

# 介阻挡放电等离子体激发器在 湍流减阻中的应用研究

(申请清华大学工学博士学位论文)

培养单位：航天航空学院  
学 科：力学  
研 究 生：王 哲 夫  
指导教师：符 松 教 授

二〇一八年三月



# **Study of the application of Dielectric-Barrier-Discharge plasma actuators in turbulent drag reduction**

Dissertation Submitted to  
**Tsinghua University**  
in partial fulfillment of the requirement  
for the degree of  
**Doctor of Philosophy**  
in  
**School of Aerospace Engineering**  
by  
**Wang Zhefu**

Dissertation Supervisor : Professor Fu Song

**March, 2018**



# 关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：

清华大学拥有在著作权法规定范围内学位论文的使用权，其中包括：（1）已获学位的研究生必须按学校规定提交学位论文，学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究生上交的学位论文；（2）为教学和科研目的，学校可以将公开的学位论文作为资料在图书馆、资料室等场所供校内师生阅读，或在校园网上供校内师生浏览部分内容；（3）根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》，向国家图书馆报送可以公开的学位论文。

本人保证遵守上述规定。

（保密的论文在解密后应遵守此规定）

作者签名: \_\_\_\_\_

导师签名: \_\_\_\_\_

日 期: \_\_\_\_\_

日 期: \_\_\_\_\_



## 摘要

论文的摘要是对论文研究内容和成果的高度概括。摘要应对论文所研究的问题及其研究目的进行描述，对研究方法和过程进行简单介绍，对研究成果和所得结论进行概括。摘要应具有独立性和自明性，其内容应包含与论文全文同等量的主要信息。使读者即使不阅读全文，通过摘要就能了解论文的总体内容和主要成果。

论文摘要的书写应力求精确、简明。切忌写成对论文书写内容进行提要的形式，尤其要避免“第 1 章……；第 2 章……；……”这种或类似的陈述方式。

本文介绍清华大学论文模板 THUTHESIS 的使用方法。本模板符合学校的本科、硕士、博士论文格式要求。

本文的创新点主要有：

- 用例子来解释模板的使用方法；
- 用废话来填充无关紧要的部分；
- 一边学习摸索一边编写新代码。

关键词是为了文献标引工作、用以表示全文主要内容信息的单词或术语。关键词不超过 5 个，每个关键词中间用分号分隔。（模板作者注：关键词分隔符不用考虑，模板会自动处理。英文关键词同理。）

关键词：`TEX`; `LATEX`; `CJK`; 模板; 论文

## **Abstract**

An abstract of a dissertation is a summary and extraction of research work and contributions. Included in an abstract should be description of research topic and research objective, brief introduction to methodology and research process, and summarization of conclusion and contributions of the research. An abstract should be characterized by independence and clarity and carry identical information with the dissertation. It should be such that the general idea and major contributions of the dissertation are conveyed without reading the dissertation.

An abstract should be concise and to the point. It is a misunderstanding to make an abstract an outline of the dissertation and words “the first chapter”, “the second chapter” and the like should be avoided in the abstract.

Key words are terms used in a dissertation for indexing, reflecting core information of the dissertation. An abstract may contain a maximum of 5 key words, with semi-colons used in between to separate one another.

**Key words:** T<sub>E</sub>X; L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X; CJK; template; thesis

## 目 录

|   |           |
|---|-----------|
| <b>第1章 引言 .....</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1 介质阻挡放电等离子体激发器 .....                                       | 2         |
| 1.1.1 介质阻挡放电等离子体激发器数值模拟方法 .....                               | 2         |
| 1.1.2 介质阻挡放电等离子体激发器在流动控制方面的应用 .....                           | 3         |
| 1.2 通过推迟层流/湍流转捩减阻 .....                                       | 3         |
| 1.2.1 二维边界层失稳与转捩 .....  | 4         |
| 1.2.2 三维边界层失稳与转捩 .....  | 5         |
| 1.2.3 转捩推迟方案研究进展 .....  | 7         |
| 1.3 通过控制壁湍流相干结构减阻 .....                                       | 7         |
| 1.3.1 湍流相干结构研究进展 .....  | 7         |
| 1.3.2 湍流减阻技术研究进展 .....  | 7         |
| <b>第2章 理论公式与数值求解方法 .....</b>                                  | <b>8</b>  |
| 2.1 等离子体模型 .....  | 8         |
| 2.2 流动稳定性求解框架 .....   | 8         |
| 2.2.1 边界层方程 .....   | 10        |
| 2.2.2 扰动方程 .....  | 14        |
| 2.2.3 扰动发展的敏感性分析 .....  | 17        |
| 2.3 充分发展槽道的直接数值模拟 .....                                       | 22        |
| <b>第3章 后掠Hiemenz流动的失稳分析与控制 .....</b>                          | <b>23</b> |
| 3.1 后掠Hiemenz流动的稳定性分析 .....                                   | 23        |
| 3.2 后掠Hiemenz流动的敏感性分析 .....                                   | 26        |
| 3.2.1 基于LST的敏感性分析 .....                                       | 26        |
| 3.2.2 基于PSE的敏感性分析 .....                                       | 28        |
| 3.3 采用等离子体激发器推迟后掠Hiemenz流动转捩 .....                            | 35        |
| 3.4 本章小结 .....  | 41        |
| <b>第4章 后掠翼上流动失稳分析与控制 .....</b>                                | <b>42</b> |
| 4.1 后掠翼上流动的稳定性分析 .....  | 42        |
| 4.2 采用等离子体激发器推迟后掠翼上流动转捩 .....                                 | 48        |
| 4.2.1 谐波激励：每个展向周期放置一个激发器 .....                                | 48        |
| 4.2.2 Subharmonic control: two actuators per wavelength ..... | 52        |

## 目 录

---

|                                    |            |
|------------------------------------|------------|
| 4.2.3 Off-designed case .....      | 61         |
| <b>第5章 等离子体激发器控制充分发展槽道湍流 .....</b> | <b>62</b>  |
| 5.1 定常激励控制方案 .....                 | 63         |
| 5.2 周期激励控制方案 .....                 | 64         |
| <b>第6章 结论 .....</b>                | <b>90</b>  |
| <b>参考文献 .....</b>                  | <b>91</b>  |
| <b>致 谢 .....</b>                   | <b>94</b>  |
| <b>声 明 .....</b>                   | <b>95</b>  |
| <b>附录 A 边界层方程数值求解方法 .....</b>      | <b>96</b>  |
| <b>附录 B 扰动方程具体形式 .....</b>         | <b>100</b> |
| <b>个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果 .....</b> | <b>109</b> |

## 主要符号对照表

|            |                                       |
|------------|---------------------------------------|
| HPC        | 高性能计算 (High Performance Computing)    |
| cluster    | 集群                                    |
| Itanium    | 安腾                                    |
| SMP        | 对称多处理                                 |
| API        | 应用程序编程接口                              |
| PI         | 聚酰亚胺                                  |
| MPI        | 聚酰亚胺模型化合物, N-苯基邻苯酰亚胺                  |
| PBI        | 聚苯并咪唑                                 |
| MPBI       | 聚苯并咪唑模型化合物, N-苯基苯并咪唑                  |
| PY         | 聚吡咯                                   |
| PMDA-BDA   | 均苯四酸二酐与联苯四胺合成的聚吡咯薄膜                   |
| $\Delta G$ | 活化自由能 (Activation Free Energy)        |
| $\chi$     | 传输系数 (Transmission Coefficient)       |
| $E$        | 能量                                    |
| $m$        | 质量                                    |
| $c$        | 光速                                    |
| $P$        | 概率                                    |
| $T$        | 时间                                    |
| $v$        | 速度                                    |
| 劝学         | 君子曰：学不可以已。青，取之于蓝，而青于蓝；冰，水为之，而寒于水。——荀况 |

## 第1章 引言

为了配合我国大型客机发展的战略需求，帮助新一代自主研制客机在节能减排绿色环保的道路上顺利前进，研究边界层减阻相关技术至关重要。对于大型民用客机，摩擦阻力几乎占到了总阻力的一半<sup>[1]</sup>。而这些摩擦阻力又主要由机身和机翼贡献。就机翼而言，其流向长度不大，将层流向湍流转捩的过程推迟的层流技术，非常有应用前景<sup>[2]</sup>。但是对于机身，其流向尺度过大，机身中后段边界层已经无可避免的发展为湍流，这个时候层流技术毫无用武之地，必须使用通过改变充分发展湍流中拟序结构降低湍流阻力的方法。针对这两种完全不同的情况，本文将其抽象为两个分别与之对应的科学问题进行研究。关于机翼减阻的问题，本文将其简化为三维边界层层流-湍流转捩推迟问题。关于机身上减阻的问题，本文将其抽象成充分发展槽道壁湍流减阻控制问题。

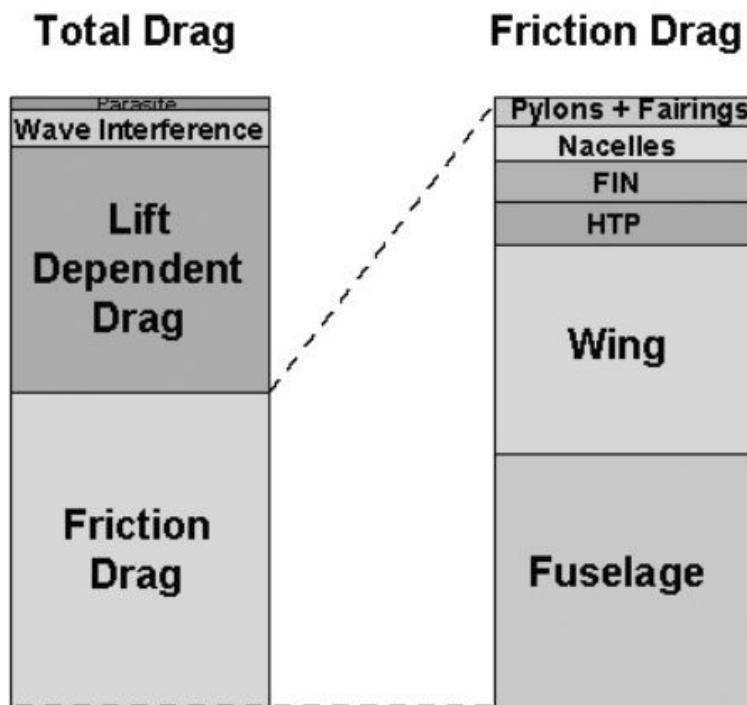
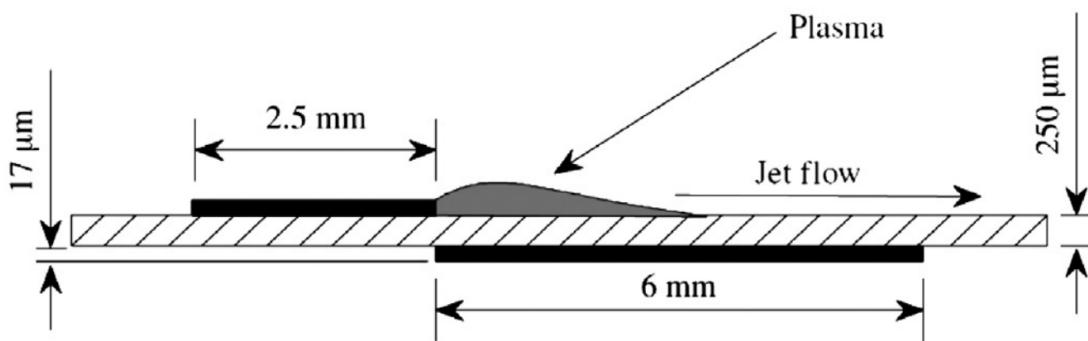


图 1.1 大型客机阻力分解<sup>[1]</sup>

为了完成减阻的目标，本文以介质阻挡放电（DBD）等离子体激发器作为控制装置。这种激发器由于有响应时间短，安装方便，耗能低，器件小等众多优点，近些年得到了流动控制领域研究者们的青睐。在引言的第一节，本文先简要的介

图 1.2 等离子体激发器示意图<sup>[7]</sup>

绍一下这种控制装置、其数值模拟方法与其在流动控制中的应用。在随后的两节里分别介绍后掠翼转捩推迟与壁湍流流动控制的研究现状。

## 1.1 介质阻挡放电等离子体激发器

等离子体是除了液态、固态以及气态之外的物质第四态<sup>[3,4]</sup>。等离子体可由高温或者强电场产生。高温条件下气体会离解产生等离子体。在电场力的作用下气体也会电离产生等离子体，电离产生的等离子体通常由大量的电子和相应成对出现的离子构成。在电场的作用下，等离子体可以表现出明显的集体行为<sup>[5]</sup>。在本文中，主要是用的介质阻挡放电等离子体激发器。这种激发器由两片电极和一层绝缘层构成（如图 1.2 所示）。当在两片电极上加上高电压时，两片电极之间的空气就会被电离，在介质表面形生成等离子体。这一控制装置相比传统的控制装置有诸多优点<sup>[6]</sup>。首先，控制部件的主要构成就是两个电极片和一张绝缘层，非常轻便。其次，其反应速度很快，激励频率可以范围可以很广，在流动控制中可以很方便的避开流动的特征频率。第三，耗能很低，每厘米耗能在 0.1 瓦特量级。最后，在不需要控制的时候激励器对流动完全没有影响。

在电场的作用下，带电的离子会做定向运动，并通过与不带电的空气分子的碰撞作用，将动量转移到空气分子上。从宏观的角度看，等离子体激发器在开启时会产生图示方向的射流。由于本文主要是采用数值模拟的方法研究这种激发器在流动控制中的应用，所以本文将在引言的第一部分重点介绍 DBD 等离子体激发器的数值模拟方法与将其应用于流动控制的研究现状。

### 1.1.1 介质阻挡放电等离子体激发器数值模拟方法

从目前的研究可知，介质阻挡放电等离子体的放电和气动激励过程中的各个物理过程的时间跨度较大，其中包括瞬间发生的电磁场分布过程、不足纳秒和纳

秒级的电子能量传输及输运过程、微秒级的离子输运过程和毫秒级的中性气体间的动量交换及传热过程等，较大的时间跨度使得对等离子体的数值仿真存在着较大的难度。因此，许多研究者提出可以在结果合理的前提下，对等离子体气动激励这一复杂的多物理过程进行必要的简化，提出其中的主要激励机理。在现阶段，这种简化过程对研究和应用等离子体流动控制这一前沿技术是十分必要的。目前，介质阻挡放电等离子体气动激励的仿真模型主要有以下几类。

等离子体简化模型唯象简化模型作为数值模拟中最为简单和常见的模型，其基本思路是将因粒子碰撞产生的动量传递效应简化为一种作用于流体的电场力，并将其以体积力源项的形式与 N-S 方程耦合求解。简化模型通常需要利用实验结果对模型中的相关参数进行修正。基于不同的假设条件，Massines [89]、Orlov [90]、Shyy [91]、Suzen [92]、Roth [93] 分别各自提出了自己的简化模型，同时国内外的研究者在此类模型基础上做了大量的研究工作。Rizzetta [94] 基于 Shyy 提出的简化模型，并利用大涡模拟数值方法研究了等离子体对湍流附面层的流动控制。毛枚良 [95] 等人利用简化模型，对 NACA0015 翼型进行了数值研究，探讨了大气压下辉光放电等离子体对边界层流动的影响。陈浮 [96] 等人采用三种不同的简化模型对比研究了 5kV 激励电压作用下的诱导流场，分析探讨了各模型的优缺点。王江南 [97] 等人进行了流动分离控制的数值模拟研究，结果表明等离子体流动控制方法可以有效地延迟流动的分离，达到增升减阻的目的。1.4.5.2 集总电路求解模型集总电路求解模型主要基于等离子体放电过程中的电流与电场强度的关系，建立起等离子体气动激励器电特性的分析模型。此类简化模型可以获得功率和电流随时间变化的数学表达式，以及电功率、电流和相位差对电压幅值、交流电频率、绝缘层厚度和介电常数等参数之间的依赖关系。该模型通过将等离子体激励器等效成一个集总电路原件的形式来描述等离子体气动激励器的行为。Orlov [98] 验证了等离子体气动激励器的推力与施加在电极两端的电压成

### 1.1.2 介质阻挡放电等离子体激发器在流动控制方面的应用

介质阻挡放电等离子体激发器的出现最早可以追溯到1979年<sup>[8]</sup>。在1998年，Roth首次将其用于流动控制<sup>[9]</sup>。

## 1.2 通过推迟层流/湍流转捩减阻

众所周知，层流的摩擦阻力要比湍流的摩擦阻力小很多，所以流动减阻的一个重要方向就是扩大飞行器表面的层流范围。对于大型客机而言，由于机身长度过长，转捩总会无可避免的发生。相比之下，在机翼上发展和应用层流技术则有

很大的前景。目前大多数客机使用的机翼还都是湍流机翼。湍流机翼发生从层流向湍流的转捩点一般在翼型弦长的10%以前，而如果使用推迟转捩的层流技术，可以将转捩点推迟到20%甚至70%弦长之后。在这一小节，我们先简要介绍二维和三维边界层的失稳与转捩研究现状，最后再总结目前已经提出的转捩推迟手段。

### 1.2.1 二维边界层失稳与转捩

边界层转捩过程强烈依赖于来流条件和壁面条件，受到来流湍流度、来流马赫数、外流压力梯度、壁面温度、壁面粗糙度、壁面抽吸量及外部扰动特征参数等诸多因素的影响<sup>[10]</sup>，因此存在着多种物理机制。在二维不可压缩边界层中，转捩过程可分为以下三种类型：当来流湍流度较低（小于0.1%）时发生的是自然转捩（natural transition）<sup>[11]</sup>；而来流湍流度较高（大于1%）时，转捩过程中小扰动的指数增长阶段将被跳过，这被称为跨越转捩（bypass transition）<sup>[12]</sup>；逆压梯度会导致层流边界层与壁面分离，从而引发分离流转捩（separation-induced transition）<sup>[13]</sup>；反过来，顺压梯度会使湍流边界层再层流化<sup>[14]</sup>。具体地，自然转捩过程分为四个阶段<sup>[15]</sup>：第一阶段是所谓的边界层感受性过程（Receptivity）<sup>[16]</sup>，指的是背景扰动如何进入边界层并产生不稳定波的机制；第二阶段是不稳定波的线性增长过程；第三阶段是不稳定波发展的非线性阶段，不稳定波发展到一定的幅值后，会出现波的相互作用和高阶不稳定性，从而导致以湍斑为特征的湍流结构的产生；最后一个阶段是从湍斑到完全湍流的发展过程。在自然转捩的第二阶段，扰动幅值相比于基本流非常小，一般采用线性稳定性理论进行描述。该理论假设扰动具有行波的形式，且不同频率，不同波长的扰动波之间不会互相干扰。基于这一假设，我们可以得到线性稳定性方程（Orr-Sommerfeld方程）[9]，并且得到不同频率和波长的扰动波的衰减或增长的情况，如图1.3所示。在此图上，扰动的衰减（稳定）区和放大（不稳定）区可通过扰动增长率等于零的线区分出来，这条线被称为中性稳定性曲线。令人特别关注的是曲线上取最小值的点：小于此值的区域内，所有的扰动均会趋于稳定。这个最小的雷诺数被称为临界雷诺数。可见，速度剖面有拐点的边界层比没有的更不稳定，而且后者在时仍存在不稳定频带，因此也被称为具有“无粘不稳定性”的剖面。实际上，上述频带可通过求解Rayleigh方程[10]得到，此方程是Orr-Sommerfeld方程在时的简化形式，基于此方程的理论被称为“无粘稳定性理论”。无粘稳定性理论中的拐点定理指出拐点的存在是流动失稳的充分必要条件。

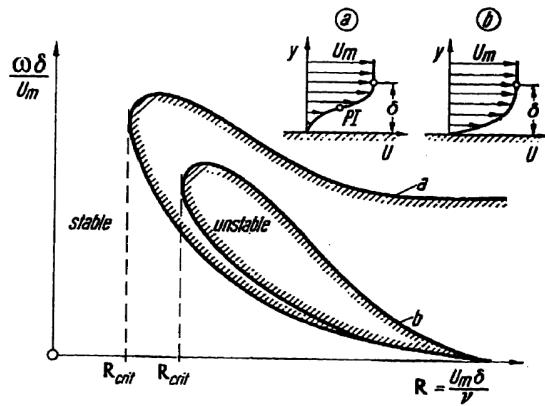


图 1.3 二维边界层中二维扰动的中性稳定性曲线，引自[10]。图中，a 曲线对应的是具有拐点 PI 的速度剖面 a，而 b 曲线对应的是无拐点的速度剖面 b。

### 1.2.2 三维边界层失稳与转捩

三维边界层转捩的研究起始于后掠层流机翼设计项目[11]，其目标是大幅降低机翼阻力。几十年来航空界一直致力于这一项目，然而由于三维边界层的稳定性涉及到边界层对自由流中的扰动与机翼表面粗糙度的感受性、基频扰动及其谐波与驻涡（crossflow vortices）等多种模态之间的相互作用等诸多问题，目前的研究与实际应用还有着相当的距离。三维不可压缩边界层具有多种失稳机制，其中横流不稳定性起主导作用。图2.2显示了后掠机翼上的层流边界层流动。可见，由于沿机翼弦向压力梯度的存在，边界层外缘流线将发生扭曲，或者认为此处流体微团曲线运动产生的离心力与压力平衡。而在边界层内，流体微团的速度沿壁面法向逐渐减小，因此其产生的离心力减小，而压力却保持不变，这种不平衡性导致了垂直于主流方向的横流（crossflow velocity）的出现。横流速度剖面存在拐点并因此产生了横流不稳定波，其增长率比 T-S 波大得多。最不稳定波的方向几乎与势流方向垂直（ $85^\circ \sim 89^\circ$ ），波长是边界层厚度的三倍到四倍[13]。在极限条件时，零频率的波驻留在物面上，它们具有恒定相位线，方向近似与来流平行，被称为驻涡。横流失稳模态可分为驻涡模态与行波（traveling waves）模态两种。Malik[44]等人通过对后掠 Hiemenz 流动 NPSE 的计算得出行涡模态与驻涡模态的主导关系，他们指出当行涡模态的初始幅值小于驻涡模态初始幅值一个数量级时，驻涡模态扰动主导横流转捩；反之，转捩则由行波模态扰动引起，并且行涡会在发展过程中抑制驻涡的发展。这一计算结果与 Bippes[43] 年提出的低湍流情况横流驻涡主导转捩，高湍流情况横流行涡主导转捩的结论相吻合。由于横流失稳产生的横流涡亦是不稳定，所以在其基础之上会产生二次失稳。Malik[45] 研究了后掠翼上转捩前扰动波的发展，其计算结果与 Reibert[47] 的实验结果符合的很好，并在此基础上研究了饱和的横流涡的二次失稳现象。他们将二次失稳的模态根据能

量来源的不同分为Y模态和Z模态。下图为Y模态与Z模态的扰动幅值等值线：

Z模态（上图）与Y模态（下图）与此同时，他们还提出了基于二次失稳理论N转捩因子的预测方法。Haynes [47]等人研究了雷诺数和曲率对于后掠翼上流动稳定性的影响，发现雷诺数越大横流涡饱和越早，雷诺数非常小时甚至不会出现横流涡的饱和现象；另外横流涡的发展对曲率的敏感性也很大。Li[48]等人对横流行涡的二次失稳也做了详细的研究，他们发现行涡的增长率相比于驻涡更大，并且在更低的幅值饱和，而二次失稳的幅值却不亚于驻涡，所以只有在行涡的初始幅值很低的时候才是驻涡主导转捩。由于横流失稳是导致后掠翼转捩的主要机制，所以近些年研究者们也在试图通过影响横流失稳产生扰动的发展推迟转捩。Saric[49]在试验中发现，通过采用在机翼前缘放置一排间距略小于最不稳定横流涡展向波长的粗糙单元，可以有效的推迟转捩。这是因为该粗糙单元激发出的模态本身并不会发展导致转捩，相反其还会抑制最不稳定模态，从而推迟转捩。Malik[45]的计算也给出了相同的解释。不同模态幅值在不同初始值条件下的发展如下图：

其中实线是控制模态和自然模态同时存在时它们的幅值沿着流向发展的情况，虚线是只有自然模态时的情况。可以看到在有控制模态的时候自然扰动模态的发展受到了抑制。Carpenter (2008) 年做了利用粗糙单元推迟转捩的飞行试验，实验发现在翼型前缘表面没有打磨得很光滑的时候该方法是有效的，2009年F.Li用NPSE进行计算也得到了相同的结果。2013年，Templemann[50]用DNS的进行模拟，同样印证了该方法的可行性。2014年Loving[51]等人在湍流度更低的风洞（来流湍流度0.04 Friederich 和 Kloker[52]提出了一种吸气的控制方法来推迟横流诱发的转捩并在后掠平板上得到了验证。他们通过在横流涡卷起的地方向下吸气，从而破坏横流涡的结构，使得二次失稳受到抑制。这一方法还有待实验的检验以及向更加便于应用的方向改变。在实验方面，处于前沿的研究者为亚利桑那州立大学（ASU）的Saric、俄罗斯的Kachanov、日本宇航实验室的Tagagi以及德国宇航研究院（DLR）的Bippes。Saric[14]综述了三维不可压缩边界层的感受性、二次失稳和壁面粗糙度效应等热点问题的最新进展。目前，数值模拟方面使用较多的还是线性稳定性理论和NPSE方法。目前线性稳定性理论可以准确预测出驻涡模态及其波长。Reed对这方面的研究进行了总结[15]。NPSE方法的优势是其具有模拟非平行和非线性效应的能力[16]，Haynes和Reed综述了此法对几种典型的三维不可压缩边界层流动的研究结果[17]。直接数值模拟方面，Reed和Lin[18-19]研究了无限展长后掠翼上的转捩过程，结果与ASU的实验符合较好。Meyer和Kleiser[20]考察了横

流不稳定性驻涡模式与行波模式的扰动在后掠平板上的相互作用，他们采用与Muller和Bippes[21]的实验近似的初始条件，得到了合理的三维边界层转捩发展过程。Wintergerste和Kleiser[22]对他们的工作进行了补充，重点研究转捩后期横流涡的破碎现象。

### 1.2.3 转捩推迟方案研究进展

转捩推迟方案研究进展

## 1.3 通过控制壁湍流相干结构减阻

### 1.3.1 湍流相干结构研究进展

壁湍流相干结构研究进展

### 1.3.2 湍流减阻技术研究进展

湍流减阻技术研究进展

## 第2章 理论公式与数值求解方法

### 2.1 等离子体模型

### 2.2 流动稳定性求解框架

在研究等离子体控制扰动的问题中，本文采用研究稳定性问题的相关数值方法，来解析控制前后边界层内扰动的发展情况。稳定性的相关理论虽然并不能给出精确的转捩位置，但是能够从理论方面给出流动失稳特性，并且具有计算效率高，转捩前流动解析精度高的优点。本文中通过研究流动在控制前后稳定性方面的特性变化，来甄别控制是否有效。本文采用的研究边界层流动稳定性的步骤如下：

1. 采用高精度有限元程序求解无粘流场；
2. 以无粘流壁面上的流动参数作为边界层方程的边界条件，求解层流基本流动；
3. 基于线性稳定性理论，判断主导转捩的模态；
4. 采用抛物化扰动方程，求解边界层内扰动的演化；
5. 以受扰流场作为新的基本流动进行二次失稳分析。

与前人所做的研究不同的是，本文的研究需要将等离子体产生的体积力也考虑进来。在详细介绍求解方法之前，这里先简要介绍一下本文中对体积力的处理方法。流动所满足的控制方程（N-S方程）为：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* \mathbf{V}^*) &= 0 \\ \rho^* \left( \frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{V}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{V}^* \right) &= -\nabla^* p^* + \nabla^* (\lambda^* (\nabla^* \cdot \mathbf{V}^*)) \\ &\quad + \nabla^* \cdot \left( \mu^* \left( \nabla^* \mathbf{V}^* + \nabla^* \mathbf{V}^{*T} \right) \right) + \mathbf{f}^* \\ \rho^* C_p^* \left( \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + (\mathbf{V}^* \cdot \nabla^*) T^* \right) &= \nabla^* \cdot (\kappa^* \nabla^* T^*) \\ &\quad + \frac{\partial p^*}{\partial t^*} + (\mathbf{V}^* \cdot \nabla^*) p^* + \Phi^* + \mathbf{V}^* \cdot \mathbf{f}^* \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

式（2-1）中能量方程的耗散函数为：

$$\Phi^* = \lambda^* (\nabla^* \cdot \mathbf{V}^*)^2 + \frac{\mu^*}{2} \left( \nabla^* \mathbf{V}^* + \nabla^* \mathbf{V}^{*T} \right)^2 \quad (2-2)$$

方程中星号 \* 表示有量纲量， $\mathbf{V}$  表示速度矢量，其在  $x, y, z$  三个方向的分量为  $u, v, w$ 。 $\mathbf{f}$  表示体积力矢量，其分量分别为  $f_x, f_y, f_z$ 。

为封闭 N-S 方程，分别引入状态方程、Sutherland 粘性律、Stokes 假设，假定流体是量热完全气体并具有恒定的  $Pr$  数：

$$\left. \begin{aligned} p^* &= \rho^* R^* T^* \Leftrightarrow p = \frac{\rho T}{\gamma Ma^2} \\ \mu^* &= \mu_s^* \frac{T^*}{T_s^*} \frac{T_s^* + S^*}{T^* + S^*} \Leftrightarrow \mu = \mu_s \frac{T}{T_s} \frac{T_s + S}{T + S} \\ \lambda^* + 2/3\mu^* &= 0 \Leftrightarrow \lambda = -2/3\mu \\ \text{Pr} &= \frac{C_p^* \mu^*}{\kappa^*} = \text{const} \Leftrightarrow \mu = \kappa \\ C_p^* &= \text{const}, R^* = \text{const} \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

Sutherland 粘性律中  $T_s^* = 273K$ ,  $\mu_s^* = 1.71 \times 10^{-5} kg/(m \cdot s)$ ,  $S^* = 110.4K$ 。

选取适当的参考长度  $l_{ref}$ 、参考速度  $U_{ref}$ 、参考密度  $\rho_{ref}$  等特征量，可以对式 (2-1) 进行无量纲化。在本文中，分别研究了后掠 Hiemenz 流动和后掠翼流动。在这两个流动中我们选择的特征量是不一样的，之后我们会分别介绍。为了简洁，我们将无量纲化后的 N-S 方程记为：

$$\mathcal{N}(\mathbf{q}) = \mathbf{F} \quad (2-4)$$

这里， $\mathbf{q} = (\rho, u, v, w, T)^T$ ，即原始变量组成的 5 维矢量。 $\mathbf{F} = (0, f_x, f_y, f_z, \mathbf{V} \cdot \mathbf{f})^T$ 。上标 “ $T$ ” 表示转置。这里由于添加的体积力很小，我们假设其只影响扰动发展，并不影响基本流。即基本流依然满足 N-S 方程：

$$\mathcal{N}(\mathbf{q}_0) = 0 \quad (2-5)$$

$\mathbf{q}_0$  为基本流流动原始变量组成的矢量，其与  $\mathbf{q}$  的差即为扰动量  $\tilde{\mathbf{q}}$ 。令式(2-4) - 式(2-5)，即可得到扰动的控制方程：

$$\mathcal{S}(\tilde{\mathbf{q}}) = \mathcal{N}(\mathbf{q}_0 + \tilde{\mathbf{q}}) - \mathcal{N}(\mathbf{q}_0) = \mathbf{F} \quad (2-6)$$

在之后的小节 2.2.1 和 2.2.2 中，将会分别介绍式 (2-5) 和 (2-6) 所采用的求解方法。至于求解步骤 1 中提到的高精度有限元方法，将会在 2.3 节中介绍。

### 2.2.1 边界层方程

在边界层流动中，流向的特征尺度为常规尺度，而法向的特征尺度为边界层厚度尺度。利用这一特性，可将Navier-Stokes 方程式抛物化，得到层流边界层控制方程。本文研究的问题的基本流均满足展向均匀假设，即 $\partial/\partial z^* = 0$ 。利用这些假设，式 (2-5) 可以写为<sup>①</sup>：

$$\frac{\partial(\rho^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(\rho^* v^*)}{\partial y^*} = 0 \quad (2-7a)$$

$$\rho^* u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial y^*} \left( \mu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \quad (2-7b)$$

$$\rho^* u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} = \frac{\partial}{\partial y^*} \left( \mu^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \right) \quad (2-7c)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial y^*} = 0 \quad (2-7d)$$

$$\rho^* u^* C_p^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* C_p^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{\partial}{\partial y^*} \left( k^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) + u^* \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \mu^* \left( \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 + \mu^* \left( \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \right)^2 \quad (2-7e)$$

在传统的边界层方程求解方法中，所有物理量都采用相同的参考量进行无量纲化，比如一般会采用来流的速度、密度等物理量进行无量纲化。然而，在本文研究的问题中，边界层外普遍有较大的压力梯度，这导致不同流向位置的边界层外物理量差异比较大，计算很难收敛。所以本文采用当地边界层外的物理量，即 $U_e^*, T_e^*, \rho_e^*, k_e^*, \mu_e^*$ ，进行无量纲化，提高计算稳定性。这里边界层外的物理量是通过求解无粘流方程得到的，并作为边界层方程求解的边界条件。采用当地边界层外物理量无量纲化后的边界层方程为：

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x^*} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y^*} + \frac{\rho u}{\rho_e^* U_e^*} \frac{\partial(\rho_e^* U_e^*)}{\partial x^*} = 0 \quad (2-8a)$$

$$\rho u \rho_e^* U_e^* U_e^* \frac{\partial u}{\partial x^*} + \rho u u \rho_e^* U_e^* \frac{\partial U_e^*}{\partial x^*} + \rho v \rho_e^* U_e^* U_e^* \frac{\partial u}{\partial y^*} = \rho_e^* U_e^* \frac{d U_e^*}{d x^*} + \mu_e^* U_e^* \frac{\partial}{\partial y^*} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y^*} \right) \quad (2-8b)$$

$$\rho u \frac{\partial w}{\partial x^*} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y^*} = \frac{\mu_e^*}{\rho_e^* U_e^*} \frac{\partial}{\partial y^*} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y^*} \right) \quad (2-8c)$$

<sup>①</sup> 本节讨论的均为基本流的计算方法，为了简洁，表明基本流变量的下标0在本节中都被略去。即原本的 $\rho_0, u_0, v_0, w_0, T_0$ 在本节被记为 $\rho, u, v, w, T$ 。有量纲量类似。

$$\begin{aligned} & \rho u \rho_e^* U_e^* C_p^* \left( T \frac{\partial T_e^*}{\partial x^*} + T_e^* \frac{\partial T}{\partial x^*} \right) + \rho v \rho_e^* U_e^* C_p^* T_e^* \frac{\partial T}{\partial y^*} \\ &= k_e^* T_e^* \frac{\partial}{\partial y^*} \left( k \frac{\partial T}{\partial y^*} \right) - \rho_e^* U_e^* U_e^* \frac{dU_e^*}{x^*} u + \mu \mu_e^* U_e^* U_e^* \left( \frac{\partial u}{\partial y^*} \right)^2 + \mu \mu_e^* W_e^* W_e^* \left( \frac{\partial w}{\partial y^*} \right)^2 \quad (2-8d) \end{aligned}$$

注意到在上面的代换中，还用到了无粘势流中沿流线的伯努利方程：

$$-\frac{\partial p^*}{\partial x^*} = \rho^* u_e^* \frac{du_e^*}{dx_e^*} \quad (2-9)$$

和气体状态方程：

$$\rho T = 1 \quad (2-10)$$

为了消除上述边界层方程在驻点处的奇异性，引入如下相似变换：

$$\xi = x^* \quad (2-11a)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{U_e^*}{x^* \rho_e^* \mu_e^*}} \int_0^{y^*} \rho^* dy^* = \frac{1}{L^*} \int_0^{y^*} T^{-1} dy^* \quad (2-11b)$$

最终得到如下计算求解的方程：

$$\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \eta} + \frac{u}{2} \left[ 1 + \frac{\xi}{\mu_e^*} \frac{\partial \mu_e^*}{\partial \xi} + \frac{\xi}{\rho_e^* \mu_e^*} \frac{\partial (\rho_e^* \mu_e^*)}{\partial \xi} \right] = 0 \quad (2-12a)$$

$$\xi u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \Lambda \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\xi}{\mu_e^*} \frac{\partial \mu_e^*}{\partial \xi} (T - u^2) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\mu}{T} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \quad (2-12b)$$

$$\xi u \frac{\partial w}{\partial \xi} + \Lambda \frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\mu}{T} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) \quad (2-12c)$$

$$\xi u \frac{\partial T}{\partial \xi} + \Lambda \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{k}{T} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) = (\gamma - 1) \frac{\mu}{T} \left[ \left( \text{Ma}_{ue} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \text{Ma}_{we} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 \right] \quad (2-12d)$$

其中：

$$L^* = \sqrt{\frac{\mu_e^* x^*}{\rho_e^* u_e^*}} \quad (2-13a)$$

$$\Lambda = \xi u \frac{\partial \eta}{\partial x^*} + \frac{\xi v}{L^* T} \quad (2-13b)$$

$$\text{Ma}_{ue} = \frac{u_e^*}{a_e^*} \quad (2-13c)$$

$$\text{Ma}_{we} = \frac{w_e^*}{a_e^*} \quad (2-13d)$$

$$a_e^* = \sqrt{\gamma R T_e^*} \quad (2-13e)$$

将方程 (2-12) 在法方向采用谱方法进行离散，流向采用五阶差分格式，最后得到离散的方程简记为：

$$L_{dis}(\Phi) = 0 \quad (2-14)$$

$\Phi = (u, w, \Lambda, T)^T$  为方程 (2-12) 中实际求解的变量组成的矩阵。上式对应的 Jacobian 矩阵为：

$$\mathbf{J}_b = \frac{\partial L_{dis}(\Phi)}{\partial \Phi} \quad (2-15)$$

本文采用拟牛顿法对式 (2-14) 进行求解，迭代更新方法如下：

$$\Phi_{\text{new}} = \Phi_{\text{old}} - \mathbf{J}_b^{-1} L_{dis}(\Phi) \quad (2-16)$$

式 (2-14) 和 (2-15) 的具体形式将在附录A中给出。

为了验证程序是否正确，首先将计算结果与零压力梯度平板上的相似性解进行对比。这里采用的计算工况为：

$$U_\infty = 100 \text{m/s}, T_\infty = 300 \text{K}, \nu_\infty = 1.5 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s} \quad (2-17)$$

对比  $x = 1 \text{m}$ ，即  $Re_x = 6.67 \times 10^6$ ，位置处各个物理量延法向的分布如图2.1所示。其中黑色由方框标记的线为边界层方程求解出来的结果，红色由三角标记出来的先为相似性解的结果。可以看到两种算法的结果几乎完全重合了。

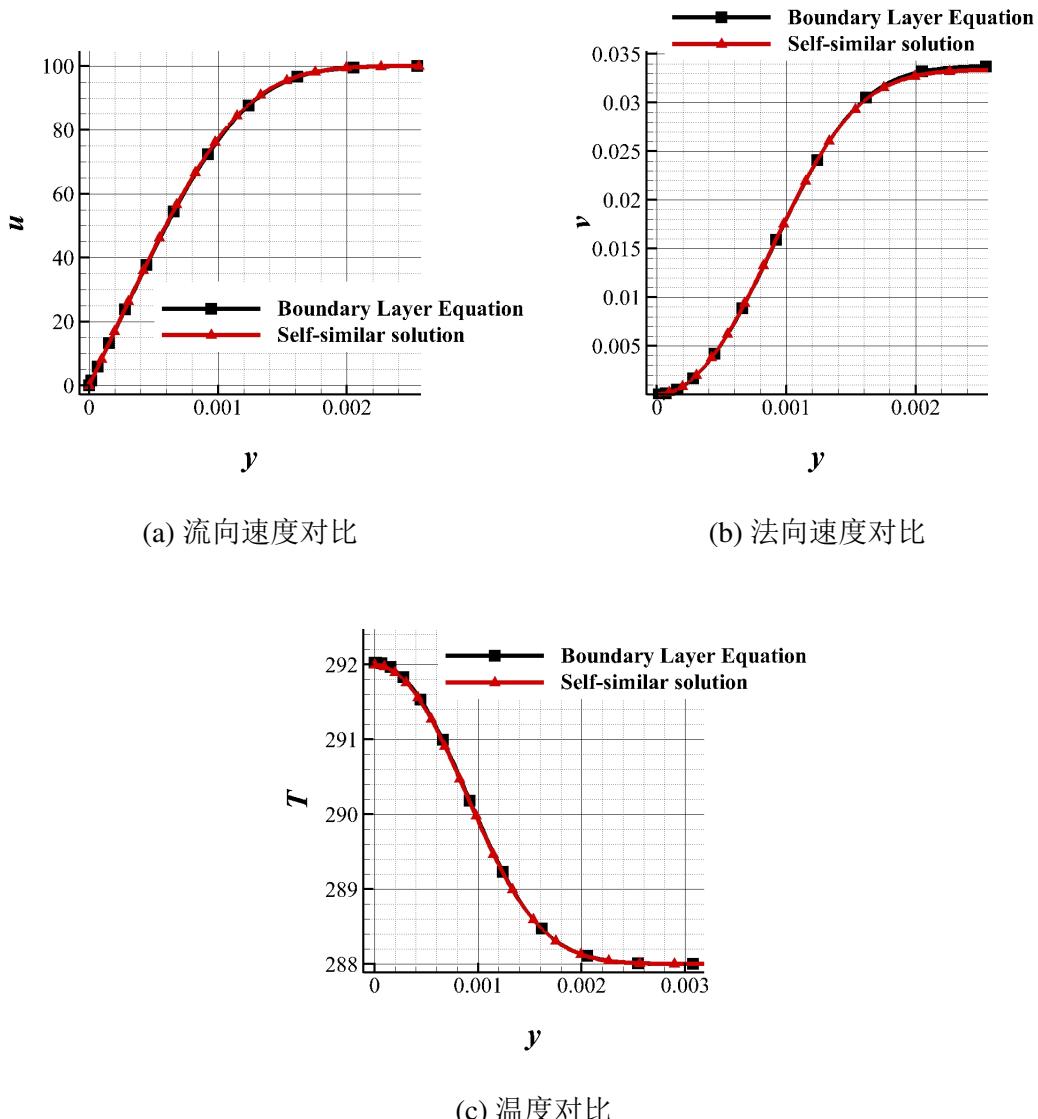


图 2.1 边界层方程计算结果与相似性解对比（黑线方框标记：边界层方程计算结果；红线三角标记：相似性解）

本文中主要进行的是三维边界层失稳的研究，所以针对三维边界层的计算也需要验证。清华大学徐胜金老师课题组为研究三维边界层转捩在低湍流度风洞中做了后掠NLF-0415翼型的绕流实验。实验相应参数可以参考文献?????。在实验自由来流为 $22.3\text{m/s}$ 的工况中，翼型上表面直至 $70\%$ 弦长处均为层流。采用边界层方程计算速度分布，并取 $40\%$ 和 $60\%$ 弦长处的速度剖面与实验对比，结果如图2.2。其中计算结果用线表示，实验结果用点表示。这里 $U_{wt}$ 表示延风洞方向的速度分量<sup>①</sup>。蓝色表示 $20\%$ 弦长处的结果，红色为 $40\%$ 处。从计算的结果可以看到，我们所采用的求解方法完全满足精度需求。

<sup>①</sup> 注意这里并不是 $u$ ，因为在后掠翼计算中， $x$ 方向与平行于风洞的流向有 $45^\circ$ 夹角

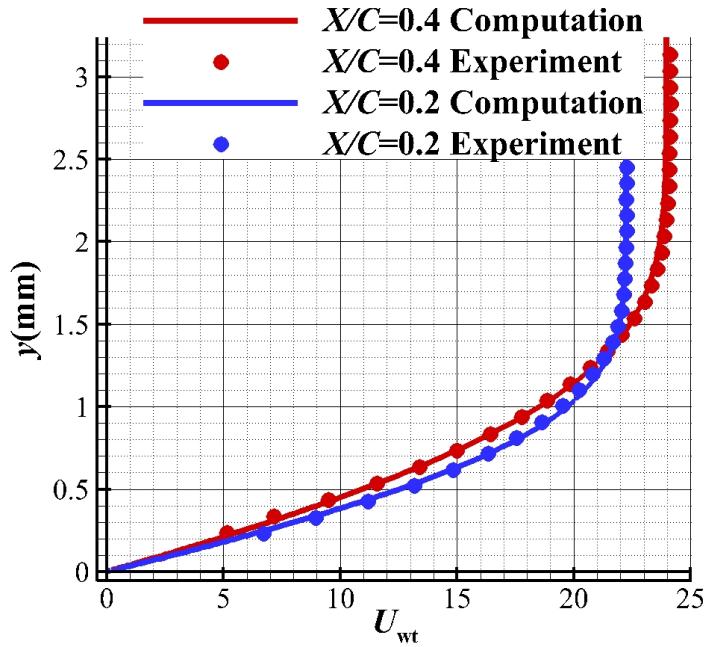


图 2.2 后掠翼上边界层速度剖面对比（线：计算结果；点：实验结果）

### 2.2.2 扰动方程

如之前所述，本文将流场基本变量  $\mathbf{q} = (\rho, u, v, w, T)$  分解为基本流动  $\mathbf{q}_0$  和扰动  $\tilde{\mathbf{q}}$  两部分：

$$\mathbf{q}(x, y, z, t) = \mathbf{q}_0(x, y) + \tilde{\mathbf{q}}(x, y, z, t) \quad (2-18)$$

