SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

SEMINAR

Brza Fourierova transformacija

Kristijan Verović
Voditelji: *Marin Šilić, Adrian Satja Kurdija*

Zagreb, veljača 2023.

SADRŽAJ

1. Uvod

Fourierova transformacija je samo jedna od bezbroj mogućih transformacija u teoriji obrade signala odakle i dolazi ime algoritma koji je tema ovog izlaganja. Fourierova transformacija može biti kontinuirana i diskretna, kao što to često biva u računarstvu ovdje se proučava diskretan slučaj odnosno Diskretna Fourierova transformacija-DFT. DFT odnosno njegova računarno brža varijanta:Brza Fourierova transformacija (eng. Fast Fourier transform) ili FFT se može između ostaloga primijeniti za brzo množenje polinoma što je glavni fokus ovog rada. Računamo li DFT naivno po njegovoj definiciji imat ćemo složenost $O(n^2)$ što je često u praksi previsoko. FFT je podijeli pa vladaj (eng. divide and conquer) algoritam koji u $O(nlogn)$ vremenskoj složenosti izračunava DFT. Za razumijevanje DFT-a i FFT-a nije potrebno znanje iz područja obrade signala.

2. FFT algoritam

Formula 2.1 uz ekvivalentan matrični zapis je definicija DFT-a koji je kao takav definiran kao množenje matrice nxn i vektora $nx1$ što ima složenost $O(n^2)$. Radi se o evaluaciji polinoma s koeficijentima prikazanim u vektoru $(a_0, a_1, ..., a_{n-1})$ u točkama w_n^k gdje k ide od 0 do $(n-1)$ te je $w_n^k = e^{\frac{2\Pi * k * i}{n}}$. Korištenje kompleksnih brojeva je ključan dio rada FFT algoritma jer će se pomoću njih dobiti algebarska svojstva koja omogućuju podijeli pa vladaj pristup računanju DFT-a.

$$\begin{bmatrix} w_n^0 & w_n^0 & w_n^0 & w_n^0 & \cdots & w_n^0 \\ w_n^0 & w_n^1 & w_n^2 & w_n^3 & \cdots & w_n^{n-1} \\ w_n^0 & w_n^2 & w_n^4 & w_n^6 & \cdots & w_n^{(n-1)2} \\ w_n^0 & w_n^3 & w_n^6 & w_n^9 & \cdots & w_n^{(n-1)3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n^0 & w_n^{n-1} & w_n^{2(n-1)} & w_n^{3(n-1)} & \cdots & w_n^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_k &= a_0 w_n^0 + a_1 w_n^k + a_2 w_n^{2k} + a_3 w_n^{3k} + \cdots + a_{n-1} w_n^{(n-1)k} \\ &= a_0 (w_n^k)^0 + a_1 (w_n^k)^1 + a_2 (w_n^k)^2 + a_3 (w_n^k)^3 + \cdots + a_{n-1} (w_n^k)^{n-1} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Želimo pomnožiti dva polinoma A i B. Neka je n jednak $n = max(deg(A), deg(B))$. Dopunit ćemo nulama koeficijente i od A i od B do druge najveće potencije broja 2 nakon broja n i reći da je to novi n. Za cijeli opis algoritma s dokazima međukoraka (algebarske prirode) pogledati [5] i [4]. Sada računamo $DFT(A)$ i $DFT(B)$, konkretni izračun $DFT(A)$ u algoritmu je sljedeći. Razdijelimo A na A_0 koji ima samo koeficijente uz parne eksponente polinoma i na A_1 koji ima samo neparne:

$$A_0(x) = a_0 + a_2 x + a_4 x^2 + ... + a_{n/2-2} x^{n/2-1}$$

$$A_1(x) = a_1 + a_3 x + a_5 x^2 + ... + a_{n/2-1} x^{n/2-1}$$

$DFT(A)$ je vektor od n elemenata $DFT(A)_0, DFT(A)_1, ...DFT(A)_{n-1}$.

