Доклад

Модели с урнами

Артамонов Тимофей Евгеньевич

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Исследовать модели с урнами и рассмотреть области их применения.

2 Задачи

- Рассмотреть базовую модель с урнами
- Исследовать разновидности моделей с урнами
- Рассмотреть область их применения

3 Определение

В теории вероятности и статистике задача об урне — это идеализированный мысленный эксперимент, в котором некоторые объекты, представляющие реальный интерес, представлены в виде цветных шариков в урне. Кто-то делает вид, что вынимает из урны один или несколько шаров; цель — определить вероятность того, что вынутые шары или же шар того или иного цвета.

Модель урны — это либо набор вероятностей, описывающих события в задаче с урной, либо распределение вероятностей или семейство таких распределений случайных величин, связанных с задачами с урной.

4 Разновидности

4.1 Базовая модель (Модель без возвращения)

В этой базовой модели урны в теории вероятностей урна содержит n белых и m черных шаров, хорошо перемешанных друг с другом. Из урны случайным образом вынимают один шар и наблюдают за его цветом. Процесс выбора повторяется. Вероятность успеха меняется после каждого процесса выбора, поскольку каждый раз общее количество шаров в урне уменьшается. Такую модель называют извлечением без замены. Такая модель будет зависеть от истории.

Для модели без возвращения вероятность вытянуть k шаров, из урны с m черными и n белыми шарами, из которых l черных шаров можно выразить следующей формулой:

$$P(k) = \frac{\binom{m}{l}\binom{n}{k-l}}{\binom{m+n}{k}}$$

Где: $P(k)$ - вероятность вытянуть l черных шаров $\binom{n}{k} = \frac{k!}{n!(n-k)!}$ - количество способов выбрать k элементов из n элементов (сочетание)

$\binom{n}{k} = \frac{k!}{n!(n-k)!}$ - количество способов выбрать k элементов из n элементов (сочетание) m - количество черных шаров в урне n - количество белых шаров в урне k - количество шаров, которое вытаскивают l - количество черных шаров, которое необходимо вытащить

4.2 Модель Бернулли

Модель Бернулли описывает случайный эксперимент с двумя возможными исходами: успехом и неудачей. Обозначим вероятность успеха как p и вероятность неудачи как q. При этом должно выполняться условие $p + q = 1$. Успех и неудача в случае с урнами это вынутый шар черного или белог цвета. В данной модели, после того, как шар достают, его возвращают обратно в урну, т.к. эксперимент Бернулли - независимый эксперимент. Таким образом независимо от количества испытаний, эксперимент не меняется, т.е. вероятность не зависит от истории.

Формула для расчёта вероятности того, что из урны с m черными шарами и n белыми шарами будет вытянуто k шаров, из котрых l - черные для данной модели выглядит следующим образом:

$$P(l) = \binom{k}{l} * p^l * (1-p)^{k-l}$$

Где: $P(l)$ - вероятность того, что будет вытянуто l черных шаров p - вероятность вытащить черный шар

4.3 Модель Поля

В статистике модель урны Поля, названная в честь Джорджа Поля, представляет собой модель, в которой после того, как шар достается, он возвращается в урну, и ещё добавляется шар такого же цвета. Этот процесс повторяется. Можно заметить, что если, например, белых шаров больше чем чёрных, то с большей вероятностью будет добавлен белый шар. То есть эта урна зависит от истории и сходится.

Эта модель выборке без замены: каждый раз, когда наблюдается определенное значение, вероятность его повторного наблюдения снижается, тогда как в модели урны Пойа наблюдаемое значение с большей вероятностью будет наблюдаться снова. В модели урны Пойя последовательные акты измерения с течением времени оказывают все меньше и меньше влияния на будущие измерения, тогда как при отборе проб без замены верно обратное: после определенного количества измерений определенного значения это значение больше никогда не появится. [1]

Даже если мы смоделируем ситуацию, где в урне находится одинаковое количество шаров черного и белого цвета, в итоге, в результате эффекта снежного кома, количество шаров одного цвета будет сильно больше шаров другого цвета. Допустим, вы начинаете с равным количеством шаров (5 белых, 5 черных). Если после первого испытания будет выбран белый шар, в урне окажется 6 белых и 5 черных шаров. Это автоматически создает неравенство, при котором в следующем испытании с большей вероятностью будет выбран белый шар, нежели черный. Шансы теперь составляют 6/11, что будет выбран белый шар, и 5/11, что вы выберете черный. Этот фактор и может стать снежным комом. [2]

График изменения количества шаров в урне Поля при m = 5, n = 5. (рис. [4.1])

