Functional Analysis
泛函分析

Wentao Zhu
Queens' College, University of Cambridge

December 2025

目录

1 Introduction 绪论

1.1 泛函分析的研究对象和方法

泛函分析是 20 世纪初从变分法、微分方程、积分方程、函数论以及量子物理等研究中发展起来的一门数学分支学科。泛函分析综合分析、代数、几何的观点和方法来研究无穷维空间上的函数、算子和极限理论，处理和解决数学研究中最关心的一些基本问题。泛函分析的特点是它不但把古典分析的基本概念和方法一般化了，而且还把这些概念和方法几何化了。

事实上，在初等数学中，这样的方法已经显示了巨大的威力。我们知道，随着笛卡尔坐标系的建立，解析几何的创立，人们把代数问题几何化，把几何问题代数化，为初等数学的许多问题开辟了全新的研究模式。

我们把解析几何解决问题的模式类比地推广到泛函分析的研究中：

1. 建立一个新的空间框架，空间中的元素可以包括：
   - 函数：$x \to f(x)$
   - 运算：$X \to Y$，例如：矩阵就是一种线性运算
2. 在新的空间框架下，研究解决分析、代数、几何中的问题，把分析中的问题结合几何、代数的方法加以处理。

在解析几何、线性代数中，研究的是有限维（n 维）空间中的运动和映射，在泛函分析中，主要研究的是从无穷维空间到无穷维空间的映射和运算，于是要特别关注：

(i) 无穷维空间的性质，及其与有限维空间的区别；

(ii) 无穷维空间的收敛性问题。

1.2 有限维空间的坐标分解和算子分解

下面我们通过一些熟悉的例子，研究和探讨如何类比地建立起这样的空间框架，把有限维空间的结论和方法自然地推广到无穷维空间，从分析、代数中的问题出发，引出泛函分析研究的思想方法。这些例子都是我们熟悉的，希望从中领悟到数学处理问题的基本思路，并进而把他们类比地推广到我们尚且未知的领域。

例题 1.2.1 (三维实空间中向量的坐标分解) 显然在 $\mathbb{R}^3$ 中可以建立正交坐标系：i, j, k，

$$i = (1,0,0), \quad j = (0,1,0), \quad k = (0,0,1).$$

可以定义内积：

$$a \cdot b = (a,b) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

其中 $a = (a_1,a_2,a_3), \quad b = (b_1,b_2,b_3), \quad a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos\theta, \quad \theta$ 是 a, b 两个向量的夹角。

空间中的任意向量 $a \in \mathbb{R}^3$，可以用坐标加以表示：$a \to (a_1,a_2,a_3)$。其中：$a_1 = (a,i)$ 是 a 在 i 上的投影，$a_2 = (a,j)$ 是 a 在 j 上的投影，$a_3 = (a,k)$ 是 a 在 k 上的投影，即：

$$a = a_1i + a_2j + a_3k = (a,i)i + (a,j)j + (a,k)k,$$

$$|a|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 = |(a,i)|^2 + |(a,j)|^2 + |(a,k)|^2.$$

对于 n 维 *Euclid* 空间 $\mathbb{R}^n$ 也有类似的结果，$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，

$$a=a_1e_1+\cdots+a_ne_n=(a,e_1)e_1+\cdots+(a,e_n)e_n.$$

其中：$a\in\mathbb{R}^n, e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的标准正交基，并且：

$$|a|^2=|a_1|^2+|a_2|^2+\cdots+|a_n|^2=|(a,e_1)|^2+|(a,e_2)|^2+\cdots+|(a,e_n)|^2.$$

注：将空间中一个向量按标准坐标作投影分解，可以把复杂的问题简单化。这样的方法同样可以类推到对线性变换（映射）的研究上。

例题 1.2.2 (线性变换 A 按“坐标分解”) 设 A 是从 $\mathbb{R}^4$ 到 $\mathbb{R}^4$ 的对称矩阵，

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix},\quad A:x\to Ax,\quad Ax=y,$$

其中 $x,y\in\mathbb{R}^4$，我们注意到：

(1) A 是对称的线性变换，

$$A(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Ax_1+\beta Ax_2;$$

(2) A 的特征值是实的；

(3) A 的属于不同特征值的特征向量相互正交；

(4) A 可以化为对角矩阵。对称矩阵一定正交相似于一个对角矩阵。具体做法为：

(i) 求解 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)^3(\lambda+3)=0,\lambda=-3,1$ 是特征值。其中 $\lambda=1$ 是三重特征值，$\lambda=-3$ 是单重特征值。

(ii) $\lambda=1$ 时，求出其基础解系如下：

$$\alpha_1=(1,1,0,0)^T,\quad \alpha_2=(1,0,1,0)^T,\quad \alpha_3=(-1,0,0,1)^T.$$

(iii) 该基础解系不正交，我们将其单位正交化：

$$\beta_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right)^T,\quad \beta_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0\right)^T,$$

$$\beta_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{3}{\sqrt{12}}\right)^T.$$

当 $\lambda=-3$ 时，可得 $\beta_4=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^T$.

$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$ 成为 $\mathbb{R}^4$ 中的一组标准正交基. 在这组标准正交基下，矩阵 A 成为对角矩阵，即令

$$T=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)_{4\times4},$$

则

$$T^{-1}AT = A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{即:} \quad A \sim A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

注: 在新的坐标系 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ 下, 线性变换 A 有最简单的标准形.

由于 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ 是 A 的特征向量, 有

$$A\beta_1 = \beta_1, \quad A\beta_2 = \beta_2, \quad A\beta_3 = \beta_3, \quad A\beta_4 = -3\beta_4.$$

$\forall x \in \mathbb{R}^4$, 在原来的正交基 e_1, e_2, e_3, e_4 下,

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4,$$

其中 $e_1 = (1, 0, 0, 0)^T, e_2 = (0, 1, 0, 0)^T, e_3 = (0, 0, 1, 0)^T, e_4 = (0, 0, 0, 1)^T$.

在空间构造一组新的正交基(它们是由对称矩阵 A 确定的) $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, 则

$$x = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + a_4\beta_4,$$

其中 $a_1 = (x, \beta_1), a_2 = (x, \beta_2), a_3 = (x, \beta_3), a_4 = (x, \beta_4)$ 是 x 在 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 上的投影, 由于 A 是线性的,

$$\begin{aligned} Ax &= A(a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + a_4\beta_4) \\ &= a_1A\beta_1 + a_2A\beta_2 + a_3A\beta_3 + a_4A\beta_4 \\ &= a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 - 3a_4\beta_4 \\ &= (a_1, a_2, a_3, -3a_4)^T = y. \end{aligned}$$

这说明, 矩阵 A 确定了一组正交基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, 对于任何的 $x \in \mathbb{R}^4$, 只要知道 x 在 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 上的投影 $(a_1, a_2, a_3, a_4)^T$, 则 A 作用的方式一目了然. 即:

$$Ax = (\lambda_1a_1, \lambda_2a_2, \lambda_3a_3, \lambda_4a_4)^T = (a_1, a_2, a_3, -3a_4)^T.$$

注: 在每一个特征子空间上, 进一步在每一个新的坐标系对应的一维子空间上, A 作用的形式是最简单的(放大、缩小特征值的倍数). 也就是说, A 的作用方式是由特征值、特征向量决定的.

令 P_1, P_2, P_3, P_4 是在 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 上的投影算子, 则

$$A = \lambda_1P_1 + \lambda_2P_2 + \lambda_3P_3 + \lambda_4P_4 = P_1 + P_2 + P_3 - 3P_4,$$

在这里 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = -3$。A 分解成 4 个投影算子的线性组合。

数学处理问题的原则是把复杂的问题简单化, 把复杂的问题转化为已知的简单的问题来处理, 即: 化归的方法。

1.3 无穷维空间的类比和联想

在泛函分析中，我们要研究的对象是函数、运算（微分、积分运算），它们作用的对象是函数。我们注意到，与 $\mathbb{R}^n$ 空间中线性变换 A 相同，微分、积分运算都是线性运算，不同的是 A 把一个 n 维向量变成 n（或 m）维向量，而微（积）分把一个函数映射成另一个函数。

我们希望通过“类比和联想”，把有限维空间处理问题的这种方式，把矩阵运算的分解式类比地推广到微积分运算上。但是我们注意到，函数不能用有限个数刻画，可能可以用无穷多个数刻画。

于是我们就要研究更一般的空间（无穷维空间），其中包括以下问题：

1. 无穷维空间的几何结构，特别是：

(1) 是否存在坐标系 $(e_1, \cdots, e_n, \cdots)$?

(2) 是否有正交性 $(e_i \perp e_j, i \neq j)$?

(3) 无穷维空间中的元素 x 能不能分解？是否也可有类似于有限维情况下的分解公式

$$x = (?) a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + \cdots = (a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots).$$

$$\|x\|^2 = (?) \sum_i |a_i|^2.$$

其中 $a_1 = (x, e_1)$, $a_2 = (x, e_2)$, $a_3 = (x, e_3)$, $a_4 = (x, e_4), \cdots$。

2. 线性算子的特征和结构。

(1) 线性算子的性质（有没有对称算子?）。

(2) 线性算子 T 能不能有类似有限维情形中根据特征值的分解?

$$A = P_1 + P_2 + P_3 - 3P_4; \quad (\text{有限维})$$

$$T = (?) \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 + \cdots. \quad (\text{无穷维})$$

其中 $P_1, P_2, P_3, P_4, \cdots$ 是在 $e_1, e_2, e_3, e_4, \cdots$ 上的投影算子。

注：由于在上述分解式中有无穷项相加，于是存在是不是收敛的问题，如果收敛，是在什么意义下的收敛？这将是我们在泛函分析中要十分关注的问题。

1.4 无穷维空间的坐标分解

为了考虑算子的分解，首先要研究函数的分解。事实上，函数可以用无穷多个数形成的数组来刻画。

例题 1.4.1 (Taylor 展开) 如果函数满足很好的性质，则在它的收敛半径内，有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots,$$

即：函数可以和一个可数无穷数列一一对应，

$$f(x) \sim (f(0), \frac{f'(0)}{1!}, \frac{f''(0)}{2!}, \cdots, \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \cdots),$$

这和一个向量在 n 维空间的展开完全类似，区别在于 $(x^0, x^1, x^2, \cdots, x^n, \cdots)$ 不是“正交系”。

下面我们熟知的 Fourier 展开就是一种在正交系中的展开。

例题 1.4.2 (Fourier 级数) $f(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上连续可微的函数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

其中

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx.$$

$$f(x)\sim(a_0,a_1,b_1,\cdots,a_n,b_n,\cdots),$$

f 可以和这个无穷数列一一对应。

类似于 $\mathbb{R}^n$，在函数空间 $L^2(-\pi,\pi)$ 上定义内积为

$$(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx,$$

其坐标系为

$$\begin{aligned}
e_0&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\\
e_1&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\\
e_2&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\\
e_3&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\\
e_4&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\\
&\cdots,\\
e_{2k-1}&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx,\\
e_{2k}&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx,\cdots.
\end{aligned}$$

由数学分析知：

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos mx\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos mx\,dx=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ 1, & n=m.\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin mx\,dx=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ 1, & n=m.\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin mx\,dx=0.$$

即

$$\int_{-\pi}^{\pi}e_i\,e_j\,dx=(e_i,e_j)=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j.\end{cases}$$

所以 $\{e_i\}$ 形成空间中的一组标准正交基：

$$(e_i,e_j)=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j.\end{cases}$$

并且我们有

$$\begin{aligned}
\frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}(f(x),1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f(x),\frac{1}{\sqrt{2\pi}}),\\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}(f(x),\cos kx) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(f(x),\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx),\\
b_k &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(f(x),\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx).
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k \sin kx\\
&= (f(x),\frac{1}{\sqrt{2\pi}})\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(f(x),\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx + (f(x),\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx\right]\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(f,e_k)e_k.
\end{aligned}$$

这意味着，对于函数 f，我们有：

$$f(x) \sim a_0e_0 + a_1e_1 + b_1e_2 + \cdots + a_ke_{2k-1} + b_ke_{2k} + \cdots,$$

其中

$$a_0 = (f,e_0),\ a_1 = (f,e_1),\ b_1 = (f,e_2),\ \cdots,\ a_k = (f,e_{2k-1}),\ b_k = (f,e_{2k}),\cdots,$$

$(a_0,a_1,b_1,\cdots,a_n,b_n,\cdots)$ 为函数 f 在这个坐标系下的坐标。即：

(1) 我们在函数空间建立了一个正交坐标系；

(2) 每一个函数和一组（可数的）数一一对应，

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty}(f,e_k)e_k,$$

其中系数 (f,e_k) 是 $f(x)$ 和 e_k 的内积，即 $f(x)$ 在 e_k 上的投影。

我们与有限维的情况加以对照：在 $\mathbb{R}^n$ 中，$\forall x\in\mathbb{R}^n$，有

$$x = \sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k,\quad |x|^2 = \sum_{k=1}^{n}|(x,e_k)|^2,\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

其中 $x_1 = (x,e_1),\quad x_2 = (x,e_2),\cdots,\quad x_n = (x,e_n)$。

从形式上看二者十分相似。二者之间的区别是什么？$\mathbb{R}^n$ 是有限维空间，而函数空间是无穷维的，无穷维求和是一个极限过程。另外，是不是可以类似地定义函数的“模”（以后称为函数的范数 $\|\cdot\|$）：

$$f(x) = (?)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(f,e_k)e_k,\quad \|f(x)\|^2 = (?)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}|(f,e_k)|^2.$$

