

清 华 大 学

# 综 合 论 文 训 练

题目: Vlasov-Poisson 系统的适定性

系 别: 工程物理系

专 业: 数学与应用数学 (第二学位)

姓 名: 魏文崧

指导教师: 王学成教授

2020 年 5 月 26 日

## 关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位论文的复印件，允许该论文被查阅和借阅；学校可以公布该论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存该论文。

(涉密的学位论文在解密后应遵守此规定)

签 名：\_\_\_\_\_ 导师签名：\_\_\_\_\_ 日 期：\_\_\_\_\_

## 中文摘要

本文作为文献综述，总结了对 Vlasov-Poisson 系统所做的相关研究，回顾 Vlasov-Poisson 问题的适定性问题，即满足什么条件时解有存在性与唯一性，及解在时间上至多局部存在还是可以全局存在的问题。该综述的主体部分按 Horst et al. (1981) 的思路讲述了局部解的适定性问题，即通过光滑化原 Vlasov-Poisson 问题场函数的奇异性，得到逼近解的特征线在该修正逐渐弱化的极限下一致收敛的结果，从而证明原 Vlasov-Poisson 问题的局部的适定性问题，从而证明局部解的存在性和唯一性。

在第二章中我们先是给出了对 Vlasov-Poisson 问题非常重要的区间有界条件，满足该条件的区间能够一致控制  $\|\mathbf{E}^\varepsilon(t)\|_\infty$ ,  $\|\rho^\varepsilon(t)\|_\infty$  和  $\sup\{|\mathbf{V}^\varepsilon(r, 0, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \mathbf{v}| \mid \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, 0 \leq r \leq t\}$ 。之后通过  $\rho^\varepsilon$  的  $L^1$  和  $L^\infty$  范数对  $\mathbf{E}^\varepsilon$  Lipschitz 连续性的一致控制。以  $\|\rho^\varepsilon\|_\infty$ ,  $h_v^\varepsilon(t)$  及  $\text{lip}_x(\mathbf{E}^\varepsilon(t))$  三者的一致控制为基础，我们得以证明区间有界条件与局部解存在互为充要条件，从而刻画 Vlasov-Poisson 方程的适定性。

**关键词：**Vlasov-Poisson；适定性，爆破性

## ABSTRACT

Recent researches on the Vlasov-Poisson system have been concluded in this literature review. The well-posedness problem, when the Vlasov-Poisson system has a global and unique solution has been studied for a long time, is reviewed. The main part of the literature review contains the approximation method used to converge to a local-in-time solution, proving the local well-posedness.

The literature mainly centres on the topic of well-posedness in the Vlasov-Poisson system, discussing about the existence and uniqueness problem. After the method we used in Chapter 2 to solve the local well-posedness problem. In chapter two, the boundedness condition of interval for Vlasov-Poisson system is given first and illustrate how we can control uniformly  $\|\mathbf{E}^\varepsilon(t)\|_\infty$ ,  $\|\rho^\varepsilon(t)\|_\infty$  和  $\sup\{|\mathbf{V}^\varepsilon(r, 0, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \mathbf{v}| \mid \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, 0 \leq r \leq t\}$ . Then by  $L^1$  and  $L^\infty$  norm of  $\rho^\varepsilon$  we can estimate whether  $\mathbf{E}^\varepsilon$  is Lipschitz continuous uniformly for all  $\varepsilon > 0$ . With all the uniform control conditions we have acquired, it suffices to prove that the sufficient and necessary condition of local well-posedness.

**Keywords:** Vlasov-Poisson; well-posedness; blow up

# 目 录

|  |    |
|--|----|
| 第 1 章 介绍 .....                                 | 1  |
| 1.1 研究背景 .....                                 | 1  |
| 1.2 特征线 .....                                  | 2  |
| 1.3 适定性的相关结果 .....                             | 3  |
| 1.4 朗道阻尼 .....                                 | 4  |
| 1.5 符号标记 .....                                 | 5  |
| 第 2 章 Vlasov-Poisson 系统的局部解 .....              | 6  |
| 2.1 定义扩展 .....                                 | 6  |
| 2.2 区间的有界条件 .....                              | 9  |
| 2.3 $E^\varepsilon$ 的 Lipschitz 连续性 .....      | 13 |
| 2.4 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时解的一致收敛性 ..... | 16 |
| 公式索引 .....                                     | 23 |
| 参考文献 .....                                     | 24 |
| 致 谢 .....                                      | 26 |
| 声 明 .....                                      | 27 |
| 附录 A 不等式 .....                                 | 28 |
| A.1 Gronwall 不等式 .....                         | 28 |

# 第 1 章 介绍

## 1.1 研究背景

Vlasov 类型的偏微分方程系统是描述粒子群多体运动问题的 Boltzmann 方程在无碰撞条件下的简化。粒子群在给定的  $(t, \mathbf{x})$  处的各向异性的速度分布对系统变化产生了很大的影响, 使得对粒子速度空间分布的刻画十分必要。通过将速度空间分布考虑到系统中, 即分布函数从时空分布的变为更细致的相空间分布, Vlasov 类型的偏微分方程系统从而能够精确地描述动理学意义上的运动演化规律。准确来说, 相空间的分布函数  $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$  ( $x \in \mathbb{R}_x^3, v \in \mathbb{R}_v^3, t \geq 0$ )。当电磁力作为主要考虑对象时, 即与 Maxwell 方程组耦合的时候 (VM), Vlasov 方程描述的便是带电粒子与电磁场相互作用的关系, 从而描绘物质电磁相互作用的图象。

$$(VM \& RVM) \begin{cases} f_t + \mathbf{a}(\mathbf{v}) \cdot \nabla_x f + (\mathbf{E} + \mathbf{a}(\mathbf{v}) \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f = 0 \\ \mathbf{E}_t = \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{j} \\ \mathbf{B}_t = -\nabla \times \mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad (1-1)$$

其中  $\mathbf{a}(\mathbf{v}) \in \{\mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}}\}$ ,  $\hat{\mathbf{v}} := \mathbf{v}/\sqrt{1 + |\mathbf{v}|^2}$  且

$$\rho(t, \mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}_v^3} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}_v^3} \mathbf{a}(\mathbf{v}) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (1-2)$$

此处  $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \rho$  和  $\mathbf{j}$  各表示电场、磁场、空间密度分布和电流密度分布。相对论提出的时空理论, 认为光速是有限的, 且所有物质的速度都慢于光速  $\mathbf{a}(\mathbf{v}) = \hat{\mathbf{v}} \leq 1$ , 从而在非相对论型的 Vlasov-Maxwell 系统 (VM) 上又有了非相对论型的 Vlasov-Maxwell 系统 (RVM)。

进一步简化, 当电磁相互作用中静电相互作用力占主导时, 洛伦兹力、磁场等的要素可以被简化掉, 从而我们可以得到 Vlasov-Poisson 系统,

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = -\nabla_x \phi(t, \mathbf{x}), \quad \phi = \frac{1}{|\mathbf{x}|} * \rho \quad (1-3)$$

$$(\text{VP \& RVP}) \begin{cases} \partial_t f + \mathbf{a}(\mathbf{v}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \mu \nabla_{\mathbf{x}} \phi \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0 \\ \Delta \phi = \rho(f) := \int_{\mathbb{R}_v^3} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} \end{cases} \quad (1-4)$$

其中  $\mu \in \{+, -\}$ ,  $\mathbf{a}(\mathbf{v}) \in \{\mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}}\}$ , 且  $\hat{\mathbf{v}} := \mathbf{v}/\sqrt{1 + |\mathbf{v}|^2}$ .  $\mu$  的符号正负表示不同的物理图象, 其为“+”表示等离子体物理中同种电荷的相互排斥的库伦作用, 而“-”表示星体动力学在万有引力主导下的作用规律。(VP) 实际上表明了粒子群在一种势场作用下的运动规律, 这种势场由粒子本身产生, 在  $N$  维空间中场强与  $1/r^{N-1}$  ( $r$  为粒子之间的距离) 成正比, 这使得 Vlasov-Poisson 问题中的场可能  $\mathbf{E} \notin L^{\frac{N}{N-1}}$ . 当三维情况时, 这意味着  $\mathbf{E} \notin L^{\frac{3}{2}}$ . 当 Vlasov-Poisson 系统用来讨论近似静电学问题时它表明的是排斥的库伦相互作用 ( $\mu = +1$ ), 而在星体动力学中则是万有引力的相互作用 ( $\mu = -1$ ).

当考虑多粒子 (Multi-species) 相互作用问题时, 和单粒子情况在数学上没有本质的区别, 通过对不同种粒子给定其质量  $q_i$  和电荷量  $m_i$  即可求解, 其方程不在此赘述. 但注意在引力作用  $\mu = -1$  时, 没有多粒子的物理图像.

## 1.2 特征线

在 Vlasov 型问题的研究中经常使用的是偏微分方程中的常用技巧, 特征线:  $s \mapsto X(s, t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$   $s \mapsto V(s, t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ , 它定义为以下相应的常微分方程组的解:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}}{ds} &= a(\mathbf{V}) = \{\mathbf{V}, \mathbf{V}/\sqrt{1 + |\mathbf{V}|^2}\} \\ \frac{d\mathbf{V}}{ds} &= \gamma \mathbf{E}(\mathbf{X}, s) \end{aligned} \quad (1-5)$$

具体来说, 在 Vlasov 型问题中, 它表示在  $t$  时刻过  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  点的特征线的轨迹, 即  $\mathbf{X}(t, t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{V}(t, t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{v}$ . 有时, 当  $(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$  明确时, 我们直接使用  $\mathbf{X}(s)$  来简化符号, 特别是当我们研究单条特征线时.

沿特征线偏微分方程求解的函数值不变, 因此, 若初始数据有界, 自然地有  $\|f(t, \cdot, \cdot)\|_{\infty} = \|f_0\|_{\infty} < \infty$ . 在下一章对 VP 奇性弱化后解的扩展中我们将讨论更多的特征线的性质.

### 1.3 适定性的相关结果

我们将只研究 Vlasov-Poisson 问题的经典解，即在这些解上对应的特征线的常微分方程有着唯一经典解。这种情况下解的局部存在性对于给定的  $N$  维空间已经由 Horst and Neunzert (1981) 证明，我们将在第二章做重点梳理。已知全局存在的情况如下：

非相对论情况：

- (i)  $n = 2$  , Illner and Neunzert (1979)
- (ii)  $n = 3$  时  $f_0$  球对称, Horst and Neunzert (1982)
- (iii)  $n = 3$  时  $f_0$  柱对称, Hellwig (1964)
- (iv)  $n = 3$  , Lions and Perthame (1991)
- (v)  $n = 4$  时  $f_0$  球对称且足够小, Hellwig (1964)

相对论情况：

- (i)  $n = 3, \mu = 1$  且  $f_0$  球对称;  $\mu = -1$ , 初值足够小且球对称, Glassey and Schaeffer (1985)。两者初值都需要紧支集条件。
- (ii)  $n = 3, \mu = 1$ , 初值球对称且有局域约束条件, Wang (2003).

另外,  $n \geq 4$  时, 即使  $f_0 \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$  性质相当好, 也不一定有全局解, Horst and Neunzert (1982).

