# 模论观点下讨论矩阵可交换问题

王尔卓

（西安交通大学 数学与统计学院，陕西 西安，710061）

**摘要** 用模论观点讨论一个任意域上矩阵与之可交换矩阵构成线性的线性空间的维数，摆脱传统线性代数方法以及对代数闭域的限定。

**关键词** 主理想整环上的有限生成模；矩阵；线性空间

**中图分类号** 文献标识码 A 文章编号

# The commutativity of matrices discussed from the viewpoint of module theory

WANG Erzhuo

(Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710061, China)

**Abstract**: This paper discusses the dimension of the vector space formed by a matrix in arbitrary field and the matrices commuted with it by module theory, which gets rid of traditional linear algebra and the restriction to algebraic closed field.

**Key words**: finitely generated module over PID; matrix; vector space

## 1 引言

我们考虑一个十分一般的问题，对于给定域$F$以及其上 n 级矩阵$A \in M_n(F)$，显然所有关于$A$乘法可交换的矩阵构成线性空间$M_n(F)$的子空间，记作$C(A)$,那么如何确定这个线性空间的维数呢?

事实上，传统线性代数方法对于这个问题的处理略显乏力，原因有两点，第一是由于若当标准型通常情况下只存在于代数闭域，而对于一般域上的矩阵，我们只有有理标准型。二是即使考虑代数闭域，对于若当标准型中若当块特征值出现重复的情况，常规线性代数方法也很难奏效。比如参考书[1]中的第九章就花很大篇幅去讨论这个问题，最终只得到一些非一般的情况。

模论视角给这个问题提供了另一种的思路，我们将对矩阵可交换性的刻画转化为一个线性变换诱导出的$F[x]-$模的自同态模的刻画，从而很轻巧地解决了问题。本篇文章最初是在笔者研究有限 Abel 群的自同构群的计数问题时得到的启发。参考文献[2]对有限 Abel 群自同构群给出刻画所应用的技术手段也适用于自同态模。本篇文章主要内容就是推广[2]的结论到主理想整环，从而摆脱传统线性代数方法，脱离代数闭域的限制去解决问题。

## 2 视角切换

我们直接去研究任意线性空间之间线性变化的可交换性，考虑一个域$F$上的 n 维线性空间$V$，全体$V$上线性变换构成一个$n^2$维的线性空间$\mathrm{Hom}_F(V,V)$,此时一个线性变换$A$会诱导出一个$F[x]-$模$V$,其数乘定义为:

$$
\begin{aligned}
m(x)(v) &= (a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0)(v) \\
&= (a_k A^k + \ldots + a_1 A + a_0 I)(v)
\end{aligned}
$$

由于$F[x]$为主理想整环，从而$V$是一个主理想整环上的有限生成模，并且由凯莱哈密尔顿定理知，存在$p(x) \in F[x]$，使得$p(A) = O$，从而知道这是一个扭模。对于这个$F[x]-$模$V$,考虑其所有自同态构成的$F[x]-$模$\mathrm{Hom}_{F[x]}(V,V)$,其上任意元素$\varphi$,由定义，可以看作一个$V$上线性变换。又因为:

$$\varphi(A(v)) = \varphi(xv) = x\varphi(v) = A(\varphi(v))$$

从而$\mathrm{Hom}_{F[x]}(V,V)$中任意元素与线性变

作者简介：王尔卓(2003-),男,西安交通大学本科在读，Email:1292145563@stu.xjtu.edu.cn

化 $A$ 可交换。另一方面，对于一个与 $A$ 可交换的线性变换 $C$，我们证明其恰是 $\mathrm{Hom}_{F[x]}(V,V)$ 中的一员:

$$
\begin{aligned}
&C(m(x)(v)) = C((a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0)v) \\
&= C((a_k A^k + \ldots + a_1 A + a_0 I)v) \\
&= (a_k A^k + \ldots + a_1 A + a_0 I)C(v) \\
&= m(x)C(v)
\end{aligned}
$$

从而我们把要刻画的对象 $C(A)$ 转化为自同态模 $\mathrm{Hom}_{F[x]}(V,V)$，如果我们得到这个自同态模看成 $F$ 上线性空间的维数，那么我们就得到了 $C(A)$ 的维数。