即我们需要考虑函数项级数（Fourier 级数）是否收敛的问题。如收敛，在什么意义下收敛？上述等式是否成立？

根据数学分析，我们有：如果 $f(x)$ 逐段可微，则其 Fourier 级数收敛，且收敛到 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$（这里的收敛是逐点收敛），我们也要在无穷维空间研究收敛性（在什么意义下收敛？），即要引进极限等概念，

$$f(x) = (?)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(f,e_k)e_k.$$

另外，在 Fourier 级数中，有 Riemann 引理

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0,$$

即：$\lim_{k\to\infty}(f(x), e_k) = 0, \quad \forall f(x)$。以后我们看到这就是说 e_k 弱收敛到 0。

注：从上述几个例子中可以看到，要考虑和研究：(1) 空间的结构：距离，长度，内积；(2) 空间中点列的收敛性（强，弱，一致收敛等）。这是泛函分析研究的二重重点。

1.5 无穷维空间的线性算子与谱分解

我们再把无穷维空间的线性算子（微分运算）与有限维空间的线性算子相对照，进而研究线性算子的分解问题。

从前面的例题我们看到，正交系和矩阵 A 相对应，

$$A = (a_{ij})_{n\times n} \Rightarrow \text{特征值} \Rightarrow \text{特征向量}$$

$$\Rightarrow \text{由它的特征向量产生一个正交坐标系}$$

$$\Rightarrow A\text{在这个正交坐标系下成为对角矩阵。}$$

不同的对称矩阵有不同的特征向量，可以产生不同的正交系。问题：在 Fourier 级数展开中，正交坐标系 $(1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos kx, \sin kx, \cdots)$ 是否也可以是一些运算（算子）的特征函数？

例题 1.5.1 (Sturm-Liouville 问题)

$$\begin{cases} -y''(t) = \lambda y(t), \\ y(-\pi) = y(\pi), \qquad -\pi \le t \le \pi. \\ y'(-\pi) = y'(\pi), \end{cases} \tag{1}$$

这是一个二阶的常微分方程，加上两个边界条件（周期边界条件）的限制，微分是一种运算，边界条件给出了它的定义域。

注：把 $Ty = -y''$ 看成一种运算，边界条件对运算的定义域加以适当的限制，使之成为一个“对称”算子。这样 *Sturm-Liouville* 问题 $Ty = \lambda y$ 与 $Ax = \lambda x$ 形式上相似，我们猜想：*Sturm-Liouville* 算子 T 是否有可数多个特征值（函数空间是无穷维的），不同特征值对应的特征函数是否相互正交。

因为要满足边界条件，不是对所有的 λ，*Sturm-Liouville* 问题都有解。有解的那些 λ，称为 *Sturm-Liouville* 问题的特征值。求出通解。

(a) $\lambda > 0$ 时，$y(t) = A\cos\sqrt{\lambda}t + B\sin\sqrt{\lambda}t$，代入边界条件 $y(-\pi) = y(\pi)$，则有

$$A\cos\sqrt{\lambda}\pi - B\sin\sqrt{\lambda}\pi = A\cos\sqrt{\lambda}\pi + B\sin\sqrt{\lambda}\pi$$

$$\Rightarrow 2B\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0,$$

再代入边界条件 $y'(-\pi) = y'(\pi)$，有

$$-A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\pi = A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\pi$$

$$\Rightarrow A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0.$$

由于 $\lambda > 0$，A, B 不同时为零 $\Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$。所以 $\lambda_n = n^2$，即 $\lambda_n = 1, 4, 9, \cdots$ 时两个边界条件同时满足。

(b) 当 $\lambda = 0$ 时，$-y'' = 0$，求出 $y = 1$ 满足边界条件。*(c)* 当 $\lambda < 0$ 时，求出方程的解 $y = Ce^{\pm\sqrt{-\lambda}t}$ 不满足周期边界条件。

把 $Ty = -y''$ 看成一种运算，对应于 $Ty = \lambda y$ 的所有特征值为 $\{\lambda_n\} = \{0, 1^2, 2^2, \cdots, n^2, \cdots\}$，问题 *(0.23)* 的特征函数是：

$$\{e_n\} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos kx, \sin kx, \cdots\}.$$

注 *1*：这正是 *Fourier* 展开中的正交坐标系（乘以系数可使之单位化）。

注 *2*：把 $Ty = -y''$ 看成一种运算（事实上它是自共轭（对称）算子）。

把 $Ty_n = \lambda_n y_n$ 与 $Ay_n = \lambda_n y_n$ 相对比，

我们是否可以有分解：

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n; \quad (\text{有限维})$$

$$T = (\ ?)\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n + \cdots. \quad (\text{无穷维})$$

P_i 是其在特征元素上的投影算子 $\Rightarrow$ 无穷维空间上线性算子的一种分解（谱分解）（参阅 *[15] p.119*）。

注 *3*：我们希望在新的函数空间下，函数 f 可以分解为

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}(f, e_i)e_i.$$

因为 e_i 是 T 关于 λ 的特征函数，$Te_i = \lambda_i e_i$，所以 *Sturm-Liouville* 算子 T 作用在 f 上，是否可以有：

$$Tf = T\sum_{i=1}^{\infty}(f, e_i)e_i = (\ ?)\sum_{i=1}^{\infty}(f, e_i)Te_i = \sum_{i=1}^{\infty}(f, e_i)\lambda_i e_i.$$

注 *4*：上面的“*?*”处，有一个运算是否可以交换顺序的问题，这是数学研究需关注的重要问题。

在有限维空间，可以有不同的正交系，它们由不同的对称矩阵产生；在无穷维空间是否也可以有不同的正交系，它们由不同的算子产生？答案是肯定的。

上述数学分析、线性代数、微分方程的例子中，在处理问题上有许多相似之处，包括建立一种空间的框架，把元素（可以是函数或运算）进行坐标分解。我们将通过类比等方法把它们推广到（结果可能会有差异）泛函分析的研究中去。

应用几何、代数和分析的综合手段研究、解决问题，进而研究无限维线性空间上的泛函和算子理论，这正是我们下面要研究的泛函分析的主要内容。

1. **第二章到第四章**我们将首先引入**空间**、**极限**的概念，讨论它们的性质。

2. **第五章到第六章**我们将研究**线性算子的性质**。这是最核心也是最难的部分。

3. **第七章**是**线性算子的谱理论**。线性算子的谱分解从结构上展示了线性算子的基本运算特征，特别是紧的自共轭算子的谱分解，和有限维空间对称矩阵的分解十分相似。

2 Metric Space 距离空间

2.1 距离空间的基本概念

2.1.1 距离空间的定义

定义 2.1.1 (距离和距离空间) 设 X 是任一非空集合，若对于 X 中的任何两点 x, y，均有一个实数 $d(x,y)$ 与它对应，且满足：

(1) $d(x,y) \geq 0$（非负性）；

(2) $d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$（严格正）；

(3) $d(y,x) = d(x,y)$（对称性）；

(4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$（三角不等式）。

则称 $d(x,y)$ 为 X 中的一个距离 *(distance/metric)*。定义了距离 d 的集合称为距离空间 *(metric space)*，记为 (X,d)，有时简记为 X。

注 1：性质 (1)-(4) 称为距离公理，其中性质 (4) 来源于三角形中的两边之和大于第三边。

注 2：运用数学归纳法，可把三角不等式推广为

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + ... + d(x_{n-1}, x_n).$$

注 3：设 (X,d) 是一个距离空间，由三角不等式可证，对于任意的 $x, y, z \in X$，有

$$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z).$$

2.1.2 距离空间的例

例题 2.1.1 (l^2 范数距离（欧几里得距离）） 在 n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中，定义

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \eta_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n), y = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$。则 $(\mathbb{R}^n, d)$ 是一个距离空间。

例题 2.1.2 (l^1 范数距离与 l^∞ 范数距离) 在 $\mathbb{R}^n$ 中，可以分别定义

$$d_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|,$$

$$d_\infty(x,y) = \max\{|\xi_1 - \eta_1|, \cdots, |\xi_n - \eta_n|\},$$

其中 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n), y = (\eta_1, \cdots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$. 由实数的三角不等式，容易验证 $(\mathbb{R}^n, d_1), (\mathbb{R}^n, d_\infty)$ 都是距离空间。

例题 2.1.3 (一致度量（切比雪夫距离）） 考虑闭区间 $[a,b]$ 上全体连续函数形成的空间 $C[a,b]$，定义

$$d(x,y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|,$$

其中 $x(t), y(t)$ 是 $[a,b]$ 上的任意两个连续函数，则其是一个距离空间。

例题 2.1.4 (离散距离) 设 X 是一个非空集合，$x, y \in X$，定义

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

容易验证 d 是一个距离，从而 (X,d) 是一个距离空间，称它为离散的距离空间，记为 D。

2.1.3 距离空间中的收敛

定义 2.1.2 (距离空间中的收敛) 设 (X,d) 是一个距离空间。$\{x_n\} \subset X$, $x_0 \in X$, 如果当 $n \to \infty$ 时, $d(x_n, x_0) \to 0$, 则称 $\{x_n\}$ 以 x_0 为极限, 或者说 $\{x_n\}$ 收敛到 x_0, 记为

$$x_n \to x_0 \, (n \to \infty), \quad \text{或者} \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

注 1：x_0 必须要属于 X, 这一点一定要注意。

注 2：设 X 是距离空间, 其中 $d(x_n, x_0) \to 0 \, (n \to \infty)$ 是数列趋于零。

注 3：对于 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, 用 $\varepsilon - N$ 语言表述为:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{当} \, n \geq N \, \text{时, 有} \, d(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

定理 2.1.1 (收敛序列的基本性质) 设 $\{x_n\}$ 在 X 中收敛, 则以下结论成立：

(i) $\{x_n\}$ 的极限是唯一的；

(ii) 如果 x_0 是 $\{x_n\}$ 的极限, 那么 $\{x_n\}$ 的任何子列也收敛到 x_0.

定理 2.1.2 (距离函数的连续性) $d(x,y)$ 是关于 x, y 的二元连续函数, 即当 $x_n \to x$, $y_n \to y \, (n \to \infty)$ 时, $d(x_n, y_n) \to d(x,y) \, (n \to \infty)$.

2.2 开集和连续映射

2.2.1 开集、邻域

定义 2.2.1 (球) 设 (X,d) 是一个距离空间，$r>0$，集合

$$B(x_0,r)=\{x\in X \mid d(x,x_0)<r\}$$

称为以 x_0 为中心，r 为半径的开球 *(open ball)*；集合

$$\overline{B}(x_0,r)=\{x\in X \mid d(x,x_0)\le r\}$$

称为以 x_0 为中心，r 为半径的闭球 *(closed ball)*；集合

$$S(x_0,r)=\{x\in X \mid d(x,x_0)=r\}$$

称为以 x_0 为中心，r 为半径的球面 *(sphere)*。

例题 2.2.1 在 $C[0,T]$ 中，$x_0\in C[0,T]$，开球 $B(x_0,\frac{1}{2})$ 表示定义在 $[0,T]$ 区间上，满足条件

$$|x(t)-x_0(t)|<\frac{1}{2},\quad \forall t\in[0,T]$$

的全体连续函数。

定义 2.2.2 (有界集) X 是一个距离空间。$A\subset X$，若存在开球 $B(x_0,r)$，使得 $A\subset B(x_0,r)$，则称 A 是有界集 *(bounded set)*。

定义 2.2.3 (内点) 设 X 是一个距离空间，$G\subset X$，对于 $x_0\in G$，若存在开球 $B(x_0,r)$，使得 $B(x_0,r)\subset G$，则称 x_0 为 G 的内点 *(interior point)*。

定义 2.2.4 (开集与邻域) 设 X 是一个距离空间，$G\subset X$，若 G 的每一个点都是内点，则称 G 是一个开集 *(open set)*。

对于 $x\in X$，包含 x 的任何一个开集称为 x 的一个邻域 *(neighbourhood)*。

例题 2.2.2 $B(x_0,r)$ 是一个开集。

定理 2.2.1 (开集的基本性质) 设 X 是距离空间，X 中的开集具有以下性质：

(1) 全空间与空集是开集；

(2) 任意多个开集的并集是开集；

(3) 任意有限多个开集的交集是开集。

注 1：以上定理可以不用距离的概念，仅使用内点、邻域、开集这些概念加以证明。

注 2：如果一个集合 X 中有一个子集族 J 满足上述三个性质，则我们把它称为开集族，或者说 J 是 X 中的一个拓扑，(X,J) 成为一个拓扑空间。即全体开集决定了空间的拓扑性质。

2.2.2 连续映射

定义 2.2.5 (距离空间之间的连续映射) 令 (X,d), (X_1,d_1) 是距离空间，$T:X\to X_1$ 是一个映射，$x_0\in X$，如果对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $d(x,x_0)<\delta$ 时有

$$d_1(T(x),T(x_0))<\varepsilon,$$

则称 T 在 x_0 连续。若 T 在 X 中的每一点都连续, 则称 T 在 X 上连续。特别地, 如果

$$d(x,y) = d_1(T(x),T(y)), \quad \forall x,y \in X.$$

则称 T 是等距映射。

注 1：等距映射是连续映射。等距映射是单射，但不一定是满射。

注 2：若 X, X_1 上存在一个等距满射的映射 $T : X \to X_1$ $(T(X) = X_1)$，则称 X_1 和 X 等距。等距的两个空间可以在等距的意义下认为是同一空间。

定理 2.2.2 (连续映射的拓扑刻画) 设 T 是从距离空间 (X,d) 到距离空间 (X_1,d_1) 的映射, T 是连续的当且仅当 (X_1,d_1) 中任何开集的原像仍然是 (X,d) 中的开集。

定理 2.2.3 (连续映射的序列刻画) 设 T 是从距离空间 (X,d) 到距离空间 (X_1,d_1) 的映射，T 在 x_0 点是连续的当且仅当对于每个满足条件 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ 的点列都有

