Universidade Federal de Viçosa
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Departamento de Engenharia Elétrica

Robótica Industrial

Controle de Movimento

Prof. Dr. Alexandre S. Brandão
alexandre.brandao@ufv.br

Estratégia Polinomial

- Condições de restrição
  - No instante inicial $t = t_0$; tem-se que $q_i(t_0) = q_0$ e $\dot{q}_i(t_0) = \dot{q}_o$
  - No instante final $t = t_f$; tem-se que $q_i\left(t_f\right) = q_f$ e $\dot{q}_i(t_f) = \dot{q}_f$
- Define-se polinômios
  - De terceira ordem para posição: $q_{id} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$
  - De segunda ordem para a velocidade: $\dot{q}_{id} = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$
- Combinando tais polinômios com as restrições, tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_o^2 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \dot{q}_0 \\ q_f \\ \dot{q}_f \end{bmatrix}$$

Estratégia Polinomial

$$q_{id} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

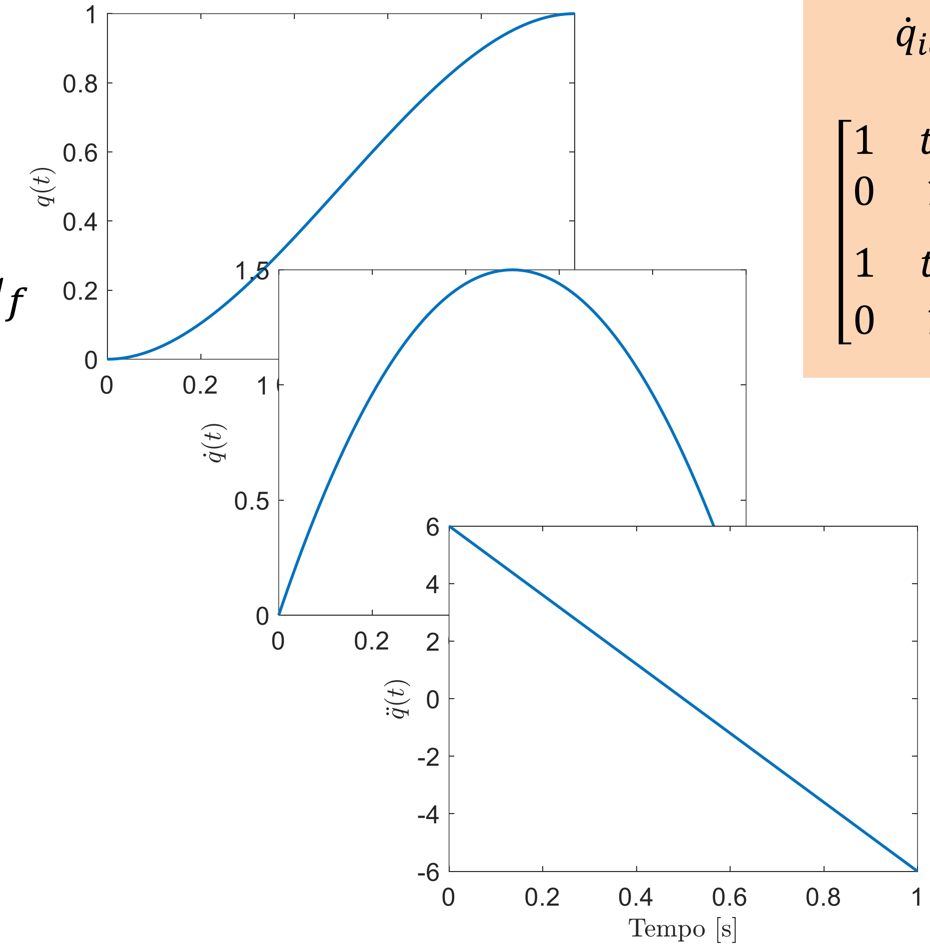
$$\dot{q}_{id} = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_o^2 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \dot{q}_0 \\ q_f \\ \dot{q}_f \end{bmatrix}$$

- Exemplo: Obter o polinômio de referência com as restrições
  - $\dot{q}_0 = \dot{q}_f = 0$, com $t_0 = 0$ e $t_f = 1$
- Aplicado as restrições
  - $q(0) = a_0 = 0$ e $\dot{q}(0) = a_1 = 0$
  - $q(1) = a_2 + a_3 = q_f$ e $\dot{q}(1) = 2a_2 + 3a_3 = 0$
- Equacionado
  - $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_f \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +3q_f \\ -2q_f \end{bmatrix}$
- Resultando
  - $q(t) = 3q_f t^2 - 2q_f t^3$
  - $\dot{q}(t) = 6q_f t - 6q_f t^2$

Estratégia Polinomial

- ❑ Exemplo: Obter o polinômio de referência com as restrições
  - ❑ $\dot{q}_0 = \dot{q}_f = 0$, com $t_0 = 0$ e $t_f = 1$
- ❑ Aplicado as restrições
  - ❑ $q(0) = a_0 = 0$ e $\dot{q}(0) = a_1 = 0$
  - ❑ $q(1) = a_2 + a_3$ e $\dot{q}(1) = 2a_2 + 3a_3 = q_f$
- ❑ Equacionado
  - ❑ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_f \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +3q_f \\ -2q_f \end{bmatrix}$
- ❑ Resultando
  - ❑ $q(t) = 3q_f t^2 - 2q_f t^3$
  - ❑ $\dot{q}(t) = 6q_f t - 6q_f t^2$