$ako(k < n/2) : DFT(A)_k = A_0(w_{n/2}^{k-n/2}) + w_n^k * A_1(w_{n/2}^{k-n/2})$

$ako(k >= n/2) : DFT(A)_k = A_0(w_{n/2}^{k-n/2}) - w_n^{k-n/2} * A_1(w_{n/2}^{k-n/2})$

Ovdje je jasno u kojem smjeru ide divide and conquer, samo cijepamo dalje A_0 i A_1 na manje polovične podsegmente. Potom množimo $DFT(A)$ i $DFT(B)$ jer $DFT(A * B) = DFT(A) * DFT(B)$. Sada kada imamo evaluiran polinom $A * B$ u točkama definiranim DFT-om mi želimo napraviti inverznu transformaciju, odnosno iz evaluiranih točaka polinoma naći koeficijente originalnog polinoma. Trebamo InverseDFT kojim bismo postigli $A * B = InverseDFT(DFT(A) * DFT(B))$. To možemo postići ako nađemo inverznu matricu matrici iz izraza 2.1. Lako se provjeri da je inverzna matrica toj matrici ona prikaza sljedećom matricom.

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} w_n^0 & w_n^0 & w_n^0 & w_n^0 & \cdots & w_n^0 \\ w_n^0 & w_n^{-1} & w_n^{-2} & w_n^{-3} & \cdots & w_n^{-(n-1)} \\ w_n^0 & w_n^{-2} & w_n^{-4} & w_n^{-6} & \cdots & w_n^{-(n-1)2} \\ w_n^0 & w_n^{-3} & w_n^{-6} & w_n^{-9} & \cdots & w_n^{-(n-1)3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n^0 & w_n^{-(n-1)} & w_n^{-2(n-1)} & w_n^{-3(n-1)} & \cdots & w_n^{-(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$$

Ovdje se radi o idejno identičnom izračunu kao i za DFT, stoga je vremenska složenost i ovog $O(nlogn)$, naime:

$a_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y_j w_n^{-jk}$

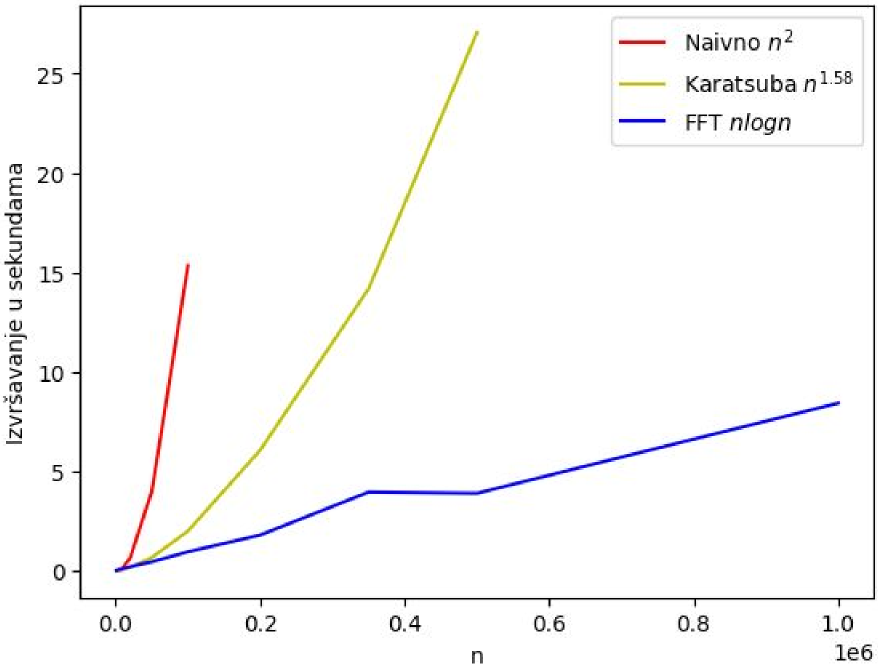
Što jako liči na izraz za DFT:

$y_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_j w_n^{jk}$

Iz čega se može zaključiti da se inverzni FFT može riješiti istim divide and conquer algoritmom uz minimalnu izmjenu koda za FFT. Vremenska složenost cjelokupnog algoritma je $O(nlogn)$ dok je memorijska složenost $O(n)$.

3. Performanse

Usporedit ćemo vremenske karakteristike 2 algoritma za množenje polinoma s FFT-om: naivni $O(n^2)$ i Karatsubin algoritam $O(n^{1.58})$ [7]. Implementacije kodova pojedinih algoritama rađene su u programskom jeziku C++ i nalaze se na [1]. Algoritmi su kompajlirani u GCC-u sa zastavicama "-std=c++11 -O2", ovdje je -O2 često korištena optimizacijska zastavica. Performanse su prikazane u grafu na slici 3.1.