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

2.3 闭集，可分性和列紧性

2.3.1 距离空间中的闭集

定义 2.3.1 (闭集) 设 X 是一个距离空间，集合 $A \subset X$ 称为是闭集 *(closed set)*，若它的补集 $A^c = X \setminus A$ 是开集。

定理 2.3.1 设 X 是一个距离空间，则

$$B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$$

和

$$S(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) = r\}$$

是闭集。

定理 2.3.2 (闭集的基本性质) 设 (X, d) 是一个距离空间，则：

(1) 全空间与空集是闭集；

(2) 任意多个闭集的交是闭集；

(3) 有限多个闭集的并是闭集。

2.3.2 闭集的结构

定义 2.3.2 (接触点) 设 X 是一个距离空间，$A \subset X, x \in X$。如果 $\forall \varepsilon > 0$，球 $B(x, \varepsilon)$ 中都包含 A 中的点，即

$$B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing \quad (\forall \varepsilon > 0),$$

则称 x 为 A 的接触点 *(adherent point)*。

注：A 中的点一定是 A 的接触点，A 的接触点可能属于 A 也可能不属于 A。

定义 2.3.3 (聚点) 设 X 是一个距离空间，$A \subset X, x \in X$。如果 $\forall \varepsilon > 0$，球 $B(x, \varepsilon)$ 中都包含 A 中不同于 x 的点，即

$$B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing \quad (\forall \varepsilon > 0),$$

则称 x 为 A 的聚点 *(accumulation point)*。

注：聚点一定是接触点，反过来不一定。

例题 2.3.1 a 点和 b 点是开区间 (a, b) 的聚点，但是不属于 (a, b)。闭区间 $[a, b]$ 的聚点全部在 $[a, b]$ 中。

例题 2.3.2 设 $A = [0, 1] \cup \{2\}, 2$ 是 A 的接触点，但不是 A 的聚点。

定义 2.3.4 (闭包) 设 X 是一个距离空间，$A \subset X$，则 A 的接触点的全体称为 A 的闭包 *(closure)*，记为 $\overline{A}$。

注：因为 A 中的点一定是 A 的接触点，所以 $A \subset \overline{A}$。

定理 2.3.3 (闭包的刻画) 设 X 是一个距离空间，$A \subset X$，则 A 是闭集当且仅当 $A = \overline{A}$。

定理 2.3.4 (闭集的序列刻画) 设 X 是一个距离空间，$A \subset X$，则 A 是闭集当且仅当 A 中收敛点列 $\{x_n\} \subset A$ 的极限属于 A。

注：这意味着在闭集里极限运算是封闭的。

定义 2.3.5 (点到集合的距离) 设 X 是一个距离空间，$A \subset X, x \in X$。称

$$d(x, A) = \inf\{d(x, \omega) \mid \omega \in A\}$$

为点 x 到集合 A 的距离。

注：由定理 1.3.10、1.3.11 可以证明

$$\overline{A} = \{x \mid d(x, A) = 0\},$$

且 $\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集。

2.3.3 可分的距离空间

定义 2.3.6 (稠密集 (Dense set)) 设 A, B 是距离空间 X 中的点集，如果 $\overline{B} \supset A$，则称 B 在 A 中稠密。

用 $\varepsilon-\delta$ 语言描述：$\forall x \in A$，因为 $A \subset \overline{B}$，所以 $x \in \overline{B}, \forall \varepsilon > 0, \exists B(x, \varepsilon) \cap B \neq \varnothing$，即存在 $y \in B$，使得 $d(x, y) < \varepsilon$。也就是说 A 中的每一点都可以用 B 中的点来逼近。

注：定义并没有要求 $B \subset A$。

例题 2.3.3 $A = [0, 1], B$ 是 $[0, 1]$ 中全体有理数。$\overline{B} = [0, 1], \overline{B} \supset A$。所以 B 在 A 中稠密，这里 $B \subset A$ 且 $B \neq A$。

例题 2.3.4 如果 A 是 $[0, 1]$ 中全体无理数，B 是 $[0, 1]$ 中的全体有理数，我们有 $\overline{B} \supset A$，即 B 在 A 中稠密，但是 $B \cap A = \varnothing$。

定义 2.3.7 (可分距离空间) 设 X 是距离空间，如果 X 中存在一个可数稠密子集，则称 X 是可分的 *(separable)*。对于子集 $A \subset X$，如果 X 中存在可数子集 B，使得 B 在 A 中稠密，则称 A 是可分的。

由定义有：

命题 2.3.1 距离空间 (X, d) 是可分的当且仅当存在 X 中的一个具有下列性质的可数集 $\{x_n\}$: $\forall x \in X$ 和 $\forall \varepsilon > 0$，至少存在一个 $x_k \in \{x_n\}$，使得 $d(x_k, x) < \varepsilon$。

注：命题说明可分距离空间中有一个可数集，使得任意一点都可用这个可数集的点来逼近。

例题 2.3.5 $\mathbb{R}^n$ 是可分的。因为 $\mathbb{R}^n$ 中的有理点（各个坐标都是有理数）是可数集，且在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密。

例题 2.3.6 $C[a, b]$ 是可分的。

例题 2.3.7 (序列空间 l^∞) 令 $l^\infty = \{x = (\xi_j) \mid |\xi_j| \leq c_x\}$, 其中 c_x 与 j 无关, 即 l^∞ 是全体有界的数列。在 l^∞ 中定义

$$d(x, y) = \sup_{j \in \mathbb{N}_+} \{|\xi_j - \eta_j|\},$$

其中 $x = (\xi_j)$，$y = (\eta_j) \in l^\infty$ 并且 $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, \cdots\}$。容易验证 l^∞ 是一个距离空间。下面我们证明 l^∞ 是不可分的。

注：l^∞ 是全体有界的实数列, 从集合的角度来看, l^∞ 是 s 的一个子集合。但作为距离空间 l^∞ 不可分, 而 s 可分。其原因在于两个距离空间中距离定义的方式不同。

例题 2.3.8 空间 s 可分。s 是全体实数列组成的集合，其上距离为

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}.$$

2.3.4 列紧的距离空间

定义 2.3.8 (列紧与自列紧) 设 A 是距离空间 X 中的一个子集，如果 A 中的每一个无穷点列都有一个收敛的子列，则称 A 是列紧的 *(sequentially compact)* 集合。闭的列紧集称为是自列紧集 *(sequentially compact and closed / compact)*。

距离空间 X 称为是列紧的，如果 X 中每一个无穷点列都有一个收敛的子列。

注 1：列紧集的子集是列紧的。

注 2：根据定义，一个集合 A 是自列紧的，要求收敛子列的极限必须在 A 中。例如 $(0,1]$ 在 $\mathbb{R}$ 中是列紧的，但不是自列紧的。

定理 2.3.5 设 X 是一个距离空间，$A\subset X$ 是列紧集，则 A 是有界集。

注 1：自列紧集是有界闭集。

注 2：在一般的距离空间中，有界的闭集不一定是列紧的。

定理 2.3.6 (列紧空间上连续函数的性质) 设 f 是定义在列紧的距离空间 (X,d) 上的实值连续函数，则 f 是有界的，即：

$$M=\sup\{f(x)\mid x\in X\},$$

$$m=\inf\{f(x)\mid x\in X\}$$

是有限的。进一步，存在点 $x_{\max}$ 和点 $x_{\min}$，使得

$$f(x_{\max})=M,\quad f(x_{\min})=m.$$

例题 2.3.9 $\mathbb{R}^n$ 中有界闭集是自列紧集。例如在 $\mathbb{R}$ 中，闭区间 $[a,b]$ 是自列紧集。

定理 2.3.7 (Arzelà 定理) $C[a,b]$ 中的子集 A 是列紧的当且仅当 A 中的函数是一致有界和等度连续的。

一致有界：即存在 $K>0$，使得对于每一点 $t\in[a,b]$ 及一切 $x\in A$,

$$|x(t)|\le K.$$

等度连续：对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|t_1-t_2|<\delta$ 时，$\forall x\in A$ 有

$$|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon.$$

例题 2.3.10 $A=\{x(t)\in C^1[a,b]\mid |x(t)|\le M,|x'(t)|\le M_1\}$，则 A 是 $C[a,b]$ 中的列紧集。($C^1[a,b]$ 是在 $[a,b]$ 中全体连续可微的函数)。

2.4 完备的距离空间

2.4.1 Cauchy 列

定义 2.4.1 (Cauchy 列) 设 (X,d) 是一个距离空间，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (X,d)$。若对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，当 $m,n > N$ 时，有

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

则称 $\{x_n\}$ 是一个 *Cauchy* 列。

命题 2.4.1 设 $\{x_n\}$ 是距离空间 (X,d) 中的 *Cauchy* 列，则集合 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ 是有界的。

定理 2.4.1 收敛的点列一定是 *Cauchy* 列。

2.4.2 完备的距离空间

定义 2.4.2 (完备距离空间) 若距离空间 (X,d) 中的任意 *Cauchy* 列在 X 中都收敛，则称距离空间 X 是完备的 *(complete)*。

注：完备性是十分重要的，有了完备性，极限运算（微积分）才能很好地进行。在一个完备的距离空间，要判断一个点列是否收敛，仅仅要判断它是否是 Cauchy 列。

例题 2.4.1 设 $\mathbb{Q}$ 为全体有理数组成的集合，赋以通常的距离成为一个距离空间，但是它不完备。例如：以 π 的前 n 位数字组成的数列 $\{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, \cdots\}$ 是一个 *Cauchy* 列，但是它在 $\mathbb{Q}$ 中不收敛，因为 π 不是有理数。

注：由 Cauchy 列的定义，我们看到：一个点列是否为 Cauchy 列是由这个点列自身的结构决定的，但它是否收敛，却取决于点列以外的信息，即空间是否完备。

命题 2.4.2 完备空间的任何一个闭子空间也是完备的。

定理 2.4.2 列紧的空间一定是完备的。

命题 2.4.3 设 X 是一个距离空间，$\{x_n\}$ 是 X 中的 *Cauchy* 列。如果 $\{x_n\}$ 有一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛到 x_0，则 $\{x_n\}$ 也收敛到 $x_0 (n \to \infty)$。

2.4.3 完备与不完备距离空间的例

例题 2.4.2 距离空间 $\mathbb{R}^n$ 是完备的。

例题 2.4.3 $C[a,b]$ 是完备的。

例题 2.4.4 l^{∞} 是完备的。

例题 2.4.5 设 X 是全体在 $[0,1]$ 上定义的连续函数，在 X 上定义距离

$$d(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt,$$

容易证明 X 是一个距离空间，但不完备 *(incomplete)*。

2.4.4 距离空间的完备化

定理 2.4.3 (完备化 (completion) 定理) 任何距离空间 (X,d) 都存在一个完备的距离空间 $(\widetilde{X},\tilde{d})$，$(\widetilde{X},\tilde{d})$ 和 (X,d) 的一个稠子空间等距，且在等距的意义下，这样的空间 $(\widetilde{X},\tilde{d})$ 是唯一的。称 $(\widetilde{X},\tilde{d})$ 为 (X,d) 的完备化空间。

注 1：从形式上看，完备化的距离空间 $\widetilde{X}$ 是一个全新的空间，但应注意完备化的距离空间 $\widetilde{X}$ 包含了一个稠子空间 X_0，与原来的空间 (X,d) 等距同构。也就是说 X 嵌入到 $\widetilde{X}$，作为它的一个稠子集。

注 2：距离空间完备化后，空间中的 Cauchy 列都收敛。从另一个角度说，空间 X 被适度地扩大为 $\widetilde{X}$，包含了所有 Cauchy 列的极限，原来的"空隙"已经被全部填满，极限运算在空间内封闭。这点是十分重要的。以后我们会看到，这使得一些在原空间 X 中无解的问题（例如微分方程），在新的扩大了的空间 $\widetilde{X}$ 中就可以有"较弱"意义下的解。这也是完备化的意义所在。

注 3：距离空间完备化的证明过程，可结合有理数"完备成"实数这一具体的背景，将上述证明的每一步与有理数完备化相应的步骤对照理解。例如：$\pi,\sqrt{2}$ 对应的 Cauchy 数列的"代表元"可以是

$$\{3,3.1,3.14,3.141,3.1415\cdots\},$$

$$\{1,1.4,1.41,1.414,1.4142\cdots\},$$

$(\widetilde{X},\tilde{d})$ 就是由这样的一些 Cauchy 列组成的（$\widetilde{X}$ 实际上就是全体实数）。

$$\{3,3,3,\cdots\},\{3.1,3.1,3.1,\cdots\},\{3.14,3.14,3.14,\cdots\},\cdots$$

$$\{1,1,1,\cdots\},\{1.4,1.4,1.4,\cdots\},\{1.41,1.41,1.41,\cdots\},\cdots$$

是 $(\widetilde{X}_0,\tilde{d})$ 中与其相关的常值 Cauchy 列（$\widetilde{X}_0$ 实际上就是全体有理数）。

3 Normed Space 赋范空间

赋以 Euclid 距离的平面可以作为赋范空间的典型例子。我们可以从三个方面来了解平面上的数学结构:

(1) 集合结构:平面上的点集是有序的实数组,$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$。

(2) 代数结构:在平面上定义了加法和数乘,对任意的 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

对于任何实数 α,$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2)$。空间对加法、数乘封闭。

(3) 拓扑结构:对于 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$d(x, y) = (|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2)^{\frac{1}{2}},$$

由此引出了"接近"、极限、开集等概念。

我们将试图把这些性质"类比地"推广到我们研究的数学系统中。上一章我们在集合上赋以距离,定义了开集、闭集,给出了空间的拓扑结构。这一章我们在线性空间(有时称为向量空间)上,引进元素的长度的概念(随之引出距离的概念),给出元素的"度量",形成我们称之为的赋范空间。

