

文章编号: 0258-0926(2008)01-0125-04

强各向异性散射中子输运方程加速方法

孙幸光¹, 吴宏春¹, 沈智军²

(1. 西安交通大学, 西安, 710049; 2. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京, 100088)

摘要: 采用修正的 P_N 方程加速中子输运方程的 S_N 数值求解过程。并将该加速方法应用到国际通用的 ANISN 程序中, 对其进行了数值检验。数值计算结果表明, 本文加速方法可以使迭代次数大量减少, 特别是对于强各向异性散射问题具有明显的加速效果。

关键词: 中子输运; 加速方法; 强各向异性散射

中图分类号: TL329⁺.2 文献标识码: A

1 引 言

中子输运方程是中子数关于空间、时间、能量和运动方向多维自变量分布函数的偏微分积分方程, 其数值求解过程非常复杂, 也非常耗时。目前数值求解稳态中子输运方程时, 能量一般采用多群近似, 空间一般采用差分法, 运动方向采用离散纵坐标法(S_N)。离散后的中子输运方程十分复杂, 无法解析求解, 一般均采用源迭代法(SI)。但是, 源迭代方法在某些情况下收敛非常缓慢, 尤其对于散射比(散射截面与总截面之比)趋近于 1 的问题。传统的扩散综合加速(DSA)方法对于源迭代方法能起到很好的加速效果, 但 DSA 只能加速标通量, 即零阶距, 对于一些强各向异性散射问题加速效果不理想。本文将修正的 P_N 综合加速(MPSA)方法^[1,2]应用到国际通用的一维中子输运计算程序 ANISN 中, 使 ANISN 的内迭代次数大幅减少, 提高了中子输运方程的求解效率。

2 MPSA 理论模型

2.1 中子输运方程

对于一维平板稳态中子输运 S_N 方程为(不考虑上散射):

$$\mu_m \frac{\partial \psi_{m,g}}{\partial x} + \Sigma_{t,g} \psi_{m,g} = \sum_{g'=1}^g \sum_{k=1}^K (2k+1) \Sigma_{s,k,g' \rightarrow g} P_k(\mu_m) \phi_{k,g'} + S_g \quad (1)$$

$$\phi_{k,g} = \sum_{m=1}^M w_m P_k(\mu_m) \psi_{m,g} \quad (2)$$

式中, μ_m 为某一角度离散方向的余弦值; w_m 为该角度离散权重系数; $\psi_{m,g}$ 为中子角通量密度; $\phi_{k,g}$ 为中子球谐矩; $\Sigma_{t,g}$ 为总截面; $\Sigma_{s,k,g' \rightarrow g}$ 为 k 阶散射截面; S_g 为外中子源; $P_k(\mu_m)$ 为 k 阶勒让德多项式; 角标: m 为角度离散方向; g 为能群; k 为勒让德展开阶数; t 为总截面; s 为散射截面。

利用有限差分法离散空间变量, 采用源迭代, 第 l 次迭代步满足:

$$\mu_m \frac{\psi_{i+\frac{1}{2},m,g}^{l+\frac{1}{2}} - \psi_{i-\frac{1}{2},m,g}^{l+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i} + \Sigma_{t,i,g} \psi_{i,m,g}^{l+\frac{1}{2}} = \sum_{g'=1}^g \sum_{k=1}^K (2k+1) \Sigma_{s,k,i,g' \rightarrow g} \phi_{i,k,g'}^l + S_{i,g} \quad (3)$$

$$\psi_{i,m,g}^{l+\frac{1}{2}} = \frac{\psi_{i+\frac{1}{2},m,g}^{l+\frac{1}{2}} - \psi_{i-\frac{1}{2},m,g}^{l+\frac{1}{2}}}{2} \quad (4)$$