$$q_{id} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

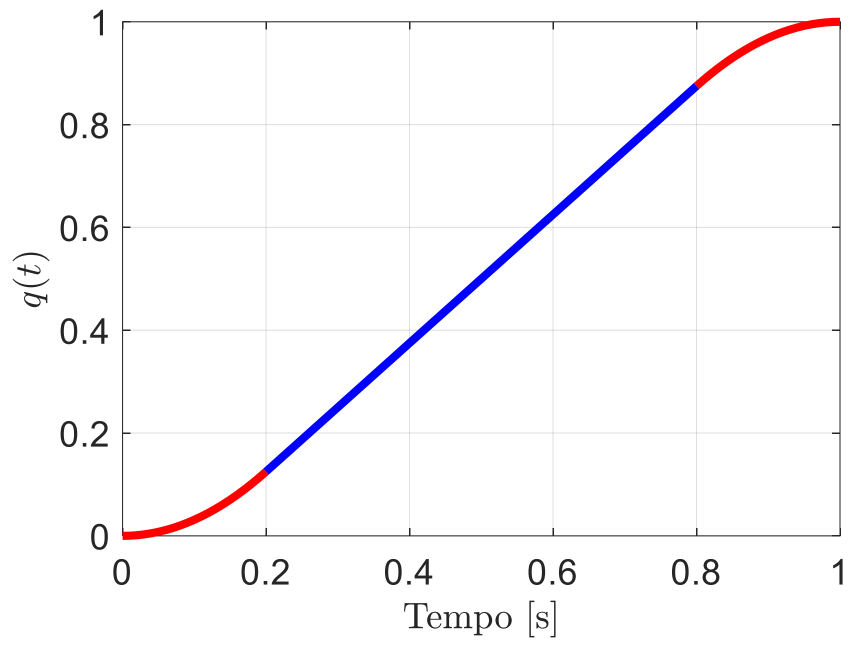
$$\dot{q}_{id} = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_o^2 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \dot{q}_0 \\ q_f \\ \dot{q}_f \end{bmatrix}$$

UFV

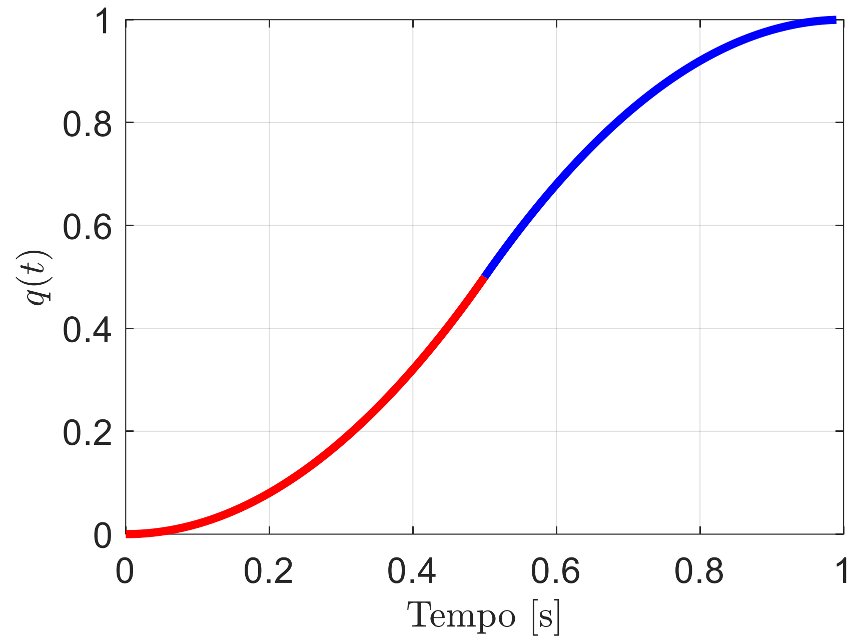
Trecho em Velocidade Constante

- Trajetória de referência similar ao comportamento da movimentação do braço humano em uma tarefa de agarre
- Aceleração: $0 \leq t \leq t_b$ (*Blend Time*)
  - Restrições: $t_0 = 0, q(0) = \mathrm{q_o}, \dot{q}(0) = 0$
  - Posição: $q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$
- Velocidade constante: $t_b < t \leq t_f - t_b$
  - Posição: $q(t) = b_0 + b_1 t$
  - Consideração: $b_1 = V$, velocidade constante
- Desaceleração: $t_f - t_b < t \leq t_f$
  - Posição: $q(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$
  - Similar ao primeiro trecho, com $c_2 = -a_2$
  - Restrições: $q(t_f) = \mathrm{q}_f, \dot{q}(t_f) = 0$



Tempo Mínimo – Trajetória Bang-Bang

- Consiste em somente uma etapa de aceleração e outra de desaceleração
- Aceleração: $0 \leq t \leq t_s$ (*Switching Time*)
  - Restrições: $t_0 = 0$, $q(0) = q_0$ e $\dot{q}(0) = 0$
  - Posição: $q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$
  - Chaveamento: $t_s = \frac{t_f}{2} = \frac{q_f - q_0}{V}$
- Desaceleração: $t_s < t \leq t_f$
  - Similar ao primeiro trecho, porém para $\dot{q}(t_f) = 0$



Trajetória Linear no Espaço Cartesiano

- Reta parametrizada no espaço

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_o + \alpha\left(\boldsymbol{x}_f - \boldsymbol{x}_o\right), \text{ com } \alpha = \frac{l(t)}{\boldsymbol{x}_f - \boldsymbol{x}_o}$$

- $l(t)$ é dado por algum dos métodos apresentados anteriormente, desde que tenham como restrições: $l(0) = 0$ e $l(t) = 1$