清 华 大 学

综 合 论 文 训 练

题目：Vlasov-Poisson 系统的适定性

系　　别：工程物理系

专　　业：数学与应用数学（第二学位）

姓　　名：魏文崟

指导教师：王学成教授

2020 年 5 月 25 日

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位论文的复印件，允许该论文被查阅和借阅；学校可以公布该论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存该论文。

(涉密的学位论文在解密后应遵守此规定)

签　名：____________ 导师签名：____________ 日　期：____________

中文摘要

本文作为文献综述，总结了对 Vlasov-Poisson 系统所做的相关研究。Vlasov-Poisson 问题的适定性问题，即其解存在性与唯一性的证明，及解在时间上至多局部存在还是可以全局存在的问题。该综述的主体部分讲述了局部解的适定性问题，即通过光滑化原 Vlasov-Poisson 问题场函数的奇异性，得到逼近解在该修正逐渐弱化的极限下是一致收敛的结果，从而证明原 Vlasov-Poisson 问题的局部的适定性问题，从而证明局部解的存在性和唯一性。而等离子体物理领域著名的朗道阻尼现象，在本文介绍中也略有提及其相关的数学工作成果。

本文主要围绕着 Vlasov-Poisson 系统的适定性问题，讨论了系统的存在性和唯一性问题。在第二章中我们采用了局部适定性问题的求解方法之后，第三章给出了非相对论情形和相对论情形的全局解的存在性问题相关结果的整理。对于相对论的 Vlasov-Poisson 问题，在初值紧支集的假设下，证明了 $\mu = 1$ 的情况解具有全局存在性，而 $\mu = -1$ 足够小的初值时解具有全局存在性，而在较大的情况下则不然，解不能全局延拓。

关键词：Vlasov-Poisson；适定性，爆破性

ABSTRACT

Recent researches on the Vlasov-Poisson system have been concluded in this literature review. The well-posedness problem, when the Vlasov-Poisson system has a global and unique solution has been studied for a long time. The main part of the literature review contains the approximation method used to converge to a local-in-time solution, proving the local well-posedness. The well-known Landau damping, a varitey of long-term time asymptotic behaviour of Vlasov-Poisson system, is introduced concisely before the main body.

The literature mainly centres on the topic of well-posedness in the Vlasov-Poisson system, discussing about the existence and uniqueness problem. After the method we used in Chapter 2 to solve the local well-posedness problem, global solutions existence problem are presented in Chapter 3 and Chapter 4 respectively for non-relativistic and relativistic cases. For the relativistic Vlasov-Poisson problem, it is shown with compact veclocity support, that $\mu = 1$ situations have global existence, while for $\mu = -1$ "small" enough cases are known to have global existence and a case of blow up with "large" enough spherically symmetric initial data.

Keywords: Vlasov-Poisson; well-posedness; blow up

目　录

第 1 章　介绍 1
1.1　研究背景 1
1.2　特征线 2
1.3　适定性的相关结果 2
1.4　朗道阻尼 4
1.5　符号标记 4
第 2 章　Vlasov-Poisson 系统的局部解 6
2.1　定义扩展 6
2.2　控制 $\mathbf{E}^{\epsilon}$ 和 ρ^{ϵ} 及其 Lipschitz 常数 9
2.2.1　$\mathbf{E}^{\epsilon}$ 和 ρ^{ϵ} 有界 9
2.2.2　$\mathbf{E}^{\epsilon}$ 和 ρ^{ϵ} 的 Lipschitz 连续性 13
2.3　$\varepsilon \to 0$ 时解的一致收敛性 17
第 3 章　Vlasov-Poisson 系统的全局解 25
3.1　非相对论情形 25
3.2　全局存在性 25
3.3　唯一性 27
3.4　相对论情形 29
3.5　球对称性的特性 29
3.6　Existence 31
公式索引 33
参考文献 35
致　谢 37
声　明 38
附录 A　不等式 39
A.1　Gronwall 不等式 39

附录 B　守恒律 42

第 1 章　介绍

1.1　研究背景

Vlasov 类型的偏微分方程系统是描述粒子群多体运动问题的 Boltzmann 方程在无碰撞条件下的简化。粒子群在给定的 $(t,\mathbf{x})$ 处的各向异性的速度分布对系统变化产生了很大的影响，使得对粒子速度空间分布的刻画十分必要。通过将速度空间分布考虑到系统中，即分布函数从时空分布的变为更细致的相空间分布，Vlasov 类型的偏微分方程系统从而能够精确地描述动理学意义上的运动演化规律。准确来说，相空间的分布函数 $f(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) \geqslant 0$ ($x \in \mathbb{R}_x^3$, $v \in \mathbb{R}_v^3$, $t \geqslant 0$)。当电磁力作为主要考虑对象时，即与 Maxwell 方程组耦合的时候 (VM)，Vlasov 方程描述的便是带电粒子与电磁场相互作用的关系，从而描绘物质电磁相互作用的图象。

$$
\text{(VM \& RVM)}\ \begin{cases} f_t + \mathbf{a}(\mathbf{v}) \cdot \nabla_x f + (\mathbf{E} + \mathbf{a}(\mathbf{v}) \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f = 0 \\ \mathbf{E}_t = \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{j} \\ \mathbf{B}_t = -\nabla \times \mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \tag{1-1}
$$

其中 $\mathbf{a}(\mathbf{v}) \in \{\mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}}\}$, $\hat{\mathbf{v}} := \mathbf{v}/\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}$ 且

$$
\rho(t,\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}_v^3} f(t,\mathbf{x},\mathbf{v})d\mathbf{v}, \quad \mathbf{j}(t,\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}_v^3} \mathbf{a}(\mathbf{v})f(t,\mathbf{x},\mathbf{v})d\mathbf{v}. \tag{1-2}
$$

此处 $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \rho$ 和 $\mathbf{j}$ 各表示电场、磁场、空间密度分布和电流密度分布。相对论提出的时空理论，认为光速是有限的，且所有物质的速度都慢于光速 $\mathbf{a}(\mathbf{v}) = \hat{\mathbf{v}} \leqslant 1$，从而在非相对论型的 Vlasov-Maxwell 系统 (VM) 上又有了非相对论型的 Vlasov-Maxwell 系统 (RVM)。

进一步简化，当电磁相互作用中静电相互作用力占主导时，洛伦兹力、磁场等的要素可以被简化掉，从而我们可以得到 Vlasov-Poisson 系统，

$$
\mathbf{E}(t,\mathbf{x}) = -\nabla_x \phi(t,\mathbf{x}), \quad \phi = \frac{1}{|\mathbf{x}|} * \rho \tag{1-3}
$$

$$(\text{VP \& RVP})\quad \begin{cases} \partial_t f + \mathbf{a}(\mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\nabla}_x f + \mu \boldsymbol{\nabla}_x \phi \cdot \boldsymbol{\nabla}_v f = 0 \\ \Delta\phi = \rho(f) := \int_{\mathbb{R}^3_v} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} \end{cases} \tag{1-4}$$

其中 $\mu \in \{+, -\}, \mathbf{a}(\mathbf{v}) \in \{\mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}}\}$, 且 $\hat{\mathbf{v}} := \mathbf{v}/\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}$. μ 的符号正负表示不同的物理图象，其为"+" 表示等离子体物理中同种电荷的相互排斥的库伦作用，而"-" 表示星体动力学在万有引力主导下的作用规律。(VP) 实际上表明了粒子群在一种势场作用下的运动规律，这种势场由粒子本身产生，在 N 维空间中场强与 $1/r^{N-1}$ （r 为粒子之间的距离）成正比，这使得 Vlasov-Poisson 问题中的场可能 $\mathbf{E} \notin \mathrm{L}^{\frac{N}{N-1}}$。当三维情况时，这意味着 $\mathbf{E} \notin \mathrm{L}^{\frac{3}{2}}$。当 Vlasov-Poisson 系统用来讨论近似静电学问题时它表明的是排斥的库伦相互作用 ($\mu = +1$)，而在星体动力学中则是万有引力的相互作用 ($\mu = -1$)。

当考虑多粒子 (Multi-species) 相互作用问题时，和单粒子情况在数学上没有本质的区别，通过对不同种粒子给定其质量 q_i 和电荷量 m_i 即可求解，其方程不在此赘述。但注意在引力作用 $\mu = 1$ 时，没有多粒子的物理图像。

1.2 特征线

在 Vlasov 型问题的研究中经常使用的是偏微分返程中的常用技巧，特征线:$s \mapsto X(s, t，\mathbf{x}，\mathbf{v})$，$s \mapsto V(s, t，\mathbf{x}，\mathbf{v})$，它定义为以下相应的常微分方程组的解:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}}{ds} &= a(\mathbf{V}) = \{\mathbf{V}, \mathbf{V}/\sqrt{1+|\mathbf{V}|^2}\} \\ \frac{d\mathbf{V}}{ds} &= \gamma \mathbf{E}(\mathbf{X}, s) \end{aligned} \tag{1-5}$$

具体来说，在 Vlasov 型问题中，它表示在 t 时刻过 $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ 点的特征线的轨迹，即 $\mathbf{X}(t, t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{x}$, $\mathbf{V}(t, t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{v}$。有时，当 $(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 明确时，我们直接使用 $\mathbf{X}(s)$ 来简化符号，特别是当我们研究单条特征线时。

沿特征线偏微分方程求解的函数值不变，因此，若初始数据有界，自然地有 $||f(t，\cdot，\cdot)||_\infty = ||f_0||_\infty < \infty$。

1.3 适定性的相关结果

我们将只研究 Vlasov-Poisson 问题的经典解，即在这些解上对应的特征线的常微分方程有着唯一经典解。这种情况下解的局部存在性对于给定的 N 维空间

已经由 Horst and Neunzert (1981) 证明，我们将在第二章做重点梳理。已知全局存在的情况如下:

非相对论情况:

(i) $n=2$ ，Illner and Neunzert (1979)

(ii) $n=3$ 时 f_0 球对称，Horst and Neunzert (1982)

(iii) $n=3$ 时 f_0 柱对称，Hellwig (1964)

(iv) $n=3$ ，Lions and Perthame (1991)

(v) $n=4$ 时 f_0 球对称且足够小，Hellwig (1964)

相对论情况:

(i) $n=3$, $\mu=1$ 且 f_0 球对称; $\mu=-1$, 初值足够小且球对称，Glassey and Schaeffer (1985)。两者初值都需要紧支集条件。

(ii) $n=3$, $\mu=1$, 初值球对称且有局域约束条件，Wang (2003).

另外，$n\geqslant 4$ 时，即使 $f_0\in C_c^{\infty}\left(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\right)$ 性质相当好，也不一定有全局解, Horst and Neunzert (1982).

对于经典解来说，其存在性和唯一性结果已经由 Iordanskii，Ukai and Okabe (1978) 和 Bardos and Degond (1985) 分别在一维、二维和三维下对小初值给出了。经典解的具有对称性的初值问题也有 Batt (1977), Wollman (1980), Horst and Neunzert (1981), Schaeffer (1987) 等讨论过，其中 Schaeffer (1987) 还在同一片文章中处理了相对论情况的对称初值问题.

特别的在三维空间的话，全局弱解存在 (Abdallah (1994); Arsen'ev (1975)), 并且全局经典解也可以存在如果 Cauchy 问题初值足够小 Bardos and Degond (1985).

当我们考虑相对论情形时，(RVP) 似乎看上去比经典的更好了，因为 $|\hat{\mathbf{v}}|\leqslant 1$. 于是经典问题中高阶矩的发散困难便迎刃而解了。基于同样的原因，存在上限的速度导出了确定的因果关系（casuality)，这些是好的方面。

但如果讨论到某些量的范数，(RVP) 可能确实不如 (VP) 。比如 $\mu=+1$ 时，$\rho\in L^{4/3}(\mathbb{R}_x^3)$ 是比非相对论的情形（$\rho\in L^{5/3}(\mathbb{R}_x^3)$）要更差的。不过通过 Batt (1977) 和 Wollman (1980) 仍然可以证明当 $\mu=+1$ 时全局球对称解的存在性。而对于引力情况 $\mu=-1$，Glassey and Schaeffer (1985) 证明了其解的存在性被弱化了，只有在初值满足条件，足够小时 $40\mathscr{M}^{2/3}\|f_0\|_{\infty}^{1/3}<1$ 才能确保 (RVP) 存在全局解。同时其还举了不存在全局解的反例，此时若初始能量 $\mathscr{E}_0$（见附录 B 定义）是负的，那么这样一个球对称的经典解的不存在全局解，其延续时间必然有限。

在没有初值紧支集的假设下，对 (VP) 系统的全局适定性问题也有众多的研究者论述。Vlasov-Poisson 系统已经成功地解决了对大初值的适定性的问题，Pfaffelmoser (1992), Lions and Perthame (1991) 和 Schaeffer (1991).

Lions and Perthame (1991), 将(VP) 将左侧的部分 $\nabla_v f$ 置于右侧视为源项，从而通过特征线的方法导出控制不等式，证明了 v 高阶矩的延续性质。更准确点说便是，如果 $|\mathbf{v}|^m f_0 \in L^1(\mathbb{R}^6)$ 对任意的$m < m_0$,其中$m_0 > 3$, 则我们有 Vlasov-Poisson 方程的解也满足 $|\mathbf{v}|^m f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \in L^1(\mathbb{R}^6)$ 对任意的$m < m_0$,其中$m_0 > 3$ 对任意的 $t > 0$。以此为判据也可以说明全局解存在.

1.4 朗道阻尼

表示静电相互作用的 Vlasov-Poisson 系统能够刻画等离子体物理领域著名的朗道现象，它是等离子体在大时间尺度时的渐进行为。将 Vlasov-Poisson 方程中的 $\nabla_v f$ 替换为 $\nabla_v f_0$ 得到的线性化 Vlasov-Poisson 系统 (Linearized Vlasov Poisson System)，便能够一定程度上刻画朗道阻尼的表现；线性朗道阻尼理论便在其之上首先发展起来。

物理学家首先通过 Fourier-Laplace 变换求解线性化 (VP) 问题，并且希望确定电势 $\phi(t, \mathbf{x})$ 是否在大时间尺度时表示为平面波的形式。他们发现除非存在 f 的 Laplace 变化的解析延拓，除非在涉及到的函数的解析性质足够好的情况下可以做出。然而，这些假设都在许多物理图象中得到了验证。

除了这种方法之外，相当早期的研究（Kampen (1955) 和 Case (1959)）用到了正交模式展开的方法。Degond (1986) 研究了线性化 (VP) 的谱理论来证明它的行为在大时间尺度下表现得如平面波的和。其研究表明要想得到阻尼波展开的分布函数，需要对(VP) 预解式的解析延拓。

线性的研究理论是朗道阻尼研究中很长一段时间的焦点，而在此之上的非线性朗道阻尼理论，则由 Mouhot and Villani (2011) 在近期给出。其阻尼线性被重新诠释为一种正则性在动力学量和空间相关变量之间的转移，而不是能量的交换。这项研究还揭示了阻尼的驱动机制确实是相混合（phase mixing）。

1.5 符号标记

文献综述时描述局部解的适定性问题主要参考 Horst and Neunzert (1981)，大部分标记和定义沿用了其原文，一定程度上做了修改。

文章中的 C 通常表示不依赖于初始条件的常数，而 K 则是依赖于初始条件的常数，它们在我们研究给定 Cauchy 初值条件的时候都可视为常数。函数符号方面则用 $C_+(I) := \{f : I \to [0,\infty)\big| f$ 连续且单调增$\}$ 表示我们用来控制的函数空间，其中 I 是一个区间，H 常常表示一个 $C_+(I)$ 或 $C_+([0,\infty))$ 集合中的函数，而用 h 表示通过在一段时间对某个量，如电场 $\mathbf{E}$ 的大小，取上确界 sup 得到的单调增函数。通常当需要对某个量进行控制的时候，我们会取该量在一段时间上的上确界作为新的函数，并通过 C_+ 中的函数对它进行控制。

函数积分的时候进行积分域的分割常将不同的积分项命名为 I_1, I_2 等，由于只是局部的使用，为简介起见，在不同的积分式分割中积分项均以下标 1 开始，应不会产生混淆。

