1.12

Resoleu les següents recurrències:

a) $T(n) = 16T(n/2) + \binom{n}{3}\lg^4 n$

b) $T(n) = 5T(n/2) + \sqrt{n}$

c) $T(n) = 2T(n/4) + 6.046\sqrt{n}$

d) $T(n) = 2T(n/2) + \frac{n}{\lg n}$

e) $T(n) = T(n-10) + n$

Solució

a)

$$f(n) = \binom{n}{3}\lg^4 n = \frac{n!}{(n-3)!3!}\lg^4 n = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lg^4 n$$
$$= \Theta(n^3\lg^4 n) = O(n^{4-\varepsilon})$$

Aleshores, per teorema mestre, $T(n) = \Theta(n^4)$

b) Per teorema mestre, $T(n) = \Theta(n^{\log_2 5})$

c) Per teorema mestre, $T(n) = \Theta(\sqrt{n}\log n)$

e) Desenvolupem la recurrència:

$$\begin{aligned}
T(n) &= n + (n-10) + (n-20) + (n-30) + \dots \\
&= \sum_{i=0}^{n/10}(n - 10\,i) \\
&= \frac{n}{10}n - \sum_{i=0}^{n/10}(10\,i) \\
&= \frac{n^2}{10} - 10\cdot\frac{n/10-(n/10-1)}{2} \\
&= \frac{n^2}{10} - \frac{n}{2}(\frac{n}{10}-1) \\
&= \frac{n^2}{10} - \frac{n^2}{20} + \frac{n}{2} \\
&= O(n^2)
\end{aligned}$$

d) Desenvolupem l'arbre de recursió:

- A l'arrel tenim cost $\frac{n}{\lg n}$
- A nivell 1 tenim cost $2(\frac{n/2}{\lg(n/2)}) = 2(\frac{n}{2\lg(n/2)}) = \frac{n}{\lg(n/2)}$
- A nivell 2 tenim cost $4(\frac{n/4}{\lg(n/4)}) = \frac{n}{\lg(n/4)}$
- A nivell 3 tenim cost $8(\frac{n/8}{\lg(n/8)}) = \frac{n}{\lg(n/8)}$
- ...

Donat que a cada nivell dividim per 2, l'alçada de l'arbre serà $\log n$, i aquest serà el seu últim nivell (fulles). Sumant els costos de tots els nivells, tenim un cost global

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{n}{\lg n} + \frac{n}{\lg(n/2)} + \frac{n}{\lg(n/4)} + \ldots + \frac{n}{\lg 1} \\
&= n\left(\frac{1}{\lg n} + \frac{1}{\lg(n/2)} + \frac{1}{\lg(n/4)} + \ldots + \frac{1}{\lg(n/n)}\right) \\
&= n\left(\frac{1}{\lg n} + \frac{1}{\lg n - \lg 2} + \frac{1}{\lg n - \lg 4} + \ldots + \frac{1}{\lg n - \lg n}\right) \\
&= n\left(\frac{1}{\lg n} + \frac{1}{\lg n - 1} + \frac{1}{\lg n - 2} + \ldots + \frac{1}{\lg n - \lg n}\right) \\
&= n\sum_{i=0}^{\lg n} \frac{1}{\lg n - i} = n\sum_{i=0}^{\lg n} \frac{1}{i} = n \underbrace{H_{\lg n}}_{\text{armònic}} = O(n \lg\lg n)
\end{aligned}$$

També podríem resoldre la recurrència per substitució: sigui $n = 2^m$, aleshores la recurrència es reescriuria com

$$T(2^m) = 2T(2^{m-1}) + \frac{2^m}{\lg 2^m} = 2T(2^{m-1}) + \frac{2^m}{m}$$

Anomenem $f(m) = T(2^m)$; aleshores la recurrència es reescriu com

$$f(m) = 2f(m-1) + \frac{2^m}{m}$$

La desenvolupem:

$$
\begin{aligned}
f(m) &= 2f(m-1) + \frac{2^m}{m} \\
&= 2\left(2f(m-2) + \frac{2^{m-1}}{m-1}\right) + \frac{2^m}{m} \\
&= 4f(m-2) + \frac{2^m}{m-1} + \frac{2^m}{m} \\
&= 4\left(2f(m-3) + \frac{2^{m-2}}{m-2}\right) + \frac{2^m}{m-1} + \frac{2^m}{m} \\
&= 8f(m-3) + \frac{2^m}{m-2} + \frac{2^m}{m-1} + \frac{2^m}{m} \\
&\dots \\
&= 2^i f(m-i) + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{2^m}{m-j} = 2^i f(m-i) + 2^m \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{m-j} = 2^i f(m-i) + 2^m \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{j} \\
&\dots (\text{fins a } m) \\
&\leq 2^m f(0) + 2^m H_m
\end{aligned}
$$

Desfem la substitució: $2^m f(0) + 2^m H_m = nT(1) + nH_{\lg n} = O(n \lg\lg n)$