对方程(3)、方程(4)两端同时乘以 $w_m P_k(\mu_m)$, 并对所有 m 求和, 得:

$$\frac{k+1}{\Delta x_i (2k+1)} a + \frac{k}{\Delta x_i (2k+1)} b + \Sigma_{t,i,g} \phi_{i,k,g}^{l+\frac{1}{2}} = \sum_{g'=1}^g \Sigma_{s,k,i,g' \rightarrow g} \phi_{i,k,g'}^l + \delta_{k0} S_{i,g} \quad (5)$$

收稿日期: 2006-12-07; 修回日期: 2007-05-12

基金项目: 北京应用物理和计算数学研究所基金项目(51479050105JW0804)

其中,

$$\begin{aligned} a &= \left(\phi_{i+\frac{1}{2},k+1,g}^{l+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2},k+1,g}^{l+\frac{1}{2}} \right) \\ b &= \left(\phi_{i+\frac{1}{2},k-1,g}^{l+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2},k-1,g}^{l+\frac{1}{2}} \right) \\ \phi_{i,k,g}^{l+\frac{1}{2}} &= \frac{\phi_{i+\frac{1}{2},k,g}^{l+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2},k,g}^{l+\frac{1}{2}}}{2} \end{aligned} \quad (6)$$

同理, 对方程(3)、方程(4)两端同时乘以 $w_m P_{k+1}(\mu_m)$, 并对所有 m 求和, 得另外两方程

$$\begin{aligned} &\frac{k+2}{\Delta x_i(2k+3)}c + \frac{k+1}{\Delta x_i(2k+3)}d + \Sigma_{t,i,g} \phi_{i,k+1,g}^{l+\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{g'=1}^g \Sigma_{s,k+1,i,g' \rightarrow g} \phi_{i,k+1,g'}^l \end{aligned} \quad (7)$$

$$\phi_{i,k+1,g}^{l+\frac{1}{2}} = \frac{\phi_{i+\frac{1}{2},k+1,g}^{l+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2},k+1,g}^{l+\frac{1}{2}}}{2} \quad (8)$$

其中,

$$\begin{aligned} c &= \left(\phi_{i+\frac{1}{2},k+2,g}^{l+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2},k+2,g}^{l+\frac{1}{2}} \right) \\ d &= \left(\phi_{i+\frac{1}{2},k,g}^{l+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2},k,g}^{l+\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

对于方程(5)、方程(7), 选取 $\phi_{i,k,g}^{l+\frac{1}{2}}$ 、 $\phi_{i,k+1,g}^{l+\frac{1}{2}}$ 为加速项, 即只更新 $\phi_{i,k,g}^{l+\frac{1}{2}} \rightarrow \phi_{i,k,g}^{l+1}$ 、 $\phi_{i,k+1,g}^{l+\frac{1}{2}} \rightarrow \phi_{i,k+1,g}^{l+1}$ ($k=0,2,4,\dots$), 得:

$$\begin{aligned} &\frac{k+1}{\Delta x_i(2k+1)}e + \frac{k}{\Delta x_i(2k+1)}b + \Sigma_{t,i,g} \phi_{i,k,g}^{l+1} \\ &= \sum_{\substack{g'=1 \\ g \neq g}}^g \Sigma_{s,k+1,i,g' \rightarrow g} \phi_{i,k+1,g'}^l + \\ &\quad \Sigma_{s,k+1,i,g \rightarrow g} \phi_{i,k+1,g}^{l+1} + \delta_{k0} S_{i,g} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &\frac{k+2}{\Delta x_i(2k+3)}c + \frac{k+1}{\Delta x_i(2k+3)}f + \Sigma_{t,i,g} \phi_{i,k+1,g}^{l+1} \\ &= \sum_{g'=1}^g \Sigma_{s,k+1,i,g' \rightarrow g} \phi_{i,k+1,g'}^l + \Sigma_{s,k+1,i,g \rightarrow g} \phi_{i,k+1,g}^{l+1} \end{aligned} \quad (10)$$

