清 华 大 学

综 合 论 文 训 练

题目：Vlasov-Poisson 系统的适定性

系　　　别：清华大学工程物理系

专　　　业：数学与应用数学（第二学位）

姓　　　名：魏文崟

指 导 教师：王 学 成　助理教授

联合指导教师：于　　品　教授

2020 年 5 月 31 日

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位论文的复印件，允许该论文被查阅和借阅；学校可以公布该论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存该论文。

(涉密的学位论文在解密后应遵守此规定)

签　名：＿＿＿＿＿＿ 导师签名：＿＿＿＿＿＿ 日　期：＿＿＿＿＿＿

中文摘要

本文作为文献综述，总结了对 Vlasov-Poisson 系统所做的相关研究，回顾 Vlasov-Poisson 问题的适定性问题，即满足什么条件时解有存在性与唯一性，及解在时间上至多局部存在还是可以全局存在的问题。该综述的主体部分按 Horst et al. (1981) 的思路讲述了局部解的适定性问题，即通过光滑化原 Vlasov-Poisson 问题场函数的奇异性，得到逼近解的特征线在该修正逐渐弱化的极限下一致收敛的结果，从而证明原 Vlasov-Poisson 问题的局部的适定性问题。

在第二章中我们先是给出了逼近解的一些估计，总存在一段非空区间上能够一致控制 $\|\mathbf{E}^\varepsilon(t)\|_\infty, \|\rho^\varepsilon(t)\|_\infty$ 和 $\sup\{|\mathbf{V}^\varepsilon(r,0,\mathbf{x},\mathbf{v})-\mathbf{v}|\Big|\mathbf{x},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^N, 0\leqslant r\leqslant t\}$。之后通过 ρ^ε 的 L^1 和 L^∞ 范数及 Lipschitz 连续性对 $\mathbf{E}^\varepsilon$ Lipschitz 连续性的一致控制。以 $\|\rho^\varepsilon\|_\infty, h_v^\varepsilon(t)$ 及 $\mathrm{lip}_x(\mathbf{E}^\varepsilon(t))$ 三者的一致控制为工具，我们得以证明 Vlasov-Poisson 系统的局部适定性。

关键词：Vlasov-Poisson；适定性，爆破性

ABSTRACT

Recent researches on the Vlasov-Poisson system have been concluded in this literature review. The well-posedness problem, when the Vlasov-Poisson system has a global and unique solution has been studied for a long time, is reviewed. The main part of the literature review contains the approximation method used to converge to a local-in-time solution, proving the local well-posedness.

In chapter two, we give the uniform control result of $\|\mathbf{E}^{\varepsilon}(t)\|_{\infty}$, $\|\rho^{\varepsilon}(t)\|_{\infty}$ and $\sup\{|\mathbf{V}^{\varepsilon}(r,0,\mathbf{x},\mathbf{v})-\mathbf{v}|\,\big|\,\mathbf{x},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^N, 0\leqslant r\leqslant t\}$ on an interval. Then by L^1, L^{∞} norm and Lipschitz continuity of ρ^{ε} we can estimate whether $\mathbf{E}^{\varepsilon}$ is Lipschitz continuous uniformly for all $\varepsilon > 0$. With all the uniform control conditions we have acquired, it suffices to prove the local well-posedness of Vlasov-Poisson system.

Keywords: Vlasov-Poisson; well-posedness; blow up

目　录

第 1 章　介绍

1.1　研究背景

Vlasov 类型的偏微分方程系统是描述粒子群多体运动问题的 Boltzmann 方程在无碰撞条件下的简化。粒子群在给定的 $(t,\mathbf{x})$ 处的各向异性的速度分布对系统变化产生了很大的影响，使得对粒子速度空间分布的刻画十分必要。通过将速度空间分布考虑到系统中，即分布函数从时空分布的变为更细致的相空间分布，Vlasov 类型的偏微分方程系统从而能够精确地描述动理学意义上的运动演化规律。准确来说，相空间的分布函数 $f(t,\mathbf{x},\mathbf{v})$ $(x\in\mathbb{R}_x^3,\ v\in\mathbb{R}_v^3,\ t\geqslant 0)$。当电磁力作为主要考虑对象时，即与 Maxwell 方程组耦合的时候 (VM)，Vlasov 方程描述的便是带电粒子与电磁场相互作用的关系，从而描绘物质电磁相互作用的图象。

$$
\text{(VM \& RVM)}\ \begin{cases} f_t+\mathbf{a}(\mathbf{v})\cdot\nabla_x f+(\mathbf{E}+\mathbf{a}(\mathbf{v})\times\mathbf{B})\cdot\nabla_v f=0\\ \mathbf{E}_t=\nabla\times\mathbf{B}-\mathbf{j}\\ \mathbf{B}_t=-\nabla\times\mathbf{E}\\ \nabla\cdot\mathbf{E}=\rho,\quad \nabla\cdot\mathbf{B}=0\end{cases} \tag{1-1}
$$

其中 $\mathbf{a}(\mathbf{v})\in\{\mathbf{v},\hat{\mathbf{v}}\}$, $\hat{\mathbf{v}}:=\mathbf{v}/\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}$ 且

$$
\rho(t,\mathbf{x}):=\int\limits_{\mathbb{R}_v^3} f(t,\mathbf{x},\mathbf{v})d\mathbf{v},\quad \mathbf{j}(t,\mathbf{x}):=\int\limits_{\mathbb{R}_v^3}\mathbf{a}(\mathbf{v})f(t,\mathbf{x},\mathbf{v})d\mathbf{v}. \tag{1-2}
$$

此处 $\mathbf{E},\mathbf{B},\rho$ 和 $\mathbf{j}$ 各表示电场、磁场、空间密度分布和电流密度分布。相对论提出的时空理论，认为光速是有限的，且所有物质的速度都慢于光速 $\mathbf{a}(\mathbf{v})=\hat{\mathbf{v}}<1$，从而有非相对论型的 Vlasov-Maxwell 系统 (VM) 和非相对论型的 Vlasov-Maxwell 系统 (RVM)。

进一步简化，当电磁相互作用中静电相互作用力占主导时，洛伦兹力、磁场等的要素可以被简化掉，从而我们可以电磁学中的 Vlasov-Poisson 系统。同时，Vlasov-Poisson 系统还在天文学中也起到重要作用，它们有以下的一般形式，区

别在于我们加入了 μ 将 $\mathbf{E}$ 的方向置反。

$$(\text{VP \& RVP}) \begin{cases} \partial_t f + \mathbf{a}(\mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\nabla}_x f + \mu \boldsymbol{\nabla}_x \phi \cdot \boldsymbol{\nabla}_v f = 0 \\ \Delta\phi = \rho(f) := \int_{\mathbb{R}_v^3} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} \end{cases} \tag{1-3}$$

其中 $\mu \in \{+, -\}, \mathbf{a}(\mathbf{v}) \in \{\mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}}\}$, 且 $\hat{\mathbf{v}} := \mathbf{v}/\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}$. μ 的符号正负表示不同的物理图象，其为”+” 表示等离子体物理中同种电荷的相互排斥的库伦作用，而”-” 表示星体动力学在万有引力主导下的作用规律。简化后的 (VP) 系统对应与 (VM) 系统 1-1 有如下的特殊电磁场，

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = -\boldsymbol{\nabla}_x \phi(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{B} = 0, \quad \phi = \frac{1}{|\mathbf{x}|} * \rho \tag{1-4}$$

(VP) 实际上表明了粒子群在一种势场作用下的运动规律，这种势场由粒子本身产生，在 $N = 3$ 维空间中场强与 $1/r^2$ （r 为粒子之间的距离）成正比，这使得 Vlasov-Poisson 问题中的场可能 $\mathbf{E} \notin \mathrm{L}^{\frac{3}{2}}$。当 Vlasov-Poisson 系统用来讨论近似静电学问题时它表明的是排斥的库伦相互作用 ($\mu = +1$)，而在星体动力学中则是万有引力的相互作用 ($\mu = -1$)。

当考虑多粒子 (Multi-species) 相互作用问题时，和单粒子情况在数学上没有本质的区别，通过对不同种粒子给定其质量 q_i 和电荷量 m_i 即可求解，其方程不在此赘述。但注意在引力作用 $\mu = -1$ 时，没有多粒子的物理图像。

1.2 特征线

在 Vlasov 型问题的研究中经常使用的是偏微分方程中的常用技巧，特征线:$s \mapsto X(s, t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ $s \mapsto V(s, t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$，它定义为以下相应的常微分方程组的解:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}}{ds} &= \mathbf{a}(\mathbf{V}) = \{\mathbf{V}, \mathbf{V}/\sqrt{1+|\mathbf{V}|^2}\} \\ \frac{d\mathbf{V}}{ds} &= \mu \mathbf{E}(\mathbf{X}, s) \end{aligned} \tag{1-5}$$

具体来说，在 Vlasov 型问题中，它表示在 t 时刻过 $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ 点的特征线的轨迹，即 $\mathbf{X}(t, t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{x}$, $\mathbf{V}(t, t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{v}$。有时，当 $(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 明确时，我们直接使用 $\mathbf{X}(s)$ 来简化符号，特别是当我们研究单条特征线时。

沿特征线偏微分方程求解的函数值不变，因此，若初始数据有界，自然地有 $||f(t, \cdot, \cdot)||_\infty = ||f_0||_\infty < \infty$。在下一章对 VP 奇性弱化后解的扩展中我们将讨论

更多的特征线的性质。

1.3 适定性的相关结果

我们将只研究 Vlasov-Poisson 问题的经典解，即在这些解上对应的特征线的常微分方程有着唯一经典解。这种情况下解的局部存在性对于给定的 N 维空间已经由 Horst and Neunzert (1981) 证明，我们将在第二章做重点梳理。已知全局存在的情况如下:

非相对论情况:

(i) $n=2$ ，Illner and Neunzert (1979)

(ii) $n=3$ 时 f_0 球对称，Horst and Neunzert (1982)

(iii) $n=3$ 时 f_0 柱对称，Hellwig (1964)

(iv) $n=3$ ，Lions and Perthame (1991)

(v) $n=4$ 时 f_0 球对称且足够小，Hellwig (1964)

相对论情况:

(i) $n=3$, $\mu=1$ 且 f_0 球对称; $\mu=-1$, 初值足够小且球对称，Glassey and Schaeffer (1985)。两者初值都需要紧支集条件。

(ii) $n=3$, $\mu=1$, 初值球对称且有局域约束条件，Wang (2020).

另外，$n \geqslant 4$ 时，即使 $f_0 \in C_c^\infty\left(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n\right)$ 性质相当好，也不一定有全局解, Horst and Neunzert (1982).

对于经典解来说，其存在性和唯一性结果已经由 Iordanskii，Ukai and Okabe (1978) 和 Bardos and Degond (1985) 分别在一维、二维和三维下对小初值给出了。经典解的具有对称性的初值问题也有 Batt (1977), Wollman (1980), Horst and Neunzert (1981), Schaeffer (1987) 等讨论过，其中 Schaeffer (1987) 还在同一片文章中处理了相对论情况的对称初值问题.

