

Cinemática Galáctica

Informe Tarea 2

Integrantes: Javier Huenupi
Profesor: Edgardo Costa
Leonardo Bronfman
Auxiliar: Paulina Palma
Fecha de realización: 29 de mayo de 2021
Fecha de entrega: 29 de mayo de 2021
Santiago, Chile

1. Introducción

La materia en la galaxia en la que está ubicado el sistema solar, la Vía Láctea, se concentra en lo que se conoce como plano galáctico, que consiste en un plano perpendicular a los polos de la galaxia. Debido a que este plano es delgado en comparación a su área, hace que la galaxia tenga una forma achatada de disco en el que la materia se mueve describiendo trayectorias circulares, elípticas, hiperbólicas y parabólicas. Desde la perspectiva del sistema solar, este plano se puede dividir en 4 secciones utilizando coordenadas galácticas que se constituyen por: Latitud galáctica (b), ángulo en grados medido desde el plano ecuatorial, o medio plano, hasta la altura de un punto; longitud galáctica (l), ángulo en grados medido desde el centro galáctico hasta un punto a través del plano galáctico. Estas secciones se conocen como cuadrantes y se denotan por números romanos.

Para el presente informe se utilizó un cubo de datos, que consiste en una arreglo multidimensional de valores y que se utiliza ampliamente en la astronomía, definido según las coordenadas galácticas y un arreglo de velocidades para cada punto observado, obtenidas considerando el efecto Doppler producido por el movimiento de la materia en la galaxia para el cuarto cuadrante que está definido en las longitudes $[0^\circ, 270^\circ]$ y en el que está contenido tanto parte de la zona dentro de la órbita que describe el sistema solar alrededor del centro galáctico, conocida como círculo solar, como fuera de esta.

Con el fin de poder descomponer las velocidades según distintos ejes, se define el LSR (*Local Standar of Rest*) que consiste en la velocidad de una partícula imaginaria que se mueve a través del plano galáctico de la Vía Láctea en la órbita circular más cercana que pasa por la posición del Sol. Además, debido a que la velocidad de la materia en distintos puntos de la galaxia, no se descompone únicamente en la línea de observación (LSO) en la que se mide, es que hay un rango de velocidades en magnitud que van desde 0, cuando la velocidad del objeto es perpendicular a la línea de visión, hasta la velocidad terminal que consiste en la máxima velocidad medible para dicho objeto. Esta es la velocidad que mantiene aproximadamente en una órbita circular.

2. Curva de rotación

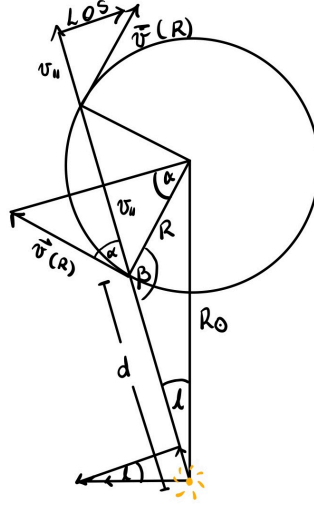


Figura 1: Cinemática de una partícula orbitando el centro galáctico, cuyo movimiento es observado desde el sistema solar.

Siguiendo la Figura 1 se tiene que la velocidad de una estrella, en la línea de visión viene dada por:

$$v_{||}(R) = v(R)\cos(\alpha) - v(R_{\odot})\sin(l)$$

donde se tiene la distancia del Sol al centro de la galaxia $R_{\odot} = 8.5$ kpc, además por teorema del seno se tiene,

$$\begin{aligned} v_{||}(R) &= v(R)\frac{R_{\odot}}{R}\sin(l) - v(R_{\odot})\sin(l) \\ \Leftrightarrow v_{||}(R) &= [\omega(R) - \omega(R_{\odot})] \cdot R_{\odot}\sin(l) \end{aligned} \quad (2.1)$$

esta última ecuación se le conoce como *la ecuación maestra*.

Haciendo un análisis de la velocidad de una partícula de masa m a una distancia R del centro galáctico, se iguala la fuerza gravitacional con la fuerza centrífuga, con lo que se tiene:

$$\begin{aligned} m\frac{v^2(R)}{R} &= G\frac{M(R)m}{R^2} \\ \Rightarrow v(R) &= \sqrt{G\frac{M(R)}{R}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\Rightarrow \omega(R) = \frac{v(R)}{R} = \sqrt{G\frac{M(R)}{R^3}}. \quad (2.3)$$

donde $v(R)$ es la velocidad de la partícula, $\omega(R)$ la velocidad angular, G la constante de gravitación de Newton y $M(R)$ la masa de la galaxia encerrada dentro del radio R .

