Chapter 1

初值问题的高维情况

齐次情形

引入**球平均法**的思想可以从下面的阐述中启发:对于一个高维的波动方程(例如3维)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u \\ u|_{t=0} = \varphi(x,y,z), \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x,y,z) \end{cases} \tag{1}$$

假如φ, ψ具有球对称性的话,那么φ, ψ是关于$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$的函数,可以找到一个$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,使得上述方程变为:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \tag{2}$$

则可以再做一个变量变换:$v = ru$,使得方程变为一维波动方程的情形从而求解.
但是通常φ, ψ并没有球对称性这么良好的性质,因此我们引入了一个**球平均**来保证其解M的初值条件具有球对称性.
实现思路:对于一个函数h,考虑其在球面上的平均值

$$M_h(x,y,z,r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r} h d_r \sigma$$

只需验证对于一个二阶连续可导的函数h满足(2)即可.

利用上述思路加之推导,我们得到齐次三维波动方程的解为:

$$u(x,y,z,t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}^M} \varphi dS \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}^M} \psi dS \tag{3}$$

其中S_{at}^M是以点$M(x,y,z)$为球心, at为半径的球面. (3)也被称为**泊松公式**.

非齐次情形

对于非齐次波动方程柯西问题的解,我们通常会利用解的线性性质,来把方程拆分为:齐次方程满足非齐次初始条件的解μ_1 + 非齐次方程满足齐次初始条件的解μ_2.
对于解μ_1,由上述的(3)给出. 而对于解μ_2,则需要利用齐次化原理,把方程化为:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \Delta w \\
w|_{t=\tau} = 0, \dfrac{\partial w}{\partial t}|_{t=\tau} = f(x, y, z, r)
\end{cases} \tag{4}
$$

再做 $u(x, y, z, t) = \int_0^t w(x, y, z, t; \tau) d\tau$ 来求非齐次方程满足齐次初始条件的解μ_2.

波的传播与衰减

这里的表述是把波动方程解的**依赖区域,决定区域,影响区域**推广到了三维中.此时一维的特征线在此处变成了**特征锥**.

惠更斯原理

阐述了初值微小扰动在二维和三维空间时对波传播的影响.

分离变量法

分离变量法解决的都是**混合问题:有初值以及边值条件的问题.**
思路:在物理中,一个波的组成其实可以视为具有形式为

$$
u(x, t) = X(x)T(t)
$$

的特殊解.那么将上述的表达形式带入一个初边值问题中

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u \\
u|_{t=0} = \varphi(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x) \\
x = 0 \text{ 及 } x = l: \ u = 0
\end{cases} \tag{5}
$$

则可以将上述的波动方程视为两个常微分方程.为保证满足边值条件,则可以解出一个特征值$\lambda > 0$与其对应的特征函数$X_k(x) = C_k sin\dfrac{k\pi}{l}x$ (不过此处的特征函数的求解依赖于边界问题的具体情形,此处的形式来源于在边界上的值均为0).
解决完边值问题,可以得到$X(x)$, $T(t)$的形式解,并让其满足初值条件,再利用傅立叶级数的知识,即可得到此混合问题的解.
但是请注意上述操作得到的解需要φ, ψ满足一定的条件才行.

对于变量分离法，必须要把边界问题化为齐次的情况，即