3.1 赋范空间的基本概念

3.1.1 赋范空间和 Banach 空间的定义

定义 3.1.1 (赋范空间) 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间,函数 $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ 满足:

(i) $\forall x \in X, \|x\| \geq 0$ *(非负性)*;

(ii) $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$ *(正定性)*;

(iii) $\forall x \in X, \alpha \in \mathbb{K}, \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ *(正齐次)*;

(iv) $\forall x, y \in X, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(三角不等式)*。

则称 $\|\cdot\|$ 是 X 上的一个范数。定义了范数的线性空间称为赋范空间,记为 $(X, \|\cdot\|)$,或简记为 X。

有了范数,可以自然地定义距离:

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

由范数定义,易验证 $d(x, y)$ 是一个距离。事实上,对于 $\forall x, y, z \in X$,有

(1) $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$;

(2) $d(x, y) = \|x - y\| = 0$ 当且仅当 $x = y$;

(3) $d(y, x) = \|y - x\| = |-1| \|x - y\| = \|x - y\| = d(x, y)$;

(4) $d(x, y) = \|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$。

注 1:把 (X, d) 称为由范数诱导的距离空间。可见赋范空间一定是距离空间。今后如无特殊说明,赋范空间的距离都是指由范数诱导的距离。

注 2:赋范空间有了距离就可以定义开集、闭集、收敛(极限)以及完备性等概念。事实上,

$$d(x_n, x) \to 0 \qquad \|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

定义 3.1.2 (按范数收敛) 设 $\{x_n\}$ 是赋范空间 X 中的点列,$x \in X$。如果

$$\|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

则称 $\{x_n\}$ 按范数收敛到 x，记为 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$。

定义 3.1.3 (Banach 空间) 完备的赋范空间称为 *Banach* 空间。

注：由于赋范空间就是距离空间，Banach 空间是完备的距离空间，因此具有完备距离空间的所有性质。

3.1.2 范数的连续性

定理 3.1.1 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间，则

(1) 对于任何 $x, y \in X$，有

$$\|y\| - \|x\| \le \|y - x\|.$$

(2) 范数 $\|\cdot\|$ 是一个连续函数，即

$$x_n \to x \ (n \to \infty) \implies \|x_n\| \to \|x\| \ (n \to \infty).$$

(3) 范数 $\|\cdot\|$ 对线性运算是连续的，即

$$x_n \to x,\ y_n \to y \ (n \to \infty) \implies x_n + y_n \to x + y \ (n \to \infty),$$

$$\alpha_n \to \alpha,\ x_n \to x \ (n \to \infty) \implies \alpha_n x_n \to \alpha x \ (n \to \infty).$$

3.1.3 范数与距离的关系

定理 3.1.2 设 X 是赋范空间，d 是由范数诱导的距离。则对于任何的 $x, y, z \in X$，$\alpha \in \mathbb{K}$，都有

$$d(x, y) = d(x + z, y + z); \tag{3.1.1}$$

$$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y). \tag{3.1.2}$$

注 1：上述 (3.1.1) 式和 (3.1.2) 式是范数诱导出的距离需要满足的必要条件。

注 2：(3.1.1) 式反映了范数诱导出的距离在“刚体运动”以后距离不变。(3.1.2) 式反映了这种距离的某种“齐次”性质。不是所有的距离都是由范数产生的。

3.2 完备的赋范空间

3.2.1 连续函数空间上定义的不同范数

例题 3.2.1 $C[a,b]$ 表示闭区间 $[a,b]$ 上连续函数的全体，对加法、数乘封闭。定义

$$\|x\| = \max_{a\leq t\leq b} |x(t)|.$$

容易证明 $C[a,b]$ 是一个赋范空间。在由范数诱导的距离

$$d(x,y) = \max_{a\leq t\leq b} |x(t)-y(t)|. \tag{2.2.1}$$

下，它是完备的 *(Banach* 空间*)*，可分的 *(*参见例 *1.1.4*、例 *1.3.19*、例 *1.4.11)*。类似地可以考虑 $C(\Omega)$，其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$，是列紧的闭集。即：$C(\Omega)$ 为 Ω 上定义的全体连续函数，其上的范数定义为

$$\|x\| = \max_{t\in\Omega} |x(t)|.$$

可以证明 $C(\Omega)$ 是完备的 *(Banach* 空间*)*，可分的赋范空间。

例题 3.2.2 (积分范数空间) 设 X 表示 $[a,b]$ 上的全体连续函数，在 X 上定义

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|dt. \tag{2.2.2}$$

利用积分的线性性质和绝对值的三角不等式，可以证明 $\|\cdot\|_1$ 是一个范数，即 $(X,\|\cdot\|_1)$ 是一赋范空间。但在由此范数诱导的距离

$$d(x,y) = \|x-y\|_1 = \int_a^b |x(t)-y(t)|dt \tag{2.2.3}$$

下不是完备的。因而赋范空间 $(X,\|\cdot\|_1)$ 是不完备的。同样可以证明在 $[a,b]$ 上的全体连续函数组成的线性空间中，赋以范数

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2.4}$$

形成的赋范空间也是不完备的。

注：上述例子说明，同一个集合上赋以不同的范数，生成空间的完备性可能不一样。

3.2.2 赋范空间的完备化

定理 3.2.1 赋范空间可以完备化。

3.2.3 L^p 空间

定义 3.2.1 (L^p 空间) 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 区间上的可测函数，若 $|f|^p(1\leq p<\infty)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则称 f 是 p 次幂可积的。全体在 $[a,b]$ 区间上 p 次幂可积的函数，记为 $L^p[a,b]$，简称为 L^p 空间。即

$$L^p[a,b] = \left\{x(t) \mid \int_a^b |x(t)|^p dt < \infty\right\}. \tag{2.2.8}$$

更一般地，可考虑 $L^p(E)(1\leq p<\infty)$，其中 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是一个可测集。在 $L^p[a,b]$ 中，引入范数：

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.2.9}$$

为验证 $\|\cdot\|$ 是 $L^p[a,b]$ 上的范数，需验证以下 4 条：
(i) $\|x\| \geq 0$；
(ii) $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x(t) = 0$ (a.e)；
(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$，即

$$\left(\int_a^b |\alpha x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(iv) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$，即

$$\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(i)、(ii)、(iii) 显然，为证明 (iv)，我们需要下面的 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式。

引理 3.2.1 *p, q 是正数，且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (p, q 称为共轭数)，则对于 $\forall a, b$，有*

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}.$$

定理 3.2.2 *$L^p(E)(p \geq 1)$ 是 Banach 空间。*

注：由上述定理知，$L^p[a,b]$ 是 Banach 空间。

定理 3.2.3 *$L^p[a,b](1 \leq p < \infty)$ 是可分的。*

注：在 $[a,b]$ 上连续的函数属于 $L^p[a,b]$，但连续函数的全体在 L^p 的范数下不完备，但它们是 $L^p[a,b]$ 中的稠子集。由于完备化空间的唯一性，也就是说 $L^p[a,b]$ 空间是 $[a,b]$ 上全体连续函数在 L^p 范数下的完备化空间。

3.2.4 L^∞ 空间

定义 3.2.2 (本性有界函数) *设 E 是可测集，$x(t)$ 是 E 上可测函数。如果存在 E 的可测子集 E_0，满足 $mE_0 = 0$ 且 $x(t)$ 在 $E \backslash E_0$ 上有界，则称 $x(t)$ 为本性有界。*

例题 3.2.3 ($L^\infty(E)$ 空间) *$L^\infty(E)$ 表示 E 上全体本性有界的可测函数，其上定义*

$$\|x\| = \inf_{\substack{mE_0=0 \\ E_0 \subseteq E}} \sup_{E \backslash E_0} |x(t)|. \tag{2.2.18}$$

注 1：上述下确界是可以达到的，即存在 E_0，使得

$$\|x\| = \sup_{E \backslash E_0} |x(t)|.$$

事实上，由下确界的定义，对 $\frac{1}{n}$，存在 $E_n \subset E$，使得 $mE_n = 0$ 且

$$\sup_{E \backslash E_n} |x(t)| < \|x\| + \frac{1}{n}.$$

令 $E_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$，则 $E_0 \subset E, mE_0 = 0$，且对于 $\forall n$，

$$\|x\| \leq \sup_{E \backslash E_0} |x(t)| \leq \sup_{E \backslash E_n} |x(t)| < \|x\| + \frac{1}{n}.$$

因此 $\|x\| = \sup_{E\setminus E_0} |x(t)|$，即 $x(t)$ 在 $E\setminus E_0$ 上有界（几乎处处有界）。

注 2：称 $\|x\|$ 是 $x(t)$ 的本性上界，记为

$$\|x\| = \operatorname*{ess\,sup}_{E} |x(t)|. \tag{2.2.19}$$

注 3：容易验证 $\|x\|$ 是 X 上的范数。

注 4：$L^\infty(E)$ 上的收敛性。$x_n \xrightarrow{d} x(n\to\infty)$，即 $\|x_n - x\| \to 0(n\to\infty)$，等价于 $\{x_n(t)\}$ 除去一零测集外，在 E 上一致收敛到 $x(t)$。

定理 3.2.4 $L^\infty(E)$ 是不可分的 *Banach* 空间。

3.2.5 l^p 空间

$l^p(1\le p<\infty)$ 表示全体 p 次方可和的数列，即

$$l^p = \{x = \{\xi_k\} \mid \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty\}, \tag{2.2.22}$$

可类似定义 $l^p(1\le p<\infty)$, l^∞ 赋范空间。

例题 3.2.4 ($l^p(1\le p<\infty)$) 在线性空间 $l^p(1\le p<\infty)$ 上赋以范数

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.2.25}$$

则 l^p 是赋范空间。

例题 3.2.5 (l^∞) 设 l^∞ 是全体有界的数列，即

$$l^\infty = \{x = \{\xi_k\} \mid \{\xi_k\}\text{是有界的数列}\}, \tag{2.2.26}$$

在其上赋以范数

$$\|x\|_\infty = \sup_k |\xi_k|, \tag{2.2.27}$$

则 l^∞ 是赋范空间。

注：$l^p(1\le p<\infty)$ 是一个可分的 Banach 空间。l^∞ 是不可分的 Banach 空间。

更一般地, 我们可以在一般测度空间 $(X,\mathcal{B},M)$ 中考虑 $L^p(X,\mathcal{B},M)$ 空间, 其中 $\mathcal{B}$ 是一切可测集构成的 σ 代数 (Borel 集), M 是广义测度, 完全类似地, 可以研究它们的完备、可分等性质。特别的, 当 $p=2$ 时, 在 $L^2[a,b]$ 空间上定义

$$\|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2.28}$$

则 $\|x\|_2$ 是一个范数。由这个范数诱导出的距离是

$$d_2(x,y) = \left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2.29}$$

就是第一章 (1.1.12) 式定义的距离。$L^2[a,b]$ 是一个完备、可分的赋范 (距离) 空间。

相似地, 在离散的 l^2 空间, 其范数为

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2.30}$$

l^2 是一个完备、可分的赋范 (距离) 空间。以后我们会看到, $L^2[a,b]$ 和 l^2 都是十分重要的内积空间。

3.3 赋范空间的几何结构

3.3.1 凸集

定义 3.3.1 (凸集) 设 X 是线性空间，$A \subset X$。如果对于任意的 $x, y \in A$，任意的 $\alpha \in [0,1]$，都有

$$\alpha x + (1-\alpha) y \in A,$$

则称 A 是 X 中的凸集。

注 1：任意多个凸集的交集是凸的。事实上，如果对于每个 $\gamma \in \Gamma$，A_γ 是凸集，则对于任意 $x, y \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ 及 $\alpha \in [0,1]$，有

$$\alpha x + (1-\alpha) y \in A_\gamma, \quad \forall \gamma \in \Gamma,$$

即 $\alpha x + (1-\alpha) y \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$。

注 2：$A \subset X$，所有包含 A 的凸集的交集是凸集。这个凸集称为 A 的凸包，记为 $C_0(A)$。$C_0(A)$ 是包含 A 的最小凸集。

定理 3.3.1 (单位开球的凸性) 设 $B(0,1) = \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$ 是赋范空间 X 中开的单位球，则 $B(0,1)$ 是凸的。

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间，X_1 是 X 的一个线性子空间，则 $(X_1, \|\cdot\|)$ 也是一个赋范空间，称之为 $(X, \|\cdot\|)$ 的子空间。显然子空间是凸集。

3.3.2 子空间

定理 3.3.2 设 X 是一个赋范空间，X_1 是 X 的一个子空间。如果 X_1 是开集，则 $X_1 = X$。

注：定理说明，赋范空间 X 的真子空间不能是开集。在 $\mathbb{R}^n$ 空间，所有的子空间都是闭的. 但是在无穷维空间，子空间就可能不是闭的。

定理 3.3.3 (子空间与闭性、完备性的关系) 设 X 是赋范空间，$X_1 \subset X$ 是子空间，则 *(1)* 若子空间 X_1 是完备的，则 X_1 是闭的*; (2)* 若 X 是 *Banach* 空间，X_1 是 X 的闭子空间，则 X_1 一定是 *Banach* 空间.

例题 3.3.1 (收敛数列空间 c) 设 c 表示收敛数列的全体，定义范数

$$\|x\| = \sup_k |\xi_k|,$$

则 c 是一个赋范空间。在通常加法和数乘的意义下，c 是 *Banach* 空间 l^∞ 的子空间.

