

1.13. Donat un graf no dirigit $G = (V, E)$ i un subconjunt de vèrtex V_1 , el subgraf induït per V_1 , $G[V_1]$ té com a vèrtex V_1 i com a arestes totes les arestes a E que connecten vèrtexs en V_1 . Un clique és un subgraf induït per un conjunt C on tots els vèrtexs estan connectats entre ells.

Considerem el següent algorisme de dividir-i-vèncer per al problema de trobar un clique en un graf no dirigit $G = (V, A)$.

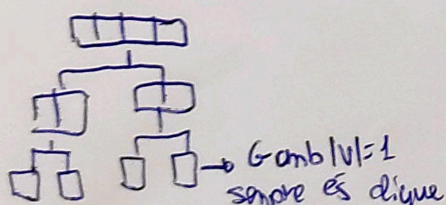
CliqueDV(G)

- 1: Enumereu els vèrtexs V com $1, 2, \dots, n$, on $n = |V|$
- 2: Si $n = 1$ tornar V
- 3: Dividir V en $V_1 = \{1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$ i $V_2 = \{\lfloor n/2 \rfloor + 1, \dots, n\}$
- 4: Sigui $G_1 = G[V_1]$ i $G_2 = G[V_2]$
- 5: $C_1 = \text{CliqueDV}(G_1)$ i $C_2 = \text{CliqueDV}(G_2)$
- 6: $C_1^+ = C_1$ i $C_2^+ = C_2$
- 7: for $u \in C_1$ do
- 8: if u està connectat a tots els vèrtexs a C_2^+ then
- 9: $C_2^+ = C_2^+ \cup \{u\}$
- 10: for $u \in C_2$ do
- 11: if u està connectat a tots els vèrtexs a C_1^+ then
- 12: $C_1^+ = C_1^+ \cup \{u\}$
- 13: Retorneu el més gran d'entre C_1^+ i C_2^+

Contesteu les següents preguntes:

- (a) Demostreu que l'algorisme CliqueDV sempre retorna un subgraf de G que és un clique.
- (b) Doneu una expressió asimptòtica del nombre de passos de l'algorisme CliqueDV.
- (c) Doneu un exemple d'un graf G on l'algorisme CliqueDV retorna un clique que no és de grandària màxima.
- (d) Creieu que és fàcil modificar CliqueDV de manera que sempre done el clique màxim, sense incrementar el temps pitjor de l'algorisme? Expliqueu la vostra resposta.

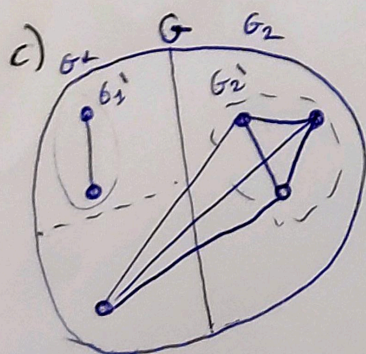
a) cas base: $n=1$ ✓



HI: Suposem que $\text{CliqueDV}(G)$ és cor. v.v. $\text{CliqueDV}(G')$ és cor on $G' = G \cup \{u\}$

- cas 1 → No pertany a C_1 ni C_2 → G' es clique ja que G ja ho és } sempre retorna un clique
- cas 2 → Pertany a C_1 però no C_2 } retorna el clique més gran
- cas 3 → Pertany al clique C_1 i C_2 → Retorna el clique que sigui més gran

b) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \Theta(n^2) \rightarrow \Phi = \log_2 2 = 1 \Rightarrow \text{cost} = O(n^2)$

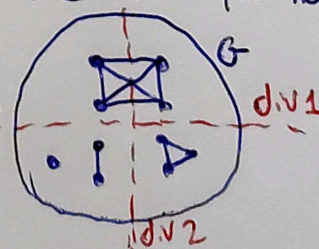


G_1 retorna G_1 i G_2 retorna $G_2 \Rightarrow$
 \Rightarrow Per tant G retorna G_2 que no és el clique màxim

Altre exemple depenent de com dividim

div 1 → retorna clique màxim

div 2 → retorna un clique, però no màxim



d) No és pot, és NP-complet