在小节2.2.1中已经探讨了基本流动的求解方法。在这一节中，重点讨论扰动方程 (2-6) 的求解方法。先假设方程 (2-6) 可以写成如下紧凑的形式：

$$\begin{aligned} & \Gamma \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial y} + \mathbf{C} \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial z} + \mathbf{D} \tilde{\mathbf{q}} \\ &= \mathbf{H}_{xx} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{q}}}{\partial x^2} + \mathbf{H}_{yz} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{q}}}{\partial z \partial y} + \mathbf{H}_{xy} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{q}}}{\partial x \partial y} + \mathbf{H}_{xz} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{q}}}{\partial x \partial z} + \mathbf{H}_{yy} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{q}}}{\partial y^2} + \mathbf{H}_{zz} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{q}}}{\partial z^2} + \mathbf{N} + \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (2-19)$$

其中  $5 \times 5$  系数矩阵  $\Gamma, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{H}_{xx}, \mathbf{H}_{yy}, \mathbf{H}_{zz}, \mathbf{H}_{xy}, \mathbf{H}_{xz}, \mathbf{H}_{yz}$  是基本流动、流向曲率和  $Re, Ma, Pr$  的函数，详细表达式可参见附录B。向量  $\mathbf{N}$  表示非线性项， $\mathbf{F}$  表示体积力产生的源项。

### 2.2.2.1 线性稳定性理论

由于边界层流动中，边界层厚度增长缓慢，所以可将其近似为平行剪切流。假设扰动具有行波解：

$$\tilde{\mathbf{q}}(x, y, z, t) = \hat{\mathbf{q}}(y) \exp(i(\alpha x + \beta z - \omega t)) + c.c. \quad (2-20)$$

针对边界层失稳问题，其不稳定性通常是对流失稳，即边界层内的扰动并不是在原地增长，而是一边向下游传播一边增长。针对这一类问题，通常采用空间模式求解，即给定  $\beta$  和  $\omega$ ，求解  $\alpha$ 。将式 (2-20) 代入扰动方程 (2-19)，忽略非线性项整理得到

$$\mathbf{A}_L \hat{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_L \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial y} - \mathbf{H}_{yy} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{q}}}{\partial y^2} = \alpha \left( \mathbf{M}_L \hat{\mathbf{q}} + i \mathbf{H}_{xy} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial y} \right) - \alpha^2 \mathbf{H}_{xz} \hat{\mathbf{q}} \quad (2-21)$$

其中

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A}_L = -i\omega \Gamma + i\beta \mathbf{C} + \mathbf{D} + \beta^2 \mathbf{H}_{zz} \\ \mathbf{B}_L = \mathbf{B} - i\beta \mathbf{H}_{yz} \\ \mathbf{M}_L = -i\mathbf{A} - \beta \mathbf{H}_{xz} \end{array} \right\} \quad (2-22)$$

将上式中的几个微分算子记作：

$$\mathcal{L}_0 = \mathbf{A}_L + \mathbf{B}_L \frac{\partial}{\partial y} - \mathbf{H}_{yy} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2-23a)$$

$$\mathcal{L}_1 = -\mathbf{M}_L - i \mathbf{H}_{xy} \frac{\partial}{\partial y} \quad (2-23b)$$

$$\mathcal{L}_2 = \mathbf{H}_{xz} \quad (2-23c)$$

则线性稳定性的控制方程可以写为：

$$\mathcal{L} \hat{\mathbf{q}} = \mathcal{L}_0 \hat{\mathbf{q}} + \alpha \mathcal{L}_1 \hat{\mathbf{q}} + \alpha^2 \mathcal{L}_2 \hat{\mathbf{q}} = 0 \quad (2-24)$$

引入一个辅助变量：

$$\tilde{\mathbf{q}}_a = \alpha \tilde{\mathbf{q}} \quad (2-25)$$

则式 (2-24) 可以改写为:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathcal{L}_0 & \mathcal{L}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{q}}_a \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathcal{L}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{q}}_a \end{pmatrix} \quad (2-26)$$

很显然, 式(2-21)是针对微分算子的广义特征值问题。对其进行离散求解, 在法方向采用四阶精度中心差分格式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_j}{\partial y} &= \frac{\hat{\mathbf{q}}_{j-2} - 8\hat{\mathbf{q}}_{j-1} + 8\hat{\mathbf{q}}_{j+1} - \hat{\mathbf{q}}_{j+2}}{12\Delta y} \\ \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{q}}_j}{\partial y^2} &= \frac{-\hat{\mathbf{q}}_{j-2} + 16\hat{\mathbf{q}}_{j-1} - 30\hat{\mathbf{q}}_j + 16\hat{\mathbf{q}}_{j+1} - \hat{\mathbf{q}}_{j+2}}{12(\Delta y)^2} \end{aligned} \right\} \quad (2-27)$$

便可以将这一个微分算子的广义特征值问题转化为矩阵的广义特征值问题。求解该特征值问题, 得到特征向量  $\hat{\mathbf{q}}$  即为扰动分布, 特征值  $\alpha$  虚部  $-\alpha_i$  为扰动增长率, 实部  $\alpha_r$  为扰动流向波数。

### 2.2.2.2 抛物化扰动方程

线性稳定性理论有两个缺陷。首先, 其采用平行流假设, 导致边界层延流向的变化被忽略了。另外, 线性假设忽略了非线性项, 导致不同模态间的相互作用没有被考虑。抛物化扰动方程 (PSE) 可以克服上述这两点缺陷, 并且具有很高的求解效率。首先将物理扰动  $\tilde{\mathbf{q}}$  和非线性项与外加源项之和  $\mathbf{N} + \mathbf{F}$  进行 Fourier 展开:

$$\tilde{\mathbf{q}}(x, y, z, t) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \hat{\mathbf{q}}_{mn}(x, y) \Theta_{mn}, \quad (2-28)$$

$$\mathbf{N} + \mathbf{F} = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \mathbf{S}_{mn}(x, y) \Theta_{mn}, \quad (2-29)$$

$$\Theta_{mn} = \exp\left(i \int_{x_0}^x \alpha_{mn}(\xi) d\xi + in\beta z - im\omega t\right). \quad (2-30)$$

其中  $\Theta_{mn}$  是波数函数。代入扰动方程 (2-19), 整理得到

$$\hat{\mathbf{A}} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_{mn}}{\partial x} + \hat{\mathbf{B}} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_{mn}}{\partial y} + \hat{\mathbf{C}} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{q}}_{mn}}{\partial x^2} + \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{q}}_{mn} - \mathbf{H}_{yy} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{q}}_{mn}}{\partial y^2} = \mathbf{S}_{mn}, \quad (2-31)$$

其中

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}} &= \mathbf{A} - 2i\alpha_{mn}\mathbf{H}_{xx} - in\beta\mathbf{H}_{xz}, \\ \hat{\mathbf{B}} &= \mathbf{B} - i\alpha_{mn}\mathbf{H}_{xy} - in\beta\mathbf{H}_{yz}, \\ \hat{\mathbf{C}} &= \mathbf{H}_{xx}, \\ \hat{\mathbf{D}} &= \mathbf{D} - im\omega\Gamma + i\alpha_{mn}\mathbf{A} + in\beta\mathbf{C} + \mathbf{H}_{xx} \left( \alpha_{mn}^2 - i\frac{d\alpha}{dx} \right) + n^2\beta^2\mathbf{H}_{zz} + n\beta\alpha_{mn}\mathbf{H}_{xz}.\end{aligned}\quad (2-32)$$

根据量级分析<sup>[17]</sup>,  $d\alpha/dx$  这一项非常小可以忽略。为了使得形函数 $\hat{\mathbf{q}}$ 在流向缓变, 提出针对  $\alpha$  的波数迭代条件:

$$\int_0^\infty \hat{\mathbf{q}}^H \mathbf{M} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial x} dy = 0 \quad \forall x. \quad (2-33)$$

这里  $\mathbf{M} = \text{diag}(0, 1, 1, 1, 0)$ , “ $H$ ”表示复共轭。式 (2-33) 又可以叫做形函数的缓变条件, 这一条件使得形函数在流向的二阶偏导数可以被忽略掉, 即  $\partial^2 \hat{\mathbf{q}}_{mn} / \partial x^2 = 0$ <sup>[18]</sup>。虽然二阶偏导数项被忽略掉了, 但是方程 (2-31) 依然有一些残余椭圆性<sup>[19]</sup>。针对这一问题, 将方程中的压力项修正为:

$$\frac{\partial \tilde{p}_{mn}}{\partial x} = i\alpha_{mn}\hat{p}_{mn}\Theta_{mn}. \quad (2-34)$$

采用上面所提到的诸多假设, 方程 (2-31) 可以完全被抛物化, 可以流向推进求解。完整的方程为:

$$\mathcal{L}_{\text{PSE}} \hat{\mathbf{q}}_{mn} = \hat{\mathbf{A}} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_{mn}}{\partial x} + \hat{\mathbf{B}} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_{mn}}{\partial y} + \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{q}}_{mn} - \mathbf{H}_{yy} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{q}}_{mn}}{\partial y^2} = \mathbf{S}_{mn}, \quad (2-35)$$

其中  $\mathcal{L}_{\text{PSE}}$  线性 PSE 算子。本文对方程 (2-35) 在流向采用隐式欧拉差分, 法向采用五阶中心差分进行离散求解。

为了验证程序的正确性, 我们与 Malik 等人 1994 年的工作<sup>[18]</sup>进行对比。该工作重点研究了后掠 Hiemenz 流动的失稳, 计算相关参数详见他们的文献。这里计算对比  $\bar{R} = 500$ <sup>①</sup> 工况中主模态的能量在流向的演化, 结果如图 2.3 示。

### 2.2.3 扰动发展的敏感性分析

为了更好地理解流动, 同时选取较优化的控制参数, 本文中对三维边

<sup>①</sup> 这个符号采用与文献<sup>[18]</sup>中相同的定义

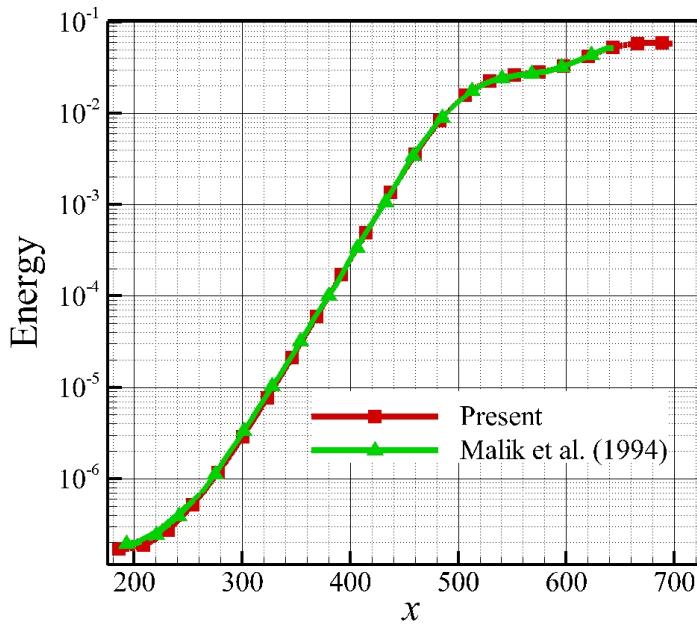


图 2.3 PSE 计算程序验证

界层失稳进行了敏感性分析。关于流动失稳的敏感性分析最早始于2003年，是Bottaro<sup>[20]</sup>等人针对Couette流动开展的。通过求解线性稳定性问题的伴随问题，他们找出了容易受基本流变化影响的失稳模态。之后，2008年Marquet等人<sup>[21]</sup>分析了圆柱尾迹流动对于基本流和外加体积力的敏感性，并采用这一结果进行了优化，降低了尾迹的湍流度。Alizard等人<sup>[22]</sup>2010年，对角域流动进行了分析，得到了不同失稳模态的敏感函数（敏感因子）的空间分布。2011年Brandt等人<sup>[23]</sup>对平板边界层做了相应的敏感性分析，之后学者们又对D形圆柱<sup>[24]</sup>，空腔<sup>[25]</sup>，甚至湍流边界层的猝发过程进行了相应的分析<sup>[26]</sup>，更加深入的了解了其流动机理。本文分别从线性稳定性理论和抛物化扰动方程出发，推导他们的伴随方程，并进而分析三维边界层失稳的敏感性。

#### 2.2.3.1 基于线性稳定性理论的敏感性分析

记方程 (2-24) 的伴随方程为：

$$\mathcal{L}^+ \hat{\mathbf{p}} = \mathcal{L}_0^+ \hat{\mathbf{p}} + \alpha \mathcal{L}_1^+ \hat{\mathbf{p}} + \alpha^2 \mathcal{L}_2^+ \hat{\mathbf{p}} = 0 \quad (2-36)$$

伴随方程与原方程的关系是，对于任意向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ，都有：

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{a} \cdot (\mathcal{L} \mathbf{b})^T dy = \int_0^{+\infty} (\mathcal{L}^+ \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}^T dy \quad (2-37)$$

若定义内积 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \int_0^{+\infty} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T dy$ , 则有:

$$\langle \mathbf{a}, \mathcal{L}\mathbf{b} \rangle = \langle \mathcal{L}^+ \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \quad (2-38)$$

引入体积力后, 方程变为:

$$[\mathcal{L}_0 + (\alpha + \delta\alpha)\mathcal{L}_1 + (\alpha + \delta\alpha)^2\mathcal{L}_2] (\hat{\mathbf{q}} + \delta\hat{\mathbf{q}}) = \mathbf{F} \quad (2-39)$$

其中 $\delta\alpha$ 和 $\delta\hat{\mathbf{q}}$ 为因为引入体积力产生的特征值和特征向量的变化。由于本文中均采用的是微弱的体积力控制失稳, 所以这两个量都是小量。将上式与伴随向量(伴随方程的解)做内积, 并忽略高阶小量, 得到:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{p}}, \mathbf{F} \rangle &= \langle \hat{\mathbf{p}}, [\mathcal{L}_0 + (\alpha + \delta\alpha)\mathcal{L}_1 + (\alpha + \delta\alpha)^2\mathcal{L}_2] (\hat{\mathbf{q}} + \delta\hat{\mathbf{q}}) \rangle \\ &\approx \langle \hat{\mathbf{p}}, (\delta\alpha\mathcal{L}_1 + 2\delta\alpha\mathcal{L}_2)\hat{\mathbf{q}} \rangle \end{aligned} \quad (2-40)$$

最终得到空间模式的复特征值关于体积力的敏感性为:

$$\delta\alpha \approx \frac{\langle \hat{\mathbf{p}}, \mathbf{F} \rangle}{\langle \hat{\mathbf{p}}, (\mathcal{L}_1 + 2\mathcal{L}_2)\hat{\mathbf{q}} \rangle} \quad (2-41)$$

### 2.2.3.2 基于抛物化扰动方程的敏感性分析

线性稳定性方程由于采用了平行流假设, 在分析边界层的稳定性的时候还是有很强的局限性。这一小节推导PSE的伴随方程和相应的敏感性分析公式。这里的推导与Pralits<sup>[27]</sup>文章中的类似。据作者所知, 本文中对三维边界层的敏感性分析还尚属国内外首次。由于本文研究的控制方法主要还是集中在扰动的线性增长区, 所以这里的PSE还只是线性的PSE, 并没有考虑非线性效应。所以式(2-35)中的源项 $\mathbf{S}_{mn}$ 只包含与流畅解耦的体积力项, 并不包含非线性项。另外, 忽略了非线性效应也就相当于忽略了模态互相干扰, 也使得每次计算中只需要考虑一个模态。这样, 本身是用来区分模态的下标 $nm$ 就可以略去不写, 这样PSE方程可以写为:

$$\mathcal{L}\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{A}} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial x} + \hat{\mathbf{B}} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial y} + \hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{H}_{yy} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{q}}}{\partial y^2} = \mathbf{S} \quad (2-42)$$

在研究敏感性问题时, 需要有一个输出目标函数。在基于LST的敏感性分析中, 扰动模态的增长率是一个天然且绝佳的候选项。在PSE的敏感性分析中, 这里将

下游某一位置的扰动能量作为输出函数。实际上敏感性分析可以理解为这一输出函数对输入变量，本文中也就是体积力的导数。输出函数的具体定义见式（2-43）

$$J = E = \left[ \frac{1}{2} \int_0^{T_z} \int_0^{\infty} \tilde{\mathbf{q}}^H \mathbf{M} \tilde{\mathbf{q}} dy dz \right]_{x=x_1} = \frac{1}{2} \int_0^{T_z} \int_0^{\infty} |\Theta_1|^2 \hat{\mathbf{q}}_1^H \mathbf{M} \hat{\mathbf{q}}_1 dy dz \quad (2-43)$$

上式中，下标‘1’代表着计算出口处，也就是提取输出函数位置的物理量。 $T_z$ 是失稳模态的展向波长。之后，对输出函数、控制方程（2-42）和波数迭代条件（2-33）做变分，得到下式：

$$\begin{aligned} \delta J &= \frac{1}{2} \int_0^{T_z} \int_0^{\infty} |\Theta_1|^2 \hat{\mathbf{q}}_1^H \mathbf{M} \delta \hat{\mathbf{q}}_1 dy dz \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{T_z} \int_0^{\infty} |\Theta_1|^2 \hat{\mathbf{q}}_1^H \mathbf{M} \hat{\mathbf{q}}_1 \left( i \int_{x_0}^{x_1} \delta \alpha(x') dx' \right) dy dz + c.c \end{aligned} \quad (2-44)$$

$$\mathcal{L} \delta \hat{\mathbf{q}} - \delta \mathbf{S} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \delta \alpha \hat{\mathbf{q}} = 0 \quad (2-45)$$

$$\int_0^{\infty} \left( \delta \hat{\mathbf{q}}^H \mathbf{M} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial x} + \hat{\mathbf{q}}^H \mathbf{M} \frac{\partial \delta \hat{\mathbf{q}}}{\partial x} \right) dy = 0 \quad (2-46)$$

这里c.c.代表方程中所有项的复共轭， $x_0$ 和 $x_1$ 分别是入口和出口处的流向位置。在进行下一步推导之前，需要先定义内积。在PSE的框架下，本文将内积定义为两个场向量点积之后在全计算域内的积分，即**a**与**b**的积分记作：

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \int_0^{T_z} \int_{x_0}^{x_1} \int_0^{\infty} (\mathbf{a}^H \mathbf{b}) dy dx dz \quad (2-47)$$

其实接下来需要做的就是想办法消去式（2-44）中的中间变量。这里，引入一个所谓的伴随向量 $\hat{\mathbf{q}}^*$ 和复变量 $r^*(x)$ 。令这两个量分别与方程（2-45）和（2-46）做内积，并加上他们的复共轭，可以得到恒等式：

$$\int_0^{T_z} \int_{x_0}^{x_1} r^* \int_0^{\infty} \left( \delta \hat{\mathbf{q}}^H \mathbf{M} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial x} + \hat{\mathbf{q}}^H \mathbf{M} \frac{\partial \delta \hat{\mathbf{q}}}{\partial x} \right) dy dx dz + \langle \hat{\mathbf{q}}^*, \mathcal{L} \delta \hat{\mathbf{q}} - \delta \mathbf{S} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \delta \alpha \hat{\mathbf{q}} \rangle + c.c. = 0 \quad (2-48)$$

很显然，对于任意的 $\hat{\mathbf{q}}^*$ 和 $r^*$ 都能够使上面的等式成立。为了消除中间变量，需要选取好的 $\hat{\mathbf{q}}^*$ 和 $r^*$ 。这里，本文令这两个变量分别满足伴随方程（2-50）和伴随波数

迭代条件 (2-49)。很容易证明, 伴随方程也是椭圆性的, 计算的时候可以从下游向上游回溯推求解。

$$\mathcal{L}^* \hat{\mathbf{q}}^* = (\bar{r}^* - r^*) \mathbf{M} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{r}^*}{\partial x} \mathbf{M} \hat{\mathbf{q}} \quad (2-49)$$

$$\int_0^\infty \left( \hat{\mathbf{q}}^{*H} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \hat{\mathbf{q}} \right) dy = \int_0^\infty i |\Theta_1|^2 \hat{\mathbf{q}}_1^H \mathbf{M} \hat{\mathbf{q}}_1 dy \quad (2-50)$$

$\mathcal{L}^*$ 是PSE伴随方程算子, 字母上的横线表示相应变量的复共轭。伴随向量和 $r^*$ 计算的初始值, 也就是出口处的值为:

$$\begin{aligned} c &= \frac{- \int_0^\infty i |\Theta_1|^2 \hat{\mathbf{q}}_1^H \mathbf{M} \hat{\mathbf{q}}_1 dy}{\int_0^\infty \left( \hat{\mathbf{q}}_1^H \mathbf{M} \left( \hat{\mathbf{A}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \hat{\mathbf{q}} \right) dy \Big|_{x=x_1}} \\ \hat{\mathbf{q}}_1^* &= -\bar{c} \left( \hat{\mathbf{A}}^H \right)^{-1} \mathbf{M} \hat{\mathbf{q}}_1 \\ r_1^* &= c + |\Theta_1|^2 \end{aligned} \quad (2-51)$$

综上, 如果伴随向量和 $r^*$ 满足上面给出的式 (2-49) (2-50) 和 (2-51), 那么式 (2-48) 可以简化为:

$$\delta J = \frac{1}{2} \langle \hat{\varphi}^*, \delta \mathbf{S} \rangle + c.c. \quad (2-52)$$

也就是说, 不再需要求解PSE方程, 直接通过计算伴随向量和外加体积力的内积, 便可以直接得到体积力对下游扰动能量的影响。当然, 式 (2-52) 中的 $\delta \mathbf{S}$ 还是形函数控制方程中的源项的变化, 需要将其转换到实际的体积力中。本文做稳定分析主要老师对比添加控制和不添加控制下的扰动能量, 所以令初始的体积力为0, 这样的话, 体积力的变化可以写为:

$$\delta \mathbf{F} = \Theta \delta \mathbf{S} + \mathbf{S} i \int_{x_0}^x \delta \alpha(x') dx' = \Theta \delta \mathbf{S} \quad (2-53)$$

代入式 (2-52), 得到:

$$\delta J = \frac{1}{2} \langle \hat{\varphi}^*, \frac{\delta \mathbf{F}}{\Theta} \rangle + c.c. \quad (2-54)$$

将上式展开并写成分量的形式，最终得到：

$$\delta J = \int_0^{T_z} \int_{x_0}^{x_1} \int_0^{\infty} (G_u \delta f_x + G_v \delta f_y + G_w \delta f_z) dy dx dz \quad (2-55)$$

$$\begin{aligned} G_u &= \text{real}(\hat{u}^{*H} \exp(-i \int_{x_0}^x \alpha(x') dx' - in\beta z)) \\ G_v &= \text{real}(\hat{v}^{*H} \exp(-i \int_{x_0}^x \alpha(x') dx' - in\beta z)) \\ G_w &= \text{real}(\hat{w}^{*H} \exp(-i \int_{x_0}^x \alpha(x') dx' - in\beta z)) \end{aligned} \quad (2-56)$$

本文将  $G_u$ ,  $G_v$  and  $G_w$  命名为流向、法向、展向敏感性因子，并在之后展示的结果中给出他们的具体分布，以探究体积力对失稳过程的影响。

### 2.3 充分发展槽道的直接数值模拟

## 第3章 后掠Hiemenz流动的失稳分析与控制

后掠Hiemenz流动与后掠翼上的三维边界层流动非常相似，是非常好的模型流动。本文从这一流动出发，研究三维边界层的横流失稳。原始的二维Hiemenz流动就是一股平面射流，自上而下打到一块平板上，并向平板两边溢流开来。在无粘流的假设下，这与直角的角域流动完全等价。因此，我们可以通过构造幂指数复势解得到无粘的Hiemenz流动的流场分布。这里，将无粘流动壁面上的流速分布作为边界层外缘的速度分布。这一分布的流向速度分量是线性增加的，如式（3-1）。式中上标‘ $\dagger$ ’表示有量纲量， $c$ 是一个常系数。在二维Hiemenz流动的基础上，引入展向均匀的流动，就是后掠Hiemenz流动，如图（3.1）所示。有一些研究主要着眼于其附着线的失稳研究<sup>[28,29]</sup>，本文重点分析研究远离附着线区域的横流转捩问题。研究区域如图（3.1）中虚线所示。Malik等人<sup>[18]</sup>对这一问题的首次失稳和二次失稳做了充分的研究，本文的控制算例也是以他们研究过的工况作为基准算例。本文中采用与文献中<sup>[18]</sup>相同的方法求得这一流动的自相似解，并以此作为基本流。

$$U_\infty = cx^\dagger \quad (3-1)$$

在后掠Hiemenz流动中，引入的边界层外缘展向速度 $W_\infty$ 在所有流向位置是相同的，因此将这一速度选作参考速度。Malik等人在研究这一问题时，也采用这一速度作为参考速度。 $l^\dagger = (\nu/c)^{\frac{1}{2}}$ 可以用来表征边界层厚度，本文在这个算例中用这个长度作为参考长度。以 $W_\infty$ 作为参考长度定义的雷诺数叫做横流雷诺数， $Re_W = W_\infty l^\dagger / \nu$ ，这个雷诺数在Malik等人的文章<sup>[18]</sup>中被记做 $\bar{R}$ 。

### 3.1 后掠Hiemenz流动的稳定性分析

表3.1列出了这一章研究的算例的具体参数。在后文中，这两个算例会被简记为Case1和Case2。其中Case1的参数与文献<sup>[18]</sup>中完全相同，只是换算到了实际有量纲的情况。图3.2给出了Case1中主模态扰动延流向的发展变化。在本文的模拟计算中，流向用了600个网格点，基本上每个波长都有14个网格点。前人的文献中指出，对于PSE计算，每个波长内有3个网格点就绰绰有余了<sup>[30]</sup>，所以本文中使用的网格点密度是完全满足要求的。在垂直于壁面方向，Li等人<sup>[31]</sup>指出281个网格点就完全够用了，本文的计算中一共给了301个点。从图3.2所示的结果中，也可

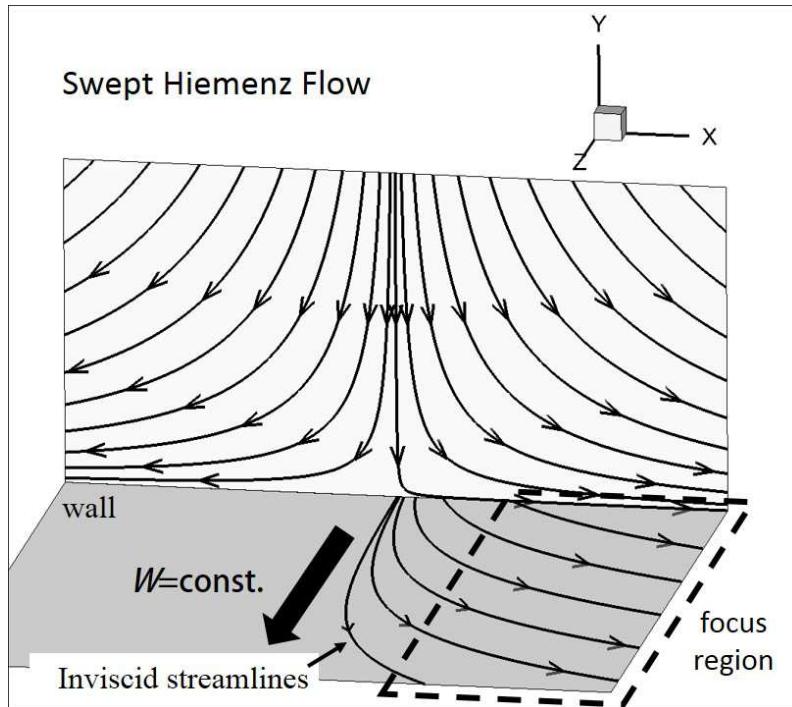


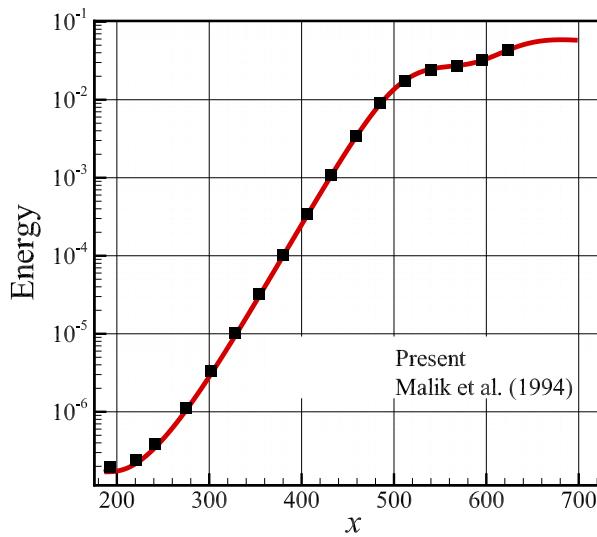
图 3.1 后掠Hiemenz流动示意图

表 3.1 计算研究算例的参数

|       | $c(\text{s}^{-1})$ | $l^\dagger = (\nu/c)^{\frac{1}{2}}(\text{mm})$ | $W_\infty(\text{m/s})$ | $Re_W = W_\infty l^\dagger / \nu$ |
|-------|--------------------|--|------------------------|-----------------------------------|
| Case1 | 40                 | 0.6014   | 12                     | 500                               |
| Case2 | 40                 | 0.6014   | 24                     | 1000                              |

以看到，本文的计算结果与文献给出的结果完全吻合，这也再一次验证了使用计算程序的精度。这套稳定性计算程序之前还进行过其他方面的稳定性计算，读者可以查阅<sup>[32–38]</sup>。在本章的研究中，采用的等离子体模型为从实验中反推出来的体积力分布模型（Kriegseis' model<sup>[39]</sup>）。在他们的实验中，一共测了8， 9， 10 kV三个电压产生的体积力。这三个电压分别可以吹出来速度为1.7， 2.8， 3.8 m/s平行于壁面的射流。但是，在实际计算中发现，只有8kV的电压产生的体积力可以有效的控制Case1中的横流转捩，另外两个高电压产生的体积力都太强了，范围会促进转捩。所以为了研究电压的效果，在Case2中，将边界层外的展向速度提高了一倍，这样三个电压都可以产生一定的作用，并进行比较研究。

针对这两个算例，本文首先进行了线性稳定性分析（LST）。在线性稳定性分析中，在不同的流向位置均采用小扰动假设和平行流假设，计算不同展向波数 $\beta$ 的横流定常模态的增长率。最终得到模态的增长率随流向位置和展向波数的变化如图3.3。在这两个计算中，展向波数的取值范围均为 $\beta \in [0.1, 1]$ 。因为这里只关注由壁面粗糙度激发出来的定常横流模态，所以模态的频率 $\omega = 0$ 。这里所说的流向

图 3.2 计算得到的扰动能量与文献<sup>[18]</sup>中的结果对比 ( $Re_W = 500$ )

增长率即为计算得到的复流向波数的虚部的相反数，即 $-\alpha_i$ 。对于Case1，失稳模态首先出现在 $x = 83$ ，失稳模态的展向波数 $\beta$ 为0.12。最大的失稳模态增长率出现在 $x = 305$ ，展向波数 $\beta$ 为0.33，增长率为0.0243。对于Case2，失稳模态首先出现在 $x = 85$ ，失稳模态的展向波数 $\beta$ 为0.05。最大的失稳模态增长率出现在 $x = 451$ ，展向波数 $\beta$ 为0.26，增长率为0.0336。对比这两个算例，可以发现，随着横向流动的增加，失稳模态的增长率更高了，失稳的区域也更加偏向于下游。另外需要提及的是两者中性曲线，也就是增长率0的等值线形状的变化。总的来说，随着增横向流动的增大，中性曲线的下支越来越贴近坐标的横轴线，上支的斜率越来越小。其中，上支的斜率越来越小说明高波数的模态的失稳位置更加偏向于下游。

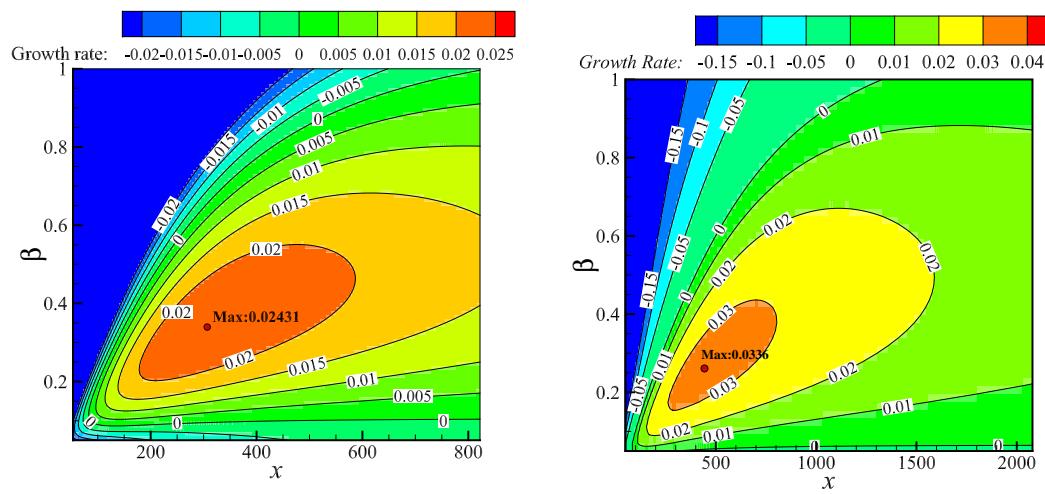


图 3.3 定常横流模态的流向增长率

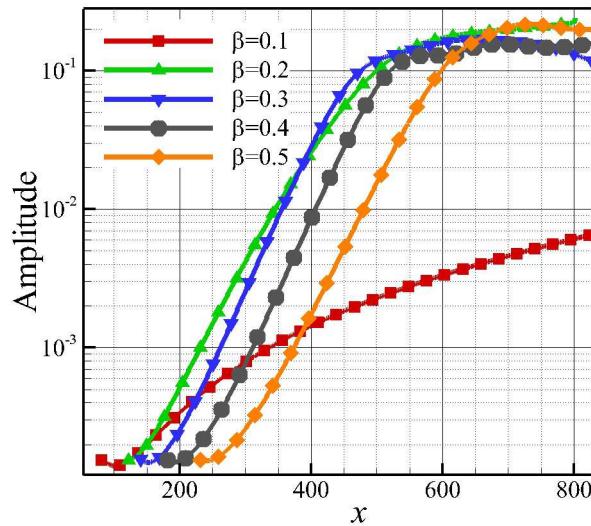


图 3.4 Case1算例中，入口扰动展向波长不同时，主模态幅值的流向演化

线性稳定性计算只能够静态的得到每个模态在不同的位置的增长率，而得不到模态演化以及相互影响的过程。之后本文对这两个算例都进行了NPSE的计算。稳定性分析仅仅能够得到扰动在边界层内的增长情况，但是并不能计算得到扰动的初始值。不同的来流条件和壁面光滑程度会导致不同的扰动初值幅值，计算初始值需要对流动进行感受性分析。由于本文并不关心感受性过程，所以这里只研究一种可能的初始值情况。这里计算模拟了初始扰动主模态的展向波数为0.1、0.2、0.3、0.4和0.5的5种情况。这些模态分别被记为Mode1到Mode5。由于不同展向波数的模态的失稳起始位置是不一样的，所以本文的NPSE计算的起始点也是各个子算例各有不同。这5个模态分别起始于 $x = 86, 101, 134, 173$ 和218。这也分别是LST预测的失稳起始位置。在计算起始位置只有主模态，所有高阶模态都是后续通过非线性效应激发出来。计算得到的结果如图3.4所示。可以看到，Mode1最先失稳，但是相比于其他模态，其增长率则相对较低，所以很快便被其他模态超越。Mode3，其展向波数为 $\beta=0.3$ 在 $x = 470$ 处首先达到饱和。定性的，首次失稳饱和之后，在饱和横流涡上发生的二次失稳会很快促发转捩。所以这里Mode3将是主导转捩的模态。之后，本章将以此模态作为控制目标模态，所有控制算例均谊在控制此模态。

## 3.2 后掠Hiemenz流动的敏感性分析

### 3.2.1 基于LST的敏感性分析

在这一小节中，介绍一下敏感性分析的研究成果。从式（2-41）中我们发现

伴随向量是直接起到对体积力的加权作用的，所以通过对该向量的分析，我们可以获得体积分法向敏感性分布的大致情况。三个方向伴随速度（伴随向量中对应于速度的三个分量）的分布如图3.5：从伴随速度的分布中我们可以看到，展向

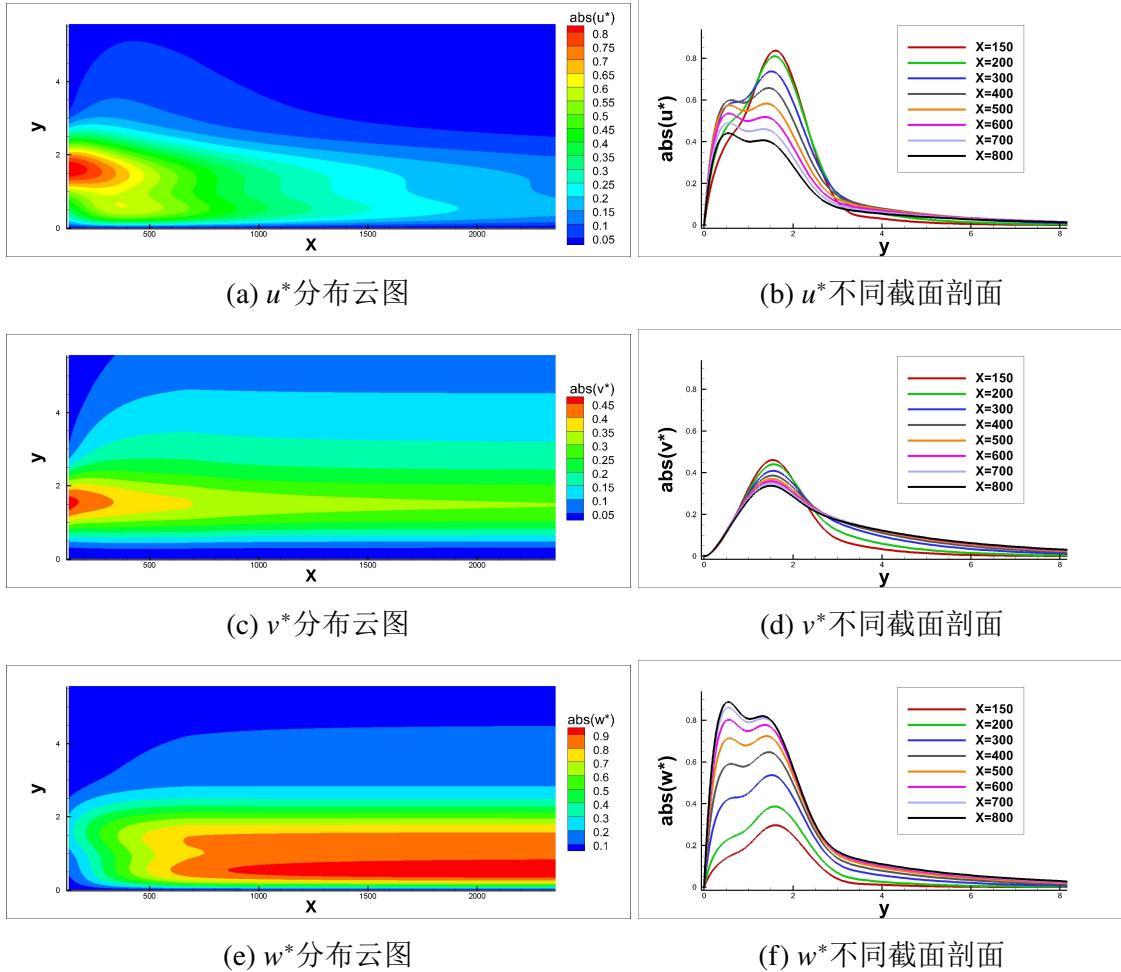
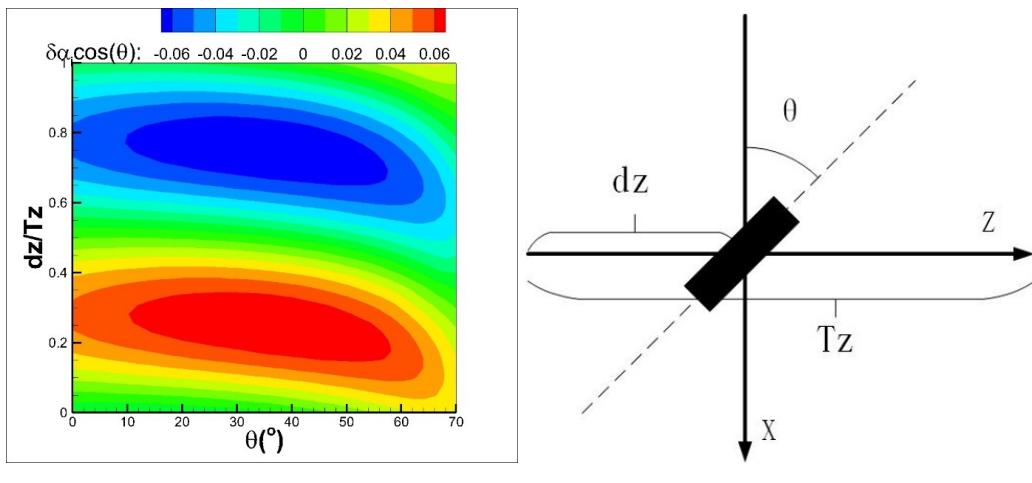


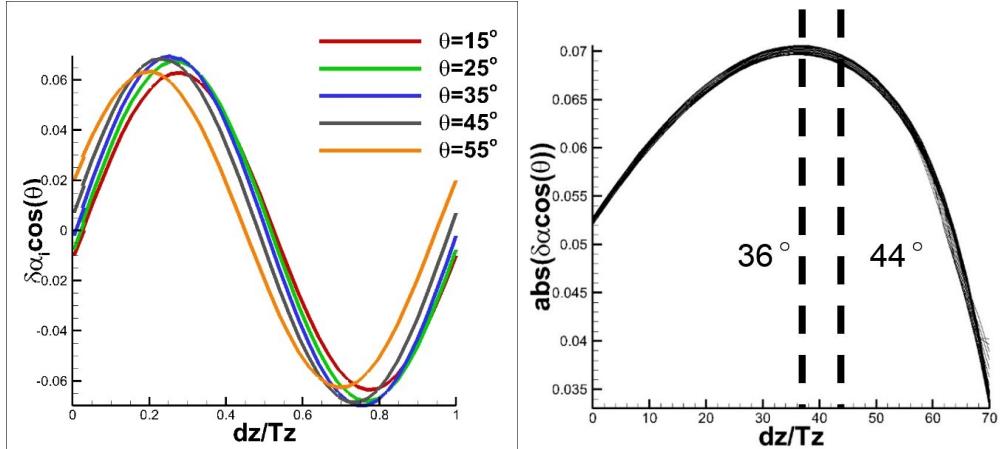
图 3.5 LST伴隨向量

和流向的伴随速度始终大于法向的伴随速度。这表明，该流动对于展向和法向的激励更加敏感，而对于法向的机理则不是那么敏感。另外，随着扰动延流向发展，其对展向的激励越来越敏感，而对流向则越来越不敏感。从物理上这也很好解释。在靠近前缘的位置，基本流的流向分量很弱，所以只需要很小的扰动就能够对其产生很大的影响。之后随着流向的推进发展，流向的基本流越来越强，对其产生扰动需要的力量也就越来越大，从而敏感性也就越来越低。

针对我们提出的等离子体控制方案，我们用所推导出的敏感性公式分析其控制效率，得到在某一固定位置，扰动模态增长率变化与激发器展向位置和安装角度的关系如图3.6。在这里，我们在增长率变化量后面乘了一个因子 $\cos(\theta)$ ，这是因为当偏转激发器角度的时候，激发器所能覆盖的流向位置就变短了，变成了



