

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA – UFV
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – CCE
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA - DEL

Sistemas de Controle II

ELT331

AULA 4 – Projeto de Controlador em **Avanço de Fase pelo Método do Lugar das Raízes**

Prof. Tarcísio Pizziolo

4. Projeto de Controlador em Avanço de Fase

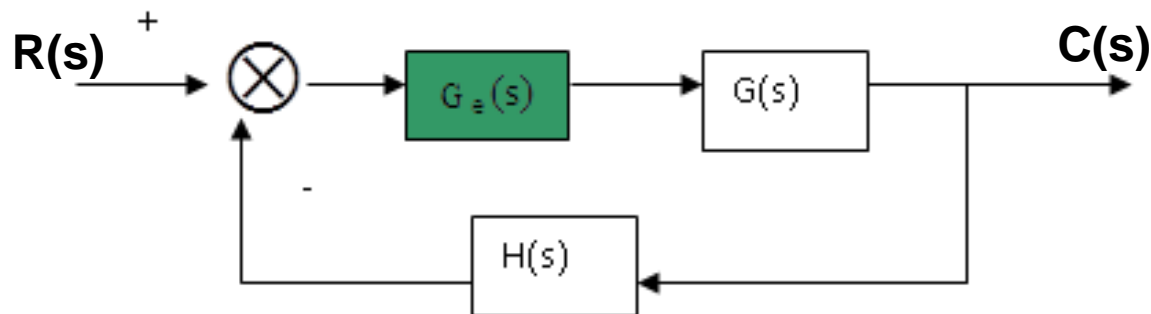
4.1. Controlador (Compensador)

Dispositivo inserido no sistema com a finalidade de satisfazer as especificações desejadas. Tal dispositivo compensa a deficiência do sistema original.

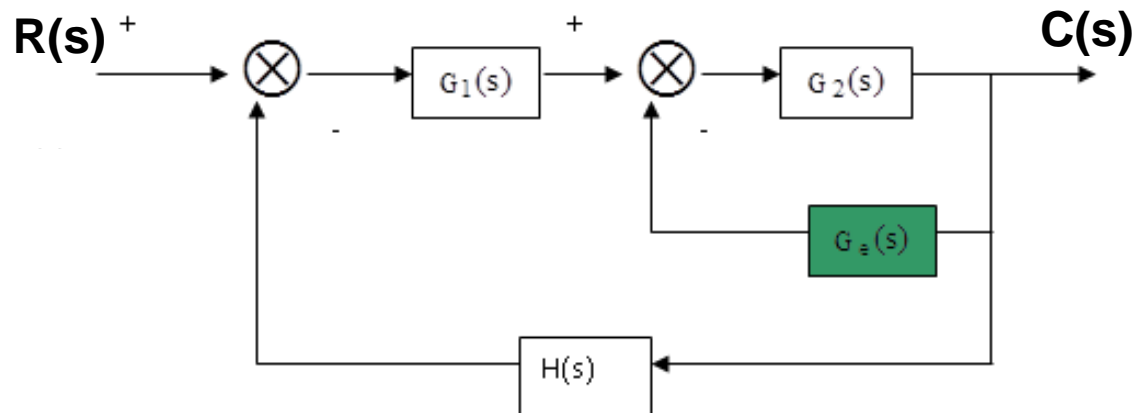
Estudaremos os controladores básicos que são compostos por um ganho **K**, um zero **z** e um pólo **p**.

Utiliza-se a Compensação **Série** ou a **Paralela**, sendo a Compensação **Série** mais usada.

Compensação Série:



Compensação Paralela:



4. Projeto de Controlador em Avanço de Fase

4.2. Classificação dos Controladores

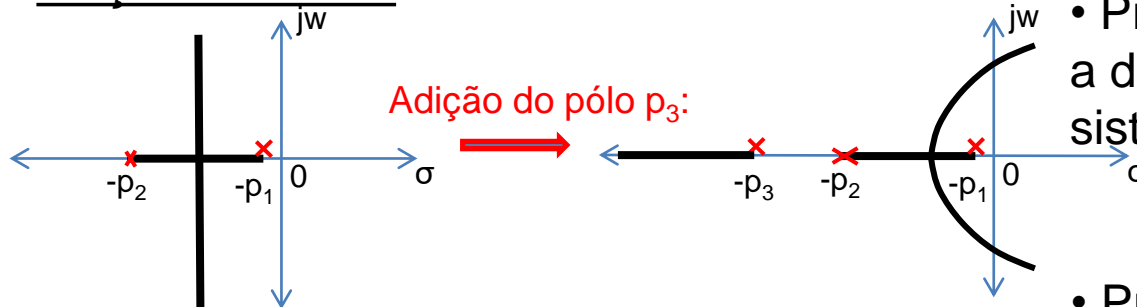
Dada uma excitação senoidal à entrada de um controlador e sua resposta em regime permanente, tem-se que:

- saída com **avanço** de fase
- saída em **atraso** de fase
- saída em **atraso e avanço** de fase

Controladores Analógicos (compensadores) são Filtros eletrônicos aplicados para melhorar o desempenho do sistema.

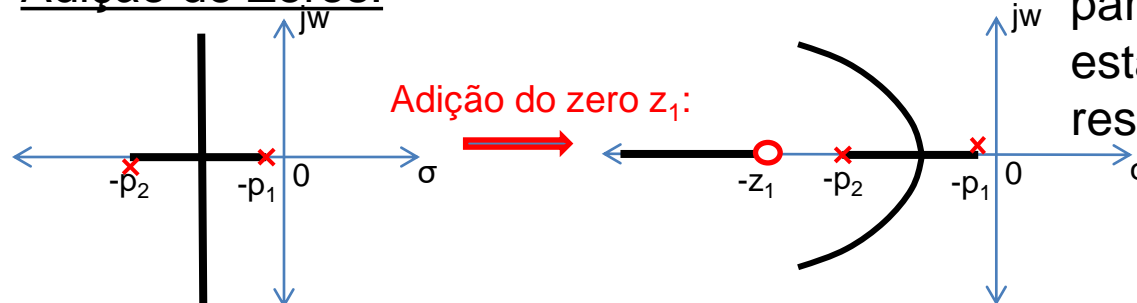
Projeto de Controladores Analógicos pelo Método do Lugar das Raízes

Adição de Pólos:



- Provoca o deslocamento do LR para a direita diminuindo a estabilidade do sistema com uma resposta mais lenta.

Adição de Zeros:



- Provoca o deslocamento do LR para a esquerda aumentando a estabilidade do sistema com uma resposta mais rápida.

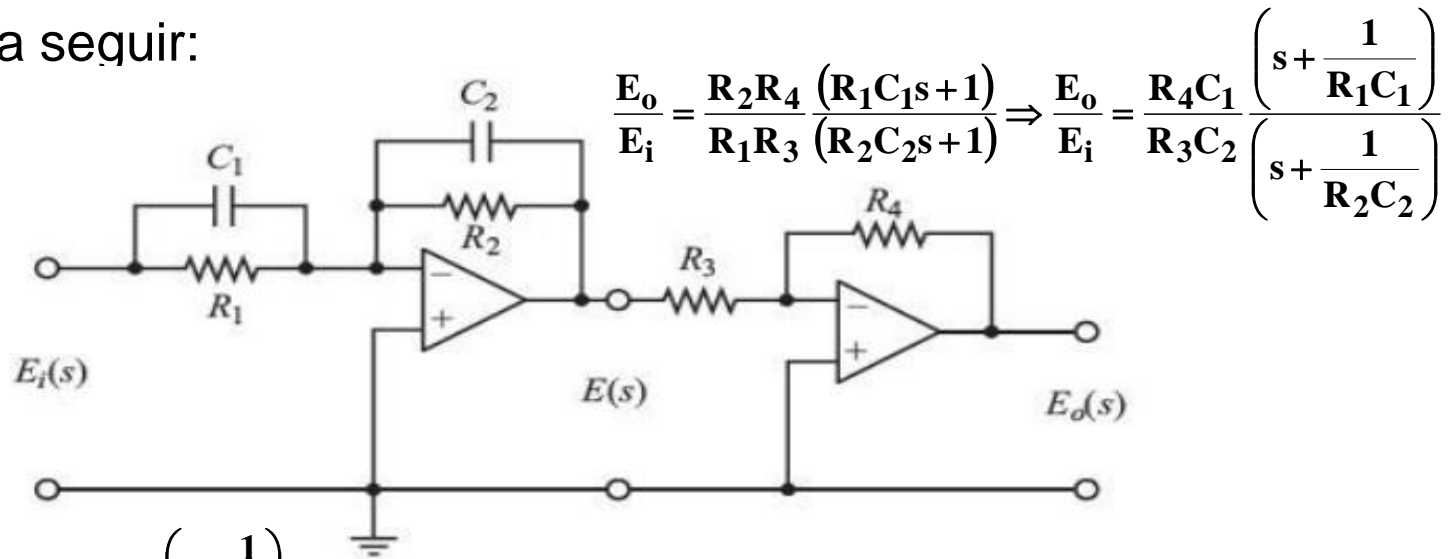
4. Projeto de Controlador em Avanço de Fase

4.3. Construção Básica de Controladores

Controladores analógicos podem ser construídos de várias maneiras, tais como circuitos RC, sistemas mecânicos do tipo mola-amortecedor e utilizando Amplificadores Operacionais.

