Exercício

Uma linha monofásica de 2 km deve ser construída utilizando-se condutores ACSR Linnet. Por motivos técnicos, a indutância total não deve exceder 4 mH. Obtenha o espaçamento máximo entre condutores. Resolva o problema utilizando equações e tabelas, e compare os resultados.

(Resposta: $1{,}1$ m)

- **Na tabela A.4, a expressão para X_d é:**

$$X_d = 0,2794 \log d$$

em que d é o que chamamos de D_m (DMG) aproximado como sendo a distância entre os centros dos cabos e aparece a função $\log$ ao invés de $\ln$. Demonstração da equivalência entre as expressões:

- **Se $\ln d = y$, então $d = e^y$**
- **Aplicando o logaritmo:**

$$\begin{aligned}\log d &= \log e^y \\ &= y \, \log e\end{aligned}$$

- **Logo:**

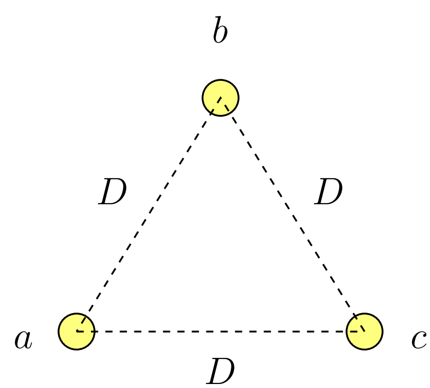
$$y = \frac{1}{\log e} \cdot \log d$$
$$= 2{,}3026 \log d = \ln d$$

- **Assim, para 60 Hz:**

$$X_d = 2{,}022 \cdot 10^{-3} \cdot f \cdot \ln d$$
$$= 2{,}022 \cdot 10^{-3} \cdot 60 \cdot (2{,}3026 \log d)$$
$$= 0{,}2794 \log d$$

5.7.6 Indutância de uma linha trifásica com espaçamento simétrico

- **Considere a linha trifásica:**



em que:

- **os três condutores têm raios iguais, portanto o mesmo RMG, igual a** D_s
- **a distância entre condutores é** D
- **não há fio neutro ou o circuito é equilibrado** $\rightarrow I_a + I_b + I_c = 0$

▶ **Fluxo concatenado com o condutor da fase** a **(há contribuições das três correntes):**

$$\begin{aligned}
\lambda_a &= 2 \cdot 10^{-7} \cdot \left(I_a \ln \frac{1}{D_s} + I_b \ln \frac{1}{D} + I_c \ln \frac{1}{D} \right) \\
&= 2 \cdot 10^{-7} \cdot \left[I_a \ln \frac{1}{D_s} + (I_b + I_c) \ln \frac{1}{D} \right] \\
&= 2 \cdot 10^{-7} \cdot \left(I_a \ln \frac{1}{D_s} - I_a \ln \frac{1}{D} \right) \qquad (\textbf{pois } I_a = -(I_b + I_c)) \\
&= 2 \cdot 10^{-7} \cdot \left(I_a \ln \frac{1}{D_s} + I_a \ln D \right) \\
&= 2 \cdot 10^{-7} \cdot I_a \ln \frac{D}{D_s} \ \textbf{Wb/m}
\end{aligned}$$

▶ **Indutância da fase** a**:**

$$L_a = \frac{\lambda_a}{I_a} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \ln \frac{D}{D_s} \ \textbf{H/m}$$

▶ **Por simetria, para as outras fases tem-se** $L_b = L_c = L_a$

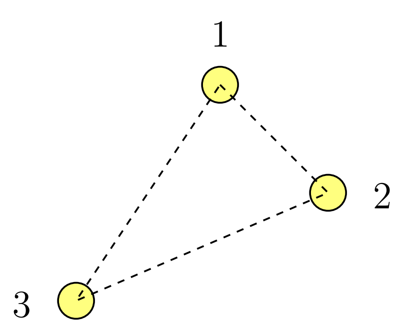
▶ **Portanto:**

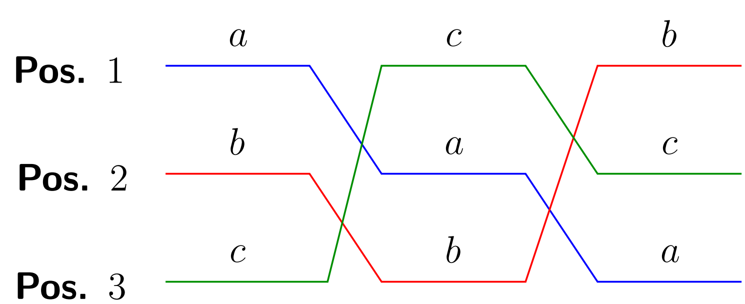
$$L_a = L_b = L_c = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \ln \frac{D}{D_s} \ \textbf{H/m}$$

5.7.7 Indutância de linhas trifásicas com espaçamento assimétrico

▶ **O fluxo concatenado e a indutância de cada fase são diferentes → circuito desequilibrado**

▶ **Equilíbrio é obtido através da transposição:**

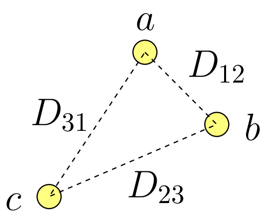




▶ **Cálculos considerando a transposição são mais simples**

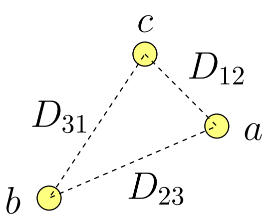
Linhas não transpostas → considera-se a linha como transposta e a sua indutância como a média das indutâncias das fases