特别的在三维空间的话，综述第二章讨论的局部适定性对 $N=3$ 没有给出全局的结果，弱解在相当弱的意义下全局存在 (Abdallah (1994); Arsen'ev (1975)), 如果 Cauchy 问题初值足够小全局经典解也可以存在，Bardos and Degond (1985)。

当讨论到某些量的范数，(RVP) 可能确实不如 (VP) 。比如 $\mu=+1$ 时，$\rho \in L^{4/3}(\mathbb{R}_x^3)$ 是比非相对论的情形（$\rho \in L^{5/3}(\mathbb{R}_x^3)$）要更差的。不过通过 Batt (1977) 和 Wollman (1980) 仍然可以证明当 $\mu=+1$ 时全局球对称解的存在性。而对于引力情况 $\mu=-1$，Glassey and Schaeffer (1985) 证明了其解的存

在性被弱化了，只有在初值满足条件，足够小时 $40\mathscr{M}^{2/3}\|f_0\|_\infty^{1/3} < 1$ 才能确保 (RVP) 存在全局解。同时其还举了不存在全局解的反例，此时若初始能量 $\mathscr{E}_0 := \int_{\mathbb{R}_x^3}\left\langle\int_{\mathbb{R}_v^3}\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}f\,d\mathbf{v}+\frac{1}{2}\gamma|\mathbf{E}|^2\right\rangle d\mathbf{x}$ 为负，那么这样一个球对称的经典解的不存在全局解，其延续时间必然有限。

在没有初值紧支集的假设下，对 (VP) 系统的全局适定性问题也有众多的研究者论述。(VP) 系统已经成功地解决了对大初值的适定性的问题，Pfaffelmoser (1992), Lions and Perthame (1991) 和 Schaeffer (1991) 等人做了相关工作。

Pfaffelmoser (1992) 在外加了初值二阶矩存在的条件下给出了可以在 $\mathbb{R}_0^+$ 上控制住速度最大变化量的控制函数，从而证明了解的全局适定性。几乎与此同时Lions and Perthame (1991) 做出了独立的工作, 将(VP) 将左侧的部分 $\nabla_v f$ 置于右侧视为源项，从而通过特征线的方法导出控制不等式，证明了 v 高阶矩的延续性质。更准确点说便是，如果 $|\mathbf{v}|^m f_0 \in L^1(\mathbb{R}^6)$ 对任意的$m < m_0$,其中$m_0 > 3$,则我们有 Vlasov-Poisson 方程的解也满足 $|\mathbf{v}|^m f(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) \in L^1(\mathbb{R}^6)$ 对任意的$m < m_0$,其中$m_0 > 3$ 对任意的 $t > 0$。以高阶矩矩在任意有限时间内的有界性推出了场在任意有限时间内的有界性，从而说明解可以被一直延续下去，也就是说解具有全局存在性。

1.4 朗道阻尼

表示静电相互作用的 Vlasov-Poisson 系统能够刻画等离子体物理领域著名的朗道现象，它是等离子体在大时间尺度时的渐进行为。将 Vlasov-Poisson 方程中的 $\nabla_v f$ 替换为 $\nabla_v f_0$ 得到的线性化 Vlasov-Poisson 系统 (Linearized Vlasov-Poisson System)，便能够一定程度上刻画朗道阻尼的表现；线性朗道阻尼理论便在其之上首先发展起来。

物理学家首先通过 Fourier-Laplace 变换求解线性化 (VP) 问题，并且希望确定电势 $\phi(t,\mathbf{x})$ 是否在大时间尺度时表示为平面波的形式。他们发现除非存在 f 的 Laplace 变化的解析延拓，除非在涉及到的函数的解析性质足够好的情况下可以做出。然而，这些假设都在许多物理图象中得到了验证。

除了这种方法之外，相当早期的研究（Kampen (1955) 和 Case (1959)）用到了正交模式展开的方法。Degond (1986) 研究了线性化 (VP) 的谱理论来证明它的行为在大时间尺度下表现得如平面波的和。其研究表明要想得到阻尼波展开的分布函数，需要对(VP) 预解式的解析延拓。

线性的研究理论是朗道阻尼研究中很长一段时间的焦点，而在此之上的非线性朗道阻尼理论，则由 Mouhot and Villani (2011) 在近期给出。其阻尼线性被重新诠释为一种正则性在动力学量和空间相关变量之间的转移，而不是能量的交换。这项研究还揭示了阻尼的驱动机制确实是相混合（phase mixing）。

1.5 符号标记

文献综述时描述局部解的适定性问题主要参考 Horst and Neunzert (1981)，大部分标记和定义沿用了其原文，一定程度上做了修改。

文章中的 C 通常表示不依赖于初始条件的常数，而 K 则是依赖于初始条件的常数，它们在我们研究给定 Cauchy 初值条件的时候都可视为常数。函数符号方面则用 $C_+(I) := \{f : I \to [0,\infty) \big| f$ 连续且单调增$\}$ 表示我们用来控制的函数空间，其中 I 是一个区间，H 常常表示一个 $C_+(I)$ 或 $C_+([0,\infty))$ 集合中的函数，而用 h 表示通过在一段时间对某个量，如电场 $\mathbf{E}$ 的大小，取上确界 sup 得到的单调增函数。通常当需要对某个量进行控制的时候，我们会取该量在一段时间上的上确界作为新的函数，并通过 $C_+(I)$ 中的函数对它进行控制。

函数积分的时候进行积分域的分割常将不同的积分项命名为 I_1, I_2 等，由于只是局部的使用，为简介起见，在不同的积分式分割中积分项均以下标 1 开始，应不会产生混淆。

$\omega_N := 2 \cdot \pi^{N/2}/\Gamma(N/2)$ 是 N 维空间中 $(N-1)$ 维的单位球面的表面积。

本文中谈到的积分和测度总是基于 Lebesgue 意义下的，$\mathrm{L}_\infty\left(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^L\right)$ 和 $\|\cdot\|_\infty$ 遵循实分析的通常定义。$\mathrm{L}_p\left(\mathbb{R}^M\right) := L_p\left(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}\right)$

对所有的函数 $f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^L$, Lipschitz 常数按惯例为 $\mathrm{lip}(f) := \sup_{z\neq w} |z - w|^{-1} |f(z) - f(w)|$。$\mathrm{Lip}\left(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^L\right) := \left\{f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^L \mid \mathrm{lip}(f) < \infty\right\}$, $\mathrm{Lip}\left(\mathbb{R}^M\right) := \mathrm{Lip}\left(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}\right)$

第 2 章　Vlasov-Poisson 系统的局部解

这一章中我们阐述 Horst and Neunzert (1981) 采用的通过构造一族误差可以任意小的逼近解来证明 Vlasov-Poisson 系统的局部适定性。具体来说这一章我们将证明以下结论。

定理 2.1： *(VP 问题的适定性)* 假设 $f_0 \in \mathrm{L}_1\left(\mathbb{R}^{2N}\right)$ 满足 $\sup f_0$ 控制条件和 v 球内 $\mathrm{lip}(f_0)$ 控制条件。那么存在最大的 $0 < T^* \leqslant \infty$ 使得 VP 的解 f^0 在 $[0, T^*)$ 上存在且唯一。

具体证明见本章最后一节。

因为积分核有奇异性，常用的分析方法无法直接给出适定性的结果，所以 Horst et al. (1981) 的想法是 (i) 先构造逼近解，也就是解决 $\mathrm{VP}^\varepsilon(\varepsilon > 0)$ 问题，由于 VP^ϵ 问题中核函数的奇异性被移除了，经典的分析手段告诉我们逼近解的存在性 $\mathrm{VP}^\varepsilon(\varepsilon > 0)$；(ii) 逼近解的一些重要估计，例如 $\mathrm{lip}_x(\mathbf{E}(t))$ 等；(iii) 估计逼近解之间的误差，得出逼近解的一致收敛性。

在此之前我们需要做一些定义上的扩展，第一节先给出了 VP^ε 问题给出的逼近解的定义。第二节给出在$\sup f_0$ 控制条件下，逼近解的一些估计，主要是对 $\|\mathbf{E}^\epsilon(t)\|_\infty, \|\rho^\varepsilon(t)\|_\infty$ 和 $\sup\{|\mathbf{V}^\epsilon(r, 0, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \mathbf{v}| \,\big|\, \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, 0 \leqslant r \leqslant t\}$ 的一致控制。第三节给出对 $\mathbf{E}^\epsilon$ Lipschitz 常数的一致控制。第四节说明 f^ε 确实在 $I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ 上当取极限 $\varepsilon \to 0$ 时一致收敛到 f^0，主要依据是特征线确实随着 $\varepsilon \to 0$ 一致收敛，这是在本章最后的第四节完成的。

2.1　定义扩展

$$(\text{VP \& RVP}) \begin{cases} \partial_t f + \mathbf{a}(\mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\nabla}_x f + \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\nabla}_v f = 0 \\ \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \mu \int \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^N} \rho(t, \mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} \end{cases} \tag{2-1}$$

$f_0 \in \mathrm{L}_1\left(\mathbb{R}^{2N}\right)$ 总是表示所考虑的偏微分问题的初值条件。用 $m := \|f_0\|_1$ 表示初始质量, 即相空间分布函数的 L_1 范数。场函数积分核的奇性我们用参数

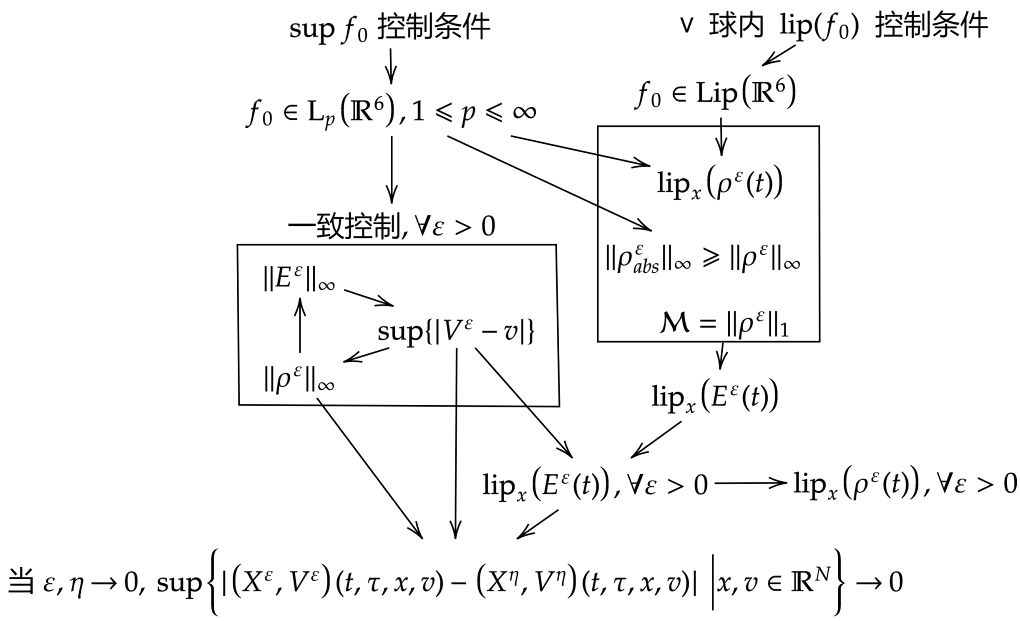

图 2.1　图中所示为证明适定性过程中各个命题证明的前后序列，其中箭头表示我们证明命题的前后关系，而不是逻辑上的充分条件; 出现在图中的变量表示存在 $H \in C_{+}(I)$ 中函数对其控制，$\forall \varepsilon > 0$ 表示对 ε 一致控制。