Controladores utilizando Amplificadores Operacionais

Seja o circuito a seguir:



$$\frac{E_o}{E_i} = K_c \alpha \frac{(Ts + 1)}{(\alpha Ts + 1)} \Rightarrow \frac{E_o}{E_i} = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T} \right)}{\left(s + \frac{1}{\alpha T} \right)}$$

Onde : $T = R_1 C_1$; $\alpha T = R_2 C_2$; $K_c = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2}$

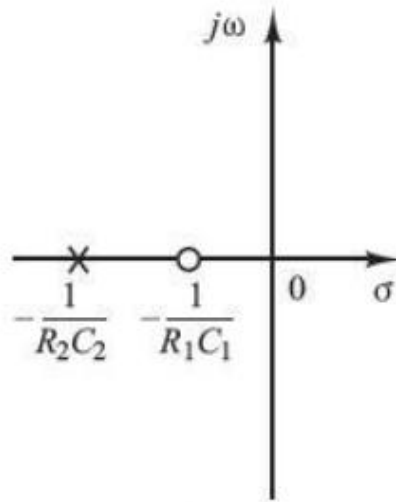
Note que : $K_c \alpha = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2} \cdot \frac{R_2 C_2}{R_1 C_1} \Rightarrow K_c \alpha = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3}$ e $\alpha = \frac{R_2 C_2}{R_1 C_1}$

Ganho da Rede

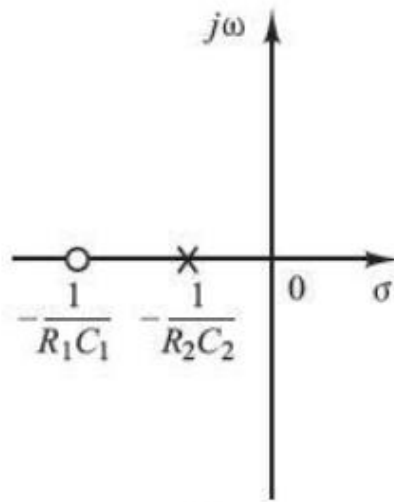
4. Projeto de Controlador em Avanço de Fase

4.3. Construção Básica de Controladores

Pela **localização** do **zero** e do **pólo** o controlador é classificado em **Avanço de Fase** e em **Atraso de Fase**.



a) Avanço de Fase



b) Atraso de Fase

- Se $R_1C_1 > R_2C_2$ ou $\alpha < 1$ o zero do controlador situa-se mais próximo da origem do que o pólo, ou seja, o zero situa-se à direita do pólo. Esta situação é apresentada na Figura **a)** caracterizando um controlador em **Avanço de Fase**.

- Se $R_1C_1 < R_2C_2$ o polo do controlador situa-se mais próximo da origem do que o zero, ou seja, o pólo situa-se à direita do zero. Esta situação é apresentada na Figura **b)** caracterizando um controlador em **Atraso de Fase**.

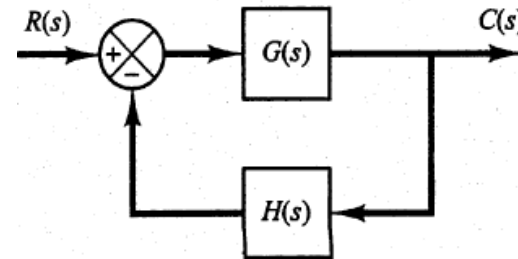
4. Projeto de Controlador em Avanço de Fase

4.3. Construção Básica de Controladores

- A aplicação do método do Lugar das Raízes para projetos de controladores é muito eficiente quando as especificações são dadas em termos de grandezas no domínio do tempo, tais como coeficiente de amortecimento (ξ), frequência natural não amortecida dos pólos dominantes de malha fechada (ω_n), sobre-sinal máximo (M_p), tempo de subida (t_r) e tempo de acomodação ($t_{s2\%,5\%}$).

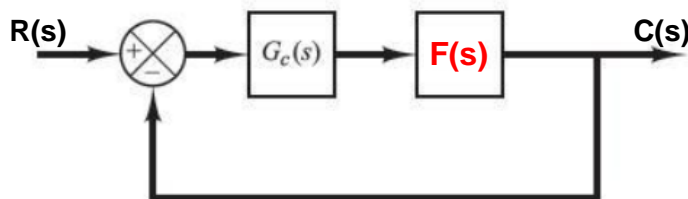
Procedimentos para o projeto de um Controlador

Seja o sistema de controle generalizado dado:



Observa-se que a realimentação **não é unitária**, pois existe **$H(s)$** no ramo de retroação.

Para **simplificar** o projeto de um controlador deve-se reorganizar o diagrama de blocos para obter-se uma **realimentação unitária**.

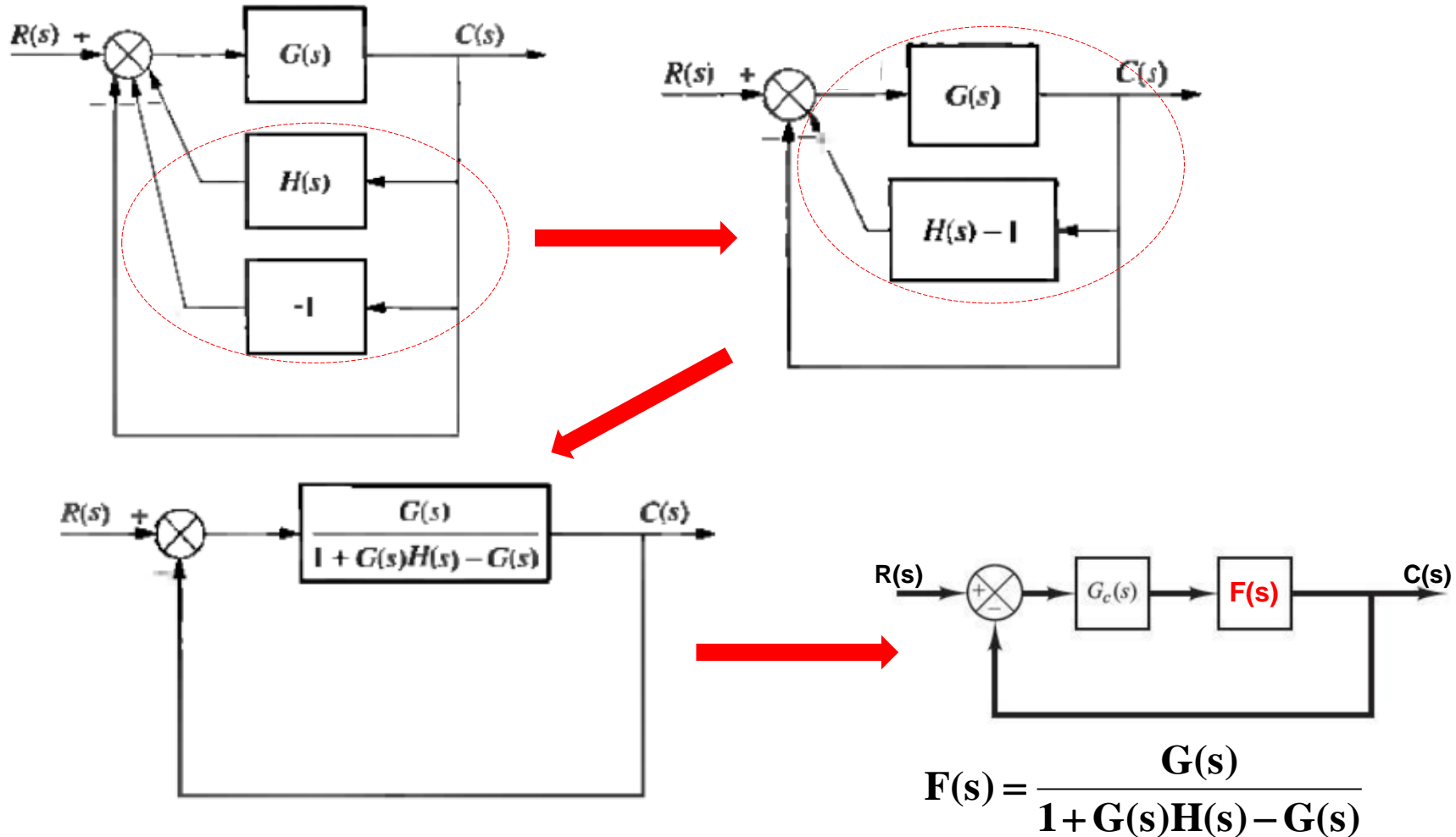


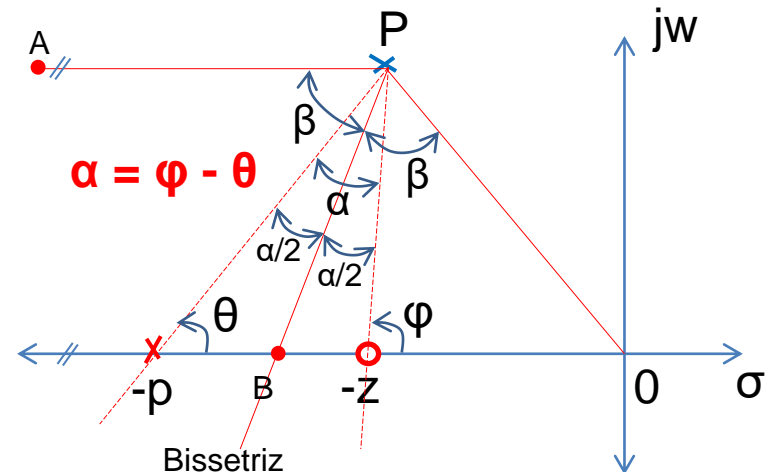
$F(s)$ = Função de Transferência reorganizada
 $G_c(s)$ = Controlador