命题 3.3.1 c 是 *Banach* 空间 l^∞ 的闭子空间。

3.3.3 Riesz 引理

引理 3.3.1 (Riesz 引理) 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个赋范空间，X_0 是 X 真的闭子空间，则 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $x_0 \in X$，使得 $\|x_0\| = 1$，且 $\forall x \in X_0$，

$$\|x - x_0\| > 1 - \varepsilon. \tag{2.3.4}$$

注 1：在一般情况下，定理的结论“大于 $1-\varepsilon$”不能加强为“大于等于 1”。对于在 Hilbert 空间的情况，定理的结论“大于 $1-\varepsilon$”可以加强为“大于等于 1”。

注 2：本定理中 X_0 是闭的是很重要的。若不是闭的，结论可能不成立。

3.4 有限维的赋范空间

3.4.1 等价的范数

定义 3.4.1 (等价范数) 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 X 上的两个范数，如果存在 $a>0, b>0$，使得

$$a\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq b\|\cdot\|_1 \tag{2.4.5}$$

则称范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是等价的。

命题 3.4.1 在两个等价范数产生的赋范空间中，点列 $\{x_n\}$ 的收敛性一样。

推论 3.4.1 设 X 是一个线性空间，$\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 X 上定义的两个等价的范数，且 $d_1(x,y)=\|x-y\|_1$ 与 $d_2(x,y)=\|x-y\|_2$ 是相应的距离。则

(1) $\{x_n\}$ 在 (X,d_1) 中收敛到 x 当且仅当 $\{x_n\}$ 在 (X,d_2) 中收敛到 x；

(2) $\{x_n\}$ 是 (X,d_1) 中的 *Cauchy* 列当且仅当 $\{x_n\}$ 是 (X,d_2) 中的 *Cauchy* 列；

(3) (X,d_1) 是完备的当且仅当 (X,d_2) 是完备的。

注：$(X,\|\cdot\|_1),(X,\|\cdot\|_2)$ 代数同构，拓扑同胚（收敛性一样，闭集、开集一样）。

3.4.2 有限维空间

定理 3.4.1 (有限维赋范空间的结构) 任意实的 n 维赋范空间必与 $\mathbb{R}^n$ 代数同构、拓扑同胚。

注 1：定理说明实的有限维空间中定义的范数与 $\mathbb{R}^n$ 的范数等价，收敛性与 $\mathbb{R}^n$ 相同，即按坐标收敛。

注 2：对于复的有限维空间可以证明类似的结果。有限维的赋范空间都是 Banach 空间。

3.4.3 有限维赋范空间的几何特征

定理 3.4.2 (有限维空间的刻画) 赋范空间是有限维的当且仅当 X 中的任何有界集是列紧的。

推论 3.4.2 设 X 是一个无穷维的赋范空间，那么单位球 $B(0,1)$ 和单位球面 $S(0,1)$ 都不是列紧的。

注 1：在无穷维空间，单位球（面）不是列紧的。(存在 $\{x_n\}, \|x_i-x_j\|>\frac{1}{2}$)。如果单位球（面）列紧，由推论 2.4.8，则 X 是有限维的。

注 2：列紧性是距离空间十分重要的性质。在有限维空间，任何有界闭集都是自列紧的，但是在无穷维赋范空间，有界集就可能不是列紧集合，这是有限维空间和无穷维空间的重要区别。

4 Inner Product Space and Hilbert Space 内积空间与希尔伯特空间

4.1 内积空间的基本性质

4.1.1 内积空间的定义

定义 4.1.1 (内积空间) H 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，如果对于任意 $x, y \in H$，有 $\mathbb{K}$ 中的一个数 (x, y) 与它们对应，使得对任意的 $x, y \in H$，$a \in \mathbb{K}$，满足：

(1) $(x, x) \geq 0$，$(x, x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$；

(2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$；

(3) $(ax, y) = a(x, y)$；

(4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$。

则称 $(\cdot, \cdot)$ 是 H 上的一个内积，定义了内积的空间 H 称为内积空间。

注 1：(x, y) 是一个二元函数，对于每一个固定的 $y \in H$，(x, y) 是 H 上的一个线性函数（线性泛函）。

注 2：(i) $(x, y + z) = \overline{(y + z, x)} = \overline{(y, x)} + \overline{(z, x)} = (x, y) + (x, z)$；(ii) $(x, ay) = \overline{(ay, x)} = a(y, x) = \overline{a}(x, y)$，即内积对于后一个变量是共轭线性的。

注 3: 对于实数域上的线性空间, 可以定义实的内积空间, 这时内积满足的第 (2) 条改为 $(x, y) = (y, x)$。

例题 4.1.1 对 $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$。定义

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

容易验证它是一个内积。因此 $\mathbb{R}^n$ 是一个实的内积空间。下面我们可以看到，由这个内积可定义范数

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (x \in \mathbb{R}^n). \tag{3.1.2}$$

例题 4.1.2 在复的 n 维向量空间 $\mathbb{C}^n$ 中可以类似地定义内积

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}, \tag{3.1.3}$$

其中 $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{C}^n$。在此内积下 $\mathbb{C}^n$ 成为一个内积空间。

4.1.2 由内积生成的范数

定理 4.1.1 (Schwarz 不等式) 设 H 是内积空间，$\forall x, y \in H$，有

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y). \tag{3.1.4}$$

定理 4.1.2 在内积空间 H 上，对于任意的 $x \in H$，定义

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \tag{3.1.6}$$

则 $\|\cdot\|$ 是 H 上的一个范数。

定理 4.1.3 每个内积空间 H 按范数 $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ 成为一个赋范空间。

注 1：内积空间中定义了范数，由范数又可以定义距离，这样就有了收敛性等距离空间中所具有的性质。

注 2：结合定理 3.1.5, Schwarz 不等式 (3.1.4) 可以写成以下形式：

$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \tag{3.1.7}$$

定理 4.1.4 (内积的连续性) 设 H 是内积空间，则内积 (x,y) 是关于 x,y 的连续函数。即当 $x_n \to x, y_n \to y$ 时 $(x_n, y_n) \to (x,y)$ $(n \to \infty)$。

注：定理 3.1.7 说明极限运算和内积可以交换顺序。

定理 4.1.5 设集合 M 在内积空间 H 中稠密，若 $x_0 \in H$，且有

$$(x, x_0) = 0, \quad \forall x \in M,$$

则 $x_0 = 0$。

4.1.3 内积和相应范数的关系

定理 4.1.6 (平行四边形法则与极化恒定式) 设 H 是内积空间，对于任意的 $x,y \in H$，有

(i) 平行四边形法则

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{3.1.8}$$

(ii) 极化恒定式

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right). \tag{3.1.9}$$

注 1：平行四边形法则的几何解释为：平行四边形对角线的平方和等于 4 条边的平方和，

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

这是内积空间的特征性质。在有了正交性的概念以后，如果 $x \perp y$，平行四边形法则成为

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2 \quad (\text{勾股定理}).$$

注 2：由内积可定义一个范数 $\Rightarrow$ 内积空间必定是一个赋范空间。再由范数诱导出的距离 $\Rightarrow$ 它又可以成为一个距离空间。

问题：反之，是否每个线性赋范空间 X 都能赋以内积 (x,y)，使原来的范数总可以表示成为 $\sqrt{(x,x)}$?

答案：一般并非如此，而是有条件的。X 能赋以内积的充要条件是：X 中的范数满足平行四边形法则。

定理 4.1.7 设 X 是赋范空间，如果范数满足平行四边形法则，则可以在 X 中定义一个内积，使得由这个内积产生的范数正好是 X 中原来的范数。

注：定理 3.1.9 和 3.1.10 说明，范数是由内积产生的充要条件是：平行四边形法则成立。如果这个范数可以由内积产生，这个赋范空间即可以看作内积空间。但不是所有的范数都可以由内积产生。

例题 4.1.3 在 $C[0,1]$ 中，令

$$x(t)=1, \quad y(t)=t,$$

则 $x+y=1+t, \quad x-y=1-t$，于是

$$\|x\|=1, \quad \|y\|=1, \quad \|x+y\|=2, \quad \|x-y\|=1,$$

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=5,$$

但是 $\|x\|^2+\|y\|^2=2$。根据平行四边形法则，$C[0,1]$ *(*同样 $C[a,b]$*)* 中的范数不是由内积产生的。即在空间 $C[0,1]$ 上不能定义一个内积，使它产生的范数为 $C[0,1]$ 中原来的范数（按最大值定义的范数）。

4.1.4 完备的内积空间

定义 4.1.2 完备的内积空间称为 *Hilbert* 空间。

定理 4.1.8 设 H 是一个 *Hilbert* 空间，$Y \subset H$ 是一个线性子空间，那么 Y 是一个 *Hilbert* 空间当且仅当 Y 是闭的。

例题 4.1.4 $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ 是 *Hilbert* 空间。

例题 4.1.5 l^2 是 *Hilbert* 空间。

例题 4.1.6 $L^2[a,b]$ 是 *Hilbert* 空间。

由距离空间完备化定理可知任何一个内积空间都可以完备化 X，成为一个 Hilbert 空间 H，X 等距同构于 H 中的一个稠子集。

4.2 正交与正交分解

4.2.1 正交的定义

定义 4.2.1 (正交) 设 X 是内积空间, $x, y \in X$, 如果 $(x,y)=0$, 则称 x 与 y 正交, 记为 $x \perp y$.

定理 4.2.1 (勾股定理) 设 X 是内积空间, $x, y, z \in X$, $x = y+z$, 且 $y \perp z$, 则

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2. \tag{3.2.1}$$

定义 4.2.2 (正交于集合) 设 X 是内积空间, $M \subset X$, $x \in X$, 如果对于任意的 $y \in M$, 有 $(x,y)=0$, 则称 x 正交于 M, 记为 $x \perp M$.

定义 4.2.3 (集合间的正交) 设 X 是内积空间, M 和 N 是 X 中的两个子集, 如果对于任意的 $x \in M$, $y \in N$, 有 $(x,y)=0$, 则称 M 正交于 N, 记为 $M \perp N$.

4.2.2 正交补集

定义 4.2.4 (正交补) 设 X 是内积空间, M 是 X 的子集, X 中所有与 M 正交的元素组成的集合称为 M 的正交补, 记为 $M^\perp$,

$$M^\perp = \{y \in X \mid (x,y)=0,\ \forall x \in M\}. \tag{3.2.2}$$

定理 4.2.2 (正交补的基本性质) 设 X 是内积空间, M 是 X 的子集, 那么

1. $0 \in M^\perp$;

2. 如果 $0 \in M$, 那么 $M \cap M^\perp = \{0\}$, 否则 $M \cap M^\perp = \emptyset$;

3. $\{0\}^\perp = X$, $X^\perp = \{0\}$;

4. 如果 $M \supset B(a,r)$, 其中 $B(a,r)$ 是以 $a \in X$ 为中心, 以 r 为半径的开球, 那么 $M^\perp = \{0\}$, 进一步地, 如果 M 是一个非空的开集, 则 $M^\perp = \{0\}$;

5. 如果 $N \subset M$, 那么 $M^\perp \subset N^\perp$;

6. $M \subset (M^\perp)^\perp$.

定理 4.2.3 (正交补是闭子空间) 设 X 是内积空间, M 是 X 的任意子集, 则 $M^\perp$ 是 X 中的闭子空间。

注: M 是 X 的子集, M 不一定是子空间, 但是 $M^\perp$ 是 X 的闭子空间。下面我们对正交补集作进一步的研究。

定理 4.2.4 (正交补的几何刻画) 设 M 是内积空间 X 的一个线性子空间。则 $x \in M^\perp$ 当且仅当对于任意的 $y \in M$, 有 $\|x-y\| \geq \|x\|$。

4.2.3 最佳逼近

定义 4.2.5 (严格凸赋范空间) 一个赋范空间 X 称为是严格凸的, 如果对于任意的 $x, y \in X$, $x \neq y$, 并且 $\|x\| = \|y\| = 1$, 都有

$$\|\alpha x + \beta y\| < 1 \quad (\forall \alpha, \beta > 0,\ \alpha + \beta = 1).$$

定理 4.2.5 内积空间是严格凸的赋范空间。

定理 4.2.6 (最佳逼近定理) 设 M 是 *Hilbert* 空间 H 中的非空闭凸集, 则对于任意的 $x \in H$, 存在唯一的最佳逼近点 $x_0 \in M$, 使得

$$\|x - x_0\| = d(x, M) = \inf\{\|x-y\| \mid y \in M\}. \tag{3.2.3}$$

4.2.4 Hilbert 空间的正交分解

定理 4.2.7 (正交分解定理) 设 H 是 *Hilbert* 空间，M 是 H 中的闭子空间，则对于任意的 $x \in H$，存在唯一的 $x_0 \in M$ 及 $y \in M^{\perp}$（图 *3.2*），使得

$$x = x_0 + y. \tag{3.2.6}$$

并且

$$\|x\|^2 = \|x_0\|^2 + \|y\|^2. \tag{3.2.7}$$

定理 4.2.8 设 X_0 是 *Hilbert* 空间 H 中的一个闭的线性子空间，则 $X_0^{\perp\perp} = (X_0^{\perp})^{\perp} = X_0$.