ε 进行了削弱，新的积分核为

$$\mathbf{e}^{\varepsilon}(\mathbf{z}) = \mu \cdot \frac{\mathbf{z}}{\left(|\mathbf{z}|^2 + \varepsilon\right)^{N/2}}, \qquad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^N, \varepsilon \geqslant 0$$

参数 ε 弱化了场函数的奇性，相当于重新定义了新的偏微分方程 $\mathrm{VP}^{\varepsilon}$ 问题，下面拓宽对它的定义。

定义 2.1： *($\mathrm{VP}^{\varepsilon}$ 问题及其解)* 假设 $I \subset [0,\infty)$ 是一个含 0 的区间。称 $f^{\varepsilon} : I \times \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ 是 $\mathrm{VP}^{\varepsilon}(\varepsilon \geqslant 0$ 固定) 在 I 上的解, 如果它满足下面的条件：

(1) $f(0,\cdots) = f_0$

(2) 对任意的 $t \in I, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ 有下列映射的可积性，
$\left((\mathbf{y},\mathbf{u}) \mapsto \mathbf{e}^{\varepsilon}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \cdot f^{\varepsilon}(t,\mathbf{y},\mathbf{u})\right) \in \mathrm{L}_1\left(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R}^N\right)$

(3) $\mathbf{E}^{\varepsilon}(t,\mathbf{x}) := \iint_{\mathbb{R}^6} \mathbf{e}^{\varepsilon}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \cdot f^{\varepsilon}(t,\mathbf{y},\mathbf{u}) \mathbf{d}\mathbf{y}\mathbf{d}\mathbf{u}$ 用来替换原来的有奇异性的场函数积分核。要求 $\mathrm{VP}^{\varepsilon}$ 问题解的分布函数产生的 $\mathbf{E}^{\varepsilon}$ 在 $I \times \mathbb{R}^N$ 上连续，且对任意的 $t \in I$ 有 $\mathbf{E}^{\varepsilon}(t,\cdot) \in \mathrm{C}_b^0\left(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N\right) \cap \mathrm{Lip}\left(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N\right)$ 并存在 $H_{\rho}^{\varepsilon}, H_{lip(E)}^{\varepsilon} \in$

$C_+(I)$ 使得对任意的 $t \in I$

$$\|\mathbf{E}^\varepsilon(t,\cdot)\|_\infty \leqslant H_E^\varepsilon(t), \quad \operatorname{lip}\left(\mathbf{E}^\varepsilon(t,\cdot)\right) \leqslant H_{\operatorname{lip}(E)}^\varepsilon(t)$$

(4) 解 f^ε 直接通过 VP^ε 特征线的常微分问题来定义，这是因为沿特征线有 f^ε 不变的特性. 具体而言场修正后的特征线方程如下，

$$\dot{\mathbf{X}}^\varepsilon = \mathbf{V}^\varepsilon, \dot{\mathbf{V}}^\varepsilon = \mathbf{E}^\varepsilon\left(t, \mathbf{X}^\varepsilon\right), \quad t \in I, \tag{2-2}$$

它对任一初值 $\mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ 在 I 上均有唯一解，这由 (3) 中的对场强的控制条件来保证。$f(t,\mathbf{x},\mathbf{v})$ 通过沿特征线给定常微分方程的初值状态（实际是末值）来追溯到特征线 $t=0$ 时刻的 f_0 值, $\mathbf{X}^\varepsilon(t)=\mathbf{x}, \mathbf{V}^\varepsilon(t)=\mathbf{v}$, 即

$$f^\varepsilon(t,\mathbf{X}^\varepsilon(t),\mathbf{V}^\varepsilon(t)) = f^\varepsilon(0,\mathbf{X}^\varepsilon(0),\mathbf{V}^\varepsilon(0)) = f_0(\mathbf{X}^\varepsilon(0),\mathbf{V}^\varepsilon(0)), \quad t \in I$$

如果 $I=[0,\infty)$, f^ε 被称为一个全局（时域）解，否则被称为局部解。

定理 2.2： *(VP^ε 当 $\varepsilon>0$ 时的适定性)* 如果 $\varepsilon>0$，那么存在着 VP^ε 的唯一全局解 f^ε。如果 $I \subset [0,\infty)$ 是一个含 0 的区间，那么 $f^\varepsilon|_{I\times\mathbb{R}^{2N}}$ 是 I 上的解，并且该解唯一。

证明 此处可以引用 Horst (1975) 硕士论文中采用的方法，但以此得到的 $H_E^\varepsilon(t), H_{lip(E)}^\varepsilon(t)$ 是 ε 的负幂的乘积，故而注意对 $\varepsilon=0$ 的情况不适用。 □

定义 2.2： 假设 f^ε 是 $\mathrm{VP}^\varepsilon(\varepsilon \geqslant 0$固定$)$ 在 I 上的解. 对任意的 $t_0 \in I, (\mathbf{x},\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{2N}$, 记 $\mathbf{X}(s,t_0,\mathbf{x},\mathbf{v}), \mathbf{V}(s,t_0,\mathbf{x},\mathbf{v}): I\times I\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ 为特征线常微分方程满足以下初值问题的解。

$$\mathbf{X}^\varepsilon\left(t_0,t_0,\mathbf{x},\mathbf{v}\right)=\mathbf{x}, \quad \mathbf{V}^\varepsilon\left(t_0,t_0,\mathbf{x},\mathbf{v}\right)=\mathbf{v}$$

引理 2.1： *(特征线相关性质)*

特征线有以下性质：

(i) $\mathbf{X}^\varepsilon, \mathbf{V}^\varepsilon$ 在 $I\times I\times\mathbb{R}^{2N}$ 上连续

(ii) 给定 $t_1, t_2 \in I$ 函数 $\mathbf{X}^\varepsilon\left(t_1,t_2,\cdot\right)$ 是 $\mathbb{R}^{2N}$ 映到 $\mathbb{R}^{2N}$ 上的保测度（Lebesgue）同胚。

(iii) 因为沿特征线偏微分方程的待求函数值 f^ε 不变，我们有对任意的 $t, t_1 \in I, x \in \mathbb{R}^{2N}$

$$f^{\varepsilon}\left(t,\mathbf{X}^{\varepsilon}\left(t,t_1,\mathbf{x},\mathbf{v}\right),\mathbf{V}^{\varepsilon}\left(t,t_1,\mathbf{x},\mathbf{v}\right)\right)=f_0\left(\mathbf{X}^{\varepsilon}(0,t_1,\mathbf{x},\mathbf{v})\right)$$

$$f^{\varepsilon}(t,\mathbf{x},\mathbf{v})=f_0\left(\mathbf{X}^{\varepsilon}(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v}),\mathbf{V}^{\varepsilon}(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v})\right) \tag{2-3}$$

于是对任意的 $t\in I$，$f^{\varepsilon}(t,\cdot)$ 和 f_0 有着相同的值域, 因此 $f^{\varepsilon}\geqslant 0$ 当且仅当 $f_0\geqslant 0$ 并且 $\sup|f^{\varepsilon}(t,\cdot,\cdot)|=\sup|f_0|$。$f^{\varepsilon}$ 在 $I\times\mathbb{R}^{2N}$ 上连续，当且仅当 f_0 在 $\mathbb{R}^{2N}$ 上连续。

(iv) 对任意的 $t,t_1\in I$ 和任何可测函数 $\sigma:\mathbb{R}^{2N}\rightarrow\mathbb{R}^{M}$，我们有 $\sigma\in \mathrm{L}_1\left(\mathbb{R}^{2N},\mathbb{R}^{M}\right)$ 的充要条件是 $\sigma\circ(\mathbf{X}^{\varepsilon},\mathbf{V}^{\varepsilon})\left(t_1,t,\cdot\right)\in \mathrm{L}_1\left(\mathbb{R}^{2N},\mathbb{R}^{M}\right)$. 此时

$$\int\sigma(\mathbf{x},\mathbf{v})\mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{v}=\int\sigma\left(\mathbf{X}^{\varepsilon}\left(t_1,t,\mathbf{x},\mathbf{v}\right),\mathbf{V}^{\varepsilon}\left(t_1,t,\mathbf{x},\mathbf{v}\right)\right)\mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{v}$$

特别地 $\left(t_1=0,\sigma=|f_0|^p\right)$ 时，对任意的 $t\in I$ 有 $f^{\varepsilon}(t,\cdot)\in \mathrm{L}_p\left(\mathbb{R}^{2N}\right)$, 当且仅当 $f_0\in \mathrm{L}_p\left(\mathbb{R}^{2N}\right)$ 且此时 $\|f^{\varepsilon}(t,\cdot)\|_p=\|f_0\|_p$, $1\leqslant p<\infty$

(v) 定义 $\rho^{\varepsilon}(t,\mathbf{x}):=\int f^{\varepsilon}(t,\mathbf{x},\mathbf{v})\mathrm{d}\mathbf{v},\rho^{\varepsilon}_{abs}(t,\mathbf{x}):=\int|f^{\varepsilon}(t,\mathbf{x},\mathbf{v})|\,\mathrm{d}\mathbf{v}$. 对任意的 $t\in I$，$\rho^{\varepsilon}(t,\cdot),\rho^{\varepsilon}_{abs}(t,\cdot)\in \mathrm{L}_1\left(\mathbb{R}^{N}\right)$ 且 $\|\rho^{\varepsilon}(t,\cdot)\|_1\leqslant\left\|\rho^{\varepsilon}_{abs}(t,\cdot)\right\|_1=\|f_0\|_1=\mathscr{M}$

证明 从一阶常微分方程的标准理论可以得出上述结论, (Hartman, 2002)[pp. 131]。关于 $(\mathbf{X}^{\varepsilon},\mathbf{V}^{\varepsilon})\left(t,t_1,\cdot\right)$ 即使 $\mathbf{E}^{\varepsilon}$ 不可导的情况下仍是保测度的同胚映射的证明可以在 (Batt, 1962)[pp. 62]。

2.2 局部上逼近解的一致控制

假设 2.1： 假设 f^{ε} 是 VP$^{\varepsilon}$ ($\varepsilon\geqslant 0$ 定值) 问题在 I 上的解

1. 定义 f_0 满足 $\sup f_0$ 控制条件：如果存在合适的 K_1,K_2（可以依赖于初值的常数）使得下式对所有的 $a\geqslant 0$ 成立，

$$\int^{*}\underbrace{\sup\left\{|f_0(\mathbf{x},\mathbf{u})||\mathbf{x},\mathbf{u}\in\mathbb{R}^{N},|\mathbf{u}-\mathbf{v}|\leqslant a\right\}}_{\text{该部分为}\mathbf{v}\text{ 的函数}}\mathrm{d}\mathbf{v}\leqslant K_1\cdot\left(K_2+a\right)^{N} \tag{2-4}$$

($\int^{*}\cdots\mathrm{d}\mathbf{x}$ 标记为上 Lebesgue 积分)

