

1.3

Per a cadascun dels algorismes, digueu quin és el temps en cas pitjor quan l'entrada és un enter positiu $n > 0$.

```
(a)  for i = 1 to n do
      j = i
      while j < n do
        j = 2 * j
      end while
    end for
```

El bucle exterior fa n iteracions. Per a cada valor de i tenim:

- un cost constant per a l'assignació $j = i$
- un bucle intern que fa $\operatorname{argmax}\{k \mid 2^k i < n\}$ iteracions.

Quina és aquesta k ?

$$2^k i = n$$

$$2^k = n/i$$

$$k = \lg(n/i)$$

Per tant, tenim un cost total de:

$$T(n) = n + \sum_{i=1}^n \lg(n/i) = \lg(\prod_{i=1}^n (n/i)) = \lg(n^n/n!) = n \lg n - \lg n!$$

$$\sim n \lg n - \lg(\sqrt{2\pi n}(n/e)^n) = n \lg n - \lg(\sqrt{2\pi n}) - \lg((n/e)^n)$$

(Stirling)

$$= n \lg n - \lg(\sqrt{2\pi n}) - n \lg(n/e)$$

$$= n \lg n - \lg(\sqrt{2\pi n}) - n \lg n + n \lg e$$

$$= n \lg e - \lg(\sqrt{2\pi n})$$

$$= \Theta(n)$$

```

(b)  for  $i = 1$  to  $n$  do
       $j = n$ 
      while  $i * i < j$  do
         $j = j - 1$ 
      end while
    end for

```

El bucle exterior fa n iteracions. Per a cada valor de i tenim:

- un cost constant per a l'assignació $j = n$
- un bucle intern només s'executa quan $i < \sqrt{n}$ i, per a cada i concreta fa $(n - i^2)$ iteracions.

Per tant, tenim un cost total de:

$$\begin{aligned}
 T(n) &= n + \sum_{i=1}^{\sqrt{n}} (n - i^2) \\
 &= n + \sum_{i=1}^{\sqrt{n}} n - \sum_{i=1}^{\sqrt{n}} i^2 \\
 &= n + n\sqrt{n} - \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n}-1)(2\sqrt{n}+1)}{6} \\
 &= \Theta(n\sqrt{n})
 \end{aligned}$$

```
(c)  for  $i = 1$  to  $n$  do
       $j = 2$ 
      while  $j < i$  do
         $j = j * j$ 
      end while
    end for
```

El bucle exterior fa n iteracions. Per a cada valor de i tenim:

- un cost constant per a l'assignació $j = i$
- un bucle intern que fa $\text{argmax}\{k \mid 2^{2^k} < i\}$ iteracions.
Quina és aquesta k ?

$$2^{2^k} = i$$

$$2^k = \lg i$$

$$k = \lg \lg i$$

Per tant, tenim un cost total de:

$$\begin{aligned} T(n) &= n + \sum_{i=2}^n \lg \lg i \\ &\leq n + \sum_{i=2}^n \lg \lg n \\ &= \Theta(n \lg \lg n) \end{aligned}$$

```
(d)   $i = 2$ 
      while  $(i * i < n)$  and  $(n \bmod i \neq 0)$  do
         $i = i + 1$ 
      end while
```

El pitjor cas es dona quan n és primer i, en aquest cas, es fan \sqrt{n} iteracions. Cada iteració té un cost constant. Per tant, el cost total és $\Theta(\sqrt{n})$.