10) ELT 410 1ª PROVA

$\underset{\downarrow h}{y}(t) = \underset{\downarrow \delta}{x(t)}$

1) a) A relação entrada-saída de um sistema é dada por

$y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)}\,x(\tau-1)\,d\tau$. Obtenha a resposta ao impulso do sistema e explique se o sistema é causal e estável.

• Dada a relação $y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)}\,x(\tau-1)\,d\tau$, para $x(t)=\delta(t)$,

têm-se $\underset{\downarrow}{h(t)}=\int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)}\,\delta(\tau-1)\,d\tau$, seja $f(\tau)=e^{-2(t-\tau)}$,

resposta ao impulso

então $f(\tau)\,\delta(\tau-1)=f(1)\,\delta(\tau-1)$

• $f(1)=e^{-2(t-1)}$, voltando a integral temos:

• $h(t)=\int_{-\infty}^{t} \underbrace{e^{-2(t-1)}}_{f(1)}\,\delta(\tau-1)\,d\tau = e^{-2(t-1)}\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau-1)\,d\tau$, fazendo

$\therefore \tau^* = \tau - 1 \Rightarrow d\tau^* = d\tau \Rightarrow \begin{cases} \tau = -\infty \\ \tau = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau^* = -\infty \\ \tau^* = t-1 \end{cases}$

$\therefore h(t) = e^{-2(t-1)} \int_{-\infty}^{t-1} \delta(\tau^*)\, d\tau^*$, mas por definição sabemos que $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau^*)\, d\tau^*$

ou seja $u(t-1) = \int_{-\infty}^{t-1} \delta(\tau^*)\, d\tau^*$

$\therefore h(t) = \boxed{e^{-2(t-1)} u(t-1)}$ // . como $h(t) = 0$ para $t < 1$, $h(t) = 0$ para $t < 0$ também logo é causal.

. Seja $|x(t)| < B$, $\forall t$ uma entrada genérica, então:

. $|y(t)| = |h(t) * x(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau)\, d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|\, d\tau$

. Se $|x(t)| < B \Rightarrow |x(t-\tau)| < B$ também.

. $|y(t)| \leq B \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau$. Vamos calcular $\int_{\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau$ e mostrar que converge

deve dar um número finito

sempre positivo

. $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-2(\tau-1)} u(\tau-1)| = \int_{1}^{\infty} e^{-2(\tau-1)}\, d\tau$

. $= \left[-\frac{1}{2} e^{-2(\tau-1)} \right]_1^{\infty} = \frac{1}{2}\left(e^{-2(1-1)} - \cancel{e}^{-2(\infty-1)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\overset{1}{0}} - \cancel{e}^{\overset{0}{-\infty}}\right) = \frac{1}{2}$

$\therefore |y(t)| \leq \frac{B}{2}$, logo o sistema é estável

---

b) A relação entrada-saída de um sistema é dado por:

$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)} x(\tau-1)d\tau$. Obtenha a resposta do sistema ao impulso e explique se o sistema é causal ou estável:

$\therefore h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)} \delta(\tau-1)d\tau = e^{-2(t-1)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-1)d\tau}_{1} = \boxed{e^{-2(t-1)}}$ //

. Observa-se que para $t<0$, $h(t) \neq 0$, logo o sistema é não-causal.

. $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(\tau-1)}d\tau = \left[-\frac{1}{2}e^{-2(\tau-1)}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2}(e^{\overset{\to\infty}{\cancel{0}}} - e^{\overset{\to\infty}{\infty}}) = \infty$!

. Como $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau$ diverge, o sistema é instável.

---

2) Verdadeiro ou falso.

a) Se $f(t)$ é um sinal ímpar então $-f(-t)$ é um sinal par.

. Falso. De fato,

. $f(t) = \frac{f(t)-f(-t)}{2}$ (definição de sinal ímpar)

. $-f(-t) = -\frac{[f(-t)-f(t)]}{2} = \frac{f(t)-f(-t)}{2} = f(t)$ que é ímpar logo $-f(-t)$ é ímpar.

. Contra-exemplo: $f(t) = \text{sen}(t) \Rightarrow -f(-t) = \text{sen}(t)$

---

b) Um sistema invariante no tempo é também linear.

. Falso. Contra-exemplo: Toda saída do tipo $y(t) = K + x(t)$, $\forall K \neq 0$:

I) É invariante no tempo, de fato:

$x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = K + x_1(t) \Rightarrow y_1(t-t_0) = K + x_1(t-t_0)$

$x_2(t) = x_1(t-t_0) \Rightarrow y_2(t) = K + x_2(t) \Rightarrow y_2(t) = K + x_1(t-t_0)$

. Como $y_2(t) = y_1(t-t_0)$, o sistema é invariante no tempo

II) É não-linear, de fato:

. $x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = K + x_1(t)$

. $x_2(t) \Rightarrow y_2(t) = K + x_2(t)$

. $x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \Rightarrow y_3(t) = K + x_3(t) = K + a x_1(t) + b x_2(t)$

. Note que $y_3(t)$ só seria igual a $a y_1(t) + b y_2(t)$, se K fosse igual a zero, logo o sistema é não-linear.

---

c) O sinal $x(t) = \cos(\sqrt{2\pi} \cdot t) + \operatorname{sen}(2\sqrt{2\pi} \cdot t)$ é periódico.