## 3 证明准备

下面三个引理前两个的证明参考[3]的第四章。

**引理 1** 环 $R$ 是含单位元的交换环，$A_i$ 为左 $R$ 模，$i=1,\ldots,n$，$B$ 也为左 $R$ 模，则有左 $R-$模同构:

$$\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i=1}^n A_i, B) \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Hom}_R(A_i, B)$$

**引理 2(主理想整环上的有限生产模结构定理)**

这里我们直接对扭模 $V$ 给出初等因子形式，即存在次数大于 0 的不可约多项式 $p_1(x),\ldots,p_s(x)$ 使得:

$$
\begin{aligned}
&V \cong F[x]/(p_1^{e_1}(x)) \oplus \ldots \oplus F[x]/(p_1^{e_n}(x)) \\
&\oplus \ldots \\
&\oplus F[x]/(p_s^{h_1}(x)) \oplus \ldots \oplus F[x]/(p_s^{h_k}(x))
\end{aligned}
$$

其中每种不可约多项式幂次递增，即 $e_1 \le \ldots \le e_n, \ldots, h_1 \le \ldots \le h_k$

我们记:

$$F[x]/(p_1^{e_1}(x)) \oplus \ldots \oplus F[x]/(p_1^{e_n}(x)) = V_{p_1}$$

其余下标依次为 $p_2,\ldots,p_s$，并称这些模为 $V$ 的 $p_i-$分支，同时我们对一般情况下主理想整环上的有限生成扭模也称其同种素元 $p_i$ 构成的初等因子对应模的直和也为 $p_i$ 分支。

对于任意域上的有限维线性空间的线性变换，其诱导生成的 $F[x]-$模的初等因子是可以具体计算的，计算方法参考[4]第十二章第二节。

**引理 3** 对于一个主理想整环 $R$，$p_1,p_2$ 为不同素元，$e_1,e_2$ 为正整数，则从 $R/(p_1^{e_1})$ 到 $R/(p_2^{e_2})$ 的模同态只能恒映为右端零元。

证明:这是因为如果左端 1 映为右端非零元，两边同时乘 $p_1^{e_1}$ 得到矛盾。

由前面三个引理，通过计算消去直和中恒为零的部分，再将属于相同分支的想合并，可以把自同态模可以转化为其分支的自同态的直和:

$$\mathrm{Hom}(V,V) \cong \bigoplus_{i=1}^s \mathrm{Hom}(V_{p_i}, V_{p_i})$$

因此我们将刻画的对象进一步缩小为单个分支的自同态模，计算其看成 $F$ 上线性空间的维数，再将 $s$ 个结果相加即可得到 $C(A)$ 的维数。

## 4 证明核心

为了刻画单个分支的自同态，我们将命题进一步抽象，去刻画一个主理想整环上的有限生成扭模的某一个分支的自同态模。

事实上对于一个主理想整环 $R$ 上的有限生成扭模 $M$，其中一个分支可以写作:

$$M_p = R/(p^{e_1}) \oplus R/(p^{e_2}) \ldots R/(p^{e_n})$$

我们想构造一个矩阵，使得其能表示该分支的自同态模。

考虑 $R$ 上 $n$ 级矩阵构成的 $R-$模 $M_n(R)$ 的子模(该集合显然关于加法和数乘封闭)

$$R_p = \left\{ (r_{ij}) \in M_n(R) : p^{e_i - e_j} \mid r_{ij}, \text{当} i \ge j \right\}$$

我们想证明该集合中任意元素 $B$ 可以诱导出 $M_p$ 到 $M_p$ 的良定义的模同态。事实上，考虑映射:

$$\phi : \begin{pmatrix} \overline{h_1} \\ \vdots \\ \overline{h_n} \end{pmatrix} \to \pi(B \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix})$$

其中 $\pi$ 为 $R^n$ 到 $M_p$ 的自然投射。$\overline{h_i}$ 表示 $h_i \in R$ 在 $R/(p^{e_i})$ 投射后的像。

不难验证，如果 $h_i \equiv h_i' (\mathrm{mod}\, p^{e_i})$ $i=1,\ldots,n$，那么由 $B$ 的定义有:

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} h_j \equiv \sum_{j=1}^n r_{ij} h_j (\mathrm{mod}\, p^{e_i})$$

从而 $\phi$ 为良定义，且为 $M_p$ 到 $M_p$ 的良定义

的模同态。

由此我们只需要证明映射：

$$\varphi: B \to \phi: \begin{pmatrix} \overline{h_1} \\ \vdots \\ \overline{h_n} \end{pmatrix} \to \pi(B\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix})$$

为 $R_p$ 到 $\mathrm{Hom}_R(M_p, M_p)$ 的 $R-$模满同态，再计算出其同态核，即可构造出同构，从而给予自同态模一个矩阵形式的刻画。

$R-$模同态本身是平凡的，要证明其为满同态，注意到每个 $\mathrm{Hom}_R(M_p, M_p)$ 中元素都可以由：

$$(\overline{1}, \overline{0}, \ldots, \overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}, \overline{0}, \ldots, \overline{0}) \ldots, (\overline{0}, \ldots, \overline{0}, \overline{0}, \overline{1})$$

的取值唯一诱导，且取值并非随意选取，例如：

$\begin{pmatrix} \overline{1} \\ \vdots \\ \overline{0} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overline{r_{11}} \\ \vdots \\ \overline{r_{n1}} \end{pmatrix}$ 就必须保证右边作用 $p^{e_1}$ 后为 0，其余也同理作限定后得到的 $\phi$ 的形式必须形如我么所构造的 $R_p$ 中的矩阵的形式，从而为满同态。而同态核我们不难看出为：

$$\ker\varphi = \left\{(r_{ij}) \in R_p : p^{e_i} \mid r_{ij}\right\}$$

从而我们得到了 $R-$模同构：

$$R_p / \ker\varphi \cong \mathrm{Hom}(M_p, M_p)$$

我们回到对 $\mathrm{Hom}(V_{p_1}, V_{p_1})$ 的刻画，由前面的陈述，$\mathrm{Hom}(V_{p_1}, V_{p_1})$ 同构于一个以 $F[x]$ 上矩阵为元素的模商去一个 $F[x]-$ 子模 $R_{p_1}$ ，其中第 i 行商去 $(p_1^{e_i}(x))$，而且 $R_{p_1}$ 中元素 $(m_{ij}(x))_{n\times n} \in R_{p_1}$ 还要保证：

$$p_1^{e_i - e_j}(x) \mid m_{ij}(x), i \geq j$$

此时将 $R_{p_1}$ 看成 $F$ 上线性空间，则矩阵上每个位置都是 $F[x]$ 的子集商去一个理想形成的线性空间结构，从而我们可以计算出 $\mathrm{Hom}(V_{p_1}, V_{p_1})$ 的维数：

$$\dim\mathrm{Hom}(V_{p_1}, V_{p_1}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s(e_i - f(e_i - e_j))$$

其中：$\deg p_1(x) = s$，$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

从而得到 $C(A)$ 维数：

$$\dim C(A) = \dim\mathrm{Hom}(V_{p_1}, V_{p_1}) + \ldots + \dim\mathrm{Hom}(V_{p_s}, V_{p_s})$$

## 5 总结

通过本问题的解决我们可以看出，当解决一个问题的常规手段难以奏效时，去转换思路另辟蹊径，借助更高的观点往往产生令人意想不到的效果。同时本文所用技术手段在刻画自同构时，通过引入一个环结构也有不错的效果[2]，因此，借助更高的观点往往能研究更广泛的问题。

**参考文献**

[1] 丘维声.高等代数(第二版:下册)[M].第二版 北京:清华大学出版社，2019：332-404.

[2] Hillar, C. J., & Rhea, D. L. Automorphisms of finite abelian groups[J].The American Mathematical Monthly, 114(10), 2007: 917-923.

[3] Hungerford, T. W. Algebra (Vol. 73)[M]. Springer Science & Business Media, 2012:169-229

[4] Dummit, D. S., & Foote, R. M[M]. Abstract algebra (Vol. 3). Hoboken: Wiley,2004:172-190.