actuators in turbulent drag reduction

Dissertation Submitted to

Tsinghua University

in partial fulfillment of the requirement

for the degree of

Doctor of Philosophy

in

School of Aerospace Engineering

by

Wang Zhefu

Dissertation Supervisor : Professor Fu Song

March, 2018

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：

清华大学拥有在著作权法规定范围内学位论文的使用权，其中包括：（1）已获学位的研究生必须按学校规定提交学位论文，学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究生上交的学位论文；（2）为教学和科研目的，学校可以将公开的学位论文作为资料在图书馆、资料室等场所供校内师生阅读，或在校园网上供校内师生浏览部分内容；（3）根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》，向国家图书馆报送可以公开的学位论文。

本人保证遵守上述规定。

（保密的论文在解密后应遵守此规定）

作者签名：_____ 导师签名：_____

日　　期：_____ 日　　期：_____

摘　要

论文的摘要是对论文研究内容和成果的高度概括。摘要应对论文所研究的问题及其研究目的进行描述，对研究方法和过程进行简单介绍，对研究成果和所得结论进行概括。摘要应具有独立性和自明性，其内容应包含与论文全文同等量的主要信息。使读者即使不阅读全文，通过摘要就能了解论文的总体内容和主要成果。

论文摘要的书写应力求精确、简明。切忌写成对论文书写内容进行提要的形式，尤其要避免“第 1 章……；第 2 章……;……”这种或类似的陈述方式。

本文介绍清华大学论文模板 ThuThesis 的使用方法。本模板符合学校的本科、硕士、博士论文格式要求。

本文的创新点主要有：

- 用例子来解释模板的使用方法；
- 用废话来填充无关紧要的部分；
- 一边学习摸索一边编写新代码。

关键词是为了文献标引工作、用以表示全文主要内容信息的单词或术语。关键词不超过 5 个，每个关键词中间用分号分隔。（模板作者注：关键词分隔符不用考虑，模板会自动处理。英文关键词同理。）

关键词：TEX； LATEX； CJK；模板；论文

Abstract

An abstract of a dissertation is a summary and extraction of research work and contributions. Included in an abstract should be description of research topic and research objective, brief introduction to methodology and research process, and summarization of conclusion and contributions of the research. An abstract should be characterized by independence and clarity and carry identical information with the dissertation. It should be such that the general idea and major contributions of the dissertation are conveyed without reading the dissertation.

An abstract should be concise and to the point. It is a misunderstanding to make an abstract an outline of the dissertation and words “the first chapter”, “the second chapter” and the like should be avoided in the abstract.

Key words are terms used in a dissertation for indexing, reflecting core information of the dissertation. An abstract may contain a maximum of 5 key words, with semi-colons used in between to separate one another.

Key words: TEX; LATEX; CJK; template; thesis

目 录

第1章 引言 1
1.1 介质阻挡放电等离子体激发器 2
1.1.1 介质阻挡放电等离子体激发器数值模拟方法 3
1.1.2 介质阻挡放电等离子体激发器在流动控制方面的应用 5
1.2 通过推迟层流/湍流转捩减阻 6
1.2.1 二维边界层失稳与转捩 6
1.2.2 三维边界层失稳与转捩 7
1.2.3 转捩推迟方案研究进展 9
1.3 通过控制壁湍流相干结构减阻 10
1.3.1 湍流相干结构研究进展 10
1.3.2 湍流减阻技术研究进展 10
第2章 理论公式与数值求解方法 11
2.1 等离子体模型 11
2.2 流动稳定性求解框架 11
2.2.1 边界层方程 13
2.2.2 扰动方程 17
2.2.3 扰动发展的敏感性分析 20
2.3 充分发展槽道的直接数值模拟 25
第3章 后掠Hiemenz流动的失稳分析与控制 26
3.1 后掠Hiemenz流动的稳定性分析 26
3.2 后掠Hiemenz流动的敏感性分析 29
3.2.1 基于LST的敏感性分析 29
3.2.2 基于PSE的敏感性分析 31
3.3 采用等离子体激发器推迟后掠Hiemenz流动转捩 38
3.4 本章小结 44
第4章 后掠翼上流动失稳分析与控制 45
4.1 后掠翼上流动的稳定性分析 45
4.2 采用等离子体激发器推迟后掠翼上流动转捩 51
4.2.1 谐波激励：每个展向周期放置一个激发器 51
4.2.2 亚谐波激励：每个展向周期放置两个激发器 55

4.2.3 Off-designed case 64
第5章 等离子体激发器控制充分发展槽道湍流 65
5.1 定常激励控制方案 68
5.2 周期激励控制方案 76
5.3 本章小结 84
第6章 结论 93
参考文献 94
致 谢 102
声 明 103
附录 A 边界层方程数值求解方法 104
附录 B 扰动方程具体形式 108
个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果 117

主要符号对照表

HPC	高性能计算 (High Performance Computing)
cluster	集群
Itanium	安腾
SMP	对称多处理
API	应用程序编程接口
PI	聚酰亚胺
MPI	聚酰亚胺模型化合物，N-苯基邻苯酰亚胺
PBI	聚苯并咪唑
MPBI	聚苯并咪唑模型化合物，N-苯基苯并咪唑
PY	聚吡咙
PMDA-BDA	均苯四酸二酐与联苯四胺合成的聚吡咙薄膜
ΔG	活化自由能 (Activation Free Energy)
χ	传输系数 (Transmission Coefficient)
E	能量
m	质量
c	光速
P	概率
T	时间
v	速度
劝学	君子曰：学不可以已。青，取之于蓝，而青于蓝；冰，水为之，而寒于水。—— 荀况

第1章　引言

为了配合我国大型客机发展的战略需求，帮助新一代自主研制客机在节能减排绿色环保的道路上顺利前进，研究边界层减阻相关技术至关重要。对于大型民用客机，摩擦阻力几乎占到了总阻力的一半[1]。而这些摩擦阻力又主要由机身和机翼贡献。就机翼而言，其流向长度不大，将层流向湍流转捩的过程推迟的层流技术，非常有应用前景[2]。但是对于机身，其流向尺度过大，机身中后段边界层已经无可避免的发展为湍流，这个时候层流技术毫无用武之地，必须使用通过改变充分发展湍流中拟序结构的方法降低阻力。针对这两种完全不同的情况，本文将其抽象为两个分别与之对应的科学问题进行研究。关于机翼减阻的问题，本文将其简化为三维边界层层流-湍流转捩推迟问题。关于机身上减阻的问题，本文将其抽象成充分发展槽道壁湍流减阻控制问题。

图 1.1　大型客机阻力分解[1]

为了完成减阻的目标，本文以介质阻挡放电（DBD）等离子体激发器作为控制装置。这种激发器由于有响应时间短，安装方便，耗能低，器件小等众多优点，近些年得到了流动控制领域研究者们的青睐。在引言的第一节，本文先简要的介绍一下这种流动控制装置的特点、数值模拟方法与相关应用。在随后的两节里分别介绍后掠翼转捩推迟与壁湍流流动控制的研究现状。

1.1　介质阻挡放电等离子体激发器

等离子体是除了液态、固态以及气态之外的物质第四态[3,4]。等离子体可由高温或者强电场产生。由强电场电离产生的等离子体通常由大量的电子和相应成对出现的离子构成。在电场的作用下，等离子体可以表现出明显的集体行为[5]。在本文中，主要是用的介质阻挡放电等离子体激发器。这种激发器由两片电电极和一层绝缘层构成（如图 1.2所示）。当在两片电极上加上高电压时，两片电击之间的空气就会被电离，在介质表面形生成等离子体。等离子体受到电场的驱动，就会形成平行于壁面的“电风”（electric wind）。这一控制装置相比传统的控制装置有诸多优点[6]。首先，该激励器的主要部件就是两个电极片和一张绝缘层，非常轻便。其次，其该激励器反应速度很快，激励频率可调且可调范围广，在流动控制中可以很方便的避开流动的特征频率。最后，在不需要控制的时候激励器对流动完全没有影响。

DBD等离子体激励器对流动的影响可以分为三类，分别是物性变化效应，动量加速效应以及温升热冲击效应[7]。对于不可压缩流动，动量加速效应占主导，另外两种效应可以忽略。在本文的研究也主要依赖DBD激发器的动量加速效应来改变流动。简单而言，动量加速效应的物理过程就是DBD激发器将电场力作用咋其附近的流体上，然后这种电场力会驱动流体加速。因此，确定激发器施加在流体上的作用力强度对流动控制的研究至关重要[8–12]。实验研究发现，DBD激发器产生的总的力基本上随着其功率的上升而线性增加，效用系数大约为0.25mN/W[10]。在激励频率固定的情况下，激励器产生的总的力与电压的平方成正比[9]，即$F \propto (V - V_0)^2$。目前试验中测量到的最强的体积力为125mN/m[13]，采用了40kV的电压和1kHz的频率。电介质采用的是6.35mm厚的石英。这最强的激发器的能耗为4W/cm。由DBD激发器产生的“电风”的最大速度会随着能耗的增加而增加，但是当能耗达到2W/cm之后，会达到饱和状态[14]。除了测量最大风速，学者们还采用PIV（particle image velocimetry，粒子成像测速）技术对“电风”在空间的分布进行了测量[15,16]，其流速矢量场如1.3。由于本文的重点是探讨如何采用DBD激发器进行流动控制，其物理机理在这里就不做过多探讨，读者可以参考文献[17,18]。

本文主要是采用数值模拟的方法研究这种激发器在流动控制中的应用，所以本文将在引言的第一部分重点介绍DBD等离子体激发器的数值模拟方法与其在流动控制领域的应用现状。

图 1.2　等离子体激发器示意图[19]

图 1.3　Kotsonis和Ghaemi[15]采用PIV测量得到的DBD激发器诱发出的流场矢量图

1.1.1　介质阻挡放电等离子体激发器数值模拟方法

传统的等离子体数值模型可以分为两类，一种是从第一原理出发的机理模型，还有一种是较为简单的唯像简化模型。从机理模型会对从空气电离到动量传导的每一个物理过程进行建模求解。这一类模型往往需要求解多组分的输运方程，电场的泊松方程以及纳维-斯托克斯（N-S）方程。Boeuf等人[20]采用电子-离子两组分的模型模拟了DBD放电的全过程，并通过计算作用在带电离子上的电场力，得到了DBD产生的总的作用力。该课题组随后又将不带电的中性离子也纳入考虑范畴，解析了带电粒子与中性粒子之间的动量传输过程。Boeuf等人[21]在2009年进一步研究发现，在激励的正电压周期（电介质上的电极是阳极），中性粒子获得的动量主要来自正离子，相反，在另外半个周期动量主要来自负离子。Nishida等人[22,23]求解了展向均匀和展向非均匀（电极上有小的凸起）两种不同构型激发器的电离及气动激励过程。他们对比发现忽略三维效应会使得预测的体积力在流向分布范围变小，体积力强度也会变弱。基于第一原理的模型虽然能够给出体积力产生的详细物理过程，但是其计算量巨大，通常会比简化模型的计算量大一个量级。这些模型在研究等离子体产生机理以及优化激发器形状的时候非常有用，但是仅仅是进行流动控制的研究，这些模型有些过于浪费计算资源。

唯像简化模型并不求解组分的输运方程，只是先验的给出一个等离子体或电场的分布。其中最经典的莫过于史维等人提出来的三角模型[24]。该模型假设电场线性的分布在两个磁极之间的三角形区域，且忽略掉了体积力随时间的变化。由

于这个模型极大的简化了DBD产生等离子体并与流体相互作用的过程，因此深得流动控制领域研究者的青睐。先后有学者将其应用于槽道湍流减阻[25]和翼型上表面层流分离抑制[26]。Orlov等人[27–29]则是将DBD放电的电流环路简化成一个电路系统。这一电路系统一般包含若干形式相同的支路系统，每一个支路系统对应两片电极之间一处特定的空间。这样在抑制两片电极上电压随时间变化的规律，就能够进一步求解出电流、空间电场强度以及体积力的分布。Suzen等人[30,31]基于实验[8,32]的观察，假设覆盖在电极上的电介质上表面的电荷密度分布为半个高斯函数的形式，即：

$$\rho_{c,w}(x,t) = \rho_c f(t) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{1-1}$$

基于这一假设，只需要再求解关于空间电荷电位分布的泊松方程，即可得到激发器作用于流体上的体积力分布。这种做法巧妙的回避了各种组分输运方程的求解，但同时还原了部分的关键物理过程。Ibrahim等人[33]采用这一模型模拟了由DBD激发器驱动的槽道流动，并与实验[34]对比发现，数值模拟可以很好的预测槽道中心的最大流速，但是速度剖面的吻合欠佳。Eltaweel等人[35]应用该模型，研究了如何使用DBD激发器进行串联圆柱降噪。总的而言，这类模型求解方便，计算量小，但是在精度方面却有些逊色。

近些年来，很多学者提出了一种基于实验的等离子体模型[15,16,18,36,37]。由于一般DBD的激励频率远高于流动的固有频率，DBD的激励周期远小于流动的特征尺度，所以可以近似认为流动对等离子体产生的体积力分布没有影响。所以只需要测定在某一特殊工况下的体积力分布，这一分布就可以拿来应用到其他控制工况的模拟中。在实验中，针对准二维流动，可以通过PIV测量得到两个方向的速度分量。然而，空间中的压力分布不知道，这就导致体积力的两个分量并不能够直接算出。为了解决这个问题，Wilke[37]认为在DBD诱导出的流动中，体积力的强度远大于压力梯度，所以可以将压力梯度忽略掉。Albrecht[36]用两个动量方程推导出涡量的输运方程。这一变化刚好约掉了压力项。另外，他认为，平行于壁面的体积力远大于垂直于壁面的体积力，并将后者忽略掉，从而得到了平行于壁面的体积力分布。Dörr和Kloker[38]数值对比了这两种做法。他们先假设一个体积力分布，然后用直接数值模拟（DNS）计算得到这种预先设定的体积力会产生怎样的流场。之后在用上面提到的两种方法从流场反推体积力，来对比这两种方法的效果。他们发现，如果激发器是放置在边界层流动中，则压力项不能忽略，而若是在原本静止的流场中，则两种方法差别不大。Maden等人[39]将基于实验的等离子体模型和之前介绍的两种唯像简化模型（史维模型[24]和Suzen模型[31]）进行了对

比，他们发现基于实验的模型要好于唯像简化模型。在他们的工作中，还提出了一种用复杂解析表达式近似拟合体积力分布的模型。在他们的结果中，这一模型的表现也要好于唯像的简化模型。在后文中，将这模型简记为Maden模型。由于基于实验的模型计算量小，精度高，本文在研究中主要应用这一类模型，实验数据来自Kriegseis[16]的文章。另外，Maden模型也有用到。

1.1.2　介质阻挡放电等离子体激发器在流动控制方面的应用

DBD等离子体激发器已经被应用于诸多流动控制领域，如抑制流动分离[40–47]、影响层流-湍流转捩[48–54]、湍流边界层减阻[47,55,56]、缓解激波／附面层干扰[57,58]、提高压气机与涡轮性能[59,60]、控制管道流动[61]和辅助飞行姿态控制[62,63]等。这里重点介绍和本文有关的，也就是推迟转捩和湍流边界层减阻方面的应用。其他方面的应用可以参考综述文章[6,64,65]

在转捩推迟方面，DBD激发器最直接的应用就是依赖其产生的动量效应，对边界层流动进行加速，提高边界层流动的顺压梯度，从而抑制T-S波的发展。Riherd和Roy[66]采用数值模拟的方法验证了这一控制方案，Duchmann等人[48,49]和Grundmann等人[49]通过实验给出了证实。Riherd和Roy[67]还发现这一想法不仅对T-S波诱发的转捩有效，对流向条带诱发的转捩也能起到推迟的效果。除了增加边界层的顺压梯度之外，DBD还被应用于边界层内扰动的反向控制[50–52,68]。这一应用主要得益于DBD激发器的快速响应能力。这种控方案通常需要在上游放置一个探测器。这样，DBD激发器所在位置的扰动相位就可以由上游探测器的信号准确的推算出来。然后用DBD激发器产生一个相当幅值但是反相位的扰动，就可以将边界层内原有的扰动波抵消掉。Hanson等人[53,54]将DBD应用于控制边界层转捩过程中的瞬态增长。在他们研究的算例中，平板前缘有一排圆柱形的粗糙单元。这些粗糙单元会产生流向涡，并进一步导致扰动的瞬态增长。Hanson等人在下游放置DBD激发器来削弱这些流向涡，从而推迟了转捩。除了推迟二维边界转捩，DBD激发器还被应用于推迟三维边界层转捩。Schuele等人[69]将DBD激发器安装于一个带攻角的尖锥前端。这一流动的转捩本身是由横流失稳触发。实验中，DBD激发器起到了类似壁面粗糙单元的作用，激发出了次谐波模态。这一次谐波模态有效的推迟了转捩过程。Dörr和Kloker[70]用DBD激发器产生的“电风”削弱三维边界层中的二次流（横流）速度，从而降低了横流失稳模态的增长。本文也研究了类似的控制方法，并将其从后掠平板流动推广到实际的后掠翼流动中来。

在湍流减阻方面，Jukes和 Choi[55]在实验中采用等离子体激发器对$Re_\tau = 380$的湍流边界层进行了控制。他们用激发器阵列产生近壁周期震荡的体积力，这些体积力会产生同方向旋转的流向涡。他们发现，当激励的周期在$T^+ = 16$的时候，减阻效果最好。其最大减阻率在激励器下游$x^+ = 75$的位置甚至可以达到45%。随后，该课题组[71,72]通过改变不同激发器之间的相位差，在近壁产生了展向行波形式的激励，也成功降低了湍流边界层的阻力。Mahfoze和Laizet[56]试图将Jukes和Choi的减阻方法应用到湍流槽道中，但是很不幸的是他们发现周期振荡并不能降低阻力，而只向一个方向驱动流体反而可以将阻力降低33%。本文也研究了采用DBD激发器进行展向周期激励的减阻方案，并通过相条件平均技术，进一步解释了控制机理。除了展向激励，流向激励也可以一定程度上降低摩阻。Li等人[25]在槽道的上下壁面均添加了一条激励带，他们可以产生沿着流向的体积力。通过直接数值模拟，Li等人发现虽然在激励的区域湍流的摩阻会上升，但是在其下游阻力会显著降低。

1.2　通过推迟层流/湍流转捩减阻

众所周知，层流的摩擦阻力要比湍流的摩擦阻力小很多，所以流动减阻的一个重要方向就是扩大飞行器表面的层流范围。对于大型客机而言，由于机身长度过长，转捩总会无可避免的发生。相比之下，在机翼上发展和应用层流技术则有很大的前景。目前大多数客机使用的机翼还都是湍流机翼。湍流机翼发生从层流向湍流的转捩点一般在翼型弦长的10%以前，而如果使用推迟转捩的层流技术，可以将转捩点推迟到20%甚至70%弦长之后。在这一小节，我们先简要介绍二维和三维边界层的失稳与转捩研究现状，最后再总结目前已经提出的转捩推迟手段。

1.2.1　二维边界层失稳与转捩

边界层转捩过程强烈依赖于来流条件和壁面条件，受到来流湍流度、来流马赫数、外流压力梯度、壁面温度、壁面粗糙度、壁面抽吸量及外部扰动特征参数等诸多因素的影响[73]，因此存在着多种物理机制。在二维不可压缩边界层中，转捩过程可分为以下三种类型：当来流湍流度较低（小于0.1%）时发生的是自然转捩（natural transition）[74]；而来流湍流度较高（大于1%）时，转捩过程中小扰动的指数增长阶段将被跳过，这被称为跨越转捩（bypass transition）[75]；逆压梯度会导致层流边界层与壁面分离，从而引发分离流转捩（separation-induced transition）[76]；反过来，顺压梯度会使湍流边界层再层流化[77]。具体地，自然转

图 1.4　二维边界层中二维扰动的中性稳定性曲线[80] 。图中，a曲线对应的是具有拐点PI的速度剖面，而b曲线对应的是无拐点的速度剖面。

捩过程分为四个阶段[78]：第一阶段是所谓的边界层感受性过程（Receptivity）[79]，指的是背景扰动如何进入边界层并产生不稳定波的机制；第二阶段是不稳定波的线性增长过程；第三阶段是不稳定波发展的非线性阶段，不稳定波发展到一定的幅值后，会出现波的相互作用和高阶不稳定性，从而导致以湍斑为特征的湍流结构的产生；最后一个阶段是从湍斑到完全湍流的发展过程。在自然转捩的第二阶段，扰动幅值相比于基本流非常小，一般采用线性稳定性理论进行描述。该理论假设扰动具有行波的形式，且不同频率，不同波长的扰动波之间不会互相干扰。基于这一假设，我们可以得到线性稳定性方程（Orr-Sommerfeld方程），并且得到不同频率和波长的扰动波的衰减或增长的情况，如图1.4所示。在此图上，扰动的衰减（稳定）区和放大（不稳定）区可通过的扰动增长率等于零的线区分出来，这条线被称为中性稳定性曲线。令人特别关注的是曲线上取最小值的点：小于此值的区域内，所有的扰动均会趋于稳定。这个最小的雷诺数被称为临界雷诺数。可见，速度剖面有拐点的边界层比没有的更不稳定，而且后者在时仍存在不稳定频带，因此也被称为具有“无粘不稳定性”的剖面。实际上，上述频带可通过求解Rayleigh方程[80]得到，此方程是Orr-Sommerfeld方程在时的简化形式，基于此方程的理论被称为“无粘稳定性理论”。无粘稳定性理论中的拐点定理指出拐点的存在是流动失稳的充分必要条件。

1.2.2　三维边界层失稳与转捩

三维边界层转捩的研究起始于后掠层流机翼设计项目[81]，其目标是大幅降低机翼阻力。几十年来航空界一直致力于这一项目，然而由于三维边界层的稳定性涉及到边界层对自由流中的扰动与机翼表面粗糙度的感受性、基频扰动及其谐波与驻涡（crossflow vortices）等多种模态之间的相互作用等诸多问题，目前的研究

图 1.5　后掠机翼层流边界层示意图[82]，其中u和w分别代表主流和横流，β_o0为边界层外缘流线与机翼弦向的夹角。X_M为边界层外缘流线的拐点。

与实际应用还有着相当的距离。

三维不可压缩边界层具有多种失稳机制，其中横流不稳定性起主导作用。图1.5显示了后掠机翼上的层流边界层流动。可见，由于沿机翼弦向压力梯度的存在，边界层外缘流线将发生扭曲，或者认为此处流体微团曲线运动产生的离心力与压力平衡。而在边界层内，流体微团的速度沿壁面法向逐渐减小，因此其产生的离心力减小，而压力却保持不变，这种不平衡性导致了垂直于主流方向的横流（crossflow velocity）的出现。横流速度剖面存在拐点并因此产生了横流不稳定波，其增长率比T-S波大得多。最不稳定波的方向几乎与势流方向垂直（85°～89°），波长是边界层厚度的三倍到四倍[83]。在极限条件时，零频率的波驻留在物面上，它们具有恒定相位线，方向近似与来流平行，被称为驻涡。横流失稳模态可分为驻涡模态与行波（traveling waves）模态两种。Malik等人[84]通过对后掠Hiemenz流动NPSE的计算得出行涡模态与驻涡模态的主导关系，他们指出当行涡模态的初始幅值小于驻涡模态初始幅值一个数量级时，驻涡模态扰动主导横流转捩；反之，转捩则由行波模态扰动引起，并且行涡会在发展过程中抑制驻涡的发展。这一计算结果与Bippes[85]年提出的低湍流情况横流驻涡主导转捩，高湍流情况横流行涡主导转捩的结论相吻合。由于横流失稳产生的横流涡亦是不稳定，所以在其基础之上会产生二次失稳。Malik[86]研究了后掠翼上转捩前扰动波的发展，其计算结果与Reibert[87]的实验结果符合的很好，并在此基础上研究了饱和的横流涡的二次失稳现象。他们将二次失稳的模态根据能量来源的不同分为Y模态和Z模态。图1.6为Y模态与Z模态的扰动幅值等值线。 与此同时，他们还提出了基于二次失稳理论N转捩因子的预测方法。Haynes[88]等人研究了雷诺数和曲率对于后掠翼上流动稳定性的影响，发现雷诺数越大横流涡饱和越早，雷诺数非常小时甚至不会出现横流涡的饱和现象；另外横流涡的发展对曲率的敏感性也很大。Li[89]等人对横流行涡的二次失稳也做了详细的研究，他们发现行涡的增长率相比于驻涡更大，并且在更低的幅值饱和，而二次失稳的幅值却不亚于驻涡，所以只

图 1.6　Z模态（上图）与Y模态（下图）扰动分布[86]

有在行涡的初始幅值很低的时候才是驻涡主导转捩。

在实验方面，处于前沿的研究者为亚利桑那州立大学（ASU）的Saric、俄罗斯的Kachanov、日本宇航实验室的Tagagi以及德国宇航研究院（DLR）的Bippes。Saric[14]综述了三维不可压缩边界层的感受性、二次失稳和壁面粗糙度效应等热点问题的最新进展。目前，数值模拟方面使用较多的还是线性稳定性理论和NPSE方法。目前线性稳定性理论可以准确预测出驻涡模态及其波长。Reed对这方面的研究进行了总结[15]。NPSE方法的优势是其具有模拟非平行和非线性效应的能力[16]，Haynes和Reed综述了此法对几种典型的三维不可压缩边界层流动的研究结果[17]。直接数值模拟方面，Reed和Lin[18-19]研究了无限展长后掠翼上的转捩过程，结果与ASU的实验符合较好。Meyer和Kleiser[20]考察了横流不稳定性的驻涡模式与行波模式的扰动在后掠平板上的相互作用，他们采用与Muller和Bippes[21]的实验近似的初始条件，得到了合理的三维边界层转捩发展过程。Wintergerste和Kleiser[22]对他们的工作进行了补充，重点研究转捩后期横流涡的破碎现象。

1.2.3　转捩推迟方案研究进展

由于横流失稳是导致后掠翼转捩的主要机制，所以近些年研究者们也在试图通过影响横流失稳产生扰动的发展推迟转捩。Saric[49]在试验中发现，通过采用在机翼前缘放置一排间距略小于最不稳定横流涡展向波长的粗糙单元，可以有效的推迟转捩。这是因为该粗糙单元激发出的模态本身并不会发展导致转捩，相反其还会抑制最不稳定模态，从而推迟转捩。Malik[45]的计算也给出了相同的解释。不同模态幅值在不同初始值条件下的发展如下图：

