

Лабораторная работа № 5

Модель хищник-жертва

Артамонов Т. Е.

8 августа 2024

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Информация

- Артамонов Тимофей Евгеньевич
- студент группы НКНбд-01-21
- Российский университет дружбы народов
- <https://github.com/teartamonov>



Введение

- Построить график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 6, y_0 = 12$.
- Найти стационарное состояние системы.

Модель Лотки — Вольтерры — модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва», названная в честь своих авторов (Лотка, 1925; Вольтерра 1926), которые предложили модельные уравнения независимо друг от друга. Такие уравнения можно использовать для моделирования систем «хищник — жертва», «паразит — хозяин», конкуренции и других видов взаимодействия между двумя видами.

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двухвидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории) 2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает 3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными

4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \quad \frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t)$$

В этой модели x – число жертв, y – число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, $-c$ – естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние (А), всякое же другое начальное состояние (В) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние В. Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке $x_0 = \frac{c}{d}$ $y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет.

Модель «хищник-жертва»:

$$\frac{dx}{dt} = -0.26x(t) + 0.027x(t)y(t) \quad \frac{dy}{dt} = 0.28y(t) - 0.031x(t)y(t)$$

В этой модели x – число жертв, y – число хищников.

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 6$, $y_0 = 12$. Найдите стационарное состояние системы.

Выполнение работы

Построили график колебаний популяции хищников и жертв на Julia в точке x_0, y_0 .

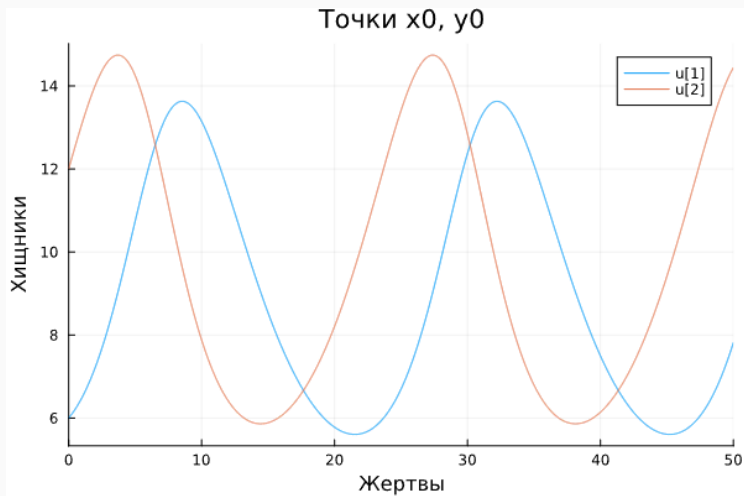


Рис. 1: Julia Plot 1

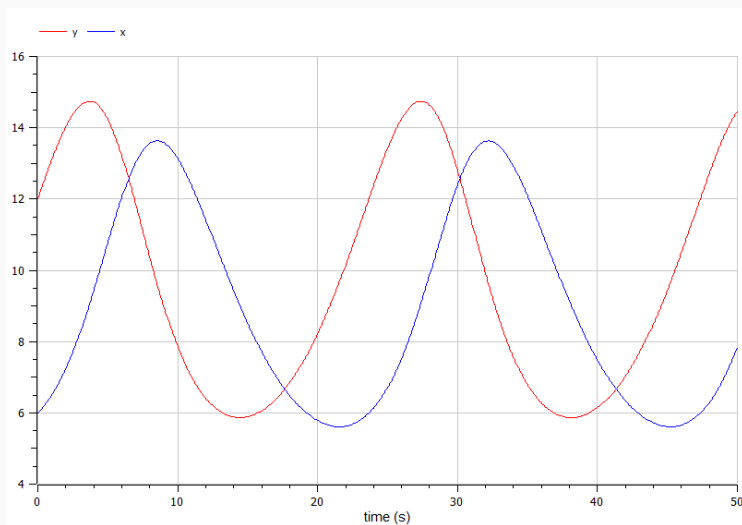


Рис. 2: OM Plot 1

Построили фазовый портрет на Julia.