2. 定义 f_0 满足 $\underline{v\text{ 球内 } \mathrm{lip}(f_0) \text{ 控制条件}}$ 为：存在一个函数 $h \in C_+([0,\infty))$ 使得对所有 $a \geqslant 0$ 有下式，

$$\begin{aligned}\int^* \sup\{\frac{|f_0(\mathbf{y},\mathbf{u})-f_0(\mathbf{z},\mathbf{w})|}{|(\mathbf{y},\mathbf{u})-(\mathbf{z},\mathbf{w})|}\Big|(\mathbf{y},\mathbf{u}),(\mathbf{z},\mathbf{w}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N,\\ (\mathbf{y},\mathbf{u}) \neq (\mathbf{z},\mathbf{w}), |\mathbf{u}-\mathbf{v}|, |\mathbf{w}-\mathbf{v}| \leqslant a\}\mathrm{d}\mathbf{v} \leqslant h(a)\end{aligned} \tag{2-5}$$

注意本来这里 $h \in C_+([0,\infty))$ 应该用简介中介绍的符号 H，但为与原文吻合用了 h。

注意 $\sup f_0$ 控制条件可推导出 f_0 是有界的, 即 $f_0 \in \mathrm{L}_\infty\left(\mathbb{R}^{2N}\right)$。若以 K_1, K_2 满足 $\sup f_0$ 控制条件的 f_0,设 $\hat{f}_0(\mathbf{v}) = \sup\left\{|f_0(\mathbf{x},\mathbf{v})| | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N\right\}$,若其在 $B_R(\mathbf{y}) \subset \mathbb{R}^3_v$（$B_R(\mathbf{y})$ 半径为 R, 中心为 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ 的开球）中无界，则对于任意的 $C_0 > 0$ 均可找到 $\hat{f}_0(\mathbf{v}) > C_0, \mathbf{v} \in B_R(\mathbf{y})$，设 $a = 2R$，则$\sup f_0$ 控制条件判别式左侧积分大于 $CR^N C_0$，而右侧的是固定的 $K_1 \cdot \left(K_2 + a\right)^N$，取足够大的 C_0 使不等式不成立引出矛盾。又因为 $f_0 \in \mathrm{L}_1\left(\mathbb{R}^{2N}\right)$, 故$\sup f_0$ 控制条件实际上给出了 f_0 很好的可积性，对任意的 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 有 $f_0 \in \mathrm{L}_p\left(\mathbb{R}^{2N}\right)$。另外观察 v 球内 $\mathrm{lip}(f_0)$ 控制条件类似的可导出 $f_0 \in \mathrm{Lip}\left(\mathbb{R}^{2N}\right)$。

本节主要依赖 $\sup f_0$ 控制条件在控制 $|\rho^\varepsilon(r,\mathbf{x})|, |\mathbf{E}^\varepsilon(r,\mathbf{x})|, |\mathbf{V}^\varepsilon(r,0,\mathbf{x},\mathbf{v})-\mathbf{v}|$；下一节还将依赖于 v 球内 $\mathrm{lip}(f_0)$ 控制条件控制 $\mathrm{lip}\left(\mathbf{E}^\varepsilon(t,\cdot)\right) \leqslant H_{lip(E)}(t)$。

对 $\mathbf{E}$ 的定义积分式粗糙地取积分内各项绝对值则有不等式 $|E^\varepsilon(t,\mathbf{x})| \leqslant \int |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{1-N} \cdot \left|\rho^\varepsilon_{abs}\right|(t,\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}$。借助于这个不等式，通过下面的引理及之后的推论可以证明 $\|E^\varepsilon(t,\cdot)\|_\infty$ 有界。

引理 2.2： 假设 $0 < \alpha < N, p \in (1,\infty], q \in [1,\infty)$ $p > N/(N-\alpha) > q$ 且 $\sigma \in \mathrm{L}_p\left(\mathbb{R}^N\right) \cap \mathrm{L}_q\left(\mathbb{R}^N\right)$. 则对于任意的 $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$ 有

$$\int |\mathbf{z}-\mathbf{w}|^{-\alpha} \cdot |\sigma(\mathbf{w})| \mathrm{d}\mathbf{w} \leqslant \bar{C}(N,\alpha,p,q) \cdot \|\sigma\|_p^\lambda \cdot \|\sigma\|_q^\mu \tag{2-6}$$

其中常数有 $\tilde{C}(N,\alpha,p,q)$, $\lambda := (\alpha/N - 1 + 1/q)/(1/q - 1/p)$ 及 $\mu := 1 - \lambda$.

令 $\tilde{C}_{min}(N,\alpha,p,q)$ 为对任意的 $\sigma \in \mathrm{L}_p\left(\mathbb{R}^N\right) \cap \mathrm{L}_q\left(\mathbb{R}^N\right)$，(2-6) 式均成立的常数。

证明 将 (2-6) 的积分域分为球内外的两部分 $R > 0$，通过 Hölder 不等式,

$$I_1 \leqslant \| |\mathbf{z}-\mathbf{x}|^{-\alpha} \cdot 1_{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|\leqslant R} \|_{p'} \|\sigma\|_p = \left(\frac{\omega_N}{N-\alpha p'} \right)^{1/p'} R^{(N/p')-\alpha} \|\sigma\|_p$$

$$I_2 \leqslant \| |\mathbf{z}-\mathbf{x}|^{-\alpha} \cdot 1_{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|> R} \|_{q'} \|\sigma\|_q = \left(\frac{-\omega_N}{N-\alpha q'} \right)^{1/q'} R^{(N/q')-\alpha} \|\sigma\|_q$$

p' 和 q' 大小为 $p^{-1}+p'^{-1}=q^{-1}+q'^{-1}=1$。

上述两式右侧的加和作为 R 的函数取最小值得到 const. $\|\sigma\|_p^{\lambda} \cdot \|\sigma\|_q^{\mu}.$，即 $\tilde{C}(N,\alpha,p,q)\|\sigma\|_p^{\lambda} \cdot \|\sigma\|_q^{\mu}.$ □

以上引理将在下面被我们用来以 $\|\rho^{\varepsilon}(t,\cdot)\|_p$ 范数控制 $|\mathbf{E}^{\varepsilon}(r,\mathbf{x})|$。

定理 2.3： *(逼近解的估计)*

假设 f_0 满足 $\sup f_0$ 控制条件，那么

当 $N=1,2$ 时，存在 $H_N(t)\in C_+(I), I:=[0,\infty)$，使得对任何 $t\in[0,\infty)$，

$$\sup_{\varepsilon>0, 0\leqslant r\leqslant t, \mathbf{x}\in\mathbb{R}^N, \mathbf{v}\in\mathbb{R}^N} |\rho^{\varepsilon}(r,\mathbf{x})|, |\mathbf{E}^{\varepsilon}(r,\mathbf{x})|, |\mathbf{V}^{\varepsilon}(r,0,\mathbf{x},\mathbf{v})-\mathbf{v}| \leqslant H_N(t) \tag{2-7}$$

当 $N\geqslant 3$ 时，存在一个 $T>0$ 和 $H_N(t)\in C_+(I)$，$I:=[0,T]$，使得对任何 $t\in[0,T]$，我们有

$$\sup_{\varepsilon>0, 0\leqslant r\leqslant t, \mathbf{x}\in\mathbb{R}^N, \mathbf{v}\in\mathbb{R}^N} |\rho^{\varepsilon}(r,\mathbf{x})|, |\mathbf{E}^{\varepsilon}(r,\mathbf{x})|, |\mathbf{V}^{\varepsilon}(r,0,\mathbf{x},\mathbf{v})-\mathbf{v}| \leqslant H_N(t) \tag{2-8}$$

证明 首先我们证明下述三个控制条件是等价的，即如果我们可以一致控制其中任意一项，则我们也可以一致控制其他项，

(i) 存在函数 $H_\rho(t)\in C_+(I)$，使得

$$|\rho^{\varepsilon}(t,\mathbf{x})| \leqslant H_\rho(t) \text{ 对任意的} \varepsilon>0, t\in I, \mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$$

(ii) 存在函数 $H_E(t)\in C_+(I)$，使得

$$|\mathbf{E}^{\varepsilon}(t,\mathbf{x})| \leqslant H_E(t) \text{ 对任意的} \varepsilon>0, t\in I, \mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$$

(iii) 存在函数 $H_v(t)\in C_+(I)$，使得

$$|\mathbf{V}^{\varepsilon}(t,0,\mathbf{x},\mathbf{v})-\mathbf{v}| \leqslant h_v^{\varepsilon}(t) \leqslant H_v(t) \text{ 对任意的} \varepsilon>0, t\in I, \mathbf{x},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^N$$

(i) $\Rightarrow$(ii) 由引理 2.2 $(\alpha=N-1, p=\infty, q=1)$

$$|\mathbf{E}^{\varepsilon}(t,\mathbf{x})| \leqslant \tilde{C}_{min}(N,N-1,\infty,1)\cdot\left(\|\rho^{\varepsilon}(t,\cdot)\|_{\infty}\right)^{(N-1)/N}\cdot\mathscr{M}^{1/N}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : $h_{v}^{\varepsilon}(t) \leqslant \int_{0}^{t}\sup\left\{\|E^{\varepsilon}(\tau,\cdot)\|_{\infty}|0\leqslant\tau\leqslant r\right\}\mathrm{d}r$

(iii) $\Rightarrow$ (i): 对任意的 $t\in I$，令

$$\begin{aligned} h_{v}^{\varepsilon}(t) := &\sup\left\{|\mathbf{V}^{\varepsilon}(0,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})-\mathbf{v}|\,\middle|\,\mathbf{x},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{N},0\leqslant\tau\leqslant t\right\}\\ =&\sup\left\{|\mathbf{V}^{\varepsilon}(\tau,0,\mathbf{x},\mathbf{v})-\mathbf{v}|\,\middle|\,\mathbf{x},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{N},0\leqslant\tau\leqslant t\right\}\end{aligned}$$

速度最大改变量应被场强上确界控制住

$$\leqslant\int_{0}^{t}\sup\left\{\|\mathbf{E}^{\varepsilon}(\tau,\cdot)\|_{\infty}\middle|0\leqslant\tau\leqslant r\right\}\mathrm{d}r=:\int_{0}^{t}h_{E}^{\varepsilon}(r)\mathrm{d}r<\infty$$

于是，因为速度的最大改变量被 $h_{v}^{\varepsilon}(t)$ 控制住了，只有那些速度相近的"粒子"对于任意的才能在 t 时刻到达 $\mathbf{x},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{N}$ 对密度做贡献。

$$\begin{aligned}|f^{\varepsilon}(t,\mathbf{x},\mathbf{v})|&=\left|f_{0}\left(\mathbf{X}^{\varepsilon}(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v}),\mathbf{V}^{\varepsilon}(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v})\right)\right|\\ &\leqslant\sup\left\{|f_{0}(\mathbf{y},\mathbf{u})|\,\middle|\,\mathbf{y},\mathbf{u}\in\mathbb{R}^{N},|\mathbf{u}-\mathbf{v}|\leqslant h_{v}^{\varepsilon}(t)\right\}\end{aligned}$$