其中实线是控制模态和自然模态同时存在时它们的幅值沿着流向发展的情况，虚线是只有自然模态时的情况。可以看到在有控制模态的时候自然扰动模态的发展受到了抑制。Carpenter（2008）年做了利用粗糙单元推迟转捩的飞行试验，实验发现在翼型前缘表面没有打磨得很光滑的时候该方法是有效的，2009年F.Li用NPSE进行计算也得到了相同的结果。2013年，Templemann[50]用DNS的进行模拟，同样印证了该方法的可行性。2014年Lovig[51]等人在湍流度更低的风洞（来流湍流度0.04%）中印证了这一方法，从而更加肯定了这种方法在实际飞行中的可行性。Friederich 和 Kloker[52]提出了一种吸气的控制方法来推迟横流诱发的转捩并在后掠平板上得到了验证。他们通过在横流涡卷起的地方向下吸气，从而破坏横流涡的结构，使得二次失稳受到抑制。这一方法还有待实验的检验以及向更加便于应用的方向改变。

1.3　通过控制壁湍流相干结构减阻

1.3.1　湍流相干结构研究进展

壁湍流相干结构研究进展

1.3.2　湍流减阻技术研究进展

湍流减阻技术研究进展

第2章　理论公式与数值求解方法

2.1　等离子体模型

2.2　流动稳定性求解框架

在研究等离子体控制扰动的问题中，本文采用研究稳定性问题的相关数值方法，来解析控制前后边界层内扰动的发展情况。稳定性的相关理论虽然并不能给出精确的转捩位置，但是能够从理论方面给出流动失稳特性，并且具有计算效率高，转捩前流动解析精度高的优点。本文中通过研究流动在控制前后稳定性方面的特性变化，来甄别控制是否有效。本文采用的研究边界层流动稳定性的步骤如下：

1. 采用高精度有限元程序求解无粘流场；
2. 以无粘流壁面上的流动参数作为边界层方程的边界条件，求解层流基本流动；
3. 基于线性稳定性理论，判断主导转捩的模态；
4. 采用抛物化扰动方程，求解边界层内扰动的演化；
5. 以受扰流场作为新的基本流动进行二次失稳分析。

与前人所做的研究不同的是，本文的研究需要将等离子体产生的体积力也考虑进来。在详细介绍求解方法之前，这里先简要介绍一下本文中对体积力的处理方法。流动所满足的控制方程（N-S方程）为：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* \mathbf{V}^*) &= 0 \\
\rho^* \left(\frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{V}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{V}^* \right) &= -\nabla^* p^* + \nabla^* \left(\lambda^* \left(\nabla^* \cdot \mathbf{V}^* \right) \right) \\
&\quad + \nabla^* \cdot \left(\mu^* \left(\nabla^* \mathbf{V}^* + \nabla^* \mathbf{V}^{*T} \right) \right) + \mathbf{f}^* \\
\rho^* {C_p}^* \left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + (\mathbf{V}^* \cdot \nabla^*) T^* \right) &= \nabla^* \cdot (\kappa^* \nabla^* T^*) \\
&\quad + \frac{\partial p^*}{\partial t^*} + (\mathbf{V}^* \cdot \nabla^*) p^* + \Phi^* + \mathbf{V}^* \cdot \mathbf{f}^*
\end{aligned}\right\} \tag{2-1}$$

式（2-1）中能量方程的耗散函数为：

$$\Phi^* = \lambda^* (\nabla^* \cdot \mathbf{V}^*)^2 + \frac{\mu^*}{2} \left(\nabla^* \mathbf{V}^* + \nabla^* \mathbf{V}^{*T} \right)^2 \tag{2-2}$$

方程中星号 $*$ 表示有量纲量，**V** 表示速度矢量，其在x, y, z三个方向的分量为 u，v，w 。**f** 表示体积力矢量，其分量分别为 f_x，f_y，f_z 。

为封闭 N-S 方程，分别引入状态方程、Sutherland 粘性律、Stokes 假设，假定流体是量热完全气体并具有恒定的 Pr 数：

$$\left.\begin{aligned} p^* = \rho^* R^* T^* \Leftrightarrow p = \frac{\rho T}{\gamma M a^2} \\ \mu^* = \mu_s^* \frac{T^*}{T_s^*}\frac{T_s^* + S^*}{T^* + S^*} \Leftrightarrow \mu = \mu_s \frac{T}{T_s}\frac{T_s + S}{T + S} \\ \lambda^* + 2/3\mu^* = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2/3\mu \\ \mathrm{Pr} = \frac{C_p{}^* \mu^*}{\kappa^*} = const \Leftrightarrow \mu = \kappa \\ C_p^* = const, R^* = const \end{aligned}\right\} \tag{2-3}$$

Sutherland 粘性律中 $T_s^* = 273K,\ \mu_s^* = 1.71 \times 10^{-5} kg/(m \cdot s),\ S^* = 110.4K$。

选取适当的参考长度 l_{reff}、参考速度 U_{reff}、参考密度 ρ_{reff}等特征量，可以对式（2-1）进行无量纲化。在本文中，分别研究了后掠Hiemenz流动和后掠翼流动。在这两个流动中我们选择的特征量是不一样的，之后我们会分别介绍。为了简洁，我们将无量纲化后的N-S方程记为：

$$\mathscr{N}(\mathbf{q}) = \mathbf{F} \tag{2-4}$$

这里， $\mathbf{q} = (\rho, u, v, w, T)^T$，即原始变量组成的5维矢量。$\mathbf{F} = (0, f_x, f_y, f_z, \mathbf{V} \cdot \mathbf{f})^T$。上标 “$T$" 表示转置。这里由于添加的体积力很小，我们假设其只影响扰动发展，并不影响基本流。即基本流依然满足N-S方程：

$$\mathscr{N}(\mathbf{q_0}) = 0 \tag{2-5}$$

$\mathbf{q_0}$ 为基本流流动原始变量组成的矢量，其与$\mathbf{q}$的差即为扰动量$\tilde{\mathbf{q}}$。令式(2-4) - 式(2-5)，即可得到扰动的控制方程：

$$\mathscr{S}(\tilde{\mathbf{q}}) = \mathscr{N}(\mathbf{q_0} + \tilde{\mathbf{q}}) - \mathscr{N}(\mathbf{q_0}) = \mathbf{F} \tag{2-6}$$

在之后的小节2.2.1和2.2.2中，将会分别介绍式（2-5）和（2-6）所采用的求解方法。至于求解步骤1中提到的高精度有限元方法，将会在2.3节中介绍。

2.2.1 边界层方程

在边界层流动中，流向的特征尺度为常规尺度，而法向的特征尺度为边界层厚度尺度。利用这一特性，可将Navier-Stokes 方程式抛物化，得到层流边界层控制方程。本文研究的问题的基本流均满足展向均匀假设，即$\partial/\partial z^* = 0$。利用这些假设，式（2-5）可以写为[①]：

$$\frac{\partial(\rho^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(\rho^* v^*)}{\partial y^*} = 0 \tag{2-7a}$$

$$\rho^* u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial y^*}\left(\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right) \tag{2-7b}$$

$$\rho^* u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} = \frac{\partial}{\partial y^*}\left(\mu^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*}\right) \tag{2-7c}$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial y^*} = 0 \tag{2-7d}$$

$$\rho^* u^* C_p^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* C_p^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{\partial}{\partial y^*}\left(k^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right) + u^* \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)^2 + \mu^* \left(\frac{\partial w^*}{\partial y^*}\right)^2 \tag{2-7e}$$

在传统的边界层方程求解方法中，所有物理量都采用相同的参考量进行无量纲化，比如一般会采用来流的速度、密度等物理量进行无量纲化。然而，在本文研究的问题中，边界层外普遍有较大的压力梯度，这导致不同流向位置的边界层外物理量差异比较大，计算很难收敛。所以本文采用当地边界层外的物理量，即$U_e^*, T_e^*, \rho_e^*, k_e^*, \mu_e^*$，进行无量纲化，提高计算稳定性。这里边界层外的物理量是通过求解无粘流方程得到的，并作为边界层方程求解的边界条件。采用当地边界层外物理量无量纲化后的边界层方程为：

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x^*} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y^*} + \frac{\rho u}{\rho_e^* U_e^*}\frac{\partial\left(\rho_e^* U_e^*\right)}{\partial x^*} = 0 \tag{2-8a}$$

$$\rho u \rho_e^* U_e^* U_e^* \frac{\partial u}{\partial x^*} + \rho u u \rho_e^* U_e^* \frac{\partial U_e^*}{\partial x^*} + \rho v \rho_e^* U_e^* U_e^* \frac{\partial u}{\partial y^*} = \rho_e^* U_e^* \frac{dU_e^*}{dx^*} + \mu_e^* U_e^* \frac{\partial}{\partial y^*}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y^*}\right) \tag{2-8b}$$

$$\rho u \frac{\partial w}{\partial x^*} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y^*} = \frac{\mu_e^*}{\rho_e^* U_e^*}\frac{\partial}{\partial y^*}\left(\mu \frac{\partial w}{\partial y^*}\right) \tag{2-8c}$$

① 本节讨论的均为基本流的计算方法，为了简洁，表明基本流变量的下标0在本节中都被略去。即原本的$\rho_0, u_0, v_0, w_0, T_0$在本节被记为$\rho, u, v, w, T$。有量纲量类似。

$$\rho u \rho_e^* U_e^* C_p^* \left(T \frac{\partial T_e^*}{\partial x^*} + T_e^* \frac{\partial T}{\partial x^*} \right) + \rho v \rho_e^* U_e^* C_p^* T_e^* \frac{\partial T}{\partial y^*}$$
$$= k_e^* T_e^* \frac{\partial}{\partial y^*} \left(k \frac{\partial T}{\partial y^*} \right) - \rho_e^* U_e^* U_e^* \frac{dU_e^*}{x^*} u + \mu \mu_e^* U_e^* U_e^* \left(\frac{\partial u}{\partial y^*} \right)^2 + \mu \mu_e^* W_e^* W_e^* \left(\frac{\partial w}{\partial y^*} \right)^2 \quad (2\text{-}8d)$$

注意到在上面的代换中，还用到了无粘势流中沿流线的伯努利方程：

$$-\frac{\partial p^*}{\partial x^*} = \rho^* u_e^* \frac{du_e^*}{dx_e^*} \quad (2\text{-}9)$$

和气体状态方程：

$$\rho T = 1 \quad (2\text{-}10)$$

为了消除上述边界层方程在驻点处的奇异性，引入如下相似变换：

$$\xi = x^* \quad (2\text{-}11a)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{U_e^*}{x^* \rho_e^* \mu_e^*}} \int_0^{y^*} \rho^* dy^* = \frac{1}{L^*} \int_0^{y^*} T^{-1} dy^* \quad (2\text{-}11b)$$

最终得到如下计算求解的方程：

$$\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \eta} + \frac{u}{2} \left[1 + \frac{\xi}{\mu_e^*} \frac{\partial \mu_e^*}{\partial \xi} + \frac{\xi}{\rho_e^* \mu_e^*} \frac{\partial (\rho_e^* \mu_e^*)}{\partial \xi} \right] = 0 \quad (2\text{-}12a)$$

$$\xi u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \Lambda \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\xi}{\mu_e^*} \frac{\partial \mu_e^*}{\partial \xi} (T - u^2) = \frac{\partial}{\partial \eta} (\frac{\mu}{T} \frac{\partial u}{\partial \eta}) \quad (2\text{-}12b)$$

$$\xi u \frac{\partial w}{\partial \xi} + \Lambda \frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} (\frac{\mu}{T} \frac{\partial w}{\partial \eta}) \quad (2\text{-}12c)$$

$$\xi u \frac{\partial T}{\partial \xi} + \Lambda \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{1}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial}{\partial \eta} (\frac{k}{T} \frac{\partial T}{\partial \eta}) = (\gamma - 1) \frac{\mu}{T} \left[(\mathrm{Ma}_{ue} \frac{\partial u}{\partial \eta})^2 + (\mathrm{Ma}_{we} \frac{\partial w}{\partial \eta})^2 \right] \quad (2\text{-}12d)$$

其中：

$$L^* = \sqrt{\frac{\mu_e^* x^*}{\rho_e^* u_e^*}} \tag{2-13a}$$

$$\Lambda = \xi u \frac{\partial \eta}{\partial x^*} + \frac{\xi v}{L^* T} \tag{2-13b}$$

$$\mathrm{Ma}_{ue} = \frac{u_e^*}{a_e^*} \tag{2-13c}$$

$$\mathrm{Ma}_{we} = \frac{w_e^*}{a_e^*} \tag{2-13d}$$

$$a_e^* = \sqrt{\gamma R T_e^*} \tag{2-13e}$$

将方程（2-12）在法方向采用谱方法进行离散，流向采用五阶差分格式，最后得到离散的方程简记为：

$$L_{dis}(\Phi) = 0 \tag{2-14}$$

$\Phi = (u, w, \Lambda, T)^T$为方程（2-12）中实际求解的变量组成的矩阵。上式对应的Jacobian矩阵为：

$$\mathbf{J}_b = \frac{\partial L_{dis}(\Phi)}{\partial \Phi} \tag{2-15}$$

本文采用拟牛顿法对式（2-14）进行求解，迭代更新方法如下：

$$\Phi_{\mathrm{new}} = \Phi_{\mathrm{old}} - \mathbf{J}_b^{-1} L_{dis}(\Phi) \tag{2-16}$$

式（2-14）和（2-15）的具体形式将在附录A中给出。

为了验证程序是否正确，首先将计算结果与零压力梯度平板上的相似性解进行对比。这里采用的计算工况为：

$$U_\infty = 100\mathrm{m/s}, T_\infty = 300\mathrm{K}, \nu_\infty = 1.5 \times 10^{-5}\mathrm{m^2/s} \tag{2-17}$$

对比$x = 1\mathrm{m}$，即$Re_x = 6.67 \times 10^6$，位置处各个物理量延法向的分布如图2.1所示。其中黑色由方框标记的线为边界层方程求解出来的结果，红色由三角标记出来的先为相似性解的结果。可以看到两种算法的结果几乎完全重合了。

(a) 流向速度对比

(b) 法向速度对比

(c) 温度对比

图 2.1　边界层方程计算结果与相似性解对比（黑线方框标记：边界层方程计算结果；红线三角标记：相似性解）

本文中主要进行的是三维边界层失稳的研究，所以针对三维边界层的计算也需要验证。清华大学徐胜金老师课题组为研究三维边界层转捩在低湍流度风洞中做了后掠NLF-0415翼型的绕流实验。实验相应参数可以参考文献??????。在实验自由来流为22.3m/s的工况中，翼型上表面直至70%弦长处均为层流。采用边界层方程计算速度分布，并取40%和60%弦长处的速度剖面与实验对比，结果如图2.2。其中计算结果用线表示，实验结果用点表示。这里U_{wt}表示延风洞方向的速度分量[①]。蓝色表示20%弦长处的结果，红色为40%处。从计算的结果可以看到，我们所采用的求解方法完全满足精度需求。

① 注意这里并不是u，因为在后掠翼计算中，x方向与平行于风洞的流向有45°夹角

图 2.2　后掠翼上边界层速度剖面对比（线：计算结果；点：实验结果）

2.2.2　扰动方程

如之前所述，本文将流场基本变量 $\mathbf{q} = (\rho,\ u,\ v,\ w,\ T)$ 分解为基本流动 $\mathbf{q}_0$ 和扰动 $\tilde{\mathbf{q}}$ 两部分：

$$\mathbf{q}(x, y, z, t) = \mathbf{q}_0(x, y) + \tilde{\mathbf{q}}(x, y, z, t) \tag{2-18}$$

在小节2.2.1中已经探讨了基本流动的求解方法。在这一节中，重点讨论扰动方程（2-6）的求解方法。先假设方程（2-6）可以写成如下紧凑的形式：

$$\begin{aligned}&\mathbf{\Gamma}\frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}}{\partial x} + \mathbf{B}\frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}}{\partial y} + \mathbf{C}\frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}}{\partial z} + \mathbf{D}\tilde{\mathbf{q}}\\ &\quad = \mathbf{H}_{xx}\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{q}}}{\partial x^2} + \mathbf{H}_{yz}\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{q}}}{\partial z\,\partial y} + \mathbf{H}_{xy}\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{q}}}{\partial x\,\partial y} + \mathbf{H}_{xz}\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{q}}}{\partial x\,\partial z} + \mathbf{H}_{yy}\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{q}}}{\partial y^2} + \mathbf{H}_{zz}\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{q}}}{\partial z^2} + \mathbf{N} + \mathbf{F}.\end{aligned} \tag{2-19}$$

其中 5×5 系数矩阵 $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}_{xx}$, $\mathbf{H}_{yy}$, $\mathbf{H}_{zz}$, $\mathbf{H}_{xy}$, $\mathbf{H}_{xz}$, $\mathbf{H}_{yz}$ 是基本流动、流向曲率和 Re, Ma, Pr 的函数，详细表达式可参见附录B。向量 $\mathbf{N}$ 表示非线性项，$\mathbf{F}$表示体积力产生的源项。

2.2.2.1 线性稳定性理论

由于边界层流动中，边界层厚度增长缓慢，所以可将其近似为平行剪切流。假设扰动具有行波解：

$$\tilde{\mathbf{q}}(x,y,z,t)=\hat{\mathbf{q}}(y)\exp\left(\mathrm{i}(\alpha x+\beta z-\omega t)\right)+c.c. \tag{2-20}$$

针对边界层失稳问题，其不稳定性通常是对流失稳，即边界层内的扰动并不是在原地增长，而是一边向下游传播一遍增长。针对这一类问题，通常采用空间模式求解，即给定 β 和 ω，求解α。将式（2-20）代入扰动方程（ 2-19），忽略非线性项整理得到

$$\mathbf{A}_L\hat{\mathbf{q}}+\mathbf{B}_L\frac{\partial\hat{\mathbf{q}}}{\partial y}-\mathbf{H}_{yy}\frac{\partial^2\hat{\mathbf{q}}}{\partial y^2}=\alpha\left(\mathbf{M}_L\hat{\mathbf{q}}+\mathrm{i}\mathbf{H}_{xy}\frac{\partial\hat{\mathbf{q}}}{\partial y}\right)-\alpha^2\mathbf{H}_{xz}\hat{\mathbf{q}} \tag{2-21}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{A}_L&=-\mathrm{i}\omega\mathbf{\Gamma}+\mathrm{i}\beta\mathbf{C}+\mathbf{D}+\beta^2\mathbf{H}_{zz}\\ \mathbf{B}_L&=\mathbf{B}-\mathrm{i}\beta\mathbf{H}_{yz}\\ \mathbf{M}_L&=-\mathrm{i}\mathbf{A}-\beta\mathbf{H}_{xz}\end{aligned}\right\} \tag{2-22}$$

将上式中的几个微分算子记作：

$$\mathscr{L}_0=\mathbf{A}_L+\mathbf{B}_L\frac{\partial}{\partial y}-\mathbf{H}_{yy}\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{2-23a}$$

$$\mathscr{L}_1=-\mathbf{M}_L-\mathrm{i}\mathbf{H}_{xy}\frac{\partial}{\partial y} \tag{2-23b}$$

$$\mathscr{L}_2=\mathbf{H}_{xz} \tag{2-23c}$$

则线性稳定性的控制方程可以写为：

$$\mathscr{L}\hat{\mathbf{q}}=\mathscr{L}_0\hat{\mathbf{q}}+\alpha\mathscr{L}_1\hat{\mathbf{q}}+\alpha^2\mathscr{L}_2\hat{\mathbf{q}}=0 \tag{2-24}$$

引入一个辅助变量：

$$\tilde{\mathbf{q}}_a=\alpha\tilde{\mathbf{q}} \tag{2-25}$$

则式（2-24）可以改写为：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathscr{L}_0 & \mathscr{L}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{q}}_a \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathscr{L}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{q}}_a \end{pmatrix} \tag{2-26}$$

很显然，式(2-21)是针对微分算子的广义特征值问题。对其进行离散求解，在法方向采用四阶精度中心差分格式：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_j}{\partial y} &= \frac{\hat{\mathbf{q}}_{j-2} - 8\hat{\mathbf{q}}_{j-1} + 8\hat{\mathbf{q}}_{j+1} - \hat{\mathbf{q}}_{j+2}}{12\Delta y} \\ \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{q}}_j}{\partial y^2} &= \frac{-\hat{\mathbf{q}}_{j-2} + 16\hat{\mathbf{q}}_{j-1} - 30\hat{\mathbf{q}}_j + 16\hat{\mathbf{q}}_{j+1} - \hat{\mathbf{q}}_{j+2}}{12(\Delta y)^2} \end{aligned}\right\} \tag{2-27}$$

便可以将这一个微分算子的广义特征值问题转化为矩阵的广义特征值问题。求解该特征值问题，得到特征向量 $\hat{\mathbf{q}}$ 即为扰动分布，特征值 α 虚部 $-\alpha_i$ 为扰动增长率，实部 α_r 为扰动流向波数。

2.2.2.2　抛物化扰动方程

线性稳定性理论有两个缺陷。首先，其采用平行流假设，导致边界层延流向的变化被忽略了。另外，线性假设忽略了非线性项，导致不同模态间的相互作用没有被考虑。抛物化扰动方程（PSE）可以克服上述这两点缺陷，并且具有很高的求解效率。首先将物理扰动 $\tilde{\mathbf{q}}$ 和非线性项与外加源项之和 $\mathbf{N}+\mathbf{F}$ 进行 Fourier 展开：

$$\tilde{\mathbf{q}}(x,y,z,t) = \sum_{m=-M}^{M} \sum_{n=-N}^{N} \hat{\mathbf{q}}_{mn}(x,y)\,\Theta_{mn}, \tag{2-28}$$

$$\mathbf{N}+\mathbf{F} = \sum_{m=-M}^{M} \sum_{n=-N}^{N} \mathbf{S}_{mn}(x,y)\,\Theta_{mn}, \tag{2-29}$$

$$\Theta_{mn} = \exp\left(i\int_{x_0}^{x} \alpha_{mn}(\xi)\,d\xi + in\beta z - im\omega t\right). \tag{2-30}$$

其中Θ_{mn}是波数函数。代入扰动方程（2-19），整理得到

$$\hat{\mathbf{A}}\frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_{mn}}{\partial x} + \hat{\mathbf{B}}\frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_{mn}}{\partial y} + \hat{\mathbf{C}}\frac{\partial^2 \hat{\mathbf{q}}_{mn}}{\partial x^2} + \hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{q}}_{mn} - \mathbf{H}_{yy}\frac{\partial^2 \hat{\mathbf{q}}_{mn}}{\partial y^2} = \mathbf{S}_{mn}, \tag{2-31}$$

其中

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{A}} &= \mathbf{A} - 2i\alpha_{mn}\mathbf{H}_{xx} - in\beta\mathbf{H}_{xz}, \\
\hat{\mathbf{B}} &= \mathbf{B} - i\alpha_{mn}\mathbf{H}_{xy} - in\beta\mathbf{H}_{yz}, \\
\hat{\mathbf{C}} &= \mathbf{H}_{xx}, \\
\hat{\mathbf{D}} &= \mathbf{D} - im\omega\mathbf{\Gamma} + i\alpha_{mn}\mathbf{A} + in\beta\mathbf{C} + \mathbf{H}_{xx}\left(\alpha_{mn}^2 - i\frac{d\alpha}{dx}\right) + n^2\beta^2\mathbf{H}_{zz} + n\beta\alpha_{mn}\mathbf{H}_{xz}.
\end{aligned}
\tag{2-32}
$$

根据量级分析[86]， $d\alpha/dx$ 这一项非常小可以忽略。为了使得形函数$\hat{\mathbf{q}}$在流向缓变，提出针对 α的波数迭代条件：

$$
\int_0^\infty \hat{\mathbf{q}}^H \mathbf{M}\frac{\partial\hat{\mathbf{q}}}{\partial x}\,dy = 0 \qquad \forall x. \tag{2-33}
$$

这里$\mathbf{M} = \mathrm{diag}(0, 1, 1, 1, 0)$， “$H$”表示复共轭。式（2-33）又可以叫做形函数的缓变条件，这一条件使得形函数在流向的二阶偏导数可以被忽略掉，即$\partial^2\hat{\mathbf{q}}_{mn}/\partial x^2 = 0$[84]。虽然二阶偏导数项被忽略掉了，但是方程（2-31）依然有一些残余椭圆性[90]。针对这一问题，将方程中的压力项修正为：

$$
\frac{\partial\tilde{p}_{mn}}{\partial x} = i\alpha_{mn}\hat{p}_{mn}\Theta_{mn}. \tag{2-34}
$$

采用上面所提到的诸多假设，方程（2-31）可以完全被抛物化，可以流向推进求解。完整的方程为：

$$
\mathscr{L}_{\mathrm{PSE}}\hat{\mathbf{q}}_{mn} = \hat{\mathbf{A}}\frac{\partial\hat{\mathbf{q}}_{mn}}{\partial x} + \hat{\mathbf{B}}\frac{\partial\hat{\mathbf{q}}_{mn}}{\partial y} + \hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{q}}_{mn} - \mathbf{H}_{yy}\frac{\partial^2\hat{\mathbf{q}}_{mn}}{\partial y^2} = \mathbf{S}_{mn}, \tag{2-35}
$$

其中$\mathscr{L}_{\mathrm{PSE}}$线性PSE算子。本文对方程（2-35）在流向采用隐式欧拉差分，法向采用五阶中心差分进行离散求解。

为了验证程序的正确性，我们与Malik等人1994年的工作[84]进行对比。该工作重点研究了后掠Hiemenz流动的失稳，计算相关参数详见他们的文献。这里计算对比$\bar{R} = 500$①工况中主模态的能量在流向的演化，结果如图2.3示。

2.2.3　扰动发展的敏感性分析

为了更好地理解流动，同时选取较优化的控制参数，本文中对三维边

① 这个符号采用与文献[84]中相同的定义

图 2.3　PSE计算程序验证

界层失稳进行了敏感性分析。关于流动失稳的敏感性分析最早始于2003年，是Bottaro[91]等人针对Couette流动开展的。通过求解线性稳定性问题的伴随问题，他们找出了容易受基本流变化影响的失稳模态。之后，2008年Marquet等人[92]分析了圆柱尾迹流动对于基本流和外加体积力的敏感性，并采用这一结果进行了优化，降低了尾迹的湍流度。Alizard等人[93]2010年，对角域流动进行了分析，得到了不同失稳模态的敏感函数（敏感因子）的空间分布。2011年Brandt等人[94]对平板边界层做了相应的敏感性分析，之后学者们又对D形圆柱[95]，空腔[96]，甚至湍流边界层的猝发过程进行了相应的分析[97]，更加深入的了解了其流动机理。本文分别从线性稳定性理论和抛物化扰动方程出发，推导他们的伴随方程，并进而分析三维边界层失稳的敏感性。