(a) 敏感性随安装的展向位置和角度变化      (b) 激发器安装方位示意图  
图 3.6 LST敏感性分析结果



(a) 敏感性随展向安装位置的变化      (b) 敏感性随安装角度的变化  
图 3.7 LST敏感性分析结果

原来的 $\cos(\theta)$ 倍。而增长率指的是单位流向长度的增长率，所有乘上了这个系数。可以看到，敏感因子随着展向的变化呈正弦规律，而最佳安装角度 $36^\circ$ 与横流涡角度 $44^\circ$ 差距不大。得到不同的流向位置最大增长率减小值之后，我们对比了流向敏感性，如图3.8。我们可以看到，在进入失稳区之后，相同大小的体积力对横流模态的影响就越来越小。然而这一结论是建立在线性、单一模态、正确相位的基础上的，实际应用时，越靠近中性点越容易激发出别的扰动模态从而影响转捩。

### 3.2.2 基于PSE的敏感性分析

由于基于LST的敏感性分析还是局部性质的结果，并且在推导的时候忽略了二阶项的影响，所以其结果精确度并不高。这一小节主要展示基于PSE的稳定性分析及的结果。依然是针对Case1以及我之前确定的目标模态。这里由于本文希

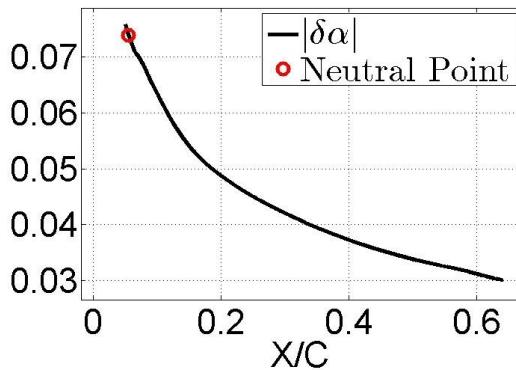


图 3.8 敏感性随流向位置变化

望采用的控制方案还是在线性区进行控制，所以敏感性分析也是只针对线性区进行。因此，这里的原始方程是线性PSE方程，并不包含模态之间的非线性相互作用。图3.9给出了流向速度和敏感因子在 $x = 280$ 位置横截面的分布。需要注意的是，在基于LSE的敏感性分析中，针对的目标变量是扰动模态的增长率，而在基于PSE的敏感性分析中，针对的目标变量是下游某一位置处的扰动能量量（式（2-43））。图3.9展示的是输出扰动能量选取在 $x = 500$ 的结果。其中，用颜色表示的云图是流向的速度分布，线条是各个方向敏感性因子的等值线。这里用实线表示正值用虚线表示负值。从流向速度分布的云图中，可以看到横流涡正在形成，但是还没有标志着横流涡达到饱和的“上叶翻转”现象。“上叶翻转”也是强非线性产生的标志。从流向速度分布云图中可以看出，这个分析敏感性的位置还处于线性增长区，也符合本文的初衷。虽然横流涡在这里还没有完全形成，但是壁面附近已经有了高低速相间的条带。其他位置的敏感因子分布情况与图3.9展示的类似，这里就不再赘述。值得一提的是，相比于敏感因子的大小，敏感因子的正负是指导控制方案的关键。

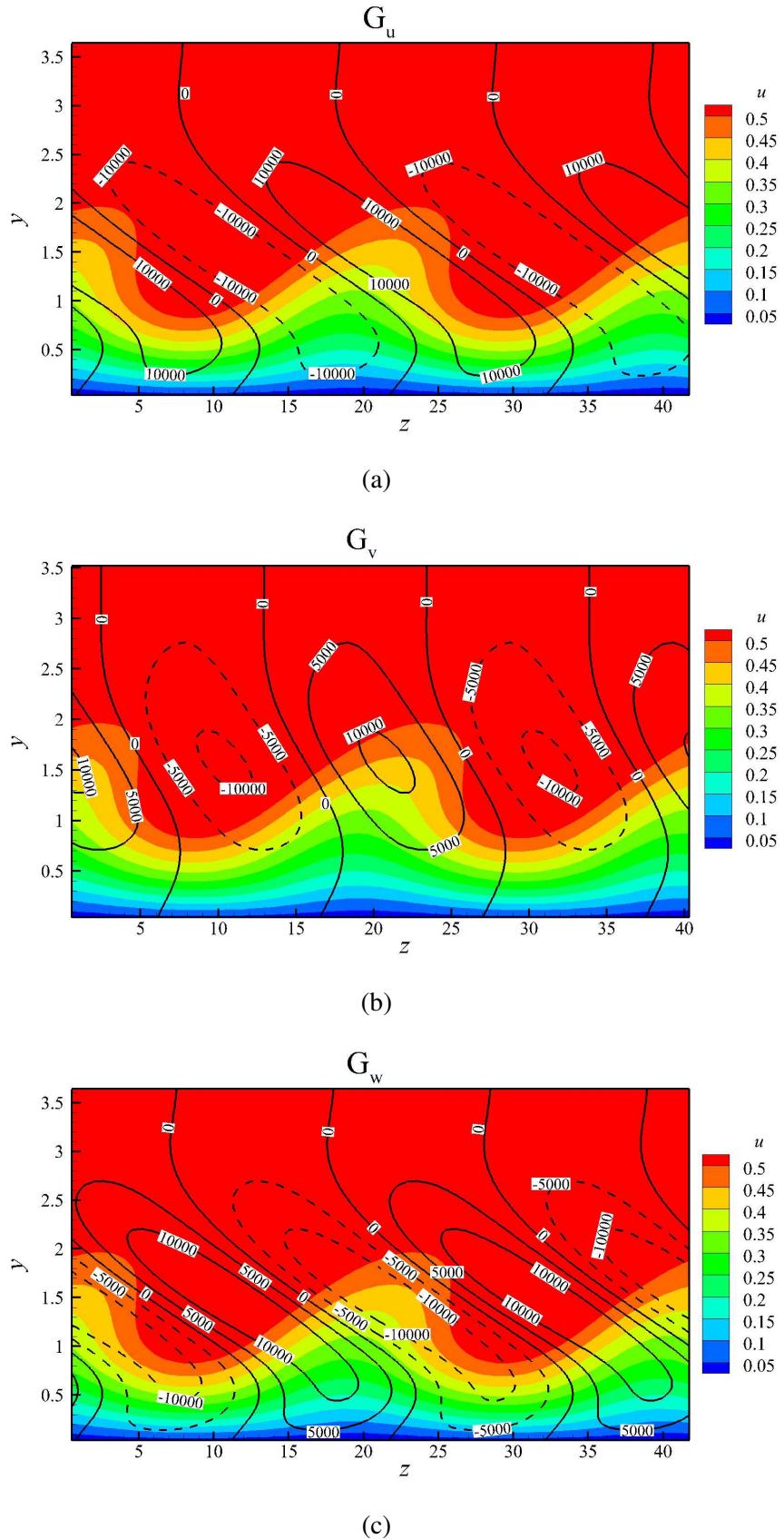


图 3.9  $x = 280$  处横截面上流向速度分布云图和三个方向敏感性因子分布等值线: (a)  $G_u$ , (b)  $G_v$  and (c)  $G_w$ 。实线表示正值, 虚线表示负值。扰动能量输出位置选取在  $x = 500$

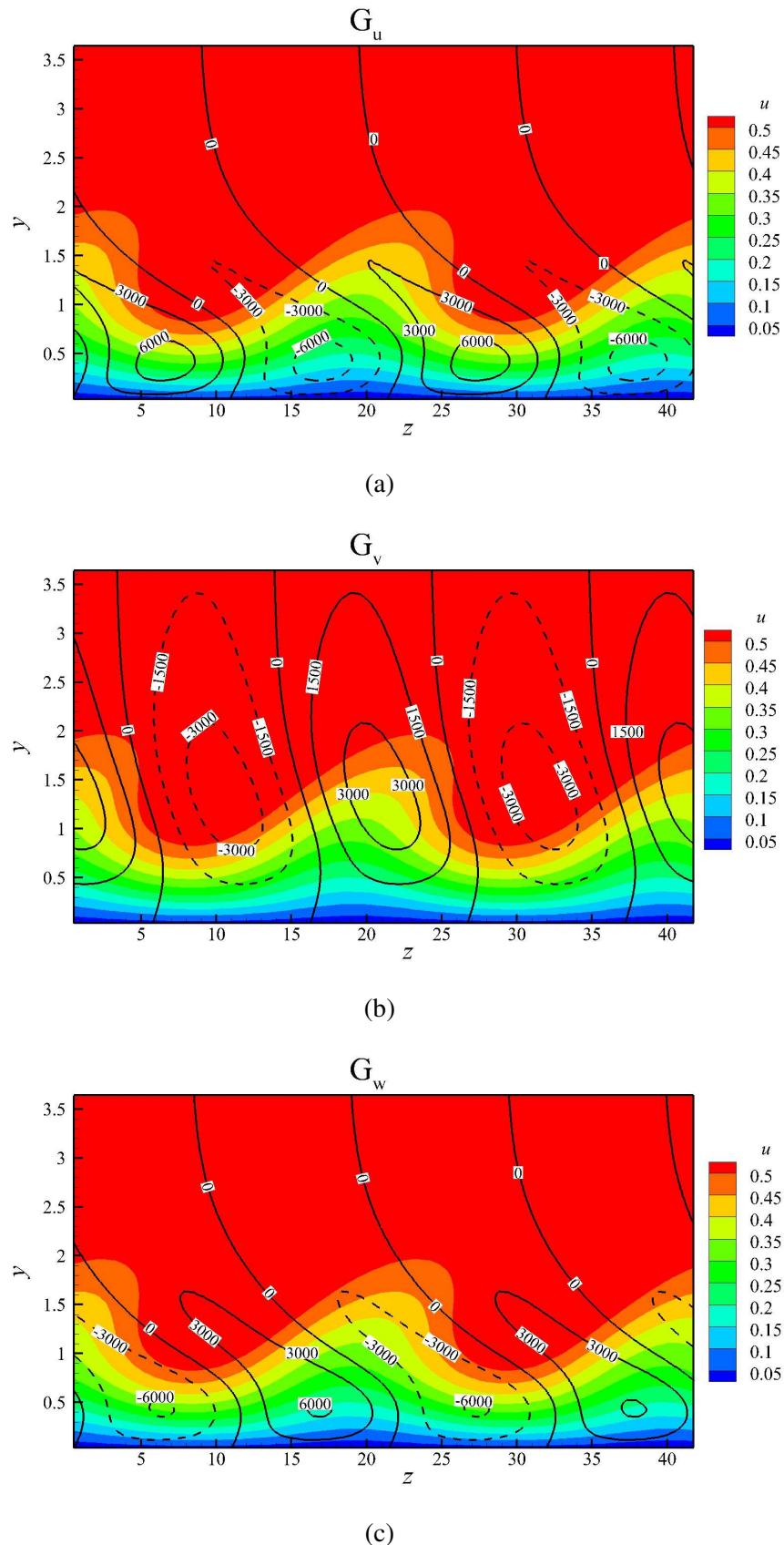


图 3.10  $x = 280$  处横截面上流向速度分布云图和三个方向敏感性因子分布等值线: (a)  $G_u$ , (b)  $G_v$  and (c)  $G_w$ 。实线表示正值, 虚线表示负值。扰动能量输出位置选取在  $x = 300$

如图3.9(a)所示,  $G_u$ 的正值分布在高速条带下方, 并且斜着向上延伸, 与相邻的低速条带重合。正值区与负值区相间交替出现。图3.9(b)中,  $G_v$ 的正值主要集中在低速条带出现的区域, 而高速条带位置主要是负值。这意味着如果想要通过法向激励的方式, 比如壁面垂直吹吸之类的方法控制失稳, 那么就需要在低速条带下面吸气, 在高速条带下面吹气。 $G_v$ 的0值等值线并不像 $G_u$ 和 $G_w$ 的0值等值线那样扭曲。 $G_w$ 的分布情况基本与 $G_u$ 类似, 只是正负值分布的区域做了交换。在Dörr和Kloker<sup>[40]</sup>提出的等离子体控制方法中, 他们有两个基础的控制算例分别叫做ACF和CCF。这两个控制算例的计算结果展示在他们文章的Fig 4中。在ACF算例, 有着展向正方向分量的体积力被施加在了横流涡下方, 也就是图3.9(c)所示的 $G_w$ 恰好是负值的位置。在他们的算例CCF中, 有着与ACF中体积力相反方向的体积力被施加在了二次涡出现的位置, 也就是图3.10中所示高速条带的位置。这里一位置的 $G_w$ 恰好是正的。从式(2-55)可知, 负的敏感因子乘上正的体积力, 或者是正的敏感因子乘上负的体积力, 都可以得到负的扰动能量变化, 也就是使得扰动变弱。Dörr和Kloker<sup>[40]</sup>的结果也印证了这里敏感性分析的结论。在下一小节的等离子体控制算例的结果, 也会对本文推倒的敏感性分析做相关的印证。

由于并不知道扰动能量输出位置的选取对敏感性因子的计算结果有没有影响, 所以本文计算了输出位置在 $x = 450, 400, 350, 300$ 的敏感性因子分布。图3.10给出了 $x = 280$ 截面上流向速度分布云图和敏感性因子的等值线, 但这一次的扰动能量输出位置选取在 $x = 300$ 。相比较输出位置选取在 $x = 500$ , 流向和展向敏感因子的分布更加的贴近壁面。然而, 当输出位置与所观察的截面想去较远时, 如输出位置在 $x = 350, 400, 450$ , 则结果和图3.9中的分布几乎完全一样。所以这里不再将这些相同的分布罗列出来。所以, 通过比较输出位置在 $x = 500, 450, 400, 350, 300$ 这五个算例, 可以下如下结论: 当在近所关心位置上游不远处进行控制时, 更加靠近壁面的控制激励效果更好。但是这一效应在远离所关心位置之后迅速衰减并消失。由于本文之后采取的控制措施都是在离关心区域较远的位置, 之后展示的敏感因子均是以 $x = 500$ 为输出位置计算得到的。

图3.11给出了靠近壁面 $z - x$ 平面上, 展向敏感因子 $G_w$ 的分布等值线和流向速度分布云图。从图中可以清楚的看到高低速条带的相间分布。其中红色代表着高速条带, 蓝色代表着低速条带。在远离输出位置的区域内, 可以看到 $G_w$ 的等值线基本上与条带平行。不平行的区域只有大约不到40的无量纲长度。这意味着最佳的等离子激发器布置方案也应该是平行于高低速条带, 也就是平行于横流涡轴。这样可以保证在每一个横截面内, 激发器产生的体积力都处在流动最敏感的区域

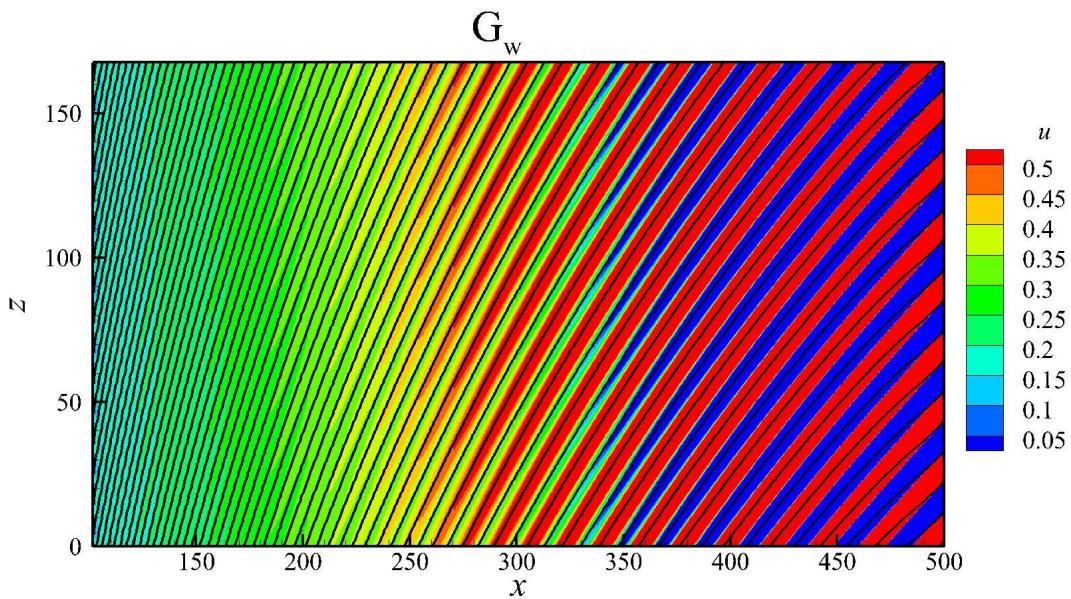


图 3.11 展向敏感性因子  $G_w$  在  $y = 1$  平面上的等值线（颜色为流向速度云图）

内。Dörr 和 Klocke<sup>[40,41]</sup>提出的控制方法就总是让激发器平行于横流涡轴。

图3.12给出了三个方向敏感性因子展向最大值在  $y - x$  平面内的分布。从图中可以看到，流向的敏感性因子最大。另外，最敏感的区域位于边界层内，但是离壁面却还有一定的距离。这是因为在壁面附近，粘性主导，速度剪切很大，体积力想改变流动非常困难，远不如远离壁面的位置改变流动容易。当然，如果出了边界层，体积力产生的扰动又不会影响失稳模态，从而敏感性也会降低。所以最敏感的区域出现在高度适中的位置。

图3.13给出了不同流向位置敏感性因子在横截面上最大值的分布。图中虚线表示的是中心点的位置  $x = 134$ 。敏感性因子的峰值大约在中性点前一点点的位置。这和文献<sup>[27]</sup>中给出的二维平板的敏感性分析结果类似。这一结果与本文之前给出的基于LST的敏感性分析类似，从而也互相印证了这两种方法的正确性。在失稳区域，敏感性快速下降，这也意味着对扰动的控制在外加体积力相同的条件下，越靠近上游越好。但是需要注意的是，敏感性分析的前提假设是体积力引入的扰动相对于流动本身就有的扰动是一个小量。很显然，在上游扰动刚刚生成，还非常弱，如果引入的体积力会产生比自然扰动还强的扰动，则反而会适得其反，使得新的扰动盖掉了之前的自然扰动，反而会促进转捩。所以合适最佳流向位置还需要做进一步的研究。

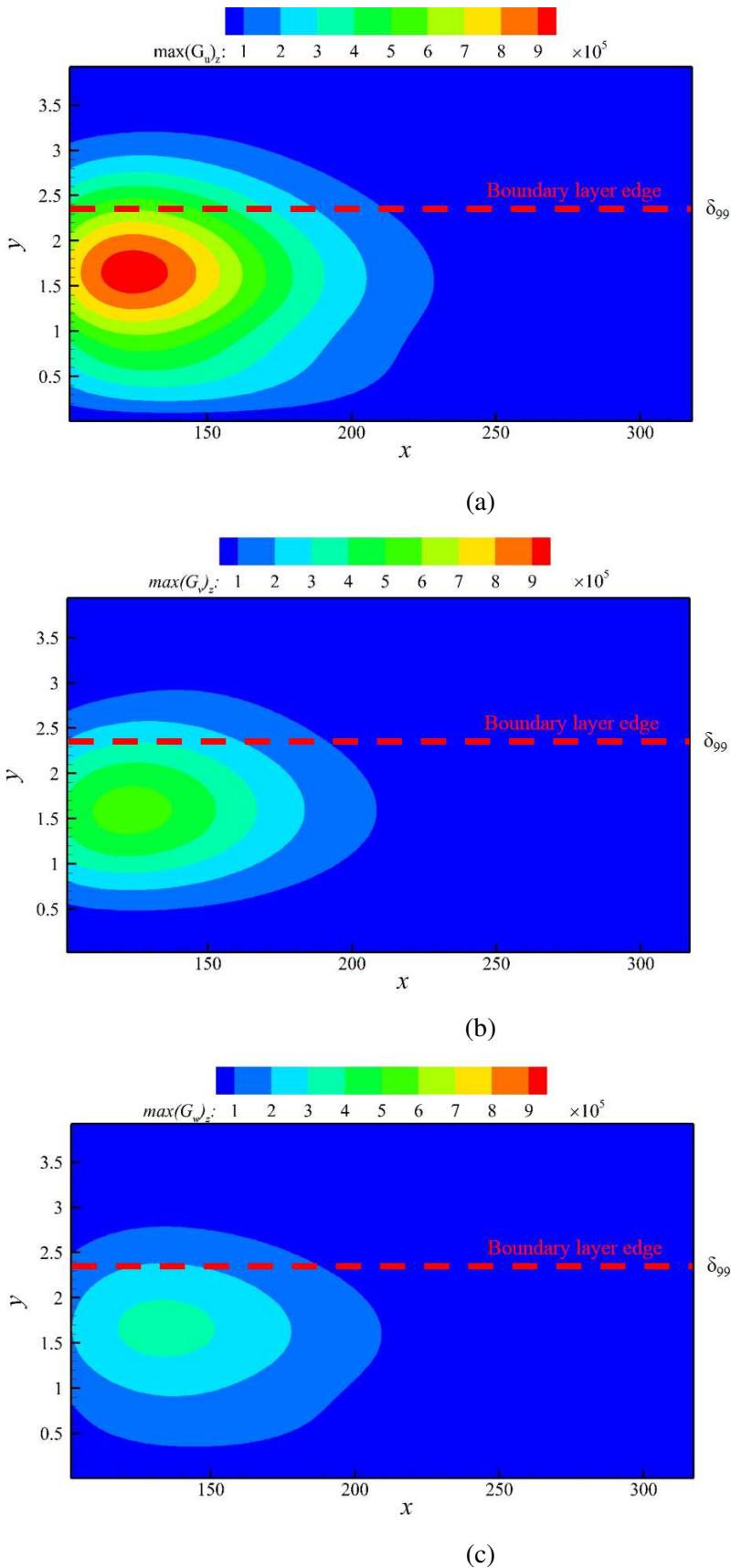


图 3.12 敏感性因子展向最大值在  $x - y$  平面上的分布云图 (a)  $G_u$ , (b)  $G_v$  and (c)  $G_w$ 。输出位置选取在  $x = 500$

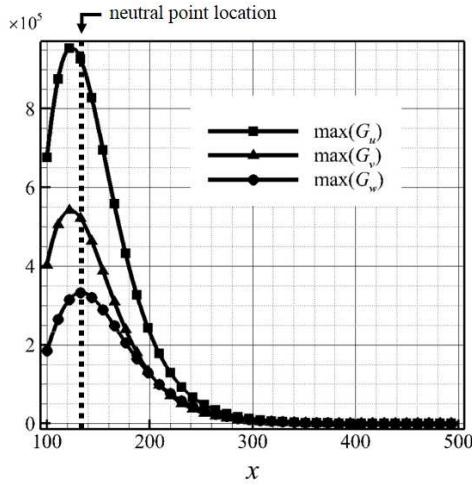


图 3.13 不同横截面上敏感性因子的最大值在流向分布变化

### 3.3 采用等离子体激发器推迟后掠Hiemenz流动转捩

上一小节给出的敏感性分析都是基于线性稳定性的，这一小节将重点介绍非线性抛物华扰动方程（NPSE）计算的结果。在这一小节中，等离子体模型均使用之前介绍的Kriegseis的模型<sup>[39]</sup>。所有激发器的电压均为8kV。更高的电压也做过测试，但是由于NPSE本身是一种稳定性分析的方法，是用来计算小扰动的。当大于8kV的电压加入到流场中，计算就因为扰动过强而直接崩溃了。在崩溃前可以观察到扰动能量的大幅提升。这也说明了过高的电压对转捩反而会起到促进作用。采用8kV的电压进行控制时，首先研究了展向的位置效应。控制时，在每个展向波长内放置一个激发器。由于这样的激励会直接刺激主模态，所以本文中将这种方法命名为谐波激励。激发器位于不同的展向位置时，边界层内的扰动能量演化情况如图3.14所示。在本文中，模态能量的定义如下：

$$\text{Energy} = \frac{1}{2} \int_0^\infty (|\hat{u}|^2 + |\hat{v}|^2 + |\hat{w}|^2) dy \quad (3-2)$$

由于平均流修正模态（或叫做基本流修正模态），也就是(0,0)模态并没有复共轭，所以它的能量定义为：

$$\text{Energy}_{00} = \frac{1}{4} \int_0^\infty (|\hat{u}|^2 + |\hat{v}|^2 + |\hat{w}|^2) dy \quad (3-3)$$

图3.15给出了不同算例中等离子体激发器产生的体积力和横流涡的展向位置关系。这里列出的激发器的展向位置分别在 $z/T_z = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$ ，本文之

后简记为算Case (a) - (f)。由于横流涡是斜的，所以在不同的流向界面上，横流涡所处的展向位置并不相同。也就是说单说展向坐标并没有实际意义，关注的主要应该放在体积力和横流涡的相对位置上。图中的颜色云图是体积力的分布，截掉了小于最大值10%的颜色。图中的线是流向速度的等值线，可以看到横流涡将壁面的低速流动卷起并翻转。等离子体在流向的激励区域用两个蓝色的点表示出来。这里模态还是用频率-展向波数来表示。由于本文针对的还都是驻涡模态，所以第一个数字都是零。第二个数据表示模态展向波数相对于主模态展向波数的倍数。如之前提到的(0,0)模态即为基本流修正模态，(0,1)是主模态，(0,2)是半波长的次谐波模态。从图3.14中可以看到，主模态的演化规律和之前敏感性分析预测的结果吻合：在Cases(d)和(e)中，主模态能量大幅下降，而这时体积力的位置正好在横流涡的下方，也就是之前敏感性分析得到的 $G_w$ 为负值的区域。在这两个算例中，主模态的能量分别降到了0.0067和0.0077。然而在Cases(a)到(d)中，(0,2)模态被促进了，这和Dörr与Kloker<sup>[40]</sup>在他们的DNS的结果中观察到的相同（他们文章中的Fig 8）。在有些算例中（图3.14(d)），(0,2)模态的能量甚至超过了主模态的能量。不过，在Cases(e)和(f)中，并没有出现(0,2)模态被促进这一现象。所以，半波长模态能量的增加并不是所有算例共有的特性，通过调整激发器的展向位置，是可以有效降低所有模态的能量的。在图中所示的算例中，可以看到激发器在 $z/Tz = 0.9$ 效果最好。需要提一下的是，Dörr和Kloker的 DNS<sup>[40]</sup>结果中，所有算例里(0,2)模态都被激发了。

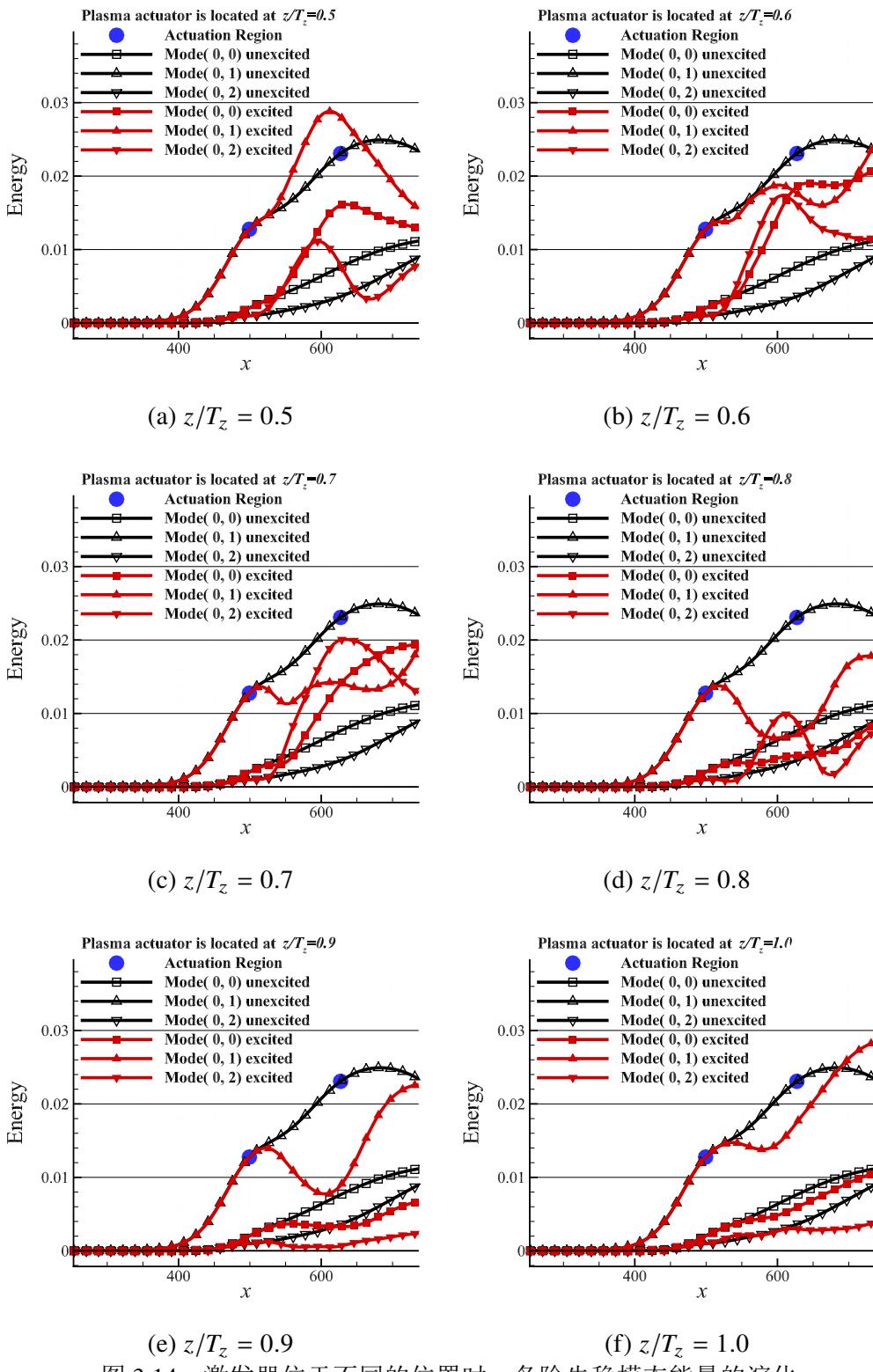


图 3.14 激发器位于不同的位置时，各阶失稳模态能量的演化

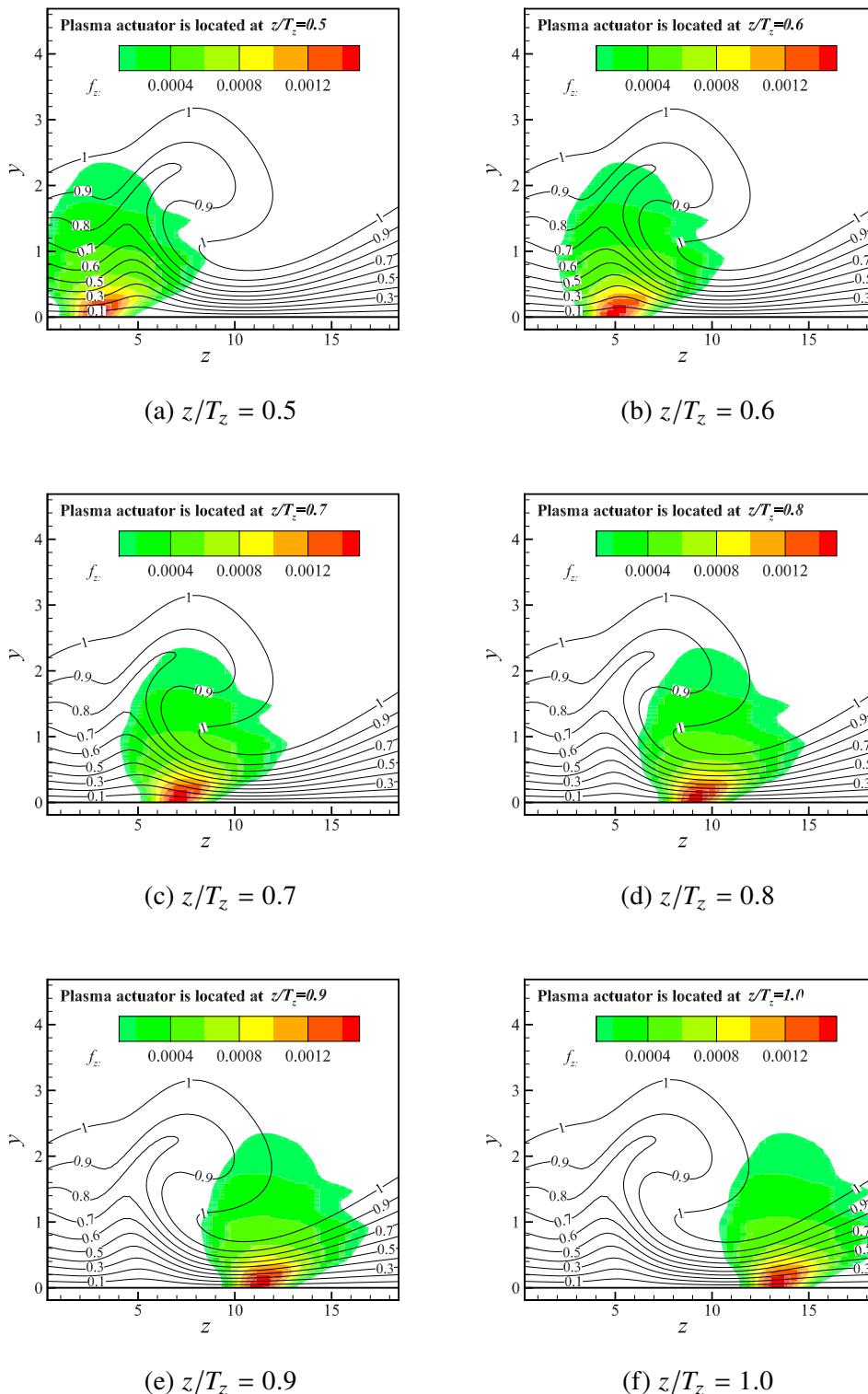


图 3.15 不同算例中体积力与原横流涡位置关系。颜色云图为体积力分布，曲线为无控制的流向速度等值线

接下来进行等离子体激发器流向位置效应的研究。需要提及的是，在每一个流向位置，本文都测试了诸多展向控制位置，并且将其中最好的一个算例选取

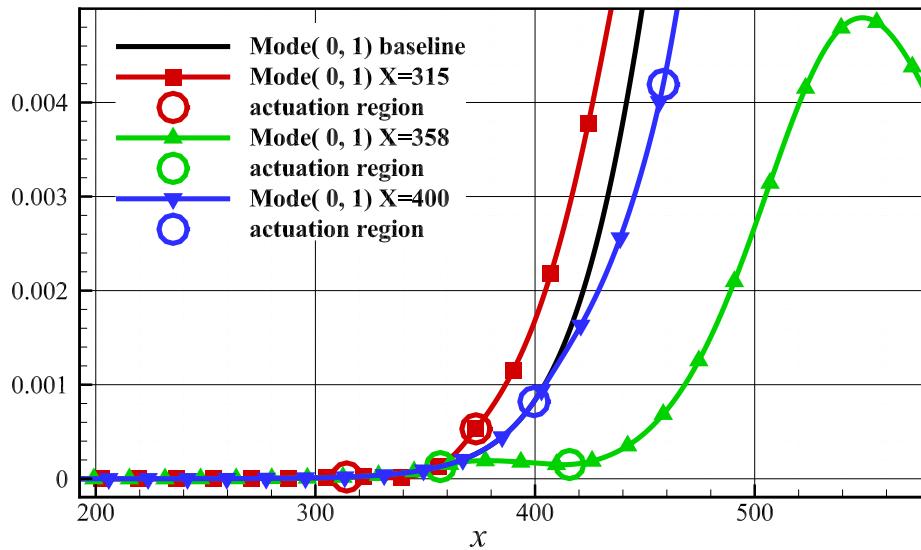
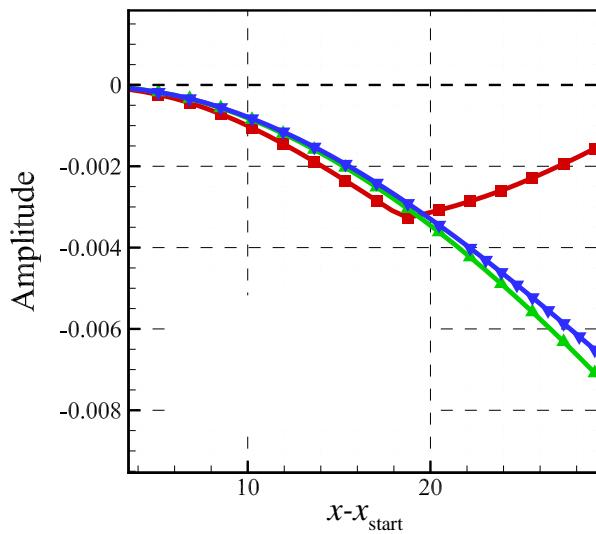


图 3.16 激发器位于不同的流向位置控制效果对比（主模态能量对比）

图 3.17 激发器位于不同的流向位置控制效果对比。横轴为据控制起始位置 $x_{\text{start}}$ 的距离，纵轴为控制后主模态幅值与无控制主模态幅值之差

出来进行比较。每一个位置的激发器展向效应与之前给出的类似，这里便不再赘述。研究方法依然选用的是NPSE。图3.16对比了控制开始于 $x_{\text{start}} = 315, 358, 400$ 位置处的控制效果。这里每一个控制算例的展流向激励长度，也就是等离子体在流向延伸的长度是相同的。由于转捩主要还是由主模态主导的，这里主要对比了主模态的能量。这里用到的体积力是之前算例的十分之一，这是因为在上游扰动非常弱，并不需要太强的体积力。体积力过强反而会污染干净的边界层。控制起始

于 $x_{start} = 358$ 的算例中的主模态能量要远远小于控制起始于 $x_{start} = 400$ 算例中的主模态能量，这是因为前者的控制区域更靠近中性点 $x = 134$ ，控制的区域边界层内本身有的扰动较弱，所以控制效率较高。读者可以回忆之前敏感性分析的结果，不论是基于LST的敏感性分析还是基于PSE的敏感性分析，都指出在失稳区域，越上游控制越有效。这两个算例的结果对比符合之前敏感性分析给出的结论。图3.17对比了主模态流向扰动速度在控制区域的变化。这里横坐标是距控制起始位置的距离，也就是 $x - x_{start}$ 。可以看到，在刚刚开始的位置，也就是靠近控制起始点 $x_{start}$ 附近，算例 $x_{start} = 315$ 中主模态流向扰动速度下降的最快，也下降的最多。在这一阶段，总的施加于流动上的体积力还不多，所以添加的体积力还很小，满足小扰动假设。因此敏感性分析的结论依然成立，也就是控制越靠上游，效果越好。但是在 $x_{start} + 18.7$ 之后， $x_{start} = 315$ 算例的结果与另外两个算例的结果分道扬镳，其主模态不再是减弱，而是开始增长。这就是因为体积力引入的新的扰动已经盖过了原有的扰动，并开始主导失稳过程。需要说明的是，这里曲线出现了很突然的拐折并不是计算的问题，而是因为图中展示的主模态流向扰动速度在横截面上的最大值，当最大值从一个空间位置跳变到另一个空间位置，就会出现导数的不连续。从上面的结果对比，可以做出结论——适当的流向控制位置非常关键。

对于Case2，本文也做了无控制的线性稳定性分析，非线性抛物化扰动方程的计算寻找特征模态，并用之前推导出来的敏感性方程做了敏感性分析。但由于结果与Case1的结果非常类似，这里便不再展示。唯一需要提及的是这一次主导转捩的模态的展向波数 $\beta$ 变成了0.2。这里重点研究一下不同展向电压的激励，对控制效果的影响。在这个算例中，边界层外的展向速度是签一个算例的两倍，这就意味着此算例需要更强的体积力来控制。在之前算例中过强的激励电压，9kV和10kV都有了用武之地。图3.18对比了不同激励电压下各阶模态能量的变化。这里依然是选取了最佳的展向控制位置的结果。控制的流向区域从500到500，在图中用两个黑色的大圆点标识出来。绿、蓝、红分别是8、9、10kV电压的控制结果。这三个电压在静止的流场中分别可以吹出来最大速度1.7、2.8、3.8m/s的射流。之所以选这三个电压是因为在Kriegseis等人<sup>[39]</sup>的实验中，只测了8、9、10、11、12kV五个电压的等离子体分布，而最后两个电压太高，会在边界层中引入额外的扰动，所以这里只对比了前三个。从3.18中可以看到，在控制区域的前半段，也就是 $x = 530$ 之前，三个算例中的扰动能量都受到了抑制，比无控制的结果的（图中的黑线）低。但是在10kV的算例中，扰动在控制区域的后半段开始大幅的增长，尤其是(0,0)和(0,2)模态，甚至超过了主模态的能量。前人在用DBD控制

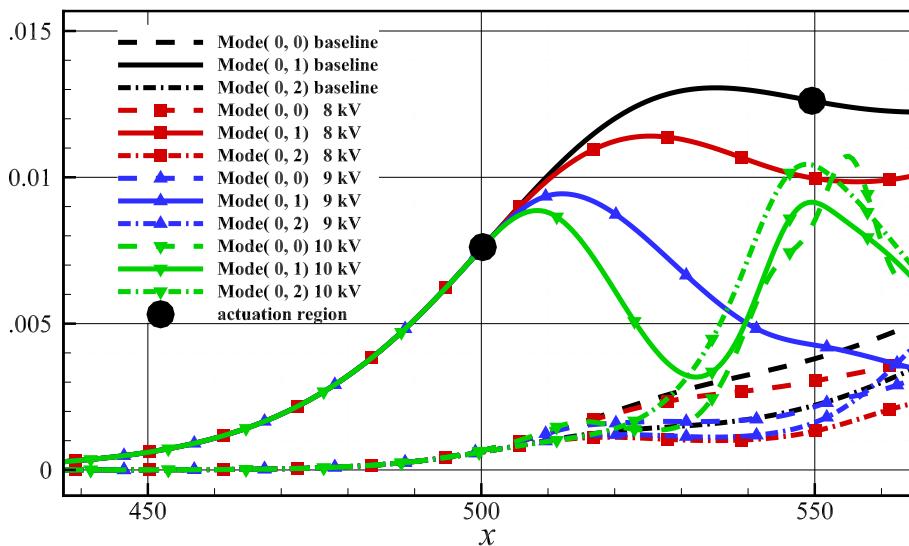


图 3.18 采用不同电压控制下的各阶模态演化

横流的DNS结果<sup>[40]</sup>中也提到了过强的体积力会产生有害于流动稳定的涡，从而使转捩提前。因此，在这个工况下，中等的电压强度——9kV，是最佳的选择。

### 3.4 本章小结

在这一章中，本文对典型的三维边界层流动——后掠Hiemenz流动——的失稳过程进行了敏感性分析，并提出了一种基于直接抑制主模态的等离子体谐波控制方案。敏感性分析的结果指出，在低速条带下方，也就是横流涡下方偏下扫的位置处添加正方向的体积力可以抑制扰动的发展，后续的NPSE计算也验证了这一结果。之后在等离子体激发器的流向位置效应和电压效应的研究中，发现所添加体积力的强度一点要与当地所存在的扰动强度相当。太弱起不到控制的效果，太强会引入新的扰动主导失稳过程，反而会促进转捩。

## 第4章 后掠翼上流动失稳分析与控制

### 4.1 后掠翼上流动的稳定性分析

数值研究了后掠Hiemenz流动转捩控制之后，本文将研究目标转移到更贴近实际的工况，研究一个真实的后掠翼流动的转捩控制。清华大学（Tsinghua University）在2018年进行了NLF-0415后掠翼上翼面的转捩实验研究工作<sup>[?1]</sup>，本文以该实验的工况作为基准，研究等离子体在实际的后掠翼流动中控制转捩的效果。这一实验在后文中将被简记为“THU实验”或“THU experiment”。这里先简述一下实验的设备和工况。该实验是在清华大学自己的低湍流度风洞中进行的，风洞试验段大小为 $1.2\text{m} \times 1.2\text{m} \times 3\text{m}$ 。风洞内安装NLF-0412翼型，如图4.1所示。在实验中采用的直角坐标系为 $(X_{\text{wt}}, Y_{\text{wt}}, Z_{\text{wt}})$ ，其 $X_{\text{wt}}$ 方向与风洞的流向平行。在计算中本文用的到直角坐标系为 $x, y, z$ （如图4.1）。计算所用坐标系的 $z$ 方向与翼型前缘线平行，这样在采用了无限展长假设之后，这一方向的物理量就是均匀的。该风洞运行时测试段的风速可以为5.0到90.0m/s，湍流度可以低到0.05%。此次试验采用的翼型的弦长 $c=1.2\text{m}$ ，有45°后掠和-4°攻角。该翼型在上翼面有很强的顺压梯度，可以有效的抑制T-S波失稳<sup>[42]</sup>。翼型中间到风洞入口大约1.25m。