在偏微分方程中各种量互相控制时，有时常数在不等式中并不特别重要，因此我们还用 $A \lesssim B$ 和 $B \gtrsim A$ 这样的符号来表示 $A \lesssim CB$，其中 C 可以是依赖于初值条件的常数。

$\omega_N := 2 \cdot \pi^{N/2}/\Gamma(N/2)$ 是 N 维空间中 $(N-1)$ 维的单位球面的表面积。

本文中谈到的积分和测度总是基于 Lebesgue 意义下的，$\mathrm{L}_\infty\left(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^L\right)$ 和 $\|\cdot\|_\infty$ 遵循实分析的通常定义。$\mathrm{L}_p\left(\mathbb{R}^M\right) := L_p\left(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}\right)$

对所有的函数 $f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^L$, Lipschitz 常数按惯例为 $\mathrm{lip}(f) := \sup_{z\neq w} |z-w|^{-1}|f(z)-f(w)|$。$\mathrm{Lip}\left(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^L\right) := \left\{f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^L \mid \mathrm{lip}(f) < \infty\right\}$, $\mathrm{Lip}\left(\mathbb{R}^M\right) := \mathrm{Lip}\left(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}\right)$

第 2 章　Vlasov-Poisson 系统的局部解

这一章中我们阐述 Horst and Neunzert (1981) 采用的通过无奇异性的解逼近有奇异性解的过程，以此来证明（至少是局部的）的 Vlasov-Poisson 问题的适定性问题。该方法适用于 $N \in \mathbb{Z}, N \geqslant 1$ 维空间，证明前还需要对我们在介绍中引入的定义进行扩展，即定义 Vlasov-Poisson 系统在 N 维空间中的形式及解在何种意义下成立，并且说明场函数奇异性被削弱之后的解如何定义。对 Vlasov 类型的问题，我们通常说的经典（Classical）解的意义即为对特征线常微分方程，任意给定初值均有唯一解，特征线在 Vlasov 类型问题中的重要性，我们将会在对解的定义中感受到。

2.1　定义扩展

$$\text{(VP \& RVP)} \begin{cases} \partial_t f + \mathbf{a}(\mathbf{v}) \cdot \nabla_x f + \mathbf{E} \cdot \nabla_v f = 0 \\ \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \mu \int \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^N} \rho(t, \mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} \end{cases} \tag{2-1}$$

$f_0 \in \mathrm{L}_1\left(\mathbb{R}^{2N}\right)$ 总是表示所考虑的偏微分问题的初值条件。用 $m := \|f_0\|_1$ 表示初始质量, 即相空间分布函数的 L_1 范数。场函数积分核的奇性我们用参数 ε 进行了削弱，新的积分核为

$$\mathbf{e}^{\varepsilon}(\mathbf{z}) = \gamma \cdot \frac{\mathbf{z}}{\left(|\mathbf{z}|^2 + \varepsilon\right)^{N/2}}, \qquad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^N, \varepsilon \geqslant 0$$

参数 ε 弱化了场函数的奇性，相当于重新定义了新的偏微分方程 $\mathrm{VP}^{\varepsilon}$ 问题，下面拓宽对它的定义。

定义 2.1： *(VP^{ε} 问题及其解)* 假设 $I \subset [0, \infty)$ 是一个含 0 的区间。称 $f^{\varepsilon} : I \times \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ 是 $\mathrm{VP}^{\varepsilon}$($\varepsilon \geqslant 0$ 固定) 在 I 上的解, 如果它满足下面的条件：

(1) $f(0, \cdots) = f_0$

(2) 对任意的 $t \in I, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ 有下列映射的可积性，$\left((\mathbf{y}, \mathbf{u}) \mapsto \mathbf{e}^{\varepsilon}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \cdot f^{\varepsilon}(t, \mathbf{y}, \mathbf{u})\right) \in \mathrm{L}_1\left(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R}^N\right)$

(3) $\mathbf{E}^{\varepsilon}(t,\mathbf{x}) := \iint_{\mathbb{R}^6} \mathbf{e}^{\varepsilon}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \cdot f^{\varepsilon}(t,\mathbf{y},\mathbf{u})\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\mathbf{u}$ 用来替换原来的有奇异性的场函数积分核。要求 $\mathrm{VP}^{\varepsilon}$ 问题解的分布函数产生的 $\mathbf{E}^{\varepsilon}$ 在 $I \times \mathbb{R}^N$ 上连续，$\mathbf{E}^{\varepsilon}(t,\cdot) \in C_b^0\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N\right) \cap \mathrm{Lip}\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N\right)$ for all $t \in I$ 并存在 $C_{\rho}^{\varepsilon}, C_{lip(E)}^{\varepsilon} \in C_{+}(I)$ 使得对任意的 $t \in I$

$$\|\mathbf{E}^{\varepsilon}(t,\cdot)\|_{\infty} \leqslant C_E^{\varepsilon}(t), \quad \mathrm{lip}\left(\mathbf{E}^{\varepsilon}(t,\cdot)\right) \leqslant C_{\mathrm{lip}(E)}^{\varepsilon}(t)$$

(4) 解 f^{ε} 通过 $\mathrm{VP}^{\varepsilon}$ 特征线的常微分问题来定义，这是因为沿特征线有 f^{ε} 不变的特性. 具体而言场修正后的特征线方程如下，

$$\dot{\mathbf{X}}^{\varepsilon} = \mathbf{V}^{\varepsilon}, \dot{\mathbf{V}}^{\varepsilon} = \mathbf{E}^{\varepsilon}\left(t,\mathbf{X}^{\varepsilon}\right), \quad t \in I, \tag{2-2}$$

它对任一初值 $\mathbf{x},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ 在 I 上均有唯一解，这由 (3) 中的有界条件保证。$f(t,\mathbf{x},\mathbf{v})$ 通过沿特征线给定常微分方程的初值状态（实际是末值）来追溯到特征线 $t=0$ 时刻的 f_0 值, $\mathbf{X}^{\varepsilon}(t)=\mathbf{x}, \mathbf{V}^{\varepsilon}(t)=\mathbf{v}$, 即

$$f^{\varepsilon}(t,\mathbf{X}^{\varepsilon}(t),\mathbf{V}^{\varepsilon}(t)) = f^{\varepsilon}(0,\mathbf{X}^{\varepsilon}(0),\mathbf{V}^{\varepsilon}(0)) = f_0(\mathbf{X}^{\varepsilon}(0),\mathbf{V}^{\varepsilon}(0)), \quad t \in I$$

如果 $I=[0,\infty)$, f^{ε} 被称为一个全局（时域）解，否则被称为局部解。

定理 2.1： *(VP^{ε} 当 $\varepsilon > 0$ 时的适定性)*

如果 $\varepsilon > 0$，那么存在着 $\mathrm{VP}^{\varepsilon}$ 的唯一全局解 f^{ε}。如果 $I \subset [0,\infty)$ 是一个含 0 的区间，那么 $f^{\varepsilon}|_{I\times\mathbb{R}^{2N}}$ 是 I 上的解，并且该解唯一。

证明 此处可以引用 Horst (1975) 硕士论文中采用的方法，但以此得到的 $H_E^{\varepsilon}(t), H_{lip(E)}^{\varepsilon}(t)$ 是 ε 的负幂的乘积，故而注意对 $\varepsilon=0$ 的情况不适用。 □

定义 2.2： 假设 f^{ε} 是 $\mathrm{VP}^{\varepsilon}(\varepsilon \geqslant 0$固定$)$ 在 I 上的解. 对任意的 $t_0 \in I, (\mathbf{x},\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{2N}$, 记 $\mathbf{X}(s,t_0,\mathbf{x},\mathbf{v}), \mathbf{V}(s,t_0,\mathbf{x},\mathbf{v}) : I \times I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ 为特征线常微分方程满足以下初值问题的解。

$$\mathbf{X}^{\varepsilon}\left(t_0,t_0,\mathbf{x},\mathbf{v}\right)=\mathbf{x}, \quad \mathbf{V}^{\varepsilon}\left(t_0,t_0,\mathbf{x},\mathbf{v}\right)=\mathbf{v}$$

该定义可以直接导出对任意的 $t_1,t_2,t_3 \in I$ 有，

$$\left(\mathbf{X}^{\varepsilon},\mathbf{V}^{\varepsilon}\right)\left(t_1,t_2,\cdot\right) \circ \left(\mathbf{X}^{\varepsilon},\mathbf{V}^{\varepsilon}\right)\left(t_2,t_3,\cdot\right) = \left(\mathbf{X}^{\varepsilon},\mathbf{V}^{\varepsilon}\right)\left(t_1,t_3,\cdot\right)$$

特别地当 $t_3=t_1$ 我们有 $\left(\mathbf{X}^{\varepsilon},\mathbf{V}^{\varepsilon}\right)\left(t_1,t_2,\cdot\right)$ 的反函数是 $\left(\mathbf{X}^{\varepsilon},\mathbf{V}^{\varepsilon}\right)\left(t_2,t_1,\cdot\right)$.

引理 2.1： *(特征线相关性质)*

特征线有以下性质：

(i) $\mathbf{X}^{\epsilon}, \mathbf{V}^{\epsilon}$ 在 $I \times I \times \mathbb{R}^{2N}$ 上连续

(ii) 给定 $t_1, t_2 \in I$ 函数 $\mathbf{X}^{\epsilon}\left(t_1, t_2, \cdot\right)$ 是 $\mathbb{R}^{2N}$ 映到 $\mathbb{R}^{2N}$ 上的保测度（Lebesgue）同胚。

(iii) 若 $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} E^{\epsilon}(t, \mathbf{x})$ 存在并在 $I \times \mathbb{R}^{N}$ 上连续，则 $\mathbf{X}^{\epsilon}$ 对于 $s, t, \mathbf{x}, \mathbf{v}$ 均连续可导

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \mathbf{X}^{t}\left(t, t_1, x\right)+x_{v} \cdot \nabla_{x} \mathbf{X}^{t}\left(t, t_1, x\right)+E^{\epsilon}\left(t_1, \mathbf{x}\right) \cdot \nabla_{v} X_{i}^{t}\left(t, t_1, x\right)=0$$

(iv) 因为沿特征线偏微分方程的待求函数值 f^{ϵ} 不变，我们有对任意的 $t, t_1 \in I, x \in \mathbb{R}^{2N}$

$$f^{\epsilon}\left(t, \mathbf{X}^{\epsilon}\left(t, t_1, \mathbf{x}, \mathbf{v}\right), \mathbf{V}^{\epsilon}\left(t, t_1, \mathbf{x}, \mathbf{v}\right)\right)=f_0\left(\mathbf{X}^{\epsilon}(0, t_1, \mathbf{x}, \mathbf{v})\right)$$

$$f^{\epsilon}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})=f_0\left(\mathbf{X}^{\epsilon}(0, t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{V}^{\epsilon}(0, t, \mathbf{x}, \mathbf{v})\right) \tag{2-3}$$

于是对任意的 $t \in I$，$f^{\epsilon}(t, \cdot)$ 和 f_0 有着相同的值域, 因此 $f^{\epsilon} \geqslant 0$ 当且仅当 $f_0 \geqslant 0$ 并且 $\sup |f^{\epsilon}(t, \cdot, \cdot)|=\sup |f_0|$。$f^{\epsilon}$ 在 $I \times \mathbb{R}^{2N}$ 上连续，当且仅当 f_0 在 $\mathbb{R}^{2N}$ 上连续。如果 $\nabla_{x} E^{\epsilon}(t, \mathbf{x})$ 存在并在 $I \times \mathbb{R}^{N}$, 上连续，由 (iii) 和方程 2-3 得到 f^{ϵ} 是可导的（连续可导的）当且仅当 f_0 是可导的（连续可导的），并且这种情况下 f^{ϵ} 确实满足原偏微分方程。

$$\frac{\partial}{\partial t} f^{\epsilon}(t, x)+\mathbf{v} \cdot \nabla_{x} f^{\epsilon}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})+\mathbf{E}^{\epsilon}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla_{v} f^{\epsilon}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})=0$$

(v) (ii) 和方程 2-3 表明对任意的 $t, t_1 \in I$ 和任何可测函数 $\sigma: \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{M}$，我们有 $\sigma \in \mathrm{L}_1\left(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R}^{M}\right)$ 的充要条件是 $\sigma \circ(\mathbf{X}^{\epsilon}, \mathbf{V}^{\epsilon})\left(t_1, t, \cdot\right) \in \mathrm{L}_1\left(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R}^{M}\right)$. 此时

$$\int \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \mathrm{d} \mathbf{x} \mathrm{d} \mathbf{v}=\int \sigma\left(\mathbf{X}^{\epsilon}\left(t_1, t, \mathbf{x}, \mathbf{v}\right)\right) \mathrm{d} \mathbf{x} \mathrm{d} \mathbf{v}$$

特别地 $\left(t_1=0, \sigma=|f_0|^{p}\right)$ 时，对任意的 $t \in I$ 有 $f^{\epsilon}(t, \cdot) \in \mathrm{L}_{p}\left(\mathbb{R}^{2N}\right)$, 当且仅当 $f_0 \in \mathrm{L}_{p}\left(\mathbb{R}^{2N}\right)$ 且此时 $\| f^{\epsilon}(t, \cdot)\|_{p}=\| f_0\|_{p}, 1 \leqslant p<\infty$

(vi) 定义 $\rho^{\varepsilon}(t,\mathbf{x}) := \int f^{\varepsilon}(t,\mathbf{x},\mathbf{v})\mathrm{d}\mathbf{v}, \rho^{\varepsilon}_{abs}(t,\mathbf{x}) := \int |f^{\varepsilon}(t,\mathbf{x},\mathbf{v})|\,\mathrm{d}\mathbf{v}$. 固定 $t \in I$ 时，这些函数几乎处处存在 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ because of (vi) and (1.1)。由 Fubini 定理，对任意的 $t \in I$，$\rho^{\varepsilon}(t,\cdot), \rho^{\varepsilon}_{abs}(t,\cdot) \in \mathrm{L}_1\left(\mathbb{R}^N\right)$ 且 $\|\rho^{\varepsilon}(t,\cdot)\|_1 \leqslant \left\|\rho^{\varepsilon}_{abs}(t,\cdot)\right\|_1 = \|f_0\|_1 = \mathscr{M}$ 和

$$\mathbf{E}^{\varepsilon}(t,\mathbf{x}) = \int \mathbf{e}^{\varepsilon}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\rho^{\varepsilon}(t,\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}$$

证明 从一阶常微分方程的标准理论可以得出上述结论, (Hartman, 2002)[pp. 131]。关于 $(\mathbf{X}^{\varepsilon},\mathbf{V}^{\varepsilon})\left(t,t_1,\cdot\right)$ 即使 $\mathbf{E}^{\varepsilon}$ 不可导的情况下仍是保测度的同胚映射的证明可以在 (Batt, 1962)[pp. 62]。而 E^{ε} 关于 $\mathbf{x}$ 连续可导的证明可见 (KURTH, 1960)[chap. III]。 □

2.2 控制 $\mathbf{E}^{\varepsilon}$ 和 ρ^{ε} 及其 Lipschitz 常数

2.2.1 $\mathbf{E}^{\varepsilon}$ 和 ρ^{ε} 有界

由于 $\mathrm{VP}^{\varepsilon}(\varepsilon > 0)$ 问题中场函数的奇异性被移除了，经典的分析手段可以很好地处理 $\mathrm{VP}^{\varepsilon}(\varepsilon > 0)$ 的解。要在其基础上，证明 VP^0 解的存在性和唯一性，我们需要说明 f^{ε} 确实在 $I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ 上当取极限 $\varepsilon \to 0$ 时一致收敛到 f^0。而 Vlasov 问题中的经典解通常指的是特征线常微分问题有唯一解，我们逐渐往这个方向推进。

首先要控制 $\mathbf{E}^{\varepsilon}$ 和 ρ^{ε}。

对 $\mathbf{E}$ 的积分式粗糙地取积分内各项绝对值则有不等式，即 $|E^{\varepsilon}(t,\mathbf{x})| \leqslant \int |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{1-N} \cdot \left|\rho^{\varepsilon}_{abs}\right|(t,\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}$。借助于这个不等式，通过下面的引理及之后的推论可以证明 $\|E^{\varepsilon}(t,\cdot)\|_{\infty}$ 有界。

引理 2.2： 假设 $0 < \alpha < N, p \in (1,\infty], q \in [1,\infty)$ $p > N/(N-\alpha) > q$ 且 $\sigma \in \mathrm{L}_p\left(\mathbb{R}^N\right) \cap \mathrm{L}_q\left(\mathbb{R}^N\right)$. 则对于任意的 $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$ 有

$$\int |\mathbf{z}-\mathbf{w}|^{-\alpha} \cdot |\sigma(\mathbf{w})|\mathrm{d}\mathbf{w} \leqslant \bar{C}(N,\alpha,p,q) \cdot \|\sigma\|_p^{\lambda} \cdot \|\sigma\|_q^{\mu} \tag{2-4}$$

其中常数有 $\tilde{C}(N,\alpha,p,q), \lambda := (\alpha/N - 1 + 1/q)/(1/q - 1/p)$ 及 $\mu := 1 - \lambda$.