左侧 $\int\cdots d\mathbf{v}$ 积分，右侧 $\int^{*}\cdots d\mathbf{v}$ 上 Lebesgue 积分可得

$$\rho_{abs}^{\varepsilon}(t,\mathbf{x})\leqslant K_{1}\cdot\left(K_{2}+h_{v}^{\varepsilon}(t)\right)^{N}$$

$$|\rho^{\varepsilon}(t,\mathbf{x})|\leqslant K_{1}\cdot\left(K_{2}+h_{v}^{\varepsilon}(t)\right)^{N}\leqslant K_{1}\cdot\left(K_{2}+h_{v}(t)\right)^{N}$$

现相互等价关系得证，下面我们确实地找一个函数 $H_{v}(t)\in C_{+}([0,\infty))$ 来控制住 h_{v}^{ε}。对于一个固定的 ε，令 $h_{v+}^{\varepsilon}:=K_{2}+h_{v}^{\varepsilon}(t)$，上面等价的三式联立可得下式对任意的 ε 均成立，

$$h_{v+}^{\varepsilon}(t)\leqslant K_{2}+\int_{0}^{t}K_{3}\cdot(h_{v+}^{\varepsilon}(r))^{N-1}\mathrm{d}r \tag{2-9}$$

□

其中，$K_{3}:=\tilde{C}_{min}(N,N-1,\infty,1)\cdot\mathscr{M}^{1/N}\cdot\left(K_{1}\right)^{(N-1)/N}$。用非线性 Gronwall 引理 A.1，从而我们可以控制住 $h_{v+}^{\varepsilon}(t)$ 的大小，用该不等式容许的最大的解 g，

即常微分方程 $g' = K_3 \cdot (g)^{N-1}, g(0) = K_2$ 的解所控制。当 $N \neq 2$ 时，$g(t) = [(-N+2)K_3 t + K_2^{-N+2}]^{\frac{1}{-N+2}}$。它能够在一段区间 $[0, K_2^{-(N-2)}/(N-2)K_3)$ 内控制住 $h_v^\varepsilon(t) \leqslant h_{v+}^\varepsilon(t) \leqslant g(t)$。

$N = 1, 2$ 时易见可以全局控制，则 $I = [0, \infty)$ 得证。

$N \geqslant 3$ 时令 $T = K_2^{-(N-2)}/(2(N-2)K_3)$，可以推出 $g(t)$ 在 $[0, T]$ 上是符合控制条件的，则得证。

2.3 $\mathbf{E}^\varepsilon$ 的 Lipschitz 连续性

本节将证明在两个假设的铺垫下，$\mathbf{E}^\varepsilon(t, \cdot)$ 和 $\rho^\varepsilon(t, \cdot)$ 是 Lipschitz 连续的。且当 I 上满足定理 2.3 给出的控制条件时，可不依赖于 ε 地控制其 Lipschitz 常数。首先引入了下面的引理，通过用 ρ^ε 的 $\mathrm{L}^1, \mathrm{L}^\infty$ 范数及 Lipschitz 常数来控制 $\mathrm{lip}_x(\mathbf{E}^\varepsilon)$。

引理 2.3： 令 $\varepsilon \geqslant 0, \mu = \pm 1$。假设 $\sigma : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 对任意的 $t \in I$ 满足 $\sigma(t, \cdot) \in \mathrm{L}_1\left(\mathbb{R}^N\right) \cap \mathrm{L}_\infty\left(\mathbb{R}^N\right) \cap \mathrm{Lip}\left(\mathbb{R}^N\right)$。令 $\mathbf{E}^\varepsilon(t, \mathbf{x}) := \int \mathbf{e}^\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \sigma(t, \mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y}, t \in I, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$. 则有 $\mathbf{E}^\varepsilon(t, \cdot) \in \mathrm{Lip}\left(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N\right)$ 且

$$\begin{aligned}\mathrm{lip}(\mathbf{E}^\varepsilon(t, \cdot)) \leqslant & \omega_N \left(N^{-1} + N^2 \cdot \log(1 + \mathrm{lip}(\sigma(t, \cdot)))\right) \cdot \|\sigma(t, \cdot)\|_\infty \\ & + N^2 \left(\omega_N + \|\sigma(t, \cdot)\|_1\right)\end{aligned} \tag{2-10}$$

证明 细节参阅 Horst and Neunzert (1981) Sect. 3。

以上面的引理为基础，我们要证明 $\mathbf{E}^\varepsilon$ 和 ρ^ε 对 $\varepsilon > 0$ 一致的 Lipschitz 连续性。

引理 2.4： 假设 f_0 满足 $\sup f_0$ 控制条件和 v 球内 $\mathrm{lip}(f_0)$ 控制条件两个条件且 I 为满足定理 2.3 的区间，则存在函数 $H_{lip(\rho)}, H_{lip(E)} \in C_+(I)$ 使得对任意的 $\varepsilon > 0, t \in I$ 有

$$\mathrm{lip}\left(\mathbf{E}^\varepsilon(t, \cdot)\right) \leqslant H_{lip(E)}(t), \quad \mathrm{lip}\left(\rho^\varepsilon(t, \cdot)\right) \leqslant H_{lip(\rho)}(t)$$

证明 先证存在一个函数 $H^\varepsilon_{lip_x(\rho)}(t) \in C_+(I)$ 使得对任意的 $t \in I$

$$\mathrm{lip}\left(\rho^\varepsilon(t, \cdot)\right) \leqslant H^\varepsilon_{lip_x(\rho)}(t) \tag{2-11}$$

已在定理 2.3 中证明对任意的 $t \in I$, $\sup_{\varepsilon>0}\left\{|\mathbf{V}^\varepsilon(0,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})-\mathbf{v}|\,\middle|\mathbf{x},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^N, 0\leqslant\tau\leqslant t\right\}\leqslant H_N(t)<\infty$。现对 $\mathbf{E}$ 的 Lipschitz 常数在时间上取上界得到函数 $h^\varepsilon_{lip(E)}(t):=\sup\left\{\operatorname{lip}\left(\mathbf{E}^\varepsilon(r,\cdot)\right)|0\leqslant r\leqslant t\right\}$ 通过它控制不同特征线在 VP$^\varepsilon$ 问题解中渐行渐远的尺度，再由 Gronwall 引理导出对 Lipschitz 常数的控制。先建立以下的不等式，

$$
\begin{aligned}
&|(\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})-(\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(t,\tau,\mathbf{y},\mathbf{u})|\\
=&\left|(\mathbf{x},\mathbf{v})-(\mathbf{y},\mathbf{u})+\int_\tau^t\left(\mathbf{V}^\varepsilon(r,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})-\mathbf{V}^\varepsilon(r,\tau,\mathbf{y},\mathbf{u}),\mathbf{E}^\varepsilon\left(r,\mathbf{X}^\varepsilon(r,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})\right)-\mathbf{E}^\varepsilon\left(r,\mathbf{X}^\varepsilon(r,\tau,\mathbf{y},\mathbf{u})\right)\right)\mathrm{d}r\right|\\
\leqslant&|(\mathbf{x},\mathbf{v})-(\mathbf{y},\mathbf{u})|+\int_\tau^t\left(1+h^\varepsilon_{lip(E)}(r)\right)\cdot|(\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(r,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})-(\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(r,\tau,\mathbf{y},\mathbf{u})|\,\mathrm{d}r
\end{aligned}
$$

对任何一个 $H^*\in C_+(I)$ 且 $H^*(t)\geqslant h^\varepsilon_{lip(E)}(t), t\in I$ 的函数，我们有

$$
\text{上式}\leqslant|(\mathbf{x},\mathbf{v})-(\mathbf{y},\mathbf{u})|+\int_\tau^t\left(1+H^*(r)\right)\cdot|(\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(r,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})-(\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(r,\tau,\mathbf{y},\mathbf{u})|\,\mathrm{d}r \tag{2-12}
$$

对上式我们用非线性 Gronwall 引理 A.1 有

$$
\Rightarrow \operatorname{lip}_{x,v}\left((\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(t,\tau,\cdot)\right)\leqslant\exp\left(\left|\int_\tau^t\left(1+H^*(r)\right)\mathrm{d}r\right|\right)
$$

我们总可以在 $C_+(I)$ 中找一个单调减的序列，它几乎处处收敛于 $h^\varepsilon_{lip(E)}$. 从而上式可推出

$$
\operatorname{lip}_{x,v}\left((\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(t,\tau,\cdot)\right)\leqslant\exp\left(\left|\int_\tau^t\left(1+h^\varepsilon_{lip(E)}(r)\right)\mathrm{d}r\right|\right) \tag{2-13}
$$

有了上面的工具后我们可以正式研究 ρ^ε 了，令 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^N$

$$
\begin{aligned}
&|\rho^\varepsilon(t,\mathbf{x})-\rho^\varepsilon(t,\mathbf{y})|\leqslant\int|f^\varepsilon(t,\mathbf{x},\mathbf{v})-f^\varepsilon(t,\mathbf{y},\mathbf{v})|\,\mathrm{d}\mathbf{v}\\
&=\int\left|f_0\left((\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v})\right)-f_0\left((\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(0,t,\mathbf{y},\mathbf{v})\right)\right|\mathrm{d}\mathbf{v}\\
&\leqslant\int^*\sup\left\{\frac{|f_0(\mathbf{x},\mathbf{u})-f_0(\mathbf{y},\mathbf{w})|}{|(\mathbf{x},\mathbf{u})-(\mathbf{y},\mathbf{w})|}\middle|(\mathbf{x},\mathbf{u})\neq(\mathbf{y},\mathbf{w}),|\mathbf{u}-\mathbf{v}|,|\mathbf{w}-\mathbf{v}|\leqslant h_v^\varepsilon(t)\right\}\\
&\quad\cdot|(\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v})-(\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(0,t,\mathbf{y},\mathbf{v})|\,\mathrm{d}\mathbf{v}\\
&\leqslant h\left(h_v^\varepsilon(t)\right)\cdot\mathrm{lip}_{x,v}\left((\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(0,t,\cdot)\right)\cdot|\mathbf{x}-\mathbf{y}|
\end{aligned}
$$

h 是v 球内 $\mathrm{lip}(f_0)$ 控制条件中给定的控制函数，于是

$$
\begin{aligned}
\mathrm{lip}\left(\rho^\varepsilon(t,\cdot)\right)&\leqslant h\left(h_v^\varepsilon(t)\right)\cdot\mathrm{lip}_{x,v}\left((\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(0,t,\cdot)\right)\\
&\leqslant h\left(h_v^\varepsilon(t)\right)\cdot\exp\left(\int_0^t\left(1+h^\varepsilon_{lip(E)}(r)\right)\mathrm{d}r\right)
\end{aligned}
$$

定理 2.3 揭示了 I 上存在 $H_N\in C_+(I)$ 使得对任意的 $\varepsilon>0,t\in I$ 有 $h_v^\varepsilon(t)\leqslant H_N(t)$ 说明对 ε 是一致有界的，于是

$$
\mathrm{lip}\left(\rho^\varepsilon(t,\cdot)\right)\leqslant h\left(H_N(t)\right)\cdot\exp\left(\int_0^t\left(1+h^\varepsilon_{lip(E)}(r)\right)\mathrm{d}r\right)\tag{2-14}
$$