4. Projeto de Controlador em Avanço de Fase

4.4. Simplificação do Diagrama de Blocos

Deve-se transformar o sistema de controle com **realimentação não unitária** em um sistema com **realimentação unitária** adicionado e subtraindo caminhos de **realimentação unitária**. Então:





4. Projeto de Controlador em Avanço de Fase

4.6. Procedimentos para Projeto de Controlador por Avanço de Fase

- 1 - Determinar a localização desejada dos pólos de malha fechada dominantes com base nas especificações de desempenho do sistema.
- 2 – Construir o Lugar das Raízes do sistema não compensado e verificar se é possível obter os pólos de malha fechada desejados apenas com ajuste de ganho.
- 3 – Caso não seja possível obter os pólos de malha fechada desejados apenas com o ajuste de ganho, calcular o ângulo φ a ser corrigido pelo controlador.
- 4 – Supor que a Função de Transferência do controlador por Avanço de Fase seja dada por:

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{(Ts + 1)}{(\alpha Ts + 1)} = K_c \frac{(s + \frac{1}{T})}{(s + \frac{1}{\alpha T})} ; \quad (0 < \alpha < 1)$$

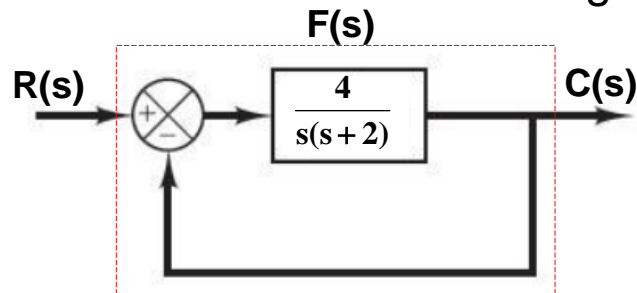
Onde α e T são determinados com base na deficiência angular e K_c é determinado a partir do ganho de malha aberta.

- 5 – Aplicando o **Método da Bissetriz** determine as posições do pólo $s = -1/\alpha T$ e do zero $s = -1/T$ do controlador de modo que o mesmo contribua com o ângulo φ necessário.
- 6 – Determine o ganho K de malha aberta do sistema compensado pela **condição de módulo**.

Obs.: Se as especificações ainda não forem obtidas, deve-se **ajustar** os parâmetros encontrados para o controlador!

4.7. Exemplos

Exemplo 5.7.1 Considere o sistema mostrado a seguir.



Projetar um controlador para que o Coeficiente de Amortecimento seja $\xi = 0,5$ e a Frequência Natural não Amortecida seja $w_n = 4 \text{ rd/s}$.

Considerações iniciais:

- A Função de Transferência em malha fechada é:

$$F(s) = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}; \quad \text{Pólos: } s_{1,2} = (-1 \pm j\sqrt{3}); \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{4}{s(s+2)} \right] \Rightarrow K_v = 2; e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0,5 \text{ s}^{-1}$$

- A Frequência Natural não Amortecida atual é $w_n = \sqrt{4} = 2 \text{ rd/s}$.

- O Coeficiente de Amortecimento atual é: $2\xi w_n = 2 \Rightarrow \xi = 0,5$

- Desta forma necessita-se manter o mesmo ξ , ou seja, o mesmo amortecimento, mas alterar a frequência w_n de $w_n = 2 \text{ rd/s}$ para $w_n = 4 \text{ rd/s}$.

- O aumento no valor de w_n implicará em uma resposta **mais rápida** do sistema.

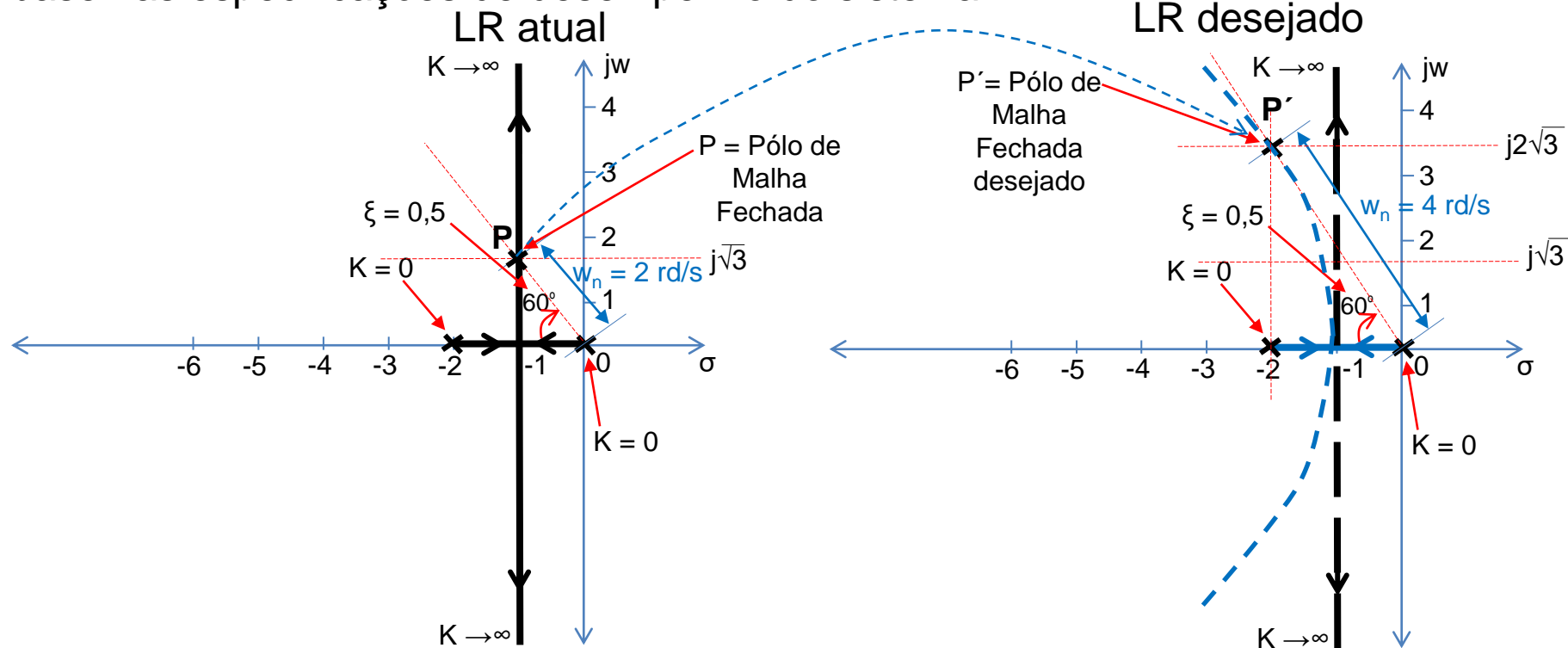
Obs.:

Como efeito colateral, a alteração da frequência w_n de $w_n = 2 \text{ rd/s}$ para $w_n = 4 \text{ rd/s}$ provocará uma diminuição no **erro estacionário** do sistema quando este for submetido a uma entrada **Rampa Unitária** em função do decréscimo de K_v . Para $w_n = 2 \text{ rd/s}$ o K_v atual é $K_v = 2 \text{ s}^{-1}$, mas para $w_n = 4 \text{ rd/s}$ o K_v será $K_v = 4 \text{ s}^{-1}$, daí o erro estático de velocidade será $e_{ss} = 1/K_v = 1/4 = 0,25$.