2.2.3.1　基于线性稳定性理论的敏感性分析

记方程（2-24）的伴随方程为：

$$\mathscr{L}^{+}\hat{\mathbf{p}} = \mathscr{L}_0^{+}\hat{\mathbf{p}} + \alpha\mathscr{L}_1^{+}\hat{\mathbf{p}} + \alpha^2\mathscr{L}_2^{+}\hat{\mathbf{p}} = 0 \tag{2-36}$$

伴随方程与原方程的关系是，对于任意向量$\mathbf{a}, \mathbf{b}$,都有：

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{a}\cdot(\mathscr{L}\mathbf{b})^T dy = \int_0^{+\infty} (\mathscr{L}^{+}\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}^T dy \tag{2-37}$$

若定义内积$<\mathbf{a},\mathbf{b}>=\int_0^{+\infty}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^T dy$,则有：

$$<\mathbf{a},\mathscr{L}\mathbf{b}>=<\mathscr{L}^{+}\mathbf{a},\mathbf{b}> \tag{2-38}$$

引入体积力后，方程变为：

$$\left[\mathscr{L}_0+(\alpha+\delta\alpha)\mathscr{L}_1+(\alpha+\delta\alpha)^2\mathscr{L}_2\right](\hat{\mathbf{q}}+\delta\hat{\mathbf{q}})=\mathbf{F} \tag{2-39}$$

其中$\delta\alpha$和$\delta\hat{\mathbf{q}}$为因为引入体积力产生的特征值和特征向量的变化。由于本文中均采用的是微弱的体积力控制失稳，所以这两个量都是小量。将上式与伴随向量（伴随方程的解）做内积，并忽略高阶小量，得到：

$$\begin{aligned}<\hat{\mathbf{p}},\mathbf{F}> &=<\hat{\mathbf{p}},\left[\mathscr{L}_0+(\alpha+\delta\alpha)\mathscr{L}_1+(\alpha+\delta\alpha)^2\mathscr{L}_2\right](\hat{\mathbf{q}}+\delta\hat{\mathbf{q}})> \\ &\approx<\hat{\mathbf{p}},(\delta\alpha\mathscr{L}_1+2\delta\alpha\mathscr{L}_2)\hat{\mathbf{q}}>\end{aligned} \tag{2-40}$$

最终得到空间模式的复特征值关于体积力的敏感性为：

$$\delta\alpha\approx\frac{<\hat{\mathbf{p}},\mathbf{F}>}{<\hat{\mathbf{p}},(\mathscr{L}_1+2\mathscr{L}_2)\hat{\mathbf{q}}>} \tag{2-41}$$

2.2.3.2　基于抛物化扰动方程的的敏感性分析

线性稳定性方程由于采用了平行流假设，在分析边界层的稳定性的时候还是有很强的局限性。这一小节推导PSE的伴随方程和相应的敏感性分析公式。这里的推导与Pralits[98]文章中的类似。据作者所知，本文中对三维边界层的敏感性分析还尚属国内外首次。由于本文研究的控制方法主要还是集中在扰动的线性增长区，所以这里的PSE还只是线性的PSE，并没有考虑非线性效应。所以式（2-35）中的源项$\mathbf{S}_{mn}$只包含与流畅解耦的体积力项，并不包含非线性项。另外，忽略了非线性效应也就相当于忽略了模态互相干扰，也使得每次计算中只需要考虑一个模态。这样，本身是用来区分模态的下标nm就可以略去不写，这样PSE方程可以写为：

$$\mathscr{L}\hat{\mathbf{q}}=\hat{\mathbf{A}}\frac{\partial\hat{\mathbf{q}}}{\partial x}+\hat{\mathbf{B}}\frac{\partial\hat{\mathbf{q}}}{\partial y}+\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{q}}-\mathbf{H}_{yy}\frac{\partial^2\hat{\mathbf{q}}}{\partial y^2}=\mathbf{S} \tag{2-42}$$

在研究敏感性问题时，需要有一个输出目标函数。在基于LST的敏感性分析中，扰动模态的增长率是一个天然且绝佳的候选项。在PSE的敏感性分析中，这里将

下游某一位置的扰动能量作为输出函数。实际上敏感性分析可以理解为这一输出函数对输入变量，本文中也就是体积力的导数。输出函数的具体定义见式（2-43）

$$J = E = \left[\frac{1}{2}\int_0^{T_z}\int_0^{\infty}\tilde{\mathbf{q}}^H\mathbf{M}\tilde{\mathbf{q}}dydz\right]_{x=x_1} = \frac{1}{2}\int_0^{T_z}\int_0^{\infty}|\Theta_1|^2\,\hat{\mathbf{q}}_1^H\mathbf{M}\hat{\mathbf{q}}_1 dydz \tag{2-43}$$

上式中，下标‘1’代表着计算出口处，也就是提取输出函数位置的物理量。T_z是失稳模态的展向波长。之后，对输出函数、控制方程（2-42）和波数迭代条件（2-33）做变分，得到下式：

$$\begin{aligned}\delta J = &\frac{1}{2}\int_0^{T_z}\int_0^{\infty}|\Theta_1|^2\,\hat{\mathbf{q}}_1^H\mathbf{M}\delta\hat{\mathbf{q}}_1 dydz\\ &+\frac{1}{2}\int_0^{T_z}\int_0^{\infty}|\Theta_1|^2\,\hat{\mathbf{q}}_1^H\mathbf{M}\hat{\mathbf{q}}_1\left(\mathrm{i}\int_{x_0}^{x_1}\delta\alpha(x')dx'\right)dydz + c.c\end{aligned} \tag{2-44}$$

$$\mathscr{L}\delta\hat{\mathbf{q}} - \delta\mathbf{S} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\alpha}\delta\alpha\hat{\mathbf{q}} = 0 \tag{2-45}$$

$$\int_0^{\infty}\left(\delta\hat{\mathbf{q}}^H\mathbf{M}\frac{\partial\hat{\mathbf{q}}}{\partial x} + \hat{\mathbf{q}}^H\mathbf{M}\frac{\partial\delta\hat{\mathbf{q}}}{\partial x}\right)dy = 0 \tag{2-46}$$

这里$c.c.$代表方程中所有项的复共轭，x_0和x_1分别是入口和出口处的流向位置。在进行下一步推导之前，需要先定义内积。在PSE的框架下，本文将内积定义为两个场向量点积之后在全计算域内的积分，即$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$的积分记作：

$$<\mathbf{a},\mathbf{b}> = \int_0^{T_z}\int_{x_0}^{x_1}\int_0^{\infty}(\mathbf{a}^H\mathbf{b})dydxdz \tag{2-47}$$

其实接下来需要做的就是想办法消去式（2-44）中的中间变量。这里，引入一个所谓的伴随向量$\hat{\mathbf{q}}^*$和复变量$r^*(x)$。令这两个量分别与方程（2-45）和（2-46）做内积,并加上他们的复共轭，可以得到恒等式：

$$\int_0^{T_z}\int_{x_0}^{x_1}r^*\int_0^{\infty}\left(\delta\hat{\mathbf{q}}^H\mathbf{M}\frac{\partial\hat{\mathbf{q}}}{\partial x} + \hat{\mathbf{q}}^H\mathbf{M}\frac{\partial\delta\hat{\mathbf{q}}}{\partial x}\right)dydxdz + <\hat{\mathbf{q}}^*, \mathscr{L}\delta\hat{\mathbf{q}} - \delta\mathbf{S} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\alpha}\delta\alpha\hat{\mathbf{q}}> + c.c. = 0 \tag{2-48}$$

很显然，对于任意的$\hat{\mathbf{q}}^*$和r^*都能够使上面的等式成立。为了消除中间变量，需要选取好的$\hat{\mathbf{q}}^*$和r^*。这里，本文令这两个变量分别满足伴随方程（2-50）和伴随波数

迭代条件（2-49）。很容易证明，伴随方程也是椭圆性的，计算的时候可以从下游向上游回溯推进求解。

$$\mathscr{L}^*\hat{\mathbf{q}}^* = (\bar{r}^* - r^*)\,\mathbf{M}\frac{\partial\hat{\mathbf{q}}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{r}^*}{\partial x}\mathbf{M}\hat{\mathbf{q}} \tag{2-49}$$

$$\int_0^\infty \left(\hat{\mathbf{q}}^{*H}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\alpha}\hat{\mathbf{q}}\right)dy = \int_0^\infty \mathrm{i}\,|\Theta_1|^2\,\hat{\mathbf{q}}_1^H\mathbf{M}\hat{\mathbf{q}}_1\,dy \tag{2-50}$$

$\mathscr{L}^*$是PSE伴随方程算子，字母上的横线表示相应变量的复共轭。伴随向量和r^*计算的初始值，也就是出口处的值为：

$$\begin{aligned}
c &= \frac{-\int_0^\infty \mathrm{i}\,|\Theta_1|^2\,\hat{\mathbf{q}}_1^H\mathbf{M}\hat{\mathbf{q}}_1\,dy}{\int_0^\infty \left(\hat{\mathbf{q}}_1^H\mathbf{M}\left(\hat{\mathbf{A}}\right)^{-1}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\alpha}\hat{\mathbf{q}}\right)dy\Big|_{x=x_1}} \\
\hat{\mathbf{q}}_1^* &= -\bar{c}\left(\hat{\mathbf{A}}^H\right)^{-1}\mathbf{M}\hat{\mathbf{q}}_1 \\
r_1^* &= c + |\Theta_1|^2
\end{aligned} \tag{2-51}$$

综上，如果伴随向量和r^*满足上面给出的式（2-49）（2-50）和（2-51），那么式（2-48）可以简化为：

$$\delta J = \frac{1}{2} < \hat{\varphi}^*, \delta\mathbf{S} > + c.c. \tag{2-52}$$

也就是说，不再需要求解PSE方程，直接通过计算伴随向量和外加体积力的内积，便可以直接得到体积力对下游扰动能量的影响。当然，式（2-52）中的$\delta\mathbf{S}$还是形函数控制方程中的源项的变化，需要将其转换到实际的体积力中。本文做稳定分析主要老师对比添加控制和不添加控制下的扰动能量，所以令初始的体积力为0，这样的话，体积力的变化可以写为：

$$\delta\mathbf{F} = \Theta\delta\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathrm{i}\int_{x_0}^{x}\delta\alpha(x')dx' = \Theta\delta\mathbf{S} \tag{2-53}$$

代入式（2-52），得到：

$$\delta J = \frac{1}{2} < \hat{\varphi}^*, \frac{\delta\mathbf{F}}{\Theta} > + c.c. \tag{2-54}$$

将上式展开并写成分量的形式，最终得到：

$$\delta J = \int_0^{T_z} \int_{x_0}^{x_1} \int_0^{\infty} \left(G_u \delta f_x + G_v \delta f_y + G_w \delta f_z \right) dy dx dz \tag{2-55}$$

$$\begin{aligned} G_u &= \mathrm{real}(\hat{u}^{*H} \exp(-\mathrm{i} \int_{x_0}^{x} \alpha(x') dx' - in\beta z)) \\ G_v &= \mathrm{real}(\hat{v}^{*H} \exp(-\mathrm{i} \int_{x_0}^{x} \alpha(x') dx' - in\beta z)) \\ G_w &= \mathrm{real}(\hat{w}^{*H} \exp(-\mathrm{i} \int_{x_0}^{x} \alpha(x') dx' - in\beta z)) \end{aligned} \tag{2-56}$$

本文将G_u, G_v and G_w命名为流向、法向、展向敏感性因子，并在之后展示的结果中给出他们的具体分布，以探究体积力对失稳过程的影响。

2.3　充分发展槽道的直接数值模拟

第3章　后掠Hiemenz流动的失稳分析与控制

后掠Hiemenz流动与后掠翼上的三维边界层流动非常相似，是非常好的模型流动。本文从这一流动出发，研究三维边界层的横流失稳。原始的二维Hiemenz流动就是一股平面射流，自上而下打到一块平板上，并向平板两边溢流开来。在无粘流的假设下，这与直角的角域流动完全等价。因此，我们可以通过构造幂指数复势解得到无粘的Hiemenz流动的流场分布。这里，将无粘流动壁面上的流速分布作为边界层外缘的速度分布。这一分布的流向速度分量是线性增加的，如式（3-1）。式中上标'†'表示有量纲量，c是一个常系数。在二维Hiemenz流动的基础上，引入展向均匀的流动，就是后掠Hiemenz流动，如图（3.1）所示。有一些研究主要着眼于其附着线的失稳研究[99,100]，本文重点分析研究远离附着线区域的横流转捩问题。研究区域如图（3.1）中虚线所示。Malik等人[84]对这一问题的首次失稳和二次失稳做了充分的研究，本文的控制算例也是以他们研究过的工况作为基准算例。本文中采用与文献中[84]相同的方法求得这一流动的自相似解，并以此作为基本流。

$$U_\infty = cx^\dagger \tag{3-1}$$

在后掠Hiemenz流动中，引入的边界层外缘展向速度W_∞在所有流向位置是相同的，因此将这一速度选作参考速度。Malik等人在研究这一问题时，也采用这一速度作为参考速度。$l^\dagger = (\nu/c)^{\frac{1}{2}}$ 可以用来表征边界层厚度，本文在这个算例中用这个长度作为参考长度。以W_∞作为参考长度定义的雷诺数叫做横流雷诺数，$Re_W = W_\infty l^\dagger/\nu$，这个雷诺数在Malik等人的文章[84]中被记做$\bar{R}$。

3.1　后掠Hiemenz流动的稳定性分析

表3.1列出了这一章研究的算例的具体参数。在后文中，这两个算例会被简记为Case1和Case2。其中Case1的参数与文献[84]中完全相同，只是换算到了实际有量纲的情况。图3.2给出了Case1中主模态扰动延流向的发展变化。在本文的模拟计算中，流向用了600个网格点，基本上每个波长都有14个网格点。前人的文献中指出，对于PSE计算，每个波长内有3个网格点就绰绰有余了[101]，所以本文中使用的网格点密度是完全满足要求的。在垂直于壁面方向，Li等人[102]指出281个网格点就完全够用了，本文的计算中一共给了301个点。从图3.2所示的结果中，也

图 3.1　后掠Hiemenz流动示意图

表 3.1　计算研究算例的参数

	$c(\mathrm{s}^{-1})$	$l^{\dagger}=(\nu/c)^{\frac{1}{2}}(\mathrm{mm})$	$W_{\infty}(\mathrm{m/s})$	$Re_W=W_{\infty}l^{\dagger}/\nu$
Case1	40	0.6014	12	500
Case2	40	0.6014	24	1000

可以看到，本文的计算结果与文献给出的结果完全吻合，这也再一次验证了使用计算程序的精度。这套稳定性计算程序之前还进行过其他方面的稳定性计算，读者可以查阅[103–109]。在本章的研究中，采用的等离子体模型为从实验中反推出来的体积力分布模型（Kriegseis‘ model[16]）。在他们的实验中，一共测了8 ， 9 ，10 kV 三个电压产生的体积力。这三个电压分别可以吹出来速度为1.7， 2.8， 3.8 m/s平行于壁面的射流。但是，在实际计算中发现，只有8kV的电压产生的体积力可以有效的控制Case1中的横流转捩，另外两个高电压产生的体积力都太强了，范围会促进转捩。所以为了研究电压的效应，在Case2中，将边界层外的展向速度提高了一倍，这样三个电压都可以产生一定的作用，并进行比较研究。

针对这两个算例，本文首先进行了线性稳定性分析（LST）。在线性稳定性分析中，在不同的流向位置均采用小扰动假设和平行流假设，计算不同展向波数β的横流定常模态的增长率。最终得到模态的增长率随流向位置和展向波数的变化如图3.3。在这两个计算中，展向波数的取值范围均为$\beta\in[0.1,1]$。因为这里只关注由壁面粗糙度激发出来的定常横流模态，所以模态的频率$\omega=0$。这里所说的流向

图 3.2　计算得到的扰动能量与文献[84]中的结果对比 ($Re_W = 500$)

增长率即为计算得到的复流向波数的虚部的相反数，即$-\alpha_i$。对于Case1，失稳模态首先出现在$x = 83$，失稳模态的展向波数β为0.12。最大的失稳模态增长率出现在$x = 305$，展向波数β为0.33，增长率为0.0243。对于Case2，失稳模态首先出现在$x = 85$，失稳模态的展向波数β为0.05。最大的失稳模态增长率出现在$x = 451$，展向波数β为0.26，增长率为0.0336。对比这两个算例，可以发现，随着横向流动的增加，失稳模态的增长率更高了，失稳的区域也更加偏向于下游。另外需要提及的是两者中性曲线，也就是增长率为0的等值线形状的变化。总的来说，随着增横向流动的增大，中性曲线的下支越来越贴近坐标的横轴线，上支的斜率越来越小。其中，上支的斜率越来越小说明高波数的模态的失稳位置更加倾向于下游。

(a) Case1　　(b) Case2

图 3.3　定常横流模态的流向增长率

图 3.4　Case1算例中，入口扰动展向波长不同时，主模态幅值的流向演化

线性稳定性计算只能够静态的得到每个模态在不同的位置的增长率，而得不到模态演化以及相互影响的过程。之后本文对这两个算例都进行了NPSE的计算。稳定性分析仅仅能够得到扰动在边界层内的增长情况，但是并不能计算得到扰动的初始值。不同的来流条件和壁面光滑程度会导致不同的扰动初值幅值，计算初始值需要对流动进行感受性分析。由于本文并不关心感受性过程，所以这里只研究一种可能的初始值情况。这里计算模拟了初始扰动主模态的展向波数为0.1、0.2、0.3、0.4和 0.5的5种情况。这些些模态分别被记为Mode1到Mode5。由于不同展向波数的模态的失稳起始位置是不一样的，所以本文的NPSE计算的起始点也是各个子算例各有不同。这5个模态分别起始于$x = 86, 101, 134, 173$和218。这也分别是LST预测的失稳起始位置。在计算起始位置只有主模态，所有高阶模态都是后续通过非线性效应激发出来。计算得到的结果如图3.4所示。可以看到，Mode1最先失稳，但是相比于其他模态，其增长率则相对较低，所以很快便被其他模态超越。Mode3，其展向波数为β=0.3在$x = 470$处首先达到饱和。定性的，首次失稳饱和之后，在饱和横流涡上发生的二次失稳会很快促发转捩。所以这里Mode3将是主导转捩的模态。之后，本章将以此模态作为控制目标模态，所有控制算例均谊在控制此模态。

3.2　后掠Hiemenz流动的敏感性分析

3.2.1　基于LST的敏感性分析

在这一小节中，介绍一下敏感性分析的研究成果。从式（2-41）中我们发现

伴随向量是直接起到对体积力的加权作用的，所以通过对该向量的分析，我们可以获得体积力法向敏感性分布的大致情况。三个方向伴随速度（伴随向量中对应于速度的三个分量）的分布如图3.5： 从伴随速度的分布中我们可以看到，展向

(a) u^*分布云图　　(b) u^*不同截面剖面

(c) v^*分布云图　　(d) v^*不同截面剖面

(e) w^*分布云图　　(f) w^*不同截面剖面

图 3.5　LST伴随向量

和流向的伴随速度始终大于法向的伴随速度。这表明，该流动对于展向和法向的激励更加敏感，而对于法向的机理则不是那么敏感。另外，随着扰动延流向发展，其对展向的激励越来越敏感，而对流向则越来越不敏感。从物理上这也很好解释。在靠近前缘的位置，基本流的流向分量很弱，所以只需要很小的扰动就能够对其产生很大的影响。之后随着流向的推进发展，流向的基本流越来越强，对其产生扰动需要的力量也就越来越大，从而敏感性也就越来越低。

针对我们提出的等离子体控制方案，我们用所推导出的敏感性公式分析其控制效率，得到在某一固定位置，扰动模态增长率变化与激发器展向位置和安装角度的关系如图3.6。 在这里，我们在增长率变化量后面乘了一个因子cos(θ)，这是因为当偏转激发器角度的时候，激发器所能覆盖的流向位置就变短了，变成了

(a) 敏感性随安装的展向位置和角度变化　　(b) 激发器安装方位示意图

图 3.6　LST敏感性分析结果

(a) 敏感性随展向安装位置的变化　　(b) 敏感性随安装角度的变化

图 3.7　LST敏感性分析结果

原来的cos(θ)倍。而增长率指的是单位流向长度的增长率，所有乘上了这个系数。可以看到，敏感因子随着展向的变化呈正弦规律，而最佳安装角度36°与横流涡角度44°差距不大。得到不同的流向位置最大增长率减小值之后，我们对比了流向敏感性，如图3.8。我们可以看到，在进入失稳区之后，相同大小的体积力对横流模态的影响就越来越小。然而这一结论是建立在线性、单一模态、正确相位的基础上的，实际应用时，越靠近中性点越容易激发出别的扰动模态从而影响转捩。

3.2.2　基于PSE的敏感性分析

由于基于LST的敏感性分析还是局部性质的结果，并且在推导的时候忽略了二阶项的影响，所以其结果精确度并不高。这一小节主要展示基于PSE的稳定性分析及的结果。依然是针对Case1以及我之前确定的目标模态。这里由于本文希

图 3.8　敏感性随流向位置变化

望采用的控制方案还是在线性区进行控制，所以敏感性分析也是只针对线性区进行。因此，这里的原始方程是线性PSE方程，并不包含模态之间的非线性相互作用。图3.9给出了流向速度和敏感因子在$x = 280$位置横截面的分布。需要注意的是，在基于LSE的敏感性分析中，针对的目标变量是扰动模态的增长率，而在基于PSE的敏感性分析中，针对的目标变量是下游某一位置处的扰动能量（式（2-43））。图3.9展示的是输出扰动能量选取在$x = 500$的结果。其中，用颜色表示的云图是流向的速度分布，线条是各个方向敏感性因子的等值线。这里用实线表示正值用虚线表示负值。从流向速度分布的云图中，可以看到横流涡正在形成，但是还没有标志着横流涡达到饱和的"上叶翻转"现象。"上叶翻转"也是强非线性产生的标志。从流向速度分布云图中可以看出，这个分析敏感性的位置还处于线性增长区，也符合本文的初衷。虽然横流涡在这里还没有完全形成，但是壁面附近已经有了高低速相间的条带。其他位置的敏感因子分布情况与图3.9展示的类似，这里就不再赘述。值得一提的是，相比于敏感因子的大小，敏感因子的正负是指导控制方案的关键。

(a)

(b)

(c)

图 3.9　$x = 280$处横截面上流向速度分布云图和三个方向敏感性因子分布等值线：(a) G_u，(b) G_v and (c) G_w。实线表示正值，虚线表示负值。扰动能量输出位置选取在$x = 500$

(a)

(b)

(c)

图 3.10　x = 280处横截面上流向速度分布云图和三个方向敏感性因子分布等值线：(a) G_u, (b) G_v and (c) G_w。实线表示正值，虚线表示负值。扰动能量输出位置选取在x = 300

如图3.9(a)所示，G_u的正值分布在高速条带下方，并且斜着向上延伸，与相邻的低速条带重合。正值区与负值区相间交替出现。图3.9(b)中，G_v的正值主要集中在低速条带出现的区域，而高速条带位置主要是负值。这意味着如果想要通过法向激励的方式，比如壁面垂直吹吸之类的方法控制失稳，那么就需要在低速条带下面吸气，在高速条带下面吹气。G_v的0值等值线并不像G_u和G_w的0值等值线那样扭曲。G_w的分布情况基本与G_u类似，只是正负值分布的区域做了交换。在Dörr和Kloker[70]提出的等离子体控制方法中，他们有两个基础的控制算例分别叫做ACF和CCF。这两个控制算例的计算结果展示在他们文章的Fig 4中。在ACF算例，有着展向正方向分量的体积力被施加在了横流涡下方，也就是图3.9(c)所示的G_w恰好是负值的位置。在他们的算例CCF中，有着与ACF中体积力相反方向的体积力被施加在了二次涡出现的位置，也就是图3.10中所示高速条带的位置。这里一位置的G_w恰好是正的。从式（2-55）可知，负的敏感因子乘上正的体积力，或者是正的敏感因子乘上负的体积力，都可以得到负的扰动能量变化，也就是使得扰动变弱。Dörr和Kloker[70]的结果也印证了这里敏感性分析的结论。在下一小节的等离子体控制算例的结果，也会对本文推倒的敏感性分析做相关的印证。

由于并不知道扰动能量输出位置的选取对敏感性因子的计算结果有没有影响，所以本文计算了输出位置在$x = 450, 400, 350, 300$的敏感性因子分布。图3.10给出了$x = 280$截面上流向速度分布云图和敏感性因子的等值线，但这一次的扰动能量输出位置选取在$x = 300$。相比较输出位置选取在$x = 500$，流向和展向敏感因子的分布更加的贴近壁面。然而，当输出位置与所观察的截面想去较远时，如输出位置在$x = 350, 400, 450$，则结果和图3.9中的分布几乎完全一样。所以这里不再将这些相同的分布罗列出来。所以，通过比较输出位置在$x = 500, 450, 400, 350, 300$这五个算例，可以下如下结论：当在近所关心位置上游不远处进行控制时，更加靠近壁面的控制激励效果更好。但是这一效应在远离所关心位置之后迅速衰减并消失。由于本文之后采取的控制措施都是在离关心区域较远的位置，之后展示的敏感因子均是以$x = 500$为输出位置计算得到的。

图3.11给出了靠近壁面$z - x$平面上，展向敏感因子G_w的分布等值线和流向速度分布云图。从图中可以清楚的看到高低速条带的相间分布。其中红色代表着高速条带，蓝色代表着低速条带。在远离输出位置的区域内，可以看到G_w的等值线基本上与条带平行。不平行的区域只有大约不到40的无量纲长度。这意味着最佳的等离子激发器布置方案也应该是平行于高低速条带，也就是平行于横流涡轴。这样可以保证在每一个横截面内，激发器产生的体积力都处在流动最敏感的区域

图 3.11　展向敏感性因子G_w在$y = 1$平面上的等值线（颜色为流向速度云图）

内。Dörr和Klocker[70,110]提出的控制方法就总是让激发器平行于横流涡轴。

图3.12给出了三个方向敏感性因子展向最大值在$y - x$平面内的分布。从图中可以看到，流向的敏感性因子最大。另外，最敏感的区域位于边界层内，但是离壁面却还有一定的距离。这是因为在壁面附近，粘性主导，速度剪切很大，体积力想改变流动非常困难，远不如远离壁面的位置改变流动容易。当然，如果出了边界层，体积力产生的扰动又不会影响失稳模态，从而敏感性也会降低。所以最敏感的区域出现在高度适中的位置。