实验中采用了单一的热线测量了来流的情况。来流风速均匀，湍流度0.08~0.1%。采用边界层热线(TSI Model 1261A)测量翼型 $X/C = 0.2, 0.4, 0.6$ 位置处的边界层速度剖面。热线采用一个电脑控制的可以进行三维运动的机械臂驱动。最小的运动精度可以达到 $10\mu\text{m}$ 。在每一个位置，沿着法向每隔 $0.05\text{mm}$ 测量了沿着风洞方向的速度分量 $U_{\text{wt}}$ 。这个速度分量也就是图中所示 $X_{\text{wt}}$ 坐标的方向。沿着法向的测量一直到两倍边界层厚度的位置终止。为了防止测量热线因为接触避免被损坏，第一个测量点选取在离壁面 $0.15\text{mm}$ 处。这一距离是通过镜面法测量得到的。也就是通过测量热线和其在翼面上的镜像的距离，得到其相对于翼面的距离。

为了验证本文中基本流计算的结果，这里选取了雷诺数 $Re$ 为 $1.81 \times 10^6$ ，也就是自由来流速度 $U_{\infty}=22.3\text{m/s}$ 的算例进行比较。 $(Re = U_{\infty}c/\nu$  其中 $U_{\infty}$ 是自由来流速度， $c$ 是弦长， $\nu$ 是动力粘性系数。)在这个工况下，上翼面一直到70%弦长的位置都是层流。在之后研究得我等离子体控制算例中，为了加速失稳和转捩，采用了两倍雷诺数也就是两倍来流速度的算例。

如上一章所述，高精度重构修正有限元程序Music<sup>[43-45]</sup>被用来进行无粘流求解计算。图4.2对比了计算求解得到的壁面上的无粘流延风洞流向速度分量和实际

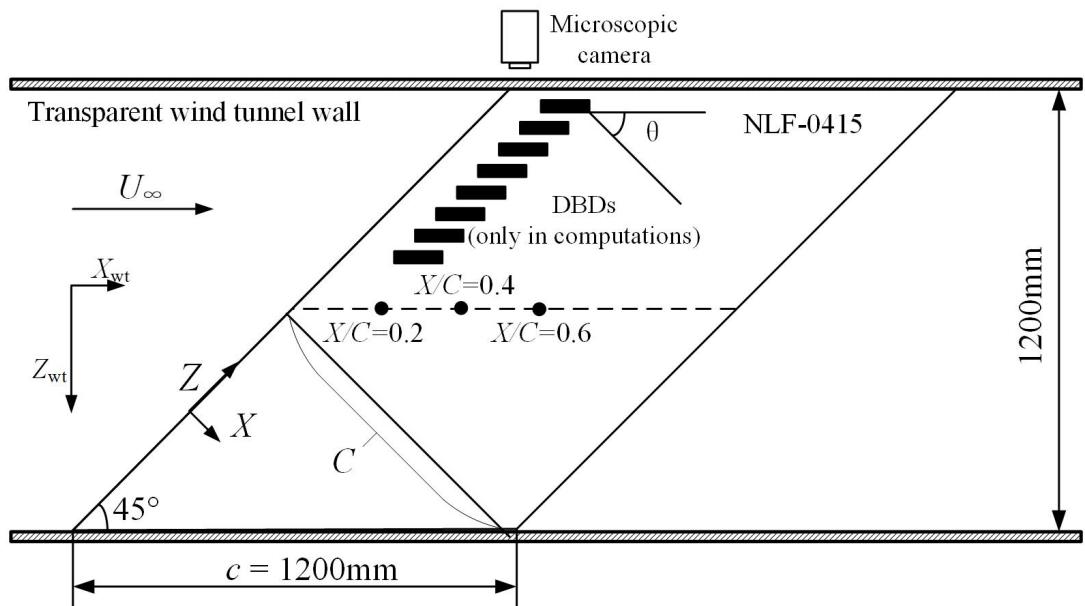
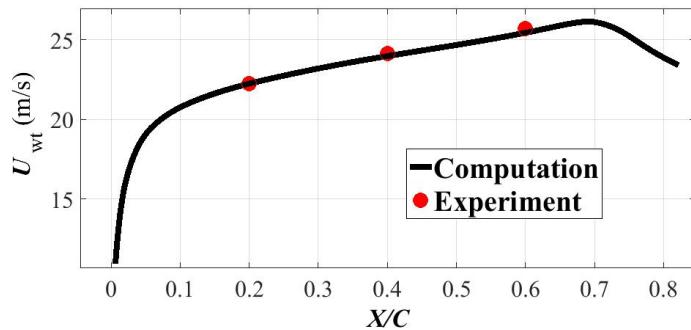
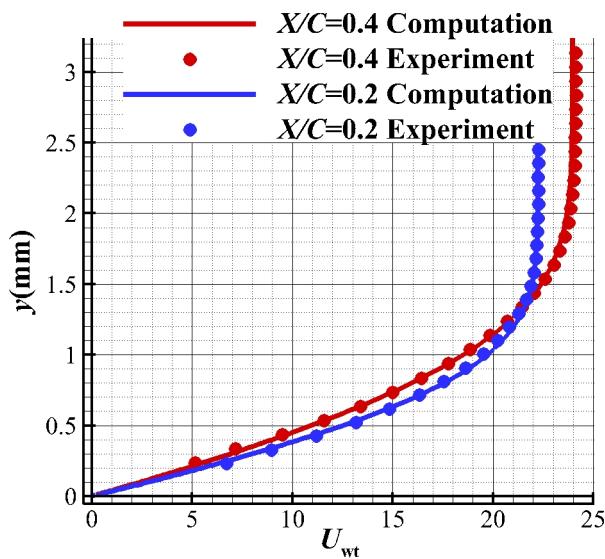


图 4.1 风洞俯视图 (“•”表示热线测量位置)

图 4.2 边界层外缘风洞流向速度  $U_{wt}$  对比

实验中测得的边界层外的同方向的速度分量。其中黑线是计算得到的结果，三个大红点是实验测得的结果。由于实验仅测量了三个展向位置的速度，所以这里只有三个数据点。从图中可以看到，无粘流计算得到的结果与实验吻合良好。需要提及的是，实验中并没有精确测量离翼型非常远位置处的来流速度，也就是说实际上真正的自由来流是不能准确得知的。而计算中是采取的无量纲计算，所以本位以20%弦长位置边界层外缘的流速作为参考基准点，重新对计算结果进行了有量纲化。在实验中，虽然直到70%弦长处都是层流，但是60%弦长处边界层已经出现了强烈的扭曲。所以这里之对比了20%和40%弦长处的边界层剖面，如图4.3。与上图类似的，线是计算结果，点是实验测得的结果。这里并没有用所有测量数据，只是每个两个点取了一个数据。对比结果说明本文计算得到的基本流还是非常可靠地。

Reibert等人<sup>[46]</sup>也做过相同翼型相同工况的实验研究，在后文中将其命名

图 4.3 风洞流向速度  $U_{wt}$  在  $X/C = 20\%$  和  $40\%$  处剖面对比

为“Reibert’s experiment”或“Reibert实验”。但是他们的实验采用的风动和模型尺寸均与本文参考的实验不一样。在Reibert实验中，模型弦长1.83m，风洞实验段尺寸 $1.4\text{m} \times 1.4\text{m} \times 5\text{m}$ 。更重要的，他们在文献中并没有给出翼型的安装位置。这些实验设置的不同，导致了两个实验得到的上翼面压力系数的分布不太一样。图4.4给出了THU实验和Reibert实验的上翼面压力分布。可以看到，THU实验的压力梯度要比Reibert实验的压力梯度强一些，这也说明了THU实验中流体在翼型中段的加速度更大一些。为了搞清楚压力梯度的变化对扰动的发展有什么影响，本文设置了4个算例进行对比研究。其中两个算例采用了Reibert实验得到的压力分布，他们的自由来流速度分别是22.3m/s和44.5m/s。另外连个算例采用THU实验得到的压力分布，自由来流速度也分别是22.3m/s和44.5m/s。这四个算例中边界层外缘流向速度分布与边界层位移厚度展示在图4.5中。可以看到，在采用THU算例的工况中，流体在靠近前缘位置加速比较慢，但是在翼型中段，其速度快速提升，并在30%弦长处超过了采用Reibert实验工况中的边界层外缘流向速度。不管在哪一个雷诺数条件下，采用THU压力分布的算例中的边界层厚度都要比采用Reibert的对应算例要厚。在70%弦长处，压力达到最低值，在之后均是逆压梯度，边界层快速增长。

图4.6展示了20%，40%，和60%处的横流速度剖面。如之前提到的，横流速度必须在壁面和边界层外消失。这里，随着边界层的厚度从20%到60%逐渐增加，横流速度消失位置的高度也在逐渐增加。可以看到，所有采用THU压力分布的算例中的横流速度的最大值都要大于采用Reibert压力分布的对应算例对应位置的

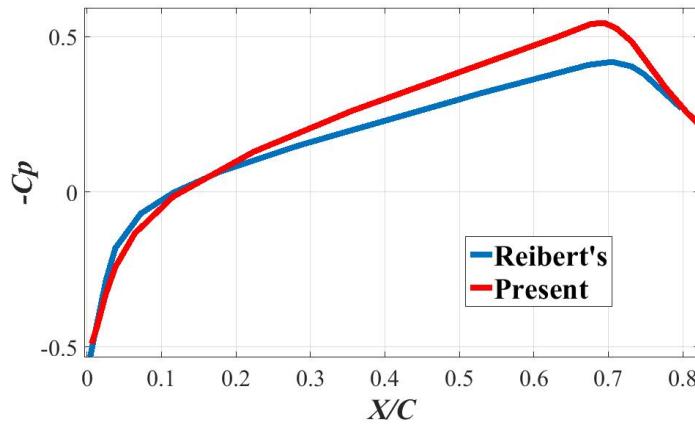


图 4.4 THU (清华) 实验中压力系数 (红) 与 Reibert 博士论文<sup>[46]</sup>中给出的压力系数 (蓝) 对比

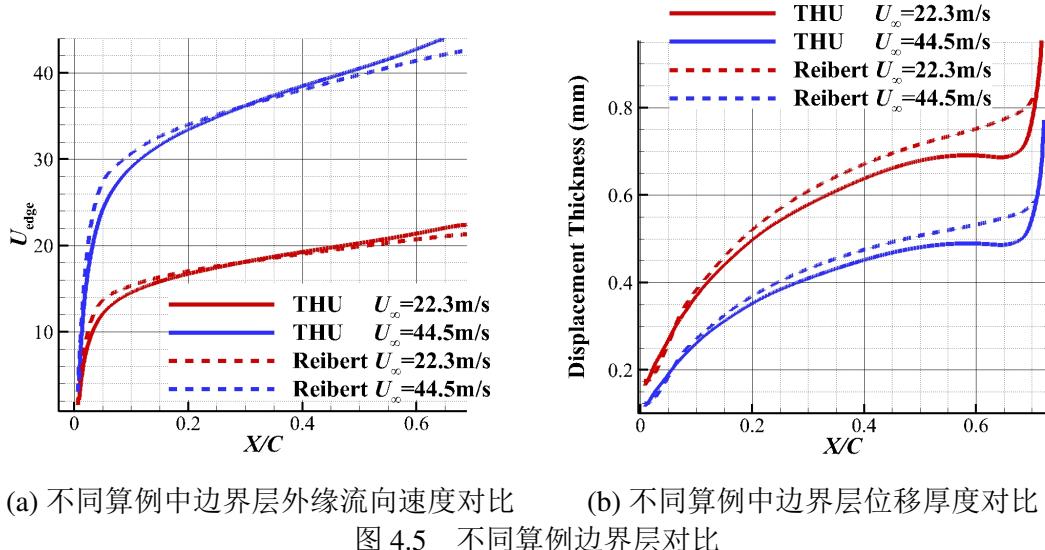


图 4.5 不同算例边界层对比

横流速度最大值。从图4.4中可以看到在这三个位置THU实验中的压力梯度均大于Reibert实验中的压力梯度，这也正是横流速度峰值不同的主要原因。众所周知，横流的产生正是因为边界层内由主流速度转向产生的离心力不足以平衡压力梯度产生的压差力。所以在压力梯度越强诱导出来的横流就越强。

本文先用传统的 $e^N$ 方法来研究不同算例中的流动稳定性。这里 $N$ 的定义为：

$$N = \int_{x_0}^x (-\alpha_i) dx, \quad (4-1)$$

这里， $\alpha_i$ 是采用局部线性稳定性理论 (LST) 计算得到的流向复波数的虚部。其相反数 $-\alpha_i$ 也就是LST预测出来的模态空间增长率。其物理意义就是下游单位长度距离处失稳模态幅值与当地失稳模态幅值的比值。 $x_0$ 是模态首次失稳的流向位

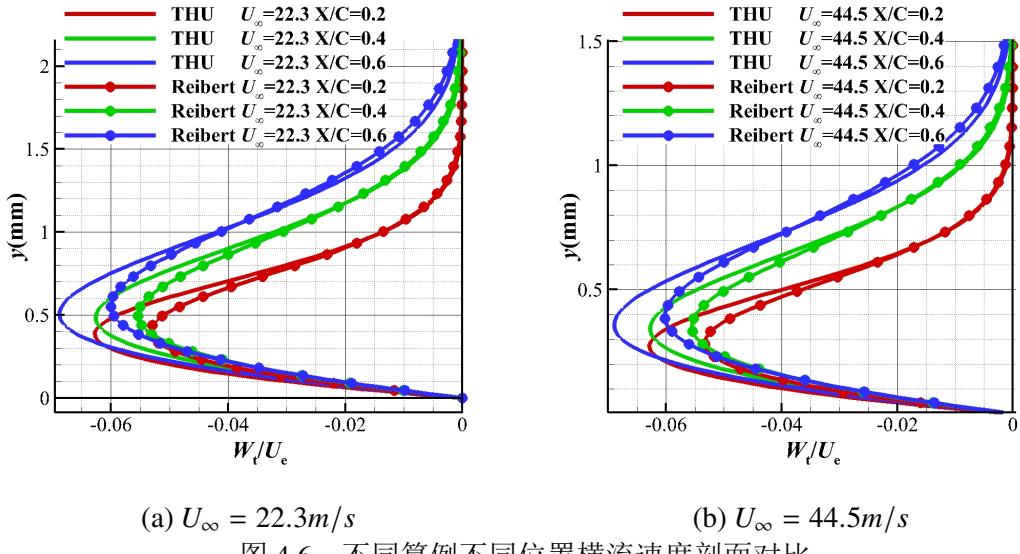
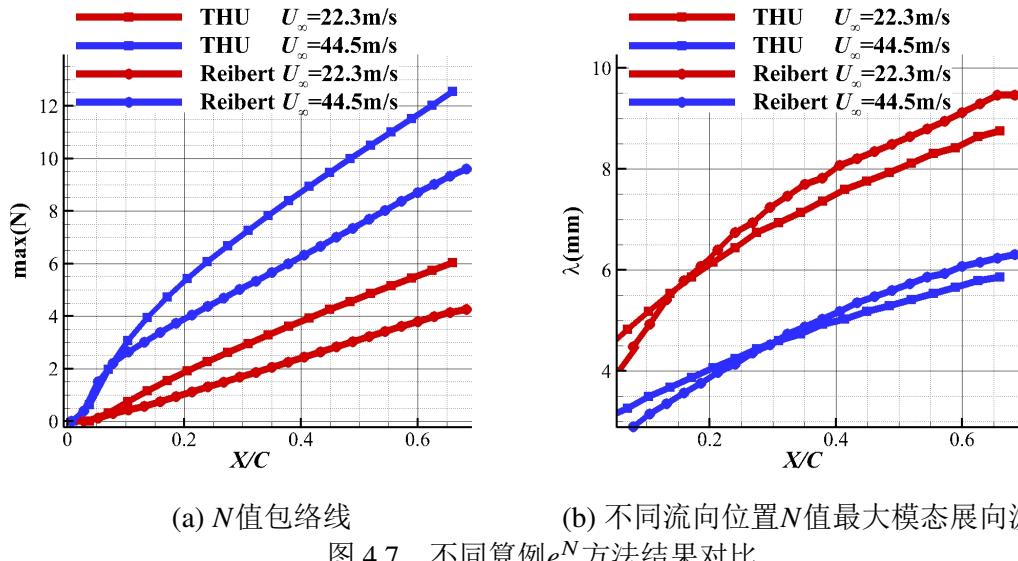


图 4.6 不同算例不同位置横流速度剖面对比

置。所以，这里 $N$ 的物理意义就是，当地扰动模态的幅值相对于模态首次失稳位置的幅值的比的对数。采用这一定义的一个隐藏假设是所有模态在中性点位置通过感受性过程所获得的初始模态幅值是相同的。 $e^N$ 虽然不是十分精确，但是可以定性反应失稳过程。图4.7(a)给出了不同算例 $N$ 值的包线，也就是不同位置 $N$ 的最大值。其中蓝线和红线分别代表来流速度为44.5与22.5m/s的算例，方块和圆点分别代表采用THU压力分布和采用Reibert压力分布的算例。从结果中可以看到，所有44.5m/s自由来流速度的算例中的 $N$ 值均比对应的22.5m/s自由来流的算例高。这说明了来流速度雷诺数越高，失稳模态增长越快，流动越不稳定。另外，还可以看到，在自由来流速度一样的前提下，采用THU压力分布的算例中的边界层要比采用Reibert压力梯度的更不稳定。可见，横流速度的微弱变化（见图4.6）都会导致 $N$ 值的剧烈变化。另外，必须要提及的是，如之前所说的， $N$ 是扰动幅值的对数，用数学式子表达也就是 $A = A_0 e^N$  ( $A_0$ 是中性点的模态初始值)。所以这里 $N$ 的变化转换到实际的模态幅值上则会是更强烈的变化。图4.7(b)对比了不同算例中不同位置 $N$ 值最大的定常横流失稳模态的展向波长。这也就是LST所预测的最不稳定模态的展向波长。可以看到，压力梯度的变化并没有对最不稳定模态的展向波长产生较大影响。基于以上分析，这里可以做一个简单的总结，更大的压力梯度会导致更强的横流速度，并进而导致更强的横流失稳模态的增长率。也就是压力梯度越大有横流的边界层越容易失稳。然而，这一变化对最不稳定横流模态的波长并没有显著影响，也就是说主导转捩的横流涡的展向并不会有太大变化。在THU实验中观测到的失稳波长与Reibert文献中的相同，也印证了这里的分析。

本文选取了上面对比的四个算例中最不稳定的一个进行控制，即自由来流44.5 m/s同时采用THU压力分布的算例。这样能够更明显的体现出控制的效果。

图 4.7 不同算例  $e^N$  方法结果对比

在之后的计算中，自由来流速度  $44.5 \text{ m/s}$  被选作参考速度。图 4.8 给出了  $N$  这个基准算例中不同展向波长的横流驻涡模态的  $N$  值延流向变化的情况。通常，横流模态的  $N = 6$  的时候会触发颤振。如果采用这一标准， $4 \text{ mm}$  展向波长的模态会在  $24\%$  弦长位置触发颤振。然而，用  $N$  判断颤振的方法并不十分稳定可靠。有文献指出<sup>[47]</sup>，在前缘抛光，来流湍流度非常低的条件下，临界点  $N$  值甚至可以高于  $14$ 。在这个基准算例中，在  $70\%$  弦长之前（压力最低点之前）没有任何模态的  $N$  达到  $14$ 。在翼型前半段，展向波长为  $4$ 、 $5$ 、 $6 \text{ mm}$  的模态的  $N$  值依次领跑。这意味着这几个展向波长的模态都有可能主导颤振。这里需要重点指出的是， $3 \text{ mm}$  展向波长的模态在靠近前缘的位置增长飞快，但是在  $20\%$  弦长处达到了峰值之后便开始减弱。在  $50\%$  弦长处其幅值甚至小于其初始幅值。波长更小的模态，如  $2 \text{ mm}$  展向波长的模态在计算域内几乎不增长。这一短波长高波数模态不增长的特性与之前分析的后掠 Hiemenz 流动完全不同。在后掠 Hiemenz 流动中，短波长高波数的模态仅仅是失稳的晚一些，并不会出现完全不失稳的情况。这一特性将在之后的控制中起到非常关键的作用。

$e^N$  方法是线性稳定性理论下的一种半经验方法，也就是说它还是要依赖小扰动可线性化假设和边界层增长近似为零的平行流假设。但实际上，当扰动的幅值增长到一定程度也就是大约扰动速度达到十分之一自由来流速度的时候，非线性会起作用，失稳进入非线性阶段。本文采用非线性抛物华扰动方程 (NPSE) 求解非线性阶段的扰动发展变化。在线性稳定性分析得到的几个最有可能主导颤振的模态被用来初始化 NPSE 计算。这几个模态被放置在计算入口处，并且幅值都设置

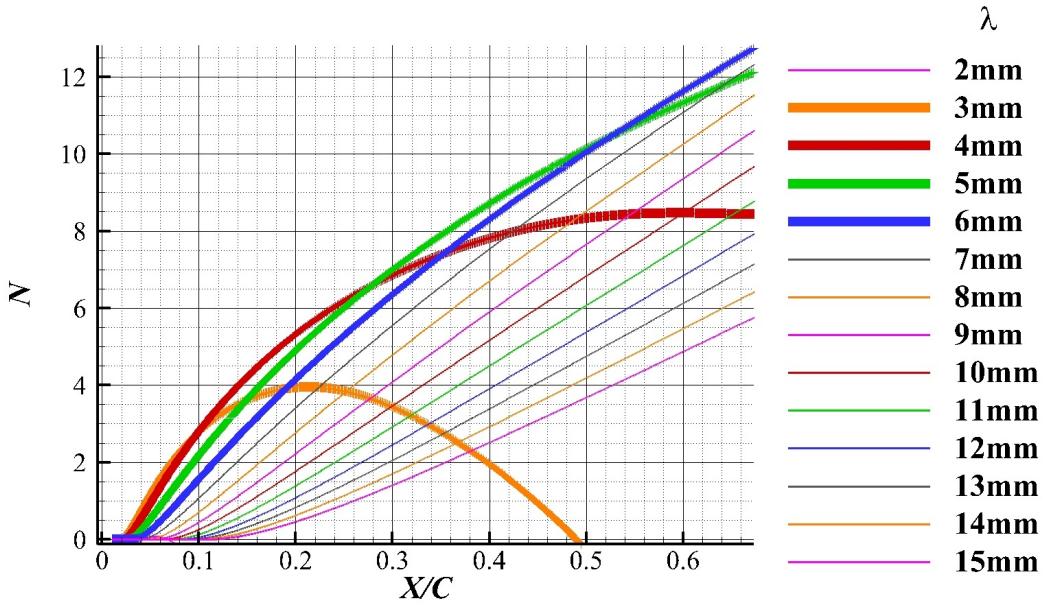


图 4.8 自由来流  $U_\infty = 44.5$  m/s 算例中不同展向波长的横流驻涡模态的  $N$  值延流向变化

为  $5 \times 10^{-5}$ 。这里NPSE中失稳模态的幅值定义为：

$$\text{Amp} = \exp\left(\int_{x_0}^x -\alpha_i d\xi\right) \max\left(\sqrt{|\hat{u}|^2 + |\hat{v}|^2 + |\hat{w}|^2}\right)_y. \quad (4-2)$$

NPSE计算得到的几个算例中的主模态幅值沿着流向演化的曲线展示在图4.9中。这里的做法和后掠Hiemenz流动中选取控制目标模态的方法相同。图4.9中的曲线并不是一个算例中不同模态的演化曲线，而是4个主模态不同的算例的结果。在这几个算例中，除了主模态是计算入口就给入的，其他模态都是通过非线性依靠主模态激发出来的高阶谐波模态。从图中可以看到，3mm展向波长的模态的幅值基本上比其他模态的幅值低了一个量级。这和线性稳定性理论预测出来的相似，可见这一模态就并没有能够成功发展进入非线性阶段。5mm展向波长的模态是最先进入饱和的。因此在这一章之后的研究中，均以这一模态作为目标模态。

## 4.2 采用等离子体激发器推迟后掠翼上流动转捩

### 4.2.1 谐波激励：每个展向周期放置一个激发器

如之前在介绍等离子体模型中提到了，Maden模型中有7个模型参数需要确定，他们分别是  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$  和  $c_{\text{force}}$ 。Dörr 和 Kloker<sup>[41]</sup>指出体积力分布最好分散在边界层内，但是不要超过边界层外缘。图4.10展示了  $X/C = 0.15, 0.2, 0.25$  位置处的主流和横流速度。可以看到，这里的边界层厚度大约为1.2mm。在这个厚

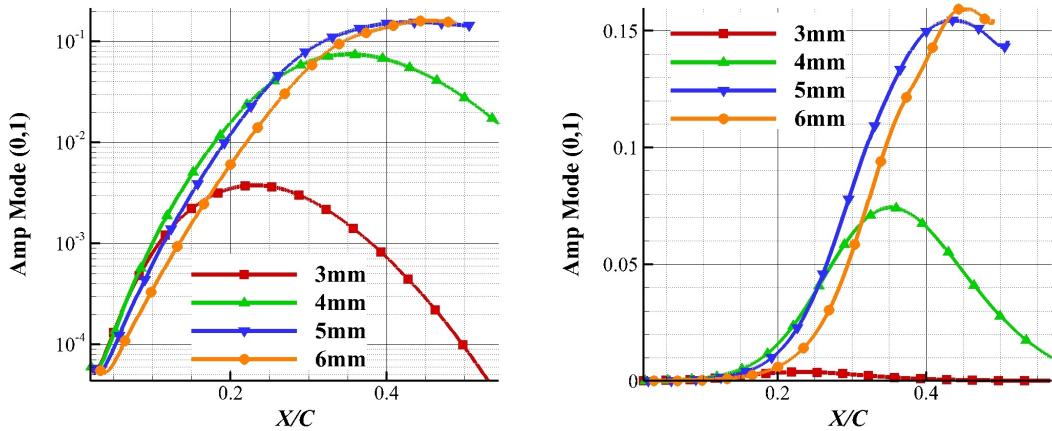


图 4.9 NPSE 计算得到的不同展向波长模态幅值延流向变化

度以外，主流速度保持为一个常数，横流速度快速下降并回归到零。基于这一基本流的速度剖面分布，本文调整体体积力模型中的7个参数，设计了如图4.11所示的体积力分布。这一分布对应的模型参数列在了表4.1中。其中参数 $c_{\text{force}}$ 是用来调整体体积力强度的，并不会影响体积力的实际分布。这里一共给出了三个不同的该参数取值，以便在之后的研究中分析体积力强度效应。图4.11中的体积力分布对应 $c_{\text{force}} = 30$ 。可以看到，本文设计的体积力基本完全分布在1.2mm高度以下，也就是完全在边界层内。这一体积力分布的展向长度小于2.5mm，即小于基础展向波长5mm的一半。 $c_{\text{force}} = 30, 50, 70$ 时所对应的有量纲最大体积力密度分别为2986, 4976, 6967 N/m<sup>3</sup>，在y-z横截面上的总得积分为 $1.467 \times 10^{-3}$ ,  $2.446 \times 10^{-3}$ ,  $3.424 \times 10^{-3}$  N/m。需要提及的是，在Kriegseis的实验中<sup>[39]</sup>，最大体积力密度为 7000 N/m<sup>3</sup>。可见这里所需的由等离子体激发器产生的体积力强度在实际中完全能够产生。

表 4.1 DBD 模型参数

| $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $b_0$ | $b_1$ | $b_2$ | $c_{\text{force}}$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------------|
| 2.0   | 0.08  | 0.001 | 7.76  | 2.1   | 1.8   | 30,50,70           |

在后掠翼算例中，本文首先尝试了与之前后掠Hiemenz流动中相同的谐波激励控制方法，也就是让激发器与横流涡相平行，然后每个展现波长内放置一个激发器。无量纲的体积力 $f$  在 $y = 0.1$  mm高度X-Z平面内的分布如图4.12所示。这里没有再展示敏感性分析的结果，这是因为其敏感性因子的分布与之前

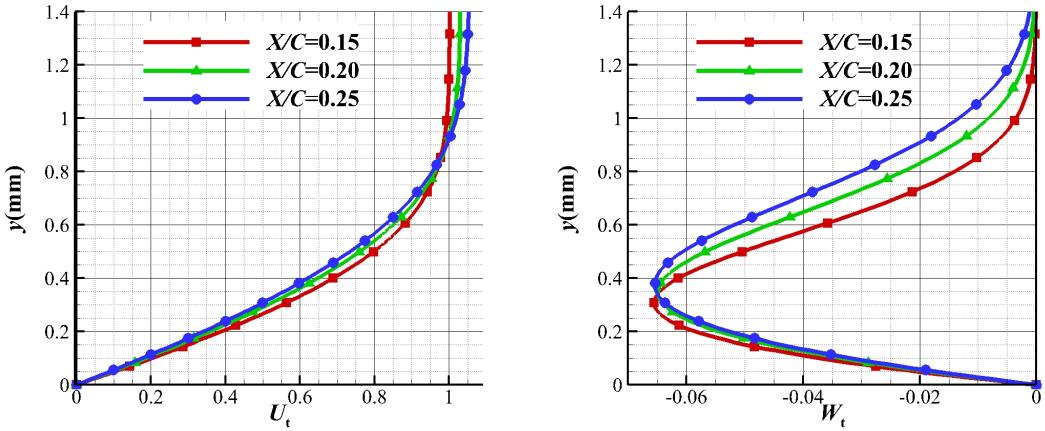


图 4.10 不同流向位置主流（左）和横流（右）速度剖面

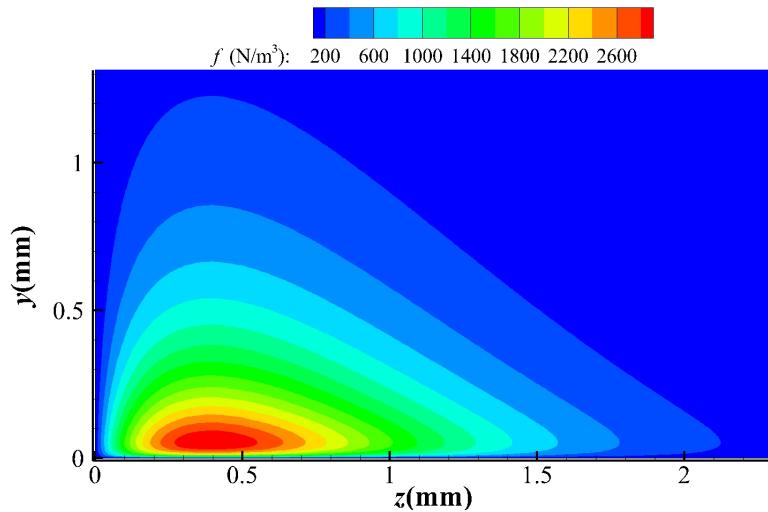


图 4.11 单一DBD激发器产生的体积力分布

后掠Hiemenz流动中的基本完全相同。这里控制的中心位置在25%弦长处，控制开始于23.7%弦长处，结束于26.2%弦长处。这里体积力强度参数 $c_{\text{force}} = 30$ 。本文计算了激发器在十个不同展向位置的结果。其控制效果与之前后掠Hiemenz流动中的类似，这里就不再一一列出。结论也是在横流涡下方偏下扫位置处控制效果较好。这里重点对比了这十个算例中效果最好的和效果最差的以得到其控制的内在机理。图4.13展示了最好算例和最差中主模态延流向的演化。其中黑线是无控制的结果，绿线和红线分别是最差算例和最好算例的结果。 $T_z$ 是展向波长， $z_0$ 是激发器中点的展向位置坐标。可以看到在激发器位于 $z_0/T_z = 0.4$ 处，在控制区域横流主模态能量大幅下降，并且在控制之后的区域始终低于无控制工况中的横流主模态能量。而在另一个算例中，激发器位于 $z_0/T_z = 0.9$ ，也就是激发器刚好平移了半个波长。这时主模态在控制区域反而被促进了，这也意味之转换将会被提前。

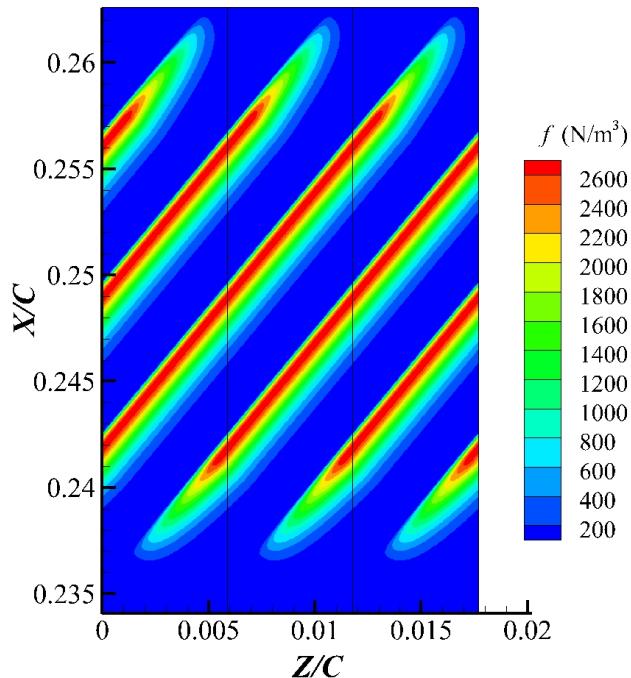


图 4.12 DBD 激发器阵列产生的体积力在  $X-Z$  平面上的分布( $y = 0.1$  mm) 激发器间距为一个展向波长

由于横流涡是斜的，所以横流涡的位置会随着观察的流向位置而变化，所以但看  $z_0$  是没有意义的，更重要的是看激发器与横流涡的相对位置。在之前后掠 Hiemenz 流动的控制分析中，本文给出了施加体积力和横流涡的相对位置，这里给出体积力和横流方向扰动速度分布的相对位置，以说明控制的机理。图 4.14 中颜色云图表示体积力横流方向分量在横截面上的分布，曲线表示在横流方向的扰动速度分量。其中实线表示值为正，虚线表示值为负。可以看到，当把扰动和体积力都投影到横流方向的时候，如果他们的符号相反，也就是力的方向与扰动的速度方向相反（如图 4.14(a)），则主模态的能量就会被降低。相反的，如果外加力与扰动速度在横流方向的投影得到的符号相同，则主模态反而会被促进，如图 4.14(b)。这一结果非常直观，也说明了这种谐波控制的控制方法实际就是通过用外加体积力去抵消因为失稳产生的扰动。当然，由于横流失稳产生的扰动在展向的分布是时正时负，所以激发器的展向位置非常关键。所以这一特性也给实际应用带来了风险。因为并不是控制总能起到效果，有时反而会适得其反。再加上实际中横流涡的位置并不是很容易预测，至少笔者并不知道有效的横流涡展向位置的预测方法。所以，这种谐波激励的方法在笔者看来并不实用，缺少足够的鲁棒性。还需要寻找更鲁棒的方法。

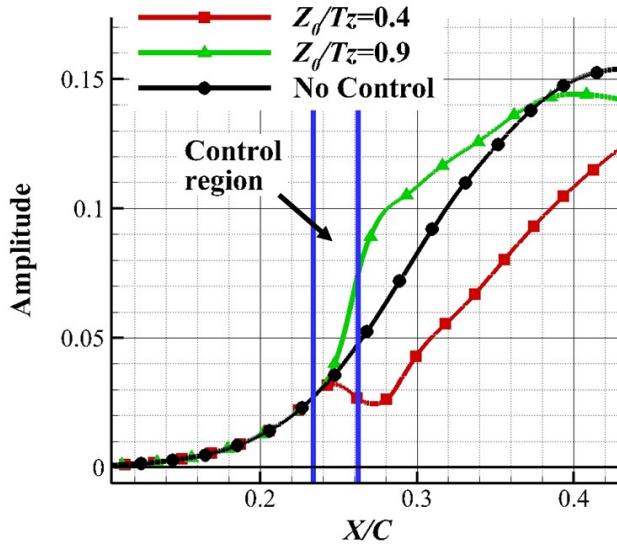


图 4.13 最佳控制算例与最差控制算例主模态能量延流向演化与无控制算例结果比较

#### 4.2.2 Subharmonic control: two actuators per wavelength

Since it is known that the magnitude of the crossflow velocity greatly influences crossflow instability, another idea is to use plasma actuators to attenuate the crossflow velocity. To avoid exciting the primary mode, two actuators are positioned per wavelength. The body force distribution in the  $X-Z$  plane is shown in figure 4.15. The number of plasma actuators is doubled compared with the previous scheme. The control region starts at 18.7% chord length and ends at 21.2% chord length. The electrodes are still parallel to the isophasal curves of the primary instability mode.  $c_{\text{force}} = 50$  in the first case; the cases with  $c_{\text{force}} = 30$  and 70 will be given afterwards.

Figure 4.16 shows the evolution of the disturbance energy. The red curves stand for the controlled case and the black curves for the uncontrolled case. The right figure uses a normal coordinate, whereas the left uses a logarithmic coordinate to show the harmonics more clearly. Again, the control region is denoted by two blue vertical lines in both figures, and the center of the region is at 20% chord length. Since the distance between two neighboring actuators is half the fundamental wavelength, the harmonic mode (0, 2), whose wavelength is also half the fundamental wavelength, is excited directly. It can be seen that there exists a small peak right at the end of the control region. When the mode leaves the control region, its energy decreases rapidly, and at 30% chord length its energy becomes two orders of magnitude lower than the peak value. The reason for this energy decline is because this mode with 2.5 mm wavelength is predicted to be stable by the  $e^N$

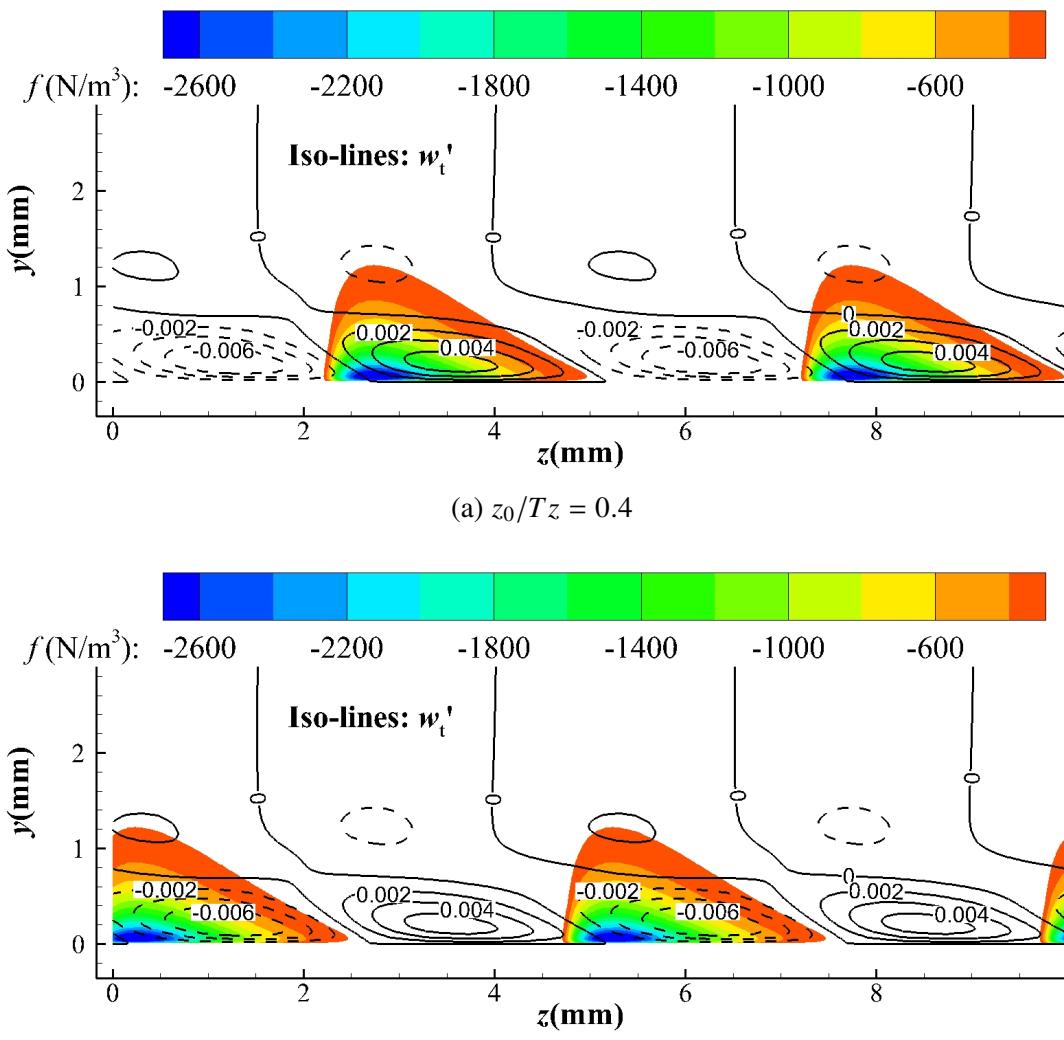


图 4.14 体积力分布（颜色云图）与扰动分布（黑色等值线）的相对位置

method, meaning that it will die out soon without plasma stimulation. The behaviors of other harmonics, from (0, 3) to (0, 5) modes, and all the higher-order harmonics (not shown) are all similar to that of the (0, 2) mode. However, in the middle section of the wing, from 30% to 40% chord length, all the modes are weaker than their counterparts from the case without control.

Figures 4.17 and 4.18 show contours of the streamwise velocity at  $X/C = 0.216$  and  $0.35$ , respectively. At  $X/C = 0.216$ , close to the end of the control region  $X/C = 0.212$ , the boundary layer looks quiet and clean without control. The instability modes are very weak there. When the plasma is induced, small waves are generated, seen in figure 4.17(b). These small waves are mainly caused by the (0,2) mode and have wavelength 2.5 mm. At 35% chord length, in the case without control, a strong crossflow vortex appears and

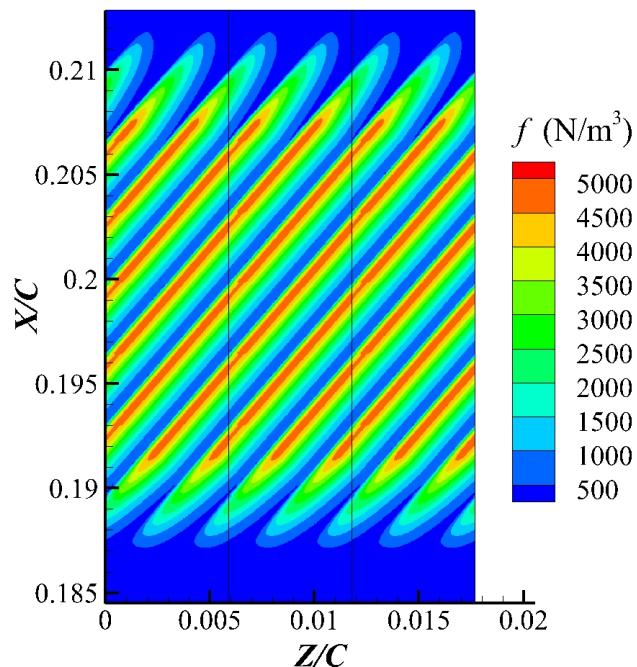


图 4.15 Distribution of body force in the  $X-Z$  plane (two actuators per wavelength).

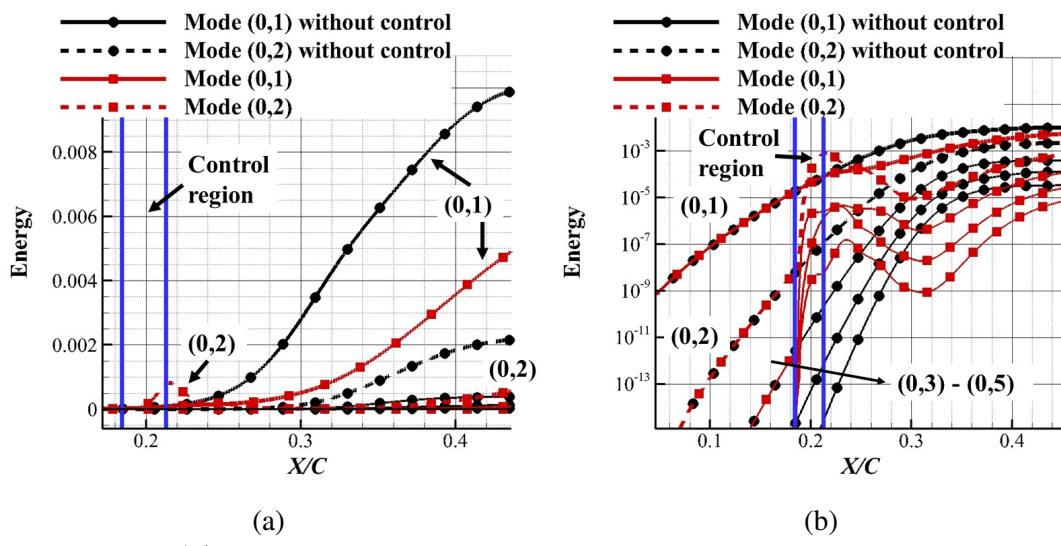


图 4.16 Evolution of mode energy with and without control.