Exemplo 4.7.1

Solução

1 - Determinar a localização desejada dos pólos de malha fechada dominantes com base nas especificações de desempenho do sistema.



$$\beta = \cos^{-1}(\xi) \Rightarrow \beta = \cos^{-1}(0,5) \Rightarrow \beta = 60^\circ$$

$$w_n^2 = \sigma^2 + w^2 \Rightarrow 2^2 = \sigma^2 + w^2 \Rightarrow 4 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 \Rightarrow 4 = 4 \text{ (ok!)}$$

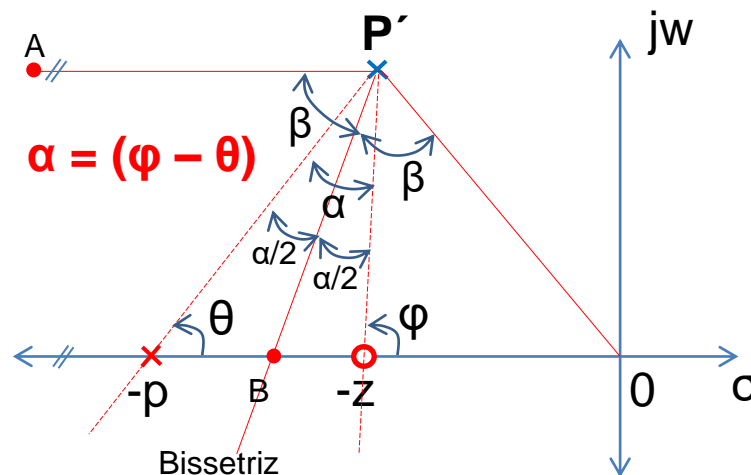
$$w_n^2 = \sigma^2 + w^2 \Rightarrow 4^2 = \sigma^2 + w^2 \Rightarrow 16 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 \Rightarrow 16 = 16 \text{ (ok!)}$$

Exemplo 4.7.1

Solução

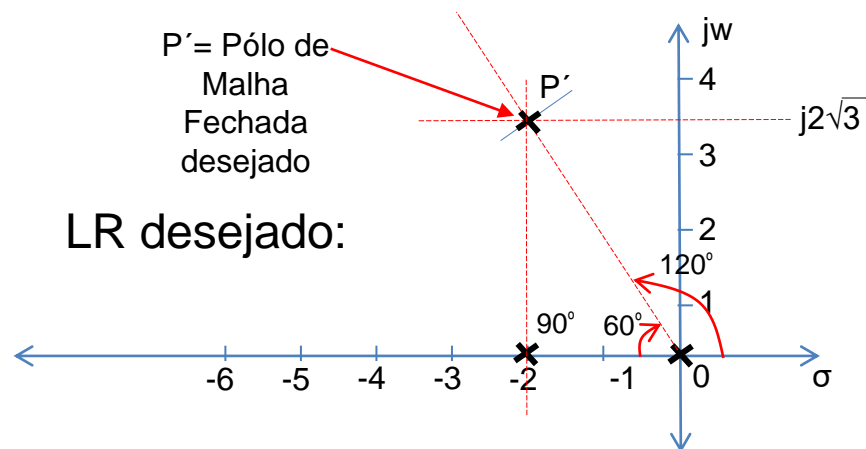
- 1 – Construir o LR do sistema não compensado e verificar se é possível obter os pólos de malha fechada desejados apenas com ajuste do ganho **K**.
- 2 - Como ξ deve permanecer com o mesmo valor não é possível obter os pólos de malha fechada desejados apenas com ajuste do ganho **K** pelo fato de que o LR não compensado não passará pelos mesmos.
- 3 – Caso não seja possível obter os pólos de malha fechada desejados apenas com o ajuste de ganho, calcular o ângulo φ a ser corrigido pelo controlador.

Método da Bissetriz



Exemplo 4.7.1

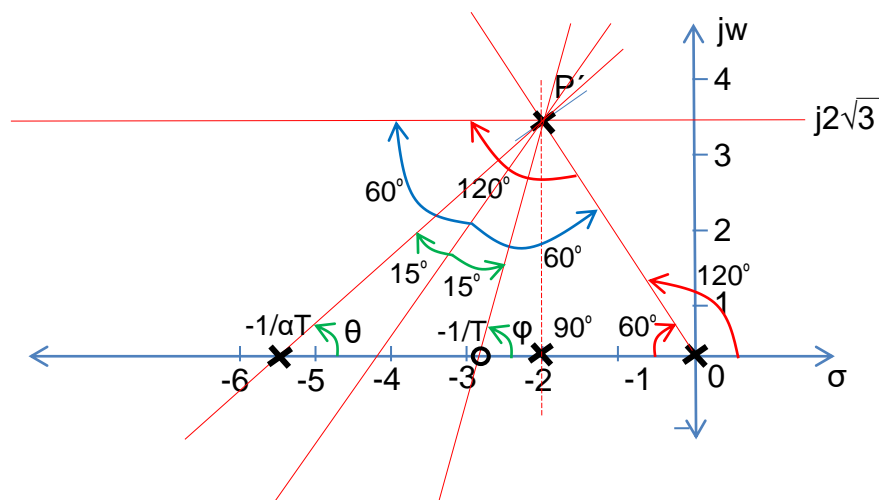
Solução



LR desejado:

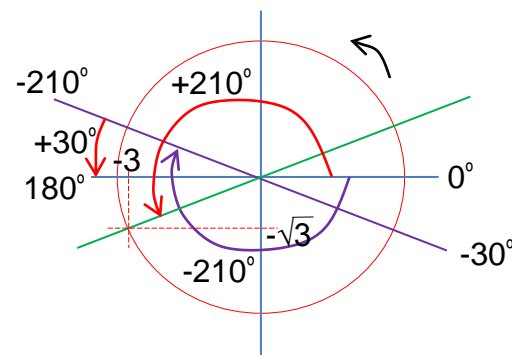
$$-\angle P' = 120^\circ + 90^\circ \Rightarrow \angle P' = -210^\circ$$

Método da Bissetriz



Condição de Ângulo para o pólo **P'**:

$$\begin{aligned} \angle \frac{4}{s(s+2)} \bigg|_{s=(-2+j2\sqrt{3})} &= \angle \left[\frac{4}{(-2+j2\sqrt{3})(-2+j2\sqrt{3}+2)} \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \angle \left[\frac{4}{(-12-j4\sqrt{3})} \right] = \angle \left[\frac{1}{(-3-j\sqrt{3})} \right] = 0^\circ - \text{tg}^{-1} \left(\frac{-\sqrt{3}}{-3} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \angle \frac{4}{s(s+2)} \bigg|_{s=(-2+j2\sqrt{3})} = -210^\circ \end{aligned}$$



Para **P'** pertencer ao LR o Controlador em Avanço de Fase deve contribuir com $\alpha = +30^\circ$.