▶ **Fluxo concatenado com fase a, primeiro trecho:**



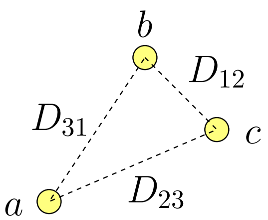
$$\lambda_{a1} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \left(I_a \ln \frac{1}{D_s} + I_b \ln \frac{1}{D_{12}} + I_c \ln \frac{1}{D_{31}} \right)$$

▶ **Fluxo concatenado com fase a, segundo trecho:**



$$\lambda_{a2} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \left(I_a \ln \frac{1}{D_s} + I_b \ln \frac{1}{D_{23}} + I_c \ln \frac{1}{D_{12}} \right)$$

▶ **Fluxo concatenado com fase a, terceiro trecho:**



$$\lambda_{a3} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \left(I_a \ln \frac{1}{D_s} + I_b \ln \frac{1}{D_{31}} + I_c \ln \frac{1}{D_{23}} \right)$$

▶ **Fluxo médio concatenado com a fase a:**

$$\lambda_a = \frac{\lambda_{a1} + \lambda_{a2} + \lambda_{a3}}{3} = \frac{2 \cdot 10^{-7}}{3} \cdot \left(3I_a \ln \frac{1}{D_s} + I_b \ln \frac{1}{D_{12}D_{23}D_{31}} + I_c \ln \frac{1}{D_{12}D_{23}D_{31}} \right)$$

$$= \frac{2 \cdot 10^{-7}}{3} \cdot \left(3I_a \ln \frac{1}{D_s} - I_a \ln \frac{1}{D_{12}D_{23}D_{31}} \right) \qquad (\textbf{pois } I_a = -(I_b + I_c))$$

$$= 2 \cdot 10^{-7} \cdot I_a \cdot \ln \frac{\sqrt[3]{D_{12}D_{23}D_{31}}}{D_s} \textbf{ Wb/m}$$

▶ **Indutância média por fase da linha trifásica com transposição:**

$$L_a = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \ln \frac{D_{eq}}{D_s} \textbf{ H/m}$$

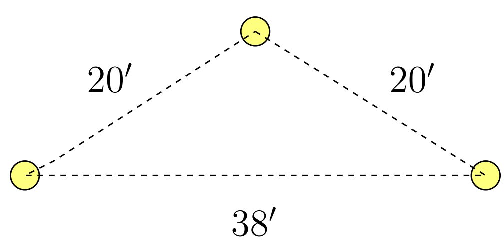
em que:

$$D_{eq} = \sqrt[3]{D_{12} D_{23} D_{31}}$$

é o espaçamento eqüilátero equivalente da linha

■ Exemplo

Determine a reatância indutiva por fase a 60 Hz da linha trifásica mostrada a seguir, composta por condutores ACSR Drake.



- **Pela tabela A.3, o RMG do condutor tipo Drake é** $D_s = 0{,}0373'$

- **O espaçamento eqüilátero da linha é:**

$$D_{eq} = \sqrt[3]{20 \cdot 20 \cdot 38} = 24{,}7712'$$

- **A indutância e a reatância por fase valem:**

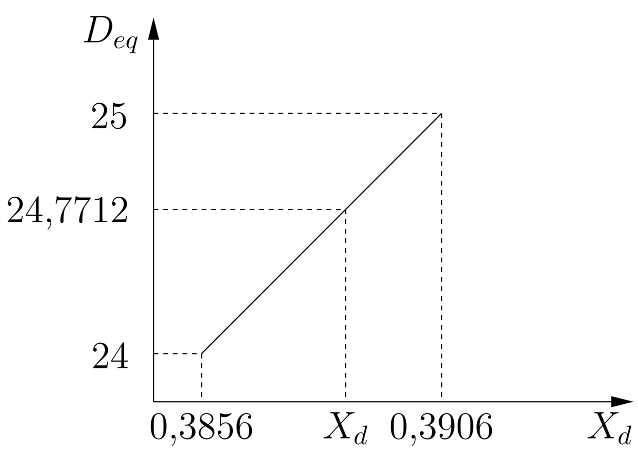
$$L = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \ln \frac{24{,}7712}{0{,}0373} = 1{,}3\ \mu\textbf{H/m}$$

$$X_L = 2\pi f L = 2\pi \cdot 60 \cdot 1{,}3 \cdot 10^{-6} = 0{,}49\ \textbf{mH/m} = 0{,}7884\ \textbf{H/mi}$$

- **O problema pode ser resolvido pela utilização das tabelas A.3 e A.4:**

$$\begin{aligned} \textbf{tabela A.1} \quad &\rightarrow \quad X_a = 0{,}399\ \Omega\textbf{/mi} \\ \textbf{tabela A.2 (para } D_{eq} = 24'\textbf{)} \quad &\rightarrow \quad X_d = 0{,}3856\ \Omega\textbf{/mi} \\ \textbf{tabela A.2 (para } D_{eq} = 25'\textbf{)} \quad &\rightarrow \quad X_d = 0{,}3906\ \Omega\textbf{/mi} \end{aligned}$$

O valor de D_{eq} é obtido por interpolação:



$$\frac{25-24}{0{,}3906-0{,}3856} = \frac{24{,}7712-24}{X_d - 0{,}3856}$$

$$X_d = 0{,}3895\ \Omega\textbf{/mi}$$

e a reatância por fase vale:

