ELT330 – Sistemas de Controle I

Prof. Tarcísio Pizziolo

Aula 15 – Especificações de Resposta Transitória

1. Especificações de Resposta Transitória para Sistemas de 2ª Ordem Subamortecidos

Sistemas de controle de 2ª ordem subamortecidos são sistemas que possuem o coeficiente de amortecimento **$0 < \xi < 1$**.

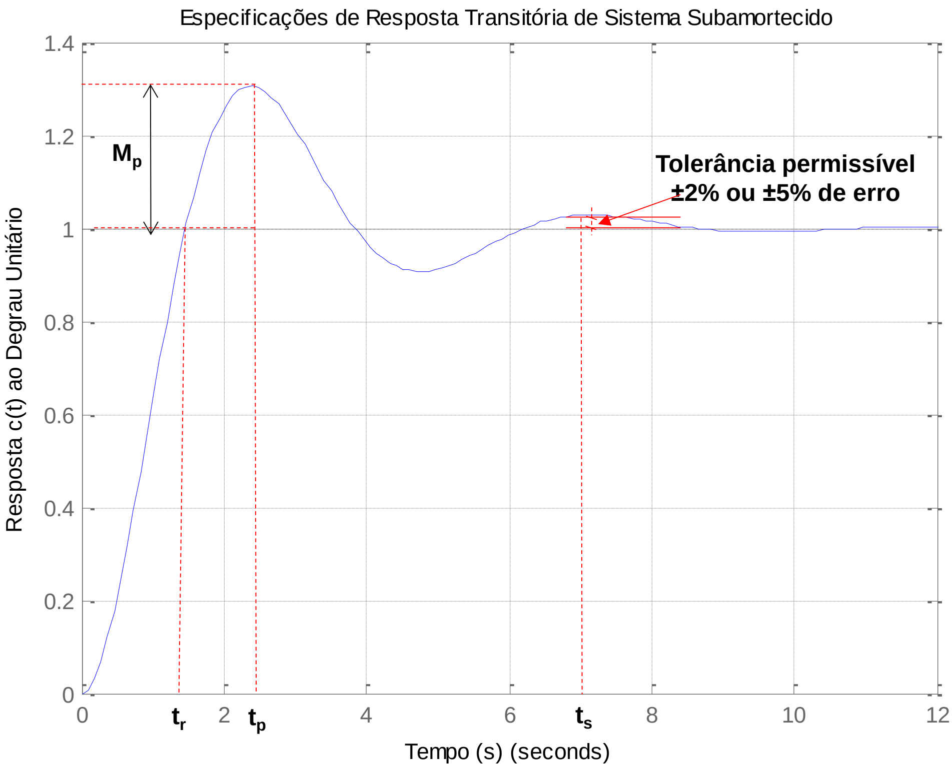
As características de desempenho desejadas desses sistemas podem ser especificadas em termos de grandezas no domínio do tempo.

Frequentemente as características de desempenho de um sistema de controle de 2ª ordem subamortecidos são especificadas em termos da resposta transitória para uma entrada em Degrau Unitário, pois esta entrada é fácil de ser gerada e é suficientemente severa.

As seguintes informações são usadas para especificar a resposta de sistemas de 2ª ordem subamortecidos no domínio do tempo:

1) Tempo de Subida (rise time) = t_r
2) Instante de Pico = t_p
3) Sobressinal Máximo = M_p
4) Tempo de Acomodação = t_s

O gráfico a seguir apresenta estas especificações.



1) Tempo de subida (tr): é o tempo necessário para a resposta passar de 0% a 100%.
2) Instante de pico (tp): é o tempo necessário para a resposta alcançar o primeiro pico do sobressinal.

3) Sobressinal Máximo (M_p) (em valor percentual): é o valor de pico da curva de resposta medido a partir do valor unitário.
Se o valor final do regime estacionário de resposta difere da unidade, então normalmente se usa o máximo sobressinal percentual:

$$M_p(\%) = \frac{c(t = t_p) - c(t \to \infty)}{c(t \to \infty)} \times 100\%$$

O valor do sobressinal máximo (percentual) fornece indicações da estabilidade relativa do sistema.
4) Tempo de estabilização (acomodação) (ts): é o tempo necessário para a curva de resposta alcançar e permanecer dentro de uma faixa em torno do valor final (normalmente ± 2% ou ± 5%).
O tempo de estabilização está relacionado com a maior constante de tempo do sistema de controle.

