双方演化博弈和三方演化博弈的ESS判定区别

声明：这篇文章是某同学所问，本人数学水平有限（只有数三），只能作出以下回答。大家感兴趣的可以阅读有关“海塞矩阵”的内容，权当补充。

**首先**，我们看下双方演化博弈论文《基于演化博弈视角的“乡贤”参与乡村治理及其稳定性分析》和三方演化博弈论文《政府奖惩机制下药品安全质量监管三方演化博弈及仿真分析》中，各自关于判定ESS的方法。当然，我们知道双方演化博弈的雅克比矩阵是二阶矩阵，三方演化博弈的雅克比矩阵是三阶矩阵。

双方：（Friedman方法）

三方：（Lyapunov法则）

（注：det表示行列式，是一个值。tr表示迹，是矩阵的主对角线元素之和。是矩阵的特征值。）

**其次**，我们理想性地假设，两个矩阵都是对角矩阵。即二阶矩阵为：



三阶矩阵为：



那么，根据Friedman方法，要求二阶矩阵满足：



而对角矩阵的特征值就是其主对角元素，因此二阶对角矩阵满足Friedman方法时，那么其两个特征值均小于0。

根据Lyapunov法则要求三阶矩阵满足：三个特征值均小于0。

总之，从对角矩阵的例子来看，双方演化博弈的Friedman方法和三方演化博弈的Lyapunov法则本质上相同。

**再次**，将上述特殊形式推广至一般。设二阶矩阵和三阶矩阵的形式分别为：

 

于是，根据Friedman方法，必须满足：



使用MATLAB求出二阶矩阵A的两个特征值为：



在这里使用Lyapunov法则就必须满足：



注意，上式成立的前提是，这两个特征值是真实存在的，这就要求根号可求解。

使得成立。

另外，的意思是作为一个负数，其绝对值是远大于。也就是说，虽然能求出值，但这个值不能太大。现在证明如下：



**然后**，前面我们证明了三阶的Lyapunov法则用在二阶矩阵中，与Friedman方法是一样的。现在我们要证明二阶的Friedman方法是否运用在三阶矩阵中，与Lyapunov法则是一致的。如果是，我们就可以宣布，Friedman方法与Lyapunov法则在本质上是同一的。

为了使得问题简单化，我们还是先以对角矩阵为例，假设二阶矩阵和三阶矩阵的形式分别为：

，

Friedman方法要求三阶矩阵满足：

而Lyapunov法则要求三阶矩阵满足：

显然，上述两个条件不对等。

其实对角矩阵并不失一般性，即便将其推广至一般形式的矩阵，结果依旧如此。因为证明篇幅太长，本文暂不考虑其证明过程。

**根据上述讨论，我们现在可以做一个总结：Friedman方法只能用于双方演化博弈的二阶矩阵而不能用在三方演化博弈的三阶矩阵；但是Lyapunov法则适用于双方或三方。**

**最后**，对于类似于双方演化博弈的偶数型四方演化博弈，结论又该如何？我们还是以对角矩阵为例。



Friedman方法要求：

Lyapunov法则要求：

可以看出，上述两个方法对应的要求并不等同。

于是，本文的结论就是：Friedman方法只适用于双方演化博弈，而Lyapunov法则适用于双方、三方以及四方演化博弈。