定理 2.3 还告诉我们该 $H_N\in C_+(I)$, 还使下式对所有的 $\varepsilon>0,t\in I$ 成立，

$$
\|\rho^\varepsilon(t,\cdot)\|_\infty\leqslant H_N(t)\tag{2-15}
$$

通过上述两不等式和引理 2.3，可导出对任意的 $t\in I$，有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{lip}\left(E^\varepsilon(t,\cdot)\right)\leqslant&\omega_N\left(N^{-1}+N^2\cdot\log\left(1+\mathrm{lip}\left(\rho^\varepsilon(t,\cdot)\right)\right)\right)\cdot H_\rho^\varepsilon(t)+N^2\cdot\left(\omega_N+\mathscr{M}\right)\\
\leqslant&\omega_N\cdot\left(N^{-1}+N^2\cdot\log\left(1+h\left(H_N(t)\right)\cdot\exp\left(\int_0^t\left(1+h^\varepsilon_{lip(E)}(r)\right)\mathrm{d}r\right)\right)\right)\\
&\cdot H_N(t)+N^2\cdot\left(\omega_N+\mathscr{M}\right)\\
\leqslant&\omega_N\cdot\left(N^{-1}+N^2\cdot\left(\log\left(1+h\left(H_N(t)\right)\right)+\int_0^t\left(1+h^\varepsilon_{lip(E)}(r)\right)\mathrm{d}r\right)\right)\\
&\cdot H_N(t)+N^2\cdot\left(\omega_N+\mathscr{M}\right)
\end{aligned}
$$

右式是对 t 单调增的，所以我们把左式对 t 求上界也没有问题，不等式仍然成立，即不等式左侧取为 $\sup\left\{\operatorname{lip}\left(E^{\varepsilon}(r,\cdot)\right) | 0 \leqslant r \leqslant t\right\} =: h^{\varepsilon}_{lip(E)}(t)$ 仍成立。注意这时候我们又可以用非线性的 Gronwall 引理 A.1。Gronwall 引理 A.1 告诉我们，$h^{\varepsilon}_{lip(E)}$ 有不依赖于 ε 的函数 $H_{lip(E)} \in C_{+}(I)$ 控制住它。

再回到关于 $\operatorname{lip}\left(\rho^{\varepsilon}(t,\cdot)\right)$ 的不等式 2-14，现在有下式对它进行一致控制

$$\operatorname{lip}\left(\rho^{\varepsilon}(t,\cdot)\right) \leqslant h\left(H_N(t)\right) \cdot \exp\left(\int_0^t \left(1 + H_{lip(E)}(r)\right) \mathrm{d}r\right) =: H_{lip(\rho)}(t)$$

□

现在两者的 Lipschitz 常数都被一致控制住了。

2.4 $\varepsilon \to 0$ 时解的一致收敛性

本章中我们将证明 VP^0 的解的适定性的结果，即我们在本章开头引入的定理 2.1。当 I 上有定理 2.3 需要的控制条件时，(VP) 的解必存在并唯一，而我们总是可以对满足$\sup f_0$ 控制条件的初值找到一个满足控制条件的区间 I，再结合上节中v 球内 $\operatorname{lip}(f_0)$ 控制条件推导出来的 $\mathbf{E}$ 的 Lipschitz 连续性，可控制不同修正参数 ε 时特征线的误差，用 Cauchy 判据证明 $\varepsilon \to 0$ 时特征线收敛，并对于任意的 $(t, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 一致，从而证得解存在且唯一。

引理 2.5： 对任意的 $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N, \varepsilon, \eta \geqslant 0$ 下式成立

$$\left|\mathbf{e}^{\varepsilon}(\mathbf{z}) - \mathbf{e}^{\eta}(\mathbf{z})\right| \leqslant 2 \cdot N \cdot |\mathbf{z}|^{-N+1/2} \cdot \left|\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}\right|$$

证明

$$\begin{aligned}
\left|\mathbf{e}^{\varepsilon}(\mathbf{z}) - \mathbf{e}^{\eta}(\mathbf{z})\right| &= \left|\int_{\eta}^{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial\lambda}\mathbf{e}^{\lambda}(\mathbf{z})\mathrm{d}\lambda\right| = \left|-(N/2) \cdot \int_{\eta}^{\varepsilon} \left(\mathbf{z}^2 + \lambda\right)^{-N/2-1} \mathbf{z}\mathrm{d}\lambda\right| \\
&\leqslant (N/2) \cdot \left|\int_{\eta}^{\varepsilon} \left(\mathbf{z}^2 + \lambda\right)^{-(N+1)/2} \mathrm{d}\lambda\right| \leqslant (N/2) \cdot |\mathbf{z}|^{-N+1/2} \cdot \left|\int_{\eta}^{\varepsilon} \lambda^{-3/4}\mathrm{d}\lambda\right| \\
&= 2N \cdot |\mathbf{z}|^{-N+1/2} \cdot \left|\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}\right|
\end{aligned} \tag{2-16}$$

□

下面即对本章的大定理 2.1 ，即局部解的适定性进行证明。

证明 对满足sup f_0 控制条件的初值，我们总能根据2.3 给出一个区间 $I := [0,T]$ 上对于 $\sup\left\{|\mathbf{V}^\varepsilon(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v})-\mathbf{v}|\,\Big|\mathbf{x},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^N\right\}, \|\rho^\varepsilon(t,\cdot)\|_\infty$ 的一致控制。加上上一节在v 球内 $\mathrm{lip}(f_0)$ 控制条件下对 $\mathrm{lip}_x(\mathbf{E}(t))$ 的一致控制。从而在闭区间 I 上有对任意的 $\varepsilon>0, t\in I$，存在常数可以控制住 ρ^ε 和 $\mathbf{E}^\varepsilon$ 使得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{lip}\left(\mathbf{E}^\varepsilon(t,\cdot)\right)\leqslant C_{lip(E)}\\
&\sup\left\{|\mathbf{V}^\varepsilon(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v})-\mathbf{v}|\,\Big|\mathbf{x},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^N\right\}\leqslant C_v\\
&\|\rho^\varepsilon(t,\cdot)\|_\infty\leqslant\|\rho^\varepsilon_{abs}(t,\cdot)\|_\infty\leqslant C_\rho
\end{aligned}
$$

定义 2.3： 对于给定的 $\varepsilon>0$ 和 $\eta>0$，定义 $t,\tau\in I$ 的函数：

$$
f^{\varepsilon,\eta}(t,\tau):=\sup\left\{|(\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})-(\mathbf{X}^\eta,\mathbf{V}^\eta)(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})|\,\Big|\mathbf{x},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^N\right\},
$$

即所有从 τ 到 t 的特征线，τ 时起始状态一样，末状态在 VP^ε 和 VP^η 两种解之间差异范数的上确界，即 $|(\mathbf{X}^\varepsilon-\mathbf{X}^\eta,\mathbf{V}^\varepsilon-\mathbf{V}^\eta)|$。它刻画了 VP^ε 在参数 ε 的作用下解会发生至多多大的改变。

为了证明能通过对 $\mathbf{X}^\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ 取极限得到 $\mathbf{X}^0$，需要说明 $\lim_{\varepsilon\to0}\mathbf{X}^\varepsilon$ 在 $I\times I\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ 上一致收敛。下面通过 Cauchy 准则来证明这一点, 具体来说是证明存在 $n>0$ 可以用 $K|\varepsilon^n-\eta^n|$ （K 为常数）来控制住 $f^{\varepsilon,\eta}(t,\tau)$。

引理 2.6：

$$
f^{\varepsilon,\eta}(t,\tau)\leqslant K|\varepsilon^{1/4}-\eta^{1/4}|\ \text{对于任意的}t,\tau\in I,\varepsilon,\eta>0 \tag{2-17}
$$

其中 K 是依赖于 f_0 的常数。

如果该引理成立, 它实际上说明 $\lim_{\varepsilon\to0}(\mathbf{X}^\varepsilon)$ 在 $I\times I\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上一致收敛。

证明 为了控制 $f^{\varepsilon,\eta}$, 下面我们会先介绍一些关于 $\|\mathbf{E}^\varepsilon(t,\cdot)-\mathbf{E}^\eta(t,\cdot)\|_\infty, \|\rho^\varepsilon-\rho^\eta\|_\infty$

的估计。

$$
\begin{aligned}
&|(\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})-(\mathbf{X}^\eta,\mathbf{V}^\eta)(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})|\\
=&\left|\int_\tau^t \left(\mathbf{V}^\varepsilon(r,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})-\mathbf{V}^\eta(r,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v}),\mathbf{E}^\varepsilon\left(r,\mathbf{X}^\varepsilon(r,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})\right)-\mathbf{E}^\eta\left(r,\mathbf{X}^\eta(r,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})\right)\right)\mathrm{d}r\right|\\
\leqslant&\left|\int_\tau^t f(r,\tau)\mathrm{d}r\right|+\int_\tau^t |\mathbf{E}^\varepsilon(r,\mathbf{X}^\varepsilon(r)\big)-\mathbf{E}^\varepsilon\left(r,\mathbf{X}^\eta(r)\right|\mathrm{d}r+\int_\tau^t |\mathbf{E}^\varepsilon(r,\mathbf{X}^\eta(r)\big)-\mathbf{E}^\eta\left(r,\mathbf{X}^\eta(r)\right|\mathrm{d}r
\end{aligned}
\tag{2-18}
$$

为了控制 $\mathbf{E}^\varepsilon(t,\mathbf{x})-\mathbf{E}^\eta(t,\mathbf{x})$ 积分, 需要估计 $\|\mathbf{E}^\varepsilon(t,\cdot)-\mathbf{E}^\eta(t,\cdot)\|_\infty$，我们在下面分解了积分核 $\mathbf{e}=:\mathbf{e}^1+\mathbf{e}^2$，从而有

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}^\varepsilon(t,\mathbf{x})-\mathbf{E}^\eta(t,\mathbf{x})=&:I_1+I_2+I_3 \text{ 其中}\\
I_1&=\int\left(\mathbf{e}^\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{y})-\mathbf{e}^\eta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right)\cdot\rho^\varepsilon(t,\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}\\
I_2&=\int\mathbf{e}^{\eta,1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\left(\rho^\varepsilon(t,\mathbf{y})-\rho^\eta(t,\mathbf{y})\right)\mathrm{d}\mathbf{y}\\
I_3&=\int\mathbf{e}^{\eta,2}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\left(\rho^\varepsilon(t,\mathbf{y})-\rho^\eta(t,\mathbf{y})\right)\mathrm{d}\mathbf{y},
\end{aligned}
$$