A escolha de que percentagem usar no critério de erro, pode ser determinada a partir dos objetivos do projeto do sistema em questão.

Estas especificações são importantes, pois os sistemas de controle atuam no domínio do tempo, devendo apresentar respostas temporais satisfatórias.

É desejável que a resposta transitória seja suficientemente rápida e suficientemente amortecida.

Para um sistema de segunda ordem a resposta deve estar na faixa de $0{,}4 \leq \xi \leq 0{,}8$.

Valores menores que $\xi \leq 0{,}4$ resultam em sobressinal excessivo. Valores maiores que $\xi \geq 0{,}8$ o sistema responde de forma lenta.

2. Determinação dos Valores das Especificações para Resposta Transitória para Sistemas de 2ª Ordem Subamorteciedo para Entrada Degrau Unitário

Seja a função de transferência de um sistema de 2ª ordem, devidamente parametrizada, na forma,

$$G(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

Para se encontrar a saída c(t) quando se aplica uma entrada r(t) deve-se fazer,

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2} \Rightarrow C(s) = \frac{w_n^2}{(s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2)} R(s)$$

Dada que a entrada é um degrau unitário, sabe-se que R(s) = 1/s, então tem-se,

$$C(s) = \frac{w_n^2}{(s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2)} \frac{1}{s} \Rightarrow \boxed{C(s) = \frac{w_n^2}{s(s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2)}}$$

Para se determinar a resposta c(t) ao se aplicar o degrau unitário r(t) deve-se fazer,

$$c(t) = \pounds^{-1}\left\{\frac{w_n^2}{s(s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2)}\right\}$$

Esta expressão nos fornece,

$$\boxed{\begin{array}{l} c(t) = 1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \mathrm{sen}(w_d t + \varphi) \\ \qquad \sigma = \xi w_n \;;\; w_d = w_n\sqrt{1-\xi^2} \;\text{ e }\; \varphi = tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) \end{array}}$$

2.1 Tempo de subida (tr): é o tempo necessário para a resposta passar de 0% a 100%.

Se igualarmos c(t) ao valor final, que neste caso é 1, o primeiro valor de t para o qual essa igualdade é válida é o tempo de subida de 0 a 100%.

Assim,

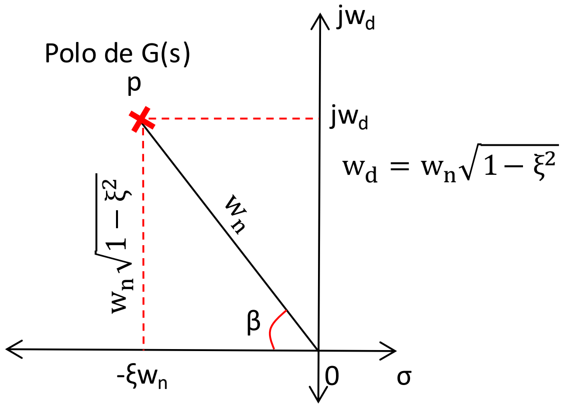
$$c(t=t_r) = 1 - \frac{e^{-\xi w_n t_r}}{\sqrt{1-\xi^2}}\text{sen}(w_d t_r + \varphi) \Rightarrow 1 = 1 - \frac{e^{-\xi w_n t_r}}{\sqrt{1-\xi^2}}\text{sen}(w_d t_r + \varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-\xi w_n t_r}}{\sqrt{1-\xi^2}}\text{sen}(w_d t_r + \varphi) = 0 \Rightarrow \text{sen}(w_d t_r + \varphi) = 0 \Rightarrow \boxed{t_r = \frac{(\pi - \beta)}{w_d}}$$

Onde $\beta = \cos^{-1}(\xi)$.