Así que, si se tiene que la galaxia tiene una forma esférica $M(R) \propto R^3 \Rightarrow \omega(R)$ es constante, pero si tiene forma de disco $M(R) \propto R^2 \Rightarrow \omega(R) \propto \sqrt{1/R}$, por lo que ω es constante o disminuye

con la distancia al centro. Con esto se puede calcular la velocidad máxima de v_{II} , ya que el máximo valor de $\omega(R)$, que maximiza v_{II} , se da para la menor distancia al centro galáctico que corresponde a $R_{\text{min}} = R_{\odot} \sin(l)$, por lo que la velocidad máxima corresponde a la velocidad tangencial.

Para realizar esta tarea se ocupó un cubo de datos que contiene: Longitud, latitud y velocidad, donde para cada punto en el cielo (l, b) se midió la velocidad máxima, o sea, la velocidad tangencial del cuerpo observado. Esta velocidad se escoge como la primera velocidad que tenga una temperatura de antena $T_A > 5\sigma$ (la velocidad más grande en magnitud que corresponde a la señal y no ruido), midiendo desde las velocidades en magnitud más grandes a las más pequeñas, con $\sigma = 0.1$ K. El procedimiento consistió en fijar las longitudes, l , y medir la velocidad que cumpla con la condición para la temperatura, que se guarda al igual que la latitud, b , correspondiente a la velocidad, además, se calcula el radio tangencial denotado por R_T por geometría igual a $R_{\odot} \sin(l)$. Con estos valores se calcula la velocidad angular $\omega(R)$ despejando de la ecuación maestra 2.1 evaluada en R_T ,

$$\omega(R_{\odot} \sin(l)) = \frac{v_T(l)}{R_{\odot} \sin(l)} + \omega_{\odot},$$

con ω_{\odot} la velocidad angular del Sol igual a $25.882 \text{ rad s}^{-1}$. Esta velocidad angular se calcula para cada velocidad tangencial de cada longitud, con lo que se consigue el gráfico de $\omega(R)$ vs R , junto con el gráfico $v_T(R)$ vs R , ambos presentes en la Figura 2.

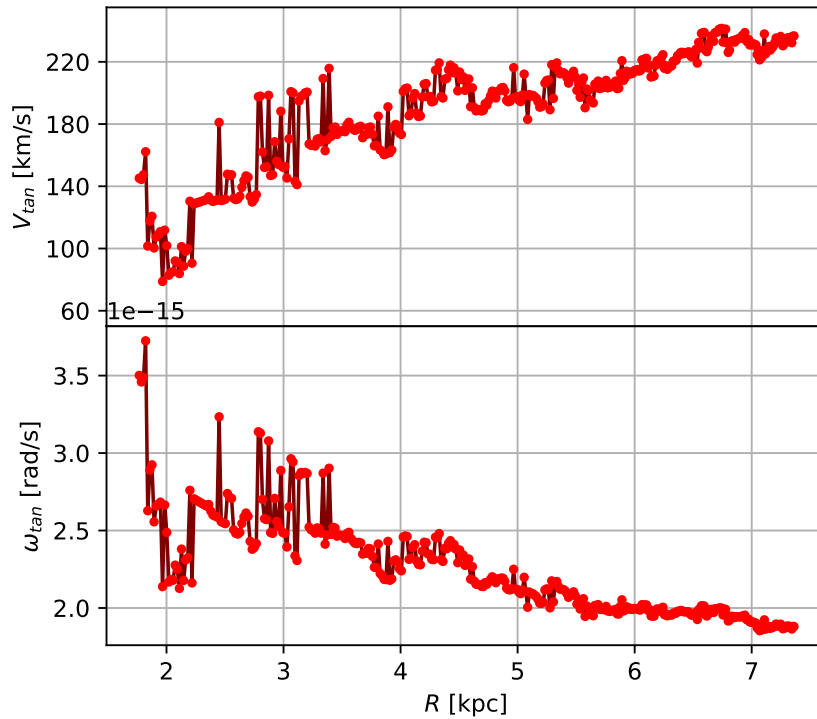


Figura 2: Curvas de rotación para la velocidad tangencial en el gráfico de más arriba y para la velocidad angular en el gráfico de abajo, en función de la distancia al centro galáctico

3. Corrugación del plano

El disco galáctico no es completamente plano, sino que tiene una pequeña corrugación que es mucho menor que el diámetro de la galaxia, que equivale aproximadamente a $\sim 1\%$ del diámetro.