4.3 正交系、正交投影和 Fourier 级数

4.3.1 内积空间中的正交系

定义 4.3.1 (正交系与标准正交系) 设 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是内积空间 X 中由非零元素组成的集合。如果当 $\alpha\neq\beta$ 时，$(x_\alpha,x_\beta)=0$，则称 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 X 中的一个正交系。若 $\|x_\alpha\|=1$，$\forall\alpha\in I$，称 $\{x_\alpha\}$ 是一个标准正交系。

在内积空间中，正交系是线性无关的。

定理 4.3.1 设 $\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$ 是内积空间 X 中的正交系，则 $\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$ 是线性无关的。

如果 X 是 k 维的，且 $\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$ 是标准正交系，则任何的 $x\in X$ 都可以表示为

$$x=\sum_{n=1}^{k}(x,e_n)e_n.$$

命题 4.3.1 设 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是内积空间 X 中的一个正交系，则 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是线性无关的。

4.3.2 最佳逼近和正交投影

定理 4.3.2 设 $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ 是内积空间 X 中的标准正交系，$x\in X, a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个数，当且仅当 $a_k=(x,e_k)(k=1,2,\cdots,n)$ 时

$$\|x-\sum_{k=1}^{n}a_ke_k\|$$

取得最小值。

4.3.3 正交投影和 Fourier 级数

例题 4.3.1 (三角函数系) 在线性空间 $L^2[-\pi,\pi]$ 中定义内积

$$(x,y)=\int_{-\pi}^{\pi}x(t)y(t)dt.$$

则三角函数系

$$\{e_n\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t,\cdots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kt,\cdots\right\}$$

是 $L^2[-\pi,\pi]$ 中的标准正交系（直接计算可证）后面可以看到，事实上它们是一组标准正交基（见定理 *3.4.9*）。

定义 4.3.2 (Fourier 级数与系数) 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是内积空间 X 中的标准正交系。对于 $x\in X$, 我们称

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$$

为 x 关于 $\{e_n\}$ 的 *Fourier* 级数，(x,e_n) 称为 x 关于 $\{e_n\}$ 的 *Fourier* 系数。

注：Fourier 级数给出了内积空间中 x 在标准正交系下的“坐标分解”

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n,$$

其中 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是任意给定的一组标准正交系，并不一定是例 3.3.6 中的三角函数系。Fourier 系数 (x,e_n) 是 x 在 $\{e_n\}$ 上的正交投影。

一般来说内积空间的正交系 $\{x_\alpha\}(\alpha\in I)$ 可能是不可数集。下面仅讨论由可数多个元素组成的正交系，即可数正交列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$。

4.3.4 Bessel 不等式和 Fourier 级数的收敛性

定理 4.3.3 (Bessel 不等式) 设 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是内积空间 X 中的标准正交列，则对于任意的 $x \in X$，有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \leq \|x\|^2.$$

注：与正交列相对应的 Fourier 系数是平方可和的，其和小于或等于 $\|x\|^2$。

命题 4.3.2 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是内积空间 X 中的标准正交列，则对于任意的 $x \in X$，有 $(x, e_n) \to 0$ $(n \to \infty)$。

注：以后将看到，若 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是内积空间 X 中的标准正交列，对于任意的 $x \in X$，$(x, e_n) \to 0$ $(n \to \infty)$，这意味着 $\{e_n\}$ 弱收敛到 0 ($e_n \xrightarrow{w} 0$) (参阅 §5.5.3 弱收敛和例 5.5.11)。

推论 4.3.1 (Riemann-Lebesgue 引理) 设 $x(t) \in L^2[-\pi, \pi]$，那么

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin ntdt = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos ntdt = 0.$$

注：当 $x(t)$ 是连续函数时，这就是数学分析中 Fourier 级数部分的 Riemann 引理 (参阅例 5.5.11)。

推论 4.3.2 设 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是内积空间 X 中的标准正交系，则对于每个 $x \in X$，关于这个标准正交系的 *Fourier* 系数 $\{(x, e_\alpha)|\alpha \in I\}$ 最多有可数个不为零。

定理 4.3.4 设 H 是一个 *Hilbert* 空间，$\{e_n\}$ 是 H 中的标准正交列，$\{\alpha_n\}$ 是一个数列，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ 收敛的充要条件为

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty.$$

并且在上述条件下，有

$$\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2.$$

推论 4.3.3 在 *Hilbert* 空间 H 中，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$$

收敛的充要条件为数列 $\{\alpha_n\} \in l^2$。

定理 4.3.5 设 H 是一个 *Hilbert* 空间，$\{e_n\}$ 是 H 中的标准正交列，则对于任意的 $x \in H$，x 的 *Fourier* 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$$

都收敛。

注 1：定理 3.3.15 回答了在 §3.3.3 最后面提出的关于 Fourier 级数是否收敛的问题。

注 2：这里 Fourier 级数的收敛是在 Hilbert 空间中按范数收敛，不是数学分析中的逐点收敛。

4.4 正交基和正交列的完备性

4.4.1 正交基

定义 4.4.1 (正交基) 设 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 X 中的正交系，如果它张成的子空间的闭包是全空间 X，则将 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 称为 X 的正交基。

例题 4.4.1 在空间 $\mathbb{R}^n$ 中

$$e_k = (0,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0),\quad k=1,2,\cdots,n.$$

是 $\mathbb{R}^n$ 中的标准正交基。

例题 4.4.2 在 l^2 中

$$e_n = (0,0,\cdots,0,\frac{1}{n},0,\cdots),\quad n=1,2,\cdots$$

是 l^2 的标准正交基。

4.4.2 正交列的完备性

定义 4.4.2 (Parseval 等式与完备性) 设 X 是内积空间，$\{e_n\}$ 是 X 中的标准正交列，$x\in X$。若

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(x,e_k)|^2=\|x\|^2,$$

则称 x 关于 $\{e_n\}$ 的 *Parseval* 等式成立。

如果对于任意的 $x\in H$，*Parseval* 等式成立，则称 $\{e_n\}$ 是完备的。

注 1：在三维欧氏空间中，Parseval 等式就是勾股定理。

注 2：下面证明在 Hilbert 空间中，x 关于 $\{e_n\}$ 的 Fourier 级数收敛到 x 当且仅当 x 关于 $\{e_n\}$ 的 Parseval 等式成立。

定理 4.4.1 设 $\{e_n\}$ 是 *Hilbert* 空间 H 中的一个标准正交列。则下列叙述是等价的：

(1) $\{e_n\}^\perp=\{0\}$ *(*即 $\{e_n\}$ 是完全的*)*;

(2) 对所有的 $x\in H$，$x=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k$ *(*即 x 的 *Fourier* 级数收敛到 x*)*;

(3) $span\{e_n\}=H$ *(*即 $\{e_n\}$ 是 H 中的一个标准正交基*)*;

(4) 对所有的 $x\in H$，有 $\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|(x,e_k)|^2$ *(*即 $\{e_n\}$ 是完备的，亦即对于任意的 $x\in H$，*Parseval* 等式成立*)*。

定理 4.4.2 设 $\{e_n\}$ 是 *Hilbert* 空间的标准正交基，则 x 关于 $\{e_n\}$ 的 *Fourier* 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$ 收敛到 x.

4.4.3 标准正交基的例

在无穷维空间，确定一组元素是否正交较为容易，但是要确定一组正交系是否是空间的正交基相对较为困难。

定理 4.4.3 三角函数系

$$\{e_n\}=\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t,\cdots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kt,\cdots\},$$

是 $L^2[-\pi,\pi]$ 中的一组标准正交基。

4.5 可分的 Hilbert 空间

4.5.1 线性无关组的正交化算法

定理 4.5.1 设 $\{z_n\}$ 是内积空间 H 中的可数子集, 则在 H 中存在标准正交列 $\{e_n\}$, 使得 $\{e_n\}$ 与 $\{z_n\}$ 张成的子空间相同。

4.5.2 可分的 Hilbert 空间与 l^2 等距同构

定理 4.5.2 设 H 是一个 *Hilbert* 空间, 则 H 是可分的当且仅当 H 中有至多可数的标准正交基 S。

如果 S 中元素的个数 $N < \infty$, 则 H 等距同构于 $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K}$ 是线性空间的数域); 若 $N = \infty$, 则 H 等距同构于 l^2。

注 1：定理表明：可分的内积空间具有至多可数的标准正交基。

注 2：定理说明，任何一个无穷维可分的 Hilbert 空间都可以表示为“坐标形式”的 l^2 空间，即可分的内积空间中的每个元素都与一组由可数无穷有序数组组成的坐标一一对应。

5 Bounded Linear Operator 有界线性算子

函数、运算是数学研究的一些重要对象。前面几章关注的空间基本上是函数空间（或数列组成的空间）。运用类比、联想、归纳等数学研究方法，把有限维空间的代数结构和几何特征延伸、拓展到无穷维空间，建立了距离空间、赋范空间、内积空间、Hilbert 空间的概念。

许多数学问题，例如：中学解析几何中的平移和旋转是一些线性变换（运算）。高等数学研究的微分、不定积分也都是线性运算，它们与 $\mathbb{R}^n$ 空间中线性变换有一些相同的运算性质。线性方程组、微分方程、积分方程都可以看作是特定空间中的线性运算（或者称为线性变换或线性映射）。下面将把它们统称为线性算子。

线性算子是泛函分析中最重要的基本概念之一。将全体有界线性算子看作一个线性空间，并赋予范数，成为赋范空间，线性算子看作赋范空间中的元素。线性算子空间是线性泛函分析研究的主要对象。在线性算子空间的框架下，研究线性运算的性质，解决分析、代数、几何中相关的问题。在赋范空间中讨论有界线性算子的本质特征，可以得到一些有关线性算子很深刻的结论：一致有界原则；开映射定理、逆算子定理；闭图像定理。

5.1 有界线性算子与有界线性泛函

5.1.1 有界线性算子与有界线性泛函的定义

定义 5.1.1 (线性算子与线性泛函) 设 X, X_1 是赋范空间，$\mathcal{D}(T) \subset X$ 是一个线性子空间，T 是从 $\mathcal{D}(T)$ 到 X_1 的映射，满足

$$T(x+y) = Tx + Ty,$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx,$$

其中 $x, y \in \mathcal{D}(T), \alpha \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ 是数域)，则称 T 是从 X 到 X_1 的线性算子，$\mathcal{D}(T)$ 称为 T 的定义域。

注 1：一般地，$\mathcal{D}(T) \subsetneq X$。如果 $\mathcal{D}(T) = X$，则称 T 是从 X 上到 X_1 的线性算子。

注 2：若 $X_1 = \mathbb{K}$ (数域)，$T : \mathcal{D}(T) \to \mathbb{K}$。这样的线性算子称为是线性泛函。即线性泛函 T (或者 f) 是从赋范空间 X 到数域 $\mathbb{K}$ 的线性算子。

当 $\mathbb{K}$ 是实数域，称为是实线性泛函。当 $\mathbb{K}$ 是复数域，称为是复线性泛函。

下面给出有界线性算子、有界线性泛函的定义。

定义 5.1.2 (有界线性算子与有界线性泛函) 设 T 是从 X 到 X_1 的线性算子，若存在常数 $M > 0$，使得

$$\|Tx\|_1 \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

则称 T 为有界线性算子。

如果一个线性泛函 f 是有界的，即如果存在常数 $M > 0$，使得

$$|f(x)| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

则称 f 是有界线性泛函。

注 1：线性算子（泛函）的有界和函数的有界意义并不相同。例如：在实数空间 $\mathbb{R}$ 中，$y = Tx = x$ 看作普通的实函数是无界函数。但是把 $Tx = x$ 看作是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的线性算子，则 T 是有界线性算子（(4.1.1) 式中的 $M = 1$）。

注 2：由于内积可以产生范数，内积空间也是赋范空间，因此，有关赋范空间上有界线性算子、有界线性泛函的讨论在内积空间依然成立。

命题 5.1.1 有界线性算子把有界集映成有界集。

定义 5.1.3 (连续线性算子) 设 X, X_1 是赋范空间，T 是从 X 到 X_1 的线性算子。若 $x_n \to x_0$ 时，$Tx_n \to Tx_0$，则称 T 在 x_0 点连续。

由于线性算子运算是线性的，关于有界线性算子的连续性有下述结论：

定理 5.1.1 设 X, X_1 是赋范空间，T 是从 X 到 X_1 的线性算子。如果 T 在 x_0 点连续，则 T 在 X 上连续。

注 1：对于线性算子来说，一点连续意味着点点连续。

注 2：线性算子 T 连续意味着：

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(\lim_{n\to\infty} x_n),$$

即，极限运算和 T 可以交换顺序。

定理 5.1.2 设 X, X_1 是赋范空间, T 是从 X 到 X_1 的线性算子, 则 T 是连续的当且仅当 T 是有界的。

5.1.2 有界线性算子组成的赋范空间

下面我们把有界线性算子看作一个元素，构成一个新的线性空间，即由全体有界线性算子构成的空间，从赋范空间的角度研究线性算子的性质。

定义 5.1.4 (有界线性算子空间) 设 X, X_1 是赋范空间，$\mathcal{B}(X, X_1)$ 表示从 X 到 X_1 的全体有界线性算子。如果 $X = X_1$，我们把 $\mathcal{B}(X, X_1)$ 简记为 $\mathcal{B}(X)$。

在 $\mathcal{B}(X, X_1)$ 中可以自然地定义线性运算，即对于任给的 $A, B \in \mathcal{B}(X, X_1)$ 及 $\alpha \in \mathbb{K}$，定义：

$$(A+B)(x) = Ax + Bx, \quad (\alpha A)(x) = \alpha Ax.$$

又由于

$$\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le (M_1 + M_2)\|x\|,$$

$$\|\alpha Ax\| = |\alpha|\|Ax\| \le |\alpha| M_1 \|x\|.$$

所以 $\mathcal{B}(X, X_1)$ 对加法、数乘运算封闭，成为线性空间。

下面我们把有界线性算子看成空间中的元素，定义有界线性算子的范数。

定义 5.1.5 (有界线性算子的范数) 设 T 是从赋范空间 X 到 X_1 的有界线性算子，即存在 $M > 0$，使得

$$\|Tx\| \le M\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

令

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|},$$

$\|T\|$ 称为有界线性算子 T 的范数。

注：由 (4.1.4), (4.1.5) 式可得

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \frac{M\|x\|}{\|x\|} = M.$$

这说明 $\|T\|$ 的定义是有意义的(是有限非负实数)。由于对 $\forall x \in X, \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T\|$, 有 $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$. 即 $\|T\|$ 是使 $\|Tx\| \leq M\|x\|$ 成立的最小的 M, 于是

$$\|T\| = \inf\{M | \|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in X\}.$$

下面我们验证 $\|T\|$ 是一个范数，即满足定义 2.1.1 的 4 个条件。

命题 5.1.2 由 *(4.1.5)* 式定义的 $\|T\|$ 是线性算子空间 $\mathcal{B}(X, X_1)$ 上的范数。

注：$(\mathcal{B}(X, X_1), \|\cdot\|)$ 是一个赋范空间, $\mathcal{B}(X, X_1)$ 中的元素是有界线性算子。

定理 5.1.3 设 T 是从赋范空间 X 到 X_1 的有界线性算子, 则

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|.$$

5.1.3 有界线性算子的例

例题 5.1.1 考虑 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$，对于任意的 $x \in \mathbb{R}^n$，$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，令

$$Ax = (a_{ij}) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = y,$$

其中 $\eta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j$。则 A 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性算子。

$$\|Ax\| = (\sum_{i=1}^n |\eta_i|^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{i=1}^n |\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j|^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{j=1}^n |\xi_j|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}} \|x\|.$$

因此 A 是有界线性算子。

一般来说,

$$\|A\| \neq (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

。进一步地，定义在有限维空间上的线性算子都是有界线性算子。

定理 5.1.4 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是有限维的赋范空间，$(Y, \|\cdot\|)$ 是任意一个赋范空间，T 是从 X 到 Y 的线性算子，则 T 是有界线性算子。

例题 5.1.2 设 T 是从 $C[0, 1]$ 到实数集 $\mathbb{R}$ 的一个映射

$$T(x) = x(0), \quad \forall x \in C[0, 1],$$

则 T 是一个有界线性泛函。

事实上

$$|T(x)| = |x(0)| \le \sup\{|x(t)||t \in [0,1]\} = \|x\|.$$

所以 $\|T\| \le 1$. 另一方面，对于

$$x_0(t) \equiv 1 \in C[0,1],$$

$T(x_0) = 1 = \|x\|$，于是，我们有 $\|T\| = 1$.