Pelo plano complexo temos,

Plano Complexo



Sendo que,

$$\beta = \text{tg}^{-1}\left[\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right]$$

2.2 Instante de pico (tp): é o tempo necessário para a resposta alcançar o primeiro pico do sobressinal.

Como o primeiro valor máximo da função c(t) ocorre em $t = t_p$, para determiná-lo basta derivarmos a função c(t) em relação a t e igualarmos a zero. Em seguida determina-se o primeiro valor de pico como sendo.

$$\left.\frac{dc(t)}{dt}\right|_{t=t_p} = \left.\frac{d\left\{1 - \frac{e^{-\xi w_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left[\cos(w_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\text{sen}(w_d t)\right]\right\}}{dt}\right|_{t=t_p} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\xi w_n \frac{e^{-\xi w_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left[\cos(w_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\text{sen}(w_d t)\right] - \frac{e^{-\xi w_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left[-w_d\,\text{sen}(w_d t) + \frac{\xi w_d}{\sqrt{1-\xi^2}}\cos(w_d t)\right]\right\}_{t=t_p} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{e^{-\xi w_n t}\xi w_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\cos(w_d t) + \frac{e^{-\xi w_n t}\xi w_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\text{sen}(w_d t) + \frac{e^{-\xi w_n t}w_d}{\sqrt{1-\xi^2}}\text{sen}(w_d t) - \frac{e^{-\xi w_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{\xi w_d}{\sqrt{1-\xi^2}}\cos(w_d t)\right\}_{t=t_p} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{e^{-\xi w_n t}\xi w_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\cos(w_d t) + \frac{e^{-\xi w_n t}\xi w_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\text{sen}(w_d t) + \frac{e^{-\xi w_n t}w_n\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1-\xi^2}}\text{sen}(w_d t) - \frac{e^{-\xi w_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{\xi w_n\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1-\xi^2}}\cos(w_d t)\right\}_{t=t_p} = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{e^{-\xi w_n t}\xi w_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\cos(w_d t) + \frac{e^{-\xi w_n t}\xi^2 w_n}{1-\xi^2}\text{sen}(w_d t) + e^{-\xi w_n t}w_n\text{sen}(w_d t) - \frac{e^{-\xi w_n t}\xi w_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\cos(w_d t)\right\}_{t=t_p} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{e^{-\xi w_n t}\xi^2 w_n}{1-\xi^2}\text{sen}(w_d t) + e^{-\xi w_n t}w_n\text{sen}(w_d t)\right\}_{t=t_p} = 0 \Rightarrow \left\{\left[\frac{e^{-\xi w_n t}\xi^2 w_n}{1-\xi^2} + e^{-\xi w_n t}w_n\right]\text{sen}(w_d t)\right\}_{t=t_p} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}(w_d t)_{t=t_p} = 0 \Rightarrow \text{sen}(w_d t_p) = 0 \Rightarrow \text{sen}(w_d t_p) = \text{sen}(K\pi) \Rightarrow w_d t_p = K\pi \Rightarrow \boxed{t_p = \frac{K\pi}{w_d}}$$

Como o sobressinal máximo é no primeiro pico façamos K = 1 e tem-se,

$$\boxed{t_p = \frac{\pi}{w_d} = \frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\xi^2}}}$$

2.3 Sobressinal Máximo (M_p) (em valor percentual): é o valor de pico da curva de resposta medido a partir do valor unitário.

Se o valor final do regime estacionário de resposta difere da unidade, então normalmente se usa o máximo sobressinal percentual como sendo,

$$M_p(\%) = \frac{c(t = t_p) - c(t \to \infty)}{c(t \to \infty)} \times 100\%$$

O valor do sobressinal máximo (percentual) fornece indicações da estabilidade relativa do sistema.

Substituindo o valor de t_p na saída c(t) obtemos o valor de pico da reposta ao degrau. Subtraindo do valor final este valor de pico, obtemos o valor do *overshoot* em função de nossos parâmetros.