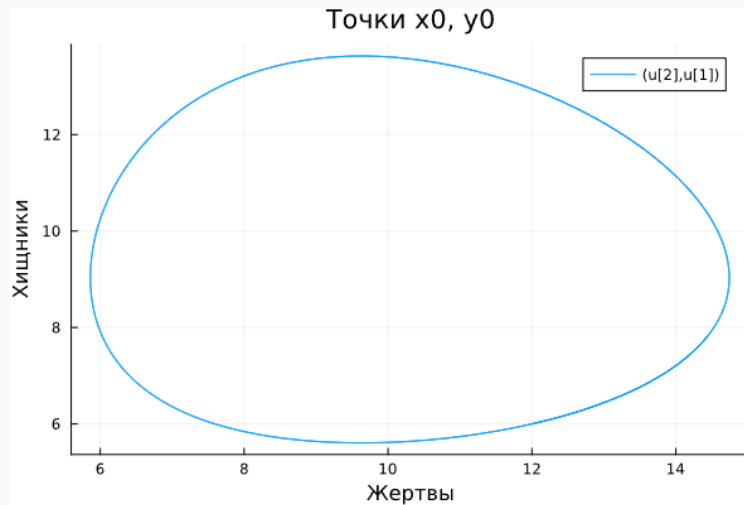


Рис. 3: Julia phase portrait 1

Построили фазовый портрет на OpenModelica, фазовые портреты одинаковые.

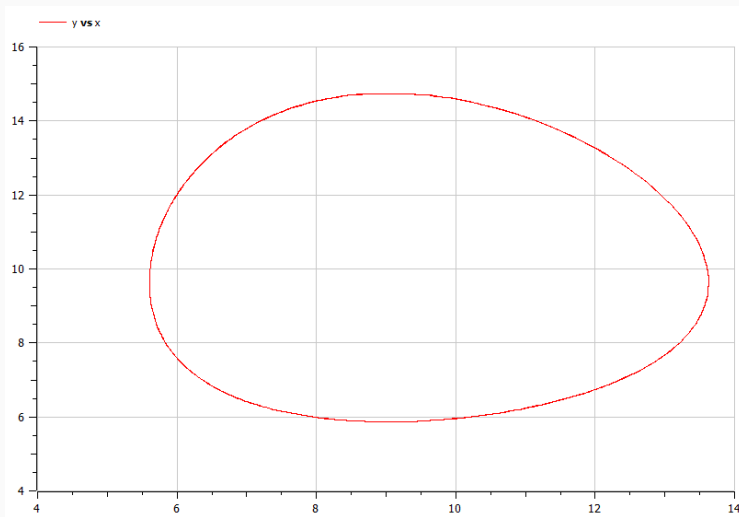


Рис. 4: OM phase portrait 1

Построили график изменения популяции хищников и жертв в стационарной точке.

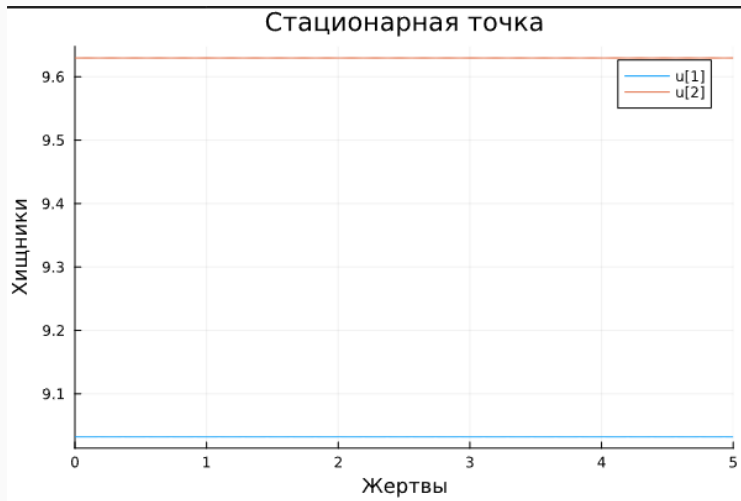


Рис. 5: Julia Plot 2

Построили график на OpenModelica, графики одинаковые.