令 $\tilde{C}_{min}(N,\alpha,p,q)$ 为对任意的 $\sigma \in \mathrm{L}_p\left(\mathbb{R}^N\right) \cap \mathrm{L}_q\left(\mathbb{R}^N\right)$，(2-4) 式均成立的常数。

证明 将 (2-4) 的积分域分为球内外的两部分 $R > 0$，通过 Hölder 不等式,

$$I_1 \leqslant \left(\int\limits_{|\mathbf{z}-\mathbf{x}| \leqslant R} |\mathbf{z}-\mathbf{x}|^{-\alpha p'} \mathrm{d}\mathbf{x} \right)^{1/p'} \|\sigma\|_p = \text{ const. } R^{(N/p')-\alpha} \|\sigma\|_p$$

$$I_2 \leqslant \left(\int\limits_{|\mathbf{z}-\mathbf{x}| > R} |\mathbf{z}-\mathbf{x}|^{-\alpha q'} \mathrm{d}\mathbf{x} \right)^{1/q'} \|\sigma\|_q = \text{ const. } R^{(N/q')-\alpha} \|\sigma\|_q$$

p' 和 q' 大小为 $p^{-1} + p'^{-1} = q^{-1} + q'^{-1} = 1$。

从而有 $I_1 + I_2 \leqslant \text{const.} \left(R^{(N/p')-\alpha} \cdot \|\sigma\|_p + R^{(N/q')-\alpha} \cdot \|\sigma\|_q \right)$ 右式作为 R 的函数取最小值得到 const. $\|\sigma\|_p^{\lambda} \cdot \|\sigma\|_q^{\mu}.$，即 $\tilde{C}(N, \alpha, p, q)\|\sigma\|_p^{\lambda} \cdot \|\sigma\|_q^{\mu}.$ □

这条引理启发我们研究 $\|\rho^{\varepsilon}(t,\cdot)\|_p$, $\|f^{\varepsilon}(t,\cdot)\|_1 = \mathscr{M}$. 下面我们还将讨论其 L^{∞} 范数，

假设 2.1： 假设 f^{ε} 是 $\mathrm{VP}^{\varepsilon}$ ($\varepsilon \geqslant 0$固定) 问题在 I 上的解

1. 定义 <u>f^{ε} 在 I 上满足 ρ_{abs} 控制条件</u>：存在一个函数 $H^{\varepsilon}_{\rho,abs}(t) \in C_{+}(I)$ 使得对所有的 $t \in I$ 有下式，

$$\|\rho^{\varepsilon}_{abs}(t,\cdot)\|_{\infty} \leqslant H^{\varepsilon}_{\rho,abs}(t) \tag{2-5}$$

2. 定义 <u>f_0 满足 $\sup f_0$ 控制条件</u>：如果存在合适的 K_1, K_2（可以依赖于初值的常数）使得下式对所有的 $a \geqslant 0$ 成立，

$$\int^{*} \underbrace{\sup\left\{ |f_0(\mathbf{x},\mathbf{u})| \middle| \mathbf{x}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^N, |\mathbf{u}-\mathbf{v}| \leqslant a \right\}}_{\text{该部分为}\mathbf{v}\text{ 的函数}} \mathrm{d}\mathbf{v} \leqslant K_1 \cdot \left(K_2 + a\right)^N \tag{2-6}$$

($\int^{*} \cdots \mathrm{d}\mathbf{x}$ 标记为上 Lebesgue 积分)

$\sup f_0$ 控制条件可推导出 f_0 是有界的, 即 $f_0 \in \mathrm{L}_{\infty}\left(\mathrm{R}^{2N}\right)$. 如果给定了 $f_0 \in \mathrm{L}_1\left(\mathbb{R}^{2N}\right)$, $\sup f_0$ 控制条件实际上给出了 f_0 很好的可积性，对任意的 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 有 $f_0 \in \mathrm{L}_p\left(\mathrm{R}^{2N}\right)$.

引理 2.3： 如果存在常数 $\alpha > N$ 和 $K \geqslant 0$ 使得对任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ f_0 有 $|f_0(\mathbf{x},\mathbf{v})| \leqslant K \cdot (1 + |\mathbf{v}|)^{-\alpha}$，则 f_0 满足 $\sup f_0$ 控制条件。

证明 当 $N=1$ 时，可以通过 $K\cdot(1+|\mathbf{v}|)^{-\alpha}$ 本身满足 $\sup f_0$ 控制条件来揭示。而对于 $N>1$ 的情形，可以先将 $|\mathbf{v}|$ 在不等式中拆解成它的分量, $(1+|\mathbf{v}|)^{-\alpha}\leqslant\left(1+\left|v_1\right|\right)^{-\alpha/N}\cdots\cdot\left(1+\left|v_N\right|\right)^{-\alpha/N}$ 并注意，

$$
\begin{aligned}
&\sup\left\{|f_0(\mathbf{x},\mathbf{u})|\,\middle|\,\mathbf{x},\mathbf{u}\in\mathbb{R}^{2N},\left|\mathbf{u}-\mathbf{v}\right|\leqslant a\right\}\\
&\leqslant K\cdot\sup\left\{\left(1+\left|u_1\right|\right)^{-\alpha/N}\,\middle|\,|u_1-v_1|\leqslant a\right\}\cdot\cdots\cdot\sup\left\{\left(1+\left|u_N\right|\right)^{-\alpha/N}\,\middle|\,|u_N-v_N|\leqslant a\right\}
\end{aligned}
$$

等式两侧都对 $\mathbf{v}$ 空间做上 Lebesgue 积分，而右侧是可测的，其值我们可以通过 Fubini 定理得到。 $\square$

引理 2.4： 假设 f^ϵ 是 VP^ϵ ($\varepsilon\geqslant 0$ 固定) 问题在 I 上的解，并且初值条件 f_0 满足 $\sup f_0$ 控制条件(记该条件中两常数为 K_1 和 K_2)。那么

(i) f^ϵ 在 I 上满足 ρ_{abs} 控制条件.

(ii) 取任意的 $t_0\in I$，函数 $f^\epsilon\left(t_0,\cdot\right)$ 亦满足 $\sup f_0$ 控制条件，即$\sup f_0$ 控制条件是可延续的。若 f^ϵ 满足条件时的常数为 K_1 和 K_2，则 $f^\epsilon\left(t_0,\cdot\right)$ 以常数 K_1 和 $K_2+h_v^\epsilon\left(t_0\right)$ 满足该条件。

证明 (i) 对任意的 $t\in I$，令

$$
\begin{aligned}
h_v^\epsilon(t):&=\sup\left\{|\mathbf{V}^\epsilon(0,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})-\mathbf{v}|\,\middle|\,\mathbf{x},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^N,0\leqslant\tau\leqslant t\right\}\\
&=\sup\left\{|\mathbf{V}^\epsilon(\tau,0,\mathbf{x},\mathbf{v})-\mathbf{v}|\,\middle|\,\mathbf{x},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^N,0\leqslant\tau\leqslant t\right\}\\
&\qquad\text{速度最大改变量应被场强上确界控制住}\\
&\leqslant\int_0^t\sup\left\{\|\mathbf{E}^\epsilon(\tau,\cdot)\|_\infty\,\middle|\,0\leqslant\tau\leqslant r\right\}\mathrm{d}r=:\int_0^t h_E^\epsilon(r)\mathrm{d}r<\infty
\end{aligned}
$$

于是，因为速度的最大改变量被 $h_v^\epsilon(t)$ 控制住了，只有那些速度相近的“粒子“对于任意的才能在 t 时刻到达 $\mathbf{x},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^N$。

$$
\begin{aligned}
|f^\epsilon(t,\mathbf{x},\mathbf{v})|&=\left|f_0\left(\mathbf{X}^\epsilon(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v}),\mathbf{V}^\epsilon(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v})\right)\right|\\
&\leqslant\sup\left\{|f_0(\mathbf{y},\mathbf{u})|\,\middle|\,\mathbf{y},\mathbf{u}\in\mathbb{R}^N,\left|\mathbf{u}-\mathbf{v}\right|\leqslant h_v^\epsilon(t)\right\}
\end{aligned}
$$

左侧 $\int\cdots d\mathbf{v}$ 积分，右侧 $\int_{\dots}^{*}\cdots d\mathbf{v}$ 上 Lebesgue 积分可得 $\rho_{abs}^\epsilon(t,\mathbf{x})\leqslant K_1\cdot\left(K_2+h_v^\epsilon(t)\right)^N$.

(ii) 对给定的 $t_0 \in I$,

$$\begin{aligned}
&\sup\left\{\left|f^{\varepsilon}\left(t_0,\mathbf{y},\mathbf{u}\right)\right| \middle| \mathbf{y},\mathbf{u}\in\mathbb{R}^{2N}, \left|\mathbf{u}-\mathbf{v}\right| \leqslant a\right\} \\
=&\sup\left\{\left|f_0\left(\mathbf{X}^{\varepsilon}\left(0,t_0,\mathbf{y},\mathbf{u}\right),\mathbf{V}^{\varepsilon}\left(0,t_0,\mathbf{y},\mathbf{u}\right)\right)\right| \middle| \mathbf{y},\mathbf{u}\in\mathbb{R}^{N}, |\mathbf{u}-\mathbf{v}| \leqslant a\right\} \\
\leqslant&\sup\left\{|f_0(\mathbf{y},\mathbf{u})| \middle| \mathbf{y},\mathbf{u}\in\mathrm{R}^{N}, \left|\mathbf{u}-\mathbf{v}\right| \leqslant a+h_v^{\varepsilon}\left(t_0\right)\right\}
\end{aligned}$$

于是从该积分中可知 $f(t_0,\cdot,\cdot)$ 也满足 $\sup f_0$ 控制条件，只是常数的大小发生了改变。 □

引理 2.5： 假设 f^{ε} 是 $\mathrm{VP}^{\varepsilon}(\varepsilon \geqslant 0)$ 在 I 上的解。进一步假设 f_0 在 $\mathbb{R}^{2N}$ 上连续并满足 $\sup f_0$ 控制条件。则 f^{ε} 在 $I\times\mathbb{R}^{2N}$ 上是连续的。

定理 2.2： *(有界条件的等价性)* 假设 $I\subset[0,\infty)$ 是个包含 0 的区间，并且 f_0 满足 $\sup f_0$ 控制条件的条件，那么下面三个条件是等价的：

(i) 存在函数 $H_\rho(t)\in C_+(I)$，使得

$$|\rho^{\varepsilon}\left(t,\mathbf{x}\right)| \leqslant H_\rho(t) \text{ 对任意的} \varepsilon>0, t\in I, \mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$$

(ii) 存在函数 $H_E(t)\in C_+(I)$，使得

$$|\mathbf{E}^{\varepsilon}\left(t,\mathbf{x}\right)| \leqslant H_E(t) \text{ 对任意的} \varepsilon>0, t\in I, \mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$$

(iii) 存在函数 $H_v(t)\in C_+(I)$，使得

$$|\mathbf{V}^{\varepsilon}(t,0,\mathbf{x},\mathbf{v})-\mathbf{v}| \leqslant H_v^{\varepsilon}(t) \leqslant h_v(t) \text{ 对任意的} \varepsilon>0, t\in I, \mathbf{x},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{N}$$

证明 证明他们互相充要的工具其实我们已经准备好了。

(i) $\Rightarrow$(ii) 由引理 (2.1)($\alpha=N-1, p=\infty, q=1$)

$|\mathbf{E}^{\varepsilon}\left(t,\mathbf{x}\right)| \leqslant \tilde{C}_{min}(N,N-1,\infty,1)\cdot\left(\|\rho^{\varepsilon}(t,\cdot)\|_\infty\right)^{(N-1)/N}\cdot\mathscr{M}^{1/N}$.

下面两个推导，都出现在了引理 2.4 中，

(ii) $\Rightarrow$ (iii) :

$f_v^{\varepsilon}(t) \leqslant \int_0^t \sup\left\{\|E^{\varepsilon}(\tau,\cdot)\|_\infty \,|0\leqslant\tau\leqslant r\right\}\mathrm{d}r$

(iii) $\Rightarrow$ (i):

$|\rho^{\varepsilon}\left(t,\mathbf{x}\right)| \leqslant K_1\cdot\left(K_2+h_v^{\varepsilon}(t)\right)^N$

另外，如果上面三个条件都是等价的话，那么应该有三式联立可得下式成立

$$h_{v+}^{\varepsilon}(t) \leqslant K_2 + \int_0^t K_3 \cdot (h_{v+}^{\varepsilon}(r))^{N-1} \mathrm{d}r \tag{2-7}$$

其中，$K_3 := C(N, N-1, \infty, 1) \cdot \mathscr{M}^{1/N} \cdot \left(K_1\right)^{(N-1)/N}, h_{v+}^{\varepsilon} := K_2 + h_v^{\varepsilon}(t)$

发现它正好是非线性 Gronwall 引理 A.1 所适用的不等式，我们知道 I 上该不等式容许的最大的解 g 是常微分方程 $g' = K_3 \cdot (g)^{N-1}, g(0) = K_2$ 的解。当 $N = 1, 2$ 时，这个函数我们是很清楚地，不管是一次函数还是指数函数都是局部有界的，不会 blow up。但如果 $N \geqslant 3$ 那就说不准了，所以有下面的结论，如果 $N = 1, 2$ 则 $I = [0, \infty)$, 要是 $N \geqslant 3$ 那就说不准，要看初值给的 $K_1, K_2, \mathscr{M}$ 及空间维度 N 如何, 满足该条件的区间不一定是全局的，$I = [0, T), T \in (0, \infty]$. □

定义 2.3： *(有界条件)* 如果以上的这些条件能够被满足，定义 I 满足“有界条件”。如果 $N = 1, 2$, 那么 $[0, \infty)$ 都满足该条件。而对于 $N \geqslant 3$ 的情况，存在一个区间 $T \in (0, \infty]$, 右端点依赖于空间维度 $N, \mathscr{M} := \|f_0\|_1$ 和 K_1, K_2 ($\sup f_0$ 控制条件中约定的常数), 使得 $[0, T)$ 满足有界条件。

也就是说，一个区间是不是满足“有界条件”，并不完全取决这个区间本身，还和 VP^{ϵ} 给定的问题维度及初值按多项式衰减的不等式的系数有关。

2.2.2 $\mathbf{E}^{\epsilon}$ 和 ρ^{ϵ} 的 Lipschitz 连续性

本节将证明如果 f_0 足够得好，$\mathbf{E}^{\epsilon}(t, \cdot)$ 和 $\rho^{\epsilon}(t, \cdot)$ 便是 Lipschitz 连续的。当 I 满足有界条件时, 其 Lipschitz 常数不依赖于 ε。

在下面的引理中，我们实际上在尝试通过用 ρ^{ϵ} 的范数来控制 $\mathbf{E}^{\epsilon}$，我们先给定 σ 一个较大的函数空间，然后说明能通过它来控制住它产生的场 $lip(\mathbf{E}^{\epsilon})$ 的 Lipschitz 常数，进而由于 ρ^{ϵ} 确实在该空间中，VP^{ϵ} 问题的解对应产生的场的强度 $\mathbf{E}$ 应该对任意的 $t \in I$ 都是 Lipschitz 连续的。

引理 2.6： 令 $\varepsilon \geqslant 0, \gamma = \pm 1$。假设 $\sigma : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 对任意的 $t \in I$ 满足 $\sigma(t, \cdot) \in \mathrm{L}_1\left(\mathbb{R}^N\right) \cap \mathrm{L}_\infty\left(\mathbb{R}^N\right) \cap \mathrm{Lip}\left(\mathbb{R}^N\right)$。令 $\mathbf{E}^{\varepsilon}(t, \mathbf{x}) := \int \mathbf{e}^{\varepsilon}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \sigma(t, \mathbf{y}) \, \mathrm{d}\mathbf{y}, t \in I, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$. 则有