Assim,

$$M_p = 1 - c(t = t_p) \Longrightarrow \boxed{M_p = e^{-\left(\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}}$$

2.4 Tempo de Acomodação (t_s):

A resposta de um sistema de 2ª ordem quando a entrada é uma função Degrau Unitário é dada pela fórmula expandida:

$$c(t) = 1 - e^{-\overbrace{\xi w_n}^{\sigma} t}\left\{\left[\cos\left(\left(\underbrace{w_n\sqrt{1-\xi^2}}_{w_d}\right)t\right)\right] + \underbrace{\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}_{\frac{\sigma}{w_d}} \operatorname{sen}\left(\left(\underbrace{w_n\sqrt{1-\xi^2}}_{w_d}\right)t\right)\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow c(t = t_p) = 1 - e^{-\sigma t}\left[\cos(w_d t_p) + \frac{\sigma}{w_d}\operatorname{sen}(w_d t_p)\right]$$

Os instantes de pico t_P ocorrem em:

$$t_P = \frac{k\pi}{w_d} \quad ; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 \dots$$

Note que:

$$\cos(w_d t_p) + \frac{\sigma}{w_d}\operatorname{sen}(w_d t_p) = \begin{cases} 1 \text{ se K for par} \\ -1 \text{ se K for ímpar} \end{cases}$$

Logo:

$$c(t_p) = 1 - e^{-\sigma t_p}$$

$$\text{ou}$$

$$c(t_p) = 1 + e^{-\sigma t_p}$$

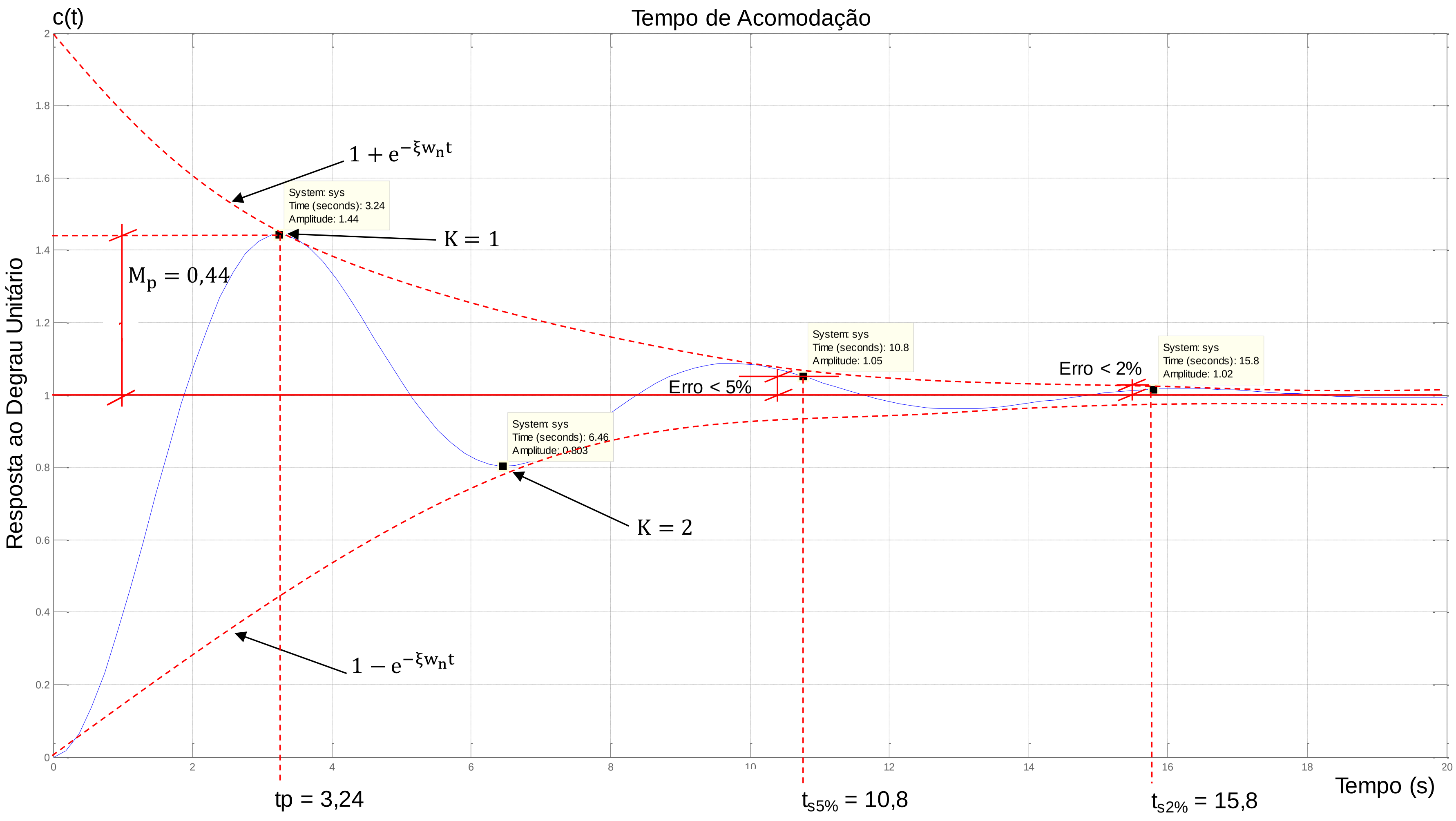
Estas funções c(t_P) são as envoltórias exponenciais da senoide.