Esto se debe a que la galaxia tiene una estructura ondulatoria que depende del ángulo θ medido en el plano galáctico, y la distancia R a su centro. Funciona como una onda espiral de densidad, y en R hay modos normales de oscilación.

Para medir esta corrugación se utilizaron los mismo datos usados para medir la curva de rotación. Se toma la posición de la densidad máxima para cada longitud, como la posición en la latitud para la cual se consigue la velocidad máxima en magnitud asociada, v_T , que se llamará b_{min} (se define como min debido a que como se midió en el cuarto cuadrante la velocidad máxima en magnitud equivale a la velocidad más negativa). Por la Figura 1 en el punto (l, b_{min}) se tiene:

$$R = R_{\odot} \sin(l) \quad \wedge \quad d = R_{\odot} \cos(l),$$

así que la altura de dicho punto con respecto al ecuador galáctico viene dada por:

$$z = d \cdot \tan(b_{min}) = R_{\odot} \cos(l) \cdot \tan(b_{min}),$$

con lo que se puede calcular la altura de las posiciones para cada longitud y graficar la relación con la distancia $R = R_{\odot} \sin(l)$, presente en la Figura 3.

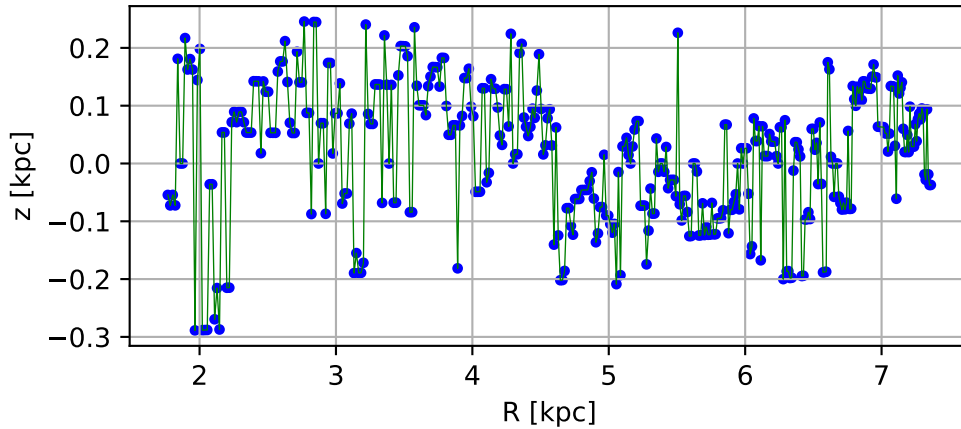


Figura 3: Corrugación de la Vía Láctea para el cuarto cuadrante, representado como la altura con respecto al ecuador galáctico versus la distancia al centro galáctico.

4. Ajuste de modelo de masa

Para encontrar una expresión analítica para la curva de rotación se debe ocupar un modelo físico definido por la distribución de la masa de la galaxia. Para esto se ocupa la ecuación (2.2),

$$v(R) = \sqrt{G \frac{M(R)}{R}}.$$

Para este informe se estudiaron 5 modelos de la distribución de masa $M(R)$:

- Modelos de un único parámetro libre
 - Masa puntual en el centro galáctico: $M(R) = M_0$.
 - Disco uniforme: $M(R) = \pi R^2 S$, con S la densidad superficial homogénea del disco.
 - Esfera uniforme: $M(R) = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$, con ρ la densidad volumétrica homogénea de la esfera.
- Modelos de dos parámetros libres
 - Disco uniforme más una masa puntual central: $M(R) = \pi R^2 S + M_0$.
 - Esfera uniforme más una masa puntual central: $M(R) = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho + M_0$

La distribuciones de masa de los distintos modelos se reemplazaron en la ecuación 2.2 y en el script de Python se definieron las funciones `distribucion_masa` que se utilizaron para realizar un fiteo de la curva de rotación obtenida de forma empírica. Los fiteos de cada modelo se presentan en los plots de la Figura 5, mientras que los valores de los parámetros de cada modelo, utilizados para el fit se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 1: Parámetros de cada modelo utilizados para el fiteo de la curva de rotación, junto con el error cuadrático medio asociado a cada modelo.