(i) 对任意的 $t \in I$ 有 $\mathbf{E}^{\epsilon}(t, \cdot) \in C_b^1\left(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N\right)$ 和下式

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial E_i}{\partial x_j}(t, \mathbf{x})\right| \leqslant & \omega_N(\delta_{ij}/N + N) + N\omega_N \ln(1 + \mathrm{lip}(\sigma(t, \cdot)))\|\sigma(t, \cdot)\|_\infty \\ & + N\|\sigma(t, \cdot)\|_1 \quad \text{for all } 1 \leqslant i, j \leqslant N, t \in I, \mathbf{x} = \left(x_1, \cdots, x_N\right) \in \mathbb{R}^N\end{aligned}$$

于是 $\mathbf{E}^{\varepsilon}(t,\cdot)\in \mathrm{Lip}\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N\right)$ 且

$$\begin{aligned}\mathrm{lip}(\mathbf{E}^{\varepsilon}(t,\cdot)) \leqslant & \omega_N\left(N^{-1}+N^2\cdot\log(1+\mathrm{lip}(\sigma(t,\cdot)))\right)\cdot\|\sigma(t,\cdot)\|_{\infty} \\ & +N^2\left(\omega_N+\|\sigma(t,\cdot)\|_1\right)\end{aligned}$$

(ii) 如果 σ 在 $I\times\mathbb{R}^N$ 上连续且 $\mathrm{lip}(\sigma(t,\cdot))$ 和 $\|\sigma(t,\cdot)\|_1$ 在 I 的任何紧子区间上对 t 都一致有界，则偏导数 $\partial E_i/\partial x_j$ 在 $I\times\mathbb{R}^N$ 上连续。

证明 (i) $E_i^{\varepsilon}(t,\mathbf{x})$ 偏导可以被拆分为球壳型的三个部分。令被求点的位置 $\mathbf{x}$ 位于开球 $B(\mathbf{z},d_1)$ 内，球心 $\mathbf{z}$ 和半径 d_1.

$$\frac{\partial}{\partial x_j}E_i^{\varepsilon}(\mathbf{x})=\int\limits_{d_1<|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\leqslant d_2}+\int\limits_{d_2<|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}+\int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\leqslant d_1}\frac{\partial}{\partial x_j}e_i^{\varepsilon}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\sigma(t,\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}=:I_{1,1}+I_{1,2}+I_2 \tag{2-8}$$

$\mathbf{e}^{\varepsilon}$ 的定义给出 $\left|\frac{\partial}{\partial x_j}e_i^{\varepsilon}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right|\leqslant N\left|\mathbf{x}-\mathbf{y}\right|^{-N}$ 来帮助控制其中的积分项的估计，参考 Hellwig (1964), 章节 4.4.1, 定理 3 来计算含奇异性的 I_2 积分。由于该不等式部分参数选取 d_1,d_2 比较任意，故证明细节不在这里呈现而请读者查阅原始证明 Horst and Neunzert (1981) Sect. 3。

(ii) TODO □

下面我们又看到两个关键假设，其中v 球内 $\mathrm{lip}(f_0)$ 控制条件能帮助我们很好地控制速度空间的积分，并且它的假设成立并不困难，后面我们将会提出引理使得该假设的达成变得相当简单。

假设 2.2： 假设 f^{ε} 是 $\mathrm{VP}^{\varepsilon}$ ($\varepsilon\geqslant 0$ 固定) 问题在 I 上的解，我们可以定义以下假设：

1. 定义 <u>f^{ε} 在 I 上满足 $\mathrm{lip}_x(\rho)$ 控制条件</u> 为：存在一个函数 $H^{\varepsilon}_{lip_x(\rho)}(t)\in C_+(I)$ 使得对任意的 $t\in I$

$$\mathrm{lip}\left(\rho^{\varepsilon}(t,\cdot)\right)\leqslant H^{\varepsilon}_{lip_x(\rho)}(t) \tag{2-9}$$

2. 定义 <u>f_0 满足 v 球内 $\mathrm{lip}(f_0)$ 控制条件</u> 为：存在一个函数 $h\in C_+([0,\infty))$ 使得对所有 $a\geqslant 0$ 有下式，

$$\begin{aligned}\int^{*}\sup\{&\frac{|f_0(\mathbf{y},\mathbf{u})-f_0(\mathbf{z},\mathbf{w})|}{|(\mathbf{y},\mathbf{u})-(\mathbf{z},\mathbf{w})|}\Big|(\mathbf{y},\mathbf{u}),(\mathbf{z},\mathbf{w})\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N, \\ &(\mathbf{y},\mathbf{u})\neq(\mathbf{z},\mathbf{w}),|\mathbf{u}-\mathbf{v}|,|\mathbf{w}-\mathbf{v}|\leqslant a\}\mathrm{d}\mathbf{v}\leqslant h(a)\end{aligned} \tag{2-10}$$

注意本来这里 $h \in C_+([0,\infty))$ 应该用简介中介绍的符号 H，但这里为与原文吻合用了 h。另外观察 v 球内 $\operatorname{lip}(f_0)$ 控制条件可导出 $f_0 \in \operatorname{Lip}\left(\mathbb{R}^{2N}\right)$。

引理 2.7： 如果 f_0 是可导的并存在常数 $\alpha > N$ 和 $K \geqslant 0$ 使得对所有的 $\mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ 有 $\left|\boldsymbol{\nabla}_{x,v} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})\right| \leqslant K \cdot (1 + |\mathbf{v}|)^{-\alpha}$，便有 f_0 满足 v 球内 $\operatorname{lip}(f_0)$ 控制条件。

证明 通过中值定理，v 球内 $\operatorname{lip}(f_0)$ 控制条件中的积分式被 $K \cdot (\max\{1, 1 + |\mathbf{v}| - a\})^{-\alpha}$ 控制住了, 令 $h(a) := K \cdot \omega_N \cdot \int_0^\infty r^{N-1} \cdot (\max\{1, 1 + r - a\})^{-\alpha} \mathrm{d}r$ 即为所需的 $h(a)$。 □

接下来则是本节的关键，要证明 $\mathbf{E}^\varepsilon$ 和 ρ^ε 在 $\varepsilon > 0$ 时的 Lipschitz 连续性。

引理 2.8： 假设 f_0 满足 $\sup f_0$ 控制条件和 v 球内 $\operatorname{lip}(f_0)$ 控制条件两个条件。

1. 如果 f^ε 是 VP^ε 在 $I(\varepsilon \geqslant 0 \text{ fixed})$ 上的解，则 f^ε 满足 $\operatorname{lip}_x(\rho)$ 控制条件。
2. 如果 I 满足 有界条件, 存在函数 $H_{lip(\rho)}, H_{lip(E)} \in C_+(I)$ 使得对任意的 $\varepsilon > 0, t \in I$ 有

$$\operatorname{lip}\left(\mathbf{E}^\varepsilon(t,\cdot)\right) \leqslant H_{lip(E)}(t), \quad \operatorname{lip}\left(\rho^\varepsilon(t,\cdot)\right) \leqslant H_{lip(\rho)}(t)$$

证明 1. 已在引理 2.4 中证明对任意的 $t \in I$ $\sup\left\{|\mathbf{V}^\varepsilon(0,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v}) - \mathbf{v}| \cdot |\mathbf{x},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, 0 \leqslant \tau \leqslant t\right\} = h_v^\varepsilon(t) < \infty$。现对 $\mathbf{E}$ 的 Lipschitz 常数在时间上取上界得到函数 $h^\varepsilon_{lip(E)}(t) := \sup\left\{\operatorname{lip}\left(\mathbf{E}^\varepsilon(r,\cdot)\right) | 0 \leqslant r \leqslant t\right\}$ 通过它控制不同特征线在 VP^ε 问题解中渐行渐远的尺度，

$$\begin{aligned}
&|(\mathbf{X}^\varepsilon, \mathbf{V}^\varepsilon)(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v}) - (\mathbf{X}^\varepsilon, \mathbf{V}^\varepsilon)(t,\tau,\mathbf{y},\mathbf{u})| \\
=&|(\mathbf{x},\mathbf{v}) - (\mathbf{y},\mathbf{u})| + \int_\tau^t \left(\mathbf{V}^\varepsilon(r,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v}) - \mathbf{V}^\varepsilon(r,\tau,\mathbf{y},\mathbf{u}), \mathbf{E}^\varepsilon\left(r, \mathbf{X}^\varepsilon(r,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})\right) - \mathbf{E}^\varepsilon\left(r, \mathbf{X}^\varepsilon(r,\tau,\mathbf{y},\mathbf{u})\right)\right) \mathrm{d} \\
\leqslant&|(\mathbf{x},\mathbf{v}) - (\mathbf{y},\mathbf{u})| + \int_\tau^t \left(1 + h^\varepsilon_{lip(E)}(r)\right) \cdot |\mathbf{X}^\varepsilon(r,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v}) - \mathbf{X}^\varepsilon(r,\tau,\mathbf{y},\mathbf{u})| \,\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

而要用到非线性的 Gronwall 引理 A.1 则需要连续函数, 我们便需要找 $H^* \in C_+(I)$ 且 $H^*(t) \geqslant h^\varepsilon_{lip(E)}(t), t \in I$ 的函数暂时替换掉 $h^\varepsilon_{lip(E)}(t)$ 运用非线性的 Gronwall 引理有

$$\text{上式} \leqslant |(\mathbf{x},\mathbf{v}) - (\mathbf{y},\mathbf{u})| \cdot \exp\left(\left|\int_\tau^t \left(1 + H^*(r)\right) \mathrm{d}r\right|\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{lip}_{x,v}\left((\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(t,\tau,\cdot)\right) \leqslant \exp\left(\left|\int_\tau^t \left(1+H^*(r)\right)\mathrm{d}r\right|\right)$$

虽然上面的过程中我们需要额外找 $C_+(I)$ 中的函数，但它并不本质，我们总可以在 $C_+(I)$ 中找一个单调减的序列，它几乎处处收敛于 $h^\varepsilon_{lip(E)}$. 从而上式中的 $H^*(t)$ 又可以换回 $h^\varepsilon_{lip(E)}(t)$

$$\operatorname{lip}_{x,v}\left((\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(t,\tau,\cdot)\right) \leqslant \exp\left(\left|\int_\tau^t \left(1+h^\varepsilon_{lip(E)}(r)\right)\mathrm{d}r\right|\right) \tag{2-11}$$

有了上面的工具后我们可以正式研究 ρ^ε 了，令 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned}
&|\rho^\varepsilon(t,\mathbf{x})-\rho^\varepsilon(t,\mathbf{y})| \leqslant \int |f^\varepsilon(t,\mathbf{x},\mathbf{v})-f^\varepsilon(t,\mathbf{y},\mathbf{v})|\,\mathrm{d}\mathbf{v}\\
&=\int \left|f_0\left((\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v})\right)-f_0\left((\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(0,t,\mathbf{y},\mathbf{v})\right)\right|\mathrm{d}\mathbf{v}\\
&\leqslant \int^* \sup\left\{\frac{|f_0(\mathbf{x},\mathbf{u})-f_0(\mathbf{y},\mathbf{w})|}{|(\mathbf{x},\mathbf{u})-(\mathbf{y},\mathbf{w})|}\middle|(\mathbf{x},\mathbf{u})\neq(\mathbf{y},\mathbf{w}),|\mathbf{u}-\mathbf{v}|,|\mathbf{w}-\mathbf{v}|\leqslant h^\varepsilon_v(t)\right\}\\
&\quad\cdot|(\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v})-(\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(0,t,\mathbf{y},\mathbf{v})|\,\mathrm{d}\mathbf{v}\\
&\leqslant h\left(h^\varepsilon_v(t)\right)\cdot\operatorname{lip}_{x,v}\left((\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(0,t,\cdot)\right)\cdot|\mathbf{x}-\mathbf{y}|
\end{aligned}$$

h 是v 球内 $\operatorname{lip}(f_0)$ 控制条件中给定的控制函数，于是

$$\begin{aligned}
\operatorname{lip}\left(\rho^\varepsilon(t,\cdot)\right) &\leqslant h\left(h^\varepsilon_v(t)\right)\cdot\operatorname{lip}_{x,v}\left((\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(0,t,\cdot)\right)\\
&\leqslant h\left(h^\varepsilon_v(t)\right)\cdot\exp\left(\int_0^t\left(1+h^\varepsilon_{lip(E)}(r)\right)\mathrm{d}r\right)
\end{aligned}$$

2. 如果 I 满足有界条件, 我们之前的有界等价条件定理中曾经提到存在 $h_v\in C_+(I)$ 使得对任意的 $\varepsilon>0, t\in I$ 有 $h^\varepsilon_v(t)\leqslant h_v(t)$ 说明对 ε 是一致有界的，于是

$$\operatorname{lip}\left(\rho^\varepsilon(t,\cdot)\right) \leqslant h\left(h_v(t)\right)\cdot\exp\left(\int_0^t\left(1+h^\varepsilon_{lip(E)}(r)\right)\mathrm{d}r\right) \tag{2-12}$$

有界条件还告诉我们存在 $H_\rho \in C_+(I)$, 使得对所有的 $\varepsilon > 0, t \in I$ 有

$$\|\rho^\varepsilon(t,\cdot)\|_\infty \leqslant H_\rho(t) \tag{2-13}$$

通过上述两式可以将引理 2.6 中一些对 ε 依赖的项替换掉，可导出对任意的 $t \in I$，有

$$\begin{aligned}
\operatorname{lip}\left(E^\varepsilon(t,\cdot)\right) \leqslant & \omega_N \left(N^{-1} + N^2 \cdot \log\left(1 + \operatorname{lip}\left(\Phi_Q^\varepsilon(t,\cdot)\right)\right)\right) \cdot H_\rho^\varepsilon(t) + N^2 \cdot \left(\omega_N + \mathscr{M}\right) \\
\leqslant & \omega_N \cdot \left(N^{-1} + N^2 \cdot \log\left(1 + h\left(h_v(t)\right)\right.\right. \\
& \left.\left.\cdot \exp\left(\int_0^t \left(1 + h_{lip(E)}^\varepsilon(r)\right) \mathrm{d}r\right)\right)\right) \cdot H_\rho(t) + N^2 \cdot \left(\omega_N + \mathscr{M}\right) \\
= & \omega_N \cdot \left(N^{-1} + N^2 \cdot \left(\log\left(1 + h\left(h_v(t)\right)\right)\right.\right. \\
& \left.\left. + \int_0^t \left(1 + h_{lip(E)}^\varepsilon(r)\right) \mathrm{d}r\right)\right) \cdot H_\rho(t) + N^2 \cdot \left(\omega_N + \mathscr{M}\right)
\end{aligned}$$

右式是对 t 单调增的，所以我们把左式对 t 求上界也没有问题，不等式仍然成立，即不等式左侧变换为 $\sup\left\{\operatorname{lip}\left(E^\varepsilon(r,\cdot)\right) | 0 \leqslant r \leqslant t\right\} = h_{lip(E)}^\varepsilon(t)$. 注意这时候我们又可以用非线性的 Gronwall 引理了 A.1。虽然这个不等式很长，但是 Gronwall 定理告诉我们，$h_{lip(E)}^\varepsilon$ 有对应的积分式 $H_{lip(E)}$ 控制住它，且不依赖于 ε。

回到本小节证明的开头的不等式 2-12，现在等号右边的 $h_{lip(E)}^\varepsilon$ 对 ε 依赖可以去掉了

$$\operatorname{lip}\left(\rho^\varepsilon(t,\cdot)\right) \leqslant h\left(h_v(t)\right) \cdot \exp\left(\int_0^t \left(1 + H_{lip(E)}(r)\right) \mathrm{d}r\right) =: H_{lip(\rho)}(t)$$

