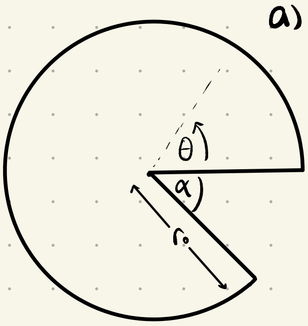
P4



a) Tenemos la ecuación de onda de una membrana

$$\nabla^2 J = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 J}{\partial t^2} \qquad * c^2 = \tau/\sigma$$

proponemos la solución de la forma $(r,\theta,t) = R(r)\,\Theta(\theta)\,T(t)$, en coord polares

$$R''\Theta T + \frac{1}{r}R'\Theta T + \frac{1}{r^2}R\Theta'' T = \frac{1}{c^2}R\Theta\ddot{T}$$

$$\Leftrightarrow \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{T}}{T} \quad (1)$$

definimos $\frac{\ddot{T}}{T} = -\omega^2 \Rightarrow T(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)$ $\wedge$ $\frac{\Theta''}{\Theta} = -m^2 \Rightarrow \Theta(\theta) = C\cos(m\theta) + D\,\mathrm{sen}(m\theta)$

Necesitamos que J se anule en 0 y $2\pi-\alpha$

$$\Rightarrow \Theta(0) = C\cdot 1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\wedge\ \Theta(2\pi-\alpha) = D\,\mathrm{sen}(m(2\pi-\alpha)) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow m(2\pi-\alpha) = k\pi, \text{ con } k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow m = \frac{k\pi}{2\pi-\alpha}$$

por lo que la parte angular queda como $\Theta(\theta) = D\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{2\pi-\alpha}\cdot\theta\right)$

Como condición inicial imponemos que la membrana parta estirada, o sea, $J(r,\theta,0) = 0$, que es equivalente a, $T(0) = A\cdot 1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow A = 0$, con lo que la parte temporal es de la forma $T(t) = B\,\mathrm{sen}(\omega t)$.

Ahora, (1) queda $\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} - \frac{m^2}{r^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} \Leftrightarrow R'' + \frac{1}{r}R' + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{m^2}{r^2}\right) = 0 \Rightarrow r^2R'' + rR' + \left(r^2\frac{\omega^2}{c^2} - m^2\right)R = 0$

hacemos el cambio de variable $u = r\frac{\omega}{c} \Rightarrow \frac{dR}{dr} = \frac{dR}{du}\frac{du}{dr} = R'\frac{\omega}{c} \Rightarrow \frac{d^2R}{dr^2} = \frac{d}{du}\left(R'\frac{\omega}{c}\right)\frac{du}{dr} = R''\frac{\omega^2}{c^2}$, reemplazamos

$\Rightarrow u^2\frac{c^2}{\omega^2}R''\frac{\omega^2}{c^2} + u\frac{c}{\omega}R'\frac{\omega}{c} + (u^2 - m^2)R = 0$, que es la ecuación de Bessel, que tiene como solución

$$R(u) = c_1 J_m(u) + c_2 Y_m(u)$$

donde descartamos la solución Y_m, ya que diverge para $u=0 \Rightarrow r=0$, lo que daría una deformación infinita en el origen

$$\Rightarrow R(r) = c_1 J_m\left(\frac{r\omega_m}{c}\right)$$

Otra condición es que se anule en el borde, $\Rightarrow R(r_0) = c_1 J_m\left(\frac{r_0\omega_m}{c}\right) \overset{!}{=} 0$, con r_0 el radio de la membrana, con lo que se tiene que las frecuencias normales de oscilación se calculan según los ceros de J_m, de la siguiente forma: Digamos que la raíz i-ésima de J_m es $\lambda_i \Rightarrow \frac{r_0\omega_{m,i}}{c} = \lambda_i \Leftrightarrow \omega_{m,i} = \frac{c\lambda_i}{r_0}$.

Finalmente tenemos que la función que describe la deformación de la membrana, J, es de la forma

$$J(r,\theta,t) = c_1 J_m\left(\frac{r\,\omega_{m,i}}{c}\right)\cdot D\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{2\pi-\alpha}\theta\right)\cdot B\,\mathrm{sen}(\omega_{m,i}t)$$

$$\propto J_m\left(\frac{r\,\omega_{m,i}}{c}\right)\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{2\pi-\alpha}\theta\right)\cdot\mathrm{sen}(\omega_{m,i}t),$$

que se define en la función Zeta del script P4C2-fijo.py Usando $r_0 = 1$, $\sigma = 1$ $\wedge$ $\tau = 0.75^2\sigma$

b) Para imponer bordes libres en pequeñas oscilaciones se debe imponer que las derivadas de $R(r)$ y $\Theta(\theta)$ sean nulas en los bordes, similar a una cuerda con extremo suelto. Se mantiene la C.I, por lo que $T(t) = B\,\text{sen}(\omega t)$.
Derivamos Θ expresado en a)

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(C\cos(m\theta) + D\,\text{sen}(m\theta)\right) = -Cm\,\text{sen}(m\theta) + Dm\cos(m\theta)$$

evaluando en $\theta = 0 \Rightarrow Dm \cdot 1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow D = 0$. Evaluando en $\theta = 2\pi - \alpha$

$$\Rightarrow -Cm\,\text{sen}(m(2\pi-\alpha)) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow m(2\pi - \alpha) = k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{k\pi}{2\pi - \alpha}$$

con lo que la parte angular es de la forma: $\Theta(\theta) = C\cos\left(\frac{k\pi}{2\pi-\alpha}\theta\right)$

Ahora derivamos la expresión de R descartando la solución Y_m

$$\left.\frac{dR}{dr}\right|_{r=r_0} = \frac{d}{dr} C_1 J_m\left(\frac{r\omega_m}{c}\right)\Big|_{r=r_0} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow J'_m\left(\frac{r_0\omega_{m,i}}{c}\right) = 0$$

digamos que λ'_i son las i-ésimas raíces de la derivada de $J_m \Rightarrow \frac{r_0\omega_{m,i}}{c} = \lambda'_i \Leftrightarrow \omega_{m,i} = \frac{c}{r_0}\lambda'_i$

Con lo que obtenemos la expresión de la deformación de la deformación

$$J(r,\theta,t) = C_1 J_m\left(\frac{r\omega_{m,i}}{c}\right) \cdot C\cos\left(\frac{k\pi}{2\pi-\alpha}\theta\right) B\,\text{sen}(\omega_{m,i}t)$$

$$\approx J_m\left(\frac{r\omega_{m,i}}{c}\right) \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{2\pi-\alpha}\theta\right) \text{sen}(\omega_{m,i}t)$$

que se define en la función Zeta del script P4C2-Libre.py. Usando $r_0 = 1$, $\sigma = 1 \wedge \tau = 0.75^2\sigma$