对于经典解来说, 其存在性和唯一性结果已经由 Iordanskii, Ukai and Okabe (1978) 和 Bardos and Degond (1985) 分别在一维、二维和三维下对小初值给出了。经典解的具有对称性的初值问题也有 Batt (1977), Wollman (1980), Horst and Neunzert (1981), Schaeffer (1987) 等讨论过, 其中 Schaeffer (1987) 还在同一片文章中处理了相对论情况的对称初值问题。

**特别的在三维空间的话**, 综述第二章讨论的局部适定性对  $N = 3$  没有给出全局的结果, 弱解在相当弱的意义下全局存在 (Abdallah (1994); Arsen'ev (1975)), 如果 Cauchy 问题初值足够小全局经典解也可以存在, Bardos and Degond (1985)。

当我们考虑相对论情形时, (RVP) 似乎看上去比经典的更好了, 因为  $|\mathbf{v}| \leq 1$ 。于是经典问题中高阶矩的发散困难便迎刃而解了。基于同样的原因, 存在上限的速度导出了确定的因果关系 (casuality), 这些是好的方面。

但如果讨论到某些量的范数, (RVP) 可能确实不如 (VP)。比如  $\mu = +1$  时,  $\rho \in L^{4/3}(\mathbf{R}_x^3)$  是比非相对论的情形 ( $\rho \in L^{5/3}(\mathbf{R}_x^3)$ ) 要更差的。不过通过 Batt (1977) 和 Wollman (1980) 仍然可以证明当  $\mu = +1$  时全局球对称解的存



在性。而对于引力情况  $\mu = -1$ , Glassey and Schaeffer (1985) 证明了其解的存在性被弱化了, 只有在初值满足条件, 足够小时  $40\mathcal{M}^{2/3}\|f_0\|_\infty^{1/3} < 1$  才能确保 (RVP) 存在全局解。同时其还举了不存在全局解的反例, 此时若初始能量  $\mathcal{E}_0 := \int_{\mathbb{R}_x^3} \left\langle \int_{\mathbb{R}_v^3} \sqrt{1+|\mathbf{v}|^2} f d\mathbf{v} + \frac{1}{2}\gamma|\mathbf{E}|^2 \right\rangle d\mathbf{x}$ , 那么这样一个球对称的经典解的不存在全局解, 其延续时间必然有限。

在没有初值紧支集的假设下, 对 (VP) 系统的全局适定性问题也有众多的研究者论述。(VP) 系统已经成功地解决了对大初值的适定性的问题, Pfaffelmoser (1992), Lions and Perthame (1991) 和 Schaeffer (1991).

Lions and Perthame (1991), 将 (VP) 将左侧的部分  $\nabla_v f$  置于右侧视为源项, 从而通过特征线的方法导出控制不等式, 证明了  $v$  高阶矩的延续性质。更准确点说便是, 如果  $|\mathbf{v}|^m f_0 \in L^1(\mathbb{R}^6)$  对任意的  $m < m_0$ , 其中  $m_0 > 3$ , 则我们有 Vlasov-Poisson 方程的解也满足  $|\mathbf{v}|^m f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \in L^1(\mathbb{R}^6)$  对任意的  $m < m_0$ , 其中  $m_0 > 3$  对任意的  $t > 0$ 。以矩的延续性为判据也可以说明全局解存在。

## 1.4 朗道阻尼

表示静电相互作用的 Vlasov-Poisson 系统能够刻画等离子体物理领域著名的朗道现象, 它是等离子体在大时间尺度时的渐进行为。将 Vlasov-Poisson 方程中的  $\nabla_v f$  替换为  $\nabla_v f_0$  得到的线性化 Vlasov-Poisson 系统 (Linearized Vlasov-Poisson System), 便能够一定程度上刻画朗道阻尼的表现; 线性朗道阻尼理论便在其之上首先发展起来。

物理学家首先通过 Fourier-Laplace 变换求解线性化 (VP) 问题, 并且希望确定电势  $\phi(t, \mathbf{x})$  是否在大时间尺度时表示为平面波的形式。他们发现除非存在  $f$  的 Laplace 变化的解析延拓, 除非在涉及到的函数的解析性质足够好的情况下可以做出。然而, 这些假设都在许多物理图象中得到了验证。

除了这种方法之外, 相当早期的研究 (Kampen (1955) 和 Case (1959)) 用到了正交模式展开的方法。Degond (1986) 研究了线性化 (VP) 的谱理论来证明它的行为在大时间尺度下表现得如平面波的和。其研究表明要想得到阻尼波展开的分布函数, 需要对 (VP) 预解式的解析延拓。

线性的研究理论是朗道阻尼研究中很长一段时间关注的焦点, 而在此之上的非线性朗道阻尼理论, 则由 Mouhot and Villani (2011) 在近期给出。其阻尼线性被重新诠释为一种正则性在动力学量和空间相关变量之间的转移, 而不是能量的

交换。这项研究还揭示了阻尼的驱动机制确实是相混合 (phase mixing)。

## 1.5 符号标记

文献综述时描述局部解的适定性问题主要参考 Horst and Neunzert (1981), 大部分标记和定义沿用了其原文, 一定程度上做了修改。

文章中的  $C$  通常表示不依赖于初始条件的常数, 而  $K$  则是依赖于初始条件的常数, 它们在我们研究给定 Cauchy 初值条件的时候都可视为常数。函数符号方面则用  $C_+(I) := \{f : I \rightarrow [0, \infty) \mid f \text{ 连续且单调增}\}$  表示我们用来控制的函数空间, 其中  $I$  是一个区间,  $H$  常常表示一个  $C_+(I)$  或  $C_+([0, \infty))$  集合中的函数, 而用  $h$  表示通过在一时间段对某个量, 如电场  $\mathbf{E}$  的大小, 取上确界  $\sup$  得到的单调增函数。通常当需要对某个量进行控制的时候, 我们会取该量在一时间段上的上确界作为新的函数, 并通过  $C_+(I)$  中的函数对它进行控制。

函数积分的时候进行积分域的分割常将不同的积分项命名为  $I_1, I_2$  等, 由于只是局部的使用, 为简介起见, 在不同的积分式分割中积分项均以下标 1 开始, 应不会产生混淆。

$\omega_N := 2 \cdot \pi^{N/2} / \Gamma(N/2)$  是  $N$  维空间中  $(N-1)$  维的单位球面的表面积。

本文中谈到的积分和测度总是基于 Lebesgue 意义下的,  $L_\infty(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^L)$  和  $\|\cdot\|_\infty$  遵循实分析的通常定义。  $L_p(\mathbb{R}^M) := L_p(\mathbb{R}^M, \mathbb{R})$

对所有的函数  $f : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^L$ , Lipschitz 常数按惯例为  $\text{lip}(f) := \sup_{z \neq w} |z - w|^{-1} |f(z) - f(w)|$ 。  $\text{Lip}(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^L) := \{f : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^L \mid \text{lip}(f) < \infty\}$ ,  $\text{Lip}(\mathbb{R}^M) := \text{Lip}(\mathbb{R}^M, \mathbb{R})$

## 第 2 章 Vlasov-Poisson 系统的局部解

这一章中我们阐述 Horst and Neunzert (1981) 采用的通过无奇异性的解逼近有奇异性解的过程, 以此来证明 (至少是局部的) 的 Vlasov-Poisson 问题的适定性问题。该方法适用于  $N \in \mathbb{Z}, N \geq 1$  维空间, 证明前还需要对我们在介绍中引入的定义进行扩展, 即定义 Vlasov-Poisson 系统在  $N$  维空间中的形式及解在何种意义下成立, 并且说明场函数奇异性被削弱之后的解如何定义。对 Vlasov 类型的问题, 我们通常说的经典 (Classical) 解的意义即为对特征线常微分方程, 任意给定初值均有唯一解, 特征线在 Vlasov 类型问题中的重要性, 我们将会在解的定义中感受到。

### 2.1 定义扩展

$$(VP \& RVP) \begin{cases} \partial_t f + \mathbf{a}(\mathbf{v}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0 \\ \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \mu \int \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^N} \rho(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{cases} \quad (2-1)$$

$f_0 \in L_1(\mathbb{R}^{2N})$  总是表示所考虑的偏微分问题的初值条件。用  $m := \|f_0\|_1$  表示初始质量, 即相空间分布函数的  $L_1$  范数。场函数积分核的奇性我们用参数  $\varepsilon$  进行了削弱, 新的积分核为

$$\mathbf{e}^\varepsilon(\mathbf{z}) = \gamma \cdot \frac{\mathbf{z}}{(|\mathbf{z}|^2 + \varepsilon)^{N/2}}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^N, \varepsilon \geq 0$$

参数  $\varepsilon$  弱化了场函数的奇性, 相当于重新定义了新的偏微分方程  $VP^\varepsilon$  问题, 下面拓宽对它的定义。

**定义 2.1:** ( $VP^\varepsilon$  问题及其解) 假设  $I \subset [0, \infty)$  是一个含 0 的区间。称  $f^\varepsilon : I \times \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$  是  $VP^\varepsilon$  ( $\varepsilon \geq 0$  固定) 在  $I$  上的解, 如果它满足下面的条件:

- (1)  $f(0, \dots) = f_0$
- (2) 对任意的  $t \in I, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  有下列映射的可积性,  
 $(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \mapsto \mathbf{e}^\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot f^\varepsilon(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}) \in L_1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R}^N)$

(3)  $\mathbf{E}^\varepsilon(t, \mathbf{x}) := \iint_{\mathbb{R}^6} \mathbf{e}^\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot f^\varepsilon(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}) d\mathbf{y} d\mathbf{u}$  用来替换原来的有奇异性的场函数积分核。要求  $\text{VP}^\varepsilon$  问题解的分布函数产生的  $\mathbf{E}^\varepsilon$  在  $I \times \mathbb{R}^N$  上连续, 且对任意的  $t \in I$  有  $\mathbf{E}^\varepsilon(t, \cdot) \in C_b^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \cap \text{Lip}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  并存在  $C_\rho^\varepsilon, C_{\text{lip}(E)}^\varepsilon \in C_+(I)$  使得对任意的  $t \in I$

$$\|\mathbf{E}^\varepsilon(t, \cdot)\|_\infty \leq C_E^\varepsilon(t), \quad \text{lip}(\mathbf{E}^\varepsilon(t, \cdot)) \leq C_{\text{lip}(E)}^\varepsilon(t)$$

(4) 解  $f^\varepsilon$  通过  $\text{VP}^\varepsilon$  特征线的常微分问题来定义, 这是因为沿特征线有  $f^\varepsilon$  不变的特性. 具体而言场修正后的特征线方程如下,

$$\dot{\mathbf{X}}^\varepsilon = \mathbf{V}^\varepsilon, \dot{\mathbf{V}}^\varepsilon = \mathbf{E}^\varepsilon(t, \mathbf{X}^\varepsilon), \quad t \in I, \quad (2-2)$$

它对任一初值  $\mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$  在  $I$  上均有唯一解, 这由 (3) 中的有界条件保证。 $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$  通过沿特征线给定常微分方程的初值状态 (实际是末值) 来追溯到特征线  $t = 0$  时刻的  $f_0$  值,  $\mathbf{X}^\varepsilon(t) = \mathbf{x}, \mathbf{V}^\varepsilon(t) = \mathbf{v}$ , 即

$$f^\varepsilon(t, \mathbf{X}^\varepsilon(t), \mathbf{V}^\varepsilon(t)) = f^\varepsilon(0, \mathbf{X}^\varepsilon(0), \mathbf{V}^\varepsilon(0)) = f_0(\mathbf{X}^\varepsilon(0), \mathbf{V}^\varepsilon(0)), \quad t \in I$$