□

现在两者的 Lipschitz 常数都被控制住了。

2.3 $\varepsilon \to 0$ 时解的一致收敛性

本章中我们将证明 VP^0 的解存在于 I 上的等价条件，即当且仅当 I 满足有界条件时。我们先刻画 $|\mathbf{e}^\varepsilon - \mathbf{e}^\eta|$ 的大小并将 $\mathbf{e}^\varepsilon$ 分为两部分 $\mathbf{e}^{\varepsilon,1}, \mathbf{e}^{\varepsilon,2}$ 进行更细致的控制。

引理 2.9： 对任意的 $\mathbf{z}\in\mathbb{R}^N,\varepsilon,\eta\geqslant 0$ 下式成立

$$|\mathbf{e}^{\varepsilon}(\mathbf{z})-\mathbf{e}^{\eta}(\mathbf{z})|\leqslant 2\cdot N\cdot|\mathbf{z}|^{-N+1/2}\cdot\left|\varepsilon^{1/4}-\eta^{1/4}\right|$$

证明

$$\begin{aligned}|\mathbf{e}^{\varepsilon}(\mathbf{z})-\mathbf{e}^{\eta}(\mathbf{z})|=&\left|\int_{\eta}^{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathbf{e}^{\lambda}(\mathbf{z})\mathrm{d}\lambda\right|=\left|-(N/2)\cdot\int_{\eta}^{\varepsilon}\left(\mathbf{z}^2+\lambda\right)^{-N/2-1}\mathbf{z}\mathrm{d}\lambda\right|\\ \leqslant&(N/2)\cdot\left|\int_{\eta}^{\varepsilon}\left(\mathbf{z}^2+\lambda\right)^{-(N+1)/2}\mathrm{d}\lambda\right|\leqslant(N/2)\cdot|\mathbf{z}|^{-N+1/2}\cdot\left|\int_{\eta}^{\varepsilon}\lambda^{-3/4}\mathrm{d}\lambda\right|\\ =&2N\cdot|\mathbf{z}|^{-N+1/2}\cdot\left|\varepsilon^{1/4}-\eta^{1/4}\right|\end{aligned}\tag{2-14}$$

□

为了控制得更精确，我们可以将 $\mathbf{e}^{\varepsilon}$ 分为更细致的两部分 $\mathbf{e}^{\varepsilon,1}+\mathbf{e}^{\varepsilon,2}$。

定义 2.4： 对任意的 $\varepsilon\geqslant 0$ 和 $\mathbf{z}\in\mathbb{R}^N$ 令 $\mathbf{e}^{\varepsilon}=:\mathbf{e}^{\varepsilon,1}+\mathbf{e}^{\varepsilon,2}$ 其中

(i) $\mathbf{e}^{\varepsilon,1}(\mathbf{z}):=\mu\cdot\left(\varepsilon+\max\left\{1,\mathbf{z}^2\right\}\right)^{-N/2}\cdot\mathbf{z}$,

(ii) $\mathbf{e}^{\varepsilon,2}(\mathbf{z}):=\mathbf{e}^{\varepsilon}(\mathbf{z})-\mathbf{e}^{\varepsilon,1}(\mathbf{z})$.

引理 2.10： 对以上定义的 e^{ε} 的分解，有

(i) $\mathbf{e}^{\varepsilon,1}\in\mathrm{L}_{\infty}\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N\right)\cap\mathrm{Lip}\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N\right),\left\|\mathbf{e}^{\varepsilon,1}\right\|_{\infty}\leqslant 1,\mathrm{lip}\left(\mathbf{e}^{\varepsilon,1}\right)\leqslant N^2$

(ii) $\mathbf{e}^{\varepsilon,2}\in\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N),\left\|\mathbf{e}^{\varepsilon,2}\right\|_1\leqslant\omega_n\cdot N/(N+1),\mathrm{supp}\left(\mathbf{e}^{\varepsilon,2}\right)=\left\{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^N\middle||\mathbf{z}|\leqslant 1\right\}$

证明 $\mathrm{lip}\left(\mathbf{e}^{\varepsilon,1}\right)\leqslant\max\left\{(1+\varepsilon)^{-N/2},\sup_{|z|\geqslant 1}\max_{1\leqslant i\leqslant N j=1}\sum_{0=1}^{N}\left|\frac{\partial}{\partial z_j}e_i^{\varepsilon}(z)\right|\right\}\leqslant\max\left\{1,\sup_{|z|\geqslant 1}N^2\cdot|z|^{-N}\right\}=N^2$ $|\mathbf{e}^{\varepsilon,2}\|_1=\omega_N\cdot\int_0^1 r^N\left(\left(r^2+\varepsilon\right)^{-N/2}-(1+\varepsilon)^{-N/2}\right)\mathrm{d}r\leqslant\omega_N\cdot\int_0^1 r^N\left(r^{-N}-1\right)\mathrm{d}r=\omega_N\cdot N/(N+1)$, as the integrand is for $0\leqslant r\leqslant 1$ non-increasing in ε (its derivative with respect to ε is non-positive). □

通过下面的定理，我们便能够基于满足有界条件的区间得到解适定性的结果，对 $N=1,2$ 的情况全局解便得到了，而 $N\geqslant 3$ 时至少能确定局部解的存在性和唯一性。

定理 2.3： *(VP^0 问题的适定性)*

假设 $f_0 \in \mathrm{L}_1\left(\mathbb{R}^{2N}\right)$ 满足 $\sup f_0$ 控制条件和 v 球内 $\operatorname{lip}(f_0)$ 控制条件。$I \subset [0,\infty)$ 是含 0 的区间。那么 VP^0 的解 f^0 在 I 上存在, 当且仅当 I 满足有界条件。此时 f^0 是唯一的且 $f^0 = \lim_{\varepsilon\to 0} f^\varepsilon$, 在 $I_1 \times \mathbb{R}^{2N}$ 上一致收敛，其中 I_1 是 I 任意的紧子集。

证明 现我们只对紧的区间 I 论证。因为当且仅当 I 的紧子区间满足该定理时，这条定理成立。于是下面假设 $I = [0,T], T > 0$

”⇒” 适定性定理的第一部分：如果 I 满足有界条件，则存在唯一的 VP^0 问题的解。我们在前一章中已经证明了对任意的 $\varepsilon > 0, t \in I$，存在常数可以控制住 ρ^ε 和 $\mathbf{E}^\varepsilon$ 及其范数使得

$$
\begin{aligned}
&|\mathbf{E}^\varepsilon(t,\cdot)|_\infty \leqslant C_E, \quad \operatorname{lip}\left(\mathbf{E}^\varepsilon(t,\cdot)\right) \leqslant C_{lip(E)} \\
&\sup\left\{ |\mathbf{V}^\varepsilon(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v}) - \mathbf{v}| \,\middle|\, \mathbf{x},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N \right\} \leqslant C_v \\
&\|\rho^\varepsilon(t,\cdot)\|_\infty \leqslant \|\rho^\varepsilon_{abs}(t,\cdot)\|_\infty \leqslant C_\rho, \quad \operatorname{lip}\left(\rho^\varepsilon(t,\cdot)\right) \leqslant C_{lip(\rho)}
\end{aligned}
$$

定义 2.5： 对于给定的 $\varepsilon > 0$ 和 $\eta > 0$，定义 $t,\tau \in I$ 的函数：

$$
f^{\varepsilon,\eta}(t,\tau) := \sup\left\{ |(\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v}) - (\mathbf{X}^\eta,\mathbf{V}^\eta)(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})| \,\middle|\, \mathbf{x},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N \right\},
$$

即所有从 τ 到 t 的特征线，τ 时起始状态一样，末状态在 VP^ε 和 VP^η 两种解之间差异范数的上确界，即 $|(\mathbf{X}^\varepsilon - \mathbf{X}^\eta, \mathbf{V}^\varepsilon - \mathbf{V}^\eta)|$。它刻画了 VP^ε 在参数 ε 的作用下解会发生至多多大的改变。

为了证明能通过对 $\mathbf{X}^\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ 取极限得到 $\mathbf{X}^0$, 需要说明 $\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{X}^\varepsilon$ 在 $I \times I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ 上一致收敛。下面通过 Cauchy 准则来证明这一点, 具体来说是证明存在 $n > 0$ 可以用 $K|\varepsilon^n - \eta^n|$ （K 为常数）来控制住 $f^{\varepsilon,\eta}(t,\tau)$。

引理 2.11：

$$
f^{\varepsilon,\eta}(t,\tau) \leqslant K|\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}| \text{ for all } t,\tau \in I, \varepsilon,\eta > 0 \tag{2-15}
$$

其中 K 是依赖于 f_0 的常数。

如果该引理成立, 它实际上说明 $\lim_{\varepsilon\to 0}(\mathbf{X}^\varepsilon)$ 在 $I \times I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上一致收敛。

证明 为了控制 $f^{\varepsilon,\eta}$, 下面我们会介绍一些关于 $\|\mathbf{E}^{\varepsilon}(t,\cdot)-\mathbf{E}^{\eta}(t,\cdot)\|_{\infty}, \|\rho^{\varepsilon}-\rho^{\eta}\|_{\infty}$ 的估计。

$$
\begin{aligned}
&|(\mathbf{X}^{\varepsilon},\mathbf{V}^{\varepsilon})(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})-(\mathbf{X}^{\eta},\mathbf{V}^{\eta})(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})|\\
=&\left|\int_{\tau}^{t}\left(\mathbf{V}^{\varepsilon}(r,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})-\mathbf{V}^{\eta}(r,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v}),\mathbf{E}^{\varepsilon}\left(r,\mathbf{X}^{\varepsilon}(r,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})\right)-\mathbf{E}^{\eta}\left(r,\mathbf{X}^{\eta}(r,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})\right)\right)\mathrm{d}r\right|\\
\leqslant&\left|\int_{\tau}^{t}f(r,\tau)\mathrm{d}r\right|+\int_{\tau}^{t}\left|\mathbf{E}^{\varepsilon}(r,\mathbf{X}^{\varepsilon}(r))-\mathbf{E}^{\varepsilon}\left(r,\mathbf{X}^{\eta}(r)\right|\mathrm{d}r+\int_{\tau}^{t}\left|\mathbf{E}^{\varepsilon}(r,\mathbf{X}^{\eta}(r))-\mathbf{E}^{\eta}\left(r,\mathbf{X}^{\eta}(r)\right|\mathrm{d}r
\end{aligned}
\tag{2-16}
$$

为了控制 $\mathbf{E}^{\varepsilon}(t,\mathbf{x})-\mathbf{E}^{\eta}(t,\mathbf{x})$ 积分, 需要估计 $\|\mathbf{E}^{\varepsilon}(t,\cdot)-\mathbf{E}^{\eta}(t,\cdot)\|_{\infty}$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\varepsilon}(t,\mathbf{x})-\mathbf{E}^{\eta}(t,\mathbf{x}) &=: I_1+I_2+I_3 \text{ in which}\\
I_1&=\int\left(\mathbf{e}^{\varepsilon}(\mathbf{x}-\mathbf{y})-\mathbf{e}^{\eta}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right)\cdot\rho^{\varepsilon}(t,\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}\\
I_2&=\int\mathbf{e}^{\eta,1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\left(\rho^{\varepsilon}(t,\mathbf{y})-\rho^{\eta}(t,\mathbf{y})\right)\mathrm{d}\mathbf{y}\\
I_3&=\int\mathbf{e}^{\eta,2}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\left(\rho^{\varepsilon}(t,\mathbf{y})-\rho^{\eta}(t,\mathbf{y})\right)\mathrm{d}\mathbf{y}
\end{aligned}
$$

由引理 2.2 和 2.10

$$
\begin{aligned}
\left|I_1\right|&\leqslant\int 2N\cdot|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-N+1/2}\cdot\left|\varepsilon^{1/4}-\eta^{1/4}\right|\cdot|\rho^{\varepsilon}(t,\mathbf{y})|\,\mathrm{d}\mathbf{y}\\
&\leqslant 2N\mathscr{M}^{1/2N}\tilde{C}_{min}(N,N-1/2,\infty,1)\cdot C_{\rho}^{(N-1/2)/N}\cdot\left|\varepsilon^{1/4}-\eta^{1/4}\right|\\
&=:K_5\cdot\left|\varepsilon^{1/4}-\eta^{1/4}\right|\\
\left|I_2\right|&=\left|\int\left(\mathbf{e}^{\eta,1}\left(\mathbf{x}-\mathbf{X}^{\varepsilon}(t,0,\mathbf{y},\mathbf{u})\right)-\mathbf{e}^{\eta,1}\left(\mathbf{x}-\mathbf{X}^{\eta}(t,0,\mathbf{y},\mathbf{u})\right)\right)\cdot f_0(\mathbf{y},\mathbf{u})\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\mathbf{u}\right|\\
&\leqslant\mathscr{M}\cdot\mathrm{lip}\left(\mathbf{e}^{\eta,1}\right)\cdot f^{\varepsilon,\eta}(t,0)\leqslant\mathscr{M}\cdot N^2\cdot f^{\varepsilon,\eta}(t,0)=:K_4\cdot f^{\varepsilon,\eta}(t,0)
\end{aligned}
$$

命题 2.1： 要控制 $|I_3|$, 先估计 $\|\rho^\varepsilon - \rho^\eta\|_\infty$，

$$
\begin{aligned}
|\rho^\varepsilon(t,\mathbf{x}) - \rho^\eta(t,\mathbf{x})| &= \left|\int f_0\left((\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v})\right) - f_0\left((\mathbf{X}^\eta,\mathbf{V}^\eta)(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v})\right)\mathrm{d}\mathbf{v}\right| \text{ for all } \mathbf{x}\in\mathbb{R}^N \\
&\leqslant \int^{*} \sup\left\{\frac{|f_0(\mathbf{y},\mathbf{u}) - f_0(\mathbf{z},\mathbf{w})|}{|(\mathbf{y},\mathbf{u}) - (\mathbf{z},\mathbf{w})|}\middle| y \neq w, |\mathbf{u}-\mathbf{v}|, |\mathbf{w}-\mathbf{v}| \leqslant F_0\right\} \\
&\quad \cdot |\mathbf{X}^\varepsilon(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v}) - \mathbf{X}^\eta(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v})|\,\mathrm{d}\mathbf{v} \leqslant h\left(F_v\right)\cdot f^{\varepsilon,\eta}(0,t)
\end{aligned}
\tag{2-17}
$$

其中函数 $h \in C_+(\mathbb{R}_0^+)$ 是满足 v 球内 $\mathrm{lip}(f_0)$ 控制条件对应的控制函数。

$$
\left|I_3\right| \leqslant \left\|\mathbf{e}^{\eta,2}\right\|_1 \cdot \|\rho^\varepsilon(t,\cdot) - \rho^\eta(t,\cdot)\|_\infty \leqslant \omega_N(N/(N+1))\cdot h\left(F_v\right)\cdot f^{\varepsilon,\eta}(0,t) =: K_3\cdot f^{\varepsilon,\eta}(0,t)
$$

因此可说明存在（仅依赖于 f_0）常数 K_3, K_4 和 K_5, 但不依赖于 ε 和 η，使得对任意的 $t \in I$,

$$
\|\mathbf{E}^\varepsilon(t,\cdot) - \mathbf{E}^\eta(t,\cdot)\|_\infty \leqslant K_3 \cdot f^{\varepsilon,\eta}(0,t) + K_4 \cdot f^{\varepsilon,\eta}(t,0) + K_5\left|\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}\right|, \tag{2-18}
$$

现在可以回到不等式 (2-16) 继续控制 $|(\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v}) - (\mathbf{X}^\eta,\mathbf{V}^\eta)(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})|$,

$$
\begin{aligned}
&|(\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v}) - (\mathbf{X}^\eta,\mathbf{V}^\eta)(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})| \\
&\leqslant \left|\int_\tau^t \left(1 + C_{lip(E)}\right)\cdot f^{\varepsilon,\eta}(r,\tau) + K_3\cdot f^{\varepsilon,\eta}(0,r) + K_4\cdot f^{\varepsilon,\eta}(r,0) + K_5\cdot\left|\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}\right|\mathrm{d}r\right| \\
\Rightarrow f^{\varepsilon,\eta}(t,\tau) &\leqslant \left|\int_\tau^t \left(\left(1 + C_{lip(E)}\right)\cdot f^{\varepsilon,\eta}(r,\tau) + \max\left\{K_3,K_4\right\}\cdot\left(f^{\varepsilon,\eta}(0,r) + f^{\varepsilon,\eta}(r,0)\right)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + K_5\cdot\left|\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}\right|\right)\mathrm{d}r\right| \text{对任意的} t,\tau \in I
\end{aligned}
\tag{2-19}
$$

