

基于双光栅夹角变化测量金属丝杨氏模量

王文硕¹, 田星雨¹, 严琪琪², 董国波², 熊 畅², 胡浩哲³

(1. 北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院 北京 100083;
2. 北京航空航天大学 物理学院 北京 100083; 3. 北京市第十四中学 北京 100053)

摘要: 本文提出了一种利用双光栅夹角变化测量金属丝杨氏模量的方法. 该方法利用莫尔条纹宽度对双光栅夹角变化的高度敏感性, 将动光栅放置在杠杆平台上, 将不同拉力下金属丝的微小线位移转化为由双光栅夹角变化而引起的莫尔条纹宽度的变化, 进而计算得到金属丝的杨氏模量. 实验表明, 该方法操作简单, 数据准确, 精确度高, 实验结果符合预期.

关键词: 双光栅; 莫尔条纹; 变夹角; 微小位移; 杨氏模量

中图分类号: O 4-34 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-0712(2020) 08-0058-06

【DOI】10.16854/j.cnki.1000-0712.190539

莫尔条纹是一个发生在两个或多个具有重复性结构的图案重叠区域的现象, 在重叠区域会出现明暗相间、清晰可见而在源图案中并不存在的条纹. 这些条纹被称为莫尔条纹^[1]. 莫尔条纹是光栅位移精密测量的基础, 基于莫尔条纹宽度(或数量)与位移变化的关系, 它能够实现接触、非接触、一维、多维等多种需求的精密测量. 因其对于微小位移测量的精确性和简便性, 可广泛应用于数控机床^[2]、精密测量^[3]、振动检测^[4]等领域.

杨氏模量, 又称弹性模量, 是材料本身的固有属性, 其大小仅取决于材料本身的物理性质, 反应材料抵抗形变的能力. 因此, 杨氏模量是工程设计中的常用参数, 是恰当选定机械零件材料的重要依据, 对其进行精确测量具有十分重要的意义.

目前已有一些测量金属丝杨氏模量的方法, 如光杠杆法^[5-7]、双缝干涉法^[8-9]、单缝衍射法^[10-12]、惠斯通电桥法^[13-14]和莫尔条纹法^[15-17]等. 其中利用莫尔条纹测量金属丝杨氏模量的方法^[15-17]是将两光栅夹角固定, 通过测量莫尔条纹移动的变化数来反映金属丝的微小位移量, 但该方法测量过程中的条纹变化数可能为小数, 在读数化整过程中会对最后测量结果的准确性带来一定影响; 而且该方法在实际实验过程中完全保证动、静两光栅的夹角恒定不变, 实现起来比较困难, 参考光栅与指示光栅重叠摆放也会造成一定的角度误差, 给测量结果带来

影响.

鉴于以上情况, 本文提出了一种双光栅变夹角型测量的全新方法, 将金属丝的微小位移直接转化为双光栅之间夹角的变化, 并通过莫尔条纹宽度的测量来得到相应物理量. 实际实验中只需测量每组外力 F 下所对应的莫尔条纹间距即可, 有效避免了固定双光栅角度进行测量时所遇到的问题.

1 实验原理

1.1 杨氏模量测量原理

对于一条各向同性的金属丝, 在外力作用下, 金属丝通常会发生形状的改变. 在其弹性限度内, 横截面上所受正应力 σ 和正应变 ε 成线性正比关系, 比值即为杨氏模量, 记为 E . 若金属丝是长为 L 的圆柱体, 直径为 D , 当金属丝下端施加的拉力为 F 时, 金属丝长度的形变量为 ΔL , 则杨氏模量 E 可表示为

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\frac{4F}{\pi D^2}}{\frac{\Delta L}{L}} = \frac{4FL}{\pi D^2 \Delta L} \quad (1)$$

由式(1)可以看出, 只要精确测量出金属丝的原始长度 L 、直径 D 、金属丝所受拉力 F 和金属丝在所受拉力下的伸长量 ΔL , 即可计算得出金属丝的杨氏模量. 其中, 金属丝所受拉力 F 大小可由拉力计直接读出, 金属丝的原始长度 L 、直径 D 可分别由钢卷尺和螺旋测微器测得. 因此, 对金属丝杨氏模量进行

收稿日期: 2019-11-21; 修回日期: 2020-02-12

基金项目: 北京市自然科学基金(2161001)资助

作者简介: 王文硕(1999—), 男, 满族, 北京市人, 北京航空航天大学自动化专业 2017 级本科生.