- Zeros possuem $\varphi > 0^\circ$

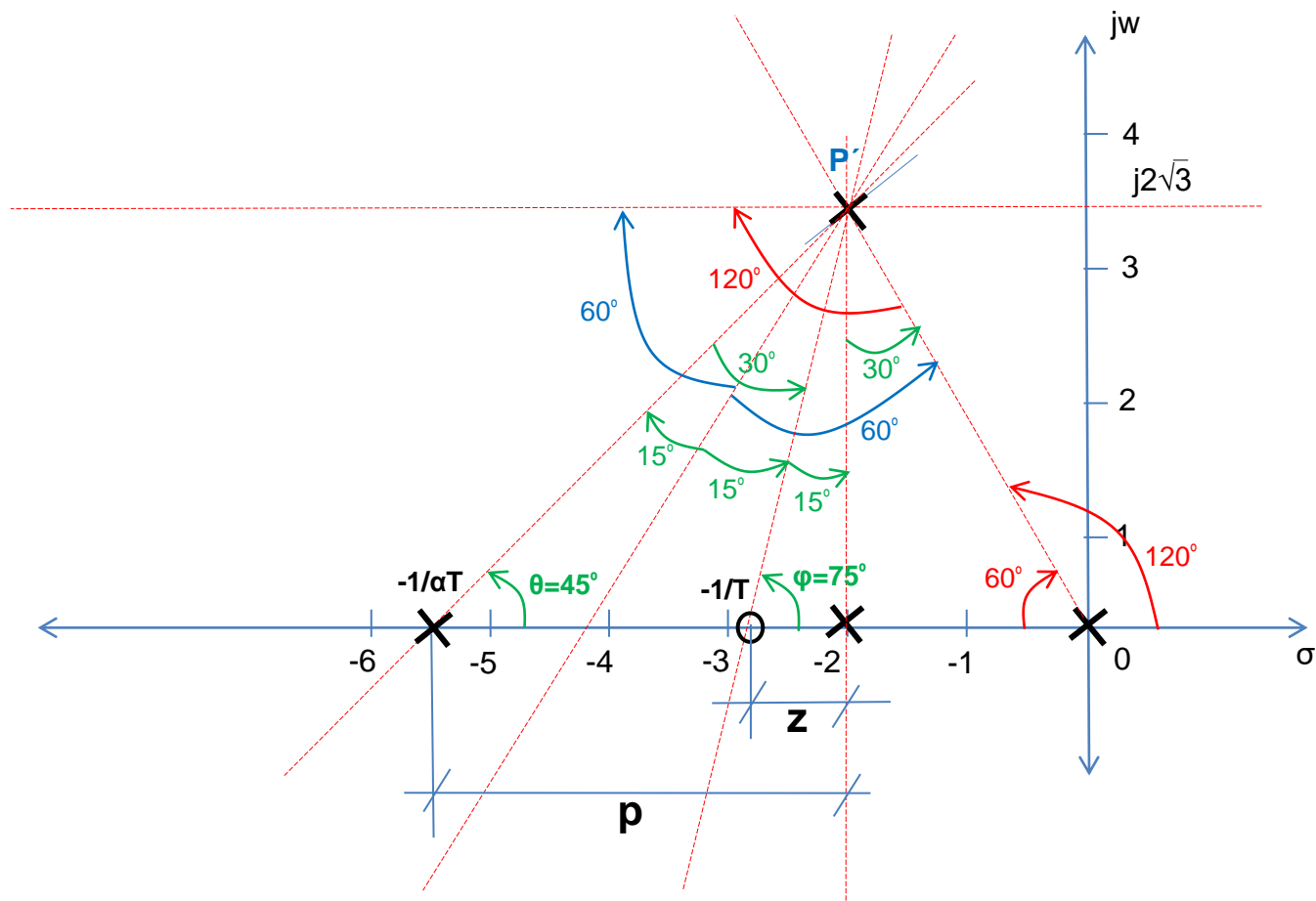
- Pólos possuem $\theta < 0^\circ$

$$(\varphi - \theta) = +30^\circ$$

Exemplo 4.7.1

Solução

Método da Bissetriz



Cálculo do Zero:

$$\operatorname{tg}(75^\circ) = \frac{2\sqrt{3}}{z} \Rightarrow z = \frac{2\sqrt{3}}{\operatorname{tg}(75^\circ)} \Rightarrow z = \frac{2\sqrt{3}}{3,732} \Rightarrow z \cong 0,93$$

$$\text{Zero: } -\frac{1}{T} = -(0,93 + 2) \Rightarrow -\frac{1}{T} = -2,93$$

Cálculo do Pólo:

$$\operatorname{tg}(45^\circ) = \frac{2\sqrt{3}}{p} \Rightarrow p = \frac{2\sqrt{3}}{\operatorname{tg}(45^\circ)} \Rightarrow p = \frac{2\sqrt{3}}{1} \Rightarrow p \cong 3,46$$

$$\text{Pólo: } -\frac{1}{\alpha T} = -(3,46 + 2) \Rightarrow -\frac{1}{\alpha T} = -5,46$$

Exemplo 4.7.1

Solução

4 – Supor que a Função de Transferência do controlador por Avanço de Fase seja dada por:

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{(Ts + 1)}{(\alpha Ts + 1)} = K_c \frac{(s + \frac{1}{T})}{(s + \frac{1}{\alpha T})} \quad ; \quad (0 < \alpha < 1)$$

Onde α e T são determinados com base na deficiência angular e K_c é determinado a partir do ganho de malha aberta.

5 – Aplicando o **Método da Bissetriz** determine as posições do pólo $s = -1/\alpha T$ e do zero $s = -1/T$ do controlador de modo que o mesmo contribua com o ângulo φ necessário.

$$G_c(s) = K_c \frac{(s + 2,93)}{(s + 5,46)} \quad ; \quad (0 < \alpha < 1)$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2,93} \Rightarrow T = 0,34$$

$$\frac{1}{\alpha T} = 5,46 \Rightarrow \frac{1}{\alpha(0,34)} = 5,46 \Rightarrow \alpha = 0,54$$

Exemplo 4.7.1

Solução

6 – Determine o ganho **K** de malha aberta do sistema compensado pela **condição de módulo**.

$$G_c(s)G(s) = \left[K_c \frac{(s + 2,93)}{(s + 5,46)} \right] \left[\frac{4}{s(s + 2)} \right] \Rightarrow G_c(s)G(s) = \left[\frac{4K_c(s + 2,93)}{(s + 5,46)s(s + 2)} \right]$$

Para a condição de módulo:

$$|G_c(s)G(s)|_{s=(-2+j2\sqrt{3})} = 1 \Rightarrow \left| \frac{4K_c(s + 2,93)}{(s + 5,46)s(s + 2)} \right|_{s=(-2+j2\sqrt{3})} = 1 \Rightarrow K_c = 4,68$$

O Controlador em Avanço de Fase será dado por:

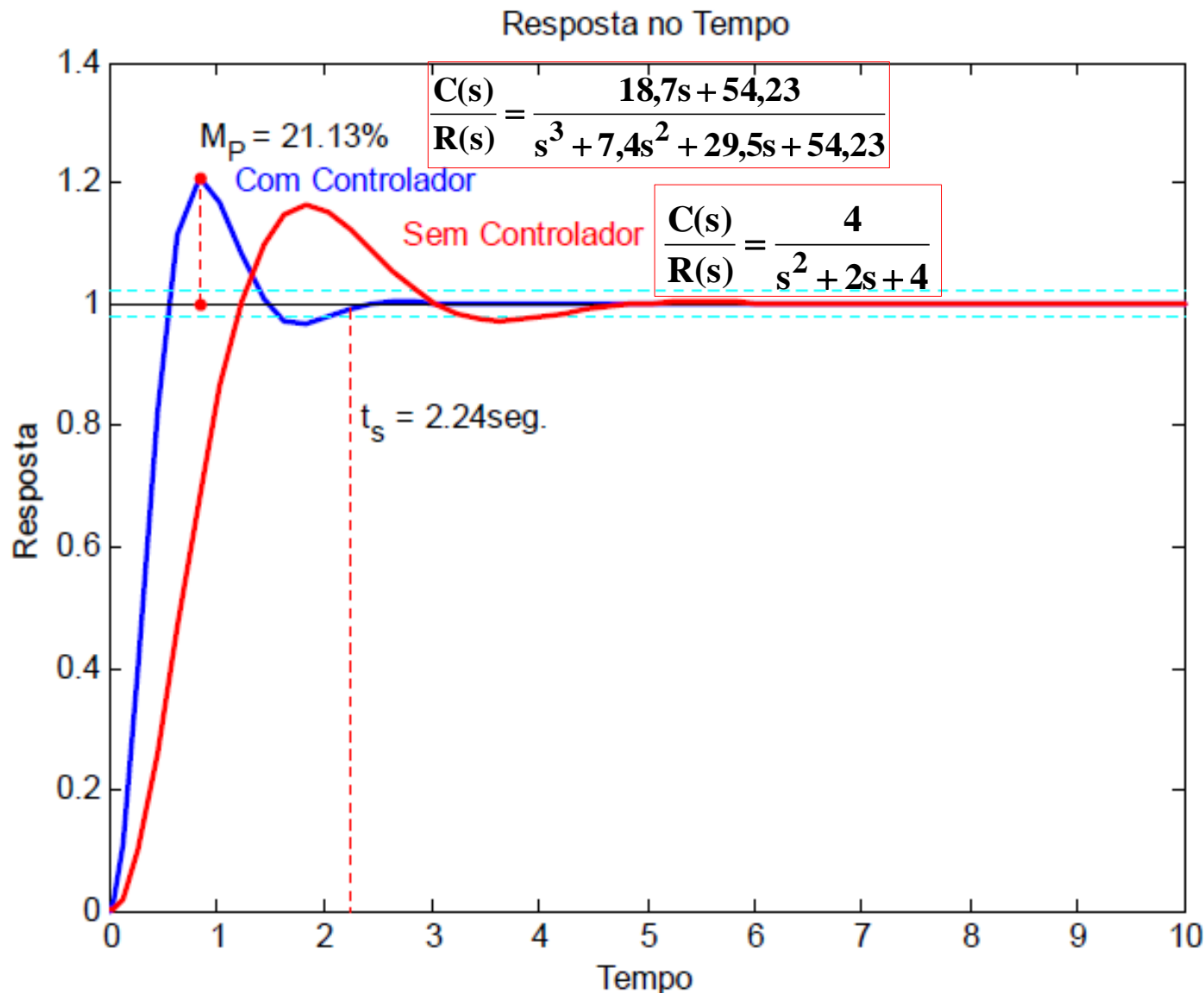
$$G_c(s) = 4,68 \frac{(s + 2,93)}{(s + 5,46)}$$

Deve-se notar que o K_v assume um valor $K_v = 5 \text{ s}^{-1}$ aplicando o controlador $G_c(s)$ projetado. Sem o controlador $K_v = 2 \text{ s}^{-1}$, daí a aplicação deste controlador implica na redução do erro na resposta à entrada Rampa Unitária, pois $e_{ss} = 1/K_v$.