这个不等式看上去十分复杂但我们可以通过双变元函数的 Gronwall 引理 A.2 来简化。我们从而可以简化得到一个不依赖于 ε 和 η 的常数 K，使得对于所有的 $t,\tau \in I$ 有下式

$$
f^{\varepsilon,\eta}(t,\tau) = \sup\left\{|(\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v}) - (\mathbf{X}^\eta,\mathbf{V}^\eta)(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})|\,|\mathbf{x},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{2N}\right\} \leqslant K\cdot\left|\varepsilon^{1/4} - \eta^{1/4}\right| \tag{2-20}
$$

控制 $f^{\varepsilon,\eta}$ 的不等式得以出现。 □

则我们可以定义，对于 $t,\tau\in I,\mathbf{x},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^N$, $\mathbf{X}^0(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v}) := lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{X}^\varepsilon(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})$, $\mathbf{V}^0(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v}) := lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{V}^\varepsilon(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})$, $f^0(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) := f_0\left(\mathbf{X}^0(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v}),\mathbf{V}^0(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v})\right)$. 现在还未说明他们是 VP$^\varepsilon$ 问题 $\varepsilon=0$ 的解，下面的论证会确定其确实是解。

一致收敛性使得我们上面定义的被收敛的函数也具有了一些 VP$^\varepsilon(\varepsilon>0)$ 的解的特性，如 $\mathbf{X}^0,\mathbf{V}^0$ 在 $I\times I\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ 上连续；$\varepsilon>0$ 时的阈值，对 $\varepsilon=0$ 也适用 $\sup\left\{\left|\mathbf{V}^0(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v})-\mathbf{v}\right| |\mathbf{x},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{2N},t\in I\right\}\leqslant C_v$。

而不等式 2-18 又控制了不同 ε 之间 $\mathbf{E}$ 的差异，对 $t\in I,\mathbf{x}\in\mathbb{R}^N$ 定义 $E^0(t,\mathbf{x}) := \lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{E}^\varepsilon(t,\mathbf{x})$. 有一致收敛，也能说明 E^0 在 $I\times\mathbb{R}^N$ 上连续；且 $\|\mathbf{E}^0(t,\cdot)\|_\infty\leqslant C_E$ 及其 Lipschitz 常数也有 $\operatorname{lip}\left(E^0(t,\cdot)\right)\leqslant C_{lip(E)}$。对任意的 $t\in I$ 有 $E^0(t,\cdot)\in\mathrm{C}_b^0\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N\right)\cap\operatorname{Lip}\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N\right)$。

不等式 2-17 则是控制了 ε 变化引起的密度差异，现可令 $\eta=0$ 也可以类似方法证明成立。这意味着 ρ^ε 在 $I\times\mathbb{R}^N$ 上一致收敛到 ρ^0。于是对任意的 $t\in I$ $\rho^0(t,\cdot)\in\mathrm{L}_\infty\left(\mathbb{R}^N\right)\cap\operatorname{Lip}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 且 $\|\rho^0(t,\cdot)\|_\infty\leqslant C_\rho,\operatorname{lip}\left(\rho^0(t,\cdot)\right)\leqslant C_{lip(\rho)}$

对于任意的 $\varepsilon>0$ 有下式，

$$(\mathbf{X}^\varepsilon,\mathbf{V}^\varepsilon)(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})=(\mathbf{x},\mathbf{v})+\int_\tau^t\left(\mathbf{V}^\varepsilon(r,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v}),\mathbf{E}^\varepsilon(r,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})\,\mathrm{d}r\right.$$

$\mathbf{X}^\varepsilon$ 和 $\mathbf{E}^\varepsilon$ 的一致收敛性意味着上式 $\varepsilon=0$ 仍有效，由此可知 $\mathbf{X}^0$ 满足微分方程 (VP) 和初值条件, $\mathbf{X}^0(t,\tau,\cdot)$ 于是对任意的 $t,\tau\in I$ 均是保测度的同胚映射。

不等式 2-18 现对于 $\eta=0.$ 的情况也可类似证明。这说明 $\mathbf{E}^\varepsilon(t,\mathbf{x})$ 在 $I\times\mathbb{R}^N$ 上一致收敛到 $\int\mathbf{e}^0(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot f^0(t,y)\mathrm{d}y^{2N}$. 这个表达式于是必然等于 $E^0(t,\mathbf{x})$。到此为止，便已经证明 f^0 是 VP^0 在 I 上的唯一解。而 v 球内 $\operatorname{lip}(f_0)$ 控制条件可证 $f_0\in\operatorname{Lip}\left(\mathbb{R}^{2N}\right)$, 于是有下式，

$$\begin{aligned}&\left|f^\varepsilon(t,x)-f^0(t,x)\right|=\left|f_0\left(\mathbf{X}^\varepsilon(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v})\right)-f_0\left(\mathbf{X}^0(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v})\right)\right|\\&\leqslant\operatorname{lip}(f_0)\cdot\sup\left\{\left|\mathbf{X}^\varepsilon(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v})-\mathbf{X}^0(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v})\right|\mathbf{x},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{2N},t\in I\right\}\to 0,\ 当\varepsilon\to 0\end{aligned}$$

这表明 $\left(f^\varepsilon\right)_{\varepsilon>0}$ 在 $I\times I\times\mathbb{R}^{2N}$ 上，$\varepsilon\to 0$ 时是一致收敛的。

至于其唯一性，则相对简单：如果 VP^0 的一个解 f^0 在 I 上存在并且 I 满足有界条件, 那么引理 2.11 中，$\eta=0$ 的情况该不等式也成立了，也就是对 $\mathbf{X}^\epsilon$ 也有 $\mathbf{X}^0(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{X}^\varepsilon(t,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v})$. 即 $\mathbf{X}^0$ 、$f^0(t,\mathbf{x},\mathbf{v})=f_0\left(\mathbf{X}^0(0,t,x)\right)$ 被该极限唯一地确定了，从而证明了唯一性。

"$\Leftarrow$" 适定性定理的第二部分：如果 VP^0 问题的解在 I 上存在，则 I 满足有

界条件。

当 $N=1,2,$，由于 $\mathbb{R}_0^+$ 本身已满足有界条件，无需再证。而 $N \geqslant 3$ 时，假设存在 VP^0 问题在 $I=[0,T]$ 上的一个解 f^0 由有界条件知道存在 $T_1 \in (0,T]$, 使得 $\left[0,T_1\right)$ 满足有界条件。于是存在一个最大的左端点为 0 的区间 $I_2 \subset I$ 满足有界条件。要不 $I_2=\left[0,T_2\right]$ 要不就是 $I_2=[0,T_2)$ 其中 $T_2 \in (0,T]$. 如果 $I_2=I$, 证明便结束了. 于是下面只需讨论 $I_2 \neq I$ 的情况。

因为 I 是紧的, 从而由引理 2.4 有

$$\sup\left\{\left|\mathbf{V}^0(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v})-\mathbf{v}\right| |\mathbf{x},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^N, t\in I\right\} =: h_v^0 < \infty$$

f_0 以常数 K_1 和 K_2 满足 $\sup f_0$ 控制条件。现在我们令 $K_1^* := K_1, K_2^* := K_2 + h_v^0 + 1$，之后通过将一个时间的解 $f(t,\cdot,\cdot)$ 记为 (VP) 初值，我们可以以此参数延拓满足有界条件的非空区间。

我们回顾一下区间的有界条件说的是对任意的 VP^ϵ $\varepsilon>0$ 的问题，只要给了符合$\sup f_0$ 控制条件条件的初值，对应的就会有一段符合有界条件的非空闭区间，其可延伸的长度上确界 ϑ 取决于 $K_1, K_2, \mathscr{M}$ 和空间维度 N。从而从有界条件的等价性有这段区间内的 ρ 的控制 $\|\rho\|_\infty \leqslant B$，$B$ 的大小也同样受这几个参数影响。此时忽略空间维度的影响，因其不变。假设 $f_0 \in \mathrm{L}_1\left(\mathbb{R}^{2N}\right)$ 以常数 K_1^*、K_2^* 满足 $\sup f_0$ 控制条件且 $\|f_0\|_1=\mathscr{M}$. 那么便存在 $\vartheta>0$ 和 $B \geqslant 0$, 两者都仅依赖于 K_1^*, K_2^* 和 $\mathscr{M}$, 使得对任意的 $\varepsilon>0$，VP^ϵ 问题的解的密度函数对任意的 $t \in [0,\vartheta]$ 满足 $\|\rho^\varepsilon(t,\cdot)\|_\infty \leqslant B$

令 $T_0 := \max\left\{0, T_2-\vartheta/2\right\}$。As $T_0<T_2$ we know that $I_0 := \left[0,T_0\right]$ satisfies the 有界条件. 本证明第一部分我们已经展示了 $\mathbf{X}^\epsilon$ 在 $I_0 \times I_0 \times \mathbb{R}^{2N}$ 上一致收敛到 $\mathbf{X}^0$. 于是存在着 $\varepsilon_0>0$, 使得 $\sup\left\{|\mathbf{V}^\epsilon(0,t,\mathbf{x},\mathbf{v})-\mathbf{v}| |\mathbf{x},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^N, t\in I_0\right\} \leqslant h_v^0+1$ 对任意的 $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$. 现对所有的 $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$，$f^\varepsilon\left(T_0,\cdot\right)$ 作为初值来看确以常数 K_1^*，K_2^* 满足$\sup f_0$ 控制条件。

我们现在看 $\left[0,T_0+\theta\right]$ 是否满足有界条件，只要证明 ρ 的 L^∞ 范数即可。

$$\sup\left\{\|\rho^\varepsilon(t,\cdot)\|_\infty|\varepsilon>0, t\in\left[0,T_0+\vartheta\right]\right\} = \max\left\{B_1,B_2,B_3\right\}$$

其中$B_1=\sup\left\{\|\rho^\varepsilon(t,\cdot)\|_\infty|\varepsilon>0, t\in I_0\right\}<\infty$ 因为I_0已经满足有界条件

$$B_2=\sup\left\{\|\rho^\varepsilon(t,\cdot)\|_\infty|\varepsilon>\varepsilon_0, t\in\left[0,T_0+\vartheta\right]\right\} \geqslant \sup\left\{\|\rho^\varepsilon(t,\cdot)\|_\infty|\varepsilon>\varepsilon_0, t\in\left[T_0,T_0+\vartheta\right]\right\}$$

$$B_3=\sup\left\{\|\rho^\varepsilon(t,\cdot)\|_\infty|0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0, t\in\left[T_0,T_0+\vartheta\right]\right\}$$

□

引理 2.4 导出 $B_2 < \infty$。关键的是如何说明 B_3 有界，我们之前已经准备好工具了，$B_3 \leqslant B < \infty$：对任意的 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ 现在我们将 $f^\varepsilon\left(T_0, \cdot\right)$ 视为函数初值，那么它以常数 K_1^*、K_2^* 和 $\|f^\varepsilon\left(T_0, \cdot\right)\|_1 = \mathscr{M}$ 满足sup f_0 控制条件。对这个初值问题，我们必然可以通过满足有界条件的非空区间对其延拓 ϑ。那么对于 $t \in \left[T_0, T_0 + \vartheta\right]$ 有 $\|\rho^\varepsilon(t, \cdot)\|_\infty \leqslant B$。

既然我们已经证明了 $\left[0, T_0 + \theta\right]$ 满足有界条件。但这使得 $\left[0, T_0 + \theta\right] \cap I \geqslant I_2$ 及 I_2 是 I 最大的左端点为零的满足有界条件子区间相矛盾，于是得证。

第 3 章　Vlasov-Poisson 系统的全局解

本章中我们分别讨论 Vlasov-Poisson 问题在 3D 非相对论情形和相对论情形的全局存在性和唯一性，大略梗概 Pfaffelmoser (1992) 对非相对论情形全局存在性的证明和 Lions and Perthame (1991) 对高阶矩有限的初值的解的唯一性问题的探讨。

3.1　非相对论情形

3.2　全局存在性

Pfaffelmoser (1992) 用几乎和上一章节中一样的 $\sup f_0$ 控制条件和 v 球内 $\mathrm{lip}(f_0)$ 控制条件假设，加上二阶矩有限的条件，证明了对 $\mu = \pm 1$ 均有全局存在性。其论证思路是若它是一个局部解，该解的速度改变量范数上界 h_v（见下文有定义）不能被 $H_v \in C_+\left(\mathbf{R}_0^+\right)$ 中的函数控制住，一定会 blow up。其文章通过相空间中特征线“附近”密度的估计给出对速度上界的估计，即粒子分布不足以使其速度 blow up。

In this section we consider the trajectories passing through a point $\mathbf{x}$ of the configuration-space at a time t and subsets of the velocity-space at $\mathbf{x}$ and at time t, that are defined by certain properties of the trajectories. We study, how the ”largeness” of the subsets depends on these properties.

假设 3.1： (i) $f_0 \in L_1\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\right), f_0 \geqslant 0$ satisfying f_0 satisfies $\sup f_0$ 控制条件with constants K_1, K_2 and v 球内 $\mathrm{lip}(f_0)$ 控制条件with $H \in C_+([0,\infty))$

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{v}^2 f_0(\mathbf{x},\mathbf{v}) d\mathbf{x},\mathbf{v} < \infty$

令 f 为 (VP) 最大可能的解，时域为 $[0,T)$。

定义 3.1： We define $h_{\mathbf{v}}, h_E, h_\rho : [0,T) \to [0,+\infty)$ by

$$h_v(t) := \sup\left\{|\mathbf{V}(0,\tau,\mathbf{x},\mathbf{v}) - \mathbf{v}| \,|\, \mathbf{x},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, 0 \leqslant \tau \leqslant t\right\}$$
$$h_E(t) := \sup\left\{|\mathbf{E}(\tau,\mathbf{x})| \,|\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, 0 \leqslant \tau \leqslant t\right\}$$
$$h_\rho(t) := \sup\left\{|\rho(\tau,\mathbf{x})| \,|\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, 0 \leqslant \tau \leqslant t\right\}$$

这些函数由于取上确界的操作都是单增的，他们之间的相互关系可以通过下面的引理来描述。

引理 3.1： 存在 $K_E, K_\rho > 0$, 使得对任意的 $t \in [0,T)$ 有

$$h_E(t) \leqslant K_E h_\rho^{4/9}(t)$$
$$h_v(t) \leqslant \int_0^t h_E(s)ds$$
$$h_\rho(t) \leqslant K_\rho \left(1 + h_v(t)\right)^3$$

证明 请查阅 Pfaffelmoser (1992), 引理 10. □

命题 3.1： 如果存在 $H_v \in C_+\left(\mathbf{R}_0^+\right)$, 使得对任意的 $t \in [0,T)$ 有

$$h_v(t) \leqslant H_v(t)$$

则 $T = \infty$, 即 (VP) 有全局解。

证明 该命题实际上和我们在上一章证明中用到的类似 Horst and Neunzert (1981). 对于在有界区间 $[0,t)$ 上的解 f，他们可以被延拓到区间 $[0, t+\vartheta)$ 上去, 而 $\vartheta = \vartheta(h_v(t))$ 随 $h_v(t)$ 的增加而减小。对于有界的 $T < \infty$ 可以取 $t > T - \varepsilon\left(H_v(T)\right)$, 那么解就可以延拓到 $[0, t+\varepsilon) \subsetneq [0,T)$, 上，这个 $[0,T)$ 是最大的相矛盾的。The exact argument can be found in [12]

定义 3.2： (i) For $t \in [0,T)$ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, 0 < \Delta_1 \leqslant t$ and $d > 0$，define

$$\Psi_1(t,\mathbf{x}) := \left\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \middle| \exists s \in \left[t - \Delta_1, t\right] : \left|\mathbf{V}(s,t,\mathbf{x},\mathbf{v}) - \mathbf{v}\right| > d\right\}$$

(ii) Let $\Omega \subset \mathbb{R}^3, t \in \left[0, T\right[, 0 < \Delta_2 \leqslant \Delta_1 \leqslant t, R > 0$ and $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Further let $(\mathbf{X}^*, \mathbf{V}^*)$ be a solution of the characteristic system and define

$$\Psi_2(t,\mathbf{x}) := \left\{\mathbf{v} \in \Omega \middle| \exists s \in \left[t - \Delta_1, t - \Delta_2\right] : \left|\mathbf{X}(s,t,\mathbf{x},\mathbf{v}) - \mathbf{X}^*(s)\right| \leqslant R\right\}$$

by which in section 6 we will estimate the influence of ”high” densities near a given trajectory on its acceleration. This will turn out to be the crucial part of the proof.