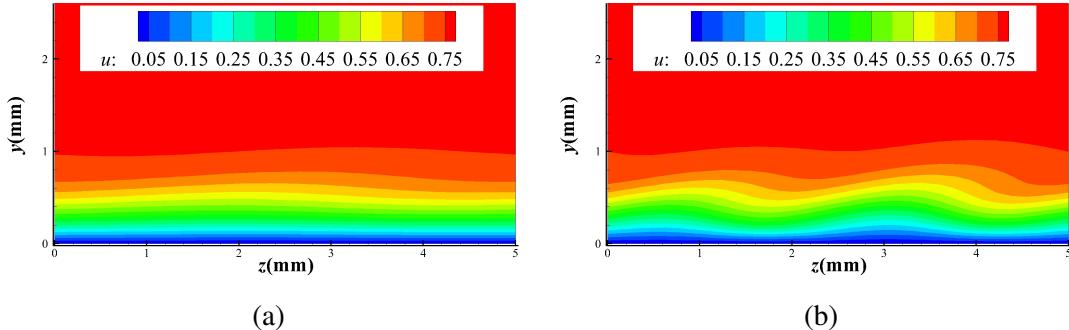


图 4.17 Contours of streamwise velocity at  $X/C = 0.216$  (a) without and (b) with control.

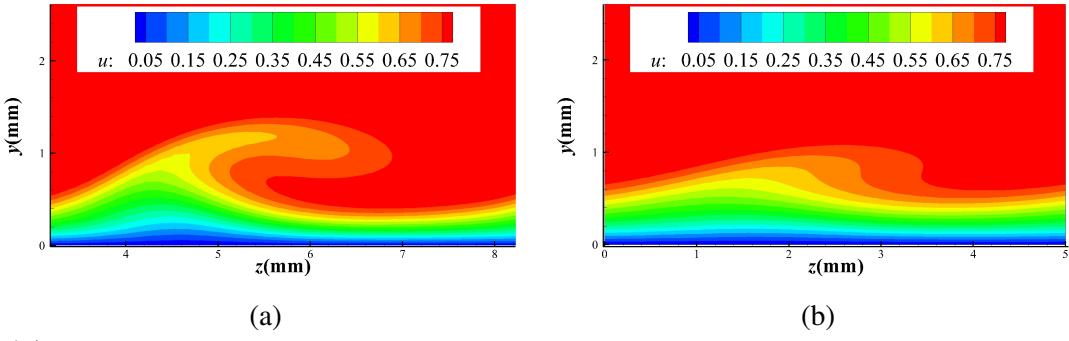
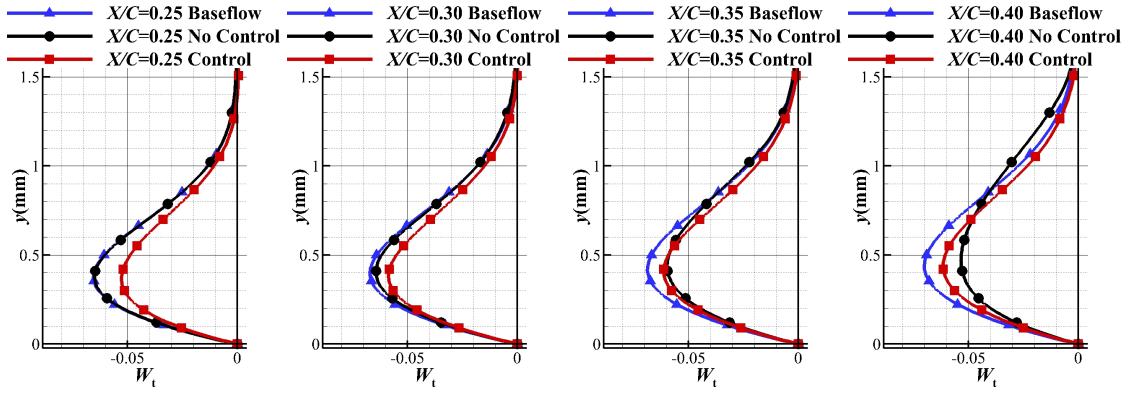
图 4.18 Contours of streamwise velocity at  $X/C = 0.35$  (a) without and (b) with control.

图 4.19 Crossflow velocity profiles.

conveys low-momentum fluid away from the wall. A rollover structure that indicates the beginning of the saturation stage also appears. However, for the controlled case, there appear only small ripples, and no strong convection emerges. From these figures, it can be concluded that even though the plasma actuators do not affect the primary mode directly, their effects do ultimately hinder the evolution of crossflow vortices.

Figure 4.19 shows the crossflow velocity profiles at different streamwise locations. The blue curves stand for the crossflow velocity profiles of the baseflow. The black curves represent the uncontrolled case, and they deviate from the baseflow profile owing to the mean flow distortion mode, namely, the  $(0, 0)$  mode. The red curves stand for the controlled case. It can be seen that at  $X/C = 0.25$ , the black curve coincides with the blue one, because all the disturbance modes, including the mean flow distortion mode  $(0, 0)$ , are weak there. Meanwhile, since the direction of the plasma-induced body force is opposite to that of the crossflow velocity, the profile in the controlled case is lower than in the other two cases. The situation is similar at  $X/C = 0.3$ . The controlled crossflow profile grows marginally, but it is still lower than that in the other two cases. From 25% to 30% chord length, all the instability modes in the controlled case grow slower than their counterparts

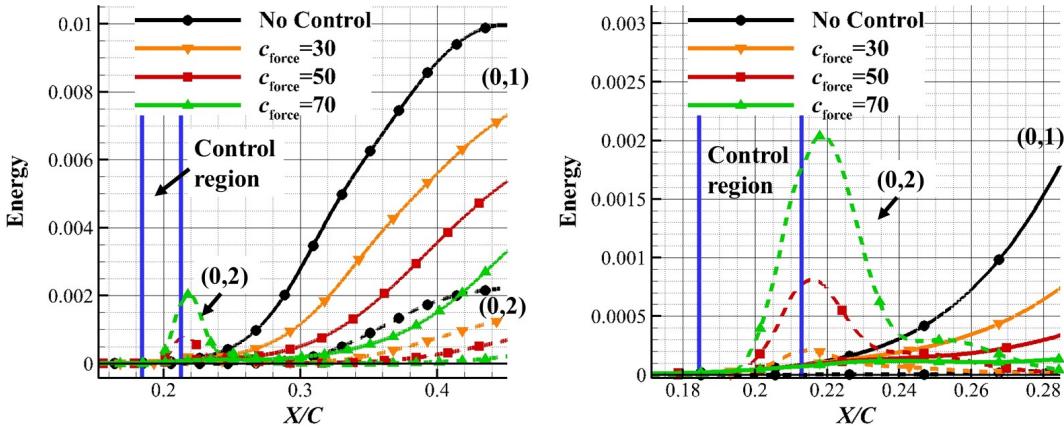


图 4.20 Evolution of mode energy for different body force strengths.

in the uncontrolled case, and some of them even shrink [see figure 4.16(b)]. This is mainly attributed to the decrease in the crossflow velocity profile. At 35% and 40% chord length, the effect of nonlinearity promotes distortion of the mean flow and a decrease in the crossflow for the uncontrolled case. However, since the development of these instability modes is hindered in the controlled case, the nonlinearity is not significant and thus the distortion of the controlled baseflow is not as intense as that in the case without control. Then, the controlled crossflow become stronger than in the case without control, as can be seen in the last picture in figure 4.19.

The effect of force strength is studied by varying the coefficient  $c_{\text{force}}$ , and the results are shown in figure 4.20. The right figure zooms in the vicinity of the control region in the left figure. The orange, red, and green curves stand for the cases with  $c_{\text{force}} = 30, 50$ , and  $70$ , respectively. In all the controlled cases, the energies of the primary modes and the  $(0, 2)$  modes are all lower than those in the case without control, and a stronger body force results in weaker instability. A stronger body force also leads to higher peak value of the energy of the harmonic  $(0, 2)$  mode near the end of the control region. It can be seen that the peak values are  $2 \times 10^{-4}$ ,  $8 \times 10^{-4}$ , and  $2 \times 10^{-3}$  for the cases with  $c_{\text{force}} = 30, 50$ , and  $70$ , respectively.

Figure 4.21 compares the results for cases with actuators positioned at different streamwise locations. The green, red, and orange curves stand for the cases with DBD centers located at 15%, 20%, and 25% chord length. The control regions are not plotted on the figure, but they can still be recognized by the small peaks on the dashed curves denoting the  $(0, 2)$  instability modes, because, like all the other cases shown previously, in the vicinity of the control region, the  $(0, 2)$  modes are all excited. The peak of the

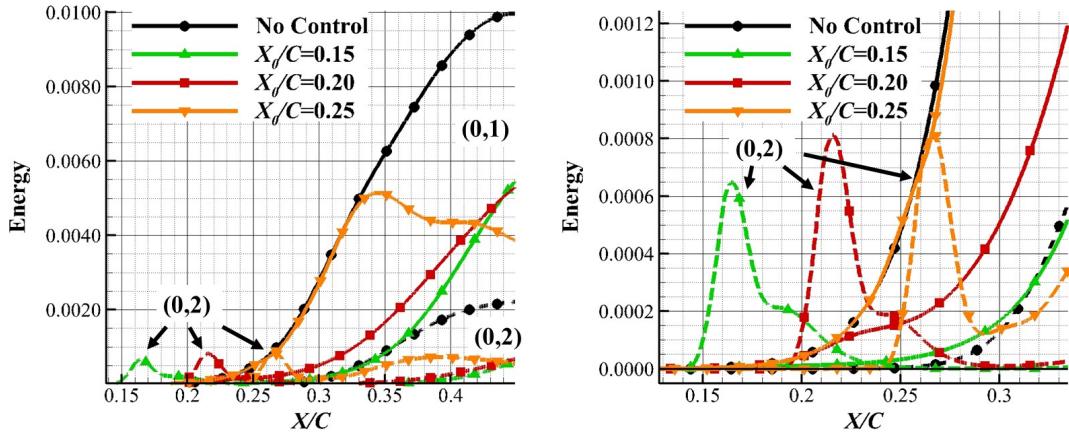


图 4.21 Evolution of mode energies with plasma actuators at different streamwise locations.

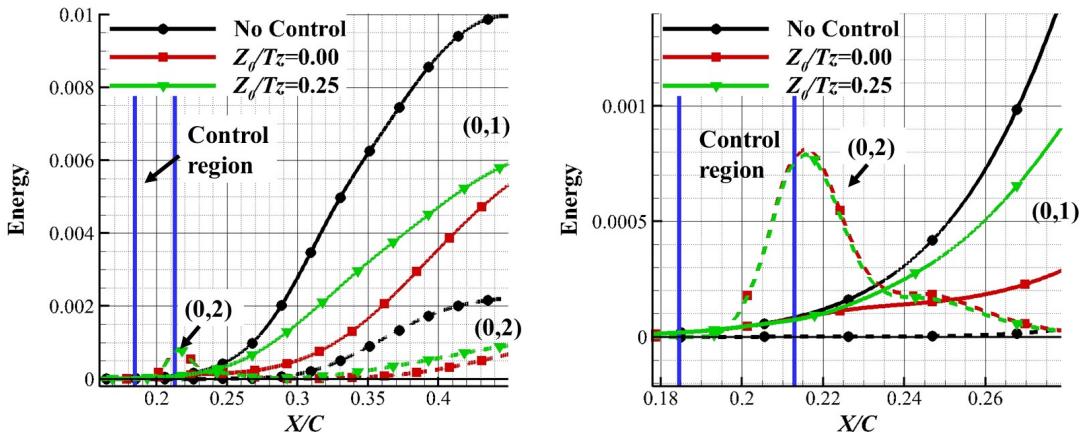


图 4.22 Evolution of mode energies with plasma actuators at different spanwise locations.

(0, 2) mode in the case with excitation at 15% chord length is lower than that at 20% chord length, which in turn is lower than that at 25% chord length. The reason is that the amplitude of the uncontrolled (0, 2) mode is larger downstream, and thus, when it is excited by the same force, the originally strong mode reaches an even higher level. From 30% to 40% chord length, all the mode energies for the case controlled at 15% chord length are lower than their counterparts in the other two cases. The primary mode controlled by the DBD actuators at 25% chord length does not deviate from the primary mode without control until 33% chord length. Fortunately, its energy decreases after that. No matter where the actuators are placed, all the mode energies are lower than in the original case without control.

It has already been mentioned in Section 4.2.1 that the controlled results with one plasma actuator per wavelength are remarkably sensitive to the spanwise location of the

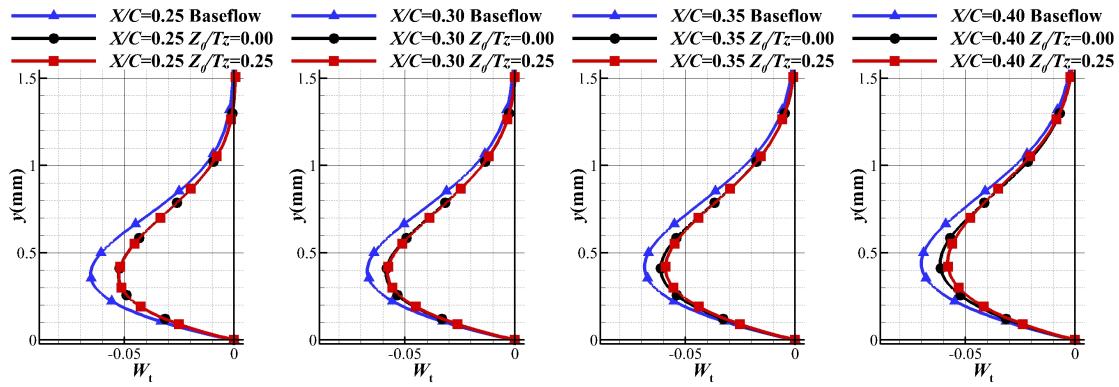


图 4.23 Comparison of modified mean flow profiles with plasma actuators at different spanwise locations.

actuators. The sensitivity of the control method with two actuators per wavelength to spanwise location is examined here, as shown in figure 4.22. Since the wavelength of the array of plasma actuators is half the fundamental wavelength  $T_z$ , the actuators are moved one-quarter of the fundamental wavelength reversed for phase in the spanwise direction. The red curves stand for the original case, and the green curves represent the new case with the spanwise location of the actuators shifted. Again, the energy of the (0, 2) mode increases in the control region and decreases elsewhere. The energies of the (0, 1) modes in both cases remain the same in the control region. However, they begin to deviate from each other just slightly downstream of the control region. From 25% to 45% chord length, there is only a small difference between these two curves. In addition, both of them are below the black curve, the one without control, indicating that the spanwise locations of the actuators are not crucial.

To explain the slight difference between the primary modes from the cases with and without a shift in the spanwise location of the actuators, the mean flow profiles in the crossflow direction are compared in figure 4.23. The blue and red curves denote the mean crossflow velocity profiles in the cases with and without a spanwise shift of the actuators, respectively. At 25% and 30% chord length, the red curves are perfectly superposed on the blue curves. It should be recalled that at these two streamwise locations, the energies of the primary modes have already deviated from each other. Hence, it can be concluded that the difference between the (0, 1) modes in the two cases is not caused by the mean crossflow velocity profile.

To date, it is clear that manipulation of the (0, 0) mode<sup>[48]</sup> or the (0, 2) mode can result in a decrease in the energy of the primary mode. In the DBD plasma actuators control scheme presented here, the (0, 0) and (0, 2) modes are both altered directly and the primary

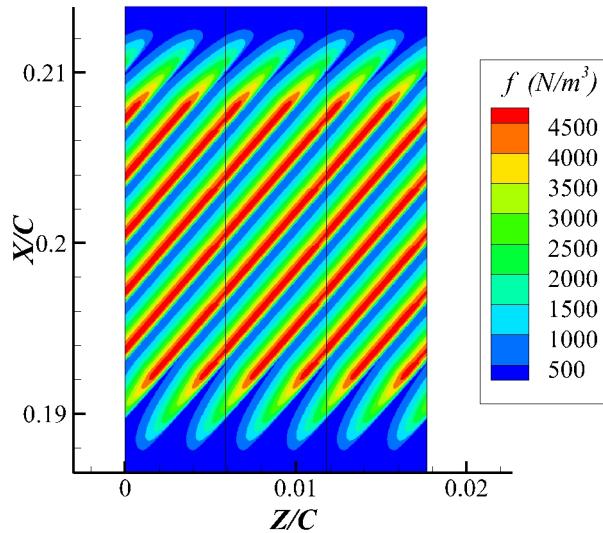


图 4.24 Body force distribution of inverse plasma actuators in the  $X-Z$  plane.

mode is affected only downstream of the control region. It is not clear which mode,  $(0, 0)$  or  $(0, 2)$ , contributes more to the decline in the energy of the primary mode. To answer this question, a reversed control case is examined. All the DBD actuators are turned  $180^\circ$ , with the body force in the opposite direction. In the computation, the force appears as a source term. When analyzing each mode, the force term is decomposed into Fourier series with respect to the spanwise coordinate. These Fourier components affect the corresponding instability modes. For instance, the zeroth-order Fourier component affects the  $(0, 0)$  mode directly and the second affects the  $(0, 2)$  mode. For this reverse control, the sign of the force term and that of its Fourier component are switched. Owing to the properties of trigonometric functions, the sign switch of the second Fourier component is equivalent to a phase shift. This phase shift effect has been investigated above by comparing results with actuators at different spanwise locations, and has been shown to be trivial. Thus, the biggest difference in this reverse control is that the sign of the force term corresponding to the  $(0, 0)$  mode is switched. If this reverse control still works and reduces the energy of the primary mode, then the  $(0, 2)$  mode rather than the  $(0, 0)$  mode will play a more important role in our control scheme. Otherwise, the conclusion will be that the  $(0, 0)$  mode is more important.

The body force distribution in the  $X-Z$  plane is shown in figure 4.24. The evolution of the mode energies in reverse control cases is shown in figure 4.25. As mentioned above, reversal of the force direction will also lead to a phase shift of the Fourier component

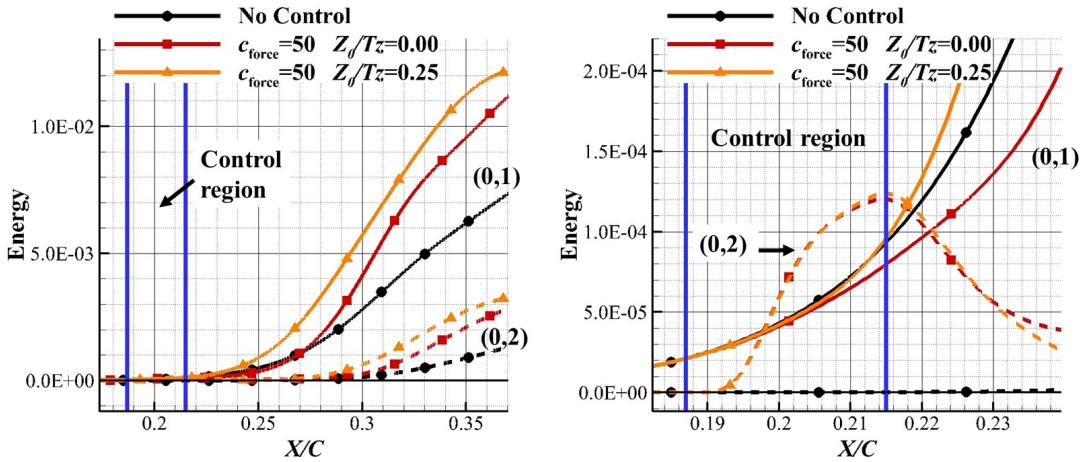


图 4.25 Evolution of mode energy in reversed control cases (with actuators at two different locations).

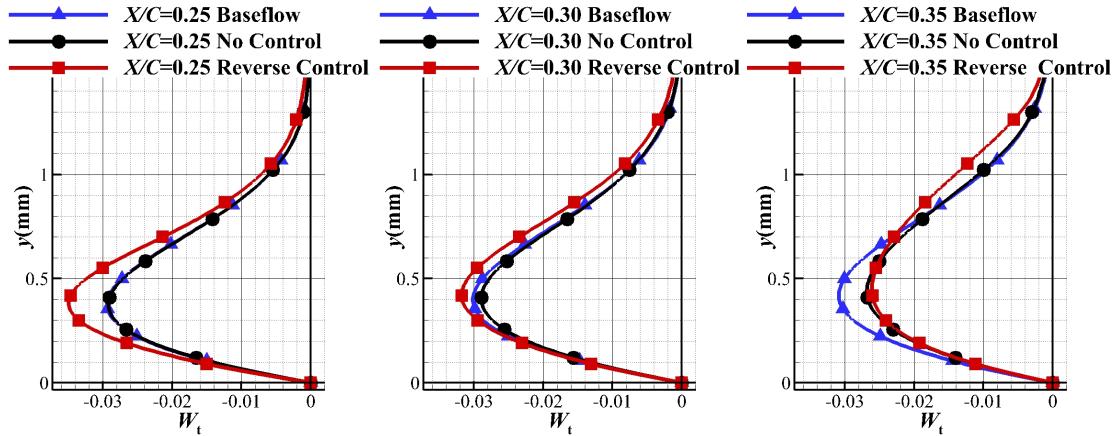


图 4.26 Mean crossflow profile in the reversed control case.

corresponding to the  $(0, 2)$  mode. This phase shift can be achieved by moving the actuators in the spanwise direction. To eliminate this small ambiguity, actuators located at  $Z_0/T_z = 0.0$  and  $Z_0/T_z = 0.25$  are both simulated. It can be seen that in both cases the energies of the primary modes are higher than that in the controlled case. Also, the effect of actuator spanwise location is not significant, and this agrees well with the conclusion reached above (see Fig. 4.23). This result indicates that the  $(0, 0)$  mode is more important than the  $(0, 2)$  mode and is the main cause of the decline in the energy of the primary mode.

Figure 4.26 shows the mean crossflow velocity profiles at different streamwise locations in the reverse control case. It is obvious that the crossflow is enhanced at 25% chord length, just downstream of the control region. Thereafter, the crossflow falls back and finally returns to the same level as that in the case without control. From this result, it can

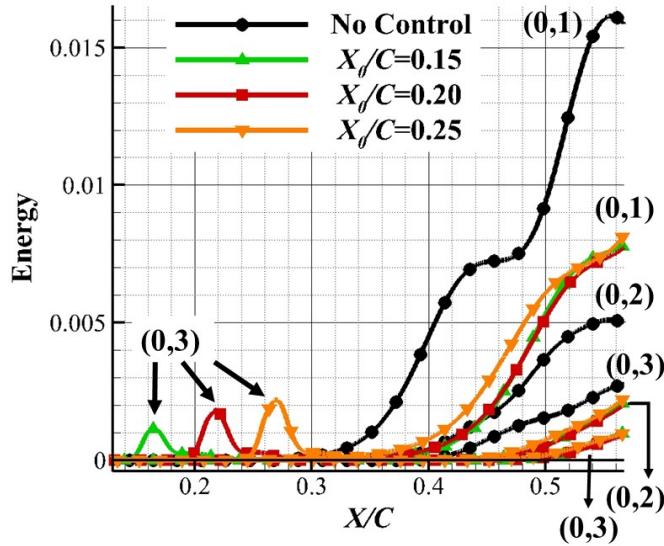


图 4.27 Evolution of mode energy in cases targeted at the 7.5 mm wavelength mode.

be concluded that the crossflow velocity has a significant effect on crossflow instability. When the crossflow is weakened by the actuator, the instability is attenuated. Otherwise, the instability is intensified.

#### 4.2.3 Off-designed case

All the simulations shown above assume that the mode with 5 mm spanwise wavelength dominates the transition, and the 2.5 mm mode, happens to be the (0, 2) mode with respect to the 5 mm fundamental wavelength. Here, another situation is considered in which the 7.5 mm mode becomes dominant but the distance between two neighboring actuators is still 2.5 mm. Thus, the control mode is the (0, 3) mode. Plasma actuators are positioned at three different streamwise locations, and the evolution of the mode energy is shown in figure 4.27. The green, red, and orange curves stand for the cases controlled at 15%, 20%, and 25% chord length, respectively. The small peak in the energy of the (0, 3) mode, that is, the control mode, becomes stronger and stronger when the actuators are moved downstream. Fortunately, all the modes in all the controlled cases are weaker than those in the uncontrolled case downstream of 30% chord length. This result proves that the presented control method performs well even in an un-designed case.

## 第5章 等离子体激发器控制充分发展槽道湍流

本文进行控制的基本算例选取为壁面摩擦尺度雷诺数 $Re_\tau = 180$ ( $Re_m = 5600$ )的湍流槽道。计算程序采用的是王志坚课题组的hpMusic<sup>[?]</sup>，时间步长 $dt=0.00015$ ，用三阶的显式Euler进行时间推进；空间采用4阶精度计算，单元内采用高斯点，每个单元内有 $5 \times 5 \times 5$ 个点，三个方向总的自由度数分别为 $235 \times 155 \times 200$ 。在后处理的时候，对分布在单元界面，空间位置相同的点进行了平均。平均处理之后用于显示的网格点数与Kim (1987) <sup>[49]</sup>文献中的网格相近。计算域大小为 $4\pi \times 2 \times 2\pi$ 。 $\gamma=1.4$ ，气体常数为1.0，普朗特常数 $Pr = 0.72$ ，粘性系数 $\mu = 3.571428571428571 \times 10^{-4}$ ， $Ma=0.1$ 。计算时在流场内添加全场均匀的体积力，使得槽道内的质量平均流速在稳定在1.0；计算的初始条件为抛物线形速度剖面，流速峰值 $u_{max} = 1.327$ 。为了加快转捩，在这个流场上叠加上10个不同流向展向波数的扰动波。初始的密度 $\rho = 1.0$ ；压力 $p = 31.74603174603175$ ；这两个量在计算的时候基本上不会变化。计算得到的近壁涡结构和条带结构如下图：计算得

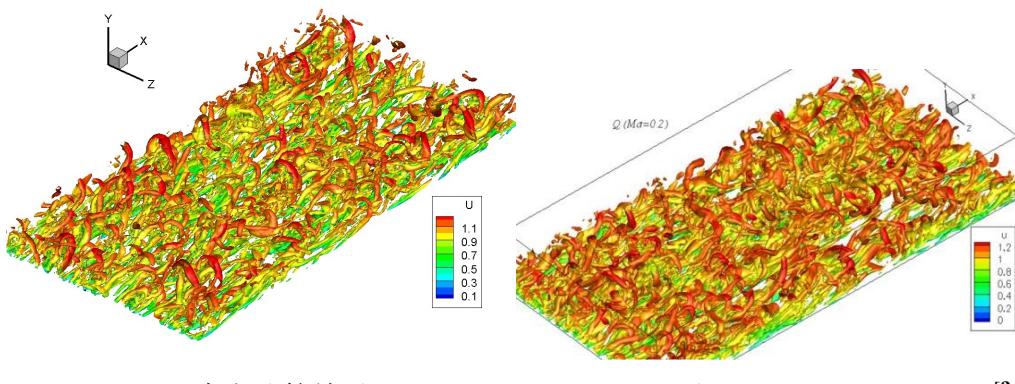
(a) 本文计算结果 (b) Liang Wei 和 Andrew Pollard (2011)<sup>[?]</sup>

图 5.1 计算得到涡结构对比

到的对数律分布如下：图5.3中结果为采用190万瞬时结果时间平均加流向和展向平均之后的结果。计算得到的二阶统计量对比：计算得到的瞬时流场的涡结构图如下：对于这一基本流动，对其进行条件平均，分别在 $y^+ = 10, 15, 20$ 的平面上进行涡探测，用Q作为探测标准。然后进行条件平均，得到：

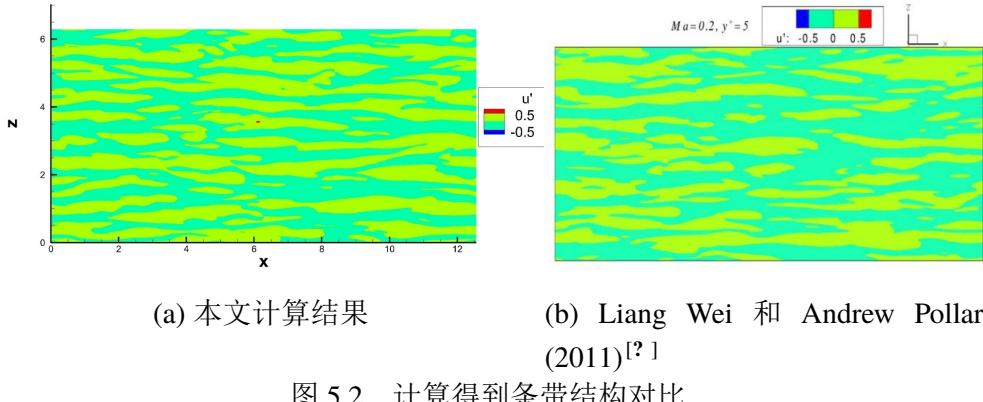


图 5.2 计算得到条带结构对比

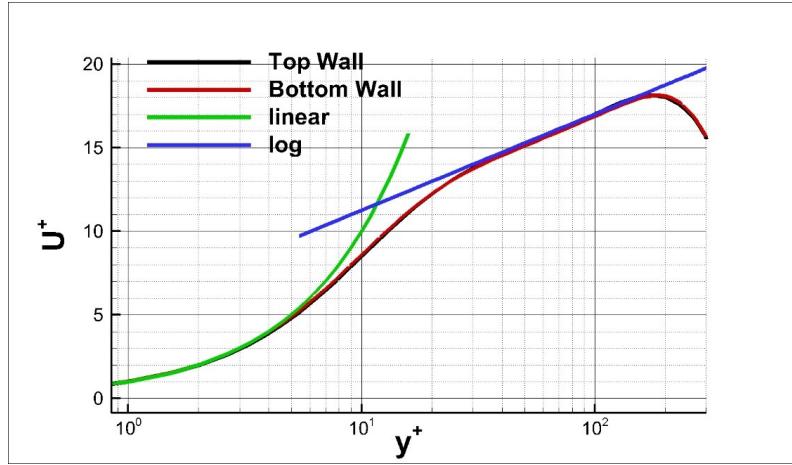


图 5.3 计算结果与对数律对比

## 5.1 定常激励控制方案

文献中给出了一种大涡形状的体积力分布用于减阻 他们对这种减阻控制方式进行了参数研究：然而，实际中并不能产生这种形状的体积力，所以本文考虑采用DBD产生相同的效果。本文中采用的体积力分布情况如下：在没有背景流动的槽道中诱导出来的流动如下：由于最开始并不知道体积力诱导的涡强度与真实涡强度的关系，所以做了很多参数的实验。最终发现确实过大的体积力反而会起到增阻的作用。这里仅展示一个增阻的算例和一个减阻的算例，他们的产生的涡强度如下：各个算例下壁面阻力对比：流向平均与时间平均对比： Plasma

表 5.1 不同算例产生的涡强度

| 算例名称           | $\max(V)/U_b$ |
|----------------|---------------|
| Plasma(Strong) | 0.19          |
| Plasma(Weak)   | 0.05          |
| Vortex Force   | 0.06          |

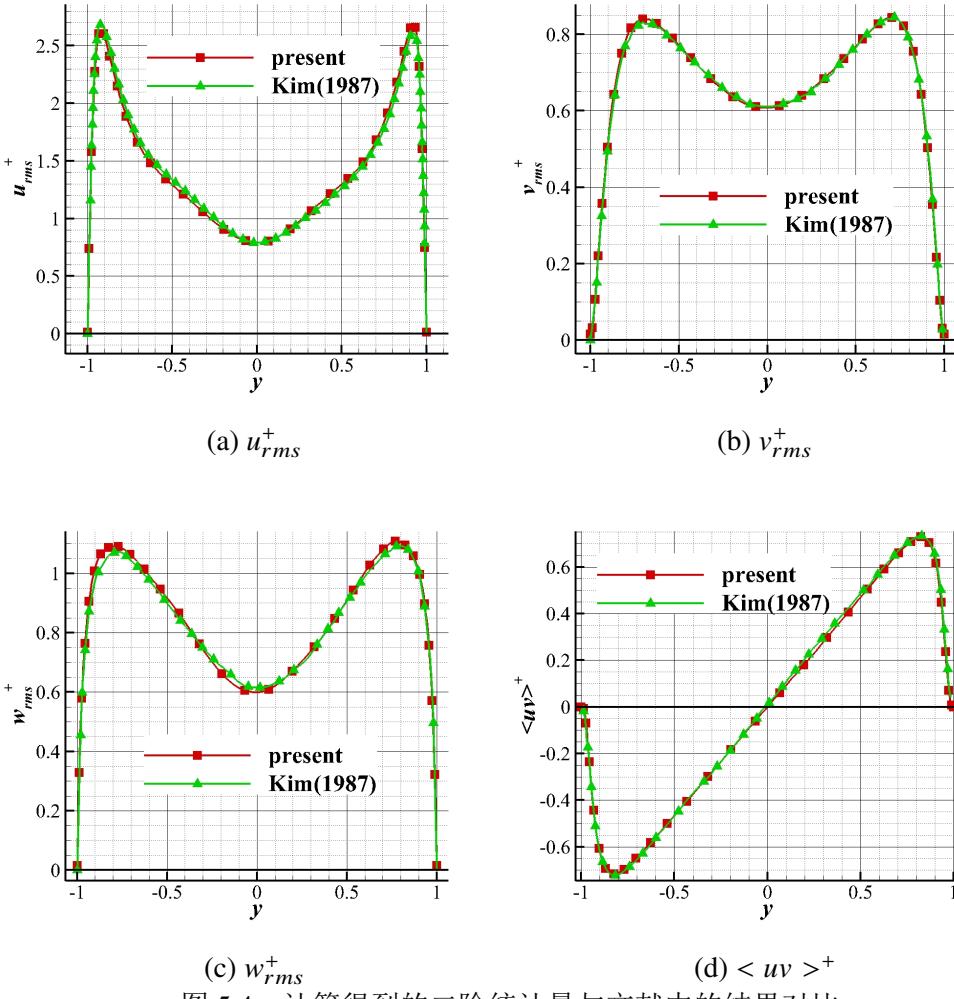


图 5.4 计算得到的二阶统计量与文献中的结果对比

(Weak) 算例中的涡结构: Plasma (Weak) 湍动能和湍动能生成项:

## 5.2 周期激励控制方案

米兰理工体积力形式:

$$F_z = F_z(y, t) = A_f e^{-y/D} \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right); A_f = 2; D = 0.04 \quad (5-1)$$

控制效果:  $T^+ = 52$  相平均: 涡结构图: 各阶统计量对比:



图 5.5 瞬时流场的涡结构图

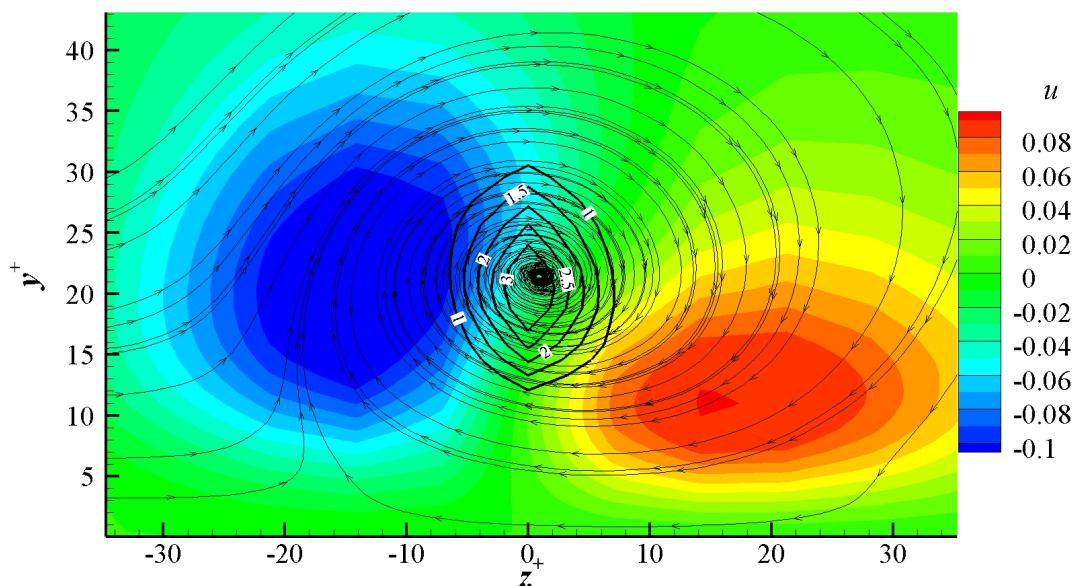


图 5.6  $y^+ = 20$  条件平均

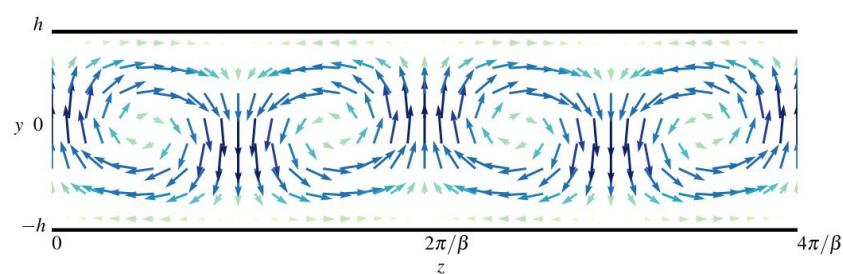


图 5.7 J Canton et al. (2016 FTC)采用的减阻控制的体积力

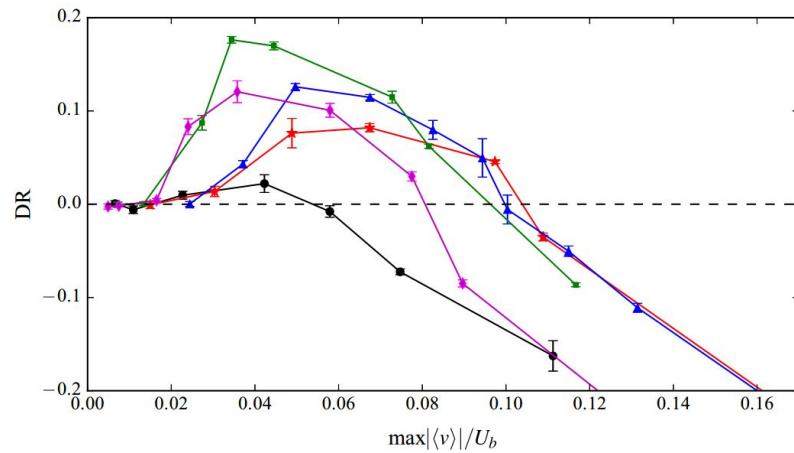


图 5.8 涡强度与减阻率的关系

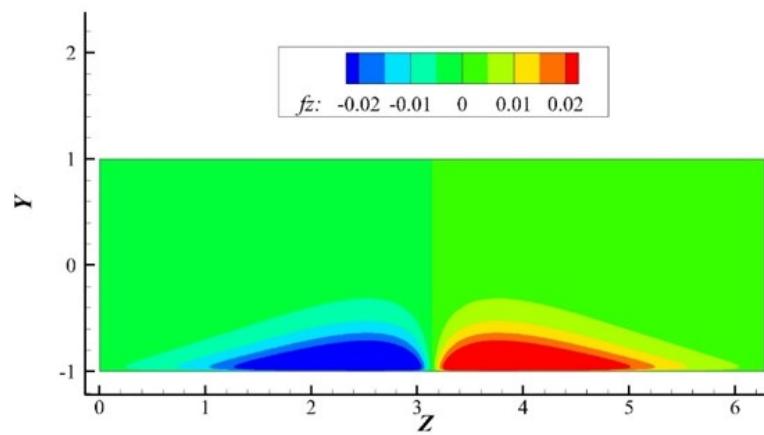
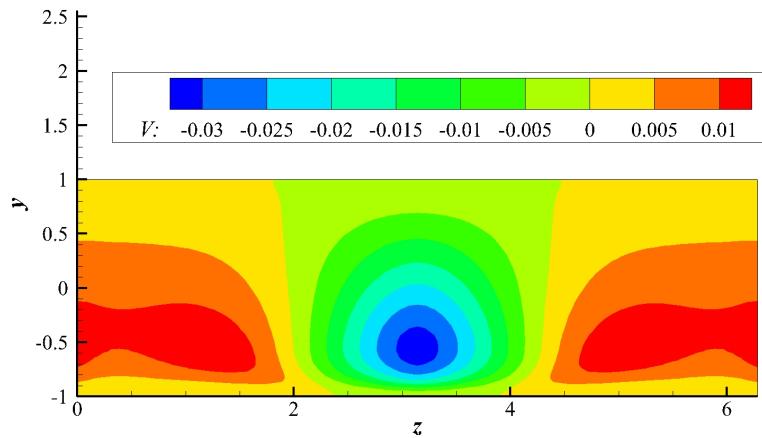
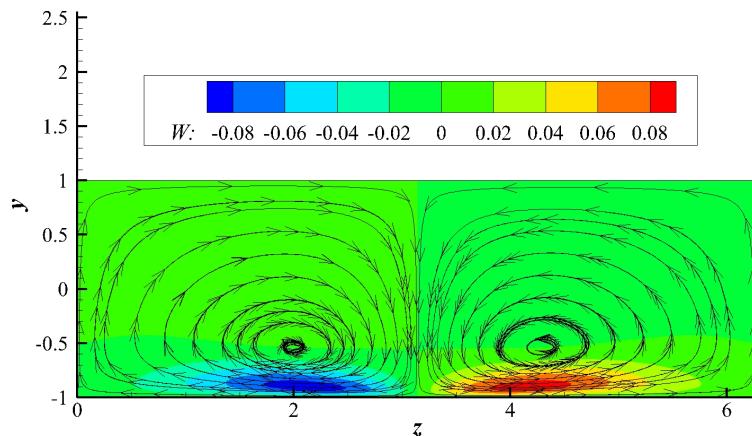