如果  $I = [0, \infty)$ ,  $f^\varepsilon$  被称为一个全局 (时域) 解, 否则被称为局部解。

**定理 2.1:** ( $\text{VP}^\varepsilon$  当  $\varepsilon > 0$  时的适定性) 如果  $\varepsilon > 0$ , 那么存在着  $\text{VP}^\varepsilon$  的唯一全局解  $f^\varepsilon$ 。如果  $I \subset [0, \infty)$  是一个含 0 的区间, 那么  $f^\varepsilon|_{I \times \mathbb{R}^{2N}}$  是  $I$  上的解, 并且该解唯一。

**证明** 此处可以引用 Horst (1975) 硕士论文中采用的方法, 但以此得到的  $H_E^\varepsilon(t), H_{\text{lip}(E)}^\varepsilon(t)$  是  $\varepsilon$  的负幂的乘积, 故而注意对  $\varepsilon = 0$  的情况不适用。□

**定义 2.2:** 假设  $f^\varepsilon$  是  $\text{VP}^\varepsilon$  ( $\varepsilon \geq 0$  固定) 在  $I$  上的解. 对任意的  $t_0 \in I, (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{2N}$ , 记  $\mathbf{X}(s, t_0, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{V}(s, t_0, \mathbf{x}, \mathbf{v}) : I \times I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$  为特征线常微分方程满足以下初值问题的解。

$$\mathbf{X}^\varepsilon(t_0, t_0, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{x}, \quad \mathbf{V}^\varepsilon(t_0, t_0, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{v}$$

**引理 2.1:** (特征线相关性质)

特征线有以下性质:

(i)  $\mathbf{X}^\varepsilon, \mathbf{V}^\varepsilon$  在  $I \times I \times \mathbb{R}^{2N}$  上连续

- (ii) 给定  $t_1, t_2 \in I$  函数  $\mathbf{X}^\varepsilon(t_1, t_2, \cdot)$  是  $\mathbb{R}^{2N}$  映到  $\mathbb{R}^{2N}$  上的保测度 (Lebesgue) 同胚。
- (iii) 因为沿特征线偏微分方程的待求函数值  $f^\varepsilon$  不变, 我们有对任意的  $t, t_1 \in I, x \in \mathbb{R}^{2N}$

$$f^\varepsilon(t, \mathbf{X}^\varepsilon(t, t_1, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{V}^\varepsilon(t, t_1, \mathbf{x}, \mathbf{v})) = f_0(\mathbf{X}^\varepsilon(0, t_1, \mathbf{x}, \mathbf{v}))$$

$$f^\varepsilon(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = f_0(\mathbf{X}^\varepsilon(0, t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{V}^\varepsilon(0, t, \mathbf{x}, \mathbf{v})) \quad (2-3)$$

于是对任意的  $t \in I$ ,  $f^\varepsilon(t, \cdot)$  和  $f_0$  有着相同的值域, 因此  $f^\varepsilon \geq 0$  当且仅当  $f_0 \geq 0$  并且  $\sup |f^\varepsilon(t, \cdot, \cdot)| = \sup |f_0|$ .  $f^\varepsilon$  在  $I \times \mathbb{R}^{2N}$  上连续, 当且仅当  $f_0$  在  $\mathbb{R}^{2N}$  上连续。

- (iv) 对任意的  $t, t_1 \in I$  和任何可测函数  $\sigma : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^M$ , 我们有  $\sigma \in L_1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R}^M)$  的充要条件是  $\sigma \circ (\mathbf{X}^\varepsilon, \mathbf{V}^\varepsilon)(t_1, t, \cdot) \in L_1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R}^M)$ . 此时

$$\int \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} d\mathbf{v} = \int \sigma(\mathbf{X}^\varepsilon(t_1, t, \mathbf{x}, \mathbf{v})) d\mathbf{x} d\mathbf{v}$$

特别地 ( $t_1 = 0, \sigma = |f_0|^p$ ) 时, 对任意的  $t \in I$  有  $f^\varepsilon(t, \cdot) \in L_p(\mathbb{R}^{2N})$ , 当且仅当  $f_0 \in L_p(\mathbb{R}^{2N})$  且此时  $\|f^\varepsilon(t, \cdot)\|_p = \|f_0\|_p, 1 \leq p < \infty$

- (v) 定义  $\rho^\varepsilon(t, \mathbf{x}) := \int f^\varepsilon(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}, \rho_{abs}^\varepsilon(t, \mathbf{x}) := \int |f^\varepsilon(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})| d\mathbf{v}$ . 对任意的  $t \in I, \rho^\varepsilon(t, \cdot), \rho_{abs}^\varepsilon(t, \cdot) \in L_1(\mathbb{R}^N)$  且  $\|\rho^\varepsilon(t, \cdot)\|_1 \leq \|\rho_{abs}^\varepsilon(t, \cdot)\|_1 = \|f_0\|_1 = \mathcal{M}$

**证明** 从一阶常微分方程的标准理论可以得出上述结论, (Hartman, 2002)<sup>pp. 131</sup>. 关于  $(\mathbf{X}^\varepsilon, \mathbf{V}^\varepsilon)(t, t_1, \cdot)$  即使  $\mathbf{E}^\varepsilon$  不可导的情况下仍是保测度的同胚映射的证明可以在 (Batt, 1962)<sup>pp. 62</sup>.

由于  $\mathbf{VP}^\varepsilon(\varepsilon > 0)$  问题中场函数的奇异性被移除了, 经典的分析手段可以很好地处理  $\mathbf{VP}^\varepsilon(\varepsilon > 0)$  的解。要在其基础上, 证明  $\mathbf{VP}^0$  解的存在性和唯一性, 我们需要说明  $f^\varepsilon$  确实在  $I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  上当取极限  $\varepsilon \rightarrow 0$  时一致收敛到  $f^0$ 。而 Vlasov 问题中的经典解通常指的是特征线常微分问题有唯一解, 我们逐渐往这个方向推进。在图中即为最关键的最后 Cauchy 准则给出的收敛依据, 特征线确实随着  $\varepsilon \rightarrow 0$  收敛, 这是在本章最后的第四节完成的。

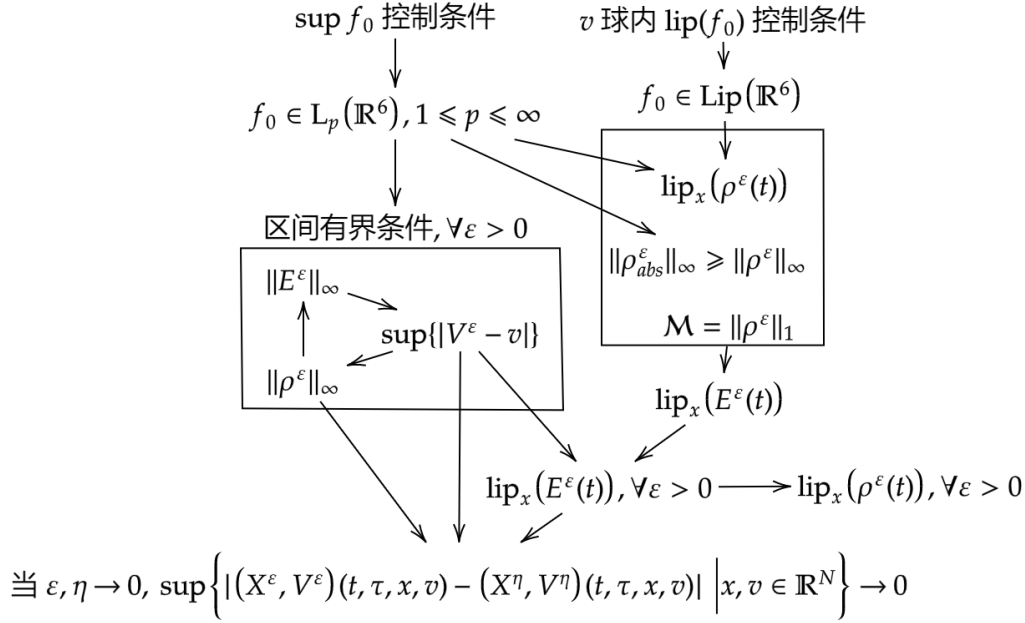


图 2.1 图中所示为证明适定性过程中各个命题证明的前后序列，其中箭头表示我们证明命题的前后关系，而不是逻辑上的充分关系；出现在图中的变量表示存在  $H \in C_+(I)$  中函数对其控制， $\forall \varepsilon > 0$  表示对  $\varepsilon$  一致控制。

在此之前我们需要做一些准备工作，如图左侧对区间提出的区间有界条件，这部分在下面第二节。我们发现对三者  $\|E^\varepsilon(t)\|_\infty$ ,  $\|\rho^\varepsilon(t)\|_\infty$  和  $\sup\{|V^\varepsilon(r, 0, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \mathbf{v}| \mid \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, 0 \leq r \leq t\} =: h_v^\varepsilon(t)$  的一致控制条件是等价的。通过 Gronwall 引理我们找到一定能够控制  $h_v^\varepsilon, \forall \varepsilon > 0$  的函数，从而确定了一定有一段非空区间满足有界条件。

然后则是第三节对  $E^\varepsilon$  Lipschitz 连续性的一致控制，证明这点需要对密度  $\rho^\varepsilon$  的  $L^1$  和  $L^\infty$  范数及其的 Lipschitz 连续性。这里我们需要另外的  $v$  球内  $\text{lip}(f_0)$  控制条件来补充需要的初值的 Lipschitz 连续性。

以  $\|\rho^\varepsilon\|_\infty$ ,  $h_v^\varepsilon(t)$  及  $\text{lip}_x(E^\varepsilon(t))$  三者的一致控制为基础，我们得以证明区间有界条件与局部解存在互为充要条件，从而刻画 Vlasov-Poisson 方程的适定性。

## 2.2 区间的有界条件

假设 2.1: 假设  $f^\varepsilon$  是  $\text{VP}^\varepsilon$  ( $\varepsilon \geq 0$  定值) 问题在  $I$  上的解

1. 定义  $f_0$  满足  $\sup f_0$  控制条件: 如果存在合适的  $K_1, K_2$  (可以依赖于初值

的常数) 使得下式对所有的  $a \geq 0$  成立,

$$\int^* \underbrace{\sup \{ |f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u})| | \mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^N, |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \leq a \}}_{\text{该部分为 } \mathbf{v} \text{ 的函数}} d\mathbf{v} \leq K_1 \cdot (K_2 + a)^N \quad (2-4)$$

( $\int^* \dots d\mathbf{x}$  标记为上 Lebesgue 积分)

2. 定义  $f_0$  满足  $v$  球内  $\text{lip}(f_0)$  控制条件 为: 存在一个函数  $h \in C_+([0, \infty))$  使得对所有  $a \geq 0$  有下式,

$$\int^* \sup \left\{ \frac{|f_0(\mathbf{y}, \mathbf{u}) - f_0(\mathbf{z}, \mathbf{w})|}{|(\mathbf{y}, \mathbf{u}) - (\mathbf{z}, \mathbf{w})|} \middle| (\mathbf{y}, \mathbf{u}), (\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \right. \\ \left. (\mathbf{y}, \mathbf{u}) \neq (\mathbf{z}, \mathbf{w}), |\mathbf{u} - \mathbf{v}|, |\mathbf{w} - \mathbf{v}| \leq a \right\} d\mathbf{v} \leq h(a) \quad (2-5)$$

注意本来这里  $h \in C_+([0, \infty))$  应该用简介中介绍的符号  $H$ , 但为与原文吻合用了  $h$ 。

注意  $\sup f_0$  控制条件可推导出  $f_0$  是有界的, 即  $f_0 \in L_\infty(\mathbb{R}^{2N})$ 。若以  $K_1, K_2$  满足  $\sup f_0$  控制条件的  $f_0$ , 设  $\hat{f}_0(\mathbf{v}) = \sup \{ |f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})| | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \}$ , 若其在  $B_R(\mathbf{y}) \subset \mathbb{R}_v^3$  ( $B_R(\mathbf{y})$  半径为  $R$ , 中心为  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  的开球) 中无界, 则对于任意的  $C_0 > 0$  均可找到  $\hat{f}_0(\mathbf{v}) > C_0, \mathbf{v} \in B_R(\mathbf{y})$ , 设  $a = 2R$ , 则  $\sup f_0$  控制条件判别式左侧积分大于  $CR^N C_0$ , 而右侧的是固定的  $K_1 \cdot (K_2 + a)^N$ , 取足够大的  $C_0$  使不等式不成立引出矛盾。又因为  $f_0 \in L_1(\mathbb{R}^{2N})$ , 故  $\sup f_0$  控制条件实际上给出了  $f_0$  很好的可积性, 对任意的  $1 \leq p \leq \infty$  有  $f_0 \in L_p(\mathbb{R}^{2N})$ 。另外观察  $v$  球内  $\text{lip}(f_0)$  控制条件类似的可导出  $f_0 \in \text{Lip}(\mathbb{R}^{2N})$ 。

对  $\mathbf{E}$  的积分式粗糙地取积分内各项绝对值则有不等式, 即  $|E^\epsilon(t, \mathbf{x})| \leq \int |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{1-N} \cdot |\rho_{abs}^\epsilon|(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$ 。借助于这个不等式, 通过下面的引理及之后的推论可以证明  $\|E^\epsilon(t, \cdot)\|_\infty$  有界。

**引理 2.2:** 假设  $0 < \alpha < N, p \in (1, \infty], q \in [1, \infty) p > N/(N - \alpha) > q$  且  $\sigma \in L_p(\mathbb{R}^N) \cap L_q(\mathbb{R}^N)$ 。则对于任意的  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$  有

$$\int |\mathbf{z} - \mathbf{w}|^{-\alpha} \cdot |\sigma(\mathbf{w})| d\mathbf{w} \leq \tilde{C}(N, \alpha, p, q) \cdot \|\sigma\|_p^\lambda \cdot \|\sigma\|_q^\mu \quad (2-6)$$

其中常数有  $\tilde{C}(N, \alpha, p, q), \lambda := (\alpha/N - 1 + 1/q)/(1/q - 1/p)$  及  $\mu := 1 - \lambda$ 。

令  $\tilde{C}_{\min}(N, \alpha, p, q)$  为对任意的  $\sigma \in L_p(\mathbb{R}^N) \cap L_q(\mathbb{R}^N)$ , (2-6) 式均成立的常数。

**证明** 将 (2-6) 的积分域分为球内外的两部分  $R > 0$ , 通过 Hölder 不等式,

$$I_1 \leq \| |\mathbf{z} - \mathbf{x}|^{-\alpha} \cdot 1_{|\mathbf{z}-\mathbf{x}| \leq R} \|_{p'} \| \sigma \|_p = \left( \frac{\omega_N}{N - \alpha p'} \right)^{1/p'} R^{(N/p') - \alpha} \| \sigma \|_p$$

$$I_2 \leq \| |\mathbf{z} - \mathbf{x}|^{-\alpha} \cdot 1_{|\mathbf{z}-\mathbf{x}| > R} \|_{q'} \| \sigma \|_q = \left( \frac{-\omega_N}{N - \alpha q'} \right)^{1/q'} R^{(N/q') - \alpha} \| \sigma \|_q$$

$p'$  和  $q'$  大小为  $p^{-1} + p'^{-1} = q^{-1} + q'^{-1} = 1$ 。

上述两式右侧的加和作为  $R$  的函数取最小值得到  $\text{const. } \| \sigma \|_p^\lambda \cdot \| \sigma \|_q^\mu$ , 即  $\tilde{C}(N, \alpha, p, q) \| \sigma \|_p^\lambda \cdot \| \sigma \|_q^\mu$ .  $\square$

这条引理启发我们研究  $\| \rho^\varepsilon(t, \cdot) \|_p, \| f^\varepsilon(t, \cdot) \|_1 = \mathcal{M}$ . 下面我们还将讨论其  $L^\infty$  范数,

**证明** (i) 对给定的  $t_0 \in I$ ,

$$\begin{aligned} & \sup \{ |f^\varepsilon(t_0, \mathbf{y}, \mathbf{u})| \mid \mathbf{y}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2N}, |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \leq a \} \\ &= \sup \{ |f_0(\mathbf{X}^\varepsilon(0, t_0, \mathbf{y}, \mathbf{u}), \mathbf{V}^\varepsilon(0, t_0, \mathbf{y}, \mathbf{u}))| \mid \mathbf{y}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^N, |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \leq a \} \\ &\leq \sup \{ |f_0(\mathbf{y}, \mathbf{u})| \mid \mathbf{y}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^N, |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \leq a + h_v^\varepsilon(t_0) \} \end{aligned}$$

于是对其积分中可知  $f(t_0, \cdot, \cdot)$  也满足  $\sup f_0$  控制条件, 只是常数的大小发生了改变.  $\square$

**定理 2.2:** (有界条件的等价性) 假设  $I \subset [0, \infty)$  是个包含 0 的区间, 并且  $f_0$  满足  $\sup f_0$  控制条件的条件, 那么下面三个条件是等价的:

(i) 存在函数  $H_\rho(t) \in C_+(I)$ , 使得

$$|\rho^\varepsilon(t, \mathbf{x})| \leq H_\rho(t) \text{ 对任意的 } \varepsilon > 0, t \in I, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$$

(ii) 存在函数  $H_E(t) \in C_+(I)$ , 使得

$$|\mathbf{E}^\varepsilon(t, \mathbf{x})| \leq H_E(t) \text{ 对任意的 } \varepsilon > 0, t \in I, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$$



(iii) 存在函数  $H_v(t) \in C_+(I)$ , 使得

$$|\mathbf{V}^\varepsilon(t, 0, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \mathbf{v}| \leq h_v^\varepsilon(t) \leq H_v(t) \text{ 对任意的 } \varepsilon > 0, t \in I, \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$$

**定义 2.3:** (有界条件) 如果以上的这些条件能够被满足, 定义  $I$  满足“有界条件”。

**证明** 证明他们互相充要的工具其实我们已经准备好了。

(i)  $\Rightarrow$  (ii) 由引理 (2.1) ( $\alpha = N - 1, p = \infty, q = 1$ )

$$|\mathbf{E}^\varepsilon(t, \mathbf{x})| \leq \tilde{C}_{min}(N, N - 1, \infty, 1) \cdot (\|\rho^\varepsilon(t, \cdot)\|_\infty)^{(N-1)/N} \cdot \mathcal{M}^{1/N}.$$

(ii)  $\Rightarrow$  (iii):  $h_v^\varepsilon(t) \leq \int_0^t \sup \{ \|E^\varepsilon(\tau, \cdot)\|_\infty \mid 0 \leq \tau \leq r \} dr$

(iii)  $\Rightarrow$  (i): 对任意的  $t \in I$ , 令

$$\begin{aligned} h_v^\varepsilon(t) &:= \sup \left\{ |\mathbf{V}^\varepsilon(0, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \mathbf{v}| \mid \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, 0 \leq \tau \leq t \right\} \\ &= \sup \left\{ |\mathbf{V}^\varepsilon(\tau, 0, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \mathbf{v}| \mid \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, 0 \leq \tau \leq t \right\} \end{aligned}$$

速度最大改变量应被场强上确界控制住

$$\leq \int_0^t \sup \left\{ \|\mathbf{E}^\varepsilon(\tau, \cdot)\|_\infty \mid 0 \leq \tau \leq r \right\} dr =: \int_0^t h_E^\varepsilon(r) dr < \infty$$

于是, 因为速度的最大改变量被  $h_v^\varepsilon(t)$  控制住了, 只有那些速度相近的“粒子”对于任意的才能在  $t$  时刻到达  $\mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ 。

$$\begin{aligned} |f^\varepsilon(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})| &= |f_0(\mathbf{X}^\varepsilon(0, t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{V}^\varepsilon(0, t, \mathbf{x}, \mathbf{v}))| \\ &\leq \sup \{ |f_0(\mathbf{y}, \mathbf{u})| \mid \mathbf{y}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^N, |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \leq h_v^\varepsilon(t) \} \end{aligned}$$

左侧  $\int \dots d\mathbf{v}$  积分, 右侧  $\int_{\dots}^* \dots d\mathbf{v}$  上 Lebesgue 积分可得  $\rho_{abs}^\varepsilon(t, \mathbf{x}) \leq K_1 \cdot (K_2 + h_v^\varepsilon(t))^N$ .

$$|\rho^\varepsilon(t, \mathbf{x})| \leq K_1 \cdot (K_2 + h_v^\varepsilon(t))^N \leq K_1 \cdot (K_2 + h_v(t))^N$$

相互等价关系得证。 □

现我们仅依靠定理 2.1 的解的存在性, 希望给出一个上面条件需要的控制函数。对于一个固定的  $\varepsilon$ , 令  $h_{v+}^\varepsilon := K_2 + h_v^\varepsilon(t)$ , 上面三式联立可得下式成立,

$$h_{v+}^\varepsilon(t) \leq K_2 + \int_0^t K_3 \cdot (h_{v+}^\varepsilon(r))^{N-1} dr \quad (2-7)$$

其中,  $K_3 := \tilde{C}_{min}(N, N-1, \infty, 1) \cdot \mathcal{M}^{1/N} \cdot (K_1)^{(N-1)/N}$ . 发现它确实是非线性 Gronwall 引理 A.1 所适用的不等式, 从而我们对  $h_{v+}^\varepsilon(t)$  的大小可以控制住, 被该不等式容许的最大的解  $g$ , 即常微分方程  $g' = K_3 \cdot (g)^{N-1}, g(0) = K_2$  的解所控制。当  $N \neq 2$  时,  $g(t) = [(-N+2)K_3t + K_2^{-N+2}]^{\frac{1}{-N+2}}$ 。它能够有一段区间  $[0, K_2^{-(N-2)/(N-2)K_3})$  内控制住  $h_v^\varepsilon(t) \leq h_{v+}^\varepsilon(t) \leq g(t)$ 。  $N = 1, 2$  时易见可以全局控制, 则满足有界条件的  $I = [0, \infty)$ 。  $N \geq 3$  的情况只能根据  $K_1, K_2, \mathcal{M}$  及空间维度  $N$  给出一个满足有界条件的非空区间,  $I = [0, T), T \in (0, \infty]$ 。

## 2.3 $\mathbf{E}^\varepsilon$ 的 Lipschitz 连续性

本节将证明如果  $f_0$  足够得好,  $\mathbf{E}^\varepsilon(t, \cdot)$  和  $\rho^\varepsilon(t, \cdot)$  便是 Lipschitz 连续的。当  $I$  满足有界条件时, 其 Lipschitz 常数不依赖于  $\varepsilon$ 。

在下面的引理中, 我们实际上在尝试通过用  $\rho^\varepsilon$  的范数及 Lipschitz 常数来控制  $\text{lip}_x(\mathbf{E}^\varepsilon)$ 。

**引理 2.3:** 令  $\varepsilon \geq 0, \gamma = \pm 1$ 。假设  $\sigma : I \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  对任意的  $t \in I$  满足  $\sigma(t, \cdot) \in L_1(\mathbb{R}^N) \cap L_\infty(\mathbb{R}^N) \cap \text{Lip}(\mathbb{R}^N)$ 。令  $\mathbf{E}^\varepsilon(t, \mathbf{x}) := \int \mathbf{e}^\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \sigma(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, t \in I, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ 。则有

(i) 对任意的  $t \in I$  有  $\mathbf{E}^\varepsilon(t, \cdot) \in C_b^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  和下式

$$\left| \frac{\partial E_i}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}) \right| \leq \omega_N(\delta_{ij}/N + N) + N\omega_N \ln(1 + \text{lip}(\sigma(t, \cdot))) \|\sigma(t, \cdot)\|_\infty \\ + N\|\sigma(t, \cdot)\|_1 \quad \text{for all } 1 \leq i, j \leq N, t \in I, \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$$

于是  $\mathbf{E}^\varepsilon(t, \cdot) \in \text{Lip}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  且

$$\text{lip}(\mathbf{E}^\varepsilon(t, \cdot)) \leq \omega_N(N^{-1} + N^2 \cdot \log(1 + \text{lip}(\sigma(t, \cdot)))) \cdot \|\sigma(t, \cdot)\|_\infty \\ + N^2(\omega_N + \|\sigma(t, \cdot)\|_1)$$

**证明** (i)  $E_i^\varepsilon(t, \mathbf{x})$  偏导可以被拆分为球壳型的三个部分。令被求点的位置  $\mathbf{x}$  位于开球  $B(\mathbf{z}, d_1)$  内, 球心  $\mathbf{z}$  和半径  $d_1$ 。

$$\frac{\partial}{\partial x_j} E_i^\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_{d_1 < |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \leq d_2} + \int_{d_2 < |\mathbf{x}-\mathbf{y}|} + \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \leq d_1} \frac{\partial}{\partial x_j} e_i^\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \sigma(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} =: I_{1,1} + I_{1,2} + I_2 \quad (2-8)$$

□

$\mathbf{e}^\varepsilon$  的定义给出  $\left| \frac{\partial}{\partial x_j} e_i^\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right| \leq N |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-N}$  来帮助控制其中的积分项的估计, 参考 Hellwig (1964), 章节 4.4.1, 定理 3 来计算含奇异性的  $I_2$  积分。

由于该不等式部分参数选取  $d_1, d_2$  较为主观, 故证明细节不在这里呈现而请读者查阅原始证明 Horst and Neunzert (1981) Sect. 3。

接下来则是本节的关键, 要证明  $\mathbf{E}^\varepsilon$  和  $\rho^\varepsilon$  在  $\varepsilon > 0$  时的 Lipschitz 连续性。

**引理 2.4:** 假设  $f_0$  满足  $\sup f_0$  控制条件和  $v$  球内  $\text{lip}(f_0)$  控制条件两个条件。

如果  $I$  满足有界条件, 存在函数  $H_{\text{lip}(\rho)}, H_{\text{lip}(E)} \in C_+(I)$  使得对任意的  $\varepsilon > 0, t \in I$  有

$$\text{lip}(\mathbf{E}^\varepsilon(t, \cdot)) \leq H_{\text{lip}(E)}(t), \quad \text{lip}(\rho^\varepsilon(t, \cdot)) \leq H_{\text{lip}(\rho)}(t)$$

**证明** 先证存在一个函数  $H_{\text{lip}_x(\rho)}^\varepsilon(t) \in C_+(I)$  使得对任意的  $t \in I$

$$\text{lip}(\rho^\varepsilon(t, \cdot)) \leq H_{\text{lip}_x(\rho)}^\varepsilon(t) \quad (2-9)$$

已在引理 ?? 中证明对任意的  $t \in I \sup \left\{ |\mathbf{V}^\varepsilon(0, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \mathbf{v}| \mid \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, 0 \leq \tau \leq t \right\} = h_v^\varepsilon(t) < \infty$ 。现对  $\mathbf{E}$  的 Lipschitz 常数在时间上取上界得到函数  $h_{\text{lip}(E)}^\varepsilon(t) := \sup \left\{ \text{lip}(\mathbf{E}^\varepsilon(r, \cdot)) \mid 0 \leq r \leq t \right\}$  通过它控制不同特征线在  $\mathbf{VP}^\varepsilon$  问题解中渐行渐远的尺度,

$$\begin{aligned} & |(\mathbf{X}^\varepsilon, \mathbf{V}^\varepsilon)(t, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - (\mathbf{X}^\varepsilon, \mathbf{V}^\varepsilon)(t, \tau, \mathbf{y}, \mathbf{u})| \\ &= |(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - (\mathbf{y}, \mathbf{u})| + \int_\tau^t \left( \mathbf{V}^\varepsilon(r, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \mathbf{V}^\varepsilon(r, \tau, \mathbf{y}, \mathbf{u}), \mathbf{E}^\varepsilon(r, \mathbf{X}^\varepsilon(r, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v})) - \mathbf{E}^\varepsilon(r, \mathbf{X}^\varepsilon(r, \tau, \mathbf{y}, \mathbf{u})) \right) dr \\ &\leq |(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - (\mathbf{y}, \mathbf{u})| + \int_\tau^t \left( 1 + h_{\text{lip}(E)}^\varepsilon(r) \right) \cdot |\mathbf{X}^\varepsilon(r, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \mathbf{X}^\varepsilon(r, \tau, \mathbf{y}, \mathbf{u})| dr \end{aligned}$$

而要用到非线性的 Gronwall 引理 A.1 则需要连续函数, 我们便需要找  $H^* \in C_+(I)$  且  $H^*(t) \geq h_{\text{lip}(E)}^\varepsilon(t), t \in I$  的函数暂时替换掉  $h_{\text{lip}(E)}^\varepsilon(t)$  运用非线性的 Gronwall 引理有

$$\text{上式} \leq |(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - (\mathbf{y}, \mathbf{u})| \cdot \exp \left( \int_\tau^t (1 + H^*(r)) dr \right)$$

$$\Rightarrow \text{lip}_{x,v} \left( (\mathbf{X}^\varepsilon, \mathbf{V}^\varepsilon)(t, \tau, \cdot) \right) \leq \exp \left( \left| \int_{\tau}^t (1 + H^*(r)) \, dr \right| \right)$$

虽然上面的过程中我们需要额外找  $C_+(I)$  中的函数，但它并不本质，我们总可以在  $C_+(I)$  中找一个单调减的序列，它几乎处处收敛于  $h_{\text{lip}(E)}^\varepsilon$ 。从而上式中的  $H^*(t)$  又可以换回  $h_{\text{lip}(E)}^\varepsilon(t)$

$$\text{lip}_{x,v} \left( (\mathbf{X}^\varepsilon, \mathbf{V}^\varepsilon)(t, \tau, \cdot) \right) \leq \exp \left( \left| \int_{\tau}^t \left( 1 + h_{\text{lip}(E)}^\varepsilon(r) \right) \, dr \right| \right) \quad (2-10)$$

有了上面的工具后我们可以正式研究  $\rho^\varepsilon$  了，令  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} |\rho^\varepsilon(t, \mathbf{x}) - \rho^\varepsilon(t, \mathbf{y})| &\leq \int |f^\varepsilon(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - f^\varepsilon(t, \mathbf{y}, \mathbf{v})| \, d\mathbf{v} \\ &= \int |f_0((\mathbf{X}^\varepsilon, \mathbf{V}^\varepsilon)(0, t, \mathbf{x}, \mathbf{v})) - f_0((\mathbf{X}^\varepsilon, \mathbf{V}^\varepsilon)(0, t, \mathbf{y}, \mathbf{v}))| \, d\mathbf{v} \\ &\leq \int^* \sup \left\{ \frac{|f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - f_0(\mathbf{y}, \mathbf{w})|}{|(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - (\mathbf{y}, \mathbf{w})|} \mid (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \neq (\mathbf{y}, \mathbf{w}), |\mathbf{u} - \mathbf{v}|, |\mathbf{w} - \mathbf{v}| \leq h_v^\varepsilon(t) \right\} \\ &\quad \cdot |(\mathbf{X}^\varepsilon, \mathbf{V}^\varepsilon)(0, t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - (\mathbf{X}^\varepsilon, \mathbf{V}^\varepsilon)(0, t, \mathbf{y}, \mathbf{v})| \, d\mathbf{v} \\ &\leq h(h_v^\varepsilon(t)) \cdot \text{lip}_{x,v}((\mathbf{X}^\varepsilon, \mathbf{V}^\varepsilon)(0, t, \cdot)) \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \end{aligned}$$

$h$  是  $v$  球内  $\text{lip}(f_0)$  控制条件中给定的控制函数，于是

$$\begin{aligned} \text{lip}(\rho^\varepsilon(t, \cdot)) &\leq h(h_v^\varepsilon(t)) \cdot \text{lip}_{x,v}((\mathbf{X}^\varepsilon, \mathbf{V}^\varepsilon)(0, t, \cdot)) \\ &\leq h(h_v^\varepsilon(t)) \cdot \exp \left( \int_0^t \left( 1 + h_{\text{lip}(E)}^\varepsilon(r) \right) \, dr \right) \end{aligned}$$

如果  $I$  满足有界条件，我们之前的有界等价条件定理中曾经提到存在  $h_v \in C_+(I)$  使得对任意的  $\varepsilon > 0, t \in I$  有  $h_v^\varepsilon(t) \leq h_v(t)$  说明对  $\varepsilon$  是一致有界的，于是

$$\text{lip}(\rho^\varepsilon(t, \cdot)) \leq h(h_v(t)) \cdot \exp \left( \int_0^t \left( 1 + h_{\text{lip}(E)}^\varepsilon(r) \right) \, dr \right) \quad (2-11)$$

有界条件还告诉我们存在  $H_\rho \in C_+(I)$ ，使得对所有的  $\varepsilon > 0, t \in I$  有

$$\|\rho^\varepsilon(t, \cdot)\|_\infty \leq H_\rho(t) \quad (2-12)$$

通过上述两式可以将引理 2.3 中一些对  $\varepsilon$  依赖的项替换掉, 可导出对任意的  $t \in I$ , 有

$$\begin{aligned}
\text{lip} \left( E^\varepsilon(t, \cdot) \right) &\leq \omega_N \left( N^{-1} + N^2 \cdot \log \left( 1 + \text{lip} \left( \Phi_Q^\varepsilon(t, \cdot) \right) \right) \right) \cdot H_\rho^\varepsilon(t) + N^2 \cdot (\omega_N + \mathcal{M}) \\
&\leq \omega_N \cdot \left( N^{-1} + N^2 \cdot \log \left( 1 + h \left( h_v(t) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot \exp \left( \int_0^t \left( 1 + h_{\text{lip}(E)}^\varepsilon(r) \right) dr \right) \right) \right) \cdot H_\rho(t) + N^2 \cdot (\omega_N + \mathcal{M}) \\
&= \omega_N \cdot \left( N^{-1} + N^2 \cdot \left( \log \left( 1 + h \left( h_v(t) \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_0^t \left( 1 + h_{\text{lip}(E)}^\varepsilon(r) \right) dr \right) \right) \cdot H_\rho(t) + N^2 \cdot (\omega_N + \mathcal{M})
\end{aligned}$$