例题 5.1.3 设 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. 对于任意的 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$，定义

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

则 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界线性泛函。证明 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性泛函。

$$f(\alpha x + \beta y) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\alpha x_i + \beta y_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} a_i y_i = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

f 的有界性可由 *Hölder* 不等式证出,

$$|f(x)| = |\sum_{i=1}^{n} a_i x_i| \le \sum_{i=1}^{n} |a_i x_i| \le (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} = \|a\| \|x\|.$$

即 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界线性泛函。

例题 5.1.4 设 $y_0(t)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，对于任意的 $x \in C[a,b]$，定义

$$f(x) = \int_a^b x(t) y_0(t) dt,$$

则 f 是 $C[a,b]$ 上的线性泛函。事实上,

$$|f(x)| \le \int_a^b |x(t) y_0(t)| dt$$

$$\le \int_a^b |y_0(t)| \max_{a \le t \le b} |x(t)| dt = (\int_a^b |y_0(t)| dt) ||x||,$$

即 f 是 $C[a,b]$ 上的有界线性泛函。

注 1：可以证明 $||f|| = \int_a^b |y_0(t)| dt$。

注 2：特别地，若 $y_0(t) \equiv 1$，定积分 $f(x) = \int_a^b x(t) dt$ 是 $C[a,b]$ 上的有界线性泛函。

不是所有的线性算子都是有界的，例如十分重要的微分算子就是一类无界算子。

例题 5.1.5 (微分算子) 设 $X = C[0,1]$,

$$T : \mathcal{D}(T) \subset C[0,1] \to C[0,1],$$

$$Tx(t) = x'(t),$$

其中 $\mathcal{D}(T) = \{x(t) \in C[0,1] | x(t)$ 的导数连续$\}$。

可以证明：T 是无界的线性算子。事实上，对于 $\sin nt \in C[0,1]$，我们有

$$T(\sin nt) = n \cos nt, \quad ||x_n|| = 1, \quad (n \ge 2)$$

但是 $||Tx_n|| = n \to \infty \quad (n \to \infty)$。即 T 是无界的（注意 T 不是定义在全空间上的）。

注：微分算子是一类十分重要的无界线性算子，微分算子虽然是无界的，但它是闭的线性算子（闭算子的定义见 §4.5，闭的线性算子也有“类似连续”的很好的性质）。

5.1.4 有界线性算子范数的计算

例题 5.1.6 设 T 是如下从 $L[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的线性算子，定义为

$$(Tx)(t) = \int_a^t x(\tau)d\tau,$$

则 T 是有界的，且 $\|T\| = 1$。

证明：对于任意的 $x \in L[a,b]$,

$$\|x\| = \int_a^b |x(\tau)|d\tau,$$

我们有

$$\|Tx\| = \max_{a\le t\le b}\left|\int_a^t x(\tau)d\tau\right| \le \max_{a\le t\le b}\int_a^t |x(\tau)|d\tau = \int_a^b |x(\tau)|d\tau = \|x\|,$$

即 $\|T\| \le 1$。

另一方面，令

$$x_0(t) = \frac{1}{b-a} \in L[a,b], \quad \|x_0\| = 1,$$

因此

$$\|T\| \ge \|Tx_0\| = \max_{a\le t\le b}\left|\int_a^t x_0(\tau)d\tau\right| = \max_{a\le t\le b}\int_a^t \frac{1}{b-a}d\tau = 1.$$

于是 $\|T\| = 1$。

5.2 有界线性算子空间的收敛与完备性

5.2.1 有界线性算子空间中的收敛性

定义 5.2.1 (按范数收敛) 设 $A_n, A \in \mathcal{B}(X, X_1)$，如果 $\|A_n - A\| \to 0$ $(n \to \infty)$，则称有界线性算子列 $\{A_n\}$ 按范数收敛到有界线性算子 A。

定理 5.2.1 空间 $\mathcal{B}(X, X_1)$ 中线性算子列按范数收敛等价于线性算子列在 X 中的单位球面 S 上一致收敛。

定义 5.2.2 (强收敛) 设 $T_n, T \in \mathcal{B}(X, X_1)$ $(n = 1, 2, \cdots)$。如果 $\forall x \in X, T_n x \to Tx$ $(n \to \infty)$，即

$$\|T_n x - Tx\| \to 0 \ (n \to \infty),$$

则称 $\{T_n\}$ 逐点收敛到 T，或称 $\{T_n\}$ 强收敛到 T。记为 $T_n \xrightarrow{\text{强}} T$。

注：$\{T_n\}$ 按范数收敛到 T（一致收敛）$\Rightarrow T_n \xrightarrow{\text{强}} T$。事实上

$$\|T_n - T\| < \varepsilon \ (n > N) \Rightarrow \|(T_n - T)x\| \leq \|T_n - T\|\|x\| < \varepsilon\|x\| \ (n > N), \ \forall x \in X,$$

但是强收敛不一定是一致收敛。

5.2.2 有界线性算子空间的完备性

定理 5.2.2 设 X 是赋范空间，X_1 是 *Banach* 空间，则 $\mathcal{B}(X, X_1)$ 是 *Banach* 空间。

推论 5.2.1 设 X 是一个赋范空间，令

$$\mathcal{B}(X, \mathbb{K}) = \{X\text{上定义的全体有界线性泛函}\}$$

则 $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ 是完备的。

5.3 一致有界原则

5.3.1 Baire 纲定理

定义 5.3.1 (疏集) 设 (X, d) 是距离空间，$E \subset X$。如果 E 不在 X 的任何非空开集中稠密，则称 E 是疏集。

注 1：疏集 E 中没有内点。事实上，若 $x \in E$ 是内点，即存在 $S(x, r) \subset E$，则 E 在 $S(x, r)$ 中稠密。

注 2：Cantor 集是疏集。事实上，Cantor 集没有内点。

定义 5.3.2 (第一纲集与第二纲集) 若集合 E 可以表示成至多可数个疏集的并，即

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

其中 E_n 是疏集 $(n = 1, 2, \cdots)$，则称 E 是第一纲集。不是第一纲集的集合称为第二纲集。

定理 5.3.1 (Baire 纲定理) 完备的距离空间是第二纲集。

推论 5.3.1 *Banach* 空间是第二纲集。

5.3.2 一致有界原则

定理 5.3.2 (Banach-Steinhaus 一致有界原则) 设 $\{T_\alpha | \alpha \in I\}$ 是 *Banach* 空间 X 上到赋范空间 X_1 中的有界线性算子族。如果对于 $\forall x \in X$,

$$\sup_\alpha \|T_\alpha x\| < \infty,$$

则 $\{\|T_\alpha\| | \alpha \in I\}$ 是有界集。

命题 5.3.1 (共鸣定理) 如果 $\{T_\alpha | \alpha \in I\}$ 是 *Banach* 空间 X 上到赋范空间 X_1 中的有界线性算子族, $\sup_\alpha \|T_\alpha\| = \infty$, 则存在 $x_0 \in X$, 使得

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x_0\| = \infty.$$

这个命题称为共鸣定理。

命题 5.3.2 设 X 是 *Banach* 空间，若 $f_\alpha (\alpha \in I)$ 是定义在 X 上的有界线性泛函，如果对于每一个 $x \in X$,

$$\sup_{\alpha \in I} |f_\alpha(x)| < \infty,$$

则 $\{\|f_\alpha\| \mid \alpha \in I\}$ 是有界集。

命题 5.3.3 当 I 是一个可数集时，X 是一个 *Banach* 空间，$\{f_n\}$ 是定义在 X 上的有界线性泛函，如果 $\forall x \in X$，有 $\sup_n |f_n(x)| < \infty$，则 $\sup_n \|f_n\| < \infty$。

命题 5.3.4 当 I 是一个可数集时，X 是一个 *Banach* 空间，$\{f_n\}$ 是定义在 X 上的有界线性泛函，如果 $\sup_n \|f_n\| = \infty$，则存在 $x_0 \in X$，使得 $\sup_n |f_n(x_0)| = \infty$。这是一致有界原则的逆否命题。

5.3.3 强收敛意义下的完备性

定理 5.3.3 设 X, X_1 是 *Banach* 空间，则 $\mathcal{B}(X, X_1)$ 在强收敛的意义下完备。即：如果

(1) $T_n \in \mathcal{B}(X, X_1)$;

(2) 若 $\forall x \in X, \{T_n x\}$ 是 X_1 中的 *Cauchy* 列，则存在 $T \in \mathcal{B}(X, X_1), T_n \xrightarrow{强} T(n \to \infty)$，即 $\forall x \in X, T_n x \to Tx(n \to \infty)$。

5.4 开映射定理与逆算子定理

5.4.1 逆算子

定义 5.4.1 (逆算子) 设 T 是从线性空间 X 中到线性空间 X_1 中的线性算子。如果存在 X_1 到 X 中的线性算子 T_1，使得

$$T_1Tx = x \quad (x \in \mathcal{D}(T) \subseteq X), \quad TT_1y = y \quad (y \in \mathcal{R}(T) \subseteq X_1),$$

则称算子 T 有逆算子，T_1 称为 T 的逆算子，记为 T^{-1}。

定理 5.4.1 T 是赋范空间 X 中到赋范空间 X_1 中的线性算子，如果存在 $m > 0$，使得

$$\|Tx\| \geq m\|x\| \ (x \in \mathcal{D}(T)),$$

则 T 存在有界的逆算子 T^{-1}。

反之，如果定义在 $\mathcal{R}(T)$ 上的逆算子 T^{-1} 存在且有界，那么一定存在一个正数 m，使得 (*4.4.1*) 式成立。

注 1：T^{-1} 是从 $\mathcal{R}(T)$ 到 $\mathcal{D}(T)$ 的映射，$\mathcal{R}(T)$ 不一定是全空间 X_1，$\mathcal{D}(T)$ 不一定是全空间 X。

注 2：这里并未要求 T 有界，只要 T 下方有界即可。

5.4.2 开映射定理

定义 5.4.2 (开映射) 设 T 是 $X \to X_1$ 的一个映射，如果 T 把 X 中的任何一个开集映成 X_1 中的开集，则称 T 是开映射。

定理 5.4.2 (开映射定理) 设 T 是 *Banach* 空间 X 上到 *Banach* 空间 X_1 上的有界线性算子，则 T 是开映射。

为了准确地了解开映射定理，做以下几点说明：(1) 定理要求条件：$\mathcal{D}(T) = X, \mathcal{R}(T) = X_1$，即：$TX = X_1$。(2) 定理表明：当 T 是有界线性算子时，如果 X, X_1 都是 Banach 空间，$TX = X_1$，则对于任何开集 G，TG 一定是开集。(3) 注意 T 是开映射与 T 连续的区别。T 是开映射：T 把一个开集映成开集。T 连续 $\Leftrightarrow$ 开集的原像是开的，即 $G \subset X_1, G$ 是开集 $\Rightarrow T^{-1}(G)$ 是开集。(4) 如果线性算子 T 是开映射，且 T 的逆算子存在，则 T 的逆算子 T^{-1} 是连续的，即 T^{-1} 是有界线性算子（图 4.2）。

事实上，G 在 T^{-1} 的值域里，如果 G 是开的，由于 T 是开映射，$T(G)$ 是开集，即对于 T^{-1} 来说，开集 G 的原像是 $T(G)$，而 $T(G)$ 是开的，所以逆算子 T^{-1} 是连续的，T^{-1} 是有界线性算子。

5.4.3 逆算子定理

定理 5.4.3 (Banach 逆算子定理) 设 T 是从 *Banach* 空间 X 上到 *Banach* 空间 X_1 上的一对一的有界线性算子，则 T 的逆算子存在，且 T^{-1} 是有界的。