其中,

$$\begin{aligned} e &= \left(\phi_{i+\frac{1}{2},k+1,g}^{l+1} - \phi_{i-\frac{1}{2},k+1,g}^{l+1} \right) \\ f &= \left(\phi_{i+\frac{1}{2},k,g}^{l+1} - \phi_{i-\frac{1}{2},k,g}^{l+1} \right) \end{aligned}$$

方程(9)减去方程(5); 方程(10)减去方程(7),

并令 $f_{i,k,g}^{l+1} = \phi_{i,k,g}^{l+1} - \phi_{i,k,g}^{l+\frac{1}{2}}$, 得

$$\begin{aligned} &\frac{k+1}{\Delta x_i(2k+1)} \left(f_{i+\frac{1}{2},k+1,g}^{l+1} - f_{i-\frac{1}{2},k+1,g}^{l+1} \right) + \left(\Sigma_{t,i,g} - \right. \\ &\quad \left. \Sigma_{s,k,i,g \rightarrow g} \right) f_{i,k,g}^{l+1} = \Sigma_{s,k,i,g \rightarrow g} \left(\phi_{i,k,g}^{l+\frac{1}{2}} - \phi_{i,k,g}^l \right) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} &\frac{k+1}{\Delta x_i(2k+3)} \left(f_{i+\frac{1}{2},k,g}^{l+1} - f_{i-\frac{1}{2},k,g}^{l+1} \right) + \\ &\quad \left(\Sigma_{t,i,g} - \Sigma_{s,k+1,i,g' \rightarrow g} \right) f_{i,k+1,g}^{l+1} \\ &= \Sigma_{s,k+1,i,g \rightarrow g} \left(\phi_{i,k+1,g}^{l+\frac{1}{2}} - \phi_{i,k+1,g}^l \right) \end{aligned} \quad (12)$$

方程(11)和方程(12)仅有 $f_{k,g}^{l+1}$ 、 $f_{k+1,g}^{l+1}$ 两个球谐矩未知量, 加上差分表达式(6)和式(8), 很容易求得各个离散节点上的球谐矩值: $f_{i,k,g}^{l+1}$ 、 $f_{i,k+1,g}^{l+1}$ 。

2.2 边界条件

将角度进行勒让德多项式展开得:

$$\psi(x, \mu_m) = \sum_{k=0}^K (2k+1) \phi_k(x) P_k(\mu_m) \quad (13)$$

2.2.1 真空边界条件 假设右边界条件为真空, 对方程(13)两边乘以 $w_m \mu_m$, 然后对于所有 $\mu_m < 0$ 方向相加, 得:

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu_m < 0} w_m \mu_m \psi^{l+\frac{1}{2}}(x_r, \mu_m) \\ &= \sum_{\mu_m < 0} \sum_{k=0}^K w_m \mu_m (2k+1) \phi_k^{l+\frac{1}{2}}(x_r) P_k(\mu_m) \end{aligned} \quad (14)$$

式中, 角标 r 表示右边界。类似方程(11)、方程(12)的推导, 只更新 $\phi_{i,k,g}^{l+\frac{1}{2}}$ 、 $\phi_{i,k+1,g}^{l+\frac{1}{2}}$ 。根据真空边界处入射流等于零得, 令:

$$\begin{aligned} \beta_k^- &= \sum_{\mu_m < 0} w_m \mu_m (2k+1) P_k(\mu_m) \beta_k^- f_k^{l+1}(x_r) \\ &\quad + \beta_{k+1}^- f_{k+1}^{l+1}(x_r) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

方程(15)为右边界条件为真空的表达式, 左边界条件为真空时的推导类似, 这里不再重述。

2.2.2 反射边界条件 假设左边界条件为反射(即对称), 则对于任意 μ , 有 $\psi(x, \mu) = \psi(x, -\mu)$, 根据(13)式, 易得:

$$\phi_k^{l+1}(x_l) = 0 \quad (k \text{ 为奇数}) \quad (16)$$

式中, 角标 l 表示左边界。方程(16)就是左边界条件为反射的表达式^[3], 当右边界条件为反射时,

推导类似，这里不再重述。

方程(11)、方程(12)加上相应的边界条件方程(15)、方程(16)就构成了方程(3)的修正 P_N 综合加速的一致方程。由加速方程可以看出，让 MPSA 只加速到一阶距，就便退化成传统的 DSA 方法了。