Modelo	M_0 M_\odot	S $M_\odot \text{ kpc}^{-2}$	ρ $M_\odot \text{ kpc}^{-3}$	Error cuadrático medio
Masa puntual	3.228×10^{10}	-	-	5550.978
Disco uniforme	-	5.888×10^8	-	218.554
Esfera uniforme	-	-	7.964×10^7	1172.983
Disco + masa puntual	7.643×10^{-8}	5.888×10^8	-	218.554
Esfera + masa puntual	7.981×10^9	-	6.372×10^7	475.509

5. Análisis y Conclusiones

El procedimiento y los resultados obtenidos en esta tarea permiten analizar las características de la Vía Láctea en el cuarto cuadrante, pero se pueden hacer conclusiones similares para el resto de la galaxia.

En la Figura 2 se observa que la velocidad tangencial aumenta monotónicamente con el radio, como una función convexa. Esto se observa de forma más clara en los plots 2 y 3 de la Figura 5 cuyas curvas son las que más se asemejan a los datos de la Figura 2 al tener el menor error cuadrático medio

de 28.554, donde las curvas utilizadas para el fit tiene como primera y segunda derivada evaluada en los parámetros, los valores:

$$\frac{dv(R)}{dR} \approx \frac{21504.5 \cdot G}{\sqrt{GR}} ; \quad \frac{d^2v(R)}{dR^2} \approx -\frac{10752.2 \cdot G^2}{(GR)^{3/2}},$$

donde la primera derivada es positiva y la segunda derivada negativa para todo valor del radio, por lo tanto demuestra que la curva que mejor se aproxima a los datos obtenidos tiene una forma convexa y es siempre creciente.

Sin embargo para distancias más grandes al centro galáctico los valores empíricos de la velocidad tiende a un valor constante. Esta forma de la curva de rotación se contradice con la curva esperada considerando la masa observada en la galaxia:

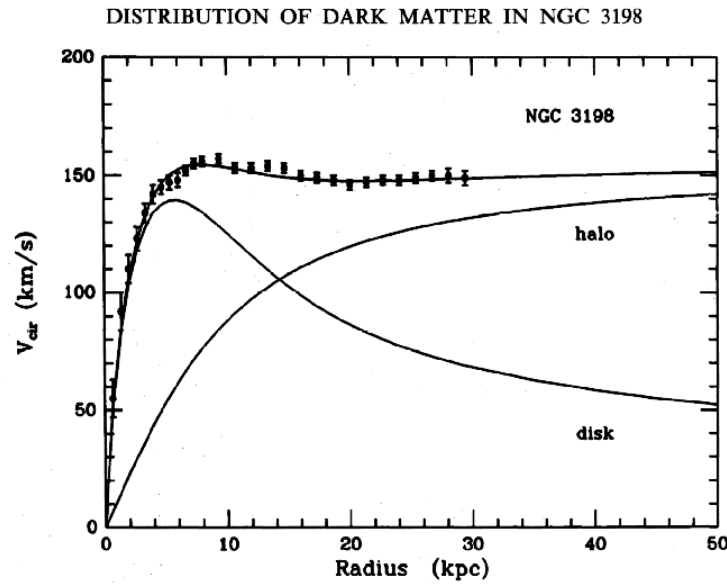


Figura 4: Curvas de rotación de la velocidad tangencial, para el modelo kepleriano predicho (disk) y los datos obtenidos para la galaxia NGC 3198.

Una de las hipótesis que se manejan para darle sentido a los datos obtenidos es la presencia de masa invisible en forma de halo en la que está sumergida la galaxia, a este tipo de materia desconocida se le conoce como materia oscura que tiene las mismas propiedades que la materia bariónica, pero que no interacciona con la luz.

También resulta interesante el comportamiento de las velocidades, tanto tangencial como angular, para un radio menor a ~ 3.5 kpc, donde se observa una disminución abrupta de las velocidades para luego aumentar de la misma forma, pero en menor magnitud. Esta forma es diferente de los resultados para radios mayores, donde se sigue la forma de una curva de pendiente aproximadamente constante. Esto se debe a que: El centro galáctico posee una densidad mayor al resto de la galaxia, se producen fenómenos como expansión, colapso, movimiento energético, explosiones, etc, y las órbitas de la materia se dan en distintos planos, lo que genera que las velocidades sean diferentes a las de distancias mayores al centro galáctico.