右式是对  $t$  单调增的, 所以我们将左式对  $t$  求上界也没有问题, 不等式仍然成立, 即不等式左侧变换为  $\sup \{ \text{lip} (E^\varepsilon(r, \cdot)) \mid 0 \leq r \leq t \} = h_{\text{lip}(E)}^\varepsilon(t)$ . 注意这时候我们又可以用非线性的 Gronwall 引理了 A.1。虽然这个不等式很长, 但是 Gronwall 定理告诉我们,  $h_{\text{lip}(E)}^\varepsilon$  有对应的不依赖于  $\varepsilon$  的积分式  $H_{\text{lip}(E)}$  控制住它。

回到本小节证明的开头的不等式 2-11, 现在等号右边的  $h_{\text{lip}(E)}^\varepsilon$  对  $\varepsilon$  依赖可以去掉了

$$\text{lip} \left( \rho^\varepsilon(t, \cdot) \right) \leq h \left( h_v(t) \right) \cdot \exp \left( \int_0^t \left( 1 + H_{\text{lip}(E)}(r) \right) dr \right) =: H_{\text{lip}(\rho)}(t) \quad \square$$

现在两者的 Lipschitz 常数都被控制住了。

## 2.4 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时解的一致收敛性

本章中我们将证明  $\text{VP}^0$  的解存在于  $I$  上的等价条件, 即当且仅当  $I$  满足有界条件时。我们将通过控制不同修正参数  $\varepsilon$  时特征线的解能相差多少, 用 Cauchy 判据证明  $\varepsilon \Rightarrow 0$  时特征线趋向于一个特定解, 并对于任意的  $(t, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v})$  一致。

**引理 2.5:** 对任意的  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N, \varepsilon, \eta \geq 0$  下式成立

$$|\mathbf{e}^\varepsilon(\mathbf{z}) - \mathbf{e}^\eta(\mathbf{z})| \leq 2 \cdot N \cdot |\mathbf{z}|^{-N+1/2} \cdot |\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}|$$

证明

$$\begin{aligned}
|\mathbf{e}^\varepsilon(\mathbf{z}) - \mathbf{e}^\eta(\mathbf{z})| &= \left| \int_\eta^\varepsilon \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathbf{e}^\lambda(\mathbf{z}) d\lambda \right| = \left| -(N/2) \cdot \int_\eta^\varepsilon (\mathbf{z}^2 + \lambda)^{-N/2-1} \mathbf{z} d\lambda \right| \\
&\leq (N/2) \cdot \left| \int_\eta^\varepsilon (\mathbf{z}^2 + \lambda)^{-(N+1)/2} d\lambda \right| \leq (N/2) \cdot |\mathbf{z}|^{-N+1/2} \cdot \left| \int_\eta^\varepsilon \lambda^{-3/4} d\lambda \right| \\
&= 2N \cdot |\mathbf{z}|^{-N+1/2} \cdot |\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}|
\end{aligned} \tag{2-13}$$

□

通过下面的定理，我们便能够基于满足有界条件的区间得到局部解适定性的结果。

**定理 2.3:** ( $VP^0$  问题的适定性)

假设  $f_0 \in L_1(\mathbb{R}^{2N})$  满足  $\sup f_0$  控制条件和  $v$  球内  $\text{lip}(f_0)$  控制条件。 $I \subset [0, \infty)$  是含 0 的区间。那么  $VP^0$  的解  $f^0$  在  $I$  上存在, 当且仅当  $I$  满足有界条件。此时  $f^0$  是唯一的且  $f^0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f^\varepsilon$ , 在  $I_1 \times \mathbb{R}^{2N}$  上一致收敛, 其中  $I_1$  是  $I$  任意的紧子集。

**证明** 现我们只对紧的区间  $I$  论证。因为当且仅当  $I$  的紧子区间满足该定理时, 这条定理成立。于是下面假设  $I = [0, T], T > 0$ 。

“ $\Rightarrow$ ” 适定性定理的第一部分：如果  $I$  满足有界条件，则存在唯一的  $VP^0$  问题的解。

对闭区间的话，我们之前证明的控制有界的函数就可以用常数了，前一节已证明对任意的  $\varepsilon > 0, t \in I$ ，存在常数可以控制住  $\rho^\varepsilon$  和  $\mathbf{E}^\varepsilon$  及其范数使得

$$\begin{aligned}
|\mathbf{E}^\varepsilon(t, \cdot)|_\infty &\leq C_E, \quad \text{lip}(\mathbf{E}^\varepsilon(t, \cdot)) \leq C_{\text{lip}(E)} \\
\sup \left\{ |\mathbf{V}^\varepsilon(0, t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \mathbf{v}| \mid \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N \right\} &\leq C_v \\
\|\rho^\varepsilon(t, \cdot)\|_\infty &\leq \|\rho_{abs}^\varepsilon(t, \cdot)\|_\infty \leq C_\rho
\end{aligned}$$

**定义 2.4:** 对于给定的  $\varepsilon > 0$  和  $\eta > 0$ ，定义  $t, \tau \in I$  的函数：

$$f^{\varepsilon, \eta}(t, \tau) := \sup \left\{ |(\mathbf{X}^\varepsilon, \mathbf{V}^\varepsilon)(t, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - (\mathbf{X}^\eta, \mathbf{V}^\eta)(t, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v})| \mid \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N \right\},$$

即所有从  $\tau$  到  $t$  的特征线， $\tau$  时起始状态一样，末状态在  $VP^\varepsilon$  和  $VP^\eta$  两种解之间差异范数的上确界，即  $|(\mathbf{X}^\varepsilon - \mathbf{X}^\eta, \mathbf{V}^\varepsilon - \mathbf{V}^\eta)|$ 。它刻画了  $VP^\varepsilon$  在参数  $\varepsilon$  的作用下解会发生至多多大的改变。

为了证明能通过对  $\mathbf{X}^\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) 取极限得到  $\mathbf{X}^0$ , 需要说明  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{X}^\varepsilon$  在  $I \times I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  上一致收敛。下面通过 Cauchy 准则来证明这一点, 具体来说是证明存在  $n > 0$  可以用  $K|\varepsilon^n - \eta^n|$  ( $K$  为常数) 来控制住  $f^{\varepsilon, \eta}(t, \tau)$ 。

引理 2.6:

$$f^{\varepsilon, \eta}(t, \tau) \leq K|\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}| \text{ for all } t, \tau \in I, \varepsilon, \eta > 0 \quad (2-14)$$

其中  $K$  是依赖于  $f_0$  的常数。

如果该引理成立, 它实际上说明  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathbf{X}^\varepsilon)$  在  $I \times I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  上一致收敛。

**证明** 为了控制  $f^{\varepsilon, \eta}$ , 下面我们会先介绍一些关于  $\|\mathbf{E}^\varepsilon(t, \cdot) - \mathbf{E}^\eta(t, \cdot)\|_\infty$ ,  $\|\rho^\varepsilon - \rho^\eta\|_\infty$  的估计。

$$\begin{aligned} & |(\mathbf{X}^\varepsilon, \mathbf{V}^\varepsilon)(t, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - (\mathbf{X}^\eta, \mathbf{V}^\eta)(t, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v})| \\ &= \left| \int_\tau^t (\mathbf{V}^\varepsilon(r, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \mathbf{V}^\eta(r, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{E}^\varepsilon(r, \mathbf{X}^\varepsilon(r, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v})) - \mathbf{E}^\eta(r, \mathbf{X}^\eta(r, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v}))) \, dr \right| \\ &\leq \left| \int_\tau^t f(r, \tau) \, dr \right| + \int_\tau^t |\mathbf{E}^\varepsilon(r, \mathbf{X}^\varepsilon(r)) - \mathbf{E}^\varepsilon(r, \mathbf{X}^\eta(r))| \, dr + \int_\tau^t |\mathbf{E}^\varepsilon(r, \mathbf{X}^\eta(r)) - \mathbf{E}^\eta(r, \mathbf{X}^\eta(r))| \, dr \end{aligned} \quad (2-15)$$

为了控制  $\mathbf{E}^\varepsilon(t, \mathbf{x}) - \mathbf{E}^\eta(t, \mathbf{x})$  积分, 需要估计  $\|\mathbf{E}^\varepsilon(t, \cdot) - \mathbf{E}^\eta(t, \cdot)\|_\infty$ , 我们利用之前积分核的分解, 从而有

$$\mathbf{E}^\varepsilon(t, \mathbf{x}) - \mathbf{E}^\eta(t, \mathbf{x}) =: I_1 + I_2 + I_3 \text{ 其中}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int (\mathbf{e}^\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \mathbf{e}^\eta(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \cdot \rho^\varepsilon(t, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ I_2 &= \int \mathbf{e}^{\eta, 1}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\rho^\varepsilon(t, \mathbf{y}) - \rho^\eta(t, \mathbf{y})) \, d\mathbf{y} \\ I_3 &= \int \mathbf{e}^{\eta, 2}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\rho^\varepsilon(t, \mathbf{y}) - \rho^\eta(t, \mathbf{y})) \, d\mathbf{y} \end{aligned}$$

由引理 2.2, Horst et al. (1981) 将  $\mathbf{e}^\varepsilon$  切割成了两部分, (i)  $\mathbf{e}^{\varepsilon, 1}(\mathbf{z}) := \mu \cdot (\varepsilon + \max\{1, \mathbf{z}^2\})^{-N/2} \cdot \mathbf{z}$ , (ii)  $\mathbf{e}^{\varepsilon, 2}(\mathbf{z}) := \mathbf{e}^\varepsilon(\mathbf{z}) - \mathbf{e}^{\varepsilon, 1}(\mathbf{z})$ 。只要将  $\mathbf{e}^\varepsilon$  分成两部分, 一部分是 Lipschitz 连续的, 另外一部分是  $L^1$  的都可以满足要求。这样选取的分解有,  $\text{lip}(\mathbf{e}^{\varepsilon, 1}) \leq N^2$ ,  $\|\mathbf{e}^{\varepsilon, 2}\|_1 \leq \omega_n \cdot N/(N+1)$ ,

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \int 2N \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-N+1/2} \cdot |\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}| \cdot |\rho^\varepsilon(t, \mathbf{y})| d\mathbf{y} \\
&\leq 2N \mathcal{M}^{1/2N} \tilde{C}_{min}(N, N-1/2, \infty, 1) \cdot C_\rho^{(N-1/2)/N} \cdot |\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}| \\
&=: K_5 \cdot |\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}| \\
|I_2| &= \left| \int (\mathbf{e}^{\eta,1}(\mathbf{x} - \mathbf{X}^\varepsilon(t, 0, \mathbf{y}, \mathbf{u})) - \mathbf{e}^{\eta,1}(\mathbf{x} - \mathbf{X}^\eta(t, 0, \mathbf{y}, \mathbf{u}))) \cdot f_0(\mathbf{y}, \mathbf{u}) d\mathbf{y} d\mathbf{u} \right| \\
&\leq \mathcal{M} \cdot \text{lip}(\mathbf{e}^{\eta,1}) \cdot f^{\varepsilon,\eta}(t, 0) \leq \mathcal{M} \cdot N^2 \cdot f^{\varepsilon,\eta}(t, 0) =: K_4 \cdot f^{\varepsilon,\eta}(t, 0)
\end{aligned}$$