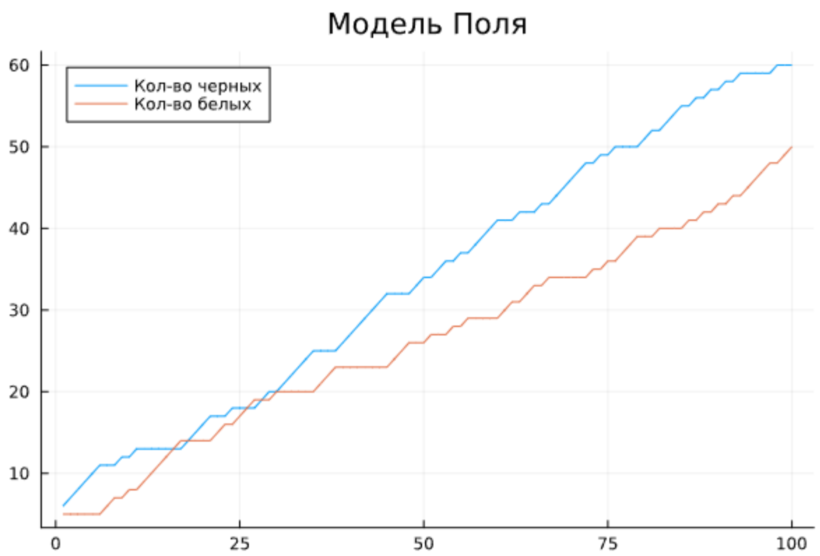

Рис. 4.1: График урны Поля

4.4 Модель баланса

Модель баланса или же модель плохой выборной компании - модель которую изучал Фридман, и ее можно рассматривать как моделирование пропагандистской кампании, в которой кандидаты настолько плохи, что люди, которые их слушают, решают голосовать за противоположного кандидата. Данная урна, в отличие от урны Поля, стремится сохранить баланс черных и белых шаров. [3] В данной модели после выемки шара в урну кладётся шар противоположного цвета. Модель сходится к равновесию.

График изменения количества шаров в урне Фридмана при m = 10, n = 5. Среднее значение 7.5, поэтому количество черных и белых шаров колеблется возле этого значения. (рис. [4.2])

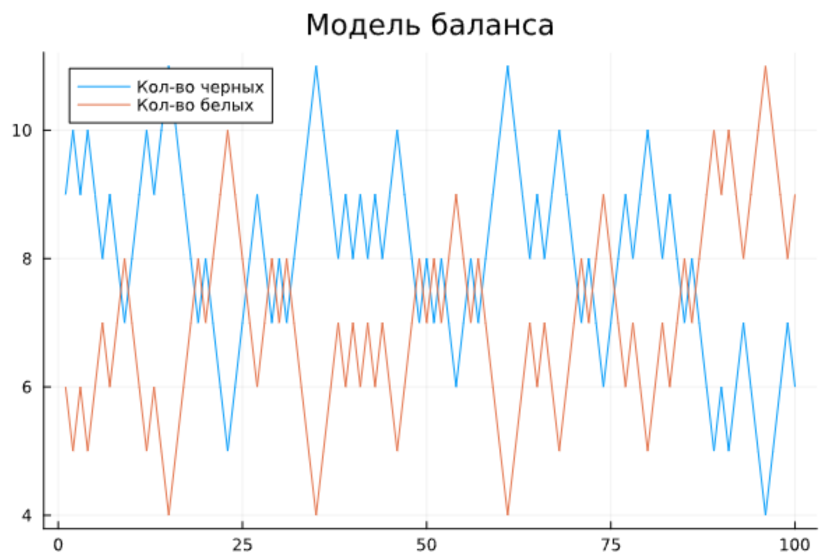

Рис. 4.2: График урны Фридмана

5 Области применения

5.1 Теория вероятности

Модели с урнами - это мощный инструмент в теории вероятностей, используемый для моделирования случайных событий. Каждая из упомянутых моделей используется в теории вероятностей для анализа случайных процессов и событий а так же вероятностных распределений из многих областей нашей жизни и помогает решать реальные задачи.

5.2 Генетика

В генетике модели с урнами могут быть использованы для описания процессов мутации и передачи генов. Например, урна с генами различных аллелей может быть использована для моделирования генетического разнообразия в популяции. Модель урны схожая с моделью Поля используется для моделирования генетического дрейфа в теоретической популяционной генетике. [4]

5.3 Экономика

В экономике модели с урнами могут быть применены для анализа случайных процессов в экономике, таких как изменения цен, вариации спроса и предложения, а также для моделирования рисков и случайных событий в финансовых рынках.

5.4 Обучающие процессы

Эти модели являются продолжением процесса Поля. Один из вариантов, так называемая стохастическая модель обучения с двумя вариантами ответов, предложенная Одли и Джонкхиром (1956). Мы рассматриваем последовательность испытаний, в каждом из которых испытуемый должен отреагировать одним из двух возможных способов. Один ответ "вознаграждается" — положительная оценка — каждый раз, когда он совершается. Другой "наказазывается" — негативная оценка. Таким образом, (i + 1)-й ответ субъекта, скорее всего, будет зависеть от каждого из первых i ответов. Используя эту модель, Одли и Джонкхир получили условное распределение вероятности успеха в (n + 1)-м испытании, учитывая результаты предыдущих n испытаний.

5.5 Биология

Capture-recapture дано целому классу методов, используемых для оценки размеров естественных популяций. Многие из них происходят из работ Шнабеля(1938) и Чапмана(1952), в которых обсуждается оценка численности рыбы f в озере. Предложенный метод состоял в разделении рыбы на меченую и немеченую.[5]

6 Выводы

В работе были исследованы разновидности моделей с урнами, а так же было рассмотренно их применение в различных областях. Таким образом, хотя модель с урнами - это и простой мысленный эксперимент, различные её виды внесли вклад в развитие многих областей нашей жизни и используются и по сей день.

Список литературы

1. Polya urn porblem [Электронный ресурс]. Free Software Foundation, 2024. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Urn_problem.
2. Polya urn. Definiton, examples. [Электронный ресурс]. 2024. URL: https://www.statisticshowto.com/polya-urn/.
3. Flajolet P., Dumas P., Puyhaubert V. Some exactly solvable models of urn process theory. DMTCS, 2006. 118 с.
4. Polya urn. Definiton, examples. [Электронный ресурс]. Free Software Foundation, 2024. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/P%C3%B3lya_urn_model.
5. Johnson N.L., Kotz S. Urn Models And Their Applications. John Wiley & Sons, Inc., 1977. 402 с.