通信作者: 严琪琪, E-mail: yanqifi110@163.com

测量的关键,是如何精确测量金属丝在所受拉力方向上产生的微小形变量 ΔL 。

本文利用双光栅所形成的莫尔条纹,将金属丝的微小线位移 ΔL 转变为双光栅夹角变化的角位移 $\Delta\theta$,并基于莫尔条纹宽度对双光栅夹角的高度敏感性得到这一微小角位移 $\Delta\theta$,进而计算出金属丝的杨氏模量 E 。

1.2 莫尔条纹测距原理

本文利用双光栅产生的莫尔条纹宽度变化,来测量金属丝的微小位移 ΔL 。当完全相同的两光栅以小角度 θ 叠加时,形成的莫尔条纹如图 1 所示。

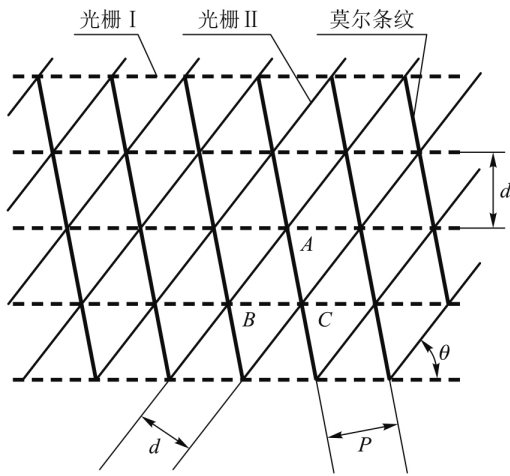


图 1 双光栅与莫尔条纹示意图

其中,两光栅栅距均为 d ,形成的莫尔条纹间距为 P 。由几何知识可知

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot d = \frac{1}{2}AB \cdot d \quad (2)$$

式(2)中 S_{ABC} 为三角形 ABC 面积。

由此可得 $AB=BC$ 。再在三角形 ABC 中利用余弦定理,可得莫尔条纹间距 P 的表达式为

$$P = \frac{d}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}} = \frac{d}{2\sin\frac{\theta}{2}} \quad (3)$$

用 Matlab 做出函数 $f(\theta) = \frac{\theta}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ 的关系图

像如图 2 所示。

由图 2 可知,在 $\theta \leq 10^\circ$ 的范围内 $\theta \approx 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$,

由此近似所引入的误差仅约 0.13%,可忽略不计。即若 θ 足够小,式(3)可写为

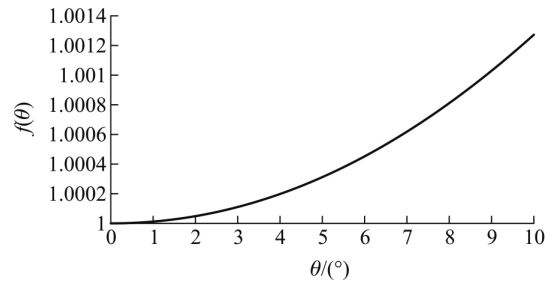


图 2 $f(\theta)$ 与 θ 的关系示意图

$$P = \frac{d}{\theta} \quad (4)$$

由式(4)可知,在保持两光栅初始夹角 θ 不变的情况下,莫尔条纹间距 P 与光栅常数 d 成正比,即所用光栅的光栅常数 d 越大,所产生的莫尔条纹间距 P 越大,越容易进行测量;在保持光栅常数 d 不变的情况下,莫尔条纹间距 P 与两光栅夹角 θ 成反比,即两光栅夹角 θ 越小,所产生的莫尔条纹间距越大,越容易进行测量。本文采用的是在保持两光栅常数不变的情况下,通过测量放大后的莫尔条纹间距 P 的变化,推算出两光栅间的夹角 θ 的改变量。