Para uma entrada Degrau Unitário a resposta do sistema fica mais rápida pelo fato de w_n aumentar de $w_n = 2 \text{ rd/s}$ para $w_n = 4 \text{ rd/s}$ ($c(t) = 1 - e^{-(\xi w_n)t} \cdot \text{sen}(\dots)$).

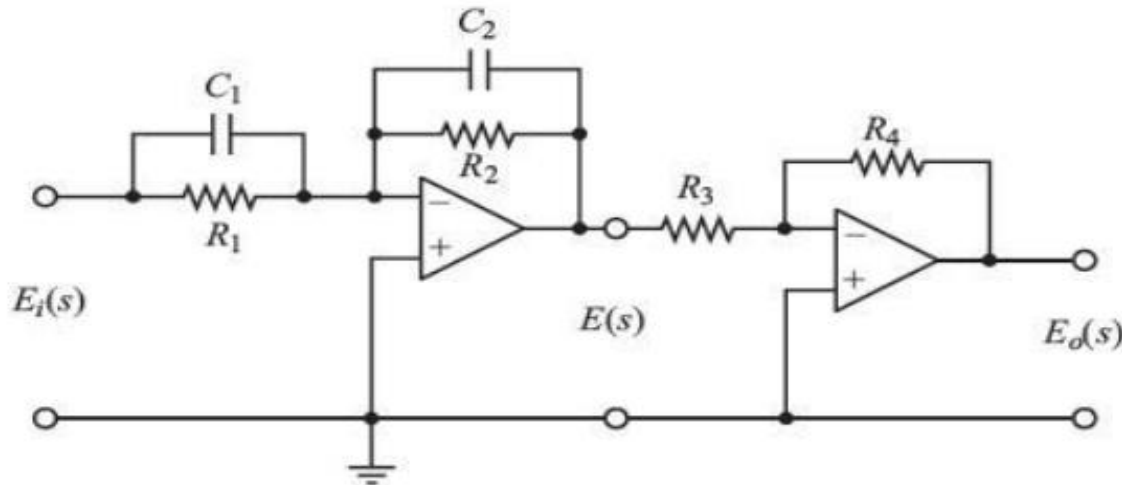
Exemplo 4.7.1

O controlador foi inserido na malha de controle do sistema e após a determinação da Função de Transferência em malha fechada aplicou-se uma entrada Degrau Unitária. A curva de resposta é apresentada a seguir.



Exemplo 4.7.1

Um circuito com amplificadores operacionais pode ser construído para este controlador em avanço de fase considerando que:

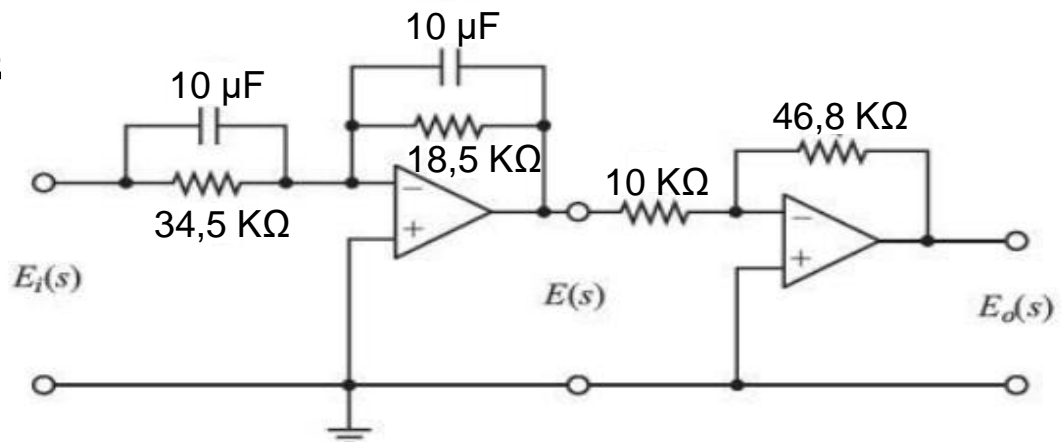


$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} \frac{(R_1 C_1 s + 1)}{(R_2 C_2 s + 1)}$$

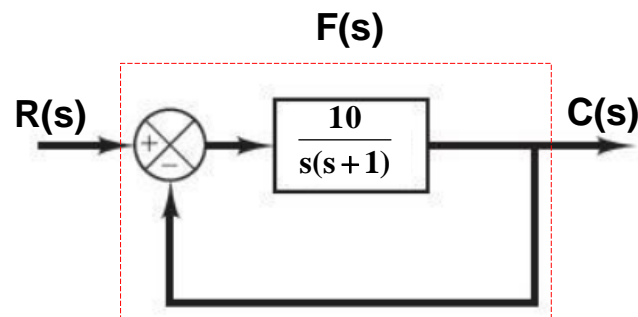
Utilizando $C_1 = C_2 = 10 \mu\text{F}$ e $R_3 = 10 \text{ K}\Omega$ e $G_c(s) = 4,68 \frac{(s + 2,93)}{(s + 5,46)} = 2,51 \frac{(0,345s + 1)}{(0,185s + 1)}$:

$$\frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} = 2,51 \quad ; \quad R_1 C_1 = 0,345 \Rightarrow R_1 = 34,5 \text{ K}\Omega \quad \text{e} \quad R_2 C_2 = 0,185 \Rightarrow R_2 = 18,5 \text{ K}\Omega$$

$$\text{E} \quad \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} = 2,51 \Rightarrow R_4 = 46,8 \text{ K}\Omega$$



Exemplo 4.7.2 Considere o sistema mostrado a seguir.



$$G(s)H(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

Lugar das
Raízes de
 $G(s)H(s)$

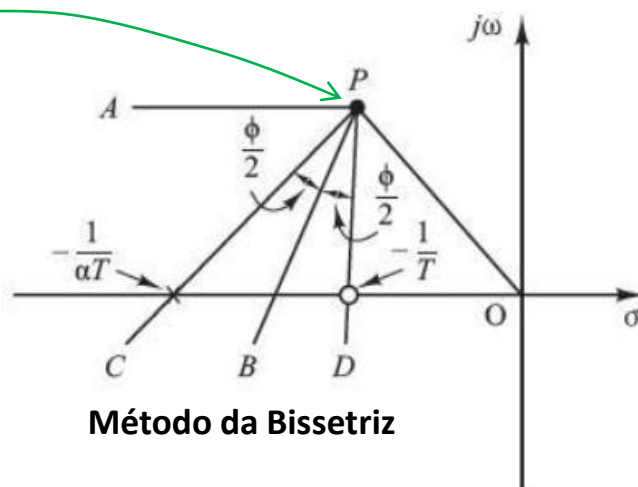
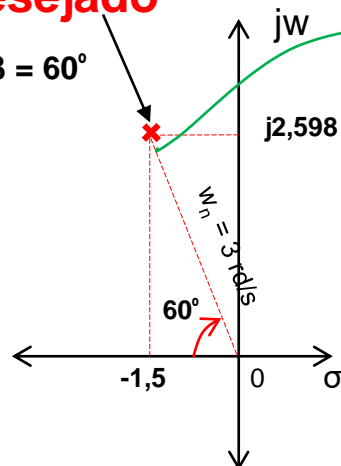
Projetar um controlador em série com a Planta para que o Coeficiente de Amortecimento seja $\xi = 0,5$ e a Frequência Natural não Amortecida seja $w_n = 3 \text{ rd/s}$.

$$F(s) = \frac{10}{s(s+1)} \Rightarrow F(s) = \frac{10}{s^2 + s + 10} \Rightarrow \xi = 0,16 \text{ e } w_n = \sqrt{10} \text{ rd/s} \cong 3,16 \text{ rd/s}$$

Equação característica: $s^2 + s + 10 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -0,5 \pm j3,12$

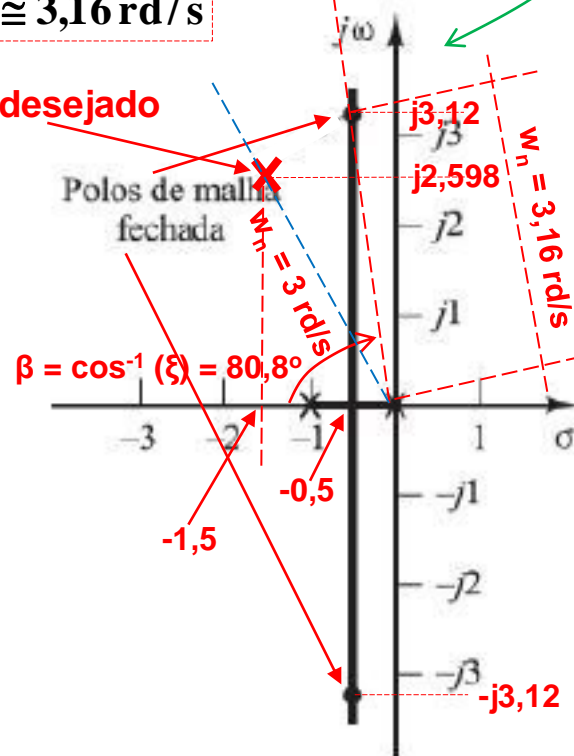
Pólo desejado

$$\xi = 0,5 \rightarrow \beta = 60^\circ$$



Pólos atuais:

Pólo desejado



Exemplo 4.7.2

Solução

Determinação da contribuição angular do controlador em avanço de fase:

$$\xi = 0,5 \rightarrow \beta = 60^\circ$$

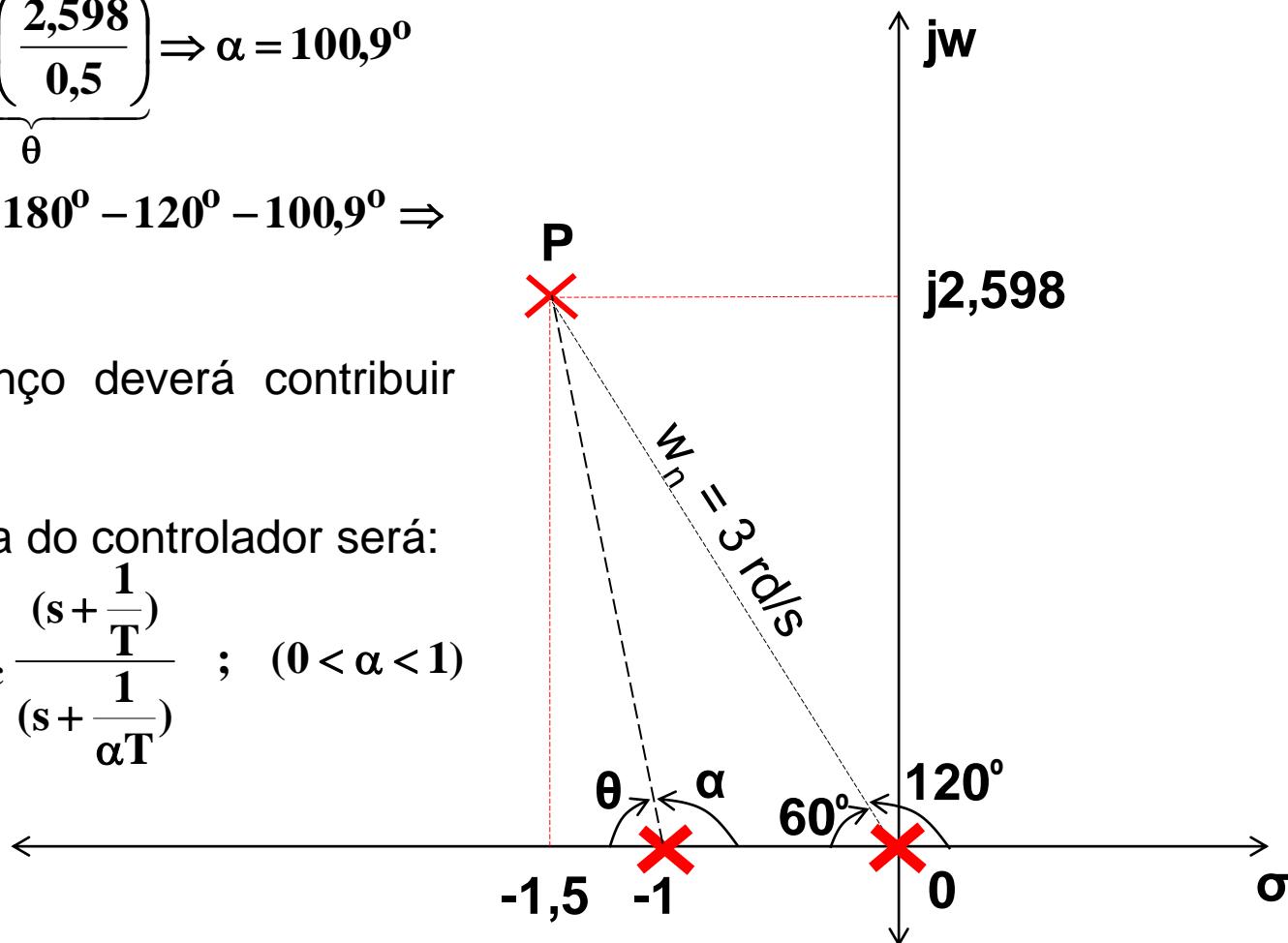
$$\alpha = 180^\circ - \theta = 180^\circ - \underbrace{\tan^{-1}\left(\frac{2,598}{0,5}\right)}_{\theta} \Rightarrow \alpha = 100,9^\circ$$

$$\varphi = 180^\circ - 120^\circ - \alpha \Rightarrow \varphi = 180^\circ - 120^\circ - 100,9^\circ \Rightarrow \varphi = -40,9^\circ$$

O controlador em avanço deverá contribuir com $\varphi = 40,9^\circ$.

A função de transferência do controlador será:

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{(Ts + 1)}{(\alpha Ts + 1)} = K_c \frac{(s + \frac{1}{T})}{(s + \frac{1}{\alpha T})} ; \quad (0 < \alpha < 1)$$



Solução

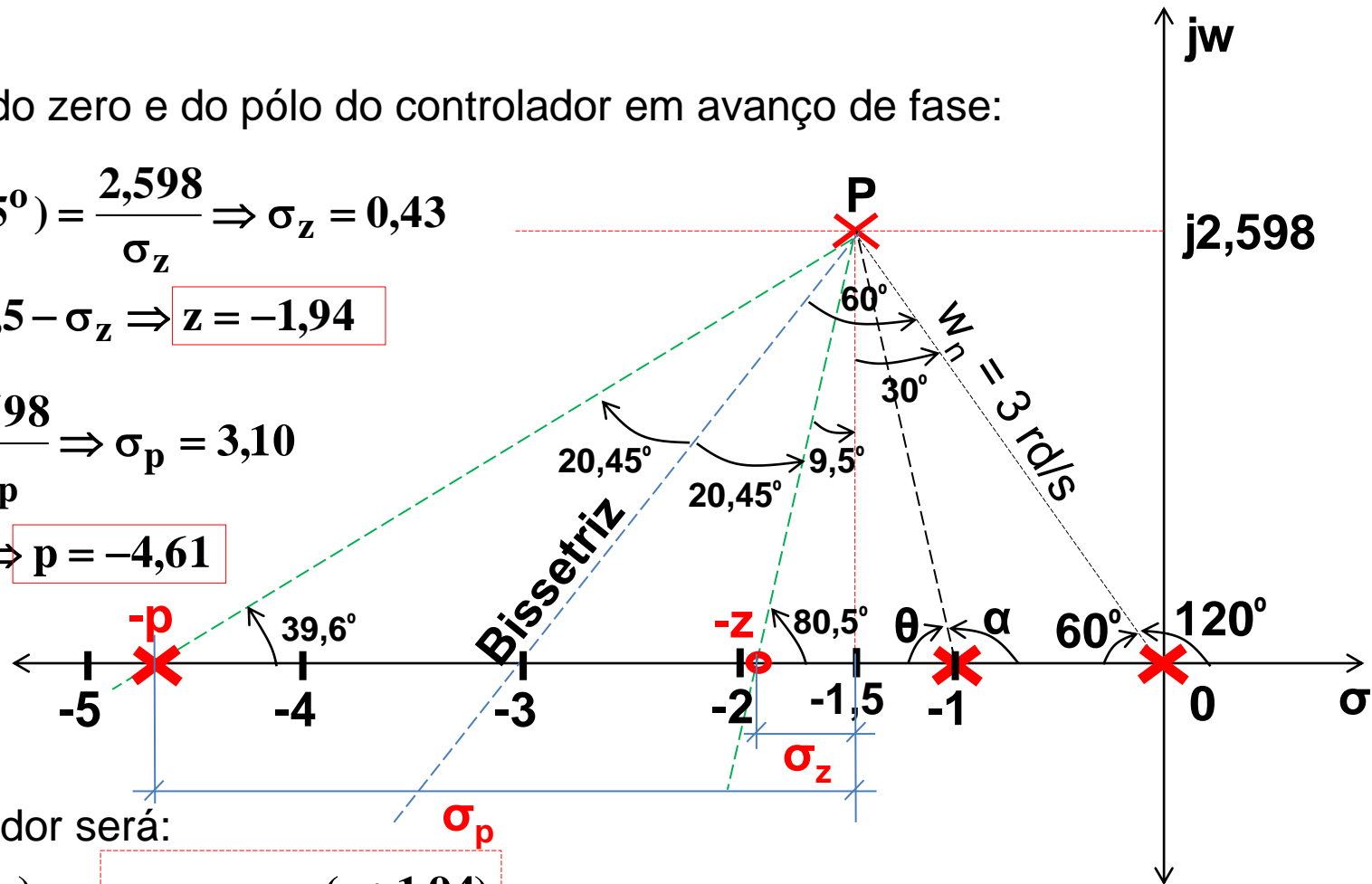
ZERO: $\operatorname{tg}(80,5^\circ) = \frac{2,598}{\sigma_z} \Rightarrow \sigma_z = 0,43$

$$z = -1,5 - \sigma_z \Rightarrow z = -1,94$$

PÓLO:

$$\text{tg}(39,6^\circ) = \frac{2,598}{\sigma_p} \Rightarrow \sigma_p = 3,10$$

$$p = -1,5 - \sigma_p \Rightarrow p = -4,61$$



Então o controlador será:

$$\mathbf{G}_c(s) = \mathbf{K}_c \frac{(s + \mathbf{z})}{(s + \mathbf{p})} \Rightarrow \mathbf{G}_c(s) = \mathbf{K}_c \frac{(s + \mathbf{1,94})}{(s + \mathbf{4,61})}$$