Horst et al. (1981) 将 $\mathbf{e}^\varepsilon$ 切割成了两部分，(i) $\mathbf{e}^{\varepsilon,1}(\mathbf{z}) := \mu\cdot\left(\varepsilon+\max\left\{1,\mathbf{z}^2\right\}\right)^{-N/2}\cdot\mathbf{z}$, (ii) $\mathbf{e}^{\varepsilon,2}(\mathbf{z}) := \mathbf{e}^\varepsilon(\mathbf{z})-\mathbf{e}^{\varepsilon,1}(\mathbf{z})$。只要将 $\mathbf{e}^\varepsilon$ 分成两部分，一部分是 Lipschitz 连续的，另外一部分是 L^1 的都可以满足要求。这样选取的分解有，$\mathrm{lip}\left(\mathbf{e}^{\varepsilon,1}\right)\leqslant N^2$, $\left\|\mathbf{e}^{\varepsilon,2}\right\|_1\leqslant\omega_n\cdot N/(N+1)$, 由引理 2.2

$$
\begin{aligned}
\left|I_1\right|&\leqslant\int 2N\cdot|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-N+1/2}\cdot\left|\varepsilon^{1/4}-\eta^{1/4}\right|\cdot\left|\rho^\varepsilon(t,\mathbf{y})\right|\mathrm{d}\mathbf{y}\\
&\leqslant 2N\mathscr{M}^{1/2N}\tilde{C}_{min}(N,N-1/2,\infty,1)\cdot C_\rho^{(N-1/2)/N}\cdot\left|\varepsilon^{1/4}-\eta^{1/4}\right|\\
&=:K_5\cdot\left|\varepsilon^{1/4}-\eta^{1/4}\right|\\
\left|I_2\right|&=\left|\int\left(\mathbf{e}^{\eta,1}\left(\mathbf{x}-\mathbf{X}^\varepsilon(t,0,\mathbf{y},\mathbf{u})\right)-\mathbf{e}^{\eta,1}\left(\mathbf{x}-\mathbf{X}^\eta(t,0,\mathbf{y},\mathbf{u})\right)\right)\cdot f_0(\mathbf{y},\mathbf{u})\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\mathbf{u}\right|\\
&\leqslant\mathscr{M}\cdot\mathrm{lip}\left(\mathbf{e}^{\eta,1}\right)\cdot f^{\varepsilon,\eta}(t,0)\leqslant\mathscr{M}\cdot N^2\cdot f^{\varepsilon,\eta}(t,0)=:K_4\cdot f^{\varepsilon,\eta}(t,0)
\end{aligned}
$$

命题 2.1： 要控制 $|I_3|$, 先估计 $\|\rho^\varepsilon - \rho^\eta\|_\infty$，

$$
\begin{aligned}
|\rho^\varepsilon(t,\mathbf{x}) - \rho^\eta(t,\mathbf{x})| &= \left|\int f_0\left((\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v})\right) - f_0\left((\mathbf{X}^\eta,\mathbf{V}^\eta)(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v})\right)\mathrm{d}\mathbf{v}\right| \text{ 对于任意的}\mathbf{x}\in\mathbb{R}^N \\
&\leqslant \int^{*} \sup\left\{\frac{|f_0(\mathbf{y},\mathbf{u}) - f_0(\mathbf{z},\mathbf{w})|}{|(\mathbf{y},\mathbf{u}) - (\mathbf{z},\mathbf{w})|}\middle|(\mathbf{y},\mathbf{u}) \neq (\mathbf{z},\mathbf{w}), |\mathbf{u}-\mathbf{v}|, |\mathbf{w}-\mathbf{v}| \leqslant C_v\right\} \\
&\quad \cdot |\mathbf{X}^\varepsilon(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v}) - \mathbf{X}^\eta(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v})|\,\mathrm{d}\mathbf{v} \leqslant h\left(C_v\right)\cdot f^{\varepsilon,\eta}(0,t)
\end{aligned}
\tag{2-19}
$$

其中函数 $h \in C_+(\mathbb{R}_0^+)$ 是满足 v 球内 $\mathrm{lip}(f_0)$ 控制条件对应的控制函数。

$$
\left|I_3\right| \leqslant \left\|\mathbf{e}^{\eta,2}\right\|_1 \cdot \|\rho^\varepsilon(t,\cdot) - \rho^\eta(t,\cdot)\|_\infty \leqslant \omega_N(N/(N+1)) \cdot h\left(C_v\right) \cdot f^{\varepsilon,\eta}(0,t) =: K_3 \cdot f^{\varepsilon,\eta}(0,t)
$$

因此可说明存在（仅依赖于 f_0）常数 K_3, K_4 和 K_5, 但不依赖于 ε 和 η，使得对任意的 $t \in I$,

$$
\|\mathbf{E}^\varepsilon(t,\cdot) - \mathbf{E}^\eta(t,\cdot)\|_\infty \leqslant K_3 \cdot f^{\varepsilon,\eta}(0,t) + K_4 \cdot f^{\varepsilon,\eta}(t,0) + K_5\left|\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}\right|, \tag{2-20}
$$

现在可以回到不等式 (2-18) 继续控制 $|(\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v}) - (\mathbf{X}^\eta,\mathbf{V}^\eta)(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})|$,

$$
\begin{aligned}
&|(\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v}) - (\mathbf{X}^\eta,\mathbf{V}^\eta)(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})| \\
&\leqslant \left|\int_\tau^t \left(1 + C_{lip(E)}\right)\cdot f^{\varepsilon,\eta}(r,\tau) + K_3\cdot f^{\varepsilon,\eta}(0,r) + K_4\cdot f^{\varepsilon,\eta}(r,0) + K_5\cdot\left|\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}\right|\mathrm{d}r\right| \\
\Rightarrow f^{\varepsilon,\eta}(t,\tau) &\leqslant \left|\int_\tau^t \left(\left(1 + C_{lip(E)}\right)\cdot f^{\varepsilon,\eta}(r,\tau) + \max\left\{K_3, K_4\right\}\cdot\left(f^{\varepsilon,\eta}(0,r) + f^{\varepsilon,\eta}(r,0)\right)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + K_5\cdot\left|\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}\right|\right)\mathrm{d}r\right| \text{ 对任意的} t,\tau \in I
\end{aligned}
\tag{2-21}
$$

这个不等式看上去十分复杂但我们可以通过双变元函数的 Gronwall 引理 A.2 来简化。从而得到一个不依赖于 ε 和 η 的常数 K，使得对于所有的 $t,\tau \in I$ 有下式

$$
f^{\varepsilon,\eta}(t,\tau) = \sup\left\{|(\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v}) - (\mathbf{X}^\eta,\mathbf{V}^\eta)(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})|\,|\mathbf{x},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{2N}\right\} \leqslant K\cdot\left|\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}\right| \tag{2-22}
$$

控制 $f^{\varepsilon,\eta}$ 的不等式得以出现。 □

有上述证明的一致收敛性现在可以定义，对于 $t, \tau \in I, \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$,

$\mathbf{X}^0(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v}) := lim_{\varepsilon\to 0}\ \mathbf{X}^\varepsilon(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})$, $\mathbf{V}^0(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v}) := lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{V}^\varepsilon(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})$, $f^0(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) := f_0\left(\mathbf{X}^0(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v}),\mathbf{V}^0(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v})\right)$. 虽然还未说明他们是 VP$^\varepsilon$ 问题 $\varepsilon = 0$ 的解，下面的论证会确定其确实是解。

不等式 2-20 又控制了不同 ε 之间 $\mathbf{E}$ 的差异，对 $t \in I, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ 定义 $E^0(t,\mathbf{x}) := \lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{E}^\varepsilon(t,\mathbf{x})$ 也有一致收敛，也能说明 E^0 在 $I\times\mathbb{R}^N$ 上连续；且 $\|\mathbf{E}^0(t,\cdot)\|_\infty \leqslant C_E$ 及其 Lipschitz 常数也有 $\mathrm{lip}\left(E^0(t,\cdot)\right) \leqslant C_{lip(E)}$。

对于任意的 $\varepsilon > 0$ 有下式，

$$(\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v}) = (\mathbf{x},\mathbf{v}) + \int_\tau^t \left(\mathbf{V}^\varepsilon(r,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v}),\mathbf{E}^\varepsilon\left(r,\mathbf{X}^\varepsilon(r,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})\right)\right)\mathrm{d}r$$

$\mathbf{X}^\varepsilon$ 和 $\mathbf{E}^\varepsilon$ 的一致收敛性意味着上式 $\varepsilon = 0$ 仍有效，由此知 $(\mathbf{X}^0,\mathbf{V}^0)$ 满足微分方程 (VP) 和初值条件。

而 v 球内 $\mathrm{lip}(f_0)$ 控制条件可证 $f_0 \in \mathrm{Lip}\left(\mathbb{R}^{2N}\right)$, 于是有下式，

$$\begin{aligned}&\left|f^\varepsilon(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) - f^0(t,\mathbf{x},\mathbf{v})\right| = \left|f_0\left((\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v})\right) - f_0\left((\mathbf{X}^0,\mathbf{V}^0)(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v})\right)\right| \\ &\leqslant \mathrm{lip}(f_0)\cdot\sup\left\{\left|(\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v}) - (\mathbf{X}^0,\mathbf{V}^0)(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v})\right| \mathbf{x},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^N, t \in I\right\} \to 0, \varepsilon \to 0\end{aligned}$$

□

这表明 $\left(f^\varepsilon\right)_{\varepsilon>0}$ 在 $I\times I\times\mathbb{R}^{2N}$ 上，$\varepsilon \to 0$ 时是一致收敛的，从而找到了满足(VP) 的解，证明 I 上解的存在性。

至于其唯一性，则相对简单：如果 VP^0 的一个解 f^0 在 I 上存在并且定理 2.3 的控制条件, 那么引理 2.6 中，$\eta = 0$ 的情况该不等式也成立了，也就是 $\mathbf{X}^0(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{X}^\varepsilon(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})$, $\mathbf{X}^0$ 、$f^0(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) = f_0\left(\mathbf{X}^0(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v}),\mathbf{V}^0(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v})\right)$ 被该极限唯一地确定了，从而证明了唯一性。

以上我们确定了在 I 上的局部适定性，对于 $N = 1, 2$ 得到了全局适定性。进一步，$N \geqslant 3$ 时，进一步我们证明闭区间 I 是可以延续的，$f^\varepsilon(T,\cdot)$ 以常数 K_1 和 $K_2 + C_v$ 满足sup f_0 控制条件

$$\begin{aligned}&\sup\left\{|f^\varepsilon(T,\mathbf{y},\mathbf{u})|\Big|\mathbf{y},\mathbf{u}\in\mathbb{R}^N, |\mathbf{u}-\mathbf{v}| \leqslant a\right\} \\ \leqslant &\sup\left\{|f_0(\mathbf{X}^\varepsilon(0,T,\mathbf{y},\mathbf{u}),\mathbf{V}^\varepsilon(0,T,\mathbf{y},\mathbf{u}))|\Big|\mathbf{y},\mathbf{u}\in\mathbb{R}^N, |\mathbf{u}-\mathbf{v}| \leqslant a\right\} \\ \leqslant &\sup\left\{|f_0(\mathbf{y},\mathbf{u})|\Big|\mathbf{y},\mathbf{u}\in\mathbb{R}^N, |\mathbf{u}-\mathbf{v}| \leqslant a + C_v\right\}\end{aligned}$$

即 $f^0(T,\cdots)$ 满足$\sup f_0$ 控制条件条件,类似的可以证明 $f^\varepsilon(T,\cdot)$ 还以函数 $h'(t) :=$ $h(t+C_v)$ 满足v 球内 $\mathrm{lip}(f_0)$ 控制条件。进而 $f^0(T,\cdot)$ 可以作为初值再次给出局部解的适定性，通过不断延拓，我们得到序列 $\{T_n\}, n\in\mathbb{N}$，这是一个单调递增序列，则要不它有上确界，解在全局存在且唯一，$T^* = \infty$；要不它有上确界 $T_n < T^* < \infty$，从而定理得证。

公式索引

参考文献

Abdallah N B. 1994. Weak solutions of the initial-boundary value problem for the vlasov-poisson system[J/OL]. 17(6):451-476[2020-03-13]. https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/mma.1670170604.

