

Ejercicios de programación 1

Métodos Numéricos

Fecha de entrega: Sábado 27 de Octubre

1. Ejercicios de punto fijo

- 1.- Sea la función $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right)$ encontrar la el valor de convergencia, calcular el error en cada iteración.
- 2.- Sea la función $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x}}$ encontrar la raíz que se encuentra en el intervalo $[0,4, 1]$ calcular el error para poder verificar la convergencia.
- 3.- Sea la función $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ encontrar la función $g(x)$ de tal forma que el método de punto fijo converja.
- 4.- Sea la función $f(x) = x^2 - 5x - e^x$ encontrar la función $g(x)$ de tal manera que pueda verificar que la raíz de $f(x)$ esta en el intervalo $x \in [-1, 1]$
- 5.- Sea la función $f(x) = 0,5 \sin(x) - x + 1$ encontrar su raíz a través del método de punto fijo.
- 6.- Sea la función $f(x) = 2x^2 - x - 5 = 0$ encontrar la función $g(x)$ y encontrar la raíz a través del método de punto fijo.
- 7.- Sea la función $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ encontrar la función $g(x)$ y encontrar la raíz a través del método de punto fijo.

2. Matrices

1.- Sea el siguiente sistema de ecuaciones, encontrar, si no hay solución única determine si el sistema es consistente (con una o múltiples soluciones) o inconsistente. Encontrar también:

- La solución a través de triangulación
- La inversa de la matriz de coeficientes
- Identificar si el sistema es homogéneo o no. \rightarrow Ninguna es homogénea

Rango $A = 3$ Consistente
Rango $B = 2$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$$

$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24$$

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4$$

(2.1)

$$0 \quad 2x_2 + 3x_3 = 4$$

$$\text{Infinitud de Soluciones} \quad 2x_1 - 6x_2 + 7x_3 = 15$$

$$x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 10$$

(2.2)

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2500$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 2000$$

$$2x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 5500$$

(2.3)

Rango $A = 1$
Rango $B = 2$

No hay
Solución

$$x + y + z = 3$$

$$2x + 2y + 2z = 6$$

$$3x + 3y + 3z = 10$$

(2.4)

$$-2x_1 + x_4 = 1$$

$$4x_2 - x_3 = -1$$

$$x_1 + x_2 = -3$$

(2.5)

Sea la función $g(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{4}{x} \right)$

x_0	Valores de $g(x)$	Error
1 $\frac{1}{2}$	4.25	$x_1 - x_0 = 4.25 - 0.5 = 3.75$
2 4.25	2.59	$x_2 - x_1 = 2.59 - 4.25 = -1.66$
3 2.0672	2.001	$x_3 - x_2 = 2.001 - 2.59 = -0.589$
4 2	2	$x_4 - x_3 = 2 - 2.001 = -1 \times 10^{-3}$
		0.001

La raíz es:

$$\underline{x = 2}$$

$$g(2) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{4}{2} \right) = 2$$

2. $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x}}$ $[0.4, 1] \rightarrow 0.4996.$

$$x_1 = 0.5590$$

$$x_2 = 0.4728$$

$$x_3 = 0.5141$$

$$x_4 = 0.4930$$

$$x_5 = 0.5034$$

$$x_6 = 0.4982$$

$$x_7 = 0.5008$$

$$x_8 = 0.4995$$

$$x_9 = 0.5002$$

$$|x_1 - x_0| = 0.1590$$

$$|x_2 - x_1| = -0.0862$$

$$|x_3 - x_2| = 0.0413$$

$$|x_4 - x_3| = -0.0211$$

$$|x_5 - x_4| = 0.0104$$

$$|x_6 - x_5| = -0.0052$$

$$|x_7 - x_6| = 0.0026$$

$$|x_8 - x_7| = -0.0013$$

$$|x_9 - x_8| = 0.0007$$

La raíz es
0.5002

$$f(x) = x^3 - x^2 - x - 1 \quad x = x^3 - x^2 - 1$$

$$1.4422$$

$$\sqrt[3]{x^2 + x + 1} = x$$

$$1.6536$$

$$|x_1 - x_0| = 0.4422$$

La raíz es:

$$1.7531$$

$$|x_2 - x_1| = 0.2114$$

$$x = 1.8384$$

$$1.7999$$

$$|x_3 - x_2| = 0.0995$$

$$f(1.8384) = -0.0048$$

$$1.8208$$

$$|x_4 - x_3| = 0.0463$$

$$1.8308$$

$$|x_5 - x_4| = 0.0214$$

$$1.8353$$

$$|x_6 - x_5| = 0.0100$$

$$1.8374$$

$$|x_7 - x_6| = 0.0045$$

$$1.8384$$

$$|x_8 - x_7| = 0.0021$$

$$|x_9 - x_8| = 0.001$$

$$f(x) = 2x^2 - x - 5 = 0 \rightarrow x = 2x^2 - 5 \rightarrow f(1.8707) = 0.1283$$

$$x_0$$

$$g(x)$$

$$|x_1 - x_0| = |3 - 2| = 1$$

$$2$$

$$3$$

$$|x_2 - x_1| = |13 - 3| = 10$$

$$3$$

$$13$$

$$|x_3 - x_2| = |333 - 13| = 320$$

$$333$$

$$221773$$

$$|x_4 - x_3| = |221773 - 333| = 221440$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 13$$