图 5.9 定常激励采用的DBD体积力示意图



(a)  $V$



(b)  $W$

图 5.10 定常DBD在无背景流动的槽道中诱导出来的流场

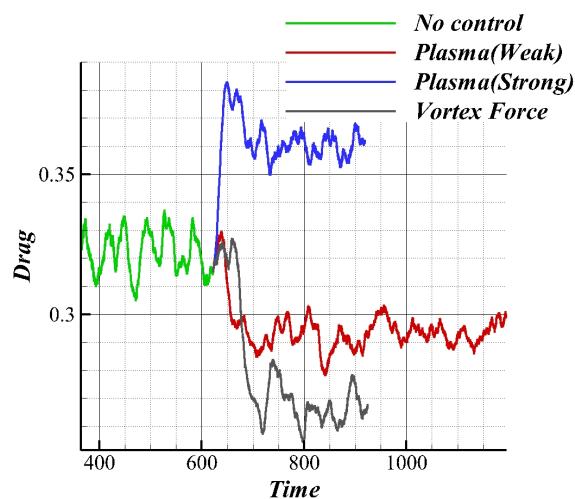


图 5.11 各个算例下壁面阻力对比

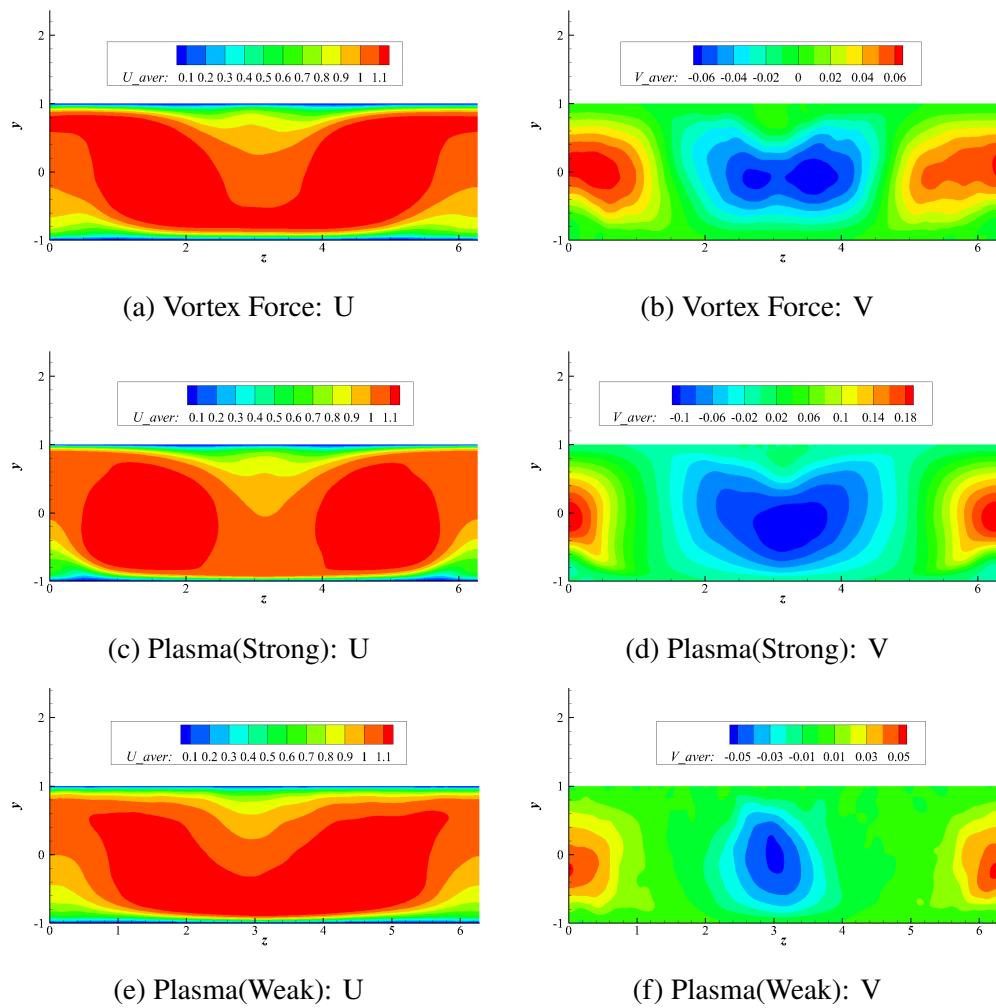


图 5.12 流向与法向平均速度

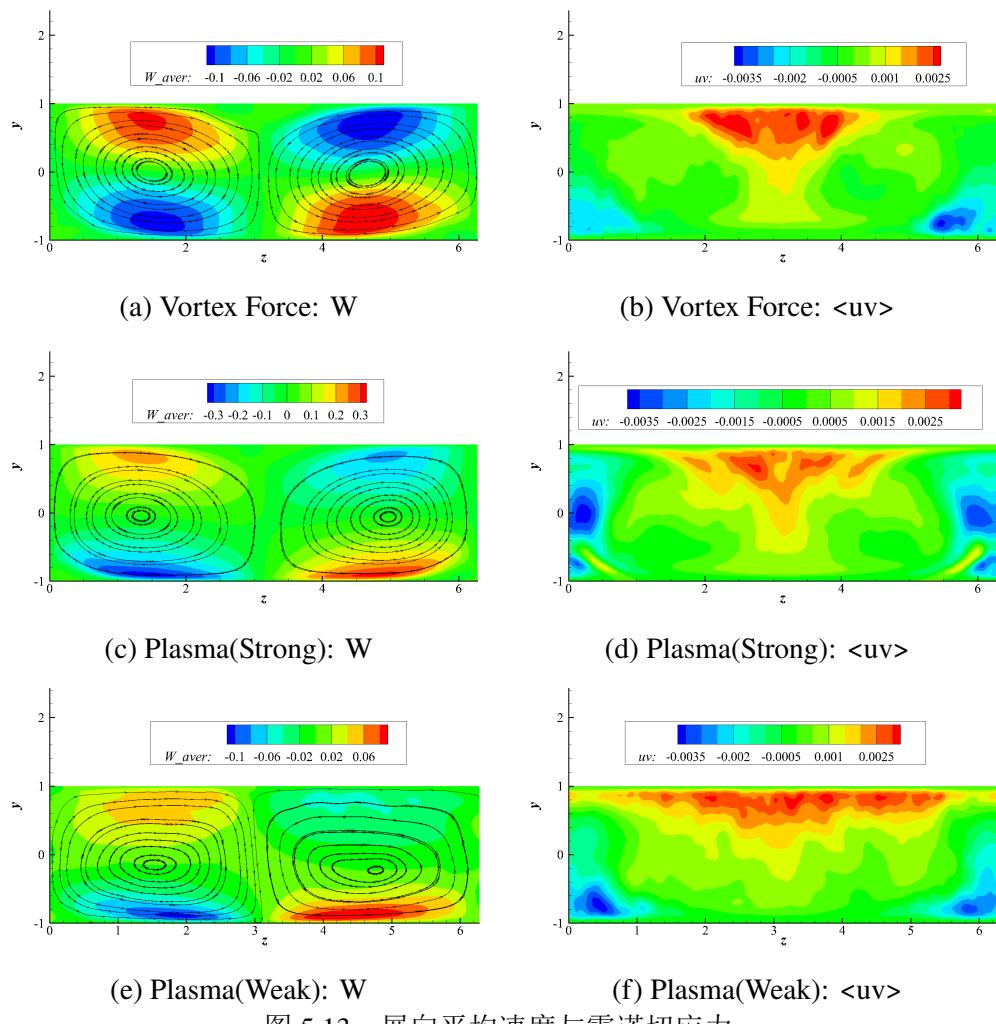


图 5.13 展向平均速度与雷诺切应力

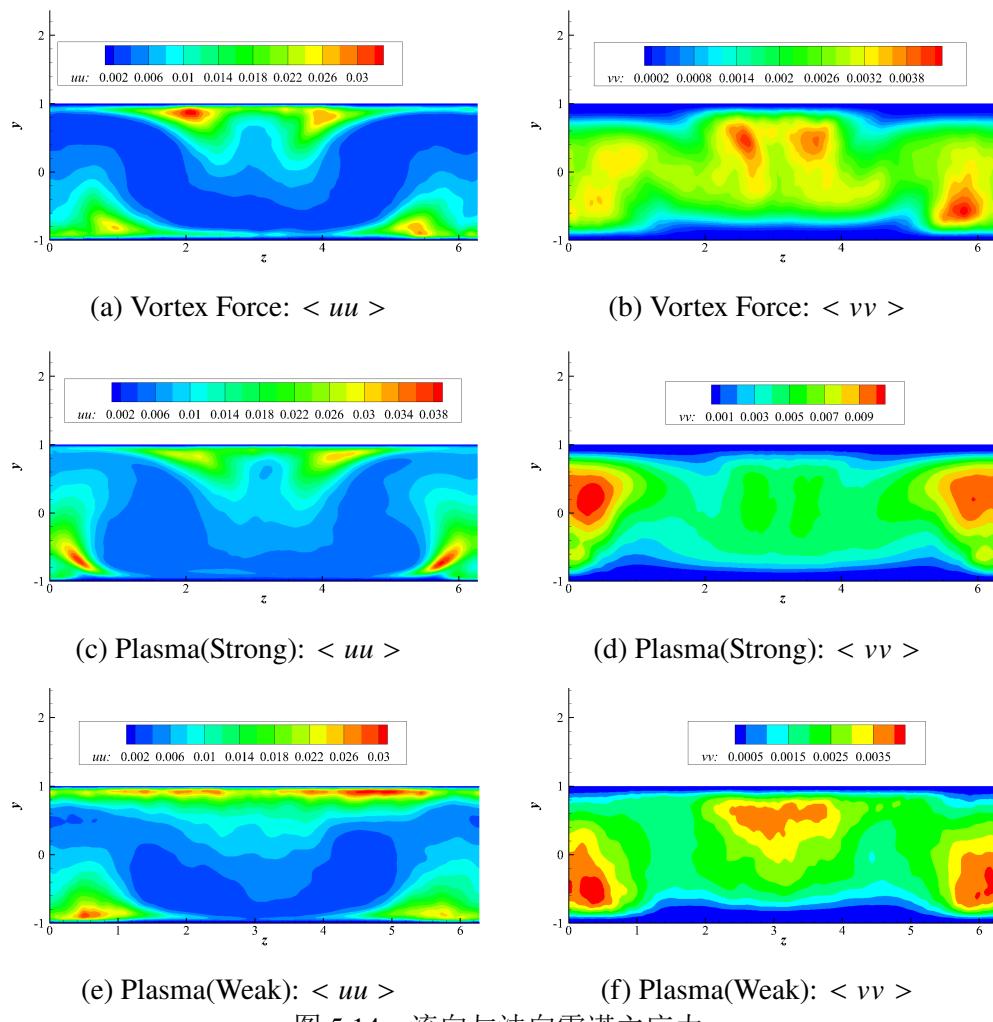


图 5.14 流向与法向雷诺主应力

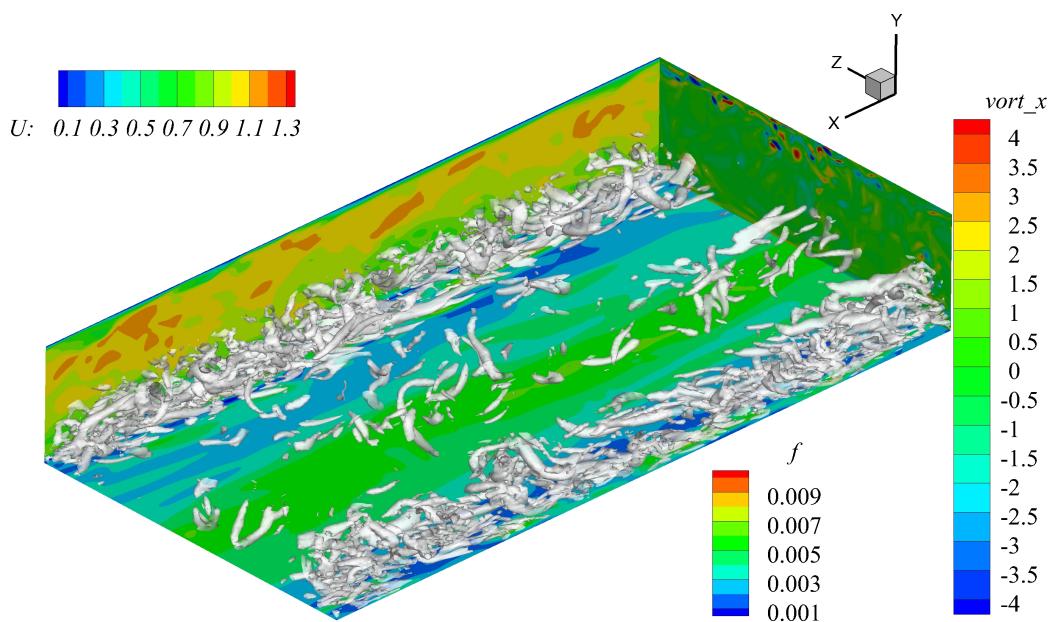
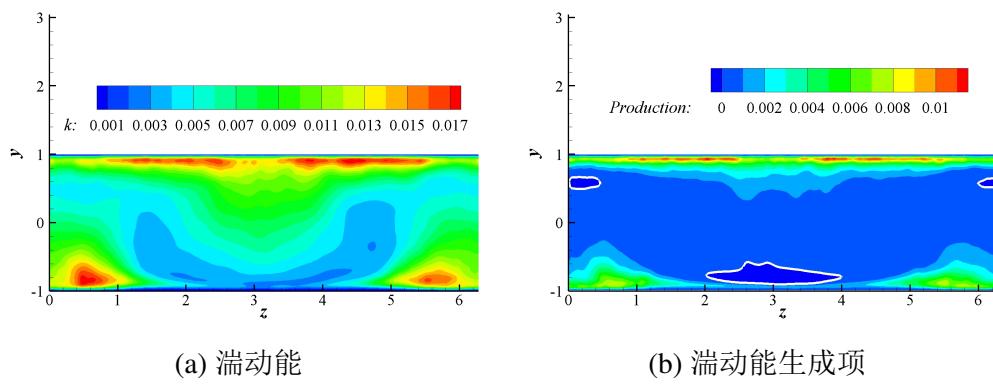


图 5.15 Plasma(Weak) 涡结构



(a) 湍动能

(b) 湍动能生成项

图 5.16 Plasma (Weak) 湍动能和湍动能生成项

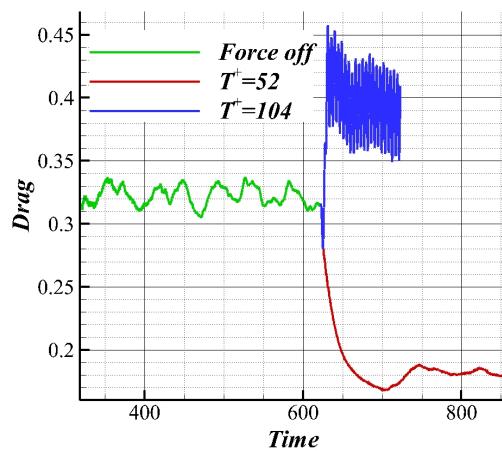


图 5.17 米兰理工体积力激励方案阻力变化

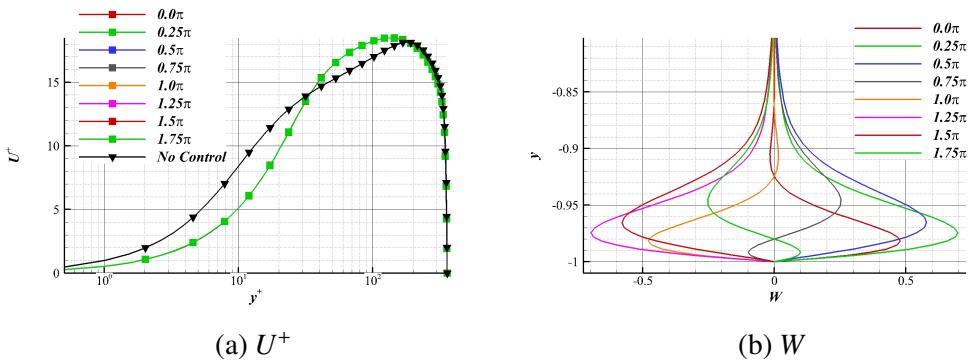


图 5.18  $T^+ = 52$ 相平均

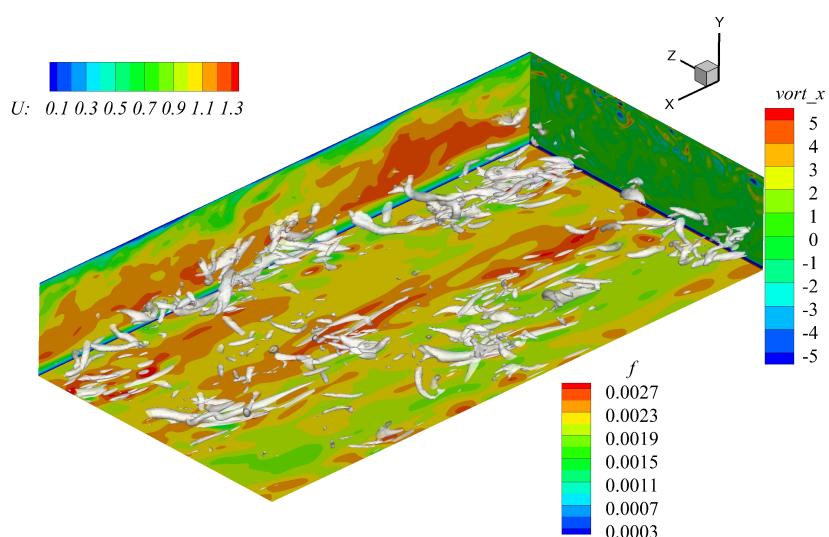


图 5.19 POLIMI涡结构图

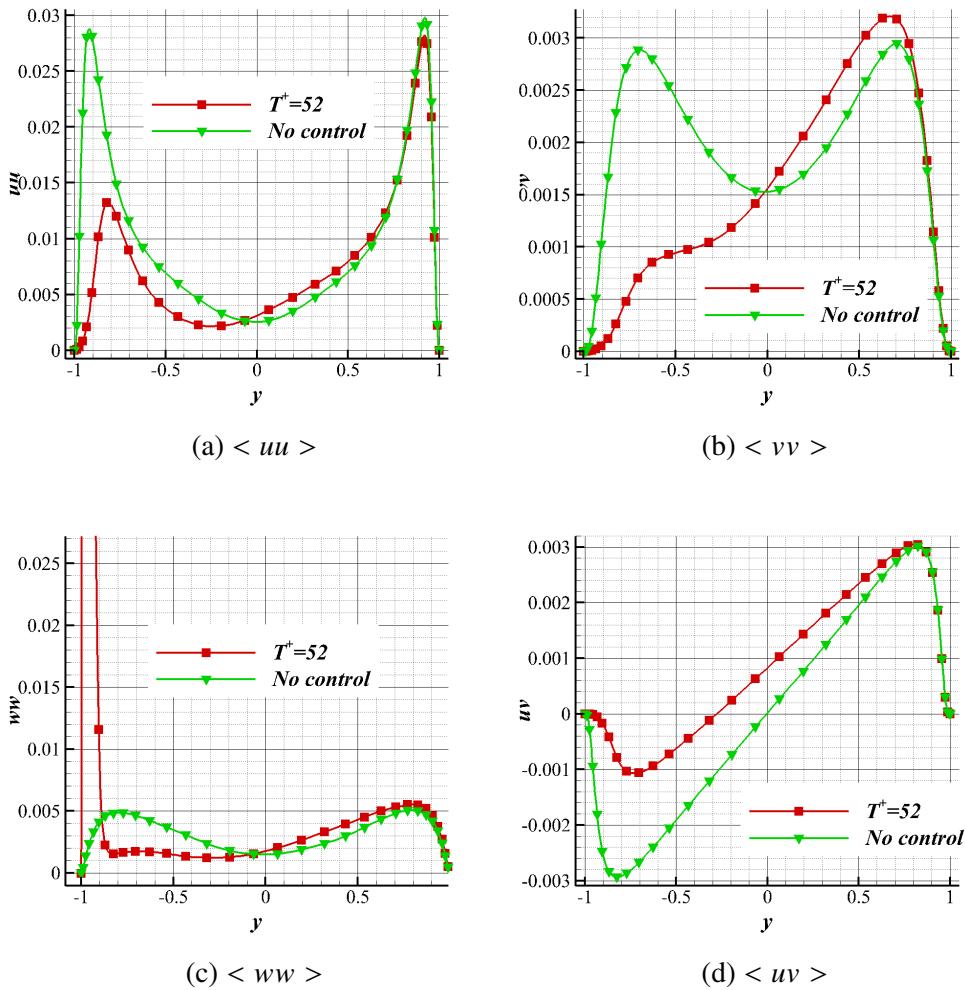


图 5.20 POLIMI二阶统计量对比

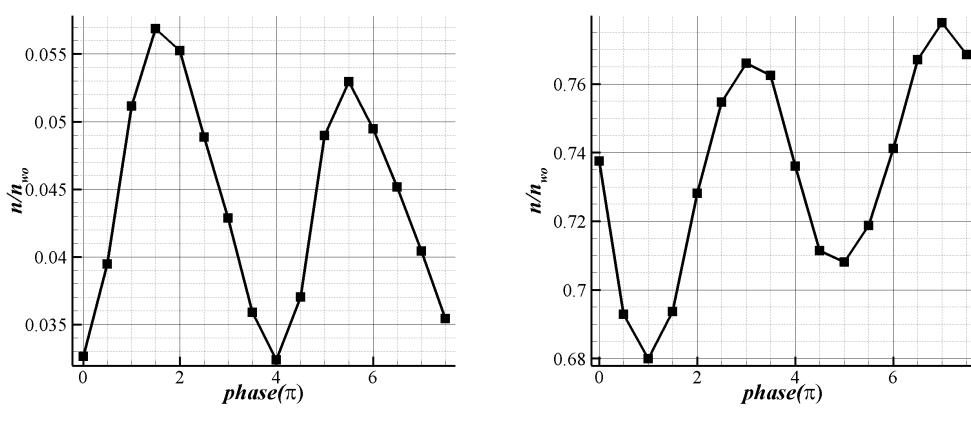
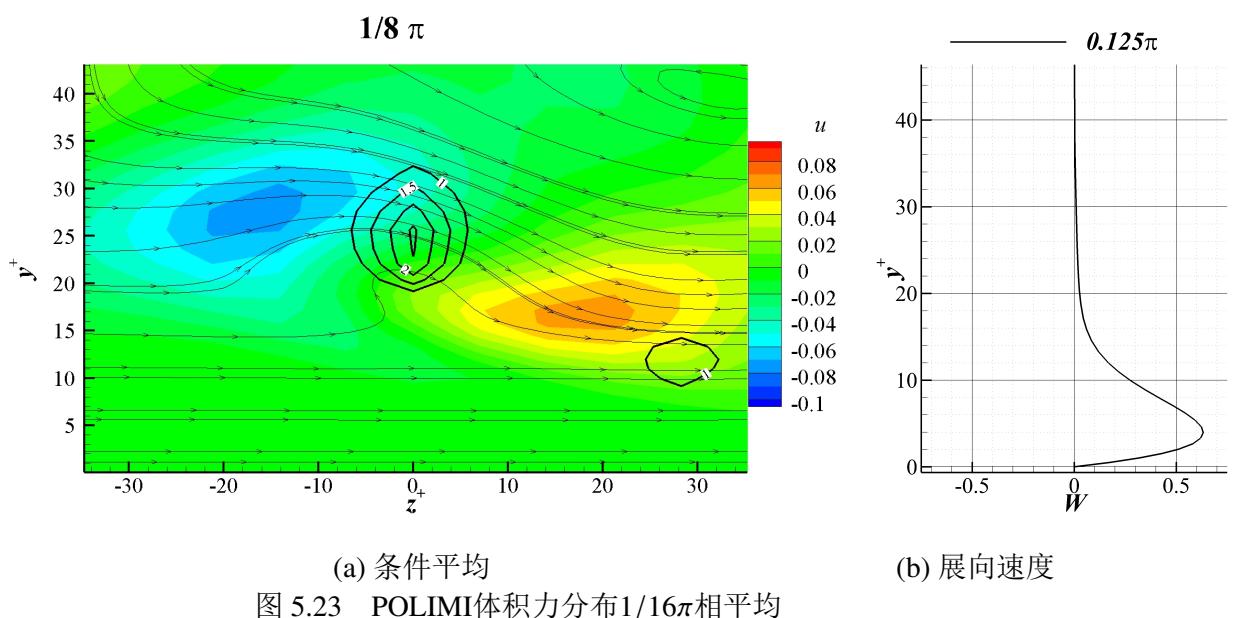
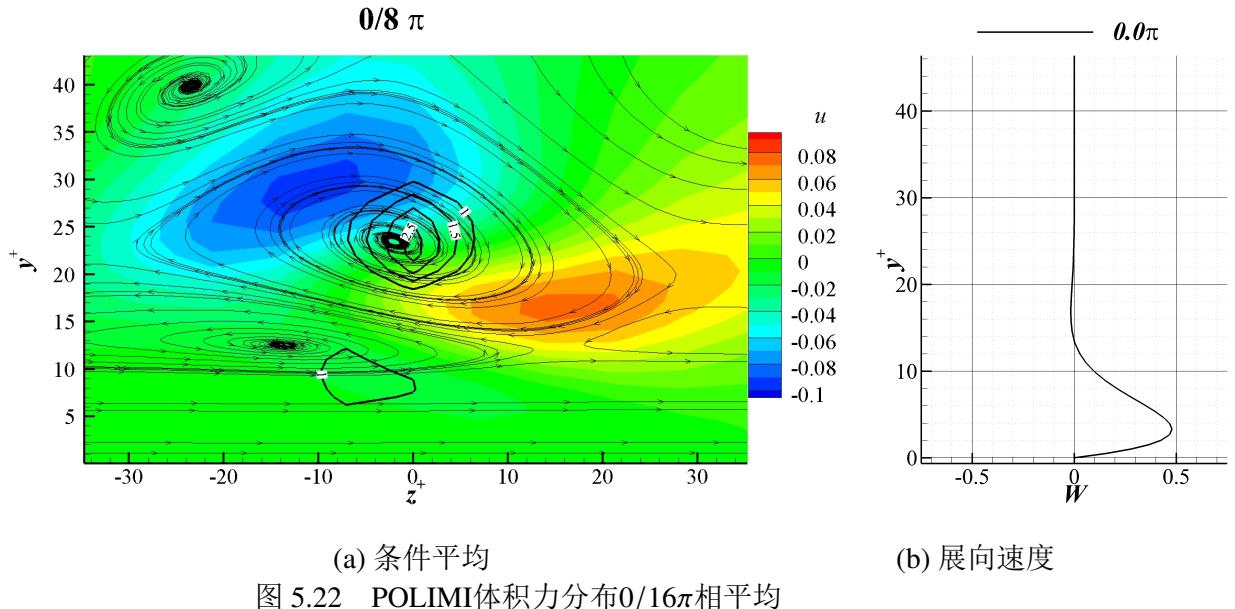


图 5.21 不同相位探测到的涡个数



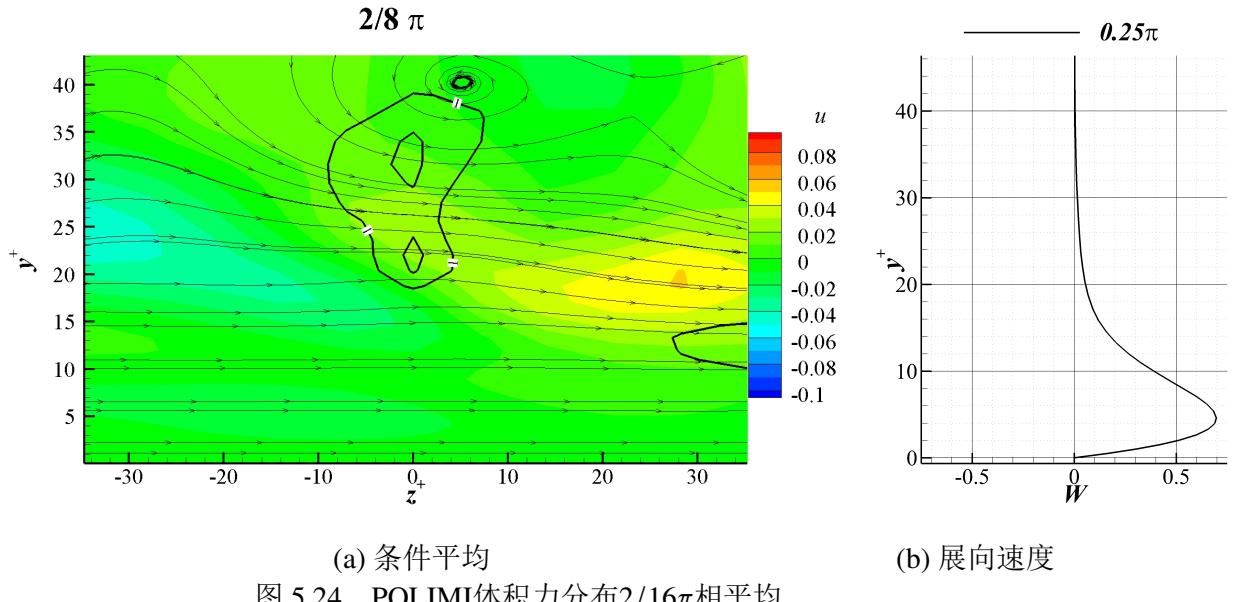


图 5.24 POLIMI体积力分布 $2/16\pi$ 相平均

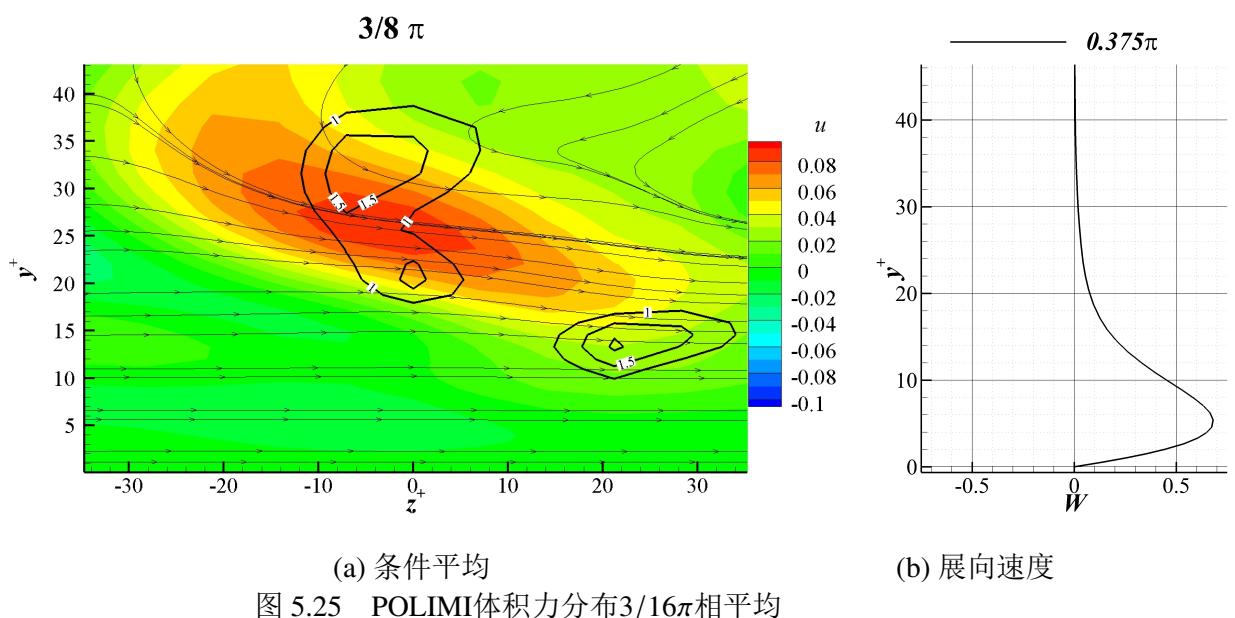
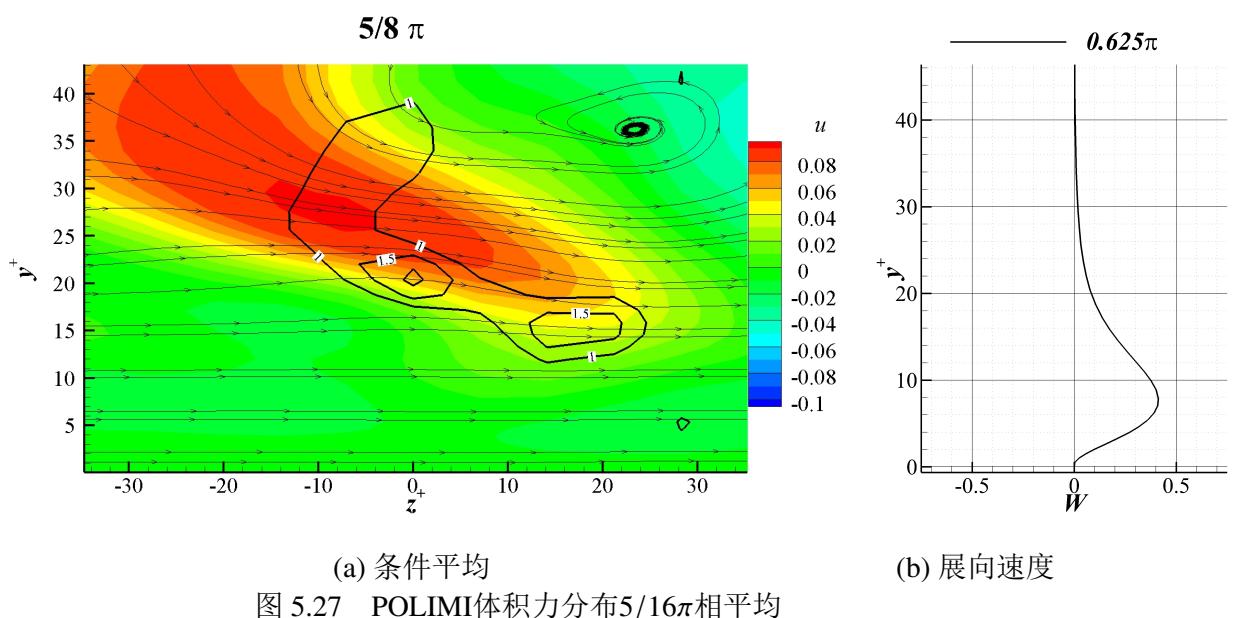
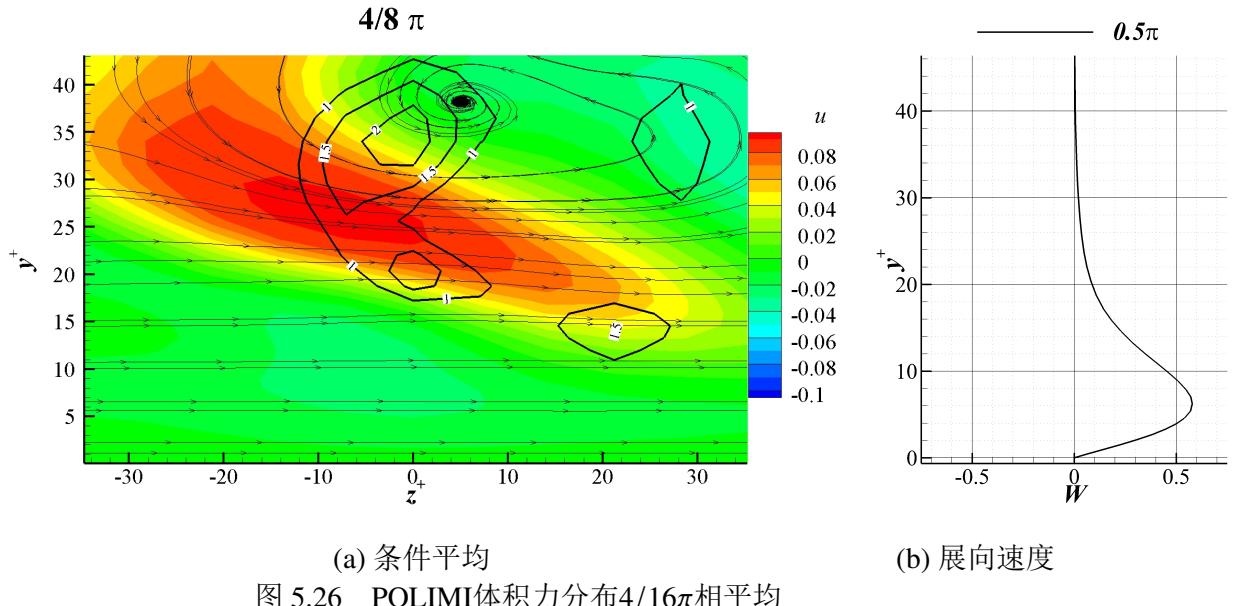
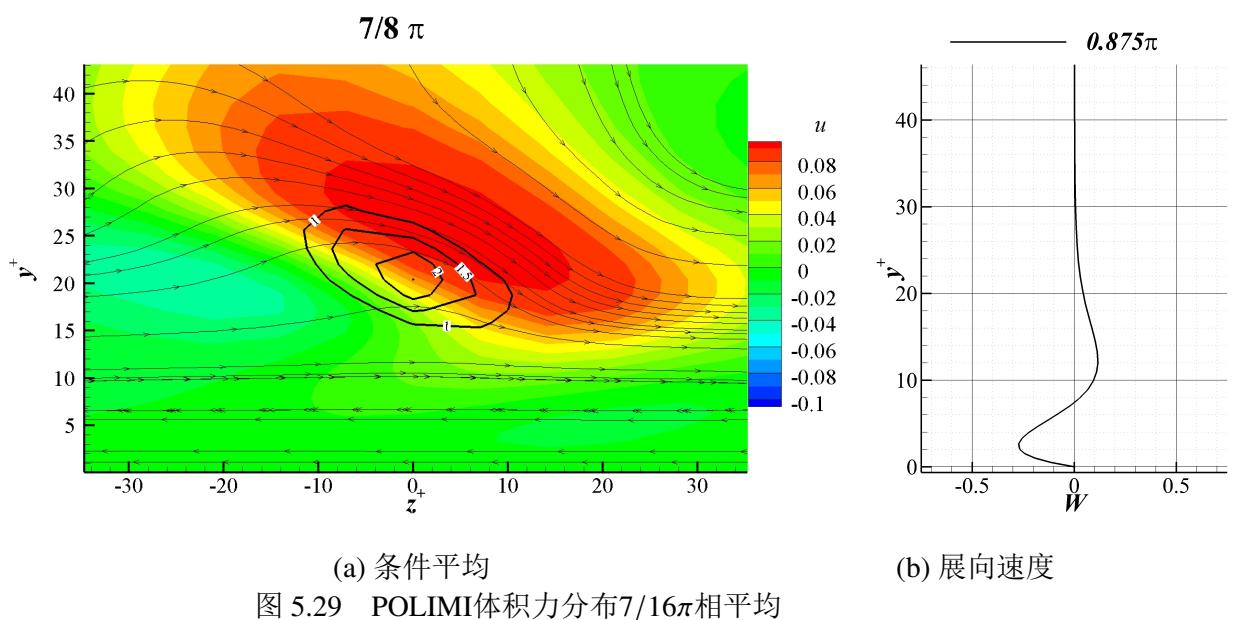
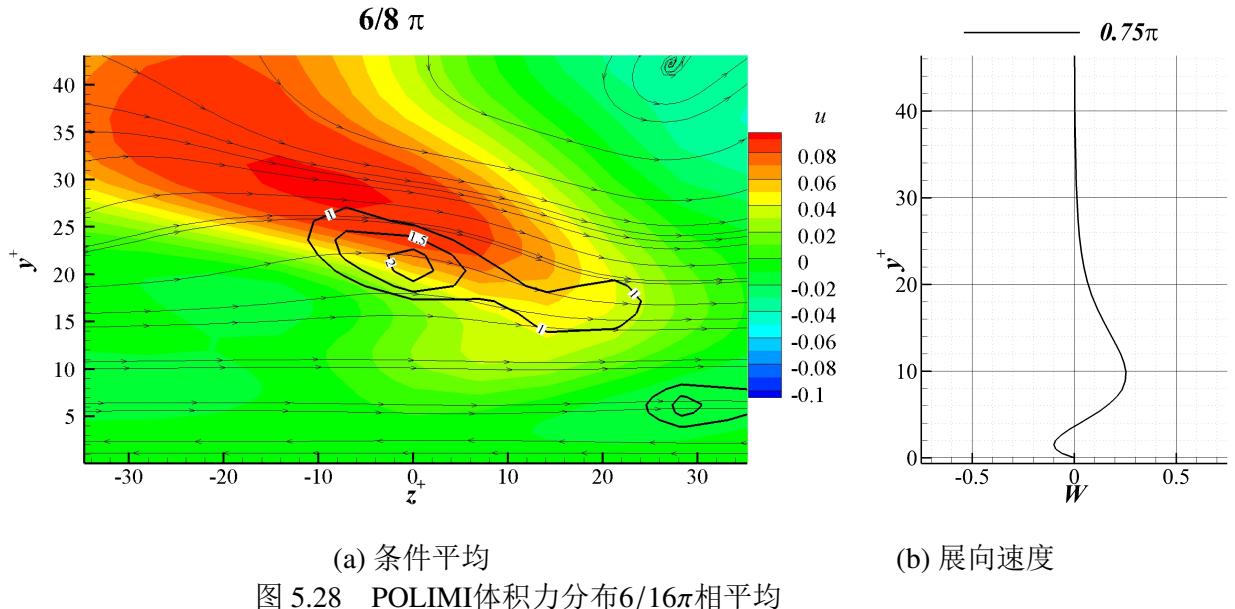
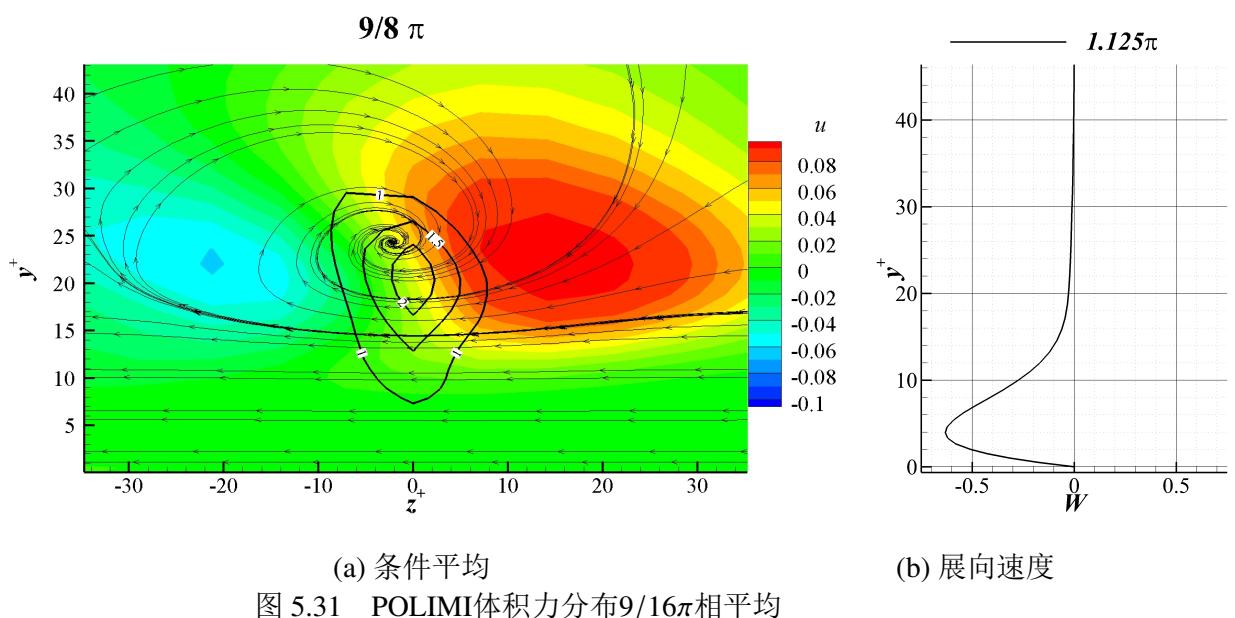
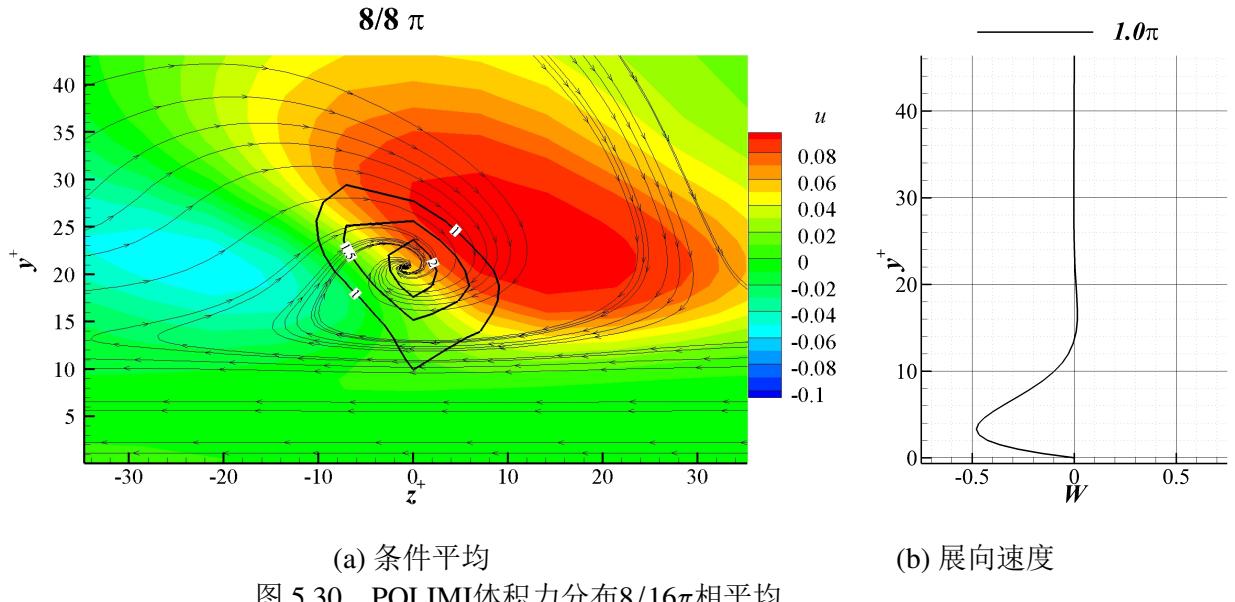
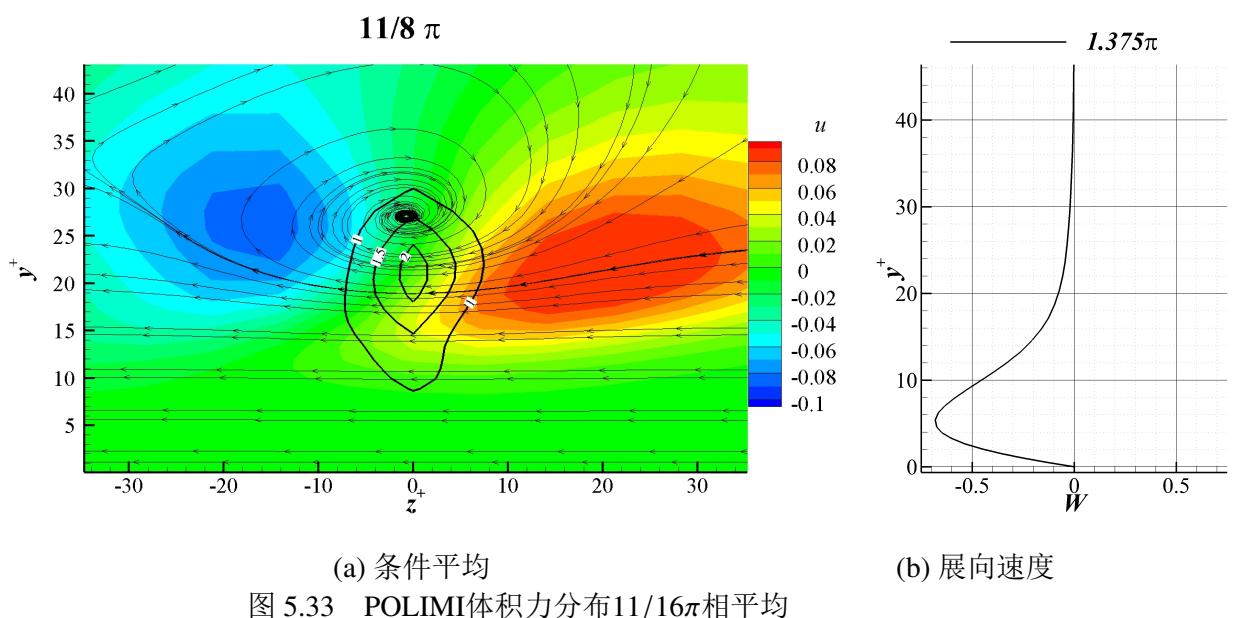
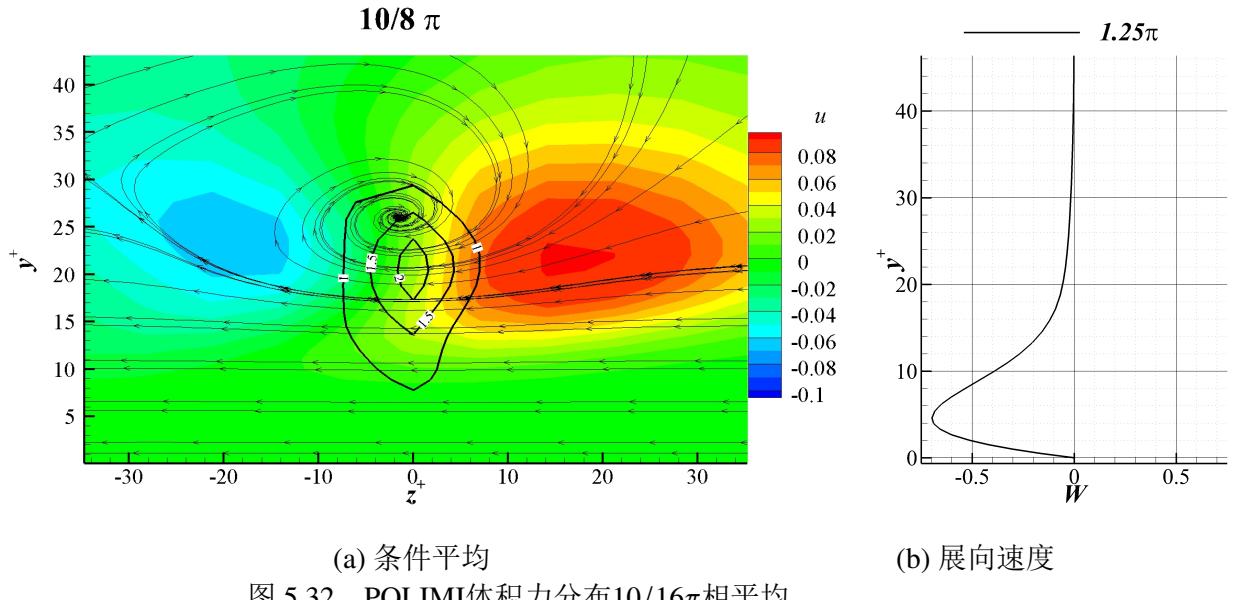