3 数值计算结果

根据以上的理论模型，把 MPSA 方法应用到 ANISN 程序中。为了验证程序的加速效果，列举了以下几个问题的计算结果。

(1)这是一个平面几何单群双区强各向异性散射固定源问题，如图 1 所示，材料 1 内充满各向同性单位强度源，材料 2 无外源。材料 1 和材料 2 的截面数据如表 1 所示。



图 1 几何示意图
Fig. 1 Geometry Sketch

表 1 材料截面 cm^{-1}

Table 1 Material Cross Section cm^{-1}

截面	Σ_t	$\Sigma_{s,0}$	$\Sigma_{s,1}$	$\Sigma_{s,2}$	$\Sigma_{s,3}$
材料 1	1.00	0.60	0.52	0.46	0.40
材料 2	2.00	1.85	1.80	1.75	1.60
截面	$\Sigma_{s,4}$	$\Sigma_{s,5}$	$\Sigma_{s,6}$	$\Sigma_{s,7}$	—
材料 1	0.32	0.20	0.10	0.06	—
材料 2	1.50	1.20	0.80	0.40	—

采用 S_8 计算，收敛准则取 10^{-6} ，计算结果如表 2 所示。从表 2 可以看出，MPSA 加速效果比 DSA 好得多，并且 MPSA 有个最佳加速阶数，由表 2 容易看出，本题没必要 P_7 阶加速，因为 P_5 阶时也只要 18 次迭代次数。

表 2 MPSA 加速效果

Table 2 MPSA Acceleration Effect

加速阶数	未经加速	P_1 (DSA)加速	P_3 加速	P_5 加速	P_7 加速
迭代次数	126	63	26	18	18

(2)本题将上题改成特征值问题，材料 1 内无外源，材料 1 变为裂变材料 $\Sigma_f = 0.4\text{cm}^{-1}$ ，其他数

据和上题完全一样。采用 S_8 计算，收敛准则均取 10^{-6} ，计算结果如表 3 所示。表 3 所列的都是内迭代次数，从表 3 可以看出，对于特征值问题，MPSA 也能大量减少内迭代次数。

表 3 MPSA 加速效果

Table 3 MPSA Acceleration Effect

加速阶数	未经加速	P_1 (DSA)加速	P_3 加速	P_5 加速	P_7 加速
迭代次数	683	221	141	137	139

(3)这是一个平面几何单群单区强各向异性散射固定源问题，宽度为 10.0cm ， $\Sigma_t = 1.0\text{cm}^{-1}$ 。这里各阶散射截面参考电子输运的关系式^[1,2]确定，满足 $\Sigma_{s,n} / \Sigma_t = 1 - n(n+1) / N(N+1)$ ；其中 n 为散射截面阶数， N 为 S_N 中的角标 N 。到处充满各向同性单位强度源，左边界条件为反射，右边界条件为真空，分别采用 S_4 、 S_8 、 S_{16} 计算，收敛准则均取 10^{-6} ，计算结果见表 4。

表 4 MPSA 加速效果

Table 4 MPSA Acceleration Effect

加速阶数	S_N		
	S_4	S_8	S_{16}
未经加速	346	316	386
P_1 (DSA)加速	42	93	191
P_3 加速	15	27	81
P_5 加速	—	21	43
P_7 加速	—	22	38
P_9 加速	—	—	39
P_{11} 加速	—	—	40
P_{13} 加速	—	—	38
P_{15} 加速	—	—	38