图3.13给出了不同流向位置敏感性因子在横截面上最大值的分布。图中虚线表示的是中心点的位置$x = 134$。敏感性因子的峰值大约在中性点前一点点的位置。这和文献[98]中给出的二维平板的敏感性分析结果类似。这一结果与本文之前给出的基于LST的敏感性分析类似，从而也互相印证了这两种方法的正确性。在失稳区域，敏感性快速下降，这也意味着对扰动的控制在外加体积力相同的条件下，越靠近上游越好。但是需要注意的是，敏感性分析的前提假设是体积力引入的扰动相对于流动本身就有的扰动是一个小量。很显然，在上游扰动刚刚生成，还非常弱，如果引入的体积力会产生比自然扰动还强的扰动，则反而会适得其反，使得新的扰动盖掉了之前的自然扰动，反而会促进转捩。所以合适的最佳流向位置还需要做进一步的研究。

(a)

(b)

(c)

图 3.12　敏感性因子展向最大值在$x-y$平面上的分布云图 (a) G_u, (b) G_v and (c) G_w 。输出位置选取在$x=500$

图 3.13　不同横截面上敏感性因子的最大值在流向分布变化

3.3　采用等离子体激发器推迟后掠Hiemenz流动转捩

上一小节给出的敏感性分析都是基于线性稳定性的，这一小节将重点介绍非线性抛物华扰动方程（NPSE）计算的结果。在这一小节中，等离子体模型均使用之前介绍的Kriegseis的模型[16]。所有激发器的电压均为8kV。更高的电压也做过测试，但是由于NPSE本身是一种稳定性分析的方法，是用来计算小扰动的。当大于8kV的电压加入到流场中，计算就因为扰动过强而直接崩溃了。在崩溃前可以观察到扰动能量的大幅提升。这也说明了过高的电压对转捩反而会起到促进作用。采用8kV的电压进行控制时，首先研究了展向的位置效应。控制时，在每个展向波长内放置一个激发器。由于这样的激励会直接刺激主模态，所以本文中将这种方法命名为谐波激励。激发器位于不同的展向位置时，边界层内的扰动能量演化情况如图3.14所示。在本文中，模态能量的定义如下：

$$\text{Energy} = \frac{1}{2}\int_0^\infty (|\hat{u}|^2 + |\hat{v}|^2 + |\hat{w}|^2)dy \tag{3-2}$$

由于平均流修正模态（或叫做基本流修正模态），也就是(0,0)模态并没有复共轭，所以它的能量定义为：

$$\text{Energy}_{00} = \frac{1}{4}\int_0^\infty (|\hat{u}|^2 + |\hat{v}|^2 + |\hat{w}|^2)dy \tag{3-3}$$

图3.15给出了不同算例中等离子体激发器产生的体积力和横流涡的展向位置关系。这里列出的激发器的展向位置分别在$z/T_z = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$，本文之

后简记为算Case（a）-（f）。由于横流涡是斜的，所以在不同的流向界面上，横流涡所处的展向位置并不相同。也就是说单说展向坐标并没有实际意义，关注的主要应该放在体积力和横流涡的相对位置上。图中的颜色云图是体积力的分布，截掉了小于最大值10%的颜色。图中的线是流向速度的等值线，可以看到横流涡将壁面的低速流动卷起并翻转。等离子体在流向的激励区域用两个蓝色的点表示出来。这里模态还是用频率-展向波数来表示。由于本文针对的还都是驻涡模态，所以第一个数字都是零。第二个数据表示模态展向波数相对于主模态展向波数的倍数。如之前提到的(0,0)模态即为基本流修正模态，(0,1)是主模态，(0,2)是半波长的次谐波模态。从图3.14中可以看到，主模态的演化规律和之前敏感性分析预测的结果吻合：在Cases(d)和(e)中，主模态能量大幅下降，而这时体积力的位置正好在横流涡的下方，也就是之前敏感性分析得到的G_w为负值的区域。在这两个算例中，主模态的能量分别降到了0.0067和0.0077。然而在Cases(a)到(d)中，(0,2)模态被促进了，这和Dörr与Kloker[70]在他们的DNS的结果中观察到的相同（他们文章中的Fig 8）。在有些算例中（图3.14(d)），(0,2)模态的能量甚至超过了主模态的能量。不过，在Cases(e)和(f)中，并没有出现(0,2)模态被促进这一现象。所以，半波长模态能量的增加并不是所有算例共有的特性，通过调整激发器的展向位置，是可以有效降低所有模态的能量的。在图中所示的算例中，可以看到激发器在$z/Tz = 0.9$效果最好。需要提一下的是，Dörr和Kloker的 DNS[70]结果中，所有算例里(0,2)模态都被激发了。

(a) $z/T_z = 0.5$　　(b) $z/T_z = 0.6$

(c) $z/T_z = 0.7$　　(d) $z/T_z = 0.8$

(e) $z/T_z = 0.9$　　(f) $z/T_z = 1.0$

图 3.14　激发器位于不同的位置时，各阶失稳模态能量的演化

(a) $z/T_z = 0.5$

(b) $z/T_z = 0.6$

(c) $z/T_z = 0.7$

(d) $z/T_z = 0.8$

(e) $z/T_z = 0.9$

(f) $z/T_z = 1.0$

图 3.15　不同算例中体积力与原横流涡位置关系。颜色云图为体积力分布，曲线为无控制的流向速度等值线

接下来进行等离子体激发器流向位置效应的研究。需要提及的是，在每一个流向位置，本文都测试了诸多展向控制位置，并且将其中最好的一个算例选取

图 3.16　激发器位于不同的流向位置控制效果对比（主模态能量对比）

图 3.17　激发器位于不同的流向位置控制效果对比。横轴为据控制起始位置x_{start}的距离，纵轴为控制后主模态幅值与无控制主模态幅值之差

出来进行比较。每一个位置的激发器展向效应与之前给出的类似，这里便不再赘述。研究方法依然选用的是NPSE。图3.16对比了控制开始于$x_{\text{start}} = 315, 358, 400$位置处的控制效果。这里每一个控制算例的展流向激励长度，也就是等离子体在流向延伸的长度是相同的。由于转捩主要还是由主模态主导的，这里主要对比了主模态的能量。这里用到的体积力是之前算例的十分之一，这是因为在上游扰动非常弱，并不需要太强的体积力。体积力过强反而会污染干净的边界层。控制起始

于x_{start} = 358的算例中的主模态能量要远远小于控制起始于x_{start} = 400算例中的主模态能量，这是因为前者的控制区域更靠近中性点x = 134，控制的区域边界层内本身有的扰动较弱，所以控制效率较高。读者可以回忆之前敏感性分析的结果，不论是基于LST的敏感性分析还是基于PSE的敏感性分析，都指出在失稳区域，越上游控制越有效。这两个算例的结果对比符合之前敏感性分析给出的结论。图3.17对比了主模态流向扰动速度在控制区域的变化。这里横坐标是距控制起始位置的距离，也就是$x - x_{\mathrm{start}}$。可以看到，在刚刚开始的位置，也就是靠近控制起始点x_{start}附近，算例x_{start} = 315中主模态流向扰动速度下降的最快，也下降的最多。在这一阶段，总的施加于流动上的体积力还不多，所以添加的体积力还很小，满足小扰动假设。因此敏感性分析的结论依然成立，也就是控制越靠上游，效果越好。但是在x_{start} + 18.7之后，x_{start} = 315算例的结果与另外两个算例的结果分道扬镳，其主模态不在是减弱，而是开始增长。这就是因为体积力引入的新的扰动已经盖过了原有的扰动，并开始主导失稳过程。需要说明的是，这里曲线出现了很突然的拐折并不是计算的问题，而是因为图中展示的主模态流向扰动速度在横截面上的最大值，当最大值从一个空间位置跳变到另一个空间位置，就会出现导数的不连续。从上面的结果对比，可以做出结论——适当的流向控制位置非常关键。

对于Case2，本文也做了无控制的线性稳定性分析，非线性抛物化扰动方程的计算寻找特征模态，并用之前推导出来的敏感性方程做了敏感性分析。但由于结果与Case1的结果非常类似，这里便不再展示。唯一需要提及的是这一次主导转捩的模态的展向波数β变成了0.2。这里重点研究一下不同展向电压的激励，对控制效果的影响。在这个算例中，边界层外的展向速度是签一个算例的两倍，这就意味着此算例需要更强的体积力来控制。在之前算例中过强的激励电压，9kV和10kV都有了用武之地。图3.18对比了不同激励电压下各阶模态能量的变化。这里依然是选取了最佳的展向控制位置的结果。控制的流向区域从500到500，在图中用两个黑色的大圆点标识出来。绿、蓝、红分别是8、 9、 10kV电压的控制结果。这三个电压在静止的流场中分别可以吹出来最大速度1.7、 2.8、 3.8m/s的射流。之所以选这三个电压是因为在Kriegseis等人[16]的实验中，只测了8、 9、 10、 11、 12kV五个电压的等离子体分布，而最后两个电压太高，会在边界层中引入额外的扰动，所以这里只对比了前三个。从3.18中可以看到，在控制区域的前半段，也就是x = 530之前，三个算例中的扰动能量都受到了抑制，比无控制的结果的（图中的黑线）低。但是在10kV的算例中，扰动在控制区域的后半段开始大幅的增长，尤其是(0,0)和(0,2)模态，甚至超过了主模态的能量。前人在用DBD控制

图 3.18　采用不同电压控制下的各阶模态演化

横流的DNS结果[70]中也提到了过强的体积力会产生有害于流动稳定的涡，从而使转捩提前。因此，在这个工况下，中等的电压强度——9kV，是最佳的选择。

3.4　本章小结

在这一章中，本文对典型的三维边界层流动——后掠Hiemenz流动——的失稳过程进行了敏感性分析，并提出了一种基于直接抑制主模态的等离子体谐波控制方案。敏感性分析的结果指出，在低速条带下方，也就是横流涡下方偏下扫的位置处添加正方向的体积力可以抑制扰动的发展，后续的NPSE计算也验证了这一结果。之后在等离子体激发器的流向位置效应和电压效应的研究中，发现所添加体积力的强度一点要与当地所存在的扰动强度相当。太弱起不到控制的效果，太强会引入新的扰动主导失稳过程，反而会促进转捩。

第4章　后掠翼上流动失稳分析与控制

4.1　后掠翼上流动的稳定性分析

数值研究了后掠Hiemenz流动转捩控制之后，本文将研究目标转移到更贴近实际的工况，研究一个真实的后掠翼流动的转捩控制。清华大学（Tsinghua University）在2018年进行了NLF-0415后掠翼上翼面的转捩实验研究工作[?]，本文以该实验的工况作为基准，研究等离子体在实际的后掠翼流动中控制转捩的效果。这一实验在后文中将会被简记为“THU实验”或“THU experiment”。这里先简述一下实验的设备和工况。该实验是在清华大学自己的低湍流度风洞中进行的，风洞试验段大小为1.2m×1.2m×3m。风洞内安装NLF-0412翼型，如图4.1所示。在实验中采用的直角坐标系为$(X_{\mathrm{wt}}, Y_{\mathrm{wt}}, Z_{\mathrm{wt}})$，其$X_{\mathrm{wt}}$方向与风洞的流向平行。在计算中本文用的到直角坐标系为x, y, z（如图4.1）。计算所用坐标系的z方向与翼型前缘线平行，这样在采用了无限展长假设之后，这一方向的物理量就是均匀的。该风洞运行时测试段的风速可以为5.0到90.0m/s，湍流度可以低到0.05%。此次试验采用的翼型的弦长c=1.2m，有45°后掠和-4°攻角。该翼型在上翼面有很强的顺压梯度，可以有效的抑制T-S波失稳[111]。翼型中间到风洞入口大约1.25m。

实验中采用了单一的热线测量了来流的情况。来流风速均匀，湍流度0.08~0.1%。采用边界层热线(TSI Model 1261A)测量翼型$X/C = 0.2$，0.4，0.6位置处的边界层速度剖面。热线采用一个电脑控制的可以进行三维运动的机械臂驱动。最小的运动精度可以达到10μm。在每一个位置，沿着法向每隔0.05mm测量了沿着风洞方向的速度分量U_{wt}。这个速度分量也就是图中所示X_{wt}坐标的方向。沿着法向的测量一直到两倍边界层厚度的位置终止。为了防止测量热线因为接触避免被损坏，第一个测量点选取在离壁面0.15mm处。这一距离是通过镜面法测量得到的。也就是通过测量热线和其在翼面上的镜像的距离，得到其相对于翼面的距离。

为了验证本文中基本流计算的结果，这里选取了雷诺数Re为1.81×10^6，也就是自由来流速度U_∞=22.3m/s的算例进行比较。($Re = U_\infty c/\nu$ 其中U_∞是自由来流速度度，c是弦长，ν是动力粘性系数。)在这个工况下，上翼面一直到70%弦长的位置都是层流。在之后研究得我等离子体控制算例中，为了加速失稳和转捩，采用了两倍雷诺数也就是两倍来流速度的算例。

如上一章所述，高精度重构修正有限元程序Music[112–114]被用来进行无粘流求解计算。图4.2对比了计算求解得到的壁面上的无粘流延风洞流向速度分量和实际

图 4.1　风洞俯视图（“ • "表示热线测量位置)

图 4.2　边界层外缘风洞流向速度U_{wt}对比

实验中测得的边界层外的同方向的速度分量。其中黑线是计算得到的结果，三个大红点是实验测得的结果。由于实验仅测量了三个展向位置的速度，所以这里只有三个数据点。从图中可以看到，无粘流计算得到的结果与实验吻合良好。需要提及的是，实验中并没有精确测量离翼型非常远位置处的来流速度，也就是说实际上真正的自由来流是不能准确得知的。而计算中是采取的无量纲计算，所以本位以20%弦长位置边界层外缘的流速作为参考基准点，重新对计算结果进行了有量纲化。在实验中，虽然直到70%弦长处都是层流，但是60%弦长处边界层已经出现了强烈的扭曲。所以这里之对比了20%和40%弦长处的边界层剖面，如图4.3。与上图类似的，线是计算结果，点是实验测得的结果。这里并没有用所有测量数据，只是每个两个点取了一个数据。对比结果说明本文计算得到的基本流还是非常可靠地。

Reibert等人[87]也做过相同翼型相同工况的实验研究，在后文中将其命名

图 4.3　风洞流向速度U_{wt}在X/C = 20%和40%处剖面对比

为“Reibert’s experiment”或“Reibert实验”。但是他们的实验采用的风动和模型尺寸均与本文参考的实验不一样。在Reibert实验中，模型弦长1.83m，风洞实验段尺寸1.4m×1.4m×5m。更重要的，他们在文献中并没有给出翼型的安装位置。这些实验设置的不同，导致了两个实验得到的上翼面压力系数的分布不太一样。图4.4给出了THU实验和Reibert实验的上翼面压力分布。可以看到，THU实验的压力梯度要比Reibert实验的压力梯度强一些，这也说明了THU实验中流体在翼型中段的加速度更大一些。为了搞清楚压力梯度的变化对扰动的发展有什么影响，本文设置了4个算例进行对比研究。其中两个算例采用了Reibert实验得到的压力分布，他们的自由来流速度分别是22.3m/s和44.5m/s。另外连个算例采用THU实验得到的压力分布，自由来流速度也分别是22.3m/s和44.5m/s。这四个算例中边界层外缘流向速度分布与边界层位移厚度展示在图4.5中。可以看到，在采用THU算例的工况中，流体在靠近前缘位置加速比较慢，但是在翼型中段，其速度快速提升，并在30%弦长处超过了采用Reibert实验工况中的边界层外缘流向速度。不管在哪一个雷诺数条件下，采用THU压力分布的算例中的边界层厚度都要比采用Reibert的对应算例要厚。在70%弦长处，压力达到最低值，在之后均是逆压梯度，边界层快速增长。

图4.6展示了20%, 40%, 和 60%处的横流速度剖面。如之前提到的，横流速度必须在壁面和边界层外消失。这里，随着边界层的厚度从20%到60%逐渐增加，横流速度消失位置的高度也在逐渐增加。可以看到，所有采用THU压力分布的算例中的横流速度的最大值都要大于采用Reibert压力分布的对应算例对应位置的

图 4.4　THU（清华）实验中压力系数（红）与Reibert博士论文[87]中给出的压力系数（蓝）对比

(a) 不同算例中边界层外缘流向速度对比　　(b) 不同算例中边界层位移厚度对比

图 4.5　不同算例边界层对比

横流速度最大值。从图4.4中可以看到在这三个位置THU实验中的压力梯度均大于Reibert实验中的压力梯度，这也正是横流速度峰值不同的主要原因。众所周知，横流的产生正是因为边界层内由主流速度转向产生的离心力不足以平衡压力梯度产生的压差力。所以在压力梯度越强诱导出来的横流就越强。

本文先用传统的e^N方法来研究不同算例中的流动稳定性。这里N的定义为：

$$N = \int_{x_0}^{x} (-\alpha_i)\, dx, \tag{4-1}$$

这里，α_i是采用局部线性稳定性理论（LST）计算得到的流向复波数的虚部。其相反数$-\alpha_i$也就是LST预测出来的模态空间增长率。其物理意义就是下游单位长度距离处失稳模态幅值与当地失稳模态幅值的比值。x_0是模态首次失稳的流向位

(a) $U_\infty = 22.3m/s$　　(b) $U_\infty = 44.5m/s$

图 4.6　不同算例不同位置横流速度剖面对比

置。所以，这里N的物理意义就是，当地扰动模态的幅值相对于模态首次失稳位置的幅值的比的对数。采用这一定义的一个隐藏假设是所有模态在中性点位置通过感受性过程所获得的初始模态幅值是相同的。e^N虽然不是十分精确，但是可以定性反应失稳过程。图4.7(a)给出了不同算例N值的包线，也就是不同位置N的最大值。其中蓝线和红线分别代表来流速度为44.5与22.5m/s的算例，方块和圆点分别代表采用THU压力分布和采用Reibert压力分布的算例。从结果中可以看到，所有44.5m/s自由来流速度的算例中的N值均比对应的22.5m/s自由来流的算例高。这说明了来流速度雷诺数越高，失稳模态增长越快，流动越不稳定。另外，还可以看到，在自由来流速度一样的前提下，采用THU压力分布的算例中的边界层要比采用Reibert压力梯度的更不稳定。可见，横流速度的微弱变化（见图4.6）都会导致N值的剧烈变化。另外，必须要提及的是，如之前所说的，N是扰动幅值的对数，用数学式子表达也就是$A = A_0e^N$（A_0是中性点的模态初始值）。所以这里N的变化转换到实际的模态幅值上则会是更强烈的变化。图4.7(b)对比了不同算例中不同位置N值最大的定常横流失稳模态的展向波长。这也就是LST所预测的最不稳定模态的展向波长。可以看到，压力梯度的变化并没有对最不稳定模态的展向波长产生较大影响。基于以上分析，这里可以做一个简单的总结，更大的压力梯度会导致更强的横流速度，并进而导致更强的横流失稳模态的增长率。也就是压力梯度越大有横流的边界层越容易失稳。然而，这一变化对最不稳定横流模态的波长并没有显著影响，也就是说主导转捩的横流涡的展向并不会有太大变化。在THU实验中观测到的失稳波长与Reibert文献中的相同，也印证了这里的分析。

本文选取了上面对比的四个算例中最不稳定的一个进行控制，即自由来流44.5 m/s同时采用THU压力分布的算例。这样能够更明显的体现出控制的效果。

(a) N值包络线　　(b) 不同流向位置N值最大模态展向波长

图 4.7　不同算例e^N方法结果对比

在之后的计算中，自由来流速度44.5 m/s被选作参考速度。图4.8给出了N这个基准算例中不同展向波长的横流驻涡模态的N值延流向变化的情况。通常，横流模态的$N = 6$的时候会触发专列。如果采用这一标准，4mm展向波长的模态会在24%弦长位置触发转捩。然而，用N判断转捩的方法并不十分稳定可靠。有文献指出[115]，在前缘抛光，来流湍流度非常低的条件下，临界点N值甚至可以高于14。在这个基准算例中，在70%弦长之前（压力最低点之前）没有任何模态的N达到14。在翼型前半段，展向波长为4、5、6mm的模态的N值依次领跑。这意味着这几个展向波长的模态都有可能主导转捩。这里需要重点指出的是，3mm展向波长的模态在靠近前缘的位置增长飞快，但是在20%弦长处达到了峰值之后便开始减弱。在50%弦长处其幅值甚至小于其初始幅值。波长更小的模态，如2mm展向波长的模态在计算域内几乎不增长。这一短波长高波数模态不增长的特性与之前分析的后掠Hiemenz流动完全不同。在后掠Hiemenz流动中，短波长高波数的模态仅仅是失稳的晚一些，并不会出现完全不失稳的情况。这一特性将在之后的控制中起到非常关键的作用。

e^N方法是线性稳定性理论下的一种半经验方法，也就是说它还是要依赖小扰动可线性化假设和边界层增长近似为零的平行流假设。但实际上，当扰动的幅值增长到一定程度也就是大约扰动速度达到十分之一自由来流速度的时候，非线性会起作用，失稳进入非线性阶段。本文采用非线性抛物华扰动方程（NPSE）求解非线性阶段的扰动发展变化。在线性稳定性分析得到的几个最有可能主导转捩的模态被用来初始化NPSE计算。这几个模态被放置在计算入口处，并且幅值都设置

图 4.8　自由来流$U_\infty = 44.5$ m/s算例中不同展向波长的横流驻涡模态的N值延流向变化

为5×10^{-5}。这里NPSE中失稳模态的幅值定义为：

$$\mathrm{Amp} = \exp\left(\int_{x_0}^{x} -\alpha_i \, d\xi\right) \max\left(\sqrt{|\hat{u}|^2 + |\hat{v}|^2 + |\hat{w}|^2}\right)_y . \tag{4-2}$$

NPSE计算得到的几个算例中的主模态幅值沿着流向演化的曲线展示在图4.9中。这里的做法和后掠Hiemenz流动中选取控制目标模态的方法相同。图4.9中的曲线并不是一个算例中不同模态的演化曲线，而是4个主模态不同的算例的结果。在这几个算例中，除了主模态是计算入口就给入的，其他模态都是通过非线性依靠主模态激发出来的高阶谐波模态。从图中可以看到，3mm展向波长的模态的幅值基本上比其他模态的幅值低了一个量级。这和线性稳定性理论预测出来的相似，可见这一模态就并没有能够成功发展进入非线性阶段。5mm展向波长的模态是最先进入饱和的。因此在这一章之后的研究中，均以这一模态作为目标模态。

4.2　采用等离子体激发器推迟后掠翼上流动转捩

4.2.1　谐波激励：每个展向周期放置一个激发器

如之前在介绍等离子体模型中提到的，Maden模型中有7个模型参数需要确定，他们分别是a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2和c_{force}。Dörr和Kloker[110]指出体积力分布最好分散在边界层内，但是不要超过边界层外缘。图4.10展示了$X/C = 0.15, 0.2, 0.25$位置处的主流和横流速度。可以看到，这里的边界层厚度大约为1.2mm。在这个厚

图 4.9　NPSE计算得到的不同展向波长模态幅值延流向变化

度以外，主流速度保持为一个常数，横流速度快速下降并回归到零。基于这一基本流的速度剖面分布，本文调整体积力模型中的7个参数，设计了如图4.11所示的体积力分布。这一分布对应的模型参数列在了表4.1中。其中参数c_{force}是用来调整体积力强度的，并不会影响体积力的实际分布。这里一共给出了三个不同的该参数取值，以便在之后的研究中分析体积力强度效应。图4.11中的体积力分布对应$c_{\text{force}} = 30$。可以看到，本文设计的体积力基本完全分布在1.2mm高度以下，也就是完全在边界层内。这一体积力分布的展向长度小于2.5mm，即小于是基础展向波长5mm的一半。$c_{\text{force}} = 30,, 50, 70$时所对应的有量纲最大体积力密度分别为2986, 4976, 6967 N/m^3，在$y-z$横截面上的总得积分分别为1.467×10^{-3}, 2.446×10^{-3}, 3.424×10^{-3}N/m。需要提及的是，在Kriegseis的实验中[16]，最大体积力密度为 7000 N/m^3。可见这里所需的由等离子体激发器产生的体积力强度在实际中完全能够产生。

表 4.1　DBD模型参数

a_0	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2	c_{force}
2.0	0.08	0.001	7.76	2.1	1.8	30,50,70

在后掠翼算例中，本文首先尝试了与之前后掠Hiemenz流动中相同的谐波激励控制方法，也就是让激发器与横流涡相平行，然后每个展现波长内放置一个激发器。无量纲的体积力f 在$y = 0.1$ mm高度X-Z平面内的分布如图4.12所示。这里没有再展示敏感性分析的结果，这是因为其敏感性因子的分布与之前

图 4.10　不同流向位置主流（左）和横流（右）速度剖面

图 4.11　单一DBD激发器产生的体积力分布

后掠Hiemenz流动中的基本完全相同。这里控制的中心位置在25%弦长处，控制开始于23.7%弦长处，结束于26.2%弦长处。这里体积力强度参数c_{force} = 30。本文计算了激发器在十个不同展向位置的结果。其控制效果与之前后掠Hiemenz流动中的类似，这里就不再一一列出。结论也是在横流涡下方偏下扫位置处控制效果较好。这里重点对比了这十个算例中效果最好的和效果最差的以得到其控制的内在机理。图4.13展示了最好算例和最差中主模态延流向的演化。其中黑线是无控制的结果，绿线和红线分别是最差算例和最好算例的结果。T_z是展向波长，z_0是激发器中点的展向位置坐标。可以看到在激发器位于z_0/T_z = 0.4处，在控制区域横流主模态能量大幅下降，并且在控制之后的区域始终低于无控制工况中的横流主模态能量。而在另一个算例中，激发器位于z_0/T_z = 0.9，也就是激发器刚好平移了半个波长。这时主模态在控制区域反而被促进了，这也意味之转捩将会被提前。

图 4.12　DBD激发器阵列产生的体积力在X–Z平面上的分布(y = 0.1 mm) 激发器间距为一个展向波长

由于横流涡是斜的，所以横流涡的位置会随着观察的流向位置而变化，所以但看z_0是没有意义的，更重要的是看激发器与横流涡的相对位置。在之前后掠Hiemenz流动的控制分析中，本文给出了施加体积力和横流涡的相对位置，这里给出体积力和横流方向扰动速度分布的相对位置，以说明控制的机理。图4.14中颜色云图表示体积力横流方向分量在横截面上的分布，曲线表示在横流方向的扰动速度分量。其中实线表示值为正，虚线表示值为负。可以看到，当把扰动和体积力都投影到横流方向的时候，如果他们的符号相反，也就是力的方向与扰动的速度方向相反（如图4.14(a)），则主模态的能量就会被降低。相反的，如果外加力与扰动速度在横流方向的投影得到的符号相同，则主模态反而会被促进，如图4.14(b)。这一结果非常直观，也说明了这种谐波控制的控制方法实际就是通过用外加体积力去抵消因为失稳产生的扰动。当然，由于横流失稳产生的扰动在展向的分布是时正时负，所以激发器的展向位置非常关键。所以这一特性也给实际应用带来了风险。因为并不是控制总能起到效果，有时反而会适得其反。再加上实际中横流涡的位置并不是很容易预测，至少笔者并不知道有效的横流涡展向位置的预测方法。所以，这种谐波激励的方法在笔者看来并不实用，缺少足够的鲁棒性。还需要寻找更鲁棒的方法。

图 4.13　最佳控制算例与最差控制算例主模态能量延流向演化与无控制算例结果比较

4.2.2　亚谐波激励：每个展向周期放置两个激发器

在上一小节中，通过研究压力梯度对横流失稳的影响，发现压力梯度增大导致横流速度提高，并进一步导致失稳加剧。这不禁令人猜想，是不是通过其他方式减弱横流也可以减缓横流失稳的发展过程。在这一小节中，本文提出一种采用DBD等离子体激发器通过削弱横流来抑制横流失稳的方法。依旧在翼型前缘附近安装等离子体激发器阵列，令其产生的体积力与横流方向相反。这里在每个展向周期内放置两个等离子体激发器。这种布置方式会直接激发出半波长的(0,2)模态,也就是2.5mm展向波长的模态。读者可以回忆图4.8中线性稳定性理论给出的结果，波长小于3mm的模态都几乎不增长。这也意味着不用担心这个被额外激发出来的模态会取代之前的主模态重新主导转捩。这里需要提一下的是，之所以没有在后掠Hiemenz流动中应用这一控制方法，是因为后掠Hiemenz流动并没有高波数短波长模态不增长这一关键特性。读者可以回忆图3.3，在后掠Hiemenz流动中，高波数短波长的模态只是失稳的位置比较靠下游，但终究还是要失稳的。笔者也曾试图采用这种亚谐波激励的方式控制后掠Hiemenz流动，但往往激发出来的高波数短波长的模态会取代原主模态主导转捩。体积力分布的俯视图如图4.15。可以看到相比之前的控制方案，激发器的布置密了一倍。控制区域开始于18.7%弦长处，结束于21.2%弦长处，中心位置处于20%弦长处。激发器平行于主模态的等相位线。这里先令c_{force} = 50，展示被控制算例的普遍特性，之后再对比展示c_{force} = 30和70的结果。

图4.16给出了有控制和无控制时各阶失稳模态能量随流向的变化。其中红线

(a) $z_0/Tz = 0.4$

(b) $z_0/Tz = 0.9$

图 4.14　体积力分布（颜色云图）与扰动分布（黑色等值线）的相对位置

代表控制算例的结果，黑线代表无控制算例的结果。图4.16(a)采用的是正常坐标表示，图4.16(b)对扰动的能量取了对数，这样可以更清楚的看到能量较小的高阶模态。控制区域用两条竖线表示出来。如之前所分析的，由于激发器的间距是基础展向波长的一半，所以半波长模态(0,2)被直接激发出来。可以看到，这一模态在控制区域一直增长，一直到控制区域结束位置，形成了一个小峰值。但是，除了控制区域之后，这一模态又迅速回落。在30%弦长处，其能量比控制区域结束位置的能量峰值低了将近两个数量级。这主要是因为这个展向波长2.5mm的模态在这一区域本身就是衰减的。所以，即便这一模态能够从等离子体激励中获得一点能量，但这些能量也会迅速地耗散掉。除了(0,2)模态，更高阶的模态（(0,3)到(0,5)）也被等离子体激发了出来，但是同样的，他们也都是稳定的模态，在翼型前缘是衰减的。所以他们的演化情况与(0,2)模态类似，也是出了控制区域

图 4.15　Distribution of body force in the X–Z plane (two actuators per wavelength).