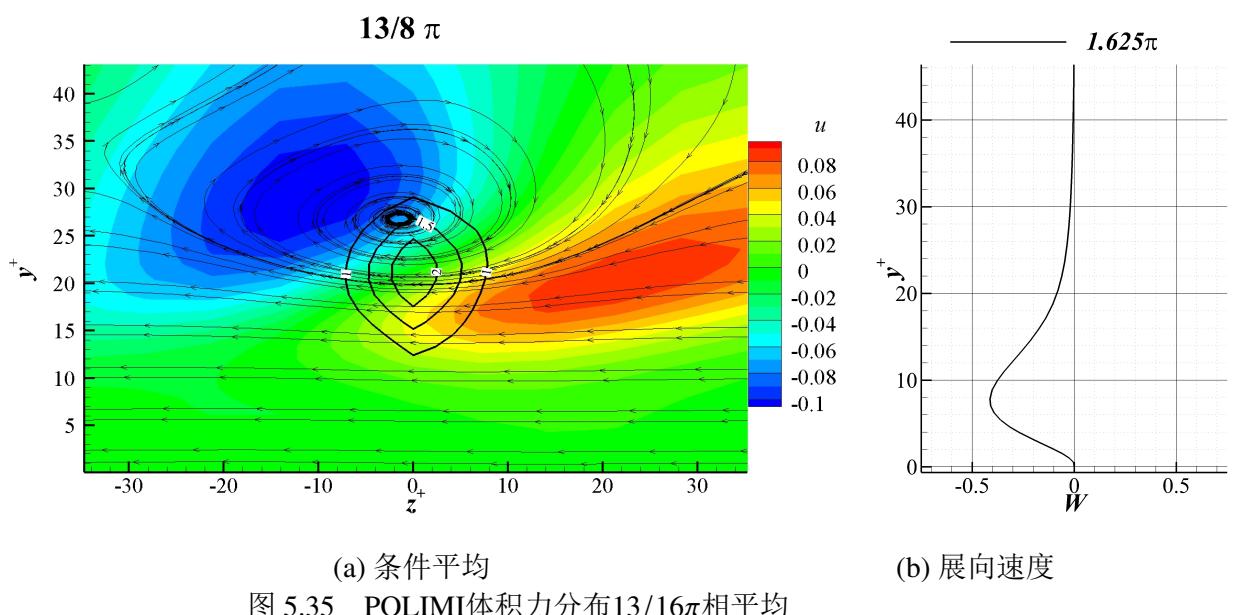
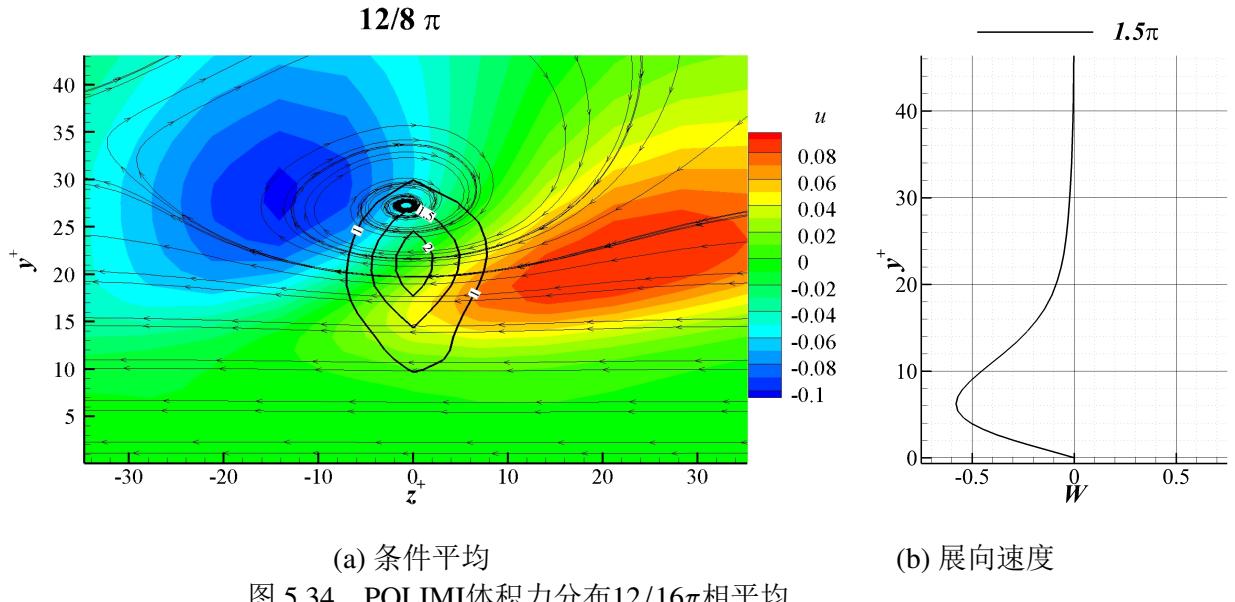
图 5.25 POLIMI体积力分布 $3/16\pi$ 相平均

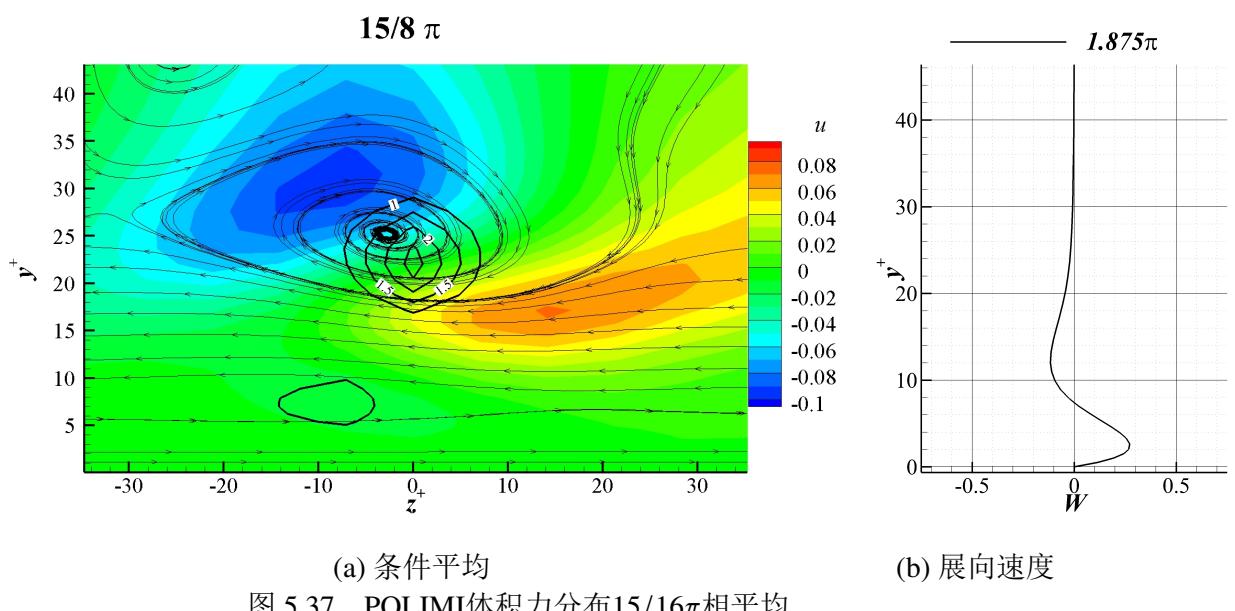
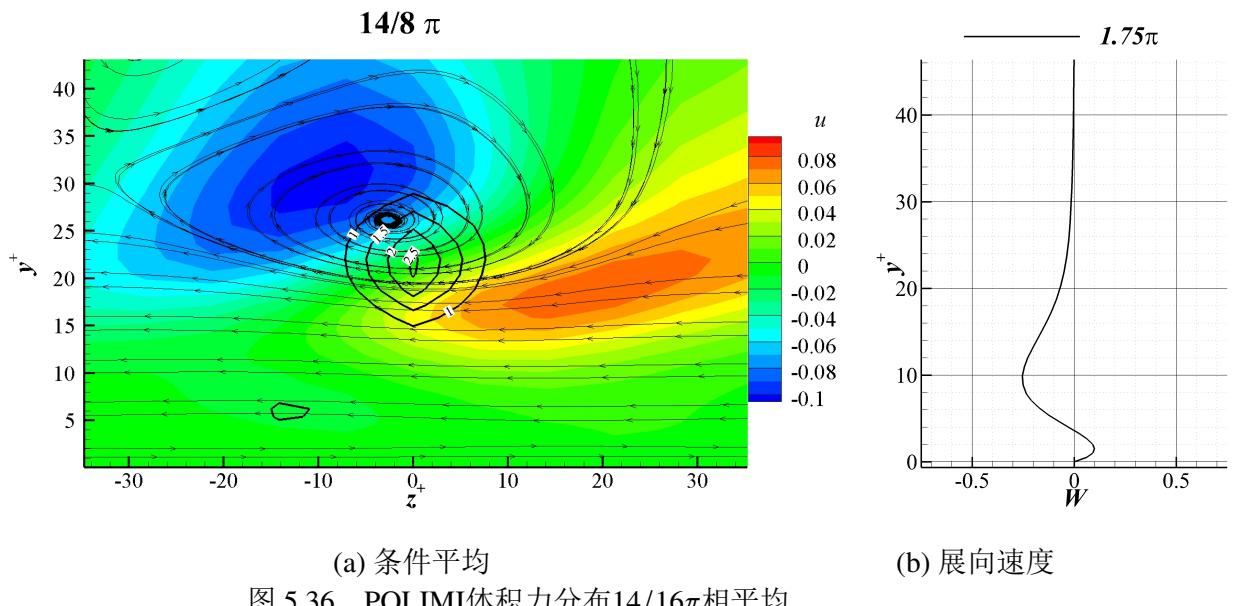


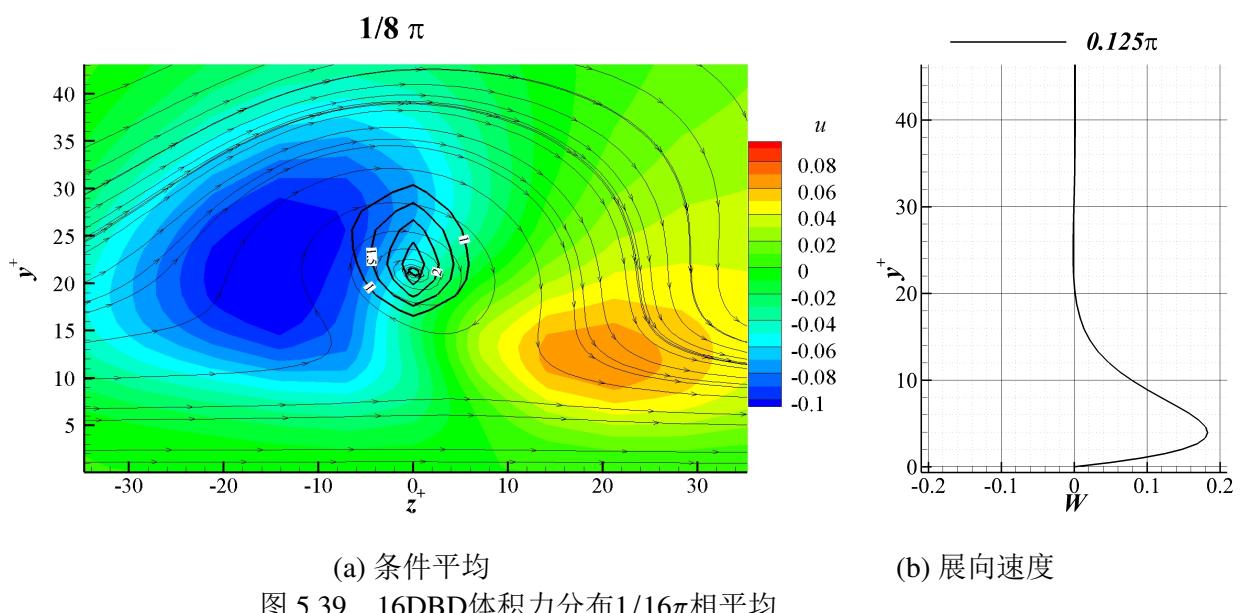
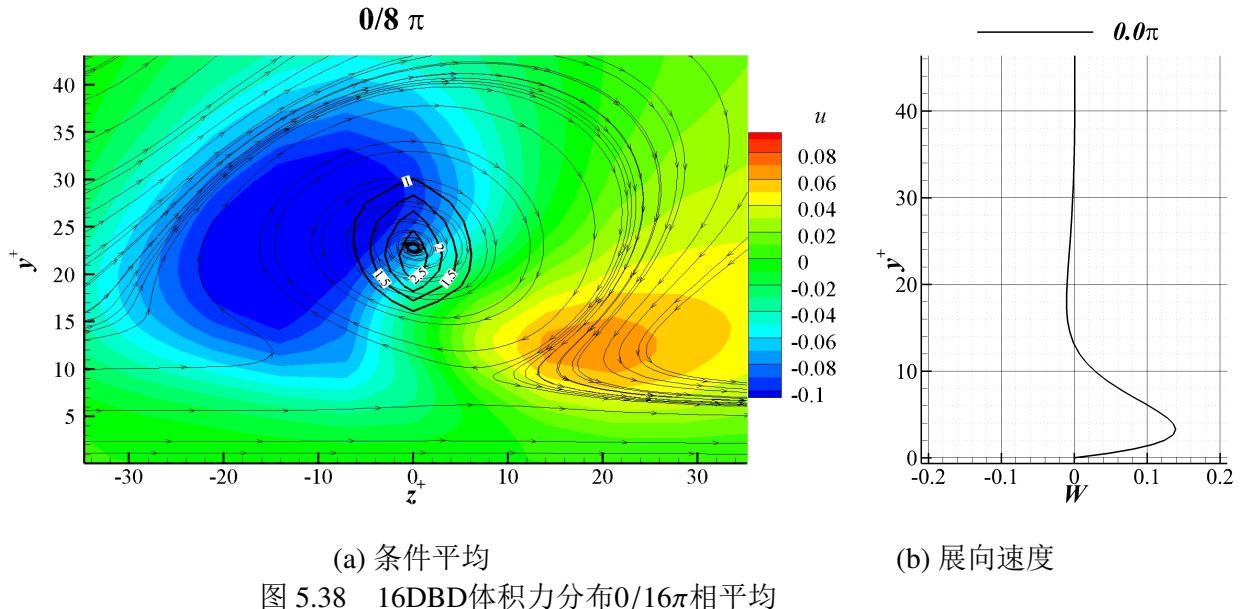


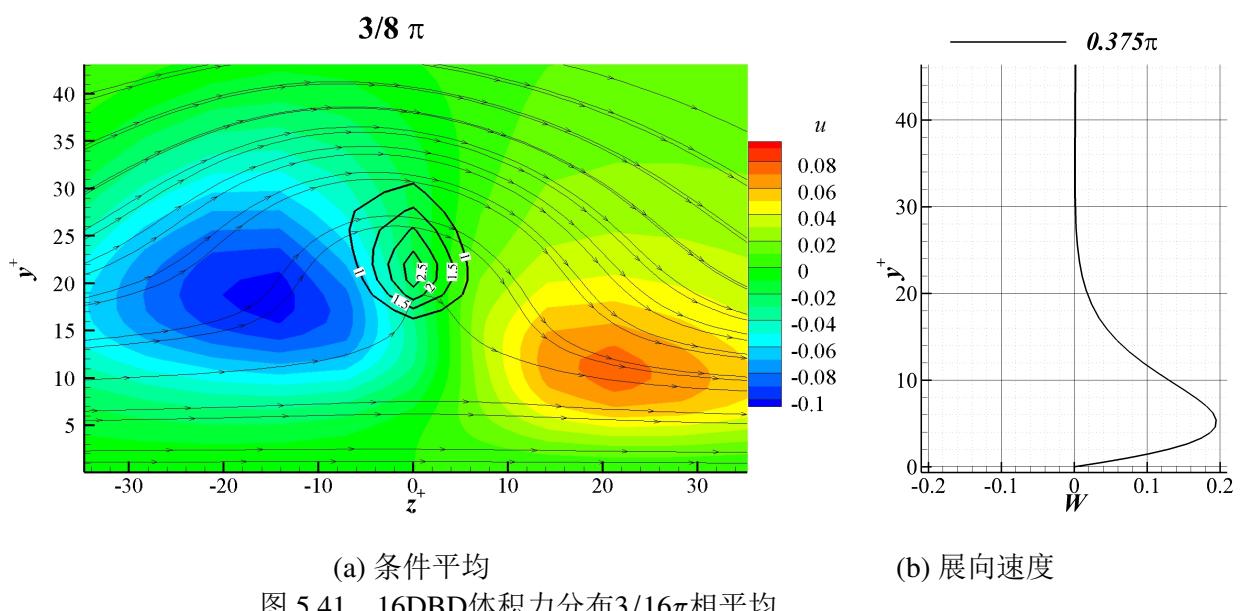
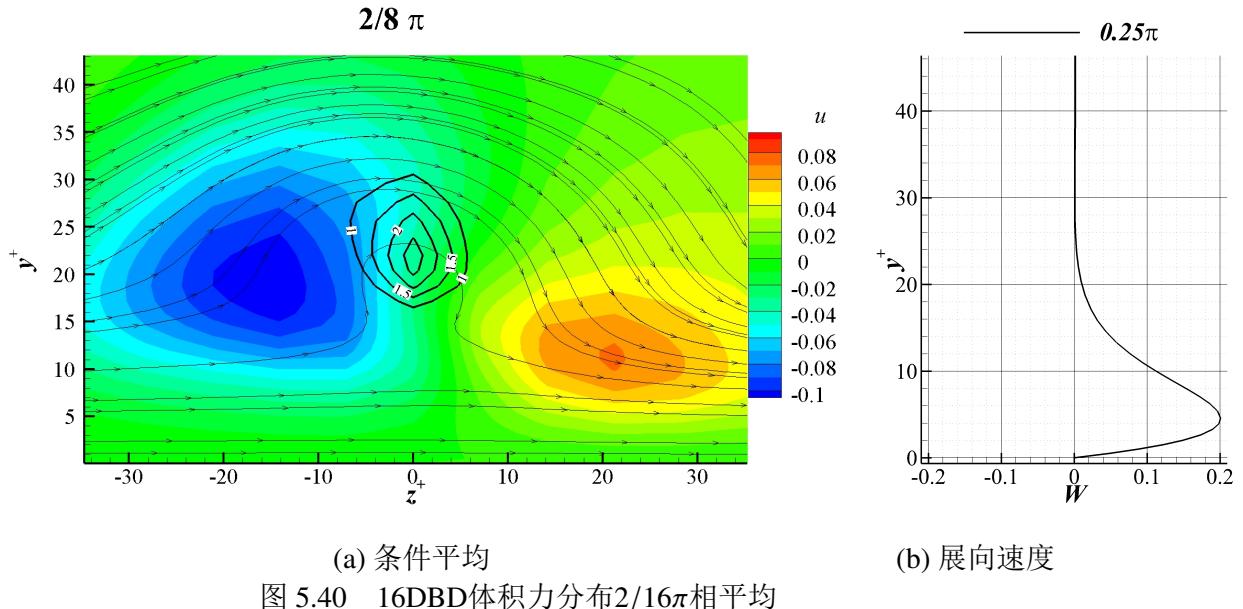


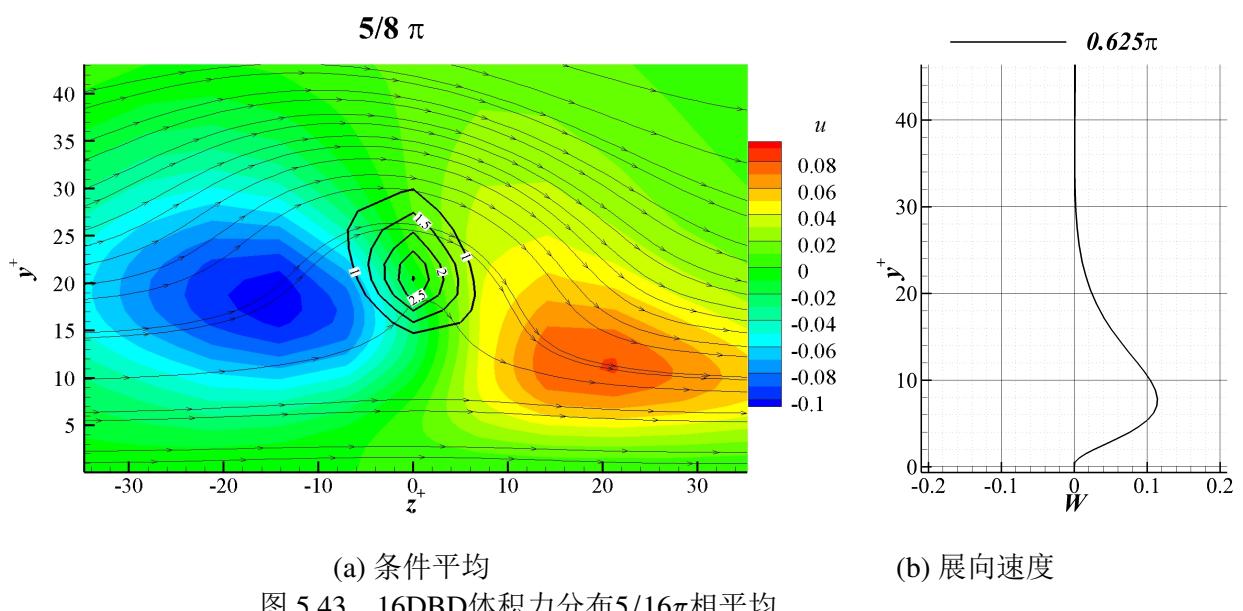
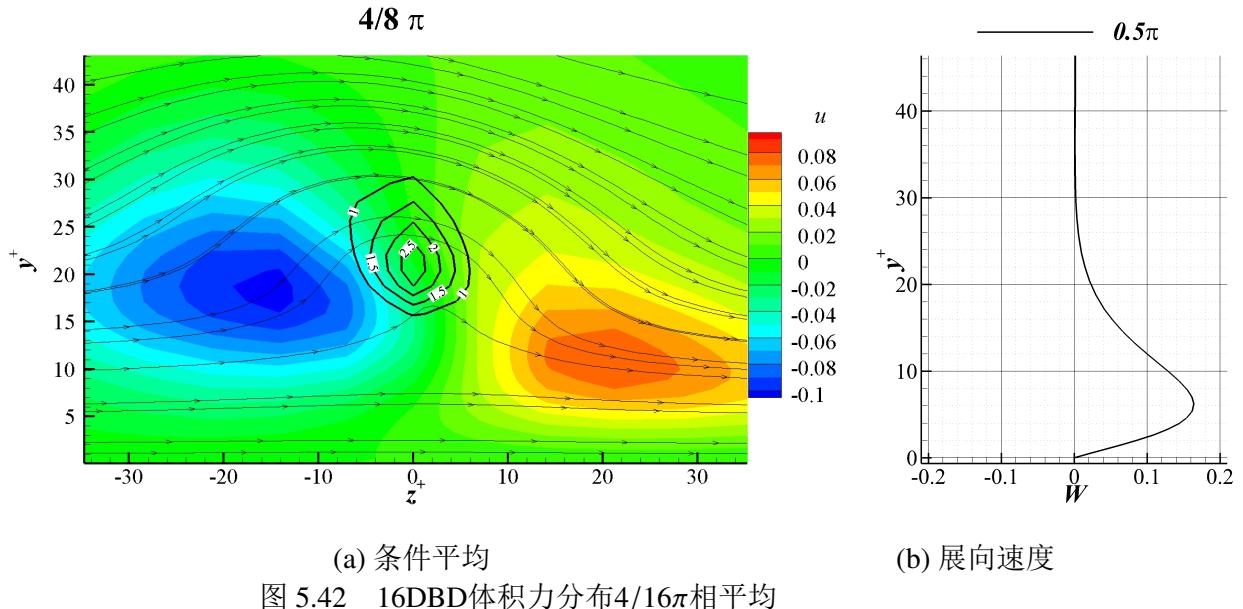


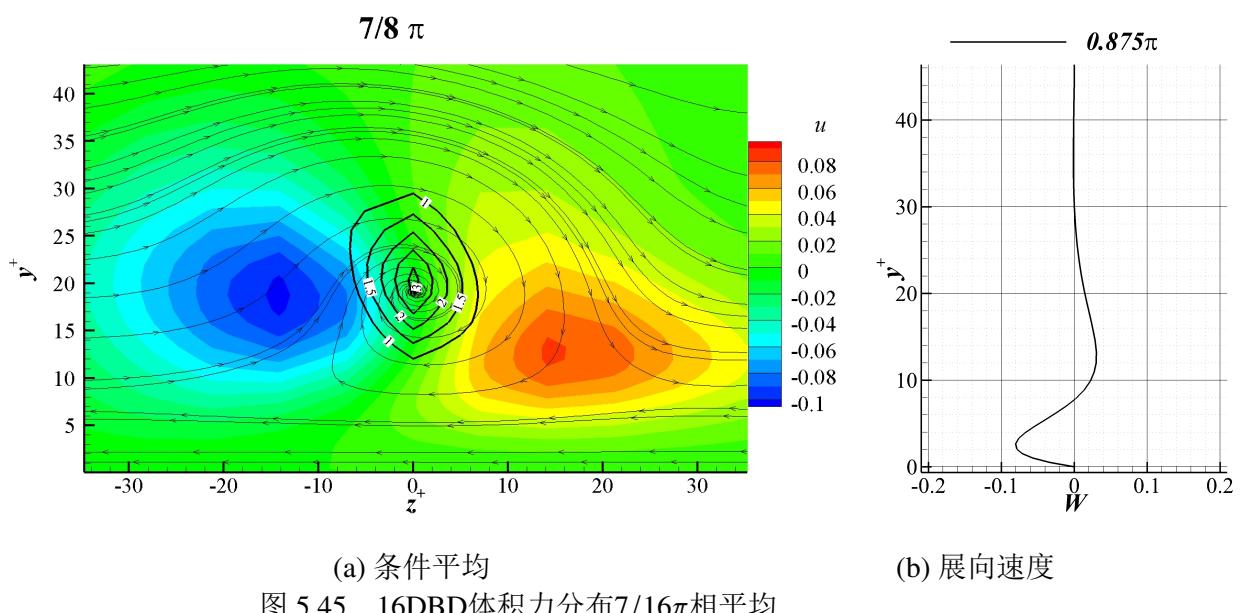
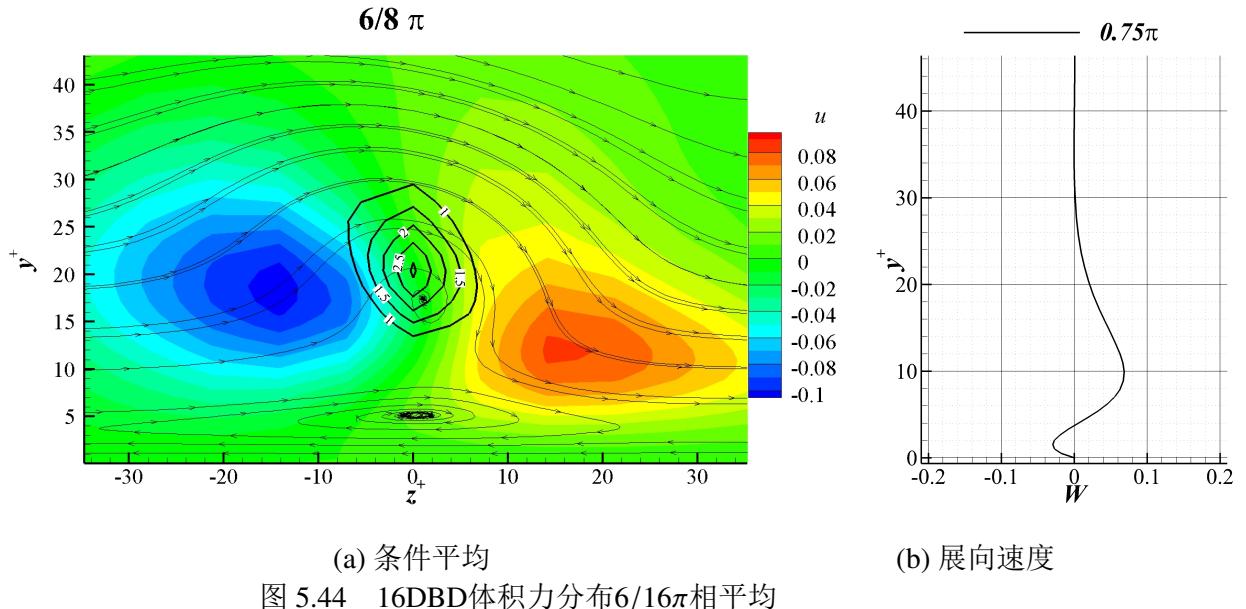


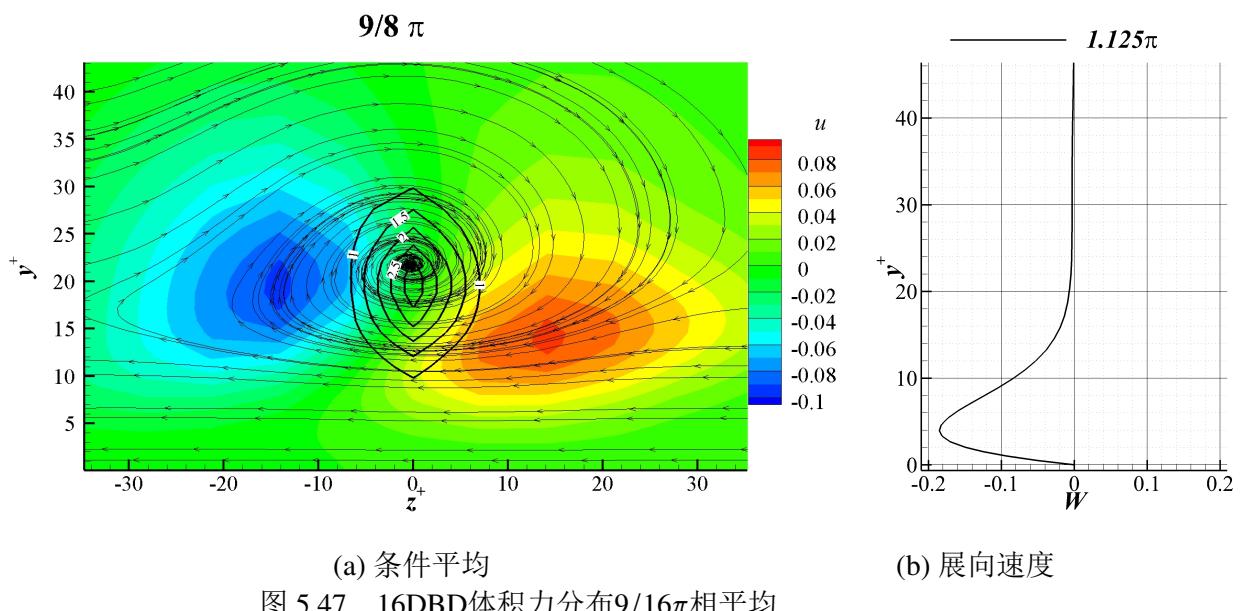
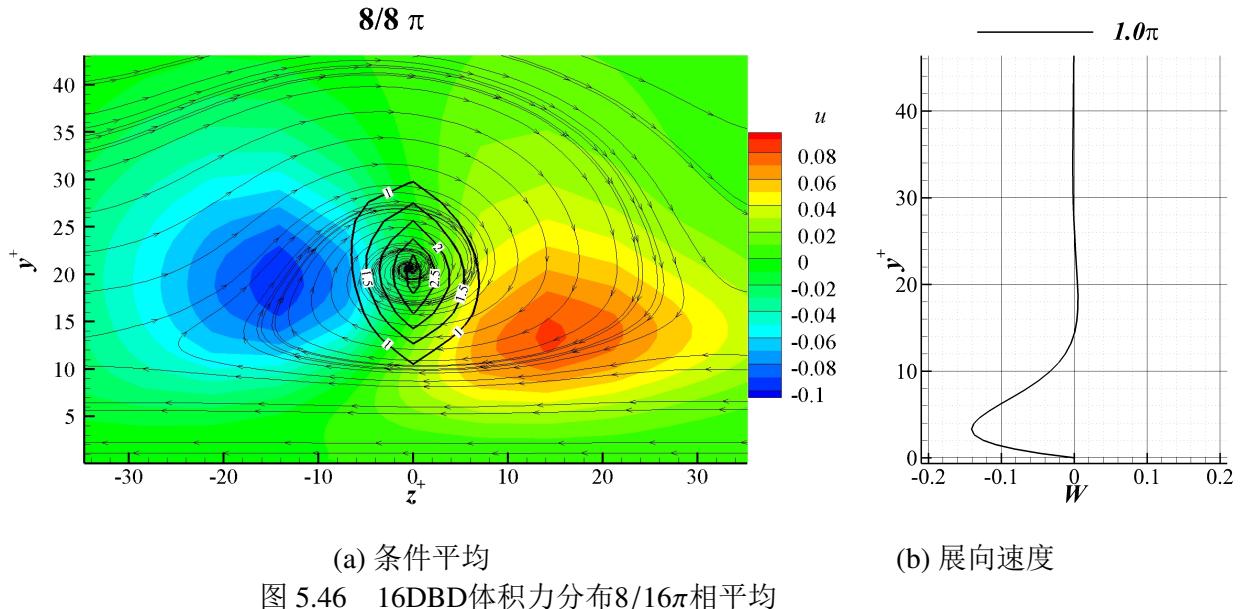


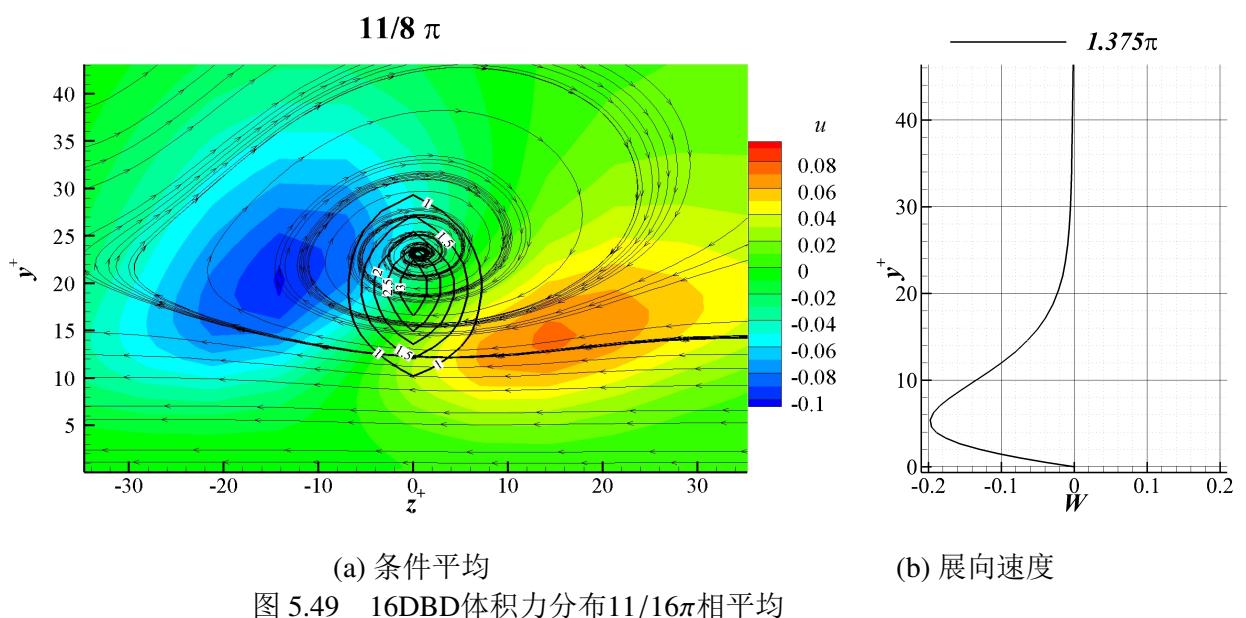
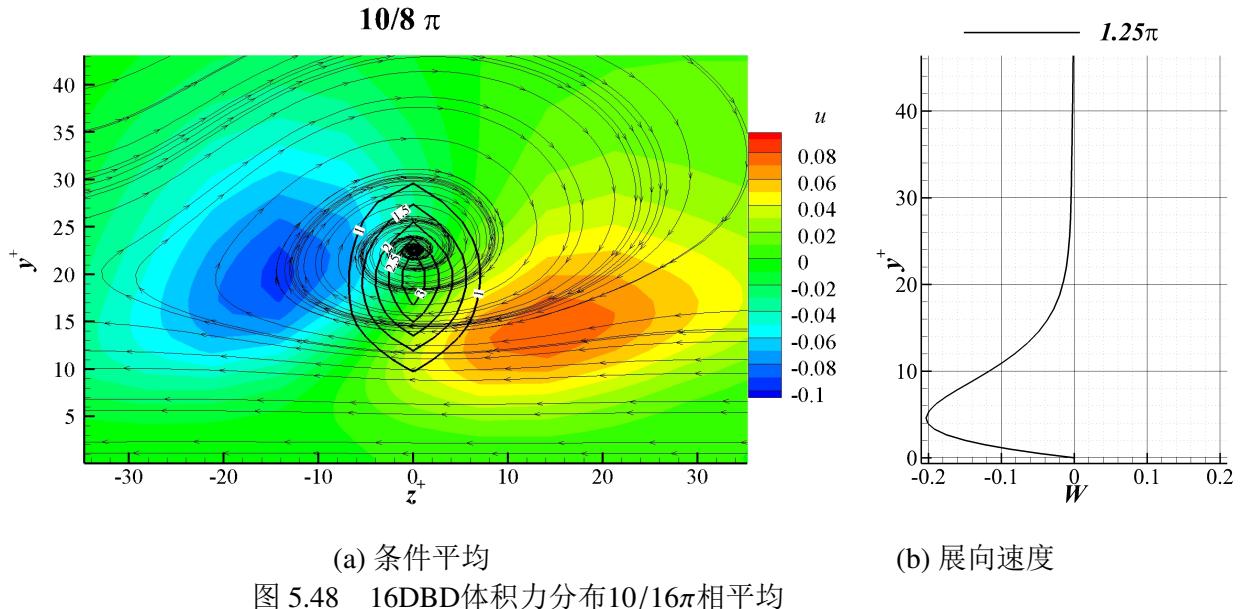