Condição de módulo determina-se K_c :

$$|G_c(s)G(s)|_{s=-1,5+j2,598} = 1 \Rightarrow K_c \frac{(s+1,94)}{(s+4,61)} \frac{10}{s(s+1)} \Big|_{s=-1,5+j2,598} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_c = 1,23$$

Exemplo 4.7.2

Solução

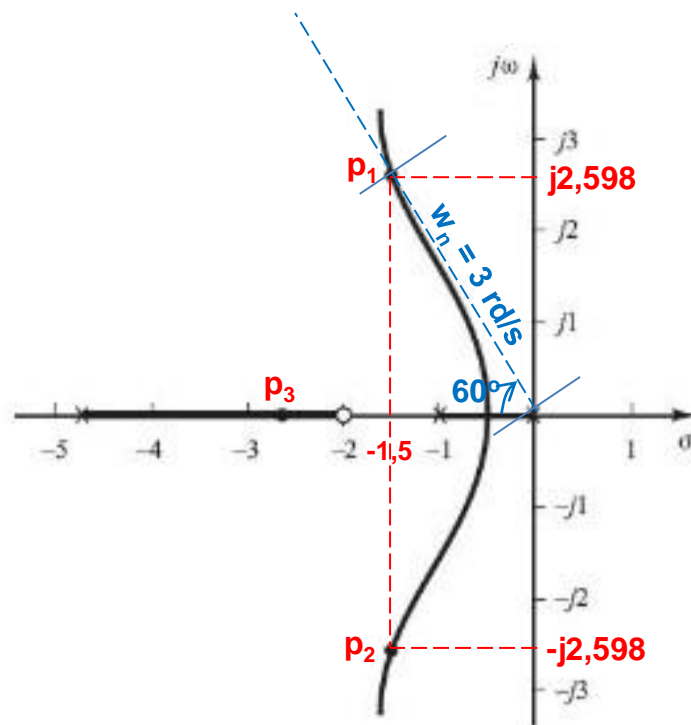
Determinação da função de transferência do controlador:

$$G_c(s) = K_c \frac{(s+z)}{(s+p)} \Rightarrow G_c(s) = 1,23 \frac{(s+1,94)}{(s+4,61)}$$

A nova $G_c(s)G(s)H(s)$:

$$G_c(s)G(s)H(s) = 1,23 \frac{(s+1,94)}{(s+4,61)} \frac{10}{s(s+1)} \Rightarrow G_c(s)G(s)H(s) = \frac{12,3(s+1,94)}{s(s+4,61)(s+1)}$$

Gráfico do lugar das raízes do sistema projetado.

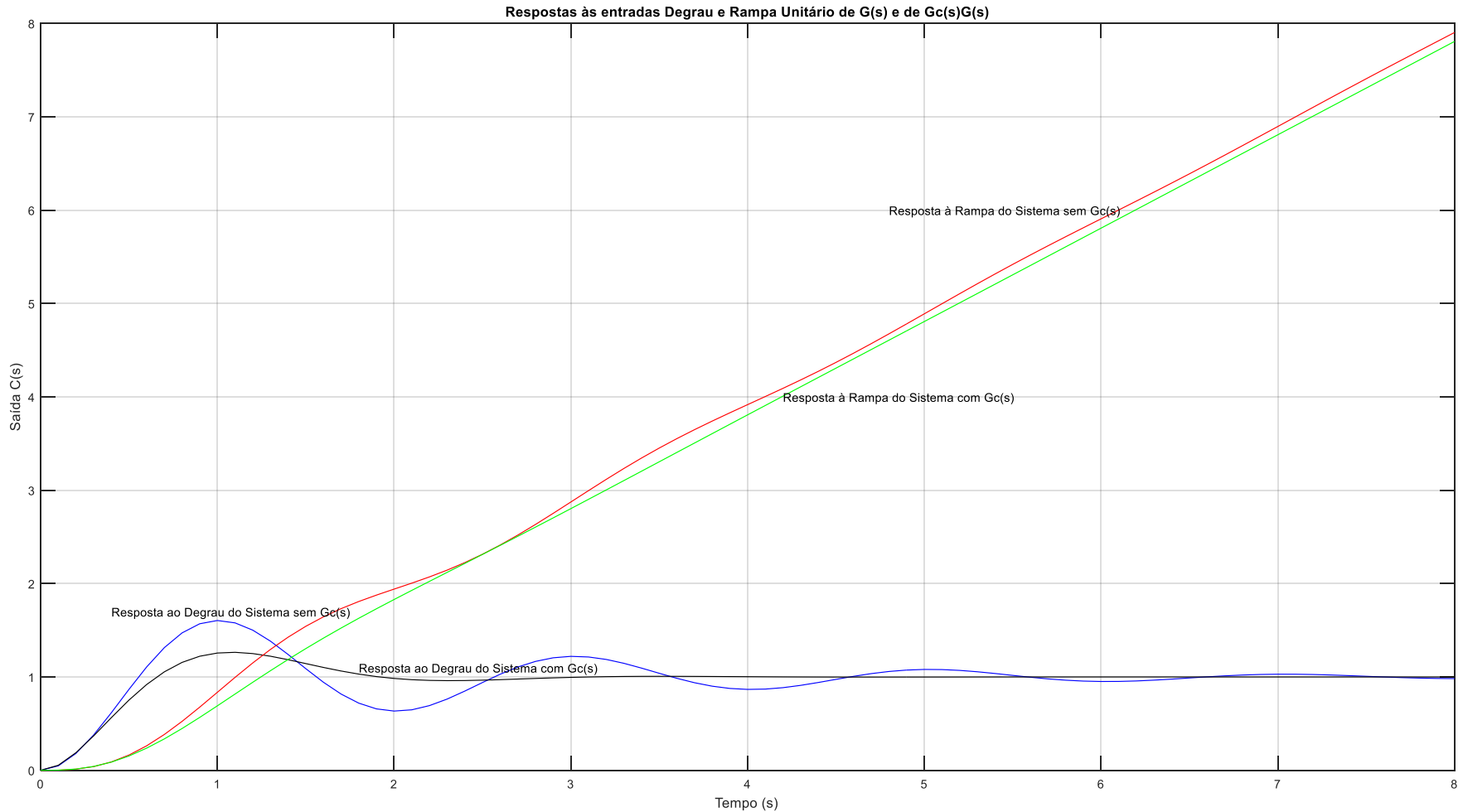


Exemplo 4.7.2

Solução

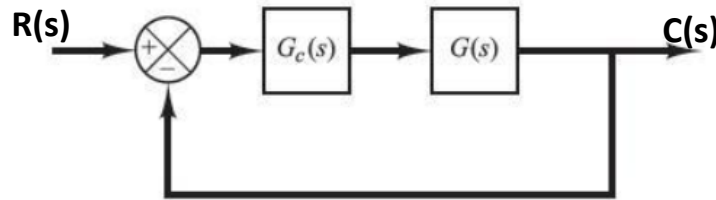
A função de transferência em malha fechada com o controlador será:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(2,644s + 5,138)}{(0,2152s^3 + 1,2152s^2 + 3,644s + 5,138)}$$



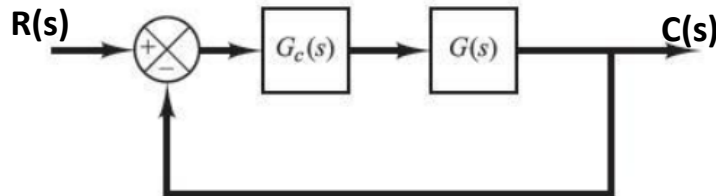
4.8. Exercícios

4.8.1 Considere o sistema abaixo com $G(s) = \frac{5}{s(0,5s + 1)}$.



Projete o controlador $G_c(s)$ em avanço de fase de modo que os pólos dominantes em mlaha fechada se localizem em $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$.

4.8.2 Considere o sistema abaixo com $G(s) = \frac{1}{s^2}$.



Projete o controlador $G_c(s)$ em avanço de fase de modo que os pólos dominantes em mlaha fechada se localizem em $s = -1 \pm j1$.