假设 3.2：

$$\lim_{t\to T} h_v(t) = \lim_{t\to T} h_\rho(t) = \infty$$

定义 3.3： Define for $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$, $R > 0$ and $s \in [0, T)$, $(\mathbf{X}^*, \mathbf{V}^*)$ of the characteristic system the following

$$\begin{aligned} G_\alpha^\beta(s) &:= \left\{ \mathbf{x} \in B_R(X^*(s)) | \alpha \leqslant \rho(s, \mathbf{x}) \leqslant \beta \right\} \\ N_\alpha^\beta(s) &:= \|\rho(s) \cdot 1_{G_1^{(s)}}\|_3 \end{aligned}$$

定理 3.1： 令 f_0 满足本章做的假设。则 (VP) 有全局解，并且对任意的 $\varepsilon > 0$ 都存在常数 $K > 0$ 使得对任意的 $t \geqslant 0$ 有

$$h_v(t) \leqslant K(1+t)^{51/11+\varepsilon}$$

3.3 唯一性

The uniqueness proof is based on the Lions-Perthame theorem and require the moment of $m \leqslant 6$ exist.

定理 3.2： *(Lions-Perthame)* Let $f_0 \geqslant 0, f_0 \in L^1 \bigcap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$. We assume that

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} |\mathbf{v}|^m f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} d\mathbf{v} < +\infty \quad \text{if } m < m_0, \tag{3-1}$$

where $3 < m_0$. Then, there exists a solution $f \in C(\mathbb{R}^+; L^p(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)) \bigcap L^\infty(\mathbb{R}^+; L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$ (for all $1 \leqslant p < +\infty$) of Vlasov-Poisson system satisfying

$$\sup_{t\in[0,T]} \iint\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} |\mathbf{v}|^m f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} d\mathbf{v} < +\infty \tag{3-2}$$

定理 3.3： We make the assumptions of Theorem 1, (10), (42), then the solution of Vlasov-Poisson Equation such that $\rho \in L^\infty\left((0, T) \times \mathbb{R}^3_{\mathbf{x}}\right)$ is unique.

Remarks. 1. The boundedness of ρ in L^∞ implies, by Corollary 5 , that the solutions of Vlasov-Poisson Equation are smooth. Thus Theorem 6 applies to classical solutions. 2. Notice that (42) and $\rho \in L^{\infty}\left((0,T)\times\mathbb{R}_{\mathbf{x}}^{3}\right)$ implies (10) and the assumptions of Theorem 6 could be slightly improved. 3. Of course the difficulty in Lemma 3 is that $\mathbf{E}$ is not lipschitz continuous in $\mathbf{x}$ We now turn to the proof of these results.

证明 Proof of Theorem 6. First, let us notice that an clementary modification of the proof of Corollary 5 gives, thanks to the L^2 bound in (42) (48)

$$\nabla_{\mathbf{v}} f(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) \in L^{\infty}\left((0,T)\times\mathbb{R}_{\mathbf{x}}^{3}; L^{2}\left(\mathbb{R}_{\mathbf{v}}^{3}\right)\right)$$

for any solution f. Secondly, we set

$$D(t)=\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left\|\left(f_1-f_2\right)\right\|_{L^2(\mathbf{R}')}$$

for two possible solutions f_1, f_2 of $(1)-(3)$ and we claim that (49)

$$\frac{d}{dt}D(t)\leqq C(T)\left\|\left(E_1-E_2\right)(t)\right\|_{L^2\left(R^3\right)}$$

通过 Vlasov 方程本身我们可以得到，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(f_1-f_2\right)^2+\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\left(f_1-f_2\right)^2+E_1\cdot\nabla_{\mathbf{v}}\left(f_1-f_2\right)^2\\
=&-2(f_1-f_2)\partial_t f_2+2\mathbf{v}\cdot(f_1-f_2)(-\nabla_x f_2)+2\mathbf{E}\cdot\left((f_1-f_2)(-\nabla_v f_2)\right)\\
\leqslant&2\left|E_2-E_1\right|\cdot\left|f_1-f_2\right|\cdot\left|\nabla_e f_2\right|
\end{aligned}$$

and thus, using (48)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}D(t)^2&\leqq 2\int_{\mathbb{R}_{\mathbf{x}}\atop 1}\left|\left(E_2-E_1\right)(t)\right|\mathbb{P}\left(f_1-f_1\right)(t,\mathbf{x},\mathbf{v})\left\|_{L^2(\mathbb{R}_j)}\right\|\nabla_{\mathbf{v}}f_2(t,\mathbf{x},\mathbf{v})\|_{L^2(\mathbf{R}\})}d\mathbf{x}\\
&\leqq C(T)\left\|\left(E_1-E_2\right)(t)\right\|_{L^2\left(\mathbb{R}_{\mathbf{x}}^3\right)}D(t)
\end{aligned}$$

□

which clearly proves (49). Finally, we use formula (28) which gives

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left(E_1-E_2\right)(t)\right\|_{L^2\left(\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^3\right)} \\
\leqq & C\left\|\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3}\left(E_1-E_2\right)(\mathbf{x}-\mathbf{v} s, t-s) f_1(t-s, \mathbf{x}-\mathbf{v} s, \mathbf{v}) s d s d \mathbf{v}\right\|_{L^2\left(\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^3\right)} \\
& +C\left\|\int_0^t \int_{\mathbf{R}^3} E_2(\mathbf{x}-\mathbf{v} s, t-s)\left(f_2-f_1\right)(t-s, \mathbf{x}-\mathbf{v} s, \mathbf{v}) s d s d \mathbf{v}\right\|_{L^2\left(\mathbb{R}_2\right)}
\end{aligned}
$$

The first term in the r.h.s. of this inequality may be estimated by

$$
\begin{aligned}
&\left\|\int_0^t \frac{s d s}{s^{3/2}} \| \left(E_1-E_2\right)(y, t-s)\right\|_{L^2(\mathbf{R}, y)}\left(\int_{\mathbb{R}\})} f_1^2(t-s, \mathbf{x}-\mathbf{v} s, \mathbf{v}) d \mathbf{v}\right)^{1/2} \|_{L^2\left(\mathbb{R}_{\mathbf{x}}^3\right)} \\
&\leqq \int_0^t \frac{d s}{s^{1/2}}\left\|f_1(t-s)\right|_{L^2\left(\mathbf{R}^6\right)} \left\|\left(E_1-E_2\right)(t-s)\right\|_{L^2\left(\mathbb{R}^3\right)} \\
&\leqq C t^{1/2} \sup_{s \leqslant t}\left[\left(E_1-E_2\right)(s) \|_{L^2\left(R^3\right)}\right.
\end{aligned}
$$

Processing the other term in the same way yields

$$
\left\|\left(E_2-E_1\right)(t)\right\|_{L^2(\mathbf{R})} \leqq \frac{1}{2} \sup_{0 \leqslant s \leqslant t}\left|\left(E_2-E_1\right)(s)\right|_{L^2\left(\mathbf{R}^3\right)}+C(T) D(t)
$$

for $t \leqq t_0$ small enough. From this one easily deduces that

$$
\left\|\left(E_2-E_1\right)(t)\right\|_{L^2\left(\mathbb{R}^3\right)} \leqq C(T) D(t)
$$

and combining this inequality with (49) just shows that $D(t)=0$ by a Gronwall argument. Therefore $f_1=f_2$ for $t \leqq t_0$ and Theorem 6 is proved.

3.4 相对论情形

这一节中，我们提及一些关于球对称状态下 (RVP) 方程的结果全局存在性的结果。

3.5 球对称性的特性

球对称初值的数据带来的解会有一定的特征，这里我们说的球对称，指的是 $f_0(U\mathbf{x}, U\mathbf{v}) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ 对任何的旋转矩阵 $U \in SO(3)$。

将初值进行旋转 $f_0(U\mathbf{x}, U\mathbf{v}), U \in SO(3)$ 做它的 Vlasov-Poisson 方程的解，即 $f_U(0,\cdot,\cdot) := f_0(U\mathbf{x}, U\mathbf{v})$。由解的唯一性和初值的对称性可知，它和原来的解相等 $f_U(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) = f(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) \forall \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$。从而有 Vlasov-Poisson 方程解的初值的球对称性质会随时间延拓下去的性质。

从而球对称解的密度、场强等量都具有球对称性，

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad \rho(t, U\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, U\mathbf{x}, \mathbf{v}) \mathrm{d}\mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, U\mathbf{x}, U\boldsymbol{\omega}) |\det(U)| \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \rho(t, \mathbf{x})$$

这表明 ρ 和 $\mathbf{E}$ 也是径向的。

于是，我们可以有了更简洁的函数变量表示 $r := |\mathbf{x}|$, $u := |\mathbf{v}|, \alpha := \angle(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ 和 t。f, ρ 和其他的量可以重新用更精炼的定义，*i.e.* $f(t, r, u, \alpha) := f(t, r\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v})$, 其中 $\hat{\mathbf{x}}$ 表示一个正交单位坐标系中任意一个单位基, $|\mathbf{v}| = u$ and $\angle(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{x}}) = \alpha$. 密度 ρ 仅依赖于 r 和 t:

$$\rho(t, r) = 2\pi \int_0^\infty \int_0^\pi f(t, r, u, \alpha) u^2 \sin\alpha \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}u, \tag{3-3}$$

电势 $\phi(r, t)$ 可以写为:

$$\phi(t, r) = -\frac{1}{r} \int_0^r \lambda^2 \rho(t, \lambda) \mathrm{d}\lambda - \int_r^\infty \lambda \rho(t, \lambda) \mathrm{d}\lambda \tag{3-4}$$

电场 $\mathbf{E}$ 是势的负梯度并且 $M(t, r)$ introduced as below:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\nabla}_x \phi = \frac{\mathbf{x}}{r^3} \int_0^r \lambda^2 \rho(t, \lambda) \mathrm{d}\lambda = \frac{\mathbf{x}}{r^3} M(t, r) \tag{3-5}$$

Notice that $M(t, r)$ is essentially the integral of ρ on the volume the sphere with radius r except a factor of 4π, showing $\lim_{r\to\infty} M(t, r) = m/4\pi$. Moreover, $|\mathbf{E}| = r^{-2} M(t, r)$.

Spherical symmetry brings in the below simplification of the characteristics' ordinary differential equations and note that dA/dt could be decided by the $d(\mathbf{X} \cdot \mathbf{V})/ds = d(RU \cos A)/ds$. Curly brackets $\{..., ...\}$ includes the terms for (VP) in the left and for

(RVP) in the right.

$$\begin{cases} \dfrac{dR}{ds} = |\mathbf{a}(\mathbf{V})| \cos A = \left\{ U \cos A, \dfrac{U \cos A}{\sqrt{1+U^2}} \right\} \\ \dfrac{dU}{ds} = \left| \dfrac{d\mathbf{V}}{ds} \right| \cos < \dfrac{d\mathbf{V}}{ds}, \mathbf{a}(\mathbf{V}) >= \gamma \dfrac{\cos A}{R^2} M(s, R) \\ \dfrac{dA}{ds} = -\left(\gamma \dfrac{M(s,R)}{R^2 U} + \left\{ \dfrac{U}{R}, \dfrac{U}{R\sqrt{1+U^2}} \right\} \right) \sin A \end{cases} \tag{3-6}$$

The simplified results of (RVP) will be helpful in the following proof.

3.6 Existence

Global existence results of (RVP) in 3D has been studied by Glassey and Schaeffer (1985) with compact distribution function support and by Wang (2003). Glassey and Schaeffer (1985) restrict the $|\mathbf{E}|$ to prove that supremum of the velocity can be controlled by a function $H_v \in C_+(R_0^+)$. While Wang (2003) controlled the norm of electric field $\|\mathbf{E}(t,\cdot)\|_\infty$ to achieve the global existence . Their approaches are concisely introduced as follow.

To control the L_x^∞ -norm of the acceleration term $\nabla_x \bar{\phi}$, now it's a standard argument to show that it is controlled by a high moment of the distribution function, see also Lemma 2.2 2.3. Propagation of moments. We define

$$M_n(t,x) := \int_{\mathbb{R}^3} (1+|v|)^n f(t,x,v) dv, \quad M_n(t) := \int_{\mathbb{R}^3} M_n(t,x) dx, \quad n := \lceil N_0/10 \rceil$$

施加了一个强局域的假设，通过采用和 Luk-Strain | | 对相对论 Vlasov-Maxwell 系统处理类似的方法，证明被简化为了只需证明标量场 $\nabla_x \phi$ 的范数 L_x^∞ 有界，便可证得全局存在性。

引理 3.2： There exists a constant C such that for $r \geqslant 0$ and $0 \leqslant t < T$

$$|\mathbf{E}(\mathbf{x},t)| = \frac{M(r,t)}{r^2} \leqq \begin{cases} \min\left(M r^{-2}, 100 M^{1/3} \|\hat{f}\|_\infty^{2/3} P^2(t)\right) & \text{if } \gamma = -1 \\ \min\left(M r^{-2}, C P^{5/3}(t)\right) & \text{if } \gamma = +1 \end{cases}$$

定义 3.4： The highest speed the solution f has on the time interval $[0,t]$.

$$P(t) = \sup\{U(s,0,r,u,\alpha) : 0 \leqslant s \leqslant t, (r,u,\alpha) \in \text{ support } f\}$$

The paper mainly talks about spherically symmertric solutions, *i.e.*, the radial ones.

定理 3.4： Let f be a classical solution of (RVP) on some time interval $[0, T)$ with $\gamma = -1$ and smooth, nonnegative, spherically symmetric data fwhich has compact support and vanishes for $(r, u, \alpha) \notin (0, \infty) \times (0, \pi)$. If $40 M^{2/3} \, \|f^{\circ}\|_{\infty}^{1/3} < 1$, then $P(t)$ is uniformly bounded on $[0, T)$, and hence (RVP) possesses a global classical solution.

定理 3.5： Let f be a classical solution of (RVP) on some time interval $[0, T)$ with $\gamma = +1$ and smooth, nonnegative, spherically symmetric data f_0 which has compact support and vanishes for $(r, u, \alpha) \notin (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \pi)$. Then $P(t)$ is uniformly bounded on $[0, T)$, and hence (RVP) possesses a global classical solution.

From the conservation laws (1.2), we know that $M_1(t)$ is always bounded from the above. Moreover we define

$$\tilde{M}_n(t) := (1 + t)^{2n} + \sup M_n(s)$$

We have two basic estimates for the L_x^{∞} -norm of the acceleration term $\nabla_x \phi$, which will be elaborated in the next two Lemmas. The first estimate (2.3) is available mainly because of the radial symmetry and the conservation law. The second estimate (2.5) is standard

公式索引

公式 1-1 1
公式 1-2 1
公式 1-3 1
公式 1-4 2
公式 1-5 2
公式 2-1 6
公式 2-2 7
公式 2-3 8
公式 2-4 9
公式 2-5 10
公式 2-6 10
公式 2-7 13
公式 2-8 14
公式 2-9 14
公式 2-10 14
公式 2-11 16
公式 2-12 16
公式 2-13 17
公式 2-14 18
公式 2-15 19
公式 2-16 20
公式 2-17 21
公式 2-18 21
公式 2-19 21
公式 2-20 21
公式 3-1 27
公式 3-2 27
公式 3-3 30

公式 3-4 …… 30
公式 3-5 …… 30
公式 3-6 …… 31
公式 B-1 …… 42
公式 B-2 …… 42
公式 B-3 …… 42
公式 B-4 …… 42

参考文献

Abdallah N B. 1994. Weak solutions of the initial-boundary value problem for the vlasov-poisson system[J/OL]. 17(6):451-476[2020-03-13]. https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/mma.1670170604.

Arsen'ev A A. 1975. Global existence of a weak solution of vlasov's system of equations[J/OL]. 15(1):131-143[2020-03-14]. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/004155537590141X.