Slika 3.1: Usporedba algoritama za množenje polinoma.

Na grafu se zastoj brzine FFT-a između 350000 i 500000 može objasniti zbog dizanja n na potenciju broja 2, a 350000 i 500000 će se oboje dići na istu potenciju jer su oboje između $2^{18} = 262144$ i $2^{19} = 524288$. U tablici 3.1 ispod se nalaze konkretni brojevi preko kojeg je dobiven gornji graf 3.1, mjereno na procesoru "AMD A10-5757M", laptop Acer-Aspire V5-552G.

Tablica 3.1: Usporedba prosječnih vremena tri algoritma u sekundama.

N	naivni	Karatsuba	FFT
1000	0.0017	0.0021	0.0055
2000	0.006	0.0064	0.011
5000	0.039	0.0207	0.046
10000	0.16	0.051	0.093
20000	0.62	0.149	0.198
50000	4	0.66	0.44
100000	15.34	1.99	0.95
200000	-	6.06	1.79
350000	-	14.17	3.92
500000	-	27	3.88
1000000	-	-	8.42

Budući da se radi o podijeli pa vladaj algoritmu posve je prirodno uvesti paralelizam. Pretpostavimo da raspolažemo s $p = 2^k$ procesora te možemo jednostavno razdijeliti memoriju svakom procesoru, onda sve od prve do uključivo $k - te$ razine sve se izračuna u $O(n)$, a onda tek na dalje izračun ide kao da smo imali jedan procesor. Preciznije, složenost je $O(n * (logn - logp)) = O(nlog(n/p))$, detaljnije na [3].

4. Primjene

4.1. Množenje velikih brojeva

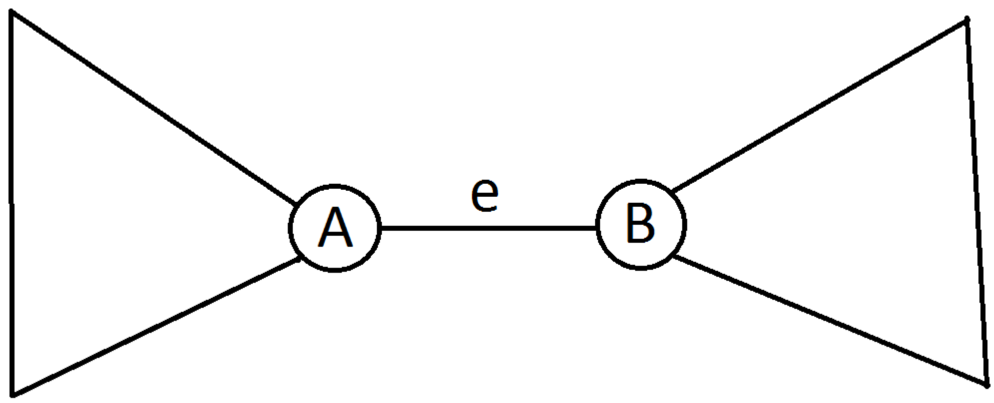
Želimo FFT koristiti prvenstveno u svrhu množenja polinoma, a posljedično i velikih brojeva. Za velike brojeve samo stavimo $x = 10$ (ili drugu bazu samo onda malo drugačije) i pomnožimo dva polinoma. Tamo gdje imamo koeficijente > 10 guramo znamenke prema većim potencijama. Složenost ovog djela je $O(nlog_b n)$ što je pokriveno $O(nlogn)$ složenošću. Objašnjenje za $O(nlog_b n)$ složenost je da u rezultantnom polinomu koeficijent uz 10^k može biti najviše $(k*b)^2$, gdje je b baza. Logaritam od toga je jednak $log_b(k*b)^2 = 2log_b kb = 2log_b k + 2$ što je asimptotski jednako $O(log_b k)$ odnosno $O(log_b n)$. Konačno vrijedi $O(log_b n) = O(logn)$ jer se logaritmi razlikuju samo za koeficijent. To je bila složenost potrebna da pomaknemo viška znamenke na gornje eksponente broja nakon množenja pa onda to ispadne uzevši u obzir svaku znamenku $O(nlogn)$. Implementacija u C++-u nalazi se na [1].