. Verdadeiro. Seja $f(t) = \cos(\sqrt{2\pi} \cdot t)$ e $g(t) = \operatorname{sen}(2\sqrt{2\pi} \cdot t)$,

. Para f: $\omega_0 = \sqrt{2\pi} \Rightarrow T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{2\pi}$, logo f é periódico

. Para g: $\omega_1 = 2\sqrt{2\pi} \Rightarrow T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1} = \dfrac{2\pi}{2\sqrt{2\pi}} = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2} \Rightarrow T_1 = \dfrac{T_0}{2}$, logo g é periódico

$\hookrightarrow \omega_1 = 2\omega_0$

. múltiplos $(T_0) = \{0, \sqrt{2\pi}, 2\sqrt{2\pi}, 3\sqrt{2\pi}, 4\sqrt{2\pi} \ldots\}$

. múltiplos $(T_1) = \{0, \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}, \sqrt{2\pi}, \dfrac{3}{2}\sqrt{2\pi}, 2\sqrt{2\pi} \ldots\}$

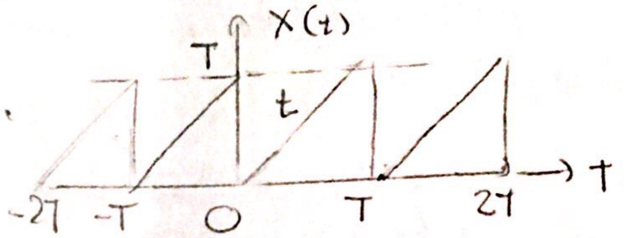
$\therefore$ m.m.c $(T_0, T_1) = \boxed{\sqrt{2\pi}}$

---

d) Sinais periódicos são sempre sinais de energia finita.

. Falso. Todo sinal periódico é um sinal de potência, ou seja possui $P_\infty = N < \infty$ e $E_\infty = \infty$ (respectivamente, potência finita e energia infinita.

. Contra exemplo: Dente de Serra



. $P_\infty = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T |x(t)|^2 dt = \dfrac{1}{T} \int_0^T t^2 dt$

. $P_\infty = \dfrac{1}{T} \left[\dfrac{t^3}{3} \right]_0^T = \dfrac{1}{T} \left[\dfrac{T^3}{3} - 0 \right] = \boxed{\dfrac{T^2}{3}}$

. $E_\infty = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|x(t)|^2}_{t^2} dt = \dfrac{T^3}{3} + \dfrac{T^3}{3} + \dfrac{T^3}{3} + \ldots = \boxed{\infty}$ (possui energia infinita)

3) Considere as respostas ao impulso de dois sistemas, H_1 e H_2: $h_1[n] = (0,9)^n u[n] - 0,5\,(0,9)^{n-1} u[n-1]$ e $h_2[n] = (0,5)^n u[n] - 0,9\,(0,5)^{n-1} u[n-1]$, obtenha $h_1[n] * h_2[n]$

. $\delta[n] = u[n] - u[n-1] \Rightarrow u[n-1] = u[n] - \delta[n]$

. $h_1[n] = (0,9)^n u[n] - \frac{0,5}{0,9}(0,9)^n [u[n] - \delta[n])$; $\frac{0,5}{0,9} = \frac{5}{9}$

. $h_1[n] = \left[(0,9)^n - \frac{5}{9}\cdot(0,9)^n\right] u[n] + \frac{5}{9}\underbrace{(0,9)^n \delta[n-0]}_{0,9^0\cdot\delta[n]}$

. $h_1[n] = \frac{4}{9}(0,9)^n u[n] + \frac{5}{9}\delta[n]$

. $h_2[n] = (0,5)^n u[n] - \frac{0,9}{0,5}(0,5)^n (u[n] - \delta[n])$

. $h_2[n] = \left[(0,5)^n - \frac{9}{5}(0,5)^n\right] u[n] + \frac{9}{5}\underbrace{(0,5)^n \cdot \delta[n-0]}_{0,5^0\delta[n]}$

. $h_2[n] = -\frac{4}{5}(0,5)^n u[n] + \frac{9}{5}\delta[n]$ $\sum_{k=0}^{n} (0,9)^k (0,5)^{n-k}$

. Cálculo de $h_1[n] * h_2[n]$:

. $\left(\frac{4}{9}(0,9)^n u[n] + \frac{5}{9}\delta[n]\right) * \left(-\frac{4}{5}(0,5)^n u[n] + \frac{9}{5}\delta[n]\right)$

. $-\frac{16}{45}\{(0,9)^n u[n]\} * \{(0,5)^n u[n]\} + \frac{4}{5}\{(0,9)^n u[n]\} * \{\delta[n]\}$ $\delta[n+1]$

$-\frac{4}{9}\{\delta[n]\} * \{(0,5)^n u[n]\} + \{\delta[n] * \delta[n]\}$ $\delta(2n-?)$

. $-\frac{16}{45}\left\{\frac{(0,9)^{n+1} - (0,5)^{n+1}}{0,9 - 0,5}\right\} u[n] + \frac{4}{5}(0,9)^n u[n] - \frac{4}{9}(0,5)^n u[n] + \delta[n]$

. $\left(-\frac{16}{45}\right)\left(\frac{10}{4}\right)\left\{\frac{9}{10}(0,9)^n - \frac{5}{10}(0,5)^n\right\} u[n] + \frac{4}{5}(0,9)^n u[n] - \frac{4}{9}(0,5)^n u[n] + \delta[n]$

$$\left\{ \underbrace{-\frac{4}{45}(9)}_{-4/5}(0,9)^n + \underbrace{\frac{4}{45}(5)}_{+4/9}(0,5)^n \right\} u[n] + \frac{4}{5}(0,9)^n u[n] - \frac{4}{9}(0,5)^n u[n] + \delta[n]$$

$$\therefore \overbrace{\left(-\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\right)}^{0}(0,9)^n u[n] + \overbrace{\left(\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\right)}^{0}(0,5)^n u[n] + \delta[n] = \boxed{\delta[n]}$$