从表 4 可以看出，对于强各向异性散射问题，随着离散方向个数的增多，DSA 方法效率递减，而 MPSA 方法可以减少更多的迭代次数。以 S_{16} 为例，未经加速需要迭代 386 次，经 DSA 加速需要 191 次，只少一半迭代次数，而 MPSA 取 P_7 加速时只需要 38 次，迭代次数减少了 90% 以上。同时也看到，并不是取的加速距阶数越高越好， S_{16} 取 P_7 加速就可以。

4 结束语

针对强各向异性的中子输运问题，本文推导了 MPSA 加速方法，并应用到了 ANISN 程序中。初步的数值试验结果表明：MPSA 的加速效果非常明显，随着角度离散方向个数的增多，DSA 方

法逐渐失效,而 MPSA 方法优势越明显。由于计算机的发展,一个一维中子输运方程的计算时间一般都在 1 s 以内,但二维、三维的计算依旧非常耗时,所以笔者正致力于将 MPSA 方法应用到二维、三维中子输运方程程序中。

参考文献:

[1] Khattab K M, Larsen E W. Synthetic Acceleration Meth-

ods for Linear Transport Problems with Highly Anisotropic Scattering[J]. Nucl Sci & Eng, 1991, 107: 217~227.

[2] Khattab K M. The Generalized P_N Synthetic Acceleration Methods for Linear Transport Problems with Highly Anisotropic Scattering[J]. Nucl Sci & Eng, 1996, 125: 171~177.

[3] 曹良志, 吴宏春. 非结构中子输运方程的球谐函数解法研究[J]. 核动力工程, 2004, 25 (5): 395~398.

Acceleration Method for Neutron Transport Equation with Highly Anisotropic Scattering

SUN Xing-guang¹, WU Hong-chun¹, SHEN Zhi-jun²

(1. Xi'an Jiaotong University, Xi'an, 710049, China; 2. Beijing Applied Physics and Computation Mathematics Institute, Beijing, 100088, China)

Abstract: S_N method is widely used to solve neutron transport equation, but S_N method is very slow with highly anisotropic scattering. In this paper, the modified P_N synthetic acceleration (MPSA) method is used to accelerate S_N method, and applied to the code of ANISN which is internationally used. MPSA method not only can accelerate the computation with low-order of angular flux moments, but also with high-order of angular flux moments. So MPSA method is more efficient than DSA method. Numerical results for the test problems demonstrate that MPSA method is quite efficient and robust, especially for the problems with highly anisotropic scattering.

Key words: Neutron transport, Acceleration method, Highly anisotropic scattering

作者简介:

孙幸光(1982—),男,2004年毕业于西安交通大学核工程与核技术系,获学士学位。现攻读核能科学与工程硕士学位。

吴宏春(1964—),男,教授,博士生导师。1994年毕业于西安交通大学核反应堆工程系,获博士学位。现从事核反应堆物理计算研究。

沈智军(1966—),男,研究员,2000年毕业于中国工程物理研究院,获博士学位。现从事输运方程和流体力学数值方法研究。

(责任编辑:张明军)

(上接第 100 页)

作者简介:

刘 杰(1977—),男,博士研究生。主要研究方向为空间探测器的热管冷却。

裴念强(1974—),男,博士研究生。主要研究方向为空间探测器的热管冷却。

郭开华(1956—),男,教授,1988年毕业于美国密西根大学热能动力专业,获博士学位。主要研究方向为空间热控和能源利用。

(责任编辑:张明军)

(上接第 124 页)

作者简介:

孙建华(1964—),男,研究员。华中科技大学系统工程专业博士研究生。现主要从事核动力装置仪表与控制系统的

设计研究。

汪 伟(1974—),男,高级工程师。2004年毕业于哈尔滨工程大学控制理论与控制工程专业,获博士学位。现主要从事核动力装置仪表与控制系统设计研究。

赵福宇(1953—),男,副教授。1976年毕业于西安交通大学反应堆工程专业。现主要从事核动力系统动力学与控制方向的教学和科研工作。

(责任编辑:尚作燕)