1.3 杠杆平台原理

实验中,杠杆平台前足放置于与金属丝一端固连的金属圆盘上。设杠杆平台初始时,杠杆平台前后足高度差为 H ,初始倾角为 φ_0 ;在金属丝上作用拉力 F 时,杠杆平台前后足高度差为 $H+\Delta H$,平台倾角为 φ 。由于金属丝下端的拉力变化,金属丝及杠杆前足发生大小为 ΔH 的竖直位移,使得杠杆平台倾角产生微小改变量 $(\varphi-\varphi_0)$;其上的动光栅同样会随之产生微小转动,引起动光栅倾角变化 $(\varphi-\varphi_0)$ 。杠杆平台前后足高度差 H 与杠杆平台倾角 φ_0 的几何关系如图 2 所示,其中 b 为杠杆前后足尖的垂直距离。

根据图 3 几何关系可得

$$H = b \tan \varphi_0 \quad (5)$$

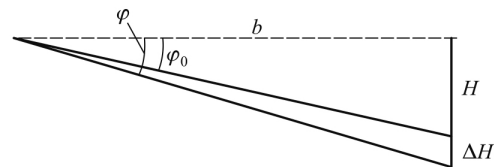


图 3 H 与 φ_0 几何关系示意图

当对金属丝施加拉力时,金属丝沿拉力方向有形变(即杠杆平台前足的竖直位移),转化为杠杆平台倾角的变化量,即

$$\Delta H = b \tan \varphi - b \tan \varphi_0 \approx b(\varphi - \varphi_0) \quad (6)$$

设未加拉力 F 时双光栅初始夹角为 θ_0 。由于静光栅角度恒定, 动光栅倾角变化 $(\varphi - \varphi_0)$ 即为双光栅夹角变化量 $(\theta - \theta_0)$ 因此

$$\Delta H = b(\varphi - \varphi_0) = b(\theta - \theta_0) \quad (7)$$

用 Matlab 做出函数 $f(\varphi) = \frac{\varphi}{\tan \varphi}$ 的关系图像如图 4 所示。

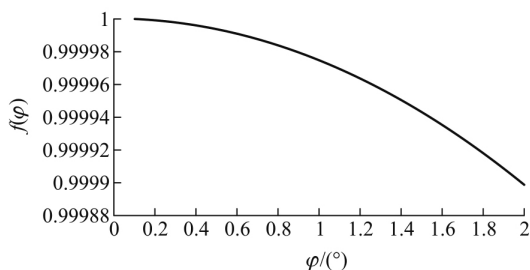


图4 $f(\varphi)$ 与 φ 的关系示意图

由式(7)可知, 双光栅夹角的变化量与平台夹角变化量相等, 最终实验数据表明加力前后光栅夹角 θ 的变化不超过 1° , 因此 $\varphi - \varphi_0$ 的大小也不超过 1° , 实验中调节平台水平使 φ_0 近似为 0° , 这样在 $\varphi < 1^\circ$ 的变化范围内, 根据图 4 可知由式(6)的近似所引入的误差仅约 0.002%, 可忽略不计。

由于杠杆平台前足置于与金属丝相连的金属圆盘上, 杠杆平台前后足尖高度差的变化量 ΔH 即为金属丝长度变化量 ΔL , 亦即

$$\Delta L = \Delta H = b(\theta - \theta_0) \quad (8)$$

由式(1)、(4)、(8)可得

$$\left| \frac{\Delta F}{\Delta \theta} \right| = \frac{\pi E D^2 b}{4L} \quad (9)$$

$$\theta = \frac{d}{P} \quad (10)$$

通过线性回归与描点作图, 可验证金属丝所加拉力 F 和双光栅夹角 θ 的线性相关性, 并最终根据 $F-\theta$ 图象的斜率求出金属丝的杨氏模量。

2 实验方法

2.1 实验装置

本实验所搭建的实验装置如图 5 所示, 由杠杆平台、动光栅、静光栅及其支座等组成。静光栅通过自制实验支座放置于水平平台上; 动光栅固定于杠杆平台上; 金属丝下端外侧为螺纹柱, 金属圆盘通过中心螺纹孔与之固连。杠杆平台后足置于水平平台