Bardos C, Degond P. 1985. Global existence for the vlasov-poisson equation in 3 space variables with small initial data[C]//Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis: volume 2. Elsevier: 101-118.

Batt J. 1962. Fixpunktprobleme bei partiellen differentialgleichungen im zusammenhang mit dem statistischen anfanfswertproblem der stellardynamik[M/OL]. Rheinisch–Westfälische Technische Hochschule, Aachen. https://books.google.com/books?id=BSryAAAAMAAJ.

Batt J. 1977. Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics[J]. Journal of Differential Equations, 25(3):342-364.

Case K M. 1959. Plasma oscillations[J/OL]. 7(3):349 - 364. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491659900296.

Degond P. 1986. Spectral theory of the linearized vlasov-poisson equation[J/OL]. 294(2):435-453[2020-03-13]. https://www.ams.org/tran/1986-294-02/S0002-9947-1986-0825714-8/.

Glassey R T, Schaeffer J. 1985. On symmetric solutions of the relativistic vlasov-poisson system[J/OL]. 101(4):459-473[2020-03-13]. https://doi.org/10.1007/BF01210740.

Hartman P. 2002. Classics in applied mathematics: Ordinary differential equations[M/OL]. Society for Industrial and Applied Mathematics. https://books.google.com/books?id=CENAPMUEpfoC.

Hellwig G. 1964. Blaisdell book in the pure and applied sciences: Partial differential equations: an introduction[M/OL]. Blaisdell Pub. Co. https://books.google.com.hk/books?id=qBGoAAAAIAAJ.

Horst E. 1975. Zum statistischen Anfangswertproblem der Stellardynamik[D]. Munchen，Germany.

Horst E, Neunzert H. 1981. On the classical solutions of the initial value problem for the unmodified non-linear vlasov equation i general theory[J/OL]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 3(1):229-248. https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/mma.1670030117.

Horst E, Neunzert H. 1982. On the classical solutions of the initial value problem for the unmodified non-linear vlasov equation ii special cases[J/OL]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 4(1):19-32. https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/mma.1670040104.

Illner R, Neunzert H. 1979. An existence theorem for the unmodified vlasov equation[J/OL]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 1(4):530-544. https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/mma.1670010410.

Kampen N G V. 1955. On the theory of stationary waves in plasmas[J/OL]. 21(6):949 - 963. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031891455930688.

KURTH R. 1960. Chapter iii - the phase flows of mechanical systems[M/OL]//Kurth R. International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics: volume 11 Axiomatics of Classical Statistical Mechanics. Pergamon: 47 - 76. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9781483167305500080.

Lions P L, Perthame B. 1991. Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov-Poisson system.[J]. Inventiones Mathematicae, 105:415.

Mouhot C, Villani C. 2011. On landau damping[J/OL]. Acta Math., 207(1):29-201. https://doi.org/10.1007/s11511-011-0068-9.

Pfaffelmoser K. 1992. Global classical solutions of the vlasov-poisson system in three dimensions for general initial data[J/OL]. 95(2):281-303[2020-04-14]. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002203969290033J.

Schaeffer J. 1991. Global existence of smooth solutions to the vlasov poisson system in three dimensions[J/OL]. 16(8):1313-1335[2020-03-13]. https://doi.org/10.1080/03605309108820801.

Schaeffer J. 1987. Global existence for the poisson-vlasov system with nearly symmetric data[J]. Journal of differential equations, 69(1):111-148.

Ukai S, Okabe T. 1978. On classical solutions in the large in time of two-dimensional vlasov's equation[J]. Osaka Journal of Mathematics, 15(2):245-261.

Wang X. 2003. Global solution of the 3d relativistic vlasov-poisson system for a class of large data [Z].

Wollman S. 1980. The spherically symmetric Vlasov-Poisson system[J]. Journal of Differential Equations, 35(1):30-35.

致　谢

衷心感谢导师王学成教授在对本人毕业设计的指导。学成老师在非线性偏微分方程领域颇有研究，去年末我和学成导师沟通毕设选题，Vlasov 方程是等离子体物理领域最重要的方程之一，毕设便围绕 Vlasov-Poisson 方程做文献综述。

只可惜今年时值大疫，没有太多和王老师直接沟通的时间，加之我自身在偏微分方程的分析理论方面基础略显薄弱，论文打磨得并不精致。感谢在疫情期间帮助我的家人，如我的二伯娘、母亲，他们让我有充分的时间专注在论文上。

声　明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签　名：____________ 日　期：____________

附录 A 不等式

A.1 Gronwall 不等式

引理 A.1： *(Nonlinear Gronwall Lemma)* 假设 $t_0, t_1 \in \mathbb{R}, t_0 < t_1$，$F : \left[t_0, t_1\right) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 函数连续且 $F(t, r) \geqslant F\left(t, r'\right)$ 对任意的 $r \geqslant r'$(即在 r 上单调增). 还假设 $f_0 \in [0, \infty), T \in (t_0, t_1]$ 且 $g : I \rightarrow [0, \infty)$，在区间 $I := [t_0, T)$ 上定义，是微分方程的解 $g' = F(t, g), g\left(t_0\right) = f_0$。如果 $f : I \rightarrow [0, \infty)$ 可测并且局部有界，对任意的 $t \in I$ 有

$$f(t) \leqslant f_0 + \int_{t_0}^{t} F(r, f(r)) \mathrm{d}r$$

那么便可推导出对任意的 $t \in I$ 有 $f(t) \leqslant g(t)$

证明 Please *cf.* [7], theorem 4.1 to handle continuous f, otherwise let $h(t) := f_0 + \int_{t_0}^{t} F(r, f(r)) \mathrm{d}r$. h is continuous and still satisfy $h(t) \leqslant f_0 + \int_{t_0}^{t} F(r, h(r)) \mathrm{d}r$, $f(t) \leqslant h(t) \leqslant g(t)$. □

引理 A.2： *(双变量 Gronwall 引理)*

Let $T > 0, I := [0, T]$. Assume that $g : I \times I \rightarrow [0, \infty)$ is bounded and that for each $t \in I$ the functions $g(t, \cdot)$ and $g(\cdot, t)$ are measurable. Assume further that there exist constants D_1, D_2, D_3 such that for all $t, \tau \in I$ (4.3.1) $g(t, \tau) \leqslant \left|\int_{\tau}^{t} \left(D_1 \cdot g(r, \tau) + D_2 \cdot (g(0, r) + g(r, 0)) + D_3\right) \mathrm{d}r\right|$. Then there exists a constant D, which depends only on D_1, D_2 and T, such that for all $t, \tau \in I$ we have $g(t, \tau) \leqslant D \cdot D_3$

证明 Take any $g^* \in C_+(I)$ such that $g^*(t) \geqslant \sup\{g(0, u) + g(u, 0) | 0 \leqslant u \leqslant t\}$ for all $t \in I$. Let $\tau \in I$ be fixed. Then for all $t \in [\tau, T]$ we have

$$g(t, \tau) \leqslant \int_{\tau}^{t} \left(D_1 \cdot g(r, \tau) + D_2 \cdot g(r) + D_3\right) \mathrm{d}r$$

We conclude with lemma (2.7) that

$$g(t,\tau) \leqslant \int_{\tau}^{t} \exp\left(D_1 \cdot (t-r)\right) \cdot \left(D_2 \cdot g^*(r) + D_3\right) \mathrm{d}r \leqslant \exp\left(D_1 \cdot T\right) \cdot \left| \int_{\tau}^{t} \left(D_2 \cdot g^*(r) + D_3\right) \mathrm{d}r \right|$$

and this can analogously be shown for all $t \in [0,\tau]$. Thus for all $t \in I$

$$g(0,t) + g(t,0) \leqslant 2 \cdot \exp\left(D_1 \cdot T\right) \cdot \int_{0}^{t} \left(D_2 \cdot g^*(r) + D_3\right) \mathrm{d}r$$

As the right-hand side is non-decreasing on I, this implies

$$\sup\{g(0,u) + g(u,0) | 0 \leqslant u \leqslant t\} \leqslant 2 \cdot \exp\left(D_1 \cdot T\right) \cdot \int_{0}^{t} \left(D_2 \cdot g^*(r) + D_3\right) \mathrm{d}r$$

There exists a non-increasing sequence in $C_+(I)$, which converges almost everywhere to $\sup\{g(0,u) + g(u,0) | 0 \leqslant u \leqslant t\}$. Thus we have shown

$$\begin{aligned} &\sup\{g(0,u) + g(u,0) | 0 \leqslant u \leqslant t\} \\ &\leqslant 2 \cdot \exp\left(D_1 \cdot T\right) \cdot \int_0^t \left(D_2 \cdot \sup\{g(0,u) + g(u,0) | 0 \leqslant u \leqslant r\} + D_3\right) \mathrm{d}r \end{aligned}$$

Another application of (2.7) yields

$$\sup\{g(0,u) + g(u,0) | 0 \leqslant u \leqslant t\}$$

$$\begin{aligned} &\leqslant \int_0^t \left(\exp\left(2 \cdot \exp\left(D_1 \cdot T\right) \cdot D_2 \cdot (t-r)\right) \cdot 2 \cdot \exp\left(D_1 \cdot T\right) \cdot D_3\right) \mathrm{d}r \\ &\leqslant T \cdot \exp\left(2 \cdot \exp\left(T \cdot D_1\right) \cdot D_2 \cdot T\right) \cdot 2 \cdot \exp\left(D_1 \cdot T\right) \cdot D_3 =: D_4 \cdot D_3 \end{aligned}$$

We insert this into (4.3.1) and get

$$g(t,\tau) \leqslant \left| \int_{\tau}^{t} \left(D_1 \cdot g(r,\tau) + \left(1 + D_4\right) \cdot D_3\right) \mathrm{d}r \right|$$

Lemma (2.7), applied for the third time, now yields

$$
\begin{aligned}
g(t,\tau) &\leqslant \left| \int_{\tau}^{t} \exp\left(D_1 \cdot |t-r|\right)\left(1+D_4\right) \cdot D_3 \mathrm{d}r \right| \\
&\leqslant T \cdot \exp\left(D_1 \cdot T\right) \cdot \left(1+D_4\right) \cdot D_3 =: D \cdot D_3
\end{aligned}
$$

□

附录 B　守恒律

命题 B.1： *(因果律)*

如果 (RVP) 问题的初值 f_0 在 $|x| > k$ 处便为零, 则 $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ 在 $|\mathbf{x}| > t + k$ 处亦为零 (casuality).

证明 We apply Eq. (2) to note that $|\mathbf{X}(s, t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \mathbf{x}| = \left|\int_t^s \hat{\mathbf{V}}(\xi, t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\xi\right| \leqq |t - s|$. In particular, $|X(0, t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \mathbf{x}| \leqq t$. Thus whenever $|\mathbf{x}| > k + t$, we have $|\mathbf{X}(0, t, \mathbf{x}, \mathbf{v})| \geqq |\mathbf{x}| - |\mathbf{X}(0, t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) - \mathbf{x}| > k$, and so by hypothesis and (3), $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = f_0(\mathbf{X}(0, t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{V}(0, t, \mathbf{x}, \mathbf{v})) = 0$ □

引理 B.1： *(守恒律)* 令 f 为 (VP) 或 (RVP) 在时间段 $[0, T)$ 上的经典解，$f_0 \in C^1(\mathbb{R}^6)$ 且非负，那么有下面的守恒性质：

(a) 总质量守恒, 即 $\iint_{\mathbb{R}^6} f d\mathbf{v} d\mathbf{x} = \text{ constant } = m$.

(b) 总能量守恒, 即

$$\text{(RVP)} \int\limits_{\mathbb{R}^3_x} \left\langle \int\limits_{\mathbb{R}^3_v} \sqrt{1 + |\mathbf{v}|^2} f d\mathbf{v} + \frac{1}{2}\gamma |\mathbf{E}|^2 \right\rangle d\mathbf{x} = \text{ constant } =: \mathscr{E}_0 \tag{B-1}$$

$$\text{(VP)} \int\limits_{\mathbb{R}^3_x} \left\langle \int\limits_{\mathbb{R}^3_v} \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} f d\mathbf{v} + \frac{1}{2}\gamma |\mathbf{E}|^2 \right\rangle d\mathbf{x} = \text{ constant } =: \mathscr{E}_0 \tag{B-2}$$

证明 对 (RVP) 系统部分的证明从 Glassey et al. (1985) 中整理而 (VP) 情况是类似的。

(a) 这个只要把偏微分方程在 v 和 x 上都积分一遍即可。

(b) Multiplying (RVP) by $\sqrt{1 + |\mathbf{v}|^2}$ and integrating in v, we obtain

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \sqrt{1 + |\mathbf{v}|^2} f d\mathbf{v} + \int \mathbf{v} \cdot \nabla_x f d\mathbf{v} - \gamma \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{j} = \int \hat{\mathbf{v}} f d\mathbf{v} \tag{B-3}$$

For non-relativistic (VP) , multiply it by $|\mathbf{v}|^2$ and we acquire similarly

$$\frac{\partial}{\partial t} \int |\mathbf{v}|^2 f d\mathbf{v} + \int \mathbf{v} \cdot \nabla_x |\mathbf{v}|^2 f d\mathbf{v} - 2\gamma \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{j} = \int \mathbf{v} f d\mathbf{v} \tag{B-4}$$

We have defined $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, where $\Delta\phi = \rho$. Multiplying by ϕ, we have

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{E}|^2 dx = -\int\limits_{R^3} \rho\phi d\mathbf{x}$$

and hence

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int\limits_{R^3} |\mathbf{E}|^2 dx &= -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \rho_t\phi dx - \int \rho u_t dx = -\int \rho_t\phi dx - \int\limits_{R^3} u_t\Delta\phi dx \\ &= -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \rho_t\phi dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{R^3} |E|^2 d\mathbf{x} \text{ (integrate by parts)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{E}|^2 d\mathbf{x} = -\int\limits_{\mathrm{R}^3} \rho_t\phi d\mathbf{x}$$

Therefore

Next, integrating (VP) and (RVP) in $\mathbf{v}$, we get the conservation law for both cases

$$\rho_t + \nabla_x \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \left\{\int \mathbf{v} f d\mathbf{v}, \int \hat{\mathbf{v}} f d\mathbf{v}\right\}$$

It follows that

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{E}|^2 d\mathbf{x} = -\int\limits_{R^3} \rho_t\phi d\mathbf{x} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \phi\nabla_x \cdot j d\mathbf{x} = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathbf{j}\cdot\nabla_x\phi d\mathbf{x} = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathbf{j}\cdot\mathbf{E} d\mathbf{x}$$

Now using this and (B-3), (B-4) we have

$$\begin{aligned}&\text{(VP)}\ \frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} f d\mathbf{v} + \frac{1}{2}\gamma|\mathbf{E}|^2 d\mathbf{x} \\ &= -\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v}\cdot\nabla_x f|\mathbf{v}|^2 d\mathbf{v} - 2\gamma\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\right) d\mathbf{x} - \gamma\int\limits_{R^3} \mathbf{j}\cdot\mathbf{E} d\mathbf{x} \\ &= -\iint\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \nabla_x\cdot(f\mathbf{v}^3) d\mathbf{v} d\mathbf{x} = 0\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{(RVP)}\ \frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sqrt{1+|v|^2}f\,d\mathbf{v}+\frac{1}{2}\gamma|\mathbf{E}|^2 d\mathbf{x} \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} v\cdot\boldsymbol{\nabla}_x f\,d\mathbf{v}-\gamma j\cdot\mathbf{E}\right)d\mathbf{x}-\gamma\int\limits_{R^3}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}d\mathbf{x} \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\boldsymbol{\nabla}_x\cdot(f\mathbf{v})d\mathbf{v}d\mathbf{x}=0
\end{aligned}
$$

□

which proves the total energy $\mathscr{E}_0$ does not change with respect to time in both non-relativistic adn relativistic cases.

综合论文训练记录表

学生姓名		学号		班级	
论文题目					
主要内容以及进度安排	指导教师签字：__________ 考核组组长签字：__________ 年 月 日				
中期考核意见	考核组组长签字：__________ 年 月 日				

指导教师评语	指导教师签字：____________ 年　　月　　日
评阅教师评语	评阅教师签字：____________ 年　　月　　日
答辩小组评语	答辩小组组长签字：____________ 年　　月　　日

总成绩：____________

教学负责人签字：____________

年　　月　　日