定理 5.4.4 设 X 是一个线性空间，其上定义两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$。设 $(X, \|\cdot\|_1)$ 和 $(X, \|\cdot\|_2)$ 都是 *Banach* 空间，且存在常数 $C > 0$，使得

$$\|x\|_2 \leq C\|x\|_1, \quad \forall x \in X,$$

则 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价。

5.5 闭算子与闭图像定理

5.5.1 闭算子的定义

定义 5.5.1 (乘积赋范空间与图像) 设 X, X_1 是赋范空间，T 是从 X 中到 X_1 中的线性算子，考虑乘积空间

$$X \times X_1 = \{(x, y) | x \in X, y \in X_1\},$$

在其上定义范数：对于任意的 $z = (x, y) \in X \times X_1$，令

$$\|z\| = \|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|_1,$$

可以验证 $X \times X_1$ 是赋范空间；若 X 和 X_1 是 *Banach* 空间，则 $X \times X_1$ 也是 *Banach* 空间。

令

$$G(T) = \{(x, Tx) \in X \times X_1 | x \in \mathcal{D}(T)\},$$

称 $G(T)$ 为算子 T 的图像。

定义 5.5.2 (闭算子) 如果 $G(T)$ 在乘积赋范空间 $X \times X_1$ 中是闭的，则称 T 是闭算子。

定理 5.5.1 (闭算子的等价条件) 设 X, X_1 是赋范空间，T 是从 X 到 X_1 中的线性算子，则 T 是闭算子当且仅当 $\forall \{x_n\} \subset \mathcal{D}(T), x_n \to x \in X$，及 $Tx_n \to y \in X_1$，必有 $x \in \mathcal{D}(T)$，且 $y = Tx$。

注 1：可以把闭算子定义为：如果对于任意的

$$\{x_n\} \subset \mathcal{D}(T), \quad x_n \to x \in X, \quad Tx_n \to y \in X_1,$$

$$\Longrightarrow x \in \mathcal{D}(T), \qquad Tx = y,$$

则称 T 是闭线性算子。

注 2：由上述定义，显然定义在全空间上的有界（连续）线性算子一定是闭线性算子。

注 3：由 (4.5.3)、(4.5.4) 式可以看出，闭的线性算子与连续线性算子有很“类似”的性质。有关闭算子的进一步讨论，有兴趣的读者可参阅 [6]。

注 4：对于闭算子来说，在 (4.5.3) 式的条件下，极限运算可以和算子交换顺序。

注 5：在开映射定理 4.4.4 中，T 连续的条件可以改为 T 是闭算子。即：X, X_1 是 Banach 空间，T 是在上的 ($TX = X_1$)，T 是闭算子，则 T 是开映射（见定理 4.4.4 后注 4）。

5.5.2 闭算子的例

例题 5.5.1 (微分算子) $X = C[0,1], \mathcal{D}(T) = C^1[0,1] \neq X$，定义

$$T : \mathcal{D}(T) \to C[0,1], \quad T = \frac{d}{dt},$$

则 T 是闭算子。

5.5.3 闭图像定理

定理 5.5.2 (闭图像定理) 设 T 是 *Banach* 空间 X 上到 *Banach* 空间 X_1 中的闭线性算子，则 T 是有界线性算子。

注：定理说明

$$\begin{cases} \mathscr{D}(T) = X, & X \text{ 是 Banach 空间} \\ X_1 \text{ 是 Banach 空间} & \Longrightarrow T \text{ 有界.} \\ T \text{ 闭} \end{cases}$$

6 Conjugate Space and Conjugate Operator 共轭空间和共轭算子

6.1 Hahn-Banach 定理

6.1.1 Hahn-Banach 定理

定理 6.1.1 (复的 Hahn-Banach 定理) 设 X 是一个复的赋范空间，G 是 X 的子空间，f 是 G 上的有界线性泛函，则 f 可以保持范数不变地延拓到全空间 X 上，即存在 X 上的有界线性泛函 F，使得

(i) $\forall x \in G, F(x) = f(x)$;

(ii) $\|F\| = \|f\|_G$，其中 $\|f\|_G$ 表示 f 作为 G 上有界线性泛函的范数。

注 1：在 Hahn-Banach 定理 5.1.1 的证明中没有用到范数的如下性质

$$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0.$$

也就是说定理中假设范数的条件可以改为半范数 $p(x)$，有关半范数和相应的结论可参阅 [10]。

注 2：Hahn-Banach 定理 5.1.1 是纯代数的，虽然它假设了线性空间上有范数或半范数，但是定理的表述和证明过程中都没有用到空间的任何拓扑性质（或极限概念）。

注 3：线性泛函的延拓不是唯一的。

6.1.2 Hahn-Banach 定理的推论

命题 6.1.1 设 X 是一个赋范空间，$\forall x_0 \in X, x_0 \neq 0$，存在 X 上的有界线性泛函 f，使得 $\|f\| = 1, f(x_0) = \|x_0\|$。

注：命题说明 $X \neq \{0\}$，则 X 上一定有非零的线性泛函。

推论 6.1.1 设 X 是一个赋范空间，$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$，一定存在线性泛函 $f(x)$，使得 $\|f\| = 1$，且

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

注：这说明空间 X 有足够多的线性泛函，可以把空间中任何两个不同的元素区分开来。

推论 6.1.2 设 X 是一个赋范空间，如果对于 X 的任何有界线性泛函 f，都有

$$f(x_0) = 0,$$

则 $x_0 = 0$。

6.1.3 线性泛函和闭集分离

命题 6.1.2 设 G 是赋范空间 X 的子空间，$x_0 \in X$，如果

$$d = d(x_0, G) = \inf_{x \in G} \|x - x_0\| > 0,$$

则存在 X 上的有界线性泛函 f，

$$\|f\| = \frac{1}{d}; \quad f(x_0) = 1; \quad f(x) = 0, \quad \forall x \in G.$$

定义 6.1.1 (超平面与支撑) 设 X 是一个赋范空间，f 是 X 上的有界线性泛函，称

$$L_f^k = \{x \in X | f(x) = k\}$$

为 X 中的超平面。

设 $\Omega \subset X$，如果对于任何的 $x \in \Omega$，有 $f(x) \leq k$ 或 $f(x) \geq k$，则称 Ω 位于 L_f^k 的一侧。进一步地，如果还有 $x_0 \in \Omega \cap L_f^k$，则称超平面在 x_0 处支撑着 Ω。

命题 6.1.3 设 $B = \{x | \|x\| \leq R\}$ 是赋范空间 X 中的闭球，则在球面 $S(0, R) = \{x | \|x\| = R\}$ 上的每一点处，存在支撑球的超平面 L_f^R。

6.2 共轭空间

6.2.1 共轭空间的概念

定义 6.2.1 (共轭空间) 设 X 是一个赋范空间，我们记 $X^*=\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$，其中

$$\mathcal{B}(X,\mathbb{K})=\{X \text{ 上定义的全体有界线性泛函}\},$$

称 X^* 为 X 的共轭空间。

注: X 的共轭空间是 X 上全体有界线性泛函构成的赋范空间。根据推论 4.2.6, X^* 是完备的 (Banach 空间)。这不要求 X 是 Banach 空间。

6.2.2 $L^p[a,b]$ 的共轭空间 $(1<p<\infty)$

定理 6.2.1 f 是 $L^p[a,b]$ 上的有界线性泛函，则存在唯一的 $y(t)\in L^q[a,b],\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$，使得

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)dt,\quad \forall x\in L^p[a,b],$$

且 $\|f\|=\|y\|_q=\left(\int_a^b|y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$. 反之，$\forall y\in L^q[a,b]$, (5.2.1) 式定义了 $L^p[a,b]$ 上的一个有界线性泛函。

注：这说明 $L^p[a,b]$ 上定义的有界线性泛函和 $L^q[a,b]$ 中的元素一一对应。

注 1：$X=L^p[a,b]$，则 $X^*=L^q[a,b]$，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$1<p<\infty$。即 $\forall f\in X^*$，$\exists y\in L^q$，使得

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)dt,$$

f 和 y 一一对应。在等距同构的意义下 $(L^p[a,b])^*$ 和 $L^q[a,b]$ 相等。

注 2：当 $p=2$ 时，$X=L^2$，$X^*=L^2$。X 与它的共轭空间 X^* 在等距同构的意义下相同。

注 3：当 $p=1$ 时，$X=L[a,b]$。可以证明，$(L[a,b])^*=L^\infty[a,b]$ $(p=1,q=\infty)$。

注 4：对于离散的情况，类似的我们有 $(l^p)^*=l^q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,1\le p<\infty\right)$。

进一步我们有 $C[a,b]$ 的共轭空间是有界变差函数空间 $V[a,b]$（参阅附录 IV.2）。

6.3 Hilbert 空间的共轭空间和共轭算子

6.3.1 Riesz 表示定理

定理 6.3.1 (Riesz 表示定理) 设 H 是一个 *Hilbert* 空间，f 是 H 上定义的有界线性泛函，则存在唯一的 $y_f \in H$，使得

$$f(x) = (x, y_f), \quad \forall x \in H,$$

并且

$$\|F\| = \|y_f\|.$$

注 1：Riesz 表示定理显示，Hilbert 空间上的连续线性泛函有一个十分简单的表示。

当 $H = \mathbb{R}^3$ 时，它的几何意义是十分清楚的。

$$f(x) = ax_1 + bx_2 + cx_3 = n \cdot x = (n, x),$$

其中 $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$，$n = (a, b, c)$，即 Riesz 表示定理中的 $y_f = n$，它是平面 $f(x) = 0$ 的法向量。事实上，平面 $f(x) = 0$ 由它的法向量唯一确定（图 5.1）。

注 2：从证明中可知，线性泛函 f 的零空间 $\mathcal{N}(f)$ 的正交补集 $\mathcal{N}(f)^{\perp}$ 是一维的。

6.3.2 Hilbert 空间的共轭空间

定理 6.3.2 设 H 是一个 *Hilbert* 空间，则 $H^* = H$。即 H^* 在共轭同构的意义下看成与 H 等同。

换句话说，如果我们对共轭同构的 *Hilbert* 空间不加区别，则 $H^* = H$，即 *Hilbert* 空间是自共轭的。

命题 6.3.1 $\mathbb{R}^n$ 空间、$\mathbb{C}^n$ 空间都是自共轭的，即 $(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^n$，$(\mathbb{C}^n)^* = \mathbb{C}^n$。

命题 6.3.2 $L^2[a, b]$ 空间、l^2 空间都是自共轭的，即 $(L^2[a, b])^* = L^2[a, b]$，$(l^2)^* = l^2$（参阅定理 *5.2.2*）。

6.3.3 Hilbert 空间上的共轭算子

定义 6.3.1 (共轭算子) 设 H 是 *Hilbert* 空间，$A \in \mathcal{B}(H)$，我们把由 *(5.3.11a)* 确定的有界线性算子 B 称为 A 的共轭算子，记为 A^*，即

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in H.$$

注 1：A^* 是从 H 到自身 H 的线性算子。

注 2：这个定义和有限维空间上线性算子（矩阵）的共轭算子（共轭矩阵）的定义 (5.3.9) 式形式完全一样。

定理 6.3.3 设 A, B 是 *Hilbert* 空间 H 上的有界线性算子，则 *(1)* 共轭算子 A^* 是有界线性算子，并且 $\|A^*\| = \|A\|$，进一步有 $(A^*)^* = A$; *(2)* $(A + B)^* = A^* + B^*$; *(3)* $(AB)^* = B^*A^*$; *(4)* 对于常数 $\alpha \in \mathbb{K}$，$(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$; *(5)* 若 A^{-1} 存在且有界，则 $(A^*)^{-1}$ 也存在且有界，且 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

命题 6.3.3

$$\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2 = \|A^*\|^2.$$

定理 6.3.4 设 A 是从 *Hilbert* 空间 H 到 H 的有界线性算子，那么

$$\mathcal{R}(A) = \{\mathcal{N}(A^*)\}^{\perp},$$

$$\{\mathcal{N}(A)\}^{\perp} = \overline{\mathcal{R}(A^*)},$$

其中 $\mathcal{R}(A)$ 和 $\mathcal{N}(A)$ 分别表示 A 的值域和零空间。

6.4 自共轭的有界线性算子

6.4.1 有界自共轭算子的定义和例

定义 6.4.1 (自共轭算子) A 是 *Hilbert* 空间 H 到 H 的有界线性算子。如果 $A = A^*$，则称 A 是自共轭的。

注 1：由定义 5.3.5 可知，有界线性算子 A 是自共轭的，当且仅当

$$(Ax, y) = (x, Ay), \quad \forall x, y \in H.$$

注 2：对于有界线性算子而言，自共轭算子也称为对称算子。

6.4.2 自共轭算子的性质

定理 6.4.1 *Hilbert* 空间 H 上的全体自共轭算子组成的集合是 $\mathcal{B}(H)$ 中的一个闭集。

定理 6.4.2 设 A、B 是 *Hilbert* 空间 H 上的自共轭算子，则 AB 是自共轭的充分必要条件是 $AB = BA$。

定理 6.4.3 设 A 是 *Hilbert* 空间 H 上的有界线性算子，则 A 是自共轭的当且仅当 $\forall x \in H, (x, Ax)$ 是实的。

定理 6.4.4 设 A 是 *Hilbert* 空间 H 上的自共轭算子，那么

$$\|A\| = \sup\{|(Ax, x)| \mid \|x\| = 1\} = \sup\{|(Ax, y)| \mid \|x\| = \|y\| = 1\}.$$

6.4.3 Cartesian 分解

定理 6.4.5 设 H 是一个 *Hilbert* 空间，$T \in \mathcal{B}(H)$，则 T 可以分解成

$$T = A + iB,$$

其中 A、B 是 *Hilbert* 空间中的自共轭算子，并且这种分解是唯一的。

注：(5.4.6) 式给出的分解 $T = A + iB$，其中 A、B 是 Hilbert 空间中的自共轭算子，称为 T 的 Cartesian 分解。