上, 前足置于圆盘上。

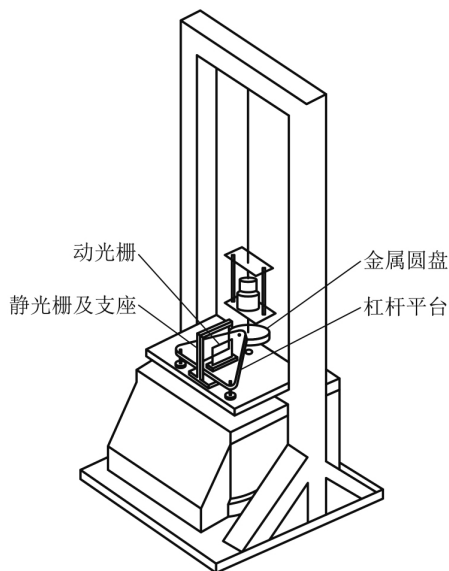


图5 动、静光栅实验仪装置图

2.2 实验过程

2.2.1 仪器安装与调整

将静光栅固定在自行设计的光栅座上并放置于实验仪水平平台上, 调整激光器使其出射光垂直于静光栅平面入射。

安装杠杆平台, 并在其上放置动光栅。调整杠杆后足螺钉, 改变杠杆倾角, 使动光栅平面垂直于激光器的出射光。

调整时应注意两光栅间距, 应使两光栅尽可能贴近而不重合, 避免产生摩擦阻碍相对运动。

此时光栅、光源已调节完毕, 之后的操作过程中无需调节、避免触碰。

将扩束镜 K、偏振片 P_1 和 P_2 、焦距为 200 mm 的凸透镜 L 和测微目镜 E 按图 6 所示依次摆放, 并合理调整仪器间位置, 使平行光束照射在两光栅重合区。其中 S 为半导体激光器、 D_1 为动光栅、 D_2 为静光栅。

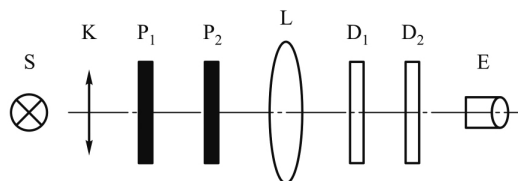


图6 实验光路图

2.2.2 实验过程

调节动、静光栅之间的初始夹角,通过测微目镜观察,在未加拉力时看到 5~10 条清晰的莫尔条纹,开始实验。否则,将导致施加拉力较大时条纹过密而影响测量。实验过程中,若视野亮度不合适,可调节偏振片以改变视野光强。动、静光栅及杠杆平台的具体实验装置如图 7 所示。图 8 为实验时测微目镜观测到的莫尔条纹。

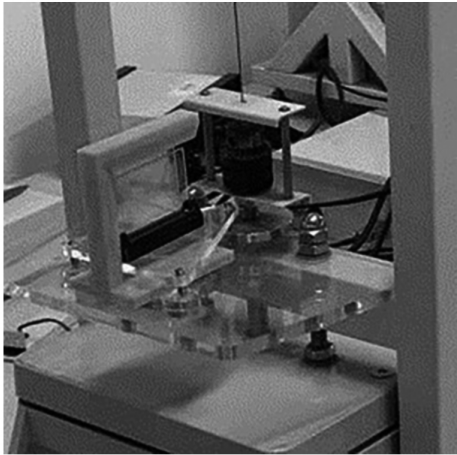


图 7 动、静光栅实验仪实物图

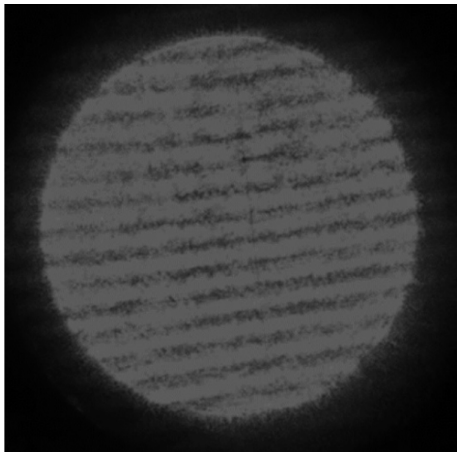


图 8 莫尔条纹现象

3 实验数据及处理

实验所用光栅的光栅常数 $d=\frac{1}{300}$ mm。表 1~表 3 分别为金属丝直径 D 、杠杆平台前后足间的垂直距离 b 、金属丝长度 L 的测量数据。