$$x_3 = 333$$

$$x_4 = 221773$$

$$x = \frac{x+5}{2}$$

$$x_1 = 1.8708$$

$$x_2 = 1.8534$$

$$|x_1 - x_0| = |1.8708 - 2| = -0.1292$$

$$x_3 = 1.8511$$

$$|x_2 - x_1| = |1.8534 - 1.8708| = -0.0174$$

$$x_4 = 1.8508$$

$$|x_3 - x_2| = |1.8511 - 1.8534| = -0.0023$$

$$x_5 = 1.8507$$

$$|x_4 - x_3| = |1.8508 - 1.8511| = -0.0003$$

$$|x_5 - x_4| = |1.8507 - 1.8508| = -0.0001$$

La raíz es

$$x = 1.8707$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$1[(5)(-2) - (1)(6)] - 4[(2)(-2) - (1)(3)] + 3[(2)(6) - (5)(3)]$$

$$1(-10-6) - 4(-4-3) + 3(12-15) = 1(-16) - 4(-7) + 3(-3)$$

$$= -16 + 28 - 9 = 3 \neq 0 \quad \text{Hay una solución}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} -4R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ -3R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \end{array} \right\} =$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ -4 & -8 & -12 & -36 \\ 3 & 5 & 6 & 24 \\ \hline 0 & -3 & -6 & -12 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ -3 & -6 & -9 & -27 \\ 3 & 5 & 6 & 24 \\ \hline 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array} \quad \begin{array}{l} -5/3 R_2 + R_3 \rightarrow R_3 \\ -5/3 (\begin{array}{ccc|c} -3 & -6 & -12 \\ 5 & 10 & 20 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \quad \begin{array}{l} -6R_3 + R_2 \rightarrow R_2 \\ -6 (\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -1 & -12 \\ \hline 0 & -3 & 0 & 6 \end{array}) \end{array}$$

$$3R_3 + R_1 \rightarrow R_1 \quad \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}$$

$$x_1 = 4 \quad x_2 = -2 \quad x_3 = 3$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2/3 R_2 + R_1 \rightarrow R_1 \\ 2/3 (\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 4 \end{array}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & -\frac{34}{27} & \frac{13}{27} & \frac{1}{9} \\
 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 & -\frac{14}{27} & \frac{1}{27} & -\frac{2}{9} \\
 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{27} & -\frac{5}{27} & \frac{1}{9}
 \end{array}$$

$$-4R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \quad -4(1 \ 2 \ 3 \mid 1 \ 0 \ 0)$$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 -4 & -8 & -12 & -4 & 0 & 0 \\
 1 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0
 \end{array}$$

$$-3R_1 + R_3 \rightarrow R_3$$

$$-3(1 \ 2 \ 3 \mid 1 \ 0 \ 0)$$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 -3 & -6 & -9 & -3 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & -5 & -11 & -3 & 0 & 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\
 0 & -5 & -1 & -3 & 0 & 1
 \end{array}$$

$$-\frac{1}{3}R_2 \rightarrow R_2 \quad -\frac{1}{3}(0 \ -3 \ -6 \ -4 \ 1 \ 0)$$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0
 \end{array}$$

$$5R_2 + R_3 \rightarrow R_3$$

$$5(0 \ 1 \ 2 \ \frac{4}{3} \ -\frac{1}{3} \ 0)$$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 0 & 5 & 10 & \frac{20}{3} & -\frac{5}{3} & 0 \\
 0 & -5 & -1 & -3 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 9 & \frac{11}{3} & -\frac{5}{3} & 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\
 0 & 0 & 9 & \frac{11}{3} & -\frac{5}{3} & 1
 \end{array}$$

$$\frac{1}{9}R_3 \rightarrow R_3 \quad \frac{1}{9}(0 \ 0 \ 9 \ \frac{11}{3} \ -\frac{5}{3} \ 1)$$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 0 & 0 & 1 & \frac{11}{27} & -\frac{5}{27} & \frac{1}{9} \rightarrow R_3
 \end{array}$$

$$-2R_2 + R_1 \rightarrow R_1 \quad -2(0 \ 1 \ 2 \ \frac{4}{3} \ -\frac{1}{3} \ 0)$$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 0 & -2 & -4 & -\frac{8}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\
 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \rightarrow R_1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 & R_3 + R_1 = R_1 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{27} & -\frac{5}{27} & \frac{1}{9} \\
 & & & & & & & 1 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 0 & 0 & 1 & \frac{11}{27} & -\frac{5}{27} & \frac{1}{9} & -2R_3 + R_2 \rightarrow R_2 & -2(0 & 0 & 1 & \frac{11}{27} & -\frac{5}{27} & \frac{1}{9}) \\
 & & & & & & & 0 & 0 & -2 & -\frac{22}{27} & \frac{10}{27} & -\frac{2}{9} \\
 & & & & & & & 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 1 & 1 & = 3 \\
 2 & 2 & 2 & = 6 \\
 3 & 3 & 3 & = 10
 \end{array}$$

$$= 1(6-6) - 1(6-6) + 1(6-6) = 0$$

No hay solución

$$2.2 \quad \begin{array}{ccc} 0 & 2 & 3 = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & -6 & 7 = 15 \end{array} \quad = 0(-30+14) - 2(10+6) + 1(14+18)$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 5 = 10 \end{array}$$

$$= -32 + 32 = 0$$

infinitud de soluciones