(a)　　(b)

图 4.16　Evolution of mode energy with and without control.

后一路衰减，一直到30%弦长左右处达到最低点。之后因为主模态幅值已经近饱和，其通过非线性效应将一部分能量转移到高阶模态上。依靠这些来自主模态的能量，高阶模态在30%弦长之后又重新开始增长。但是，直到50%弦长处，控制算例的各阶模态的能量都低于他们在无控制算例中的对应模态。这表明扰动成功的受到了抑制。

图4.17和4.18给出了$X/C = 0.216$和0.35位置处的流向速度分布云图。其中$X/C = 0.216$非常靠近控制区域的结束位置，也就是$X/C = 0.212$。这也基本

(a)　　(b)

图 4.17　Contours of streamwise velocity at $X/C = 0.216$ (a) without and (b) with control.

(a)　　(b)

图 4.18　Contours of streamwise velocity at $X/C = 0.35$ (a) without and (b) with control.

上在(0,2)模态能量出现小峰值的位置。可以看到，这一位置无控制的边界层十分干净，几乎没有什么扰动。加了控制之后，边界层反倒起了一些小的涟漪状的波动。所以可见这种亚谐波的控制方式并不像之前展示的谐波激励，直接在控制区域就起到作用，抑制扰动的能量。相反，在亚谐波激励区域，扰动的的总能量反而因为激发了半波长模态而提高了。亚谐波激励的控制效果在下游才体现出来。如图4.18，在$X/C = 0.35$位置处，无控制工况内横流涡已经形成，近壁区的低速流体被卷起，甚至要翻转下来。然而，在控制工况里，这个位置还没有形成明显的横流涡，流向速度云图中也只是起了一点波动，并没有强烈的高低速流体对流现象。从这一位置的流向速度云图结果对比中，可以看到在控制区域的下游，横流横流涡的生成过程被减缓了。这同时也意味着转捩被推迟了。

图4.19给出了不同算例中不同流向位置横流速度剖面的对比。其中蓝线表示基本流中的横流速度剖面。黑线表示无控制工况中横流速度剖面。这一剖面是基本流的叠加上基本流修正模态，也就是(0,0)模态得到的。可以看到，最开始黑线基本上和蓝线重合，这也意味着基本流修正模态在开始的时候非常微弱。之后，随着横流模态的发展，平均流场被横流涡所扭曲，基本流修正模态的幅值开始提高，黑线也逐渐开始和蓝线分离。可以看到，黑线与蓝线在$X/C = 0.35$位置处已经有很大的分离了，而这一位置也就是无控制工况中主模态近乎饱和的位置。图中的红线表示采用了等离子体激励算例中的横流速度剖面分布。可以看到，等离

图 4.19　Crossflow velocity profiles.

图 4.20　Evolution of mode energy for different body force strengths.

子体多平均流场的影响是显著的。在$X/C = 0.25$位置，其横流剖面就已经非常明显的低于无控制算例和基本流中的横流剖面。回忆之前研究压力梯度效应的结果，微弱的横流速度变化都能对之后失稳的发展起到强烈的影响。因此，可以认为正是等离子体降低了横流速度，从而使得流动更加稳定，并阻碍了横流模态的发展。另外，从图4.19中也可以看到，四个流向位置处，控制工况下的横流强度并没有明显的变化。这主要是因为在控制工况中，横流模态的增长较慢。而基本流修正模态的能量主要来自其他模态对其的非线性作用。而这种非线性作用正比于其他模态本身的强度。所以当横流模态的发展受到抑制，其模态幅值在翼型中段较低，无法有效的通过非线性项作用到基本流修正模态上，使得在控制工况中基本流修正模态并没有明显的变化。

通过改变等离子体模型中的系数c_{force}，本文研究了不同体积力强度对控制效果的影响，计算结果如图4.20所示。其中右边的图是左边图中在控制区域附近的放大。橙色、红色、绿色的线分别代表了$c_{\mathrm{force}} = 30$、50、70的计算结果。可以看到，在所有控制工况中，主模态和（0,2）模态的能量都有所下降。随着体积力的

图 4.21　Evolution of mode energies with plasma actuators at different streamwise locations.

增强，在控制区域激发出来的（0,2）模态的峰值会逐渐增高，但是在翼型中段各阶失稳模态的能量增长率会逐渐降低。这表明用于控制的体积力越强，控制效果越好。

图4.21对比了激发器放置在不同流向位置的算例中的失稳模态能量演化情况。其中绿色、红色和橙色的曲线分别代表DBD激发器位于15%、20%和25%弦长位置处的算例。从图中可以看到，在控制区域（0,2）模态被激发并形成了一个小的峰值。右侧的图中依然是对激励区域的放大。可以看到，在15%位置处等离子体激发出来的（0,2）模态能量的峰值最高，其次是20%，而25%位置的最矮。这也间接说明了即便是（0,2）模态，其敏感性也是随着流向坐标值的增加而降低。从30%到40%弦长位置处，在15%弦长位置处进行控制的算例的所有模态的能量都比其他算例中对应模态的能量低。在25%弦长处进行控制的算例中，主模态刚开始并没有受到等离子体激励的影响，一直到33%弦长位置其能量才开始大幅下降。这三个控制算例说明激发器的位置即便在流向一定范围内有所变化，其主模态的能量依然能够被削弱。

在小节4.2.1中提到过，激发器的展向位置对每个展向周期放置一个激发器的谐波激励控制至关重要。这里重点研究了激发器展向位置对每个展向周期放置两个激发器的亚谐波激励控制的影响。两个激发器展向位置相差半个相位的控制结果在图4.22中进行了对比。由于激发器的展向周期实际是失稳模态的一半，这样让激发器产生反相位需要将其在展向平移四分之一个主模态展向周期。红色的线代表原来的算例，绿色的线代表激发器展向位置发生平移之后的新算例。与之前的算例类似，（0,2）模态在控制区域被激发，但是出了控制区域后又迅速降低。这两个控制工况中的主模态能量在控制区域几乎完全相同，但是一出了控制区域，其能量则开始有了一定的分歧。从25%到45%弦长处，展向平移之后的控制算例

图 4.22　Evolution of mode energies with plasma actuators at different spanwise locations.

图 4.23　Comparison of modified mean flow profiles with plasma actuators at different spanwise locations.

中的主模态一直略高于没有展向位置平移的。然而这一差距并不大，并且无论激发起的位置在展向平移与否，其翼型中段的扰动能量总是低于无控制算例中的扰动能量。

在图4.22中已经看到不同展向位置的DBD激发器激发的（0,2）模态的能量几乎没有区别。除了（0,2）模态，剩下的对主模态影响最大的就是基本流修正模态，即（0,0）模态。图4.23对比了这两个算例中的横流平均流速度剖面。可以看到，在25%和30%弦长位置，这两个算例中的横流速度都被等离子体降低了，并且降低的幅度完全一样。在随后两个位置他们才出现了轻微的差别。之前提到过，主模态幅值在达到一定程度之后会对基本流修正模态产生一定的抑制作用，这轻微的差异主要是来源于其主模态能量的差异（图4.22）。至此，展向位置的位置引起的主模态能量差异可以被归结为被激发（0,2）模态的相位差，而不是（0,2）或（0,0）模态的幅值。

截止目前，人们已经清楚改变（0,0）模态[70]或者是激发（0,2）模态[116]可

图 4.24　Body force distribution of inverse plasma actuators in the X–Z plane.

以有效的降低主模态的能量。在这里用到的DBD激发器亚谐波激励控制方案中，（0,0）和（0,2）模态都被等离子体直接改变了，主模态的能量变化是在控制区域下游才出现的。所以到底是（0,0）还是（0,2）模态引起了主模态的降低还并不是十分清楚。为了解决这一问题，笔者设计了一个反向控制工况，用来说明这个问题。在这个反向控制工况内，等离子体激发器被旋转了180°。这样体积力就指向了相反的方向。在计算总，体积力是以源项的形式出现。在分析不同模态的演化过程的时候，这一源项先被傅里叶分解成若干不同展向波长的波，然后这些波再作用于不同的模态上。显然，当激发器的周期只有主模态展向周期的一半的时候，体积力源项对应主模态展向波数的傅里叶分量为零，也就是体积力并不直接作用在主模态上。这从之前的计算结果中也反映了出来。亚谐波激励形式的体积力会直接作用在（0,0），（0,2），（0,4）等模态上。其中（0,0）和（0,2）对主模态影响最大。这里将体积力反向，对于展向均匀的（0,0）模态上的体积力分量，其刚好被反号了，也就是作用相反。而对于（0,2），体积力源项在其上的分量是正弦波形式的，反号也就相当于进行了相位平移，也就是展向位置平移。之前已经证实过展向位置对主模态的演化影响甚微（图4.22）。所以综上，反向控制中仅仅对（0,0）模态产生了刚好相反的效果，其余模态几乎不受影响。如果控制依然有效，说明（0,0）模态并不是控制有效的主要因素。反之，则说明是。

反向控制算例的体积力在X–Z平面的分布如图4.24所示。不同模态能量在流向的演化如图4.25所示。可以看到，采用了反向控制之后，主模态能量大幅提升。如之前分析的，这表示（0,0）模态在本文提出的亚谐波激励的控制方案中是其主

图 4.25　Evolution of mode energy in reversed control cases (with actuators at two different locations).

图 4.26　Mean crossflow profile in the reversed control case.

导作用的。这里，为了更好的摆脱（0,2）模态影响，同时测试了相同展向位置的反向控制和展向平移四分之一波长的反向控制。之前提到了，由于体积力作用在（0,2）模态上的分量也是正弦波形式，所以反向相当于移动了半个相位。这里在将半个相位移回来，就完全与之前相同。另外，也可以看到，在这增加扰动能量的两个算例里，激发器展向位置可以轻微的影响模态能量，但是依然无法扭转扰动能量增加这一情况。

Figure 4.26 shows the mean crossflow velocity profiles at different streamwise locations in the reverse control case. It is obvious that the crossflow is enhanced at 25% chord length, just downstream of the control region. Thereafter, the crossflow falls back and finally returns to the same level as that in the case without control. From this result, it can be concluded that the crossflow velocity has a significant effect on crossflow instability. When the crossflow is weakened by the actuator, the instability is attenuated. Otherwise,

图 4.27　Evolution of mode energy in cases targeted at the 7.5 mm wavelength mode.

the instability is intensified.

4.2.3　Off-designed case

All the simulations shown above assume that the mode with 5 mm spanwise wavelength dominates the transition, and the 2.5 mm mode, happens to be the $(0, 2)$ mode with respect to the 5 mm fundamental wavelength. Here, another situation is considered in which the 7.5 mm mode becomes dominant but the distance between two neighboring actuators is still 2.5 mm. Thus, the control mode is the $(0, 3)$ mode. Plasma actuators are positioned at three different streamwise locations, and the evolution of the mode energy is shown in figure 4.27. The green, red, and orange curves stand for the cases controlled at 15%, 20%, and 25% chord length, respectively. The small peak in the energy of the $(0, 3)$ mode, that is, the control mode, becomes stronger and stronger when the actuators are moved downstream. Fortunately, all the modes in all the controlled cases are weaker than those in the uncontrolled case downstream of 30% chord length. This result proves that the presented control method performs well even in an un-designed case.

第5章　等离子体激发器控制充分发展槽道湍流

本文进行控制的基本算例选取为壁面摩擦尺度雷诺数$\mathrm{Re}_\tau = 180(\mathrm{Re}_m = 5600)$的湍流槽道。计算程序采用的是王志坚课题组的hpMusic[112–114]，时间步长dt=0.00015，用三阶的显式Eular进行时间推进；空间采用4阶精度计算，单元内采用高斯点，每个单元内有$5 \times 5 \times 5$个点，三个方向总的自由度数分别为$235 \times 155 \times 200$。在后处理的时候，对单元界面上空间位置相同的点进行了平均。平均处理之后用于显示的网格点数与Kim（1987）[117]文献中的网格相近。计算域大小为$4\pi \times 2 \times 2\pi$。$\gamma$=1.4，气体常数为1.0，普朗特常数$\mathrm{Pr} = 0.72$，粘性系数$\mu = 3.57 \times 10^{-4}$， Ma=0.1。计算时在流场内添加全场均匀的体积力，使得槽道内的质量平均流速在稳定在1.0；计算的初始条件为抛物线形速度刨面，流速峰值$u_{\max} = 1.327$。为了加快转捩，在这个流场上叠加上10个不同流向展向波数的扰动波。初始的密度$\rho = 1.0$；压力$p = 31.74603174603175$；这两个量在计算的时候基本上不会变化。计算得到的近壁涡结构和条带结构如图5.1和5.2。其中用于展示涡结构的Q值等值面取了与文献中相同的值（Q=0.5）。涡结构上的颜色采用高度进行渲染。从图中可以清楚的看到近壁区的流向条带，以及这些条带经过发展，抬高之后形成的发卡涡。图5.2中的流向脉动速度云图取自$y^+ = 5$。可以看到本文计算得到的近壁结构基本与文献中的类似。

(a) 本文计算结果　　(b) Liang Wei 和 Andrew Pollard (2011)[118]

图 5.1　计算得到涡结构对比

(a) 本文计算结果　　(b) Liang Wei 和 Andrew Pollard (2011)[118]

图 5.2　计算得到条带结构对比

计算得到的对数律分布如图5.3。其为采用190万瞬时结果进行时间平均和空间平均（流向和展向）之后的结果。其中线性区对比的理论公式为：

$$U^+ = y^+ \tag{5-1}$$

对数区对比的理论公式为：

$$U^+ = 2.5\ln y^+ + 5.5 \tag{5-2}$$

可以看到，在$y^+ < 5$的区域，平均流速分布基本上完全符合线性关系，在$20 < y^+ < 110$的区间，平均速度与对数律完美吻合。另外在图中同时画出了上壁面和下壁面的平均流速分布，y在这里均表示测量点到壁面的距离。上下壁面的速度分布分别用红线和黑线表示。可以看到，图中红线完全将黑线覆盖。

图 5.3　计算结果与对数律对比

计算得到的二阶统计量与文献对比如图5.4。这四张图依次是流向、法向、展向脉动速度均方根，以及雷诺切应力$< uv >^+$。这些量均采用壁面摩擦尺度进行无量纲化。其中红线均来自本文的计算结果，绿线为文献[117]中给出的结果。可以看到两条线基本上完全重合，这表明本文的计算精度是满足要求的。

(a) u^+_{rms}　　(b) v^+_{rms}

(c) w^+_{rms}　　(d) $< uv >^+$

图 5.4　计算得到的二阶统计量与文献中的结果对比

前人的研究[119]指出，壁湍流的产生来自近壁拟序结构的自维持机制。也就是流向涡通过上抛和下扫产生高速和低速条带，然后高速和低速条带又由于失稳机制再次破碎产生新的流向涡。虽然从瞬时涡结构中也能观察到近壁的流向涡，但是其分布过于杂乱无章，不便于分析。这里采用一种条件平均技术对结果进行后处理。首先对每一个瞬时结果在$y^+ = 20$的平面上进行涡探测。之所以选择$y^+ = 20$是因为流向涡量均方极大值位于这个高度[120]，所以也被普遍认为是流向涡涡心所处在的高度。探测时采用$Q = 1$作为涡的识别标准。探测到涡之后，选取涡内Q的最大值作为涡心。之后将所有探测得到的涡的涡心的位置置为$z = 0$，

图 5.5　$y^+ = 20$条件平均

然后对涡心附近的流场进行平均，得到图5.5。这里只平均了涡心处流向涡量为正的涡。负涡量的涡与之对称，这里不再展示。图中最中心的粗黑线是Q的等值线，最外面一圈是$Q = 1$也就是本文用来判断涡的准则。图上平均之后Q的最大值为3.87。图中的细线是横截面内的流线，可以看到Q判据在这里非常准确的预测了这个流向涡。图中的颜色云图是流向速度脉动。这里颜色的显示为-0.1到+0.1。可以看到图中左侧的高速条带和右侧的低速条带关于涡并不对称。低速条带中心大致位于$y^+ = 20, z^+ = -15$位置处，高速条带中心大致位于$y^+ = 10, z^+ = +15$位置处。脉动速度在正负值上的分布也不是对称的，最小值为-0.13，最大值为0.10。在之后的控制中，本文也会用类似的条件平均方法，分析其控制机理。

5.1　定常激励控制方案

这一小节主要介绍采用定常激励的DBD激发器降低湍流槽道阻力的控制方案和相关计算结果。首先，这里简要介绍一下控制方案的灵感来源。在2016年，Canton等人[121]提出了一种用大涡形状分布的体积力进行减阻的方案，图5.6为其体积力分布示意图。其中箭头表示力的方向。这种形状的体积力在槽道内的分布可以完全用解析式表达：

$$F_y(y,z) = A\beta\cos(\beta z)(1+\cos(\pi y/h)) \tag{5-3a}$$

$$F_z(y,z) = A\pi/h\sin(\beta z)\sin(\pi y/h) \tag{5-3b}$$

其中F_y, F_z分别表示体积力法向和展向的分量，A是添加体积力的强度系数，β是展向波数，h是半槽宽，在本文的计算中就是1。在他们的工作中，最初研究的并不是采用体积力，而是采用通过数值的手段在进行数值模拟的过程中强制在槽道内固定一个大涡。他们的结果显示，无论是体积力产生的还是强制数值方法产生的，只要槽道内有大涡，并且参数满足一定条件，就能够减阻。

图 5.6　Canton等人[121]采用的减阻控制的体积力

图 5.7　Canton等人[121]给出的涡强度与减阻率的关系

他们还对这种减阻控制方式进行了参数研究。他们的结果表明，最终所产生的二次涡的强度要在一定的范围内才能有效减阻。除此之外，涡的展向波长也是决定减阻率的关键参数。本文也复现了他们文章中提到的一个减阻算例，其参数设定为$\beta = 1, A = 5 \times 10^4$。在后文中将这一算例命名为“Vortex Force”。除了这个算例，作者还计算了其十倍强度的大涡状体积力控制算例。但是涡变强后阻力反而增加了14%，这里就不再展示。

虽然这种大涡状的体积力可以减阻，但是并不现实，因为实际中并不能产生这种形状的体积力。所以本文接下来重点研究采用DBD是否可以产生相同效果。这里依然选用Maden等人2013年提出来的模型，与之前研究后掠翼转捩推迟中用

表 5.1　DBD激发器体积力模型参数选择

a_0	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2	c_{force}
2	0.1	0.05	9	0.07	0.002	10^4或2.5×10^3

表 5.2　不同算例产生的涡强度

算例名称	$\max(V)/U_b$
Plasma(Strong)	0.19
Plasma(Weak)	0.05
Vortex Force	0.06

到的模型相同。之所以不用更实际一点的模型主要是因为槽道本身就是一个理论模型算例，其长度速度等都是无量纲量，一般也不会用专门的实际工况去与之对应。所以这里还是选用了可以调整参数的近似体积力分布模型，做理论方面的研究。本文中采用的DBD生成的体积力分布如图5.8所示。其中红色表述展向正方向的体积力，也就是向右侧的，蓝色表示展向负方向的体积力，也就是向左侧的。这里仅展示分布的形状，具体的强度在不同的计算工况中不一样。模型用到的参数列在表5.1中。

图 5.8　定常激励采用的DBD体积力示意图

可以看到，图5.8中仅仅用到了两个激发器。这是因为笔者希望用于控制的结构尽可能的简单。只在下壁面布置是因为将来希望将这种控制方法推广到湍流边界层中，所以这里只关注下壁面的阻力。之后提到的阻力也都只是流体作用在下壁面的阻力。

由于最开始并不知道体积力诱导的涡强度与真实涡强度的关系，所以做了很多参数的实验。最终发现确实过大的体积力反而会起到增阻的的作用，和前人研究的用大涡状的体积力进行控制的规律相同。这里仅展示一个增阻的算例和一个减阻的算例，在后文中把他们分别记做算例Plasma（Strong）和算例Plasam（Weak）（分别对应表5.1中$c_{\text{force}} = 10^4$和2.5×10^3）。他们的产生的涡强度如表5.2。这里袭承了Canton[121]等人的做法，采用$\max(V)/U_b$作为产生的涡的强度。在这里也可以用其他衡量涡强度的方法，比如半个展向周期内横截面上的涡量积分。然而实际稍加推导，就可以发现其实差别不大。例如若采用半个横截面上的流向涡量积分作为涡强度的判据，稍微应用一下高斯－奥斯特罗格拉德斯基公式，就可以将其转换为环绕这半个横截面的环线积分。由于壁面上速度为零，所以这个环线积分就变成了槽道中心线和周期边界上法向速度V的积分。实际计算发现不同算例这两个位置法向速度V的分布变化不大，所以采用其极值$\max(V)$作为涡强度大小的量度和采用半个展向周期内横截面上的涡量积分作为涡强度大小的量度没有太大区别。另外也是为了和文献中的结果进行对比，这里依然采用$\max(V)/U_b$来表征涡的强度。

(a) 法向平均速度　　(b) 展向平均速度与流线

图 5.9　定常DBD在无背景流动的槽道中诱导出来的流场

在没有背景流动的槽道中诱导出来的流场如图5.9。其中图5.9(a)是法向平均速度云图，图5.9(b)是展向平均速度云图。图5.9(b)中还画出了这个横截面内的流线。从法向速度的分布云图中，可以看到体积力诱发出来的向上的流动和向下的流动并不对称。其中向下的流动分布的范围并不广，只集中在槽道中间很小的一部分，而向上的流动则铺开在很大的范围内。另外，向下的最大流速比向上的最大流速大很多。正的最大法向速度大约0.01而负的是-0.03。可见这样布置的体积力分布会产生一个很强的将流体从上往下吸的力。展向高速流动主要集中在体积力作用区。从流线上可以发现，DBD产生的二次涡的涡心更加靠近壁面。

图 5.10　各个算例下壁面阻力对比

各个算例下壁面阻力对比如图5.10所示。其中绿线是无控制工况的。所有控制激励都是在无量纲时间到了620的时候打开的。之后红、蓝、灰分别是Plasma（Weak）、Plasma（Strong）和Vortex Force三个算例的结果。可以看到，在没有控制的时候下壁面总的摩阻为0.32，采用大涡形体积力将阻力降低到0.27左右，采用较弱的等离子激励将阻力降低到0.295左右。然而当体积力较强时，阻力反而升到了0.36。另外这三个工况阻力的波动幅值都没有明显的变化。这一现象将会结合流场内的涡结构图加以说明。

图5.11、5.12和5.13对比了三个定常激励算例的部分一二阶统计量。这里有前到后依次是平均流向速度U、平均法向速度V、平均展向速度W、雷诺切应力$< uv >$和雷诺主应力$< uu >$及$< vv >$。对于流向平均速度U，三个算例使用的是相同的云图颜色划分。如果没有控制，平均流向速度在展向应该是均匀的。所以在控制算例中流向平均速度在展向分布的不均匀性也正说明了这种大涡产生的高低速流体之间对流的强弱。Plasma（Strong）算例是涡强度最大的算例，可以看到其流向平均速度分布与另外两个最大的不同是，代表最大速度的红色区在槽道中间被分开了。这也正是说明由于大涡强烈的将近壁的低速流体卷起，甚至将一部分低速流体带到了槽道中心。而另外两个算例，槽道衷心的高速流动区域仅仅是被向另一侧挤压了些。另外在Plasma（Weak）算例中，槽道中部，也就是$z = \pi$位置处的高速流体连接没有被切断，反而是周期边界处的高速流体连接被阻隔了。这是因为等离子体仅仅在下壁面安装，而下壁面的上抛现象正好发生在周期边界位置处。