Para determinar t_s deve-se fazer:

$$c(t_p = t_s) = 1 + e^{-\sigma t_s} = 1 + \text{Erro} \Longrightarrow e^{-\sigma t_s} = \text{Erro} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{t_s = -\frac{\ln(\text{Erro})}{\sigma}}$$

O gráfico a seguir apresenta as especificações!



Tempo de Acomodação
c(t)
Resposta ao Degrau Unitário
Tempo (s)
$1 + e^{-\xi w_n t}$
$1 - e^{-\xi w_n t}$
K = 1
K = 2
$M_p = 0,44$
Erro < 5%
Erro < 2%
tp = 3,24
$t_{s5\%}$ = 10,8
$t_{s2\%}$ = 15,8
System: sys
Time (seconds): 3.24
Amplitude: 1.44
System: sys
Time (seconds): 6.46
Amplitude: 0.803
System: sys
Time (seconds): 10.8
Amplitude: 1.05
System: sys
Time (seconds): 15.8
Amplitude: 1.02

Então, quando a diferença entre c(t) e c(t_p) ocorrer tem-se um erro na resposta do sistema. Daí pode-se concluir que,

$$1 + \text{erro} = 1 + e^{-\xi w_n t_s} \Longrightarrow e^{-\xi w_n t_s} = \text{erro} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \ln\left[e^{-\xi w_n t_s}\right] = \ln(\text{erro}) \Longrightarrow -\xi w_n t_s = \ln(\text{erro}) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow t_s = -\frac{\ln(\text{erro})}{\xi w_n}$$

As fórmulas para os tempos de acomodações para 5% e 2% do valor final são dadas respectivamente por,

$$\boxed{t_{s_{5\%}} = 3T = \frac{3}{\xi w_n}} \quad ; \quad \boxed{t_{s_{2\%}} = 4T = \frac{4}{\xi w_n}}$$

Exemplo

Dada a função de transferência de segunda ordem,

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 4s + 25}$$

Calcular:

a) o sobre sinal máximo M_p (*overshoot*).

b) o instante de pico t_p.

c) o tempo de subida t_r de 0 a 100%.

d) o tempo de acomodação t_s para 5% do valor final.

Dada função de transferência G(s) tem-se que: w_n = 5 rd/s e ξ = 0,4

a)

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Longrightarrow M_p = e^{-\frac{0{,}4\pi}{\sqrt{1-0{,}4^2}}} \Longrightarrow \boxed{M_p = 25{,}38\%}$$

b)

$$t_p = \frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\xi^2}} \Longrightarrow t_p = \frac{\pi}{5\sqrt{1-0{,}4^2}} \Longrightarrow \boxed{t_p = 0{,}685\ s}$$

c)

$$t_r = \frac{\pi-\beta}{w_d} \Longrightarrow t_r = \frac{\pi - \cos^{-1}(\xi)}{w_n\sqrt{1-\xi^2}} \Longrightarrow t_r = \frac{\pi - \cos^{-1}(0{,}4)}{5\sqrt{1-0{,}4^2}} \Longrightarrow \boxed{t_r = 0{,}43\ s}$$

d)

$$t_{s_{5\%}} = \frac{3}{\xi w_n} \Longrightarrow t_{s_{5\%}} = \frac{3}{0{,}4 \times 5} \Longrightarrow \boxed{t_{s_{5\%}} = 1{,}5\ s}$$