En la Figura 3 se observa un resultado esperado según la teoría que estipula que hay variaciones de la altura según la distancia al centro galáctico. Se aprecia que la corrugación sigue una forma

similar a una función sinusoidal, en las que hay materia tanto sobre como bajo el plano ecuatorial de la galaxia, notando que los valores de la altura están en el intervalo $[-0.3, 0.3]$ kpc aproximadamente, que equivale a un 7.5 % del radio estudiado y un 1 % del diámetro total de la Vía Láctea, por lo que es factible considerar que la galaxia tiene una forma plana.

En conclusión, es de gran relevancia el análisis e interpretación de las propiedades geométricas de la galaxia, ya que han ayudado a entender la naturaleza de la materia oscura que no ha sido predicha por el Modelo Estándar. Además, el fiteo de una curva a los datos de la velocidad permite: Junto con la corrugación, conocer la forma de la galaxia, que para la Vía Láctea es una forma de disco, y obtener un modelo físico con el que se puede aproximar la masa comprendida dentro de cierto radio, teniendo en consideración que hay diferencias en la mecánica de las partículas en el centro de la galaxia, por lo que se debe definir un modelo diferente para radios pequeños.

6. Anexos

El script utilizado para esta tarea se encuentra en [este repositorio de GitHub](#).

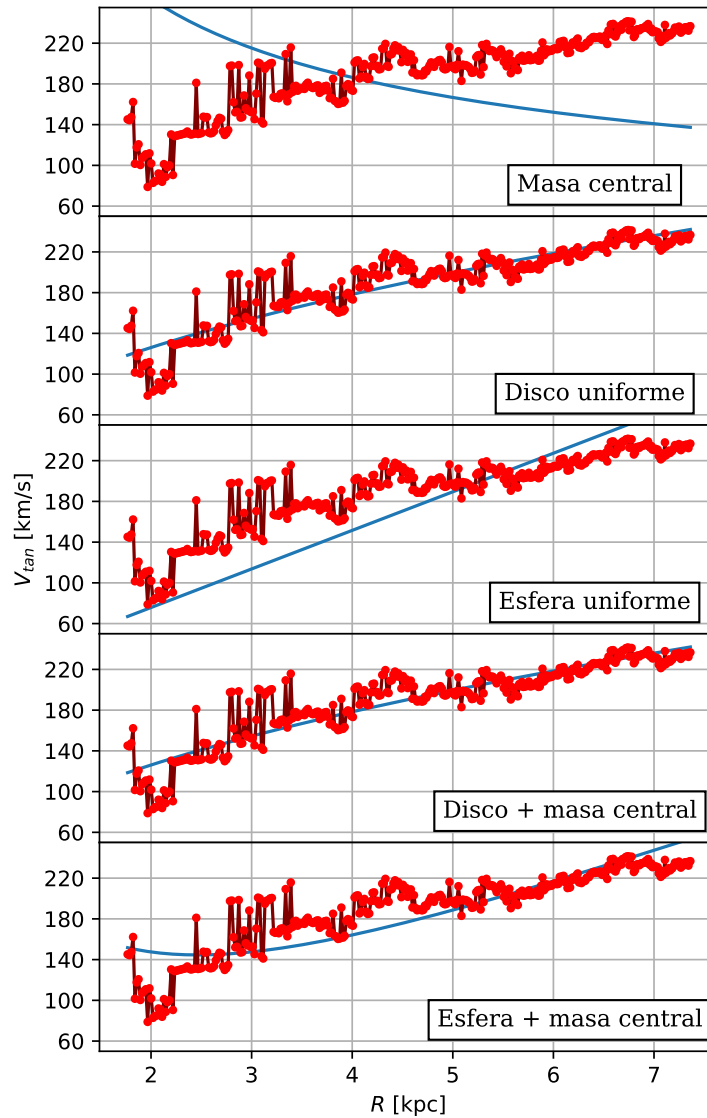


Figura 5: Fiteos de la curva de rotación de la velocidad tangencial para el cuarto cuadrante de la Vía Láctea, utilizando los 5 modelos descritos en la sección 4.