在图5.11右侧一列展示的平均流向速度里，不同的算例采用的是不同的显示值域范围。这是因为平均法向速度完全是外加的体积力诱导出来的，其强度反映

(a) Vortex Force: U

(b) Vortex Force: V

(c) Plasma(Strong): U

(d) Plasma(Strong): V

(e) Plasma(Weak): U

(f) Plasma(Weak): V

图 5.11　平均速度对比

了生成的二次涡的强度，受体积力强度的影响很大。为了能够让每一个算例都清楚的显示，这里都分别选择了它们各自合适的值域范围。可以看到，三个算例中在槽道中心$z = \pi$处都有一块高速向下的流动区域。不同的是，在算例Vortex Force和Plasma（Strong）中，这个区域呈蝴蝶形分布，而Plasm（Weak）中是椭圆形的。

图5.12左侧是平均展向速度，右侧是雷诺切应力。可以看到，由于DBD激发器仅仅加在下壁面，所以平均展向速度在下壁面附近有两处绝对值较大的集中分布区，而在上壁面附近则没有。这与Vortex Force算例中上下严格对称的分布情况形成了鲜明的对比。另外，从图中展示的流线，也可以看到，Plasma（Weak）中的涡显得方方正正的，而另外两个算例中的涡就有一点斜。这也很好地解释为什么这两个算例中的平均法向速度分布在槽道中部呈蝴蝶形。雷诺应力是湍流阻力的关键。可以看到三个算例中，贴近下壁面的高雷诺切应力区都被驱赶到周期边

(a) Vortex Force: W　　(b) Vortex Force: $< uv >$

(c) Plasma(Strong): W　　(d) Plasma(Strong): $< uv >$

(e) Plasma(Weak): W　　(f) Plasma(Weak): $< uv >$

图 5.12　平均展向速度与雷诺切应力

界附近。另外，在Plasma（Weak）算例中，上壁面附近的高雷诺切应力区并没有像其他两个算例一样被卷起带到槽道中间。特别要注意的是，在Plasma（Strong）算例中，在周期边界两侧，也就是$z = 1$和6位置附近，有两道狭长的高雷诺切应力区。并且这里的雷诺切应力是正的，而其上下都是负的。这两道狭长的区域在雷诺正应力$< uu >$中也有体现。这可以说明在那个位置的平均流场流向发生了很大的剪切，所以产生了非常强的雷诺应力。

之后将重点分析Plasma（Weak）算例的结果。该算例流场的涡结构如图5.14。这张图中，在空间分布的白色结构是$Q = 1$的等值线。底面的颜色云图为壁面摩阻，左侧面的颜色云图为瞬时流向速度，后端的颜色云图为流向涡量。可以看到，在流体被DBD吸下来区域，壁面由于受到流体的冲击，摩阻比较大。在流体被卷上去的区域，摩阻相对较小。但是涡结构和涡量还是主要集中在流体被卷上去的区域。在流体被吸下来的区域流动反而比较干净，没什么涡结构，也没什么涡量。

(a) Vortex Force: $< uu >$　(b) Vortex Force: $< vv >$

(c) Plasma(Strong): $< uu >$　(d) Plasma(Strong): $< vv >$

(e) Plasma(Weak): $< uu >$　(f) Plasma(Weak): $< vv >$

图 5.13　流向与法向雷诺正应力

另外，在上抛区的涡结构中，依然可以看到流向涡抬升并形成发卡涡的过程。由于无法展示动画，这里无法将这一过程充分展示出来。

图5.15给出了Plasma（Weak）算例的湍动能与湍动能生成项的分布。这里先重点看图5.15(b)给出的湍动能生成项分布。图中白色的粗黑线包围的区域内湍动能生成项均为负值。这表明，在DBD将流体吸到壁面附近这一过程中，流体不仅被加速，还产生了在层流化现象。这一现象使得槽道中部贴近壁面处湍动能极低。这同时非常好的印证了图5.14中流体下扫区涡结构较少这一观察。这里，可以将上壁面近似当成无控制的壁面进行对比观察。可以看到上壁面附近就有一层高湍动能区，几乎平平的铺在整个上壁面上。而下壁面的高湍动能区则集中在流体上扫区，并且极大值位置也略有提升。所以可见，该算例主要是通过二次涡产生的层流化效应降低湍流脉动，其次在上抛区抬高高湍动能区的位置，从而实现减阻。

图 5.14　Plasma(Weak)涡结构

(a) 湍动能　　(b) 湍动能生成项

图 5.15　Plasma（Weak）湍动能和湍动能生成项

5.2　周期激励控制方案

除了产生流向大涡可以降低湍流槽道的阻力外，迫使近壁流体做展向的周期振动也是一种非常有效的减阻方法。一般采用的激励方式有体积力和壁面振动。米兰理工（之后简称为POLIMI）在这一方面有很详细系统的研究[122–124]。他们不仅研究了展向均匀振动的效果，还研究了这种振动形式沿着展向或流向进行传播的控制效果。其中，他们研究的展向行波形式的激励可以用解析式表达为：

$$F_z = F_z(y,t) = A_f e^{-y/D} \cos(k_z z + \omega t) \tag{5-4}$$

图 5.16　米兰理工（POLIMI）体积力激励方案阻力变化

其中ω是圆频率，其激励周期为$T = 2\pi/\omega$。POLIMI研究了诸多不同参数的算例，后来发现当式（5-4）中的参数取$k_z = 0, A_f = 2, D = 0.04, T^+ = 52$的时候减阻率最高。本文先实际复现了POLIMI给出的最佳的减阻算例，并计算了一个激励周期为最佳控制周期两倍，其余参数一样的增阻算例进行比较（$T^+ = 104$）。这两个工况得到的阻力结果如图5.16所示。注意到这里控制的最佳周期与流向涡的生存寿命$T^+ \approx 50$[125]到60[126]大致相当，但是比整个壁湍流自维持机制的周期$T^+ \approx 400$[127]要小很多。图中显示，$T^+ = 52$算例中的壁面摩阻几乎没有脉动，并且阻力降低了近乎一半。这基本上表明产生的周期振荡成功抑制了湍流脉动。然而两倍周期，也就是 $T^+ = 104$ 的结果就不是很乐观。摩阻出现了同频率的大幅震荡。这表明用于激励的体积力和流动产生了共振。本文之后便不再讨 $T^+ = 104$ 的增阻算例，论重点分析 $T^+ = 52$ 的减阻算例，并将其记为算例POLIMI。

(a) U^+　　(b) W

图 5.17　$T^+ = 52$相平均

图5.17给出了POLIMI算例中流向速度和展向速度进行相平均的结果。由于DNS计算量过大，为了不浪费数据，每一个相位均指的是这一相位区间内所

有瞬时的平均结果。例如图例中给出的0.25π实际上是平均了$[0.25\pi, 0.5\pi]$区间内的所有结果。图5.17(a)是相位平均后的流向速度，采用壁面摩擦尺度进行无量纲化。可以看到，所有相位的结果完全重合。图中的黑线是无控制时的结果。可以看到在粘性底层流速有所降低。另外，控制后的流向速度剖面没有明显的符合对数律的区域。图5.17(b)展示的是展向速度相平均的结果。这里需要注意的是在0.75π和1.75π相位处，展向速度开始反向，其紧贴壁面的流动方向和更高处一些流体的流动方向不同。

图 5.18　POLIMI涡结构图

图5.18展示的是流动的涡结构。这里还是使用$Q = 0.5$作为涡判据，下壁面用摩阻分布进行颜色渲染，左侧壁面用瞬时流向速度进行渲染，后壁面用流向涡量进行渲染。通过观察流动发展的过程，发现壁面摩阻的分布不仅随着随着涡结构一起向前流动，同时还会受体积力影响在展向做左右的周期摆动。这两种运动的叠加导致壁面摩阻分布会以蛇形的方式向前走。然而，远离壁面的涡结构却并不怎么收到近壁体积力的影响，只是向前运动，并没有左右摆动。后端面显示的是流向涡量。由于体积力的引入，近壁会出现时正时负的高涡量层。除此之外，下半个槽道出现的涡量团比上半个要少很多。这也从侧面反映了激励成功的抑制了湍流脉动。

POLIMI算例的控制效果非常好，但是实际中无法产生这样的体积力，所以本文之后主要研究如何用DBD等离子体激发器产生相同的效果。这里还是采用Maden的[39]DBD模型。本文最初提出的激发器布置方案如图5.19所示。在前半个周期采用3个DBD激发器向右吹，在后半个周期采用3个激发器向左吹。由于一

(a) 正向激励时体积力分布

(b) 反向激励时体积力分布

图 5.19　6DBD算例激励示意图

共用到了6个激发器，这里将其简记为6DBD算例。这里激励的周期还是采用$T^+ = 52$，添加进去的体积力在全场积分的值与POLIMI算例相同，力在垂直壁面方向的分布也近似相同。然而，这个算例中阻力增大了将近三倍（如图5.22）。由于周期、力强度等参数都与POLIMI算例中相仿，最有可能导致阻力增加的原因就是展向的不均匀性。笔者为了对比6DBD形式的体积力和POLIMI形式的体积力分别会带来多大的扰动，做了一个层流计算。还是相同的算例，只是背景流动采用的是层流槽道的速度剖面。对这两个层流槽道添加两种不同形式的激励后，POLIMI的体积力在很长一段时间都不会导致流动从层流转变为湍流，而6DBD形式的体积力则会使得流动很快就变成了湍流。这表明在采用DBD控制的时候，无可避免的会引入额外的扰动，并进而引起阻力的增加。究其原因，产生这些扰动的罪魁祸首就是展向不均匀性。为了克服这一现象，本文又提出了采用16个DBD的控制方案。其前后半个周期的体积力分布分别如图5.20(a)和5.20(b)所示。这里先不去考虑实际中是否可以进行这样的布置，仅仅探讨加密布置能不能够削弱因展向不均匀性引入的额外扰动，并进而达到减阻的目的。图5.22的控制结果显示这么做是有效果的，下壁面阻力从0.32降低到了0.29。

(a) 正向激励时体积力分布

(b) 反向激励时体积力分布

图 5.20　16DBD算例激励示意图

图5.21和5.23分别给出了平均流向速度和二阶统计量的对比。可以看到，在POLIMI算例中，两个方向的雷诺正应力$< uu >$和$< vv >$在下半个槽道均大幅减小。尤其是$< vv >$，本来应该在下壁面出现的峰值都被抹平，仅仅是出现了一个平台。这表明下壁面附近的湍流被极大地抑制住了。由于展向速度的周期脉动也被统计到了雷诺应力里，所以在控制算例中的展向雷诺正应力分量要远高于无控制算例的，其中POLIMI算例中的展向雷诺正应力分量峰值达到了0.27，没有在图中画出。另外，雷诺切应力$< uv >$在POLIMI算例中也被极大地削弱了。从二阶量统计量的结果对比来看，16DBD算例像是一个弱化版的POLIMI算例。雷诺应力减小和增减的方向相同，只是变化的程度不及POLIMI算例。由于控制只加在了下壁面，导致下壁面阻力降低而上壁面阻力不变，流体更容易从槽道的下半部分通过，所以槽道下半部分的平均流速高于上半部分的（图5.21）

为了分析POLIMI算例和16DBD算例的减阻机理，本文分别对其进行了区分相位的条件平均（或者叫相条件平均）。在不同相位统计平均的流向涡数量与无控制工况下统计到的流向涡数量比值如图5.24所示。可以看到，在POLIMI算例中，探测到的流向涡数量大约只有无控制时的5%。这一统计结果表明POLIMI形

图 5.21　平均流向速度对比

图 5.22　周期激励各个算例控制效果

式的展向激励的确可以减弱湍流在近壁区的生成。而在16DBD算例中，大约探测到了原来74%的流向涡。很明显，等离子体激发器也限制了流向涡的生成，但是其效果相比于展向均匀激励要弱很多。这一结果也印证了之前图5.23中的观察与分析。

图5.26到5.29展示了POLIMI算例在16个不同的相位进行条件平均的结果。每张图的右侧是对应相位的平均展向速度。可以看到在第一个四分之一周期，近壁面的展向速度都是向右的。这里所探测到并拿来进行平均的涡都是涡量为正的，也就是涡量方向指向纸面里的。探测涡的平面还是取在$y^+ = 20$的位置。可以发现，体积力诱导产生的展向速度主要都在$y^+ = 20$一下，也就是在无控制的涡的涡核下方。很显然，涡量指向纸面里的涡在涡核下方的流动应该是向左的。也就是说，这时的体积力完全在阻碍这个方向的流向涡生成。图中依然是用粗的黑线表示Q的等值线，最外围的等值线为$Q = 1$。在$2/8\pi$和$3/8\pi$两个相位，探测到的涡完全不是一个完整的，涡核在$y^+ = 20$附近的流向涡。仅仅是涡核位于更高位置处的涡的一部分。在$2/8\pi$相位中，流向脉动速度的最大最小值，也就是高低速条带的极值分别为0.05和-0.048，仅为无控制时的大约一半。

从$3/8\pi$相位开始，在所探测到的涡（涡核在$y^+ = 20$）上方，逐渐开始形成一个高速条带区。显然我们所探测到的流向涡是无法在其上方形成一个高速条带的。一个比较合理的解释是这这时探测到的涡仅仅是高度更高的涡诱导出来的一个二次涡。这一观点可以在$4/8\pi$相位的时候得到更充分的验证。从Q图上看，在$y^+ = 35$位置还有一处Q的极大值，并且流线上也显示那里有一个涡量为负的涡。这个涡将上面的高速流体卷下来，从而形成了这个新的高速条带。之后，随着近壁的展向速度方向逐渐增大，$y^+ = 20$处的涡逐渐摆脱更高处涡的控制，渐渐将高速条带拽到自己右侧。在$8/8\pi$相位的时候，涡下部的展向流动方向与涡诱

(a) < *uu* >　　(b) < *vv* >

(c) < *ww* >　　(d) < *uv* >

图 5.23　二阶统计量对比

导出来的流动方向相同，于是又形成了高低速条带与流向涡分别位于右左中的格局。之后流向涡越来越强，逐渐将高速条带向自己的下方拖拽，将低速条带抬起。在13/8π相位的时候，低速条带中心的高度已经达到了接近$y^+ = 30$。最后随着展向速度的反向，流向涡开始减弱并逐渐被破坏，并进入下一个周期。

图5.30到5.33展示了16DBD控制算例在一个周期内的条件平均的结果。首先需要说明的是在这个算例中，体积力诱导出来的展向速度要比POLIMI算例弱很多。POLIMI中展向速度可以到0.7，而这个算例中只有0.2。实际的控制效果也表明随着展向速度的减弱，流向涡-条带的近壁结构并没有被完全破坏。在所有相位的条件平均中，均还是可以观察到这一结构。在第一个四分之一周期，体积力诱导出来的展向速度在涡核下方，与涡诱导出来的相反。这一阶段是体积力对流向涡抑制效应最强的阶段。这一阶段的典型代表——3/8π相位的结果中，Q的最

(a) POLIMI　　(b) 16DBD

图 5.24　不同相位探测到的涡个数

图 5.25　16DBD算例中Q最大值，u最大最小值与无控制时候的比值

大值为2.79，脉动速度最大最小值分别为0.075和-0.105，均比无控制算例中对应的3.87、0.10、-0.13要弱。之后展向速度逐渐反向。在反向过程中，还出现了底层流体与高层流体展向速度不同的情况（6/8π）。这时在流向涡下发还产生了一个偏平的流向涡。在第三个四分之一周期内，体积力诱导的展向速度已经与流向涡诱导的流向速度方向相同了，在11/8π相位展向速度达到最大值，在此之后，低速条带的范围迅速扩大。到了14/8π和15/8π相位，展向速度又出现了底层与高层流动方向不一致的情况，贴近壁面的二次涡再一次生成。

由于在16DBD算例中，流向涡-条带结构并没有像POLIMI算例中一样被大幅破坏掉，所以单从云图中并看不出所以然来。为了定量对比，图5.25给出了不同相位Q最大值、u最大最小值与无控制时候的比值。从图中首先可以看到的是，这三个量在整个周期内都比1小，也意味着流向涡-条带结构相比于无控制工况始终

是被抑制的。另外，高低速条带的变化趋势始终相反。也就是高速条带强的时候，低速调点弱，而低速条带强的时候高速条带若。相比较于涡的强度，条带的强度有一定的滞后效应。可以看到，在$12/8\pi$相位的时候Q已经达到了最大值，而高低速条带的极值分别在$13/8\pi$和$15/8\pi$相位处达到。总的来说，采用展向周期激励的DBD控制方案依然是通过抑制湍流的自维持机制，减弱湍流的产生，来达到减阻的目的。

5.3　本章小结

本章针对$Re_\tau = 180$的充分发展槽道湍流，提出了定常激励和周期激励两种采用DBD等离子体激发器的控制方案。这两种控制方案均能起到大约9%的减阻效果。

在定常激励控制方案中，两个向相反方向吹起的激发器在槽道中产生了与槽道大约同一尺度的流向涡。这个流向涡在槽道中部将流体快速的吸到壁面，然后又在计算的周期边界处，将流体向上抛回高速区。在向下吸的加速区，流动发生了再层流化，使得壁面附近整体的湍动能降低，从而降低的湍流摩阻。在这种控制方案中，产生的流向涡的强度至关重要，太强的流向涡反而会使得阻力增加。

在周期激励方案中，激发器阵列被用于产生时而向左时而向右的展向周期振动。从分相位的条件平均结果来看，由于体积力在激励的前半个周期内会在流向涡下部产生与涡诱导速度方向相反的展向速度，这使得流向涡的生成收到阻碍。采用展向均匀的体积力激励会比采用有展向分布的DBD产生的体积力效果好。在这一控制方案中，激发器的密度是一个关键参数。密集布置的激发器可以降低展向不均匀性，从而取得较好的控制效果，而过稀的激发器布置反而会增加阻力。

图 5.26　POLIMI控制方案在第一个四分之一周期内的条件平均结果（左：条件平均流向涡附件流场；右：相平均展向速度）

图 5.27　POLIMI控制方案在第二个四分之一周期内的条件平均结果（左：条件平均流向涡附件流场；右：相平均展向速度）

图 5.28　POLIMI控制方案在第三个四分之一周期内的条件平均结果（左：条件平均流向涡附件流场；右：相平均展向速度）

图 5.29　POLIMI控制方案在第四个四分之一周期内的条件平均结果（左：条件平均流向涡附件流场；右：相平均展向速度）

图 5.30　16DBD控制方案在第一个四分之一周期内的条件平均结果（左：条件平均流向涡附件流场；右：相平均展向速度）

图 5.31　16DBD控制方案在第二个四分之一周期内的条件平均结果（左：条件平均流向涡附件流场；右：相平均展向速度）

图 5.32　16DBD控制方案在第三个四分之一周期内的条件平均结果（左：条件平均流向涡附件流场；右：相平均展向速度）

图 5.33　16DBD控制方案在第四个四分之一周期内的条件平均结果（左：条件平均流向涡附件流场；右：相平均展向速度）

第6章　结论

参考文献

[1] Schrauf G. Status and perspectives of laminar flow[J]. Aeronautical Journal, 2005, 109(1102): 639–644.

[2] Joslin R D. Aircraft laminar flow control[J]. Annual review of fluid mechanics, 1998, 30(1): 1–29.

[3] 张谷令, 敖玲, 胡建芳, 等. 应用等离子体物理学[M]. [出版地不详]: 北京: 首都师范大学出版社, 2008.

[4] 聂万胜, 程钰锋, 车学科. 介质阻挡放电等离子体流动控制研究进展[J]. 力学进展, 2012, 42(6): 722–734.

[5] 吴云, 李应红. 等离子体流动控制研究进展与展望[J]. 航空学报, 2015, 36(2): 381–405.

[6] Corke T C, Enloe C L, Wilkinson S P. Dielectric barrier discharge plasma actuators for flow control[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 2010, 42(1): 505–529.

[7] 俞建阳. Dbd等离子体诱导涡结构控制附面层流动研究[博士学位论文]. [出版地不详: 出版者不详], 2017.

[8] Enloe C L, McLaughlin T E, Van Dyken R D, et al. Mechanisms and responses of a dielectric barrier plasma actuator: Geometric effects[J]. AIAA journal, 2004, 42(3): 595–604.

[9] Debien A, Benard N, Moreau E. Streamer inhibition for improving force and electric wind produced by dbd actuators[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2012, 45(21): 215201.

[10] Kriegseis J, Grundmann S, Tropea C. Power consumption, discharge capacitance and light emission as measures for thrust production of dielectric barrier discharge plasma actuators[J]. Journal of Applied Physics, 2011, 110(1): 013305.

[11] Hoskinson A, Hershkowitz N. Differences between dielectric barrier discharge plasma actuators with cylindrical and rectangular exposed electrodes[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2010, 43(6): 065205.

[12] Durscher R, Roy S. Force measurement techniques and preliminary results using aerogels and ferroelectrics for dielectric barrier discharge actuators[C]//42nd AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference in conjunction with the 18th International Conference on MHD Energy Conversion (ICMHD). [S.l.: s.n.], 2011: 3735.

[13] Thomas F O, Corke T C, Iqbal M, et al. Optimization of dielectric barrier discharge plasma actuators for active aerodynamic flow control[J]. AIAA journal, 2009, 47(9): 2169–2178.

[14] Jolibois J, Moreau E. Enhancement of the electromechanical performances of a single dielectric barrier discharge actuator[J]. IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation, 2009, 16(3): 758–767.

[15] Kotsonis M, Ghaemi S. Forcing mechanisms of dielectric barrier discharge plasma actuators at carrier frequency of 625 hz[J/OL]. Journal of Applied Physics, 2011, 110(11): 113301. https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.3664695.

[16] Kriegseis J, Schwarz C, Tropea C, et al. Velocity-information-based force-term estimation of dielectric-barrier discharge plasma actuators[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2013, 46(5): 055202.

[17] Moreau E. Airflow control by non-thermal plasma actuators[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2007, 40(3): 605–636.

[18] Benard N, Moreau E. Electrical and mechanical characteristics of surface ac dielectric barrier discharge plasma actuators applied to airflow control[J]. Experiments in Fluids, 2014, 55(11).

[19] Whalley R D, Choi K S. The starting vortex in quiescent air induced by dielectric-barrier-discharge plasma[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2012, 703: 192–203.

[20] Boeuf J P, Lagmich Y, Unfer T, et al. Electrohydrodynamic force in dielectric barrier discharge plasma actuators[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2007, 40(3): 652–662.

[21] Boeuf J P, Lagmich Y, Pitchford L C. Contribution of positive and negative ions to the electrohydrodynamic force in a dielectric barrier discharge plasma actuator operating in air[J]. Journal of Applied Physics, 2009, 106(2): 023115.

[22] Nishida H, Nonomura T, Abe T. Numerical study on spanwise nonuniformity in body-force field of dielectric-barrier-discharge plasma actuator[J]. AIAA Journal, 2016, 54(2): 659–669.

[23] Nishida H, Abe T. Numerical analysis of plasma evolution on dielectric barrier discharge plasma actuator[J]. Journal of Applied Physics, 2011, 110(1): 013302.

[24] Shyy W, Jayaraman B, Andersson A. Modeling of glow discharge-induced fluid dynamics[J]. Journal of Applied Physics, 2002, 92(11): 6434–6443.

[25] Li Z, Hu B, Lan S, et al. Control of turbulent channel flow using a plasma-based body force[J/OL]. Computers & Fluids, 2015, 119: 26–36. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793015002273https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793015002273?via%3Dihub.

[26] Rizzetta D P, Visbal M R. Numerical investigation of plasma-based control for low-reynolds-number airfoil flows[J/OL]. AIAA Journal, 2011, 49(2): 411–425. https://doi.org/10.2514/1.J050755.

[27] Orlov D M, Corke T C, Patel M. Electric circuit model for aerodynamic plasma actuator[J]. AIAA Paper, 2006, 1206: 2006.

[28] Corke T C, Post M L, Orlov D M. Single dielectric barrier discharge plasma enhanced aerodynamics: physics, modeling and applications[J]. Experiments in Fluids, 2008, 46(1): 1–26.

[29] Mertz B E, Corke T C. Single-dielectric barrier discharge plasma actuator modelling and validation[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2011, 669: 557–583.

[30] Suzen Y, Huang G, Jacob J, et al. Numerical simulations of plasma based flow control applications[C]//35th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit. [S.l.: s.n.], 2005: 4633.

[31] Suzen Y, Huang G, Ashpis D. Numerical simulations of flow separation control in low-pressure turbines using plasma actuators[C]//45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. [S.l.: s.n.], 2007: 937.

[32] Enloe C L, McLaughlin T, Font G I, et al. Parameterization of temporal structure in the single-dielectric-barrier aerodynamic plasma actuator[J]. AIAA journal, 2006, 44(6): 1127–1136.

[33] Ibrahim I, Skote M. Simulating plasma actuators in a channel flow configuration by utilizing the modified suzen–huang model[J]. Computers & Fluids, 2014, 99: 144–155.

[34] Debiasi M, Li J M. Experimental study of a dbd-plasma driven channel flow[C]//49th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition. [S.l.: s.n.], 2011: 954.

[35] Eltaweel A, Wang M, Kim D, et al. Numerical investigation of tandem-cylinder noise reduction using plasma-based flow control[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2014, 756: 422–451.

[36] Albrecht T, Weier T, Gerbeth G, et al. A method to estimate the planar, instantaneous body force distribution from velocity field measurements[J]. Physics of Fluids, 2011, 23(2): 021702.

[37] Wilke J B. Aerodynamische strömungssteuerung mittels dielektrischer barriereentladungs-plasmaaktuatoren[M]. [S.l.: s.n.], 2009.

[38] Dörr P, Kloker M. Numerical investigation of plasma-actuator force-term estimations from flow experiments[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2015, 48(39): 395203.

[39] Maden I, Maduta R, Kriegseis J, et al. Experimental and computational study of the flow induced by a plasma actuator[J]. International Journal of Heat and Fluid Flow, 2013, 41: 80–89.

[40] Benard N, Sujar-Garrido P, Bonnet J P, et al. Control of the coherent structure dynamics downstream of a backward facing step by dbd plasma actuator[J]. International Journal of Heat and Fluid Flow, 2016, 61: 158–173.

[41] Sujar-Garrido P, Benard N, Moreau E, et al. Dielectric barrier discharge plasma actuator to control turbulent flow downstream of a backward-facing step[J]. Experiments in Fluids, 2015, 56(4): 70.