Arsen'ev A A. 1975. Global existence of a weak solution of vlasov's system of equations[J/OL]. 15(1):131-143[2020-03-14]. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/004155537590141X.

Bardos C, Degond P. 1985. Global existence for the vlasov-poisson equation in 3 space variables with small initial data[C]//Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis: volume 2. Elsevier: 101-118.

Batt J. 1962. Fixpunktprobleme bei partiellen differentialgleichungen im zusammenhang mit dem statistischen anfanfswertproblem der stellardynamik[M/OL]. Rheinisch–Westfälische Technische Hochschule, Aachen. https://books.google.com/books?id=BSryAAAAMAAJ.

Batt J. 1977. Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics[J]. Journal of Differential Equations, 25(3):342-364.

Beesack P R. 1975. Gronwall inequalities[M]. [Ottawa : Carleton University, Dept. of Mathematics].

Case K M. 1959. Plasma oscillations[J/OL]. 7(3):349 - 364. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491659900296.

Degond P. 1986. Spectral theory of the linearized vlasov-poisson equation[J/OL]. 294(2):435-453[2020-03-13]. https://www.ams.org/tran/1986-294-02/S0002-9947-1986-0825714-8/.

Glassey R T, Schaeffer J. 1985. On symmetric solutions of the relativistic vlasov-poisson system[J/OL]. 101(4):459-473[2020-03-13]. https://doi.org/10.1007/BF01210740.

Hartman P. 2002. Classics in applied mathematics: Ordinary differential equations[M/OL]. Society for Industrial and Applied Mathematics. https://books.google.com/books?id=CENAPMUEpfoC.

Hellwig G. 1964. Blaisdell book in the pure and applied sciences: Partial differential equations: an introduction[M/OL]. Blaisdell Pub. Co. https://books.google.com.hk/books?id=qBGoAAAAIAAJ.

Horst E. 1975. Zum statistischen Anfangswertproblem der Stellardynamik[D]. Munchen，Germany.

Horst E, Neunzert H. 1981. On the classical solutions of the initial value problem for the unmodified non-linear vlasov equation i general theory[J/OL]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 3(1):229-248. https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/mma.1670030117.

Horst E, Neunzert H. 1982. On the classical solutions of the initial value problem for the unmodified non-linear vlasov equation ii special cases[J/OL]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 4(1):19-32. https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/mma.1670040104.

Illner R, Neunzert H. 1979. An existence theorem for the unmodified vlasov equation[J/OL]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 1(4):530-544. https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/mma.1670010410.

Kampen N G V. 1955. On the theory of stationary waves in plasmas[J/OL]. 21(6):949 - 963. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031891455930688.

Lions P L, Perthame B. 1991. Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov-Poisson system.[J]. Inventiones Mathematicae, 105:415.

Mouhot C, Villani C. 2011. On landau damping[J/OL]. Acta Math., 207(1):29-201. https://doi.org/10.1007/s11511-011-0068-9.

Pfaffelmoser K. 1992. Global classical solutions of the vlasov-poisson system in three dimensions for general initial data[J/OL]. 95(2):281-303[2020-04-14]. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002203969290033J.

Schaeffer J. 1991. Global existence of smooth solutions to the vlasov poisson system in three dimensions[J/OL]. 16(8):1313-1335[2020-03-13]. https://doi.org/10.1080/03605309108820801.

Schaeffer J. 1987. Global existence for the poisson-vlasov system with nearly symmetric data[J]. Journal of differential equations, 69(1):111-148.

Ukai S, Okabe T. 1978. On classical solutions in the large in time of two-dimensional vlasov's equation[J]. Osaka Journal of Mathematics, 15(2):245-261.

Wang X. 2020. Global solution of the 3d relativistic vlasov-poisson system for a class of large data [Z].

Wollman S. 1980. The spherically symmetric Vlasov-Poisson system[J]. Journal of Differential Equations, 35(1):30-35.

致 谢

衷心感谢导师王学成教授对本人毕业设计的指导和在数学系学习中帮助过我的诸位老师和朋友，我的愚钝常常让各位老师感到头疼。Vlasov 方程是等离子体物理领域最重要的方程之一，感谢王学成导师给我的机会，得以在毕设环节让我对 Vlasov-Poisson 方程的理解增添一分。

感谢在疫情期间帮助我的家人们，如我的二伯娘、母亲等，他们让我有充分的时间专注在论文上。

声　明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签　名：____________ 日　期：____________

附录 A　不等式

A.1　Gronwall 不等式

引理 A.1： *(Nonlinear Gronwall Lemma)* 假设 $t_0, t_1 \in \mathbb{R}, t_0 < t_1$, $F : [t_0, t_1) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ 函数连续且 $F(t, r) \geqslant F(t, r')$ 对任意的 $r \geqslant r'$(即在 r 上单调增). 还假设 $f_0 \in [0, \infty), T \in (t_0, t_1]$ 且 $g : I \to [0, \infty)$，在区间 $I := [t_0, T)$ 上定义，是微分方程的解 $g' = F(t, g), g(t_0) = f_0$。如果 $f : I \to [0, \infty)$ 可测并且局部有界，对任意的 $t \in I$ 有

$$f(t) \leqslant f_0 + \int_{t_0}^{t} F(r, f(r))\mathrm{d}r$$

那么便可推导出对任意的 $t \in I$ 有 $f(t) \leqslant g(t)$

证明 参阅 (Beesack, 1975)$^{\text{theorem 4.1}}$ 来处理连续的 f, 不连续就令 $h(t) := f_0 + \int_{t_0}^{t} F(r, f(r))\mathrm{d}r$. h 是连续的且也满足 $h(t) \leqslant f_0 + \int_{t_0}^{t} F(r, h(r))\mathrm{d}r$, $f(t) \leqslant h(t) \leqslant g(t)$. □

引理 A.2： *(双变量 Gronwall 引理)*

$T > 0, I := [0, T]$. 假设 $g : I \times I \to [0, \infty)$ is bounded 且对任意的 $t \in I$ 函数 $g(t, \cdot)$ 和 $g(\cdot, t)$ 均可测. 还假设存在常数 D_1, D_2, D_3 使得对所有的 $t, \tau \in I$，有下式成立，

$$g(t, \tau) \leqslant \left| \int_{\tau}^{t} \left(D_1 \cdot g(r, \tau) + D_2 \cdot (g(0, r) + g(r, 0)) + D_3 \right) \mathrm{d}r \right|$$

。则存在常数 D 仅依赖于 D_1, D_2 和 T, 使得对所有的 $t, \tau \in I$ 均有 $g(t, \tau) \leqslant D \cdot D_3$。

证明 取任意的 $g^* \in C_+(I)$ 使得对所有的 $t \in I$，$g^*(t) \geqslant \sup\{g(0, u) + g(u, 0) | 0 \leqslant u \leqslant t\}$ 固定 $\tau \in I$。则对所有的 $t \in [\tau, T]$ 有

$$g(t, \tau) \leqslant \int_{\tau}^{t} \left(D_1 \cdot g(r, \tau) + D_2 \cdot g(r) + D_3 \right) \mathrm{d}r$$

由非线性 Gronwall 引理 A.1，

$$g(t,\tau) \leqslant \int_{\tau}^{t} \exp\left(D_1 \cdot (t-r)\right) \cdot \left(D_2 \cdot g^*(r) + D_3\right) \mathrm{d}r \leqslant \exp\left(D_1 \cdot T\right) \cdot \left| \int_{\tau}^{t} \left(D_2 \cdot g^*(r) + D_3\right) \mathrm{d}r \right|$$

类似的，对所有的 $t \in [0,\tau]$ 也是一样，于是对所有的 $t \in I$

$$g(0,t) + g(t,0) \leqslant 2 \cdot \exp\left(D_1 \cdot T\right) \cdot \int_{0}^{t} \left(D_2 \cdot g^*(r) + D_3\right) \mathrm{d}r$$

右侧在 I 上是单调增的，可以

$$\sup\{g(0,u) + g(u,0) | 0 \leqslant u \leqslant t\} \leqslant 2 \cdot \exp\left(D_1 \cdot T\right) \cdot \int_{0}^{t} \left(D_2 \cdot g^*(r) + D_3\right) \mathrm{d}r$$

$C_+(I)$ 中存在一个单调减的函数序列，其几乎处处收敛到 $\sup\{g(0,u)+g(u,0)|0 \leqslant u \leqslant t\}$ 于是我们有

$$\begin{aligned} &\sup\{g(0,u) + g(u,0) | 0 \leqslant u \leqslant t\} \\ &\leqslant 2 \cdot \exp\left(D_1 \cdot T\right) \cdot \textstyle\int_0^t \left(D_2 \cdot \sup\{g(0,u) + g(u,0) | 0 \leqslant u \leqslant r\} + D_3\right) \mathrm{d}r \end{aligned}$$

再一次使用非线性 Gronwall 引理 A.1，

$$\sup\{g(0,u) + g(u,0) | 0 \leqslant u \leqslant t\}$$

$$\begin{aligned} &\leqslant \textstyle\int_0^t \left(\exp\left(2 \cdot \exp\left(D_1 \cdot T\right) \cdot D_2 \cdot (t-r)\right) \cdot 2 \cdot \exp\left(D_1 \cdot T\right) \cdot D_3\right) \mathrm{d}r \\ &\leqslant T \cdot \exp\left(2 \cdot \exp\left(T \cdot D_1\right) \cdot D_2 \cdot T\right) \cdot 2 \cdot \exp\left(D_1 \cdot T\right) \cdot D_3 =: D_4 \cdot D_3 \end{aligned}$$

将其插入回该引理中给定的不等式，

$$g(t,\tau) \leqslant \left| \int_{\tau}^{t} \left(D_1 \cdot g(r,\tau) + \left(1 + D_4\right) \cdot D_3\right) \mathrm{d}r \right|$$

第三次使用非线性 Gronwall 引理 A.1，现在有

$$
\begin{aligned}
g(t,\tau) &\leqslant \left| \int_{\tau}^{t} \exp\left(D_1 \cdot |t-r|\right)\left(1+D_4\right) \cdot D_3 \mathrm{d}r \right| \\
&\leqslant T \cdot \exp\left(D_1 \cdot T\right) \cdot \left(1+D_4\right) \cdot D_3 =: D \cdot D_3
\end{aligned}
$$

□

综合论文训练记录表

<table>
<tr><td>学生姓名</td><td></td><td>学号</td><td></td><td>班级</td><td></td></tr>
<tr><td>论文题目</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>主要内容以及进度安排</td><td colspan="5">指导教师签字：____________
考核组组长签字：____________
年 月 日</td></tr>
<tr><td>中期考核意见</td><td colspan="5">考核组组长签字：____________
年 月 日</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>指导教师评语</td><td>

指导教师签字：____________

年　　月　　日</td></tr>
<tr><td>评阅教师评语</td><td>

评阅教师签字：____________

年　　月　　日</td></tr>
<tr><td>答辩小组评语</td><td>

答辩小组组长签字：____________

年　　月　　日</td></tr>
</table>

总成绩：____________

教学负责人签字：____________

年　　月　　日