4.2. Obrada signala

Očita primjena je u području obrade signala otkud uopće i dolazi definicija DFT-a te se ekstenzivno koristi. U obradi signala Fourierova transformacija rastavlja osnovni signal na zbroj više jednostavnijih signala. Kada imamo rastavljen signal, onda primjerice u analizi i obradi zvuka možemo maknuti neke signale iz originalnog audiozapisa. Na primjer snimljena je pjesma, međutim primjećujemo distorziju u pjesmi koja se dogodila zbog utjecaja nekakvih ne željenih harmonika. To kvari kvalitetu snimljene pjesme i stoga bismo htjeli maknuti signalne komponente koje čine distorziju što je relativno lagano nakon rastava pjesme na komponente. Studenti na diplomskom studiju Fakulteta elektrotehnike i računarstva u Zagrebu koriste gotove module za izračun FFT-a na nekim predmetima vezanim uz signale u sklopu laboratorijskih vježbi.

4.3. Kombinatorika

Primjena je ogromna u izračunu kombinatoričkih problema pomoću polinoma. Primjer jednog takvog problema bio bi sljedeći. Pretpostavimo da imamo graf G koji je stablo, proučavamo u stablu jedan brid e. Zanima nas koliko puteva koje duljine prolazi kroz taj brid. Ilustrirano slikom 4.1.



Slika 4.1: Stablo

Promatramo A i B kao korijene svojih podstabla. Izračunamo koliko puteva koje duljine ide od nekog čvora u podstablu do korijena podstabla što je jednostavno izračunljivo u $O(n)$. Kada bismo u podstablu A imali 5 puteva duljine jedan, 3 puteva duljine dva, 9 puteva duljine tri te 6 puteva duljine četiri, onda bismo to prezentirali kao (dodano +1 za sam čvor A puta duljine 0) :

$$A = 1 + 5x + 3x^2 + 9x^3 + 6x^4$$

Analogno bi napravili za podstablo B te bi pomnožili ta dva polinoma. U rezultirajućem polinomu koeficijent c_k uz x^k bi označavao koliko ima puteva duljine $k + 1$.

5. Problemi i stanje tehnike u množenju polinoma

Fokusiramo li se samo na cjelobrojne koeficijente (s racionalnim koeficijentima FFT ima manju grešku od naivnih pristupa), postavlja se pitanje kad će doći do pogreške, uzevši u obzir da FFT koristi tipove podataka pomičnog zareza u svom izračunu. Postoje algoritmi koji nemaju problema s preciznošću te daju točan rezultat za veće polinome i koeficijente jer koriste Number-theoretic transform (NTT). Za usporedbu DFT i NTT pogledati [2]. Schönhage–Strassen algoritam [8] iz 1971-e se može koristiti za množenje velikih brojeva u $O(n * logn * loglogn)$. Algoritam Harvey-van der Hoeven [6] otkriven 2019-e ima složenost $O(nlogn)$, ali tek za jako veliki n asimptotski dolazi do izražaja (eng. Galactic algorithm) i nije praktično primjenjiv.

6. Literatura

[1] https://github.com/Weramajstor/Seminar-1.

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_Fourier_transform_over_a_ring#Properties.

[3] https://cs.wmich.edu/gupta/teaching/cs5260/5260Sp15web/studentProjects/tiba&hussein/03278999.pdf.

[4] https://e-maxx.ru/algo/fft_multiply, 2008.

[5] https://cp-algorithms.com/algebra/fft.html, 2022.

[6] D. Harvey i J. van der Hoeven. Integer multiplication in time $o(nlogn)$. *Annals of Mathematics*, 193(2):563–617, 2021.

[7] A. Karatsuba i Yu. Ofman. Umnoženie mnogoznačnih čisel na automatah. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 145:595–596, 1962.

[8] A. Schönhage i V. Strassen. Schnelle multiplikation großer zahlen. *Computing*, 7: 281–292, 1971.

7. Sažetak

Prolazi se kroz algoritam FFT. Analiziraju se performanse FFT-a u usporedbi s drugim algoritmima za množenje polinoma. Opisuje se mogućnost paralelizacije algoritma. Prezentiraju se primjene FFT-a te se na kraju osvrće na probleme FFT-a i stanje tehnike (eng. state-of-the-art) u području množenja polinoma i velikih brojeva.