[42] Benard N, Moreau E. On the vortex dynamic of airflow reattachment forced by a single non-thermal plasma discharge actuator[J]. Flow, Turbulence and Combustion, 2011, 87(1): 1–31.

[43] Benard N, III L N C, Moreau E, et al. On the benefits of hysteresis effects for closed-loop separation control using plasma actuation[J]. Physics of Fluids, 2011, 23(8): 083601.

[44] Benard N, Pons-Prats J, Periaux J, et al. Turbulent separated shear flow control by surface plasma actuator: experimental optimization by genetic algorithm approach[J/OL]. Experiments in Fluids, 2016, 57(2): 22. https://doi.org/10.1007/s00348-015-2107-3.

[45] Little J, Samimy M. High-lift airfoil separation with dielectric barrier discharge plasma actuation [J]. AIAA Journal, 2010, 48(12): 2884–2898.

[46] Schneck W C, O'Brien W F. Flow control over a circular cylinder using pulsed dielectric barrier discharge actuators[J]. Journal of Turbomachinery, 2014, 137(1): 011001.

[47] Jukes T N, Choi K S. Flow control around a circular cylinder using pulsed dielectric barrier discharge surface plasma[J]. Physics of Fluids, 2009, 21(8): 084103.

[48] Duchmann A, Simon B, Tropea C, et al. Dielectric barrier discharge plasma actuators for in-flight transition delay[J]. AIAA Journal, 2014, 52(2): 358–367.

[49] Grundmann S, Tropea C. Experimental transition delay using glow-discharge plasma actuators [J]. Experiments in Fluids, 2007, 42(4): 653–657.

[50] Grundmann S, Tropea C. Active cancellation of artificially introduced tollmien–schlichting waves using plasma actuators[J]. Experiments in Fluids, 2008, 44(5): 795–806.

[51] Kurz A, Simon B, Tropea C, et al. Active wave cancellation using plasma actuators in flight [C]//52nd AIAA Aerospace Sciences Meeting. [S.l.: s.n.], 2014: 1249.

[52] Kotsonis M, Giepman R, Hulshoff S, et al. Numerical study of the control of tollmien–schlichting waves using plasma actuators[J]. AIAA Journal, 2013, 51(10): 2353–2364.

[53] Hanson R E, Lavoie P, Naguib A M, et al. Transient growth instability cancelation by a plasma actuator array[J]. Experiments in Fluids, 2010, 49(6): 1339–1348.

[54] Hanson R E, Bade K M, Belson B A, et al. Feedback control of slowly-varying transient growth by an array of plasma actuators[J]. Physics of Fluids, 2014, 26(2): 024102.

[55] Jukes T, Choi K S, Johnson G, et al. Turbulent drag reduction by surface plasma through spanwise flow oscillation[M]. 2006.

[56] Mahfoze O, Laizet S. Skin-friction drag reduction in a channel flow with streamwise-aligned plasma actuators[J/OL]. International Journal of Heat and Fluid Flow, 2017, 66: 83–94. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142727X17300243https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142727X17300243?via%3Dihub.

[57] Im S, Do H, Cappelli M. The manipulation of an unstarting supersonic flow by plasma actuator [J/OL]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2012, 45(48): 485202. http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0022-3727/45/48/485202/pdf.

[58] Peschke P, Goekce S, Leyland P, et al. Experimental investigation of pulsed dielectric barrier discharge actuators in sub-and transonic flow[C]//44th AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference. [S.l.: s.n.], 2013: 2885.

[59] Huang J, Corke T C, Thomas F O. Unsteady plasma actuators for separation control of low-pressure turbine blades[J]. AIAA journal, 2006, 44(7): 1477–1487.

[60] Ness D V, Corke T C, Morris S C. Plasma actuator blade tip clearance flow control in a linear turbine cascade[J]. Journal of Propulsion and Power, 2012, 28(3): 504–516.

[61] Benard N, Bonnet J P, Touchard G, et al. Flow control by dielectric barrier discharge actuators: jet mixing enhancement[J]. AIAA Journal, 2008, 46(9): 2293–2305.

[62] He C, Corke T C, Patel M P. Plasma flaps and slats: an application of weakly ionized plasma actuators[J]. Journal of Aircraft, 2009, 46(3): 864–873.

[63] Wei Q, Niu Z, Chen B, et al. Bang-bang control applied in airfoil roll control with plasma actuators[J]. Journal of aircraft, 2013, 50(2): 670–677.

[64] Wang J J, Choi K S, Feng L H, et al. Recent developments in dbd plasma flow control[J/OL]. Progress in Aerospace Sciences, 2013, 62: 52–78. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0376042113000535https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0376042113000535?via%3Dihub.

[65] 吴云, 李应红. 等离子体流动控制研究进展与展望[J]. 航空学报, 2015, 36(2): 381–405.

[66] Riherd M, Roy S. Damping tollmien–schlichting waves in a boundary layer using plasma actuators[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2013, 46(48): 485203.

[67] Riherd M, Roy S. Stabilization of boundary layer streaks by plasma actuators[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2014, 47(12): 125203.

[68] Simon B, Markus D, Tropea C, et al. Cancellation of tollmien–schlichting waves in direct vicinity of a plasma actuator[J/OL]. AIAA Journal, 2018: 1–10. https://doi.org/10.2514/1.J056265.

[69] Schuele C Y, Corke T C, Matlis E. Control of stationary cross-flow modes in a mach 3.5 boundary layer using patterned passive and active roughness[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2013, 718: 5–38.

[70] Dörr P C, Kloker M J. Transition control in a three-dimensional boundary layer by direct attenuation of nonlinear crossflow vortices using plasma actuators[J]. International Journal of Heat and Fluid Flow, 2016, 61: 449–465.

[71] Choi K S, Jukes T, Whalley R. Turbulent boundary-layer control with plasma actuators[J/OL]. Philos Trans A Math Phys Eng Sci, 2011, 369(1940): 1443–58. http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/21382824.

[72] Whalley R D, Choi K S. Turbulent boundary-layer control with plasma spanwise travelling waves[J]. Experiments in Fluids, 2014, 55(8).

[73] Morkovin M V. On the many faces of transition[M]//Viscous drag reduction. [S.l.]: Springer, 1969: 1–31

[74] Papanastasiou T, Georgiou G, Alexandrou A N. Viscous fluid flow[M]. [S.l.]: CRC Press, 1999

[75] Jacobs R, Durbin P. Simulations of bypass transition[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2001, 428: 185–212.

[76] Malkiel E, Mayle R. Transition in a separation bubble[C]//ASME 1995 International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exposition. [S.l.]: American Society of Mechanical Engineers, 1995: V001T01A003–V001T01A003.

[77] Walker G. The role of laminar-turbulent transition in gas turbine engines: a discussion[C]//ASME 1992 International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exposition. [S.l.]: American Society of Mechanical Engineers, 1992: V001T01A108–V001T01A108.

[78] Bradshaw P. Turbulence: the chief outstanding difficulty of our subject[J]. Experiments in fluids, 1994, 16(3-4): 203–216.

[79] Reshotko E. Environment and receptivity[J]. AGARD Rep, 1984, 709.

[80] Schlichting H. Boundary layer theory[M]. [S.l.]: McGraw-Hill, 1979

[81] Gray W. The nature of the boundary layer flow at the nose of a swept wing[J]. Roy. Aircraft Est. TM, 1952, 256.

[82] Arnal D, Casalis G. Laminar-turbulent transition prediction in three-dimensional flows[J/OL]. Progress in Aerospace Sciences, 2000, 36(2): 173–191. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0376042100000026.

[83] Deyhle H, Bippes H. Disturbance growth in an unstable three-dimensional boundary layer and its dependence on environmental conditions[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1996, 316: 73–113.

[84] Malik M, Li F, Chang C L. Crossflow disturbances in three-dimensional boundary layers: nonlinear development, wave interaction and secondary instability[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1994, 268: 1–36.

[85] Bippes H, Müller B, Wagner M. Measurements and stability calculations of the disturbance growth in an unstable three-dimensional boundary layer[J/OL]. Physics of Fluids A: Fluid Dynamics (1989-1993), 1991, 3(10): 2371–2377. http://scitation.aip.org/docserver/fulltext/aip/journal/pofa/3/10/1.858176.pdf?expires=1466770305&id=id&accname=2110148&checksum=3A96BAB95D4B3390F9BD53ECA3E2E7C6.

[86] Malik M R, Li F, Choudhari M M, et al. Secondary instability of crossflow vortices and swept-wing boundary-layer transition[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1999, 399: 85–115.

[87] Reibert M S. Nonlinear stability, saturation, and transition in crossflow-dominated boundary layers[D]. [S.l.]: Arizona State University, 1996.

[88] Haynes T S, Reed H L. Simulation of swept-wing vortices using nonlinear parabolized stability equations[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2000, 405: 325–349.

[89] Li F, Choudhari M M, Duan L, et al. Nonlinear development and secondary instability of traveling crossflow vortices[J]. Physics of Fluids, 2014, 26(6): 064104.

[90] Li F, Malik M R. On the nature of PSE approximation[J]. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 1996, 8(4): 253–273.

[91] Bottaro A, Corbett P, Luchini P. The effect of base flow variation on flow stability[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2003, 476.

[92] Marquet O, Sipp D, Jacquin L. Sensitivity analysis and passive control of cylinder flow[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2008, 615: 221.

[93] Alizard F, Robinet J C, Rist U. Sensitivity analysis of a streamwise corner flow[J]. Physics of Fluids, 2010, 22(1): 014103.

[94] Brandt L, Sipp D, Pralits J O, et al. Effect of base-flow variation in noise amplifiers: the flat-plate boundary layer[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2011, 687: 503–528.

[95] Meliga P, Pujals G, Serre E. Sensitivity of 2-d turbulent flow past a d-shaped cylinder using global stability[J]. Physics of Fluids, 2012, 24(6): 061701.

[96] Browne O M F, Rubio G, Ferrer E, et al. Sensitivity analysis to unsteady perturbations of complex flows: a discrete approach[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2014, 76(12): 1088–1110.

[97] Alizard F, Robinet J C, Filliard G. Sensitivity analysis of optimal transient growth for turbulent boundary layers[J]. European Journal of Mechanics - B/Fluids, 2015, 49: 373–386.

[98] Pralits J O, Airiau C, Hanifi A, et al. Sensitivity analysis using adjoint parabolized stability equations for compressible flows[J]. Flow, Turbulence and Combustion, 2000, 65(3-4): 321–346.

[99] Lin R S, Malik M R. On the stability of attachment-line boundary layers. part 1. the incompressible swept hiemenz flow[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1996, 311.

[100] GuÈGan A, Schmid P J, Huerre P. Optimal energy growth and optimal control in swept hiemenz flow[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2006, 566: 11.

[101] Joslin R D, Streett C L, Chang C L. Validation of three-dimensional incompressible spatial direct numerical simulation code: a comparison with linear stability and parabolic stability equation theories for boundary-layer transition on a flat plate[R]. [S.l.: s.n.], 1992.

[102] Li F, Choudhari M, Carpenter M, et al. Control of crossflow transition at high reynolds numbers using discrete roughness elements[J]. AIAA Journal, 2015: 1–14.

[103] Xu G, Xiao Z, Fu S. Analysis of the secondary instability of the incompressible flows over a swept wing[J]. Science China Physics, Mechanics and Astronomy, 2011, 54(4): 724–736.

[104] Xu G, Xiao Z, Fu S. Secondary instability control of compressible flow by suction for a swept wing[J]. Science China Physics, Mechanics and Astronomy, 2011, 54(11): 2040–2052.

[105] Ren J, Fu S. Competition of the multiple görtler modes in hypersonic boundary layer flows[J]. Science China Physics, Mechanics and Astronomy, 2014, 57(6): 1178–1193.

[106] Ren J, Fu S. Floquet analysis of fundamental, subharmonic and detuned secondary instabilities of görtler vortices[J]. Science China Physics, Mechanics and Astronomy, 2014, 57(3): 555–561.

[107] Ren J, Fu S. Study of the discrete spectrum in a mach 4.5 görtler flow[J]. Flow, Turbulence and Combustion, 2014, 94(2): 339–357.

[108] Ren J, Fu S. Secondary instabilities of görtler vortices in high-speed boundary layer flows[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2015, 781: 388–421.

[109] Ren J, Fu S, Hanifi A. Stabilization of the hypersonic boundary layer by finite-amplitude streaks [J]. Physics of Fluids, 2016, 28(2): 024110.

[110] Dörr P, Kloker M. Stabilisation of a three-dimensional boundary layer by base-flow manipulation using plasma actuators[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2015, 48(28): 285205.

[111] Dagenhart J, Saric W S. Crossflow stability and transition experiments in swept-wing flow[R]. [S.l.: s.n.], 1999.

[112] Wang Z J, Gao H. A unifying lifting collocation penalty formulation including the discontinuous galerkin, spectral volume/difference methods for conservation laws on mixed grids[J]. Journal of Computational Physics, 2009, 228(21): 8161–8186.

[113] Zhu H, Fu S, Shi L, et al. Implicit large-eddy simulation for the high-order flux reconstruction method[J/OL]. AIAA Journal, 2016, 54(9): 2721–2733. https://doi.org/10.2514/1.J054826.

[114] Zhu H, Fu S. Forward-facing steps induced transition in a subsonic boundary layer[J/OL]. Science China Physics, Mechanics & Astronomy, 2017, 60(10): 104712. https://doi.org/10.1007/s11433-017-9069-3.

[115] Saric W S, Carpenter A L, Reed H L. Passive control of transition in three-dimensional boundary layers, with emphasis on discrete roughness elements[J/OL]. Philosophical Transactions of the Royal Society, Section A, 2011, 369(1940): 1352–64. http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/21382818.

[116] Saric W, Carrillo R, Jr, Reibert M. Leading-edge roughness as a transition control mechanism [C]//36th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. [S.l.: s.n.], 1998: 781.

[117] Kim J, Moin P, Moser R. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low reynolds number[J]. Journal of fluid mechanics, 1987, 177: 133–166.

[118] Wei L, Pollard A. Direct numerical simulation of compressible turbulent channel flows using the discontinuous galerkin method[J]. Computers & Fluids, 2011, 47(1): 85–100.

[119] Hamilton J M, Kim J, Waleffe F. Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1995, 287: 317–348.

[120] Jeong J, Hussain F, Schoppa W, et al. Coherent structures near the wall in a turbulent channel flow[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1997, 332: 185–214.

[121] Canton J, Örlü R, Chin C, et al. On large-scale friction control in turbulent wall flow in low reynolds number channels[J]. Flow, Turbulence and Combustion, 2016, 97(3): 811–827.

[122] Gatti D, Quadrio M. Reynolds-number dependence of turbulent skin-friction drag reduction induced by spanwise forcing[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2016, 802: 553–582.

[123] Gatti D, Quadrio M. Performance losses of drag-reducing spanwise forcing at moderate values of the reynolds number[J]. Physics of Fluids, 2013, 25(12): 125109.

[124] Quadrio M, Ricco P, Viotti C. Streamwise-travelling waves of spanwise wall velocity for turbulent drag reduction[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2009, 627: 161.

[125] Jiménez J, Pinelli A. The autonomous cycle of near-wall turbulence[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1999, 389: 335–359.

[126] Del Álamo J C, Jiménez J, Zandonade P, et al. Self-similar vortex clusters in the turbulent logarithmic region[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2006, 561: 329–358.

[127] Jiménez J, Kawahara G, Simens M P, et al. Characterization of near-wall turbulence in terms of equilibrium and “bursting” solutions[J/OL]. Physics of Fluids, 2005, 17(1): 015105. https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.1825451.

[128] 薛瑞尼. ThuThesis: 清华大学学位论文模板[EB/OL]. 2017. https://github.com/xueruini/thuthesis.

致 谢

衷心感谢导师符松教授和课题组内王亮助理研究员对本人的精心指导。他们的言传身教将使我终生受益。

同时衷心感谢徐国亮师兄，任杰师兄在流动稳定性方面的悉心指导，帮助我解决了不少问题。

感谢 LaTeX和 ThuThesis[128]，帮我节省了不少时间。

声　明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签　名：_____ 日　期：_____

附录 A　边界层方程数值求解方法

在对边界层方程进行谱方法离散的时候，需要先将$\eta \in [0, +\infty]$映射到$\zeta \in [-1, 1]$。本文采用的映射函数为：

$$\eta = \frac{a(1+\zeta)}{b-\zeta}, a = \frac{\eta_{\max}\eta_j}{\eta_{\max} - 2\eta_j}, b = 1 + \frac{2a}{\eta_{\max}} \tag{A-1}$$

这里j为法向网格点指标，计算中法向网格点分布采用：

$$\zeta_j = \cos(\frac{j\pi}{N}) \tag{A-2}$$

法向一共布置了N+1个网格点，其中$j = 0$为壁面上的网格点。针对这一网格分布，法方向的微分离散可以采用Chebyshev微分矩阵：

$$D_{j,k} = \begin{cases} \frac{c_j(-1)^{j+k}}{c_k(\zeta_j-\zeta_k)}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)_j & j \neq k \\ \frac{-\zeta_k}{2(1-\zeta_k^2)}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)_j & 1 \leq j = k \leq N-1 \\ \frac{2N^2+1}{6}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)_j & j = k = 0 \\ -\frac{2N^2+1}{6}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)_j & j = k = N \end{cases} \tag{A-3}$$

相应的，可以得到积分矩阵$I_{j,k}$，这里不再赘述，留给读者自行推导。借助边界层方程的抛物性，求解的时候可以从入口向下游推进。求解的时候流向指标小于当前求解位置流向指标，i,的物理量都是已经求得的。这里为了简洁，将要求的变量的流向指标略去，即$\Phi_{i,j} = \Phi_j$。其他位置的流向指标保留。采用如上所述的微分、积分矩阵，可以得到最终的离散形式为：

$$\Lambda_j - \Lambda_{j-1} + \sum I_{jk}\left[2\xi t_0 u_k + u_k\right] = \sum I_{jk}\left[2\xi \sum_{m=1}^{M} t_m u_{i-m,k} + u_k\right] \tag{A-4a}$$

$$2\xi u_j \sum_{m=1}^{M} t_m u_{i-m,j} + 2\xi t_0 u_j^2 + \Lambda_j \sum D_{jk} u_k - \sum\left(D_{jk}\hat{\mu}_k \sum D_{kl} u_l\right) + 2\tilde{\beta} T_j = 0 \tag{A-4b}$$

$$2\xi u_j \sum_{m=1}^{M} t_m w_{i-m,j} + 2\xi t_0 u_j w_j + \Lambda_j \sum D_{jk} w_k - \sum \left(D_{jk} \hat{\mu}_k \sum D_{kl} w_l \right) = 0 \qquad \text{(A-4c)}$$

$$\begin{aligned} &2\xi C_p u_j \sum_{m=1}^{M} t_m T_{i-m,j} + 2\xi C_p t_0 u_j T_j + \Lambda_j C_p \sum D_{jk} T_k - 2(\gamma-1) M^2 \tilde{\beta} T_j u_j - \\ &(\gamma-1) M^2 \hat{\mu}_j \left[\left(\sum D_{jk} u_k \right)^2 + \left(\sum D_{jk} w_k \right)^2 \right] - \frac{1}{\mathrm{Pr}} \sum \left(D_{jk} \hat{k}_k \sum D_{kl} T_l \right) = 0 \end{aligned} \qquad \text{(A-4d)}$$

其中t_m为后差离散用到的系数。粘性系数与导热系数由Surtherland公式给出：

$$\hat{\mu} = \frac{T^{3/2}(C+1)}{(C+T)T} \Rightarrow \frac{d\hat{\mu}}{dT} = \frac{T^{-1/2}(C+1)[C-T]}{2(C+T)^2} \qquad \text{(A-5a)}$$

$$\hat{k} = kT = \frac{T^{5/2}(C+1)}{(C+T)} \Rightarrow \frac{d\hat{k}}{dT} = \frac{T^{3/2}(C+1)[5C+3T]}{2(C+T)^2} \qquad \text{(A-5b)}$$

其中C为公式中系数。$\mathbf{J}_b$矩阵中，各项的表达式为：

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_b(4j-3,e) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j-3}}{\partial \Lambda_e} = \delta_{j,e} - \delta_{j-1,e} \\
\mathbf{J}_b(4j-2,e) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j-2}}{\partial \Lambda_e} = \delta_{j,e} \sum D_{jk} u_k \\
\mathbf{J}_b(4j-1,e) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j-1}}{\partial \Lambda_e} = \delta_{j,e} \sum D_{jk} w_k \\
\mathbf{J}_b(4j,e) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j}}{\partial \Lambda_e} = \delta_{j,e} c_p \sum D_{jk} T_k \\
\mathbf{J}_b(4j-3,e+N+1) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j-3}}{\partial u_e} = I_{je}[2\xi t_0 + 1] \\
\mathbf{J}_b(4j-2,e+N+1) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j-2}}{\partial u_e} = 2\xi \delta_{j,e} \sum_{m=1}^{M} t_m u_{i-m,j} + 4\xi t_0 u_j \delta_{j,e} + \Lambda_j D_{je} - \sum \left(D_{jk} \hat{\mu}_k D_{ke} \right) \\
\mathbf{J}_b(4j-1,e+N+1) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j-1}}{\partial u_e} = 2\xi \delta_{j,e} \sum_{m=0}^{M} t_m w_{i-m,j} \\
\mathbf{J}_b(4j,e+N+1) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j}}{\partial u_e} \\
&= 2\xi c_p \delta_{j,e} \sum_{m=0}^{M} t_m T_{i-m,j} - 2(\gamma-1) M^2 \tilde{\beta} T_j \delta_{j,e} - 2(\gamma-1) M^2 \hat{\mu}_j \left(\sum D_{jk} u_k \right) D_{je}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{J}_b(4j-3, e+2N+2) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j-3}}{\partial w_e} = 0 \\
\mathbf{J}_b(4j-2, e+2N+2) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j-2}}{\partial w_e} = 0 \\
\mathbf{J}_b(4j-2, e+2N+2) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j-2}}{\partial w_e} = 0 \\
\mathbf{J}_b(4j-1, e+2N+2) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j-1}}{\partial w_e} = 2\xi t_0 u_j \delta_{j,e} + \Lambda_j D_{je} - \sum \left(D_{jk}\hat{\mu}_k D_{ke}\right) \\
\mathbf{J}_b(4j, e+2N+2) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j}}{\partial w_e} = -2(\gamma-1)M^2\hat{\mu}_j \left(\sum D_{jk} w_k\right) D_{je} \\
\mathbf{J}_b(4j-3, e+3N+3) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j-3}}{\partial T_e} = 0 \\
\mathbf{J}_b(4j-2, e+3N+3) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j-2}}{\partial T_e} = -\left(D_{je}\frac{d\hat{\mu}_e}{dT_e}\sum D_{el} u_l\right) + 2\tilde{\beta}\delta_{j,e} \\
\mathbf{J}_b(4j-1, e+3N+3) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j-1}}{\partial T_e} = -\left(D_{je}\frac{d\hat{\mu}_e}{dT_e}\sum D_{el} w_l\right) \\
\mathbf{J}_b(4j, e+3N+3) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j}}{\partial T_e} \\
&= 2\xi c_p t_0 u_j \delta_{j,e} + \Lambda_j c_p D_{je} - 2(\gamma-1)M^2\tilde{\beta}\delta_{j,e} u_j \\
&\quad - (\gamma-1)M^2\frac{d\hat{\mu}_e}{dT_e}\delta_{j,e}\left[\left(\sum D_{jk} u_k\right)^2 + \left(\sum D_{jk} w_k\right)^2\right] \\
&\quad - \frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(D_{je}\frac{d\hat{k}_e}{dT_e}\sum D_{el} T_l\right) - \frac{1}{\mathrm{Pr}}\sum\left(D_{jk}\hat{k}_k D_{ke}\right)
\end{aligned}
$$

壁面边界条件：

$$
\begin{aligned}
&L_{dis}(\Phi)_1 = \Lambda_1; L_{dis}(\Phi)_2 = u_1; L_{dis}(\Phi)_3 = w_1; L_{dis}(\Phi)_4 = \sum D_{1k} T_k; \\
&\mathbf{J}_b(1, e) = \delta_{1,e}; \mathbf{J}_b(2, e) = \delta_{N+2,e}; \mathbf{J}_b(3, e) = \delta_{2N+3,e}; \\
&\mathbf{J}_b(4, e) = D_{1e}, e \in [3N+4, 4N+4]
\end{aligned}
$$

远场边界条件：

$$
\begin{aligned}
&L_{dis}(\Phi)_{4N+1} = \Lambda_{N+1} - \Lambda_N + \sum I_{N+1,k}\left[2\xi t_0 u_k + u_k\right] - \sum I_{4N+1,k}\left[2\xi\sum_{m=1}^{M} t_m u_{i-m,k} + u_k\right] \\
&L_{dis}(\Phi)_{4N+2} = u_{N+1} - u_e; L_{dis}(\Phi)_{4N+3} = w_{N+1} - w_e; L_{dis}(\Phi)_{4N+4} = T_{N+1} - T_e
\end{aligned}
$$

$\mathbf{J}_b(4N+1, e) = \delta_{N+1,e} - \delta_{N,e}; \mathbf{J}_b(4N+1, e+N+1) = I_{N+1,e}\,[2\xi t_0 + 1]$

$\mathbf{J}_b(4N+2, e+N+1) = \delta_{N+1,e};$

$\mathbf{J}_b(4N+3, e+2N+2) = \delta_{N+1,e}; \mathbf{J}_b(4N+4, e+3N+3) = \delta_{N+1,e};$

附录 B　扰动方程具体形式

方程2-19中各项系数的具体形式将在这里给出：

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ -\frac{\gamma-1}{\gamma}T & 0 & 0 & 0 & \rho - \frac{\gamma-1}{\gamma}\rho \end{bmatrix}$$