命题 2.1: 要控制  $|I_3|$ , 先估计  $\|\rho^\varepsilon - \rho^\eta\|_\infty$ ,

$$\begin{aligned}
|\rho^\varepsilon(t, \mathbf{x}) - \rho^\eta(t, \mathbf{x})| &= \left| \int f_0((\mathbf{X}^\varepsilon, \mathbf{V}^\varepsilon)(0, t, \mathbf{x}, \mathbf{v})) - f_0((\mathbf{X}^\eta, \mathbf{V}^\eta)(0, t, \mathbf{x}, \mathbf{v})) d\mathbf{v} \right| \text{ for all } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \\
&\leq \int^* \sup \left\{ \frac{|f_0(\mathbf{y}, \mathbf{u}) - f_0(\mathbf{z}, \mathbf{w})|}{|(\mathbf{y}, \mathbf{u}) - (\mathbf{z}, \mathbf{w})|} \middle| y \neq w, |\mathbf{u} - \mathbf{v}|, |\mathbf{w} - \mathbf{v}| \leq F_0 \right\} \\
&\quad \cdot |\mathbf{X}^\varepsilon(0, t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \mathbf{X}^\eta(0, t, \mathbf{x}, \mathbf{v})| d\mathbf{v} \leq h(F_v) \cdot f^{\varepsilon,\eta}(0, t)
\end{aligned} \tag{2-16}$$

其中函数  $h \in C_+(\mathbb{R}_0^+)$  是满足  $v$  球内  $\text{lip}(f_0)$  控制条件对应的控制函数。

$$|I_3| \leq \|\mathbf{e}^{\eta,2}\|_1 \cdot \|\rho^\varepsilon(t, \cdot) - \rho^\eta(t, \cdot)\|_\infty \leq \omega_N(N/(N+1)) \cdot h(F_v) \cdot f^{\varepsilon,\eta}(0, t) =: K_3 \cdot f^{\varepsilon,\eta}(0, t)$$

因此可说明存在 (仅依赖于  $f_0$ ) 常数  $K_3, K_4$  和  $K_5$ , 但不依赖于  $\varepsilon$  和  $\eta$ , 使得对任意的  $t \in I$ ,

$$\|\mathbf{E}^\varepsilon(t, \cdot) - \mathbf{E}^\eta(t, \cdot)\|_\infty \leq K_3 \cdot f^{\varepsilon,\eta}(0, t) + K_4 \cdot f^{\varepsilon,\eta}(t, 0) + K_5 |\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}|, \tag{2-17}$$

现在可以回到不等式 (2-15) 继续控制  $|(\mathbf{X}^\varepsilon, \mathbf{V}^\varepsilon)(t, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - (\mathbf{X}^\eta, \mathbf{V}^\eta)(t, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v})|$ ,



$$\begin{aligned}
& |(\mathbf{X}^\varepsilon, \mathbf{V}^\varepsilon)(t, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - (\mathbf{X}^\eta, \mathbf{V}^\eta)(t, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v})| \\
& \leq \left| \int_{\tau}^t (1 + C_{lip(E)}) \cdot f^{\varepsilon, \eta}(r, \tau) + K_3 \cdot f^{\varepsilon, \eta}(0, r) + K_4 \cdot f^{\varepsilon, \eta}(r, 0) + K_5 \cdot |\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}| \, dr \right| \\
\Rightarrow f^{\varepsilon, \eta}(t, \tau) & \leq \left| \int_{\tau}^t ((1 + C_{lip(E)}) \cdot f^{\varepsilon, \eta}(r, \tau) + \max \{K_3, K_4\} \cdot (f^{\varepsilon, \eta}(0, r) + f^{\varepsilon, \eta}(r, 0)) \right. \\
& \quad \left. + K_5 \cdot |\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}|) \, dr \right| \text{ 对任意的 } t, \tau \in I
\end{aligned} \tag{2-18}$$

这个不等式看上去十分复杂但我们可以通过双变元函数的 Gronwall 引理 A.2 来简化。我们从而可以简化得到一个不依赖于  $\varepsilon$  和  $\eta$  的常数  $K$ ，使得对于所有的  $t, \tau \in I$  有下式

$$f^{\varepsilon, \eta}(t, \tau) = \sup \{ |(\mathbf{X}^\varepsilon, \mathbf{V}^\varepsilon)(t, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - (\mathbf{X}^\eta, \mathbf{V}^\eta)(t, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v})| \mid \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N} \} \leq K \cdot |\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}| \tag{2-19}$$

控制  $f^{\varepsilon, \eta}$  的不等式得以出现。  $\square$

有上述证明的一致收敛性现在可以定义，对于  $t, \tau \in I, \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ ,

$\mathbf{X}^0(t, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{X}^\varepsilon(t, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{V}^0(t, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{V}^\varepsilon(t, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v}),$   
 $f^0(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) := f_0(\mathbf{X}^0(0, t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{V}^0(0, t, \mathbf{x}, \mathbf{v}))$ 。虽然还未说明他们是  $\text{VP}^\varepsilon$  问题  $\varepsilon = 0$  的解，下面的论证会确定其确实是解。

不等式 2-17 又控制了不同  $\varepsilon$  之间  $\mathbf{E}$  的差异，对  $t \in I, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  定义  $E^0(t, \mathbf{x}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E}^\varepsilon(t, \mathbf{x})$  也有一致收敛，也能说明  $E^0$  在  $I \times \mathbb{R}^N$  上连续；且  $\|\mathbf{E}^0(t, \cdot)\|_\infty \leq C_E$  及其 Lipschitz 常数也有  $\text{lip}(E^0(t, \cdot)) \leq C_{lip(E)}$ 。对任意的  $t \in I$  有  $E^0(t, \cdot) \in C_b^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \cap \text{Lip}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ 。

对于任意的  $\varepsilon > 0$  有下式，

$$(\mathbf{X}^\varepsilon, \mathbf{V}^\varepsilon)(t, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = (\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \int_{\tau}^t (\mathbf{V}^\varepsilon(r, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{E}^\varepsilon(r, \mathbf{X}^\varepsilon(r, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v}))) \, dr$$

$\mathbf{X}^\varepsilon$  和  $\mathbf{E}^\varepsilon$  的一致收敛性意味着上式  $\varepsilon = 0$  仍有效，由此知  $(\mathbf{X}^0, \mathbf{V}^0)$  满足微分方程 (VP) 和初值条件。

而  $v$  球内  $\text{lip}(f_0)$  控制条件可证  $f_0 \in \text{Lip}(\mathbb{R}^{2N})$ , 于是有下式,

$$\begin{aligned} |f^\varepsilon(t, x) - f^0(t, x)| &= |f_0(\mathbf{X}^\varepsilon(0, t, \mathbf{x}, \mathbf{v})) - f_0(\mathbf{X}^0(0, t, \mathbf{x}, \mathbf{v}))| \\ &\leq \text{lip}(f_0) \cdot \sup \{ |\mathbf{X}^\varepsilon(0, t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \mathbf{X}^0(0, t, \mathbf{x}, \mathbf{v})| \mid \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N}, t \in I \} \rightarrow 0, \text{ 当 } \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

这表明  $(f^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  在  $I \times I \times \mathbb{R}^{2N}$  上,  $\varepsilon \rightarrow 0$  时是一致收敛的。

至于其唯一性, 则相对简单: 如果  $\mathbf{VP}^0$  的一个解  $f^0$  在  $I$  上存在并且  $I$  满足有界条件, 那么引理 2.6 中,  $\eta = 0$  的情况该不等式也成立了, 也就是对  $\mathbf{X}^\varepsilon$  也有  $\mathbf{X}^0(t, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{X}^\varepsilon(t, \tau, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ . 即  $\mathbf{X}^0$ 、 $f^0(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = f_0(\mathbf{X}^0(0, t, \mathbf{x}))$  被该极限唯一地确定了, 从而证明了唯一性。

“ $\Leftarrow$ ” 适定性定理的第二部分: 如果  $\mathbf{VP}^0$  问题的解在  $I$  上存在, 则  $I$  满足有界条件。

当  $N = 1, 2$ , 由于  $\mathbb{R}_0^+$  本身已满足有界条件, 无需再证。而  $N \geq 3$  时, 假设存在  $\mathbf{VP}^0$  问题在  $I = [0, T]$  上的一个解  $f^0$

因为  $I$  是紧的, 从而由引理 ?? 有

$$\sup \{ |\mathbf{V}^0(0, t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \mathbf{v}| \mid \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, t \in I \} =: h_v^0 < \infty$$

要证  $I$  满足有界条件，只需证明存在常数  $B$  上界控制下式，

$$\begin{aligned}
& \sup \left\{ |\mathbf{V}^\varepsilon(t, 0, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \mathbf{v}| \mid \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, t \in I, \varepsilon > 0 \right\} \\
&= \sup \left\{ |(\mathbf{V}^\varepsilon - \mathbf{V}^0)(t, 0, \mathbf{x}, \mathbf{v}) + \mathbf{V}^0(t, 0, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \mathbf{v}| \mid \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, t \in I, \varepsilon > 0 \right\} \\
&\leq \sup \left\{ |(\mathbf{V}^\varepsilon - \mathbf{V}^0)(t, 0, \mathbf{x}, \mathbf{v})| \mid \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, t \in I, \varepsilon > 0 \right\} \\
&\quad + \sup \left\{ |\mathbf{V}^0(t, 0, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \mathbf{v}| \mid \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, t \in I, \varepsilon > 0 \right\} \\
&\quad \text{由于 } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{V}^\varepsilon = \mathbf{V}^0 \text{ 一致收敛, 总存在 } \varepsilon_0 > 0 \text{ 使得} \\
&\quad \sup \left\{ |(\mathbf{V}^\varepsilon - \mathbf{V}^0)(t, 0, \mathbf{x}, \mathbf{v})| \mid \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, t \in I, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \right\} \leq 1 \\
&\leq \max \left\{ \sup \left\{ |(\mathbf{V}^\varepsilon - \mathbf{V}^0)(t, 0, \mathbf{x}, \mathbf{v})| \mid \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, t \in I, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \right\}, \right. \\
&\quad \left. \sup \left\{ |(\mathbf{V}^\varepsilon - \mathbf{V}^0)(t, 0, \mathbf{x}, \mathbf{v})| \mid \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, t \in I, \varepsilon > \varepsilon_0 \right\} \right\} + h_v^0 \\
&\leq \max \left\{ 1, \sup \left\{ |(\mathbf{V}^\varepsilon - \mathbf{V}^0)(t, 0, \mathbf{x}, \mathbf{v})| \mid \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, t \in I, \varepsilon > \varepsilon_0 \right\} \right\} + h_v^0 \\
&= \max \left\{ 1, \sup \left\{ |(\mathbf{V}^\varepsilon - \mathbf{v} + \mathbf{v} - \mathbf{V}^0)(t, 0, \mathbf{x}, \mathbf{v})| \mid \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, t \in I, \varepsilon > \varepsilon_0 \right\} \right\} + h_v^0 \\
&\leq \max \left\{ 1, \int_0^T \|\mathbf{E}^\varepsilon(r)\|_\infty dr + h_v^0 \right\} + h_v^0
\end{aligned}$$

由定理2.1我们知控制  $\|\mathbf{E}\|$  的  $H_E^\varepsilon(t)$  与  $\varepsilon$  为负幂关系

$$\leq \max \left\{ 1, \int_0^T \|\mathbf{E}^{\varepsilon_0}(r)\|_\infty dr + h_v^0 \right\} + h_v^0 < \infty$$

□

## 公式索引

|               |    |
|---------------|----|
| 公式 1-1 .....  | 1  |
| 公式 1-2 .....  | 1  |
| 公式 1-3 .....  | 1  |
| 公式 1-4 .....  | 2  |
| 公式 1-5 .....  | 2  |
| 公式 2-1 .....  | 6  |
| 公式 2-2 .....  | 7  |
| 公式 2-3 .....  | 8  |
| 公式 2-4 .....  | 10 |
| 公式 2-5 .....  | 10 |
| 公式 2-6 .....  | 10 |
| 公式 2-7 .....  | 12 |
| 公式 2-8 .....  | 13 |
| 公式 2-9 .....  | 14 |
| 公式 2-10 ..... | 15 |
| 公式 2-11 ..... | 15 |
| 公式 2-12 ..... | 15 |
| 公式 2-13 ..... | 17 |
| 公式 2-14 ..... | 18 |
| 公式 2-15 ..... | 18 |
| 公式 2-16 ..... | 19 |
| 公式 2-17 ..... | 19 |
| 公式 2-18 ..... | 20 |
| 公式 2-19 ..... | 20 |