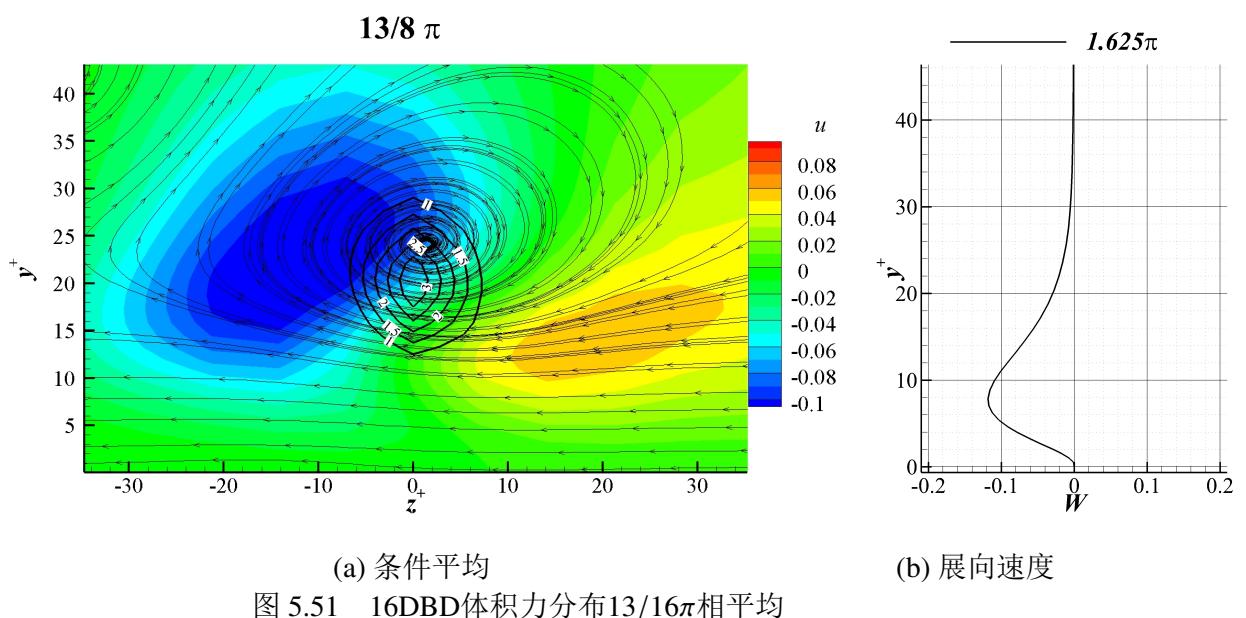
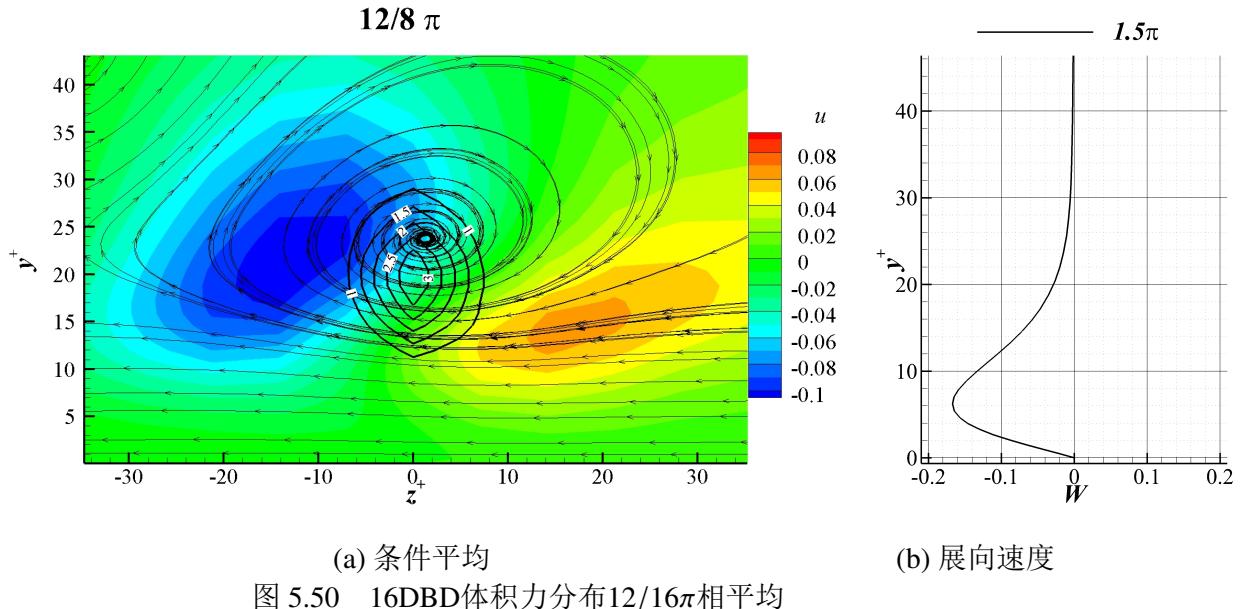


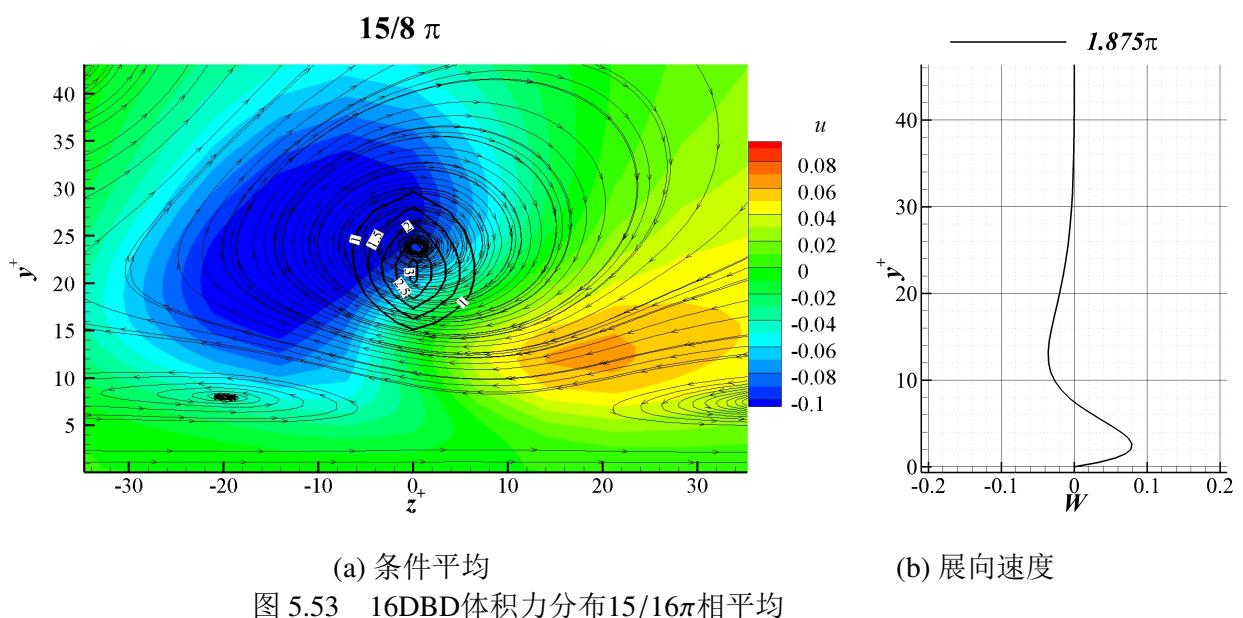
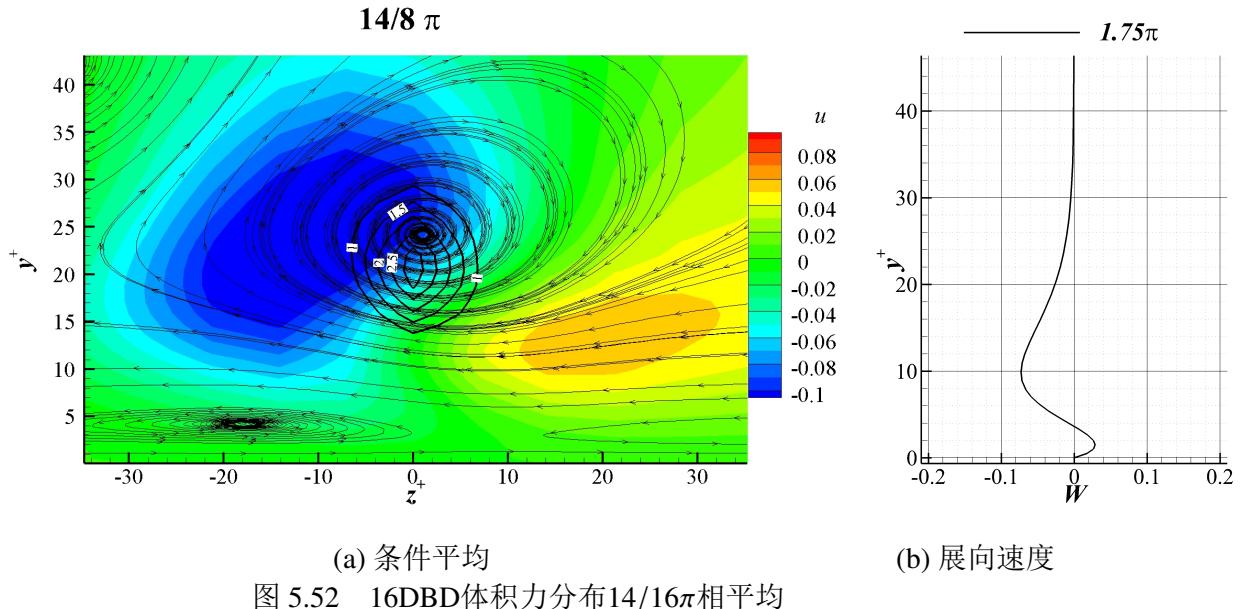












## 第6章 结论

## 参考文献

- [1] Schrauf G. Status and perspectives of laminar flow[J]. Aeronautical Journal, 2005, 109(1102): 639–644.
- [2] Joslin R D. Aircraft laminar flow control[J]. Annual review of fluid mechanics, 1998, 30(1): 1–29.
- [3] 张谷令, 敖玲, 胡建芳, 等. 应用等离子体物理学[M]. [出版地不详]: 北京: 首都师范大学出版社, 2008.
- [4] 聂万胜, 程钰锋, 车学科. 介质阻挡放电等离子体流动控制研究进展[J]. 力学进展, 2012, 42(6): 722–734.
- [5] 吴云, 李应红. 等离子体流动控制研究进展与展望[J]. 航空学报, 2015, 36(2): 381–405.
- [6] Corke T C, Enloe C L, Wilkinson S P. Dielectric barrier discharge plasma actuators for flow control[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 2010, 42(1): 505–529.
- [7] Whalley R D, Choi K S. The starting vortex in quiescent air induced by dielectric-barrier-discharge plasma[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2012, 703: 192–203.
- [8] Masuda S, Washizu M. Ionic charging of a very high resistivity spherical particle[J/OL]. Journal of Electrostatics, 1979, 6(1): 57–67. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/030438867990024X>.
- [9] Roth J, Sherman D, Wilkinson S. Aerospace sciences meetings: Boundary layer flow control with a one atmosphere uniform glow discharge surface plasma[M/OL]. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1998. <https://doi.org/10.2514/6.1998-328>
- [10] Morkovin M V. On the many faces of transition[M]//Viscous drag reduction. [S.l.]: Springer, 1969: 1–31
- [11] Papanastasiou T, Georgiou G, Alexandrou A N. Viscous fluid flow[M]. [S.l.]: CRC Press, 1999
- [12] Jacobs R, Durbin P. Simulations of bypass transition[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2001, 428: 185–212.
- [13] Malkiel E, Mayle R. Transition in a separation bubble[C]//ASME 1995 International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exposition. [S.l.]: American Society of Mechanical Engineers, 1995: V001T01A003–V001T01A003.
- [14] Walker G. The role of laminar-turbulent transition in gas turbine engines: a discussion[C]//ASME 1992 International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exposition. [S.l.]: American Society of Mechanical Engineers, 1992: V001T01A108–V001T01A108.
- [15] Bradshaw P. Turbulence: the chief outstanding difficulty of our subject[J]. Experiments in fluids, 1994, 16(3-4): 203–216.
- [16] Reshotko E. Environment and receptivity[J]. AGARD Rep, 1984, 709.
- [17] Malik M R, Li F, Choudhari M M, et al. Secondary instability of crossflow vortices and swept-wing boundary-layer transition[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1999, 399: 85–115.

- [18] Malik M, Li F, Chang C L. Crossflow disturbances in three-dimensional boundary layers: nonlinear development, wave interaction and secondary instability[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1994, 268: 1–36.
- [19] Li F, Malik M R. On the nature of PSE approximation[J]. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 1996, 8(4): 253–273.
- [20] Bottaro A, Corbett P, Luchini P. The effect of base flow variation on flow stability[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2003, 476.
- [21] Marquet O, Sipp D, Jacquin L. Sensitivity analysis and passive control of cylinder flow[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2008, 615: 221.
- [22] Alizard F, Robinet J C, Rist U. Sensitivity analysis of a streamwise corner flow[J]. *Physics of Fluids*, 2010, 22(1): 014103.
- [23] Brandt L, Sipp D, Pralits J O, et al. Effect of base-flow variation in noise amplifiers: the flat-plate boundary layer[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2011, 687: 503–528.
- [24] Meliga P, Pujals G, Serre E. Sensitivity of 2-d turbulent flow past a d-shaped cylinder using global stability[J]. *Physics of Fluids*, 2012, 24(6): 061701.
- [25] Browne O M F, Rubio G, Ferrer E, et al. Sensitivity analysis to unsteady perturbations of complex flows: a discrete approach[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2014, 76 (12): 1088–1110.
- [26] Alizard F, Robinet J C, Filliard G. Sensitivity analysis of optimal transient growth for turbulent boundary layers[J]. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 2015, 49: 373–386.
- [27] Pralits J O, Airiau C, Hanifi A, et al. Sensitivity analysis using adjoint parabolized stability equations for compressible flows[J]. *Flow, Turbulence and Combustion*, 2000, 65(3-4): 321–346.
- [28] Lin R S, Malik M R. On the stability of attachment-line boundary layers. part 1. the incompressible swept hiemenz flow[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1996, 311.
- [29] GuÈGan A, Schmid P J, Huerre P. Optimal energy growth and optimal control in swept hiemenz flow[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2006, 566: 11.
- [30] Joslin R D, Streett C L, Chang C L. Validation of three-dimensional incompressible spatial direct numerical simulation code: a comparison with linear stability and parabolic stability equation theories for boundary-layer transition on a flat plate[R]. [S.l.: s.n.], 1992.
- [31] Li F, Choudhari M, Carpenter M, et al. Control of crossflow transition at high reynolds numbers using discrete roughness elements[J]. *AIAA Journal*, 2015: 1–14.
- [32] Xu G, Xiao Z, Fu S. Analysis of the secondary instability of the incompressible flows over a swept wing[J]. *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, 2011, 54(4): 724–736.
- [33] Xu G, Xiao Z, Fu S. Secondary instability control of compressible flow by suction for a swept wing[J]. *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, 2011, 54(11): 2040–2052.
- [34] Ren J, Fu S. Competition of the multiple görler modes in hypersonic boundary layer flows[J]. *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, 2014, 57(6): 1178–1193.
- [35] Ren J, Fu S. Floquet analysis of fundamental, subharmonic and detuned secondary instabilities of görler vortices[J]. *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, 2014, 57(3): 555–561.

- [36] Ren J, Fu S. Study of the discrete spectrum in a mach 4.5 görler flow[J]. Flow, Turbulence and Combustion, 2014, 94(2): 339–357.
- [37] Ren J, Fu S. Secondary instabilities of görler vortices in high-speed boundary layer flows[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2015, 781: 388–421.
- [38] Ren J, Fu S, Hanifi A. Stabilization of the hypersonic boundary layer by finite-amplitude streaks [J]. Physics of Fluids, 2016, 28(2): 024110.
- [39] Kriegseis J, Schwarz C, Tropea C, et al. Velocity-information-based force-term estimation of dielectric-barrier discharge plasma actuators[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2013, 46 (5): 055202.
- [40] Dörr P C, Kloker M J. Transition control in a three-dimensional boundary layer by direct attenuation of nonlinear crossflow vortices using plasma actuators[J]. International Journal of Heat and Fluid Flow, 2016, 61: 449–465.
- [41] Dörr P, Kloker M. Stabilisation of a three-dimensional boundary layer by base-flow manipulation using plasma actuators[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2015, 48(28): 285205.
- [42] Dagenhart J, Saric W S. Crossflow stability and transition experiments in swept-wing flow[R]. [S.l.: s.n.], 1999.
- [43] Wang Z J, Gao H. A unifying lifting collocation penalty formulation including the discontinuous galerkin, spectral volume/difference methods for conservation laws on mixed grids[J]. Journal of Computational Physics, 2009, 228(21): 8161–8186.
- [44] Zhu H, Fu S, Shi L, et al. Implicit large-eddy simulation for the high-order flux reconstruction method[J/OL]. AIAA Journal, 2016, 54(9): 2721–2733. <https://doi.org/10.2514/1.J054826>.
- [45] Zhu H, Fu S. Forward-facing steps induced transition in a subsonic boundary layer[J/OL]. Science China Physics, Mechanics & Astronomy, 2017, 60(10): 104712. <https://doi.org/10.1007/s11433-017-9069-3>.
- [46] Reibert M S. Nonlinear stability, saturation, and transition in crossflow-dominated boundary layers[D]. [S.l.]: Arizona State University, 1996.
- [47] Saric W S, Carpenter A L, Reed H L. Passive control of transition in three-dimensional boundary layers, with emphasis on discrete roughness elements[J/OL]. Philosophical Transactions of the Royal Society, Section A, 2011, 369(1940): 1352–64. <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/21382818>.
- [48] Saric W, Carrillo R, Jr, Reibert M. Leading-edge roughness as a transition control mechanism [C]//36th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. [S.l.: s.n.], 1998: 781.
- [49] Kim J, Moin P, Moser R. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low reynolds number[J]. Journal of fluid mechanics, 1987, 177: 133–166.
- [50] 薛瑞尼. THUThESIS: 清华大学学位论文模板[EB/OL]. 2017. <https://github.com/xueruini/thuthesis>.

## 致 谢

衷心感谢导师符松教授和课题组内王亮助理研究员对本人的精心指导。他们的言传身教将使我终生受益。

同时衷心感谢徐国亮师兄，任杰师兄在流动稳定性方面的悉心指导，帮助我解决了不少问题。

感谢 LATEX 和 THUTHESIS<sup>[50]</sup>，帮我节省了不少时间。

## 声 明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签 名： \_\_\_\_\_ 日 期： \_\_\_\_\_

## 附录 A 边界层方程数值求解方法

在对边界层方程进行谱方法离散的时候，需要先将 $\eta \in [0, +\infty]$ 映射到 $\zeta \in [-1, 1]$ 。本文采用的映射函数为：

$$\eta = \frac{a(1 + \zeta)}{b - \zeta}, a = \frac{\eta_{\max} \eta_j}{\eta_{\max} - 2\eta_j}, b = 1 + \frac{2a}{\eta_{\max}} \quad (\text{A-1})$$

这里 $j$ 为法向网格点指标，计算中法向网格点分布采用：

$$\zeta_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right) \quad (\text{A-2})$$

法向一共布置了 $N+1$ 个网格点，其中 $j = 0$ 为壁面上的网格点。针对这一网格分布，法方向的微分离散可以采用Chebyshev微分矩阵：

$$D_{j,k} = \begin{cases} \frac{c_j(-1)^{j+k}}{c_k(\zeta_j - \zeta_k)} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right)_j & j \neq k \\ \frac{-\zeta_k}{2(1 - \zeta_k^2)} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right)_j & 1 \leq j = k \leq N-1 \\ \frac{2N^2+1}{6} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right)_j & j = k = 0 \\ -\frac{2N^2+1}{6} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right)_j & j = k = N \end{cases} \quad (\text{A-3})$$

相应的，可以得到积分矩阵 $I_{j,k}$ ，这里不再赘述，留给读者自行推导。借助边界层方程的抛物性，求解的时候可以从入口向下游推进。求解的时候流向指标小于当前求解位置流向指标， $i$ 的物理量都是已经求得的。这里为了简洁，将要求的变量的流向指标略去，即 $\Phi_{i,j} = \Phi_j$ 。其他位置的流向指标保留。采用如上所述的微分、积分矩阵，可以得到最终的离散形式为：

$$\Lambda_j - \Lambda_{j-1} + \sum I_{jk} [2\xi t_0 u_k + u_k] = \sum I_{jk} \left[ 2\xi \sum_{m=1}^M t_m u_{i-m,k} + u_k \right] \quad (\text{A-4a})$$

$$2\xi u_j \sum_{m=1}^M t_m u_{i-m,j} + 2\xi t_0 u_j^2 + \Lambda_j \sum D_{jk} u_k - \sum \left( D_{jk} \hat{\mu}_k \sum D_{kl} u_l \right) + 2\tilde{\beta} T_j = 0 \quad (\text{A-4b})$$

$$2\xi u_j \sum_{m=1}^M t_m w_{i-m,j} + 2\xi t_0 u_j w_j + \Lambda_j \sum D_{jk} w_k - \sum \left( D_{jk} \hat{\mu}_k \sum D_{kl} w_l \right) = 0 \quad (\text{A-4c})$$

$$\begin{aligned} & 2\xi C_p u_j \sum_{m=1}^M t_m T_{i-m,j} + 2\xi C_p t_0 u_j T_j + \Lambda_j C_p \sum D_{jk} T_k - 2(\gamma - 1) M^2 \tilde{\beta} T_j u_j - \\ & (\gamma - 1) M^2 \hat{\mu}_j \left[ \left( \sum D_{jk} u_k \right)^2 + \left( \sum D_{jk} w_k \right)^2 \right] - \frac{1}{\Pr} \sum \left( D_{jk} \hat{k}_k \sum D_{kl} T_l \right) = 0 \quad (\text{A-4d}) \end{aligned}$$

其中  $t_m$  为后差离散用到的系数。粘性系数与导热系数由 Surtherland 公式给出：

$$\hat{\mu} = \frac{T^{3/2} (C + 1)}{(C + T) T} \Rightarrow \frac{d\hat{\mu}}{dT} = \frac{T^{-1/2} (C + 1) [C - T]}{2(C + T)^2} \quad (\text{A-5a})$$

$$\hat{k} = kT = \frac{T^{5/2} (C + 1)}{(C + T)} \Rightarrow \frac{d\hat{k}}{dT} = \frac{T^{3/2} (C + 1) [5C + 3T]}{2(C + T)^2} \quad (\text{A-5b})$$

其中  $C$  为公式中系数。  $\mathbf{J}_b$  矩阵中，各项的表达式为：

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_b(4j-3, e) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j-3}}{\partial \Lambda_e} = \delta_{j,e} - \delta_{j-1,e} \\ \mathbf{J}_b(4j-2, e) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j-2}}{\partial \Lambda_e} = \delta_{j,e} \sum D_{jk} u_k \\ \mathbf{J}_b(4j-1, e) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j-1}}{\partial \Lambda_e} = \delta_{j,e} \sum D_{jk} w_k \\ \mathbf{J}_b(4j, e) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j}}{\partial \Lambda_e} = \delta_{j,e} c_p \sum D_{jk} T_k \\ \mathbf{J}_b(4j-3, e+N+1) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j-3}}{\partial u_e} = I_{je} [2\xi t_0 + 1] \\ \mathbf{J}_b(4j-2, e+N+1) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j-2}}{\partial u_e} = 2\xi \delta_{j,e} \sum_{m=1}^M t_m u_{i-m,j} + 4\xi t_0 u_j \delta_{j,e} + \Lambda_j D_{je} - \sum (D_{jk} \hat{\mu}_k D_{ke}) \\ \mathbf{J}_b(4j-1, e+N+1) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j-1}}{\partial u_e} = 2\xi \delta_{j,e} \sum_{m=0}^M t_m w_{i-m,j} \\ \mathbf{J}_b(4j, e+N+1) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j}}{\partial u_e} \\ &= 2\xi c_p \delta_{j,e} \sum_{m=0}^M t_m T_{i-m,j} - 2(\gamma - 1) M^2 \tilde{\beta} T_j \delta_{j,e} - 2(\gamma - 1) M^2 \hat{\mu}_j \left( \sum D_{jk} u_k \right) D_{je} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}_b(4j-3, e+2N+2) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j-3}}{\partial w_e} = 0 \\
 \mathbf{J}_b(4j-2, e+2N+2) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j-2}}{\partial w_e} = 0 \\
 \mathbf{J}_b(4j-2, e+2N+2) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j-2}}{\partial w_e} = 0 \\
 \mathbf{J}_b(4j-1, e+2N+2) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j-1}}{\partial w_e} = 2\xi t_0 u_j \delta_{j,e} + \Lambda_j D_{je} - \sum (D_{jk} \hat{\mu}_k D_{ke}) \\
 \mathbf{J}_b(4j, e+2N+2) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j}}{\partial w_e} = -2(\gamma-1)M^2 \hat{\mu}_j \left( \sum D_{jk} w_k \right) D_{je} \\
 \mathbf{J}_b(4j-3, e+3N+3) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j-3}}{\partial T_e} = 0 \\
 \mathbf{J}_b(4j-2, e+3N+3) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j-2}}{\partial T_e} = - \left( D_{je} \frac{d\hat{\mu}_e}{dT_e} \sum D_{el} u_l \right) + 2\tilde{\beta} \delta_{j,e} \\
 \mathbf{J}_b(4j-1, e+3N+3) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j-1}}{\partial T_e} = - \left( D_{je} \frac{d\hat{\mu}_e}{dT_e} \sum D_{el} w_l \right) \\
 \mathbf{J}_b(4j, e+3N+3) &= \frac{\partial L_{dis}(\Phi)_{4j}}{\partial T_e} \\
 &= 2\xi c_p t_0 u_j \delta_{j,e} + \Lambda_j c_p D_{je} - 2(\gamma-1)M^2 \tilde{\beta} \delta_{j,e} u_j \\
 &\quad - (\gamma-1)M^2 \frac{d\hat{\mu}_e}{dT_e} \delta_{j,e} \left[ \left( \sum D_{jk} u_k \right)^2 + \left( \sum D_{jk} w_k \right)^2 \right] \\
 &\quad - \frac{1}{Pr} \left( D_{je} \frac{d\hat{k}_e}{dT_e} \sum D_{el} T_l \right) - \frac{1}{Pr} \sum (D_{jk} \hat{k}_k D_{ke})
 \end{aligned}$$

壁面边界条件:

$$L_{dis}(\Phi)_1 = \Lambda_1; L_{dis}(\Phi)_2 = u_1; L_{dis}(\Phi)_3 = w_1; L_{dis}(\Phi)_4 = \sum D_{1k} T_k;$$

$$\mathbf{J}_b(1, e) = \delta_{1,e}; \mathbf{J}_b(2, e) = \delta_{N+2,e}; \mathbf{J}_b(3, e) = \delta_{2N+3,e};$$

$$\mathbf{J}_b(4, e) = D_{1e}, e \in [3N+4, 4N+4]$$

远场边界条件:

$$L_{dis}(\Phi)_{4N+1} = \Lambda_{N+1} - \Lambda_N + \sum I_{N+1,k} [2\xi t_0 u_k + u_k] - \sum I_{4N+1,k} \left[ 2\xi \sum_{m=1}^M t_m u_{i-m,k} + u_k \right]$$

$$L_{dis}(\Phi)_{4N+2} = u_{N+1} - u_e; L_{dis}(\Phi)_{4N+3} = w_{N+1} - w_e; L_{dis}(\Phi)_{4N+4} = T_{N+1} - T_e$$

$$\mathbf{J}_b(4N+1, e) = \delta_{N+1,e} - \delta_{N,e}; \mathbf{J}_b(4N+1, e+N+1) = I_{N+1,e} [2\xi t_0 + 1]$$

$$\mathbf{J}_b(4N+2, e+N+1) = \delta_{N+1,e};$$

$$\mathbf{J}_b(4N+3, e+2N+2) = \delta_{N+1,e}; \mathbf{J}_b(4N+4, e+3N+3) = \delta_{N+1,e};$$

## 附录 B 扰动方程具体形式

方程2-19中各项系数的具体形式将在这里给出：

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ -\frac{\gamma-1}{\gamma}T & 0 & 0 & 0 & \rho - \frac{\gamma-1}{\gamma}\rho \end{bmatrix}$$

**A**矩阵的各个分矢量和各个分量的表达形式如下（其他矩阵的分向量和分量的表达形式类似，这里不再赘述。）：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_4 \\ \mathbf{A}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \mathbf{A}_{14} & \mathbf{A}_{15} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} & \mathbf{A}_{24} & \mathbf{A}_{25} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} & \mathbf{A}_{34} & \mathbf{A}_{35} \\ \mathbf{A}_{41} & \mathbf{A}_{42} & \mathbf{A}_{43} & \mathbf{A}_{44} & \mathbf{A}_{45} \\ \mathbf{A}_{51} & \mathbf{A}_{52} & \mathbf{A}_{53} & \mathbf{A}_{54} & \mathbf{A}_{55} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \frac{u}{h_1} & \frac{\rho}{h_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma Ma^2} \frac{1}{h_1} T \\ \rho \frac{u}{h_1} - \frac{1}{h_1} \frac{4}{3} \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{1}{Re} \frac{1}{h_1} \\ -\frac{1}{h_1} \frac{\mu}{Re} \frac{4}{3} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{1}{h_1} \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial y} \frac{1}{Re} - \frac{\mu}{Re} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{1}{h_1} \\ 0 \\ -\frac{1}{h_1} \frac{d\mu}{dT} \frac{1}{Re} \left( \frac{4}{3} \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{v}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{\gamma Ma^2} \frac{1}{h_1} \rho \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{h_1} \frac{1}{\text{Re}} \mu \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{2}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{1}{\text{Re}} \mu \frac{1}{h_1} + \frac{2}{3} \frac{1}{\text{Re}} \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial y} \frac{1}{h_1} - \frac{2}{3} \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{1}{h_1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \rho \frac{u}{h_1} - \frac{1}{h_1} \frac{1}{\text{Re}} \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{1}{h_1} \\ 0 \\ -\frac{1}{h_1} \frac{1}{\text{Re}} \frac{d\mu}{dT} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \rho \frac{u}{h_1} - \frac{1}{h_1} \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{h_1} & -\frac{1}{h_1} \frac{d\mu}{dT} \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{h_1} \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{51} &= -\frac{\gamma-1}{\gamma} T \frac{u}{h_1} \\ \mathbf{A}_{52} &= 2 \times \frac{2(\gamma-1)}{3} \frac{\text{Ma}^2}{\text{Re}} \mu \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{h_1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{1}{h_1} \frac{v}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \\ \mathbf{A}_{53} &= -2 \frac{(\gamma-1) \text{Ma}^2}{\text{Re}} \mu \left( \frac{1}{h_1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{h_1} \frac{1}{h_1} u \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \\ \mathbf{A}_{54} &= -2 \frac{(\gamma-1) \text{Ma}^2}{\text{Re}} \mu \frac{1}{h_1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \mathbf{A}_{55} &= \rho \frac{u}{h_1} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \rho \frac{u}{h_1} - \frac{2}{\text{Re} \text{Pr}} \frac{1}{h_1} \frac{1}{h_1} \frac{d\kappa}{dT} \frac{\partial T}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} v & 0 & \rho & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho v - \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial y} \frac{1}{\text{Re}} - \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \frac{2}{3} \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{h_1} \\ 0 \\ -\frac{1}{h_1} \frac{d\mu}{dT} \frac{1}{\text{Re}} \left( h_1 \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - u \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} \frac{T}{\gamma Ma^2} \\ -\frac{1}{h_1} \frac{1}{Re} \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \rho v - \frac{2}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{1}{Re} \mu - \frac{4}{3} \frac{1}{Re} \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{2}{3} \frac{\mu}{Re} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ 0 \\ \frac{\rho}{\gamma Ma^2} + \frac{1}{Re} \frac{d\mu}{dT} \left( \frac{2}{3} \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{v}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \rho v - \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{1}{Re} \mu - \frac{1}{Re} \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial y} & -\frac{1}{Re} \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{51} &= -\frac{\gamma-1}{\gamma} T v \\ \mathbf{B}_{52} &= -2 \frac{(\gamma-1) Ma^2}{Re} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{h_1} u \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \\ \mathbf{B}_{53} &= \frac{4(\gamma-1) Ma^2}{3 Re} \mu \left( -2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \\ \mathbf{B}_{54} &= -2 \frac{(\gamma-1) Ma^2}{Re} \mu \frac{\partial w}{\partial y} \\ \mathbf{B}_{55} &= \frac{1}{\gamma} \rho v - \frac{2}{Re Pr} \frac{d\kappa}{dT} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{1}{Re Pr} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \kappa \end{aligned}$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} w & 0 & 0 & \rho & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho w \\ 0 \\ \frac{2}{3} \frac{1}{h_1} \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{1}{Re} \\ -\frac{1}{h_1} \frac{d\mu}{dT} \frac{1}{Re} \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \rho w & \frac{2}{3} \frac{1}{Re} \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial y} & -\frac{d\mu}{dT} \frac{1}{Re} \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma Ma^2} T \\ -\frac{1}{h_1} \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{1}{Re} \\ \frac{2}{3} \mu \frac{1}{Re} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{1}{Re} \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{1}{Re} \mu \\ \rho w \\ \frac{1}{\gamma Ma^2} \rho - \frac{\partial \mu}{\partial T} \left( -\frac{2}{3} \frac{1}{Re} \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{1}{Re} \frac{v}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{51} &= -\frac{\gamma - 1}{\gamma} Tw \\ \mathbf{C}_{52} &= -2 \frac{(\gamma - 1) Ma^2}{Re} \mu \frac{1}{h_1} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \mathbf{C}_{53} &= -2 \frac{(\gamma - 1) Ma^2}{Re} \mu \frac{\partial w}{\partial y} \\ \mathbf{C}_{54} &= \frac{4}{3} \frac{(\gamma - 1) Ma^2}{Re} \mu \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \mathbf{C}_{55} &= \frac{\rho w}{\gamma} \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{v}{h_1} & \frac{1}{h_1} \frac{\partial \rho}{\partial x} & \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\rho}{h_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} \frac{u}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{uv}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{1}{\gamma Ma^2} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\rho}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\rho v}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{1}{h_1} \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial y} \frac{1}{Re} \frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\mu}{Re} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \\ \rho \frac{\partial u}{\partial y} + \rho \frac{u}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{1}{h_1} \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{1}{Re} \left( \frac{4}{3} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \\ 0 \\ -\frac{1}{h_1} \frac{d^2 \mu}{dT^2} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{1}{Re} \left( \frac{4}{3} \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{v}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ -\frac{1}{h_1} \frac{d^2 \mu}{dT^2} \frac{\partial T}{\partial y} \frac{1}{Re} \left( h_1 \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - u \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \\ -\frac{d\mu}{dT} \frac{1}{Re} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \\ -\frac{1}{h_1} \frac{d\mu}{dT} \frac{1}{Re} \left( h_1 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{\gamma Ma^2} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ -\frac{1}{h_1} \frac{d\mu}{dT} \frac{1}{Re} \left( \frac{4}{3} \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{31} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{h_1} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{uu}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{1}{\gamma Ma^2} \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\mathbf{D}_{32} = \frac{\rho}{h_1} \frac{\partial v}{\partial x} - 2\rho \frac{u}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{1}{h_1} \frac{1}{\text{Re}} \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y}$$

$$\mathbf{D}_{33} = \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{1}{\text{Re}} \mu \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{2}{3} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{1}{\text{Re}} \mu \frac{1}{h_1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial h_1}{\partial y}$$

$$\mathbf{D}_{34} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{35} = & \frac{1}{\gamma \text{Ma}^2} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{1}{h_1} \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 \mu}{dT^2} \frac{\partial T}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) - \frac{1}{h_1} \frac{1}{\text{Re}} \frac{d\mu}{dT} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \\ & - \frac{2}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{1}{\text{Re}} \frac{d\mu}{dT} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{v}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 \mu}{dT^2} \frac{\partial T}{\partial y} \left( \frac{2}{3} \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{v}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ & - \frac{1}{\text{Re}} \frac{d\mu}{dT} \left( -\frac{2}{3} \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{2}{3} \frac{1}{h_1} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{2}{3} \frac{1}{h_1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{1}{h_1} \frac{v}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}_4 = \begin{bmatrix} \frac{u}{h_1} \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} \\ \rho \frac{1}{h_1} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \rho \frac{\partial w}{\partial y} \\ 0 \\ -\frac{1}{h_1} \frac{d^2 \mu}{dT^2} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{h_1} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{h_1} \frac{d\mu}{dT} \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \mu}{\partial T} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 \mu}{dT^2} \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{51} = \frac{u}{h_1} \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{u}{h_1} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} v \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{52} = & \frac{\rho}{h_1} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left( \frac{1}{h_1} \rho \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{h_1} T \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \\ & + 2 \frac{(\gamma - 1) \text{Ma}^2}{\text{Re}} \mu \left( -\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{1}{h_1} u \frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}_{53} = \rho \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left( \rho \frac{\partial T}{\partial y} + T \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) - 2 \frac{(\gamma - 1) \text{Ma}^2}{\text{Re}} \mu \left( \begin{array}{l} + \frac{4}{3} \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{4}{3} \frac{1}{h_1} \frac{v}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ - \frac{2}{3} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right)$$

$$\mathbf{D}_{54} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{55} = & -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{u}{h_1} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} v \frac{\partial \rho}{\partial y} \\ & - \frac{1}{\text{Re} \text{Pr}} \frac{1}{h_1} \frac{1}{h_1} \frac{d^2 \kappa}{dT^2} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re} \text{Pr}} \frac{1}{h_1} \frac{1}{h_1} \frac{d\kappa}{dT} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\text{Re} \text{Pr}} \frac{d^2 \kappa}{dT^2} \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \\ & - \frac{1}{\text{Re} \text{Pr}} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{d\kappa}{dT} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re} \text{Pr}} \frac{d\kappa}{dT} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{aligned}$$

$$-\frac{(\gamma - 1) \text{Ma}^2}{\text{Re}} \frac{d\mu}{dT} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \\ + \frac{1}{h_1} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{1}{h_1} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{4}{3} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ + \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{h_1} u \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{h_1} u \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{xx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \frac{1}{h_1} \frac{1}{h_1} \frac{\mu}{\text{Re}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_1} \frac{1}{h_1} \frac{\mu}{\text{Re}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h_1} \frac{1}{h_1} \frac{\mu}{\text{Re}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\text{Re} \text{Pr}} \frac{1}{h_1} \frac{1}{h_1} \kappa \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \frac{1}{h_1} \frac{\mu}{\text{Re}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{1}{h_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{xz} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \frac{1}{h_1} \frac{\mu}{\text{Re}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \mu \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{h_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{yy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{\text{Re}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \frac{\mu}{\text{Re}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu}{\text{Re}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa}{\text{Re} \text{Pr}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{yz} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \frac{\mu}{Re} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \frac{\mu}{Re} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{zz} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{Re} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{Re} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \frac{\mu}{Re} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa}{Re Pr} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_1 = - \left\langle \frac{1}{h_1} \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{1}{h_1} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} + \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y} + \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} + \frac{\tilde{\rho} \tilde{v}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_2 = & -\rho \left( \frac{\tilde{u}}{h_1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{\tilde{u} \tilde{v}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) - \tilde{\rho} \left( \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{\tilde{u}}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{h_1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\tilde{u}}{h_1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \\ + w \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{\tilde{u} v}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{u v}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\tilde{u} v}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \end{array} \right) \\ & - \frac{1}{\gamma Ma^2} \frac{1}{h_1} \left( \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + \tilde{T} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} \right) \\ & + \frac{1}{h_1} \left( \begin{array}{l} \frac{d^2 \mu}{dT^2} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\tilde{T}}{Re} \left( \frac{4}{3} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\tilde{v}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right) \\ + \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \frac{1}{Re} \left( \frac{4}{3} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\tilde{v}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right) \\ + \frac{d\mu}{dT} \frac{\tilde{T}}{Re} \left( \frac{4}{3} \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial z} \right) \end{array} \right) \\ & + \frac{1}{h_1} \left[ \begin{array}{l} \frac{d^2 \mu}{dT^2} \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\tilde{T}}{Re} \left( h_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \tilde{u} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) + \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \frac{1}{Re} \left( h_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \tilde{u} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \\ + \frac{d\mu}{dT} \frac{\tilde{T}}{Re} \left( h_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial y} \right) \end{array} \right] \\ & + \frac{1}{h_1} \left[ \begin{array}{l} \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + h_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right) + \frac{d\mu}{dT} \frac{\tilde{T}}{Re} \left( \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial z} + h_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} \right) \end{array} \right] \\ & + \frac{d\mu}{dT} \frac{\tilde{T}}{Re} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \frac{\tilde{u}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) - \frac{1}{\gamma Ma^2} \frac{1}{h_1} \left\langle \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + \tilde{T} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}_3 = & -\rho \left( \frac{\tilde{u}}{h_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - \frac{\tilde{u}\tilde{u}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) - \tilde{\rho} \left( \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \frac{\tilde{u}}{h_1} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{u}{h_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\tilde{u}}{h_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \\ + W \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - 2 \frac{\tilde{u}u}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{\tilde{u}\tilde{u}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \end{array} \right) \\
 & - \frac{1}{\gamma Ma^2} \left( \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} + \tilde{T} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y} \right) \\
 & + \frac{1}{h_1} \frac{1}{Re} \left[ \begin{array}{l} \frac{d^2 \mu}{dT^2} \frac{\partial T}{\partial x} \tilde{T} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \frac{\tilde{u}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) + \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \frac{\tilde{u}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \\ + \frac{d\mu}{dT} \tilde{T} \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \end{array} \right] \\
 & + \frac{2}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{1}{Re} \left[ \frac{d\mu}{dT} \tilde{T} \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{\tilde{v}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) \right] \\
 & - \frac{1}{Re} \frac{d^2 \mu}{dT^2} \frac{\partial T}{\partial y} \tilde{T} \left( \frac{2}{3} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\tilde{v}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right) \\
 & - \frac{1}{Re} \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \left( \frac{2}{3} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\tilde{v}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right) \\
 & - \frac{1}{Re} \frac{d\mu}{dT} \tilde{T} \left( \begin{array}{l} \frac{2}{3} \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x \partial y} + \frac{2}{3} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{4}{3} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y \partial z} \\ - \frac{2}{3} \frac{1}{h_1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{1}{h_1} \frac{1}{h_1} \frac{\tilde{v}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial h_1}{\partial y} \end{array} \right) \\
 & + \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \right) + \frac{d\mu}{dT} \frac{\tilde{T}}{Re} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y \partial z} \right) \\
 \\
 \mathbf{N}_4 = & -\rho \left( \frac{\tilde{u}}{h_1} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right) - \tilde{\rho} \left( \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \frac{\tilde{u}}{h_1} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{u}{h_1} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \frac{\tilde{u}}{h_1} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \\ + \tilde{v} \frac{\partial w}{\partial y} + v \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} + W \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \end{array} \right) \\
 & - \frac{1}{\gamma Ma^2} \left( \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \tilde{T} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} \right) \\
 & + \frac{1}{h_1} \frac{d^2 \mu}{dT^2} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\tilde{T}}{Re} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right) + \frac{1}{h_1} \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \frac{1}{Re} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right) \\
 & + \frac{1}{h_1} \frac{d\mu}{dT} \frac{\tilde{T}}{Re} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x \partial z} \right) + \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{1}{Re} \frac{d\mu}{dT} \tilde{T} \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \right) \\
 & + \frac{1}{Re} \frac{d^2 \mu}{dT^2} \frac{\partial T}{\partial y} \tilde{T} \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \right) + \frac{1}{Re} \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \right) + \frac{1}{Re} \frac{\partial \mu}{\partial T} \tilde{T} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} \right) \\
 & + \frac{\partial \mu}{\partial T} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \frac{1}{Re} \left( -\frac{2}{3} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\tilde{v}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right) \\
 & + \frac{\partial \mu}{\partial T} \tilde{T} \frac{1}{Re} \left( -\frac{2}{3} \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x \partial z} - \frac{2}{3} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y \partial z} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} \right)
 \end{aligned}$$



## 个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果

### 个人简历

1991年10月5日出生于陕西省西安市长安县（现长安区）。

2009年9月考入清华大学航天航空学院工程力学系钱学森力学班，2013年7月本科毕业并获得工学学士学位。

2013年9月免试进入清华大学航天航空学院攻读力学博士学位至今。

### 发表的学术论文

- [1] Zhefu Wang, Liang Wang, and Song Fu. "Control of stationary crossflow modes in swept Hiemenz flows with dielectric barrier discharge plasma actuators", Physics of Fluids, 2017, 29(9): 094105. (SCI 收录, WOS:000412105100038)
- [2] Zhefu Wang, Liang Wang, and Song Fu. "Sensitivity analysis of crossflow boundary layer and transition delay using plasma actuator", 8th AIAA Flow Control Conference, AIAA AVIATION Forum, (AIAA 2016-3933). (EI 收录, ISBN-13: 9781624104329)
- [3] Zhefu Wang, Liang Wang, and Song Fu. "Control of crossflow instability using plasma actuators", 7th Asia-Pacific International Symposium on Aerospace Technology, 25-27 November 2015, Cairns, Australia. (会议论文)
- [4] Zhefu Wang and Song Fu. "Control of crossflow instability using plasma actuators", XXIV ICTAM, 21-26 August 2016, Montreal, Canada. (会议论文)
- [5] Zhefu Wang and Song Fu. "Transition delay using DBD plasma actuators", European Drag Reduction and Flow Control Meeting, 3-6 April 2017, Rome, Italy. (会议论文)

## 综合论文训练记录表

|            |  |    |  |    |  |
|------------|--|----|--|----|--|
| 学生姓名       |  | 学号 |  | 班级 |  |
| 论文题目       |  |    |  |    |  |
| 主要内容以及进度安排 | <p style="text-align: right;">指导教师签字: _____</p> <p style="text-align: right;">考核组组长签字: _____</p> <p style="text-align: right;">年      月      日</p> |    |  |    |  |
| 中期考核意见     | <p style="text-align: right;">考核组组长签字: _____</p> <p style="text-align: right;">年      月      日</p>   |    |  |    |  |

|        |                                    |
|--------|------------------------------------|
| 指导教师评语 |                                    |
|        | 指导教师签字: _____<br>年      月      日   |
| 评阅教师评语 |                                    |
|        | 评阅教师签字: _____<br>年      月      日   |
| 答辩小组评语 |                                    |
|        | 答辩小组组长签字: _____<br>年      月      日 |

总成绩: \_\_\_\_\_

教学负责人签字: \_\_\_\_\_

年      月      日