A矩阵的各个分矢量和各个分量的表达形式如下（其他矩阵的分向量和分量的表达形式类似，这里不再赘述。）：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_4 \\ \mathbf{A}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \mathbf{A}_{14} & \mathbf{A}_{15} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} & \mathbf{A}_{24} & \mathbf{A}_{25} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} & \mathbf{A}_{34} & \mathbf{A}_{35} \\ \mathbf{A}_{41} & \mathbf{A}_{42} & \mathbf{A}_{43} & \mathbf{A}_{44} & \mathbf{A}_{45} \\ \mathbf{A}_{51} & \mathbf{A}_{52} & \mathbf{A}_{53} & \mathbf{A}_{54} & \mathbf{A}_{55} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \frac{u}{h_1} & \frac{\rho}{h_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma \mathrm{Ma}^2}\frac{1}{h_1}T \\ \rho\frac{u}{h_1} - \frac{1}{h_1}\frac{4}{3}\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{h_1} \\ -\frac{1}{h_1}\frac{\mu}{\mathrm{Re}}\frac{4}{3}\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{1}{h_1}\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial T}{\partial y}\frac{1}{\mathrm{Re}} - \frac{\mu}{\mathrm{Re}}\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{1}{h_1} \\ 0 \\ -\frac{1}{h_1}\frac{d\mu}{dT}\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{4}{3}\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3}\frac{v}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{\gamma \mathrm{Ma}^2}\frac{1}{h_1}\rho \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{h_1}\frac{1}{\mathrm{Re}}\mu\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{2}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{1}{\mathrm{Re}}\mu\frac{1}{h_1} + \frac{2}{3}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial T}{\partial y}\frac{1}{h_1} - \frac{2}{3}\frac{\mu}{\mathrm{Re}}\frac{1}{h_1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \rho\frac{u}{h_1} - \frac{1}{h_1}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{1}{h_1} \\ 0 \\ -\frac{1}{h_1}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\mu}{dT}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{h_1}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right) \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \rho\frac{u}{h_1} - \frac{1}{h_1}\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{h_1} & -\frac{1}{h_1}\frac{d\mu}{dT}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{h_1}\frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{51} =& -\frac{\gamma-1}{\gamma}T\frac{u}{h_1} \\
\mathbf{A}_{52} =& 2\times\frac{2}{3}\frac{(\gamma-1)\,\mathrm{Ma}^2}{\mathrm{Re}}\mu\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{h_1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{1}{h_1}\frac{v}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right) \\
\mathbf{A}_{53} =& -2\frac{(\gamma-1)\,\mathrm{Ma}^2}{\mathrm{Re}}\mu\left(\frac{1}{h_1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{h_1}\frac{1}{h_1}u\frac{\partial h_1}{\partial y}\right) \\
\mathbf{A}_{54} =& -2\frac{(\gamma-1)\,\mathrm{Ma}^2}{\mathrm{Re}}\mu\frac{1}{h_1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial w}{\partial x} \\
\mathbf{A}_{55} =& \rho\frac{u}{h_1} - \frac{\gamma-1}{\gamma}\rho\frac{u}{h_1} - \frac{2}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\frac{1}{h_1}\frac{1}{h_1}\frac{d\kappa}{dT}\frac{\partial T}{\partial x}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} v & 0 & \rho & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho v - \frac{d\mu}{dT}\frac{\partial T}{\partial y}\frac{1}{\mathrm{Re}} - \frac{\mu}{\mathrm{Re}}\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \frac{2}{3}\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{h_1} \\ 0 \\ -\frac{1}{h_1}\frac{d\mu}{dT}\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(h_1\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - u\frac{\partial h_1}{\partial y}\right) \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} \frac{T}{\gamma \mathrm{Ma}^2} \\ -\frac{1}{h_1}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial T}{\partial x} \\ \rho v - \frac{2}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{1}{\mathrm{Re}}\mu - \frac{4}{3}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{2}{3}\frac{\mu}{\mathrm{Re}}\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} \\ 0 \\ \frac{\rho}{\gamma \mathrm{Ma}^2} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\mu}{dT}\left(\frac{2}{3}\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3}\frac{v}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right) \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \rho v - \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{1}{\mathrm{Re}}\mu - \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial T}{\partial y} & -\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{51} &= -\frac{\gamma-1}{\gamma}Tv \\
\mathbf{B}_{52} &= -2\frac{(\gamma-1)\,\mathrm{Ma}^2}{\mathrm{Re}}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{h_1}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{h_1}u\frac{\partial h_1}{\partial y}\right) \\
\mathbf{B}_{53} &= \frac{4}{3}\frac{(\gamma-1)\,\mathrm{Ma}^2}{\mathrm{Re}}\mu\left(-2\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right) \\
\mathbf{B}_{54} &= -2\frac{(\gamma-1)\,\mathrm{Ma}^2}{\mathrm{Re}}\mu\frac{\partial w}{\partial y} \\
\mathbf{B}_{55} &= \frac{1}{\gamma}\rho v - \frac{2}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\frac{d\kappa}{dT}\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\kappa
\end{aligned}$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} w & 0 & 0 & \rho & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho w \\ 0 \\ \frac{2}{3}\frac{1}{h_1}\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{1}{\mathrm{Re}} \\ -\frac{1}{h_1}\frac{d\mu}{dT}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \rho w & \frac{2}{3}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial T}{\partial y} & -\frac{d\mu}{dT}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$
\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix}
\frac{1}{\gamma \mathrm{Ma}^2} T \\
-\frac{1}{h_1}\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{1}{\mathrm{Re}} \\
\frac{2}{3}\mu\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{1}{\mathrm{Re}}\mu \\
\rho w \\
\frac{1}{\gamma \mathrm{Ma}^2}\rho - \frac{\partial \mu}{\partial T}\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{v}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial v}{\partial y}\right)
\end{bmatrix}^T
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C}_{51} &= -\frac{\gamma-1}{\gamma} T w \\
\mathbf{C}_{52} &= -2\frac{(\gamma-1)\,\mathrm{Ma}^2}{\mathrm{Re}}\mu\frac{1}{h_1}\frac{\partial w}{\partial x} \\
\mathbf{C}_{53} &= -2\frac{(\gamma-1)\,\mathrm{Ma}^2}{\mathrm{Re}}\mu\frac{\partial w}{\partial y} \\
\mathbf{C}_{54} &= \frac{4}{3}\frac{(\gamma-1)\,\mathrm{Ma}^2}{\mathrm{Re}}\mu\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
\mathbf{C}_{55} &= \frac{\rho w}{\gamma}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix}
\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{v}{h_1} & \frac{1}{h_1}\frac{\partial \rho}{\partial x} & \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{\rho}{h_1} & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix}
\frac{u}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{uv}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{1}{\gamma \mathrm{Ma}^2}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T}{\partial x} \\
\frac{\rho}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\rho v}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{1}{h_1}\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial T}{\partial y}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\mu}{\mathrm{Re}}\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right) \\
\rho\frac{\partial u}{\partial y} + \rho\frac{u}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{1}{h_1}\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{4}{3}\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right) \\
0 \\
\left\langle \begin{matrix}
-\frac{1}{h_1}\frac{d^2\mu}{dT^2}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{4}{3}\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3}\frac{v}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
-\frac{1}{h_1}\frac{d^2\mu}{dT^2}\frac{\partial T}{\partial y}\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(h_1\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - u\frac{\partial h_1}{\partial y}\right) \\
-\frac{d\mu}{dT}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{h_1}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right) \\
-\frac{1}{h_1}\frac{d\mu}{dT}\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(h_1\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) + \frac{1}{\gamma \mathrm{Ma}^2}\frac{1}{h_1}\frac{\partial \rho}{\partial x} \\
-\frac{1}{h_1}\frac{d\mu}{dT}\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{4}{3}\frac{1}{h_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)
\end{matrix} \right\rangle
\end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{D}_{31} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{h_1}\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{uu}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{1}{\gamma \mathrm{Ma}^2}\frac{\partial T}{\partial y}
$$

$$\mathbf{D}_{32} = \frac{\rho}{h_1}\frac{\partial v}{\partial x} - 2\rho\frac{u}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{1}{h_1}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}$$

$$\mathbf{D}_{33} = \rho\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{1}{\mathrm{Re}}\mu\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{2}{3}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{1}{\mathrm{Re}}\mu\frac{1}{h_1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{\partial h_1}{\partial y}$$

$$\mathbf{D}_{34} = 0$$

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{35} = &\frac{1}{\gamma \mathrm{Ma}^2}\frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{1}{h_1}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d^2\mu}{dT^2}\frac{\partial T}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{h_1}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right) - \frac{1}{h_1}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\mu}{dT}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{h_1}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)\\
&- \frac{2}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\mu}{dT}\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{v}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right) + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d^2\mu}{dT^2}\frac{\partial T}{\partial y}\left(\frac{2}{3}\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3}\frac{v}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\
&- \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\mu}{dT}\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{h_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{2}{3}\frac{1}{h_1}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{4}{3}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{2}{3}\frac{1}{h_1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3}\frac{1}{h_1}\frac{v}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

$$\mathbf{D}_4 = \begin{bmatrix} \frac{u}{h_1}\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} \\ \rho\frac{1}{h_1}\frac{\partial w}{\partial x} \\ \rho\frac{\partial w}{\partial y} \\ 0 \\ -\frac{1}{h_1}\frac{d^2\mu}{dT^2}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{h_1}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{h_1}\frac{d\mu}{dT}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{h_1}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial \mu}{\partial T}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d^2\mu}{dT^2}\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{51} = \frac{u}{h_1}\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{u}{h_1}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\gamma-1}{\gamma}v\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{52} = &\frac{\rho}{h_1}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\gamma-1}{\gamma}\left(\frac{1}{h_1}\rho\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{h_1}T\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\\
&+ 2\frac{(\gamma-1)\mathrm{Ma}^2}{\mathrm{Re}}\mu\left(-\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{1}{h_1}u\frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{1}{h_1}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

$$\mathbf{D}_{53} = \rho\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\gamma-1}{\gamma}\left(\rho\frac{\partial T}{\partial y} + T\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) - 2\frac{(\gamma-1)\mathrm{Ma}^2}{\mathrm{Re}}\mu\begin{pmatrix} +\frac{4}{3}\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{4}{3}\frac{1}{h_1}\frac{v}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{\partial h_1}{\partial y} \\ -\frac{2}{3}\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{54} = 0$$

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{55} = &-\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{u}{h_1}\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\gamma-1}{\gamma}v\frac{\partial \rho}{\partial y}\\
&- \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\frac{1}{h_1}\frac{1}{h_1}\frac{d^2\kappa}{dT^2}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\frac{1}{h_1}\frac{1}{h_1}\frac{d\kappa}{dT}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\frac{d^2\kappa}{dT^2}\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}\\
&- \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{d\kappa}{dT}\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\frac{d\kappa}{dT}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\end{aligned}$$

$$
-\frac{(\gamma-1)\,\mathrm{Ma}^2}{\mathrm{Re}}\frac{d\mu}{dT}\begin{bmatrix}
\frac{4}{3}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{v}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{v}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \\
+\frac{1}{h_1}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{1}{h_1}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{v}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
+\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{h_1}u\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{h_1}u\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)
\end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{H_{xx}}=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{4}{3}\frac{1}{h_1}\frac{1}{h_1}\frac{\mu}{\mathrm{Re}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{h_1}\frac{1}{h_1}\frac{\mu}{\mathrm{Re}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{h_1}\frac{1}{h_1}\frac{\mu}{\mathrm{Re}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\frac{1}{h_1}\frac{1}{h_1}\kappa
\end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{H_{xy}}=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{3}\frac{1}{h_1}\frac{\mu}{\mathrm{Re}} & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{3}\frac{\mu}{\mathrm{Re}}\frac{1}{h_1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{H_{xz}}=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\frac{1}{h_1}\frac{\mu}{\mathrm{Re}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{3}\mu\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{h_1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{H_{yy}}=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{\mu}{\mathrm{Re}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{4}{3}\frac{\mu}{\mathrm{Re}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{\mu}{\mathrm{Re}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}
\end{bmatrix}
$$

$$\mathbf{H_{yz}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\frac{\mu}{\mathrm{Re}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\frac{\mu}{\mathrm{Re}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H_{zz}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{\mathrm{Re}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{\mathrm{Re}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3}\frac{\mu}{\mathrm{Re}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_1 = -\left\langle \frac{1}{h_1}\tilde{\rho}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{1}{h_1}\tilde{u}\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} + \tilde{\rho}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y} + \tilde{\rho}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + \tilde{w}\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} + \frac{\tilde{\rho}\tilde{v}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_2 = & -\rho\left(\frac{\tilde{u}}{h_1}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \tilde{w}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{\tilde{u}\tilde{v}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right) - \tilde{\rho}\left(\begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{\tilde{u}}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{h_1}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\tilde{u}}{h_1}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v}\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \\ +w\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \tilde{w}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{\tilde{u}v}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{u\tilde{v}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\tilde{u}\tilde{v}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} \end{array}\right) \\
& -\frac{1}{\gamma \mathrm{Ma}^2}\frac{1}{h_1}\left(\tilde{\rho}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + \tilde{T}\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x}\right) \\
& +\frac{1}{h_1}\left(\begin{array}{l} \frac{d^2\mu}{dT^2}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\tilde{T}}{\mathrm{Re}}\left(\frac{4}{3}\frac{1}{h_1}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{4}{3}\frac{\tilde{v}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}\right) \\ +\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x}\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{4}{3}\frac{1}{h_1}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{4}{3}\frac{\tilde{v}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}\right) \\ +\frac{d\mu}{dT}\frac{\tilde{T}}{\mathrm{Re}}\left(\frac{4}{3}\frac{1}{h_1}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{4}{3}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial z}\right) \end{array}\right) \\
& +\frac{1}{h_1}\left[\begin{array}{l} \frac{d^2\mu}{dT^2}\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\tilde{T}}{\mathrm{Re}}\left(h_1\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \tilde{u}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right) + \frac{d\mu}{dT}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial y}\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(h_1\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \tilde{u}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right) \\ +\frac{d\mu}{dT}\frac{\tilde{T}}{\mathrm{Re}}\left(h_1\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial y}\right) \end{array}\right] \\
& +\frac{1}{h_1}\left[\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z}\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + h_1\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}\right) + \frac{d\mu}{dT}\frac{\tilde{T}}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial z} + h_1\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2}\right)\right] \\
& +\frac{d\mu}{dT}\frac{\tilde{T}}{\mathrm{Re}}\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{1}{h_1}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \frac{\tilde{u}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right) - \frac{1}{\gamma \mathrm{Ma}^2}\frac{1}{h_1}\left\langle \tilde{\rho}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + \tilde{T}\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x}\right\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{N}_3 = & -\rho\left(\frac{\tilde{u}}{h_1}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}+\tilde{v}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}+\tilde{w}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z}-\frac{\tilde{u}\tilde{u}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)-\tilde{\rho}\left(\begin{array}{l}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial t}+\frac{\tilde{u}}{h_1}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{u}{h_1}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}+\frac{\tilde{u}}{h_1}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}+\tilde{v}\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}+\tilde{v}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\\ +w\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z}+\tilde{w}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z}-2\frac{\tilde{u}u}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}-\frac{\tilde{u}\tilde{u}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\end{array}\right)\\
& -\frac{1}{\gamma\mathrm{Ma}^2}\left(\tilde{\rho}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial y}+\tilde{T}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial y}\right)\\
& +\frac{1}{h_1}\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\begin{array}{l}\frac{d^2\mu}{dT^2}\frac{\partial T}{\partial x}\tilde{T}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}+\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}-\frac{\tilde{u}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)+\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial x}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}+\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}-\frac{\tilde{u}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)\\ +\frac{d\mu}{dT}\tilde{T}\left(\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x\partial y}+\frac{1}{h_1}\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial x^2}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)\end{array}\right]\\
& +\frac{2}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{d\mu}{dT}\tilde{T}\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}-\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}-\frac{\tilde{v}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)\right]\\
& -\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d^2\mu}{dT^2}\frac{\partial T}{\partial y}\tilde{T}\left(\frac{2}{3}\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+\frac{2}{3}\frac{\tilde{v}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}-\frac{4}{3}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}+\frac{2}{3}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}\right)\\
& -\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial y}\left(\frac{2}{3}\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+\frac{2}{3}\frac{\tilde{v}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}-\frac{4}{3}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}+\frac{2}{3}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}\right)\\
& -\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\mu}{dT}\tilde{T}\left(\begin{array}{l}\frac{2}{3}\frac{1}{h_1}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x\partial y}+\frac{2}{3}\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\frac{\partial h_1}{\partial y}-\frac{4}{3}\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial y^2}+\frac{2}{3}\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial y\partial z}\\ -\frac{2}{3}\frac{1}{h_1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{1}{h_1}\frac{\tilde{v}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{\partial h_1}{\partial y}\end{array}\right)\\
& +\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial z}\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z}+\frac{\partial\tilde{w}}{\partial y}\right)+\frac{d\mu}{dT}\frac{\tilde{T}}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial y\partial z}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{N}_4 = & -\rho\left(\frac{\tilde{u}}{h_1}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x}+\tilde{v}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial y}+\tilde{w}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}\right)-\tilde{\rho}\left(\begin{array}{l}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial t}+\frac{\tilde{u}}{h_1}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{u}{h_1}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x}+\frac{\tilde{u}}{h_1}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x}\\ +\tilde{v}\frac{\partial w}{\partial y}+v\frac{\partial\tilde{w}}{\partial y}+\tilde{v}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial y}+w\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}+\tilde{w}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}\end{array}\right)\\
& -\frac{1}{\gamma\mathrm{Ma}^2}\left(\tilde{\rho}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial z}+\tilde{T}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial z}\right)\\
& +\frac{1}{h_1}\frac{d^2\mu}{dT^2}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\tilde{T}}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}\right)+\frac{1}{h_1}\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial x}\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}\right)\\
& +\frac{1}{h_1}\frac{d\mu}{dT}\frac{\tilde{T}}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x\partial z}\right)+\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial\mu}{\partial T}\tilde{T}\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z}+\frac{\partial\tilde{w}}{\partial y}\right)\\
& +\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d^2\mu}{dT^2}\frac{\partial T}{\partial y}\tilde{T}\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z}+\frac{\partial\tilde{w}}{\partial y}\right)+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial y}\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z}+\frac{\partial\tilde{w}}{\partial y}\right)+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial\mu}{\partial T}\tilde{T}\left(\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial y^2}\right)\\
& +\frac{\partial\mu}{\partial T}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial z}\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{\tilde{v}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}-\frac{2}{3}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}+\frac{4}{3}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}\right)\\
& +\frac{\partial\mu}{\partial T}\tilde{T}\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{h_1}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x\partial z}-\frac{2}{3}\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z}\frac{\partial h_1}{\partial y}-\frac{2}{3}\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial y\partial z}+\frac{4}{3}\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{N}_5 = &-\rho\left(\frac{\tilde{u}}{h_1}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial x}+\tilde{v}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial y}+\tilde{w}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial z}\right)-\tilde{\rho}\left(\begin{array}{l}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial t}+\frac{\tilde{u}}{h_1}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{u}{h_1}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial x}+\frac{\tilde{u}}{h_1}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial x}\\ +\tilde{v}\frac{\partial T}{\partial y}+v\frac{\partial\tilde{T}}{\partial y}+\tilde{v}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial y}+w\frac{\partial\tilde{T}}{\partial z}+\tilde{w}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial z}\end{array}\right)\\
&+\frac{\gamma-1}{\gamma}\left\langle\begin{array}{l}+\tilde{\rho}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial t}+\tilde{T}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t}+\frac{u}{h_1}\left(\tilde{\rho}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial x}+\tilde{T}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial x}\right)+\frac{\tilde{u}}{h_1}\left(\tilde{\rho}\frac{\partial T}{\partial x}+T\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial x}+\rho\frac{\partial\tilde{T}}{\partial x}+\tilde{T}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\tilde{\rho}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial x}+\tilde{T}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial x}\right)\\ +v\left(\tilde{\rho}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial y}+\tilde{T}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial y}\right)+\tilde{v}\left(\tilde{\rho}\frac{\partial T}{\partial y}+T\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial y}+\rho\frac{\partial\tilde{T}}{\partial y}+\tilde{T}\frac{\partial\rho}{\partial y}+\tilde{\rho}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial y}+\tilde{T}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial y}\right)+w\left(\tilde{T}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial z}+\tilde{\rho}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial z}\right)\\ +\tilde{w}\left(T\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial z}+\rho\frac{\partial\tilde{T}}{\partial z}+\tilde{T}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial z}+\tilde{\rho}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial z}\right)\end{array}\right\rangle\\
&+\frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\left\langle\begin{array}{l}\frac{1}{h_1}\frac{1}{h_1}\frac{d^2\kappa}{dT^2}\frac{\partial T}{\partial x}\tilde{T}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial x}+\frac{1}{h_1}\frac{1}{h_1}\frac{d\kappa}{dT}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial x}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial x}+\frac{1}{h_1}\frac{1}{h_1}\frac{d\kappa}{dT}\tilde{T}\frac{\partial^2\tilde{T}}{\partial x^2}\\ +\frac{d^2\kappa}{dT^2}\frac{\partial T}{\partial y}\tilde{T}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial y}+\frac{d\kappa}{dT}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial y}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial y}+\frac{d\kappa}{dT}\tilde{T}\frac{\partial^2\tilde{T}}{\partial y^2}+\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{\partial\kappa}{\partial T}\tilde{T}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial y}+\frac{d\kappa}{dT}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial z}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial z}+\frac{d\kappa}{dT}\tilde{T}\frac{\partial^2\tilde{T}}{\partial z^2}\end{array}\right\rangle\\
&+\frac{(\gamma-1)\mathrm{Ma}^2}{\mathrm{Re}}\mu\left\langle\begin{array}{l}+\frac{4}{3}\frac{1}{h_1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+\frac{4}{3}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}+\frac{4}{3}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}+\frac{4}{3}\frac{\tilde{v}}{h_1}\frac{\tilde{v}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{\partial h_1}{\partial y}+\frac{4}{3}2\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\frac{\tilde{v}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\\ -\frac{4}{3}\frac{\tilde{v}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}-\frac{4}{3}\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}-\frac{4}{3}\frac{\tilde{v}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}-\frac{4}{3}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}-\frac{4}{3}\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\\ +\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}+\frac{1}{h_1}\tilde{u}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{1}{h_1}\tilde{u}\frac{\partial h_1}{\partial y}+\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}+\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x}\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z}+\frac{\partial\tilde{w}}{\partial y}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial y}\\ -2\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}\frac{1}{h_1}\tilde{u}\frac{\partial h_1}{\partial y}+2\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}-2\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\frac{1}{h_1}\tilde{u}\frac{\partial h_1}{\partial y}+2\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial y}+2\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}\end{array}\right\rangle\\
&+\frac{(\gamma-1)\mathrm{Ma}^2}{\mathrm{Re}}\frac{d\mu}{dT}\tilde{T}\left[\begin{array}{l}\frac{4}{3}\left(\begin{array}{l}\frac{2}{h_1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{h_1}\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+2\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\frac{v}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}+2\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\tilde{v}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}+2\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\frac{\tilde{v}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\\ +2\frac{\tilde{v}}{h_1}\frac{v}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{\partial h_1}{\partial y}+\frac{\tilde{v}}{h_1}\frac{\tilde{v}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{\partial h_1}{\partial y}\end{array}\right)\\ +\left(2\frac{\partial\tilde{w}}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial\tilde{w}}{\partial y}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial y}+2\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}+2\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial y}+2\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial y}+2\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z}\right)\\ +\frac{8}{3}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{4}{3}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}+\frac{8}{3}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{4}{3}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}\\ +\left(\frac{2}{h_1}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x}\frac{1}{h_1}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x}\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x}+2\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}+2\frac{1}{h_1}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}+2\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}+2\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}\right)\\ +\left(\begin{array}{l}\frac{2}{h_1}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\frac{1}{h_1}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}+2\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}+\frac{2}{h_1}\tilde{u}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{1}{h_1}u\frac{\partial h_1}{\partial y}+\frac{1}{h_1}\tilde{u}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{1}{h_1}\tilde{u}\frac{\partial h_1}{\partial y}\\ +2\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+2\frac{1}{h_1}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}+2\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}-2\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\frac{1}{h_1}u\frac{\partial h_1}{\partial y}-2\frac{1}{h_1}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{1}{h_1}\tilde{u}\frac{\partial h_1}{\partial y}-2\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\frac{1}{h_1}\tilde{u}\frac{\partial h_1}{\partial y}\\ -2\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}\frac{1}{h_1}u\frac{\partial h_1}{\partial y}-2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{h_1}\tilde{u}\frac{\partial h_1}{\partial y}-2\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}\frac{1}{h_1}\tilde{u}\frac{\partial h_1}{\partial y}\end{array}\right)\\ -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}+\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}+\frac{\tilde{v}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{v}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}+\frac{\tilde{v}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\right)\\ -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}+\frac{1}{h_1}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}+\frac{\tilde{v}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{v}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}+\frac{\tilde{v}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}\right)\\ -\frac{4}{3}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}-\frac{4}{3}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}\end{array}\right]
\end{aligned}
$$

个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果

个人简历

1991 年 10 月 5 日出生于陕西省西安市长安县（现长安区）。

2009 年 9 月考入清华大学航天航空学院工程力学系钱学森力学班，2013 年 7 月本科毕业并获得工学学士学位。

2013 年 9 月免试进入清华大学大学航天航空学院攻读力学博士学位至今。

发表的学术论文

[1] Zhefu Wang, Liang Wang, and Song Fu. "Control of stationary crossflow modes in swept Hiemenz flows with dielectric barrier discharge plasma actuators", Physics of Fluids, 2017, 29(9): 094105. （SCI 收录，WOS:000412105100038）

[2] Zhefu Wang, Liang Wang, and Song Fu. "Sensitivity analysis of crossflow boundary layer and transition delay using plasma actuator", 8th AIAA Flow Control Conference, AIAA AVIATION Forum, (AIAA 2016-3933). （EI 收录，ISBN-13: 9781624104329）

[3] Zhefu Wang, Liang Wang, and Song Fu. "Control of crossflow instability using plasma actuators", 7th Asia-Pacific International Symposium on Aerospace Technology, 25-27 November 2015, Cairns, Australia. （会议论文）

[4] Zhefu Wang and Song Fu. "Control of crossflow instability using plasma actuators", XXIV ICTAM, 21-26 August 2016, Montreal, Canada.（会议论文）

[5] Zhefu Wang and Song Fu. "Transition delay using DBD plasma actuators", European Drag Reduction and Flow Control Meeting, 3-6 April 2017, Rome, Italy. （会议论文）

综合论文训练记录表

<table>
<tr><td>学生姓名</td><td></td><td>学号</td><td></td><td>班级</td><td></td></tr>
<tr><td>论文题目</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>主要内容以及进度安排</td><td colspan="5">指导教师签字：_____
考核组组长签字：_____
年　　月　　日</td></tr>
<tr><td>中期考核意见</td><td colspan="5">考核组组长签字：_____
年　　月　　日</td></tr>
</table>

指导教师评语	指导教师签字：_____ 年　　月　　日
评阅教师评语	评阅教师签字：_____ 年　　月　　日
答辩小组评语	答辩小组组长签字：_____ 年　　月　　日

总成绩：_____

教学负责人签字：_____

年　　月　　日