## 参考文献

- Abdallah N B. 1994. Weak solutions of the initial-boundary value problem for the vlasov-poisson system[J/OL]. 17(6):451-476[2020-03-13]. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/mma.1670170604>.
- Arsen'ev A A. 1975. Global existence of a weak solution of vlasov's system of equations[J/OL]. 15(1):131-143[2020-03-14]. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/004155537590141X>.
- Bardos C, Degond P. 1985. Global existence for the vlasov-poisson equation in 3 space variables with small initial data[C]//Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis: volume 2. Elsevier: 101-118.
- Batt J. 1962. Fixpunktprobleme bei partiellen differentialgleichungen im zusammenhang mit dem statistischen anfangswertproblem der stellardynamik[M/OL]. Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule, Aachen. <https://books.google.com/books?id=BSryAAAAMAAJ>.
- Batt J. 1977. Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics[J]. Journal of Differential Equations, 25(3):342-364.
- Beesack P R. 1975. Gronwall inequalities[M]. [Ottawa : Carleton University, Dept. of Mathematics].
- Case K M. 1959. Plasma oscillations[J/OL]. 7(3):349 - 364. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491659900296>.
- Degond P. 1986. Spectral theory of the linearized vlasov-poisson equation[J/OL]. 294(2):435-453 [2020-03-13]. <https://www.ams.org/tran/1986-294-02/S0002-9947-1986-0825714-8/>.
- Glasse R T, Schaeffer J. 1985. On symmetric solutions of the relativistic vlasov-poisson system [J/OL]. 101(4):459-473[2020-03-13]. <https://doi.org/10.1007/BF01210740>.
- Hartman P. 2002. Classics in applied mathematics: Ordinary differential equations[M/OL]. Society for Industrial and Applied Mathematics. <https://books.google.com/books?id=CENAPMUEpfoC>.
- Hellwig G. 1964. Blaisdell book in the pure and applied sciences: Partial differential equations: an introduction[M/OL]. Blaisdell Pub. Co. <https://books.google.com.hk/books?id=qBGoAAIAAJ>.
- Horst E. 1975. Zum statistischen Anfangswertproblem der Stellardynamik[D]. Munchen, Germany.
- Horst E, Neunzert H. 1981. On the classical solutions of the initial value problem for the unmodified non-linear vlasov equation i general theory[J/OL]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 3(1):229-248. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/mma.1670030117>.

- Horst E, Neunzert H. 1982. On the classical solutions of the initial value problem for the unmodified non-linear vlasov equation ii special cases[J/OL]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 4(1):19-32. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/mma.1670040104>.
- Illner R, Neunzert H. 1979. An existence theorem for the unmodified vlasov equation[J/OL]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 1(4):530-544. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/mma.1670010410>.
- Kampen N G V. 1955. On the theory of stationary waves in plasmas[J/OL]. 21(6):949 - 963. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031891455930688>.
- Lions P L, Perthame B. 1991. Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov-Poisson system.[J]. *Inventiones Mathematicae*, 105:415.
- Mouhot C, Villani C. 2011. On landau damping[J/OL]. *Acta Math.*, 207(1):29-201. <https://doi.org/10.1007/s11511-011-0068-9>.
- Pfaffelmoser K. 1992. Global classical solutions of the vlasov-poisson system in three dimensions for general initial data[J/OL]. 95(2):281-303[2020-04-14]. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002203969290033J>.
- Schaeffer J. 1991. Global existence of smooth solutions to the vlasov poisson system in three dimensions[J/OL]. 16(8):1313-1335[2020-03-13]. <https://doi.org/10.1080/03605309108820801>.
- Schaeffer J. 1987. Global existence for the poisson-vlasov system with nearly symmetric data[J]. *Journal of differential equations*, 69(1):111-148.
- Ukai S, Okabe T. 1978. On classical solutions in the large in time of two-dimensional vlasov's equation[J]. *Osaka Journal of Mathematics*, 15(2):245-261.
- Wang X. 2003. Global solution of the 3d relativistic vlasov-poisson system for a class of large data [Z].
- Wollman S. 1980. The spherically symmetric Vlasov-Poisson system[J]. *Journal of Differential Equations*, 35(1):30-35.

## 致 谢

衷心感谢导师王学成教授对本人毕业设计的指导和在数学系学习中帮助过我的诸位老师和朋友，我的愚钝常常让各位老师感到头疼。Vlasov 方程是等离子体物理领域最重要的方程之一，感谢王学成导师给我的机会，得以在毕设环节让我对 Vlasov-Poisson 方程的理解增添一些。

感谢在疫情期间帮助我的家人们，如我的二伯娘、母亲等，他们让我有充分的时间专注在论文上。

## 声 明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签 名：\_\_\_\_\_ 日 期：\_\_\_\_\_



## 附录 A 不等式

### A.1 Gronwall 不等式

**引理 A.1:** (*Nonlinear Gronwall Lemma*) 假设  $t_0, t_1 \in \mathbb{R}, t_0 < t_1$ ,  $F : [t_0, t_1) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  函数连续且  $F(t, r) \geq F(t, r')$  对任意的  $r \geq r'$  (即在  $r$  上单调增). 还假设  $f_0 \in [0, \infty), T \in (t_0, t_1]$  且  $g : I \rightarrow [0, \infty)$ , 在区间  $I := [t_0, T)$  上定义, 是微分方程的解  $g' = F(t, g), g(t_0) = f_0$ . 如果  $f : I \rightarrow [0, \infty)$  可测并且局部有界, 对任意的  $t \in I$  有

$$f(t) \leq f_0 + \int_{t_0}^t F(r, f(r)) dr$$

那么便可推导出对任意的  $t \in I$  有  $f(t) \leq g(t)$

**证明** 参阅 (Beesack, 1975)<sup>theorem 4.1</sup> 来处理连续的  $f$ , 不连续就令  $h(t) := f_0 + \int_{t_0}^t F(r, f(r)) dr$ .  $h$  是连续的且也满足  $h(t) \leq f_0 + \int_{t_0}^t F(r, h(r)) dr$ ,  $f(t) \leq h(t) \leq g(t)$ .  $\square$

**引理 A.2:** (*双变量 Gronwall 引理*)

$T > 0, I := [0, T]$ . 假设  $g : I \times I \rightarrow [0, \infty)$  is bounded 且对任意的  $t \in I$  函数  $g(t, \cdot)$  和  $g(\cdot, t)$  均可测. 还假设存在常数  $D_1, D_2, D_3$  使得对所有的  $t, \tau \in I$ , 有下式成立,

$$g(t, \tau) \leq \left| \int_{\tau}^t (D_1 \cdot g(r, \tau) + D_2 \cdot (g(0, r) + g(r, 0)) + D_3) dr \right|$$

。则存在常数  $D$  仅依赖于  $D_1, D_2$  和  $T$ , 使得对所有的  $t, \tau \in I$  均有  $g(t, \tau) \leq D \cdot D_3$ 。

**证明** 取任意的  $g^* \in C_+(I)$  使得对所有的  $t \in I$ ,  $g^*(t) \geq \sup\{g(0, u) + g(u, 0) | 0 \leq u \leq t\}$  固定  $\tau \in I$ . 则对所有的  $t \in [\tau, T]$  有

$$g(t, \tau) \leq \int_{\tau}^t (D_1 \cdot g(r, \tau) + D_2 \cdot g(r) + D_3) dr$$

由非线性 Gronwall 引理 A.1,

$$g(t, \tau) \leq \int_{\tau}^t \exp(D_1 \cdot (t-r)) \cdot (D_2 \cdot g^*(r) + D_3) dr \leq \exp(D_1 \cdot T) \cdot \left| \int_{\tau}^t (D_2 \cdot g^*(r) + D_3) dr \right|$$

类似的, 对所有的  $t \in [0, \tau]$  也是一样, 于是对所有的  $t \in I$

$$g(0, t) + g(t, 0) \leq 2 \cdot \exp(D_1 \cdot T) \cdot \int_0^t (D_2 \cdot g^*(r) + D_3) dr$$

右侧在  $I$  上是单调增的, 可以

$$\sup\{g(0, u) + g(u, 0) | 0 \leq u \leq t\} \leq 2 \cdot \exp(D_1 \cdot T) \cdot \int_0^t (D_2 \cdot g^*(r) + D_3) dr$$

$C_+(I)$  中存在一个单调减的函数序列, 其几乎处处收敛到  $\sup\{g(0, u) + g(u, 0) | 0 \leq u \leq t\}$  于是我们有

$$\begin{aligned} & \sup\{g(0, u) + g(u, 0) | 0 \leq u \leq t\} \\ & \leq 2 \cdot \exp(D_1 \cdot T) \cdot \int_0^t (D_2 \cdot \sup\{g(0, u) + g(u, 0) | 0 \leq u \leq r\} + D_3) dr \end{aligned}$$

再一次使用非线性 Gronwall 引理 A.1,

$$\begin{aligned} & \sup\{g(0, u) + g(u, 0) | 0 \leq u \leq t\} \\ & \leq \int_0^t (\exp(2 \cdot \exp(D_1 \cdot T) \cdot D_2 \cdot (t-r)) \cdot 2 \cdot \exp(D_1 \cdot T) \cdot D_3) dr \\ & \leq T \cdot \exp(2 \cdot \exp(T \cdot D_1) \cdot D_2 \cdot T) \cdot 2 \cdot \exp(D_1 \cdot T) \cdot D_3 =: D_4 \cdot D_3 \end{aligned}$$

将其插入回该引理中给定的不等式,

$$g(t, \tau) \leq \left| \int_{\tau}^t (D_1 \cdot g(r, \tau) + (1 + D_4) \cdot D_3) dr \right|$$

第三次使用非线性 Gronwall 引理 A.1，现在有

$$\begin{aligned} g(t, \tau) &\leq \left| \int_{\tau}^t \exp(D_1 \cdot |t - r|) (1 + D_4) \cdot D_3 \mathrm{d}r \right| \\ &\leq T \cdot \exp(D_1 \cdot T) \cdot (1 + D_4) \cdot D_3 =: D \cdot D_3 \end{aligned} \quad \square$$

综合论文训练记录表

|            |   |    |  |    |  |
|------------|---|----|--|----|--|
| 学生姓名       |   | 学号 |  | 班级 |  |
| 论文题目       |   |    |  |    |  |
| 主要内容以及进度安排 | <div>指导教师签字：_____</div> <div>考核组组长签字：_____</div> <div>年      月      日</div> |    |  |    |  |
| 中期考核意见     | <div>考核组组长签字：_____</div> <div>年      月      日</div>                         |    |  |    |  |

|        |  |
|--------|--|
| 指导教师评语 | <div>指导教师签字：_____</div> <div>年      月      日</div>   |
| 评阅教师评语 | <div>评阅教师签字：_____</div> <div>年      月      日</div>   |
| 答辩小组评语 | <div>答辩小组组长签字：_____</div> <div>年      月      日</div> |

总成绩：\_\_\_\_\_

教学负责人签字：\_\_\_\_\_

年      月      日