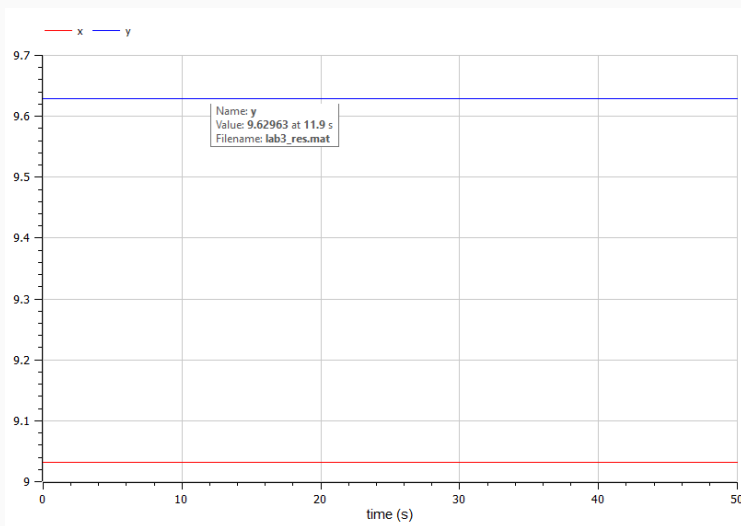


Рис. 6: OM Plot 2

Построили фазовый портрет в стационарной точке на Julia.

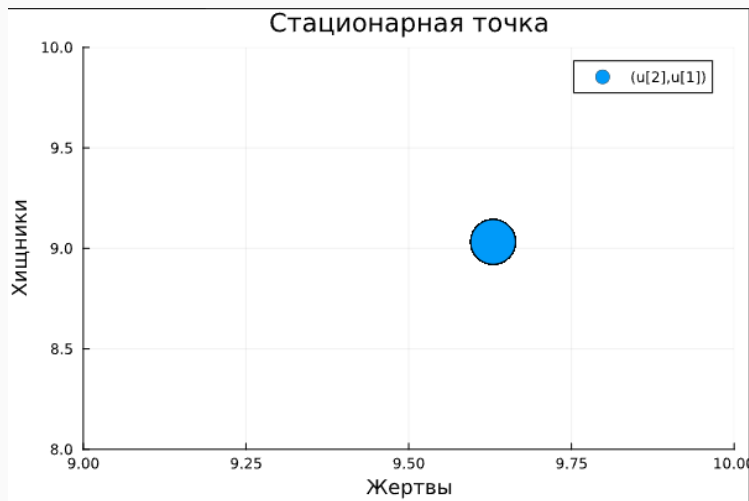


Рис. 7: Julia phase portrait 2

Построили фазовый портрет на OpenModelica.

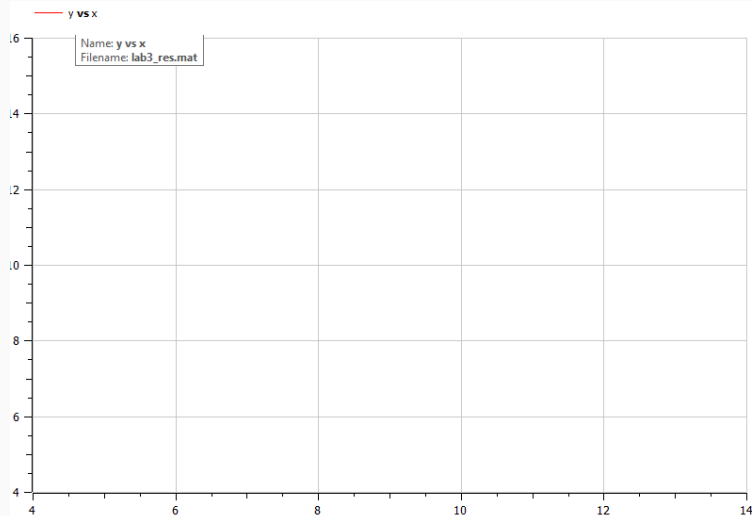


Рис. 8: OM phase portrait 2

Выводы

- Построили график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 6, y_0 = 12$.
- Нашли стационарное состояние системы.
- Сравнили результаты на Julia и OpenModelica.