表 1 钢丝直径数据测量

测量次数	1	2	3
D/mm	0.783	0.785	0.787

表 2 杠杆平台前后足尖间距测量

测量次数	1	2	3
b/mm	88.92	89.03	89.12

表 3 钢丝长度数据测量

测量次数	1	2	3
L/m	0.48	0.47	0.49

为了减少人眼判断误差对测量结果的影响,在测量莫尔条纹宽度时使用手机相机对所产生的莫尔条纹进行拍摄,并结合 Matlab 进行相应的图像识别和处理,得到不同拉力 F 下相对应的莫尔条纹宽度 P ,最终计算出金属丝的杨氏模量 E 。

首先,利用测微目镜内的十字叉丝位置标定所用手机相机的像素点数 pix 和单位 mm 之间的对应关系,数据如表 4 所示,表 4 中 x_i 为十字叉丝位置, y_i 为手机相机对应的像素点。

表 4 测微目镜十字叉丝位置和手机像素点数的对应关系

测量次数	x_i/mm	y_i/pix
1	8.470	4032
2	1.550	1744

由表 4 数据可得,手机像素点数 pix 和单位 mm 之间的对应关系为:

$$A=\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}=3\text{ }\mu\text{m}/\text{pix}$$

手机相机分辨率为 $4032\times 3024\text{ pix}$,图片的纵向高度为 3024 pix ,选取横轴某 pix 处截面上较为清晰的莫尔条纹(如图 9 所示)作为分析对象,将其亮度值用 Matlab 进行灰度处理,得到图 10 所示的图像,并用得到的截面上每个像素的亮度值数据绘制出如图 11 所示的莫尔条纹亮度分布。选取图 11 中的亮度极大值点对应的横轴坐标代表明纹的位置,这样通过两条相邻明纹间的平均距离,即可得到莫尔条纹的平均宽度。

表 5 和表 6 为正式实验数据,分别为给金属丝加力和减力过程的原始数据记录。其中 F 为金属丝所受拉力大小, X_1 、 X_2 分别为第一条和最后一条明纹的像素点数位置, n 表示所测量的莫尔条纹数。

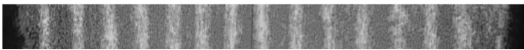


图 9 手机拍摄的莫尔条纹图像



图 10 灰度处理后的莫尔条纹图像

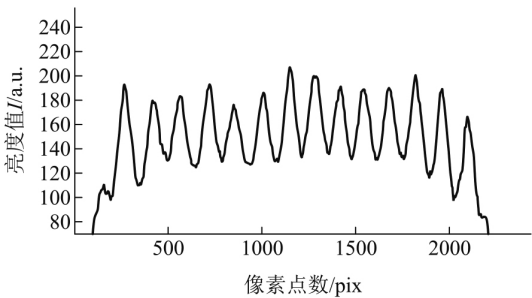


图 11 莫尔条纹亮度分布

表 5 加力原始数据记录表

F/kg	X_1/pix	X_2/pix	n
16.01	212	1568	15
17.95	310	1565	15
20.02	241	1390	15
22.10	232	1299	15
24.05	278	1279	15
26.00	331	1263	15
27.99	291	1165	15

表 6 减力原始数据记录表

F/kg	X_1/pix	X_2/pix	n
27.98	301	1177	15
26.12	315	1252	15
24.02	230	1234	15
22.05	267	1349	15
20.00	243	1410	15
17.97	254	1509	15
16.01	221	1587	15

由式(9)和(10)利用一元线性回归处理表4和表5的实验数据,可得金属丝所受不同拉力 F 与双光栅夹角 θ 之间的关系如图12所示.

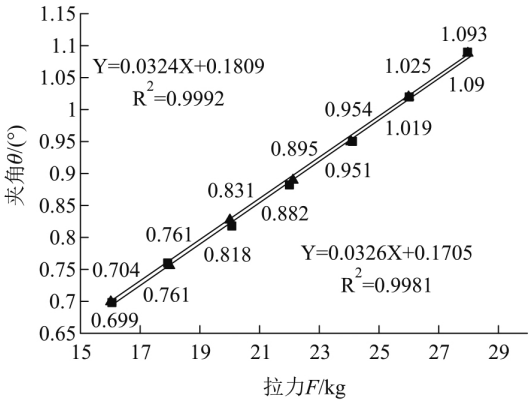


图 12 金属丝所受拉力 F 与双光栅夹角 θ 的关系图

通过线性回归分析表4数据可得:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta \theta}{\Delta F} \right| &= 0.0324; \\ R^2 &= 0.9992; \\ E &= \frac{4L}{\pi D^2 b} \left| \frac{\Delta F}{\Delta \theta} \right| = 2.021 \times 10^{11} \text{ Pa} \end{aligned}$$

其相对不确定度为

$$\frac{u(E)}{E} = \sqrt{\left[\frac{u(L)}{L} \right]^2 + 4 \left[\frac{u(D)}{D} \right]^2 + \left[\frac{u(b)}{b} \right]^2 + \left[\frac{u\left(\left| \frac{\Delta \theta}{\Delta F} \right| \right)}{\left| \frac{\Delta \theta}{\Delta F} \right|} \right]^2} \quad (11)$$

其中:

$$\frac{u(L)}{L} = \frac{u_b(L)}{L} = \frac{\Delta_L}{\sqrt{3} \times L} = 0.0036 \quad (12)$$

$$\frac{u(D)}{L} = \frac{u_b(D)}{L} = \frac{\Delta_D}{\sqrt{3} \times D} = 0.0037 \quad (13)$$

$$\frac{u(b)}{b} = \frac{u_b(b)}{b} = \frac{\Delta_b}{\sqrt{3} \times b} = 0.0013 \quad (14)$$

$$\frac{u\left(\left| \frac{\Delta \theta}{\Delta F} \right| \right)}{\left| \frac{\Delta \theta}{\Delta F} \right|} = \sqrt{\frac{1}{k-2} \left(\frac{1}{R^2} - 1 \right)} = 0.023 \quad (15)$$

可得 E 的不确定度为

$$u(E) = 0.03 \times 10^{11} \text{ Pa} \quad (16)$$

故金属丝杨氏模量 E 的测量结果为

$$E \pm u(E) = (2.02 \pm 0.03) \times 10^{11} \text{ Pa} \quad (17)$$

同理,通过线性回归分析表5数据可得

$$E \pm u(E) = (1.98 \pm 0.03) \times 10^{11} \text{ Pa} \quad (18)$$

通过对实验结果不确定度分析可知,该实验条件下的测量误差来源主要有:测微目镜读数的误差、钢丝本身的疲劳性、光路未完全水平、光栅平面未完全竖直。因此,实验中利用半调法调整激光器与双光栅倾角达到光路水平、光栅竖直的目的。

金属丝杨氏模量参考值为 $(1.9 \sim 2.0) \times 10^{11} \text{ Pa}$, 加力和减力两组数据所测量的结果都在参考值范围内,说明测量结果真实可靠,同时实验中选取了实验室常用的光杠杆法,测量了同一根金属丝的杨氏模量作为对照。采用光杠杆法测得的金属丝杨氏模量结果为 $E \pm u(E) = (2.02 \pm 0.04) \times 10^{11} \text{ Pa}$, 比较结果进一步说明了该方法的准确性与可靠性。

4 结束语

本文采用变夹角型莫尔条纹测量法,精确地测量了金属丝的杨氏模量,数据结果真实可靠。该方法首先通过半调法、光栅反射法,进行光路水平和光栅竖直的调整,之后设计了三维光栅支座模型,解决双光栅的摆放问题。本实验的应用较广泛,不仅为测量金属丝杨氏模量提供了新方法,同时莫尔条纹与微处理器、A/D 转换器等硬件结合测量微小位移的方法在机械设计、精密测量等方面具有工业推广的重要意义。

参考文献:

- [1] 李书光. 大学物理实验 [M]. 北京: 科学出版社, 2011: 13.
- [2] 许良元, 刘勇, 朱灵, 等. 光栅莫尔条纹在机床数控改造中的应用研究 [J]. 光学与光电技术, 2008, 6(04): 60-62.
- [3] 高海霞. 基于光栅莫尔条纹细分技术的精密测量系统

- 的设计 [D]. 哈尔滨理工大学, 2016.
- [4] 马骁. 光栅振动检测系统中信号处理关键技术的研究 [D]. 天津科技大学, 2009.
- [5] 郭涛, 盛琛, 杨悦. 光杠杆测量杨氏模量的研究 [J]. 大学物理, 2016, 35(03): 40-42+53.
- [6] 车东伟, 姜山, 张汉武, 等. 静态拉伸法测金属丝杨氏模量实验探究 [J]. 大学物理实验, 2013, 26(02): 33-35.
- [7] 黄菊, 梁小冲. 拉伸法测钢丝杨氏模量实验仪器的改进 [J]. 实验科学与技术, 2018, 16(05): 178-180+184.
- [8] 方运良, 崔娟, 朱伟玲. 双缝干涉法测量金属的杨氏模量 [J]. 物理实验, 2014, 34(01): 37-39.
- [9] 尹少英, 陈宝久, 宋国利, 等. 基于劳埃德镜的光干涉法测梁的杨氏模量 [J]. 大学物理实验, 2013, 26(01): 20-22.
- [10] 盛爱兰. 一种基于单缝衍射的杨氏模量测定方法 [J]. 物理通报, 2014(01): 77-78.
- [11] 王一有, 马凤翔. 单缝衍射法测量玻璃板的杨氏模量 [J]. 物理实验, 2016, 36(07): 36-38.
- [12] 梁霄, 田源, 铁位金, 等. 横梁弯曲衍射法测杨氏模量实验仪的研制 [J]. 物理实验, 2011, 31(08): 31-33.
- [13] 麻福厚. 用惠斯通电桥测定杨氏模量 [J]. 物理实验, 1998, 18(05): 6-8.
- [14] 董康军, 田苏阳. 惠斯通电桥测量杨氏模量的实验探究 [J]. 渭南师范学院学报, 2013, 28(12): 37-39.
- [15] 隗群梅, 孟德迎, 何立志. 双光栅在不同夹角下测量杨氏模量的实验研究 [J]. 大学物理, 2017, 36(08): 41-45.
- [16] 孙丽丽, 房鑫盛, 张家祯, 等. 莫尔条纹测量杨氏模量实验研究 [J]. 实验技术与管理, 2016, 33(10): 68-70+75.
- [17] 管志莲. 用莫尔条纹测金属丝杨氏模量 [J]. 大学物理实验, 2000, 23(02): 20-22.

Measurement of the Young's modulus based on angle-changed double grating

WANG Wen-shuo¹, TIAN Xing-yu¹, YAN Qi-qi², DONG Guo-bo², XIONG Chang², HU Hao-zhe³

(1.School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100083, China;

2.School of Physics and Nuclear Energy Engineering, Beihang University, Beijing 100083, China;

3.Beijing No.14 High School, Beijing 100053, China)

Abstract: A method of measuring Young's modulus of metal wire by changing the double gratings' angle is presented. Based on the high sensitivity of Moiré pattern about the changing angle, the movable grating is placed on a lever platform so that the weeny linear displacement can be turned into the width variation of the Moiré pattern caused by the angular displacement between the two gratings. Correspondingly Young's modulus of metal wire can be calculated. The experimental results have shown that this method is simple, accurate and in line with expectations.

Key words: double grating; Moiré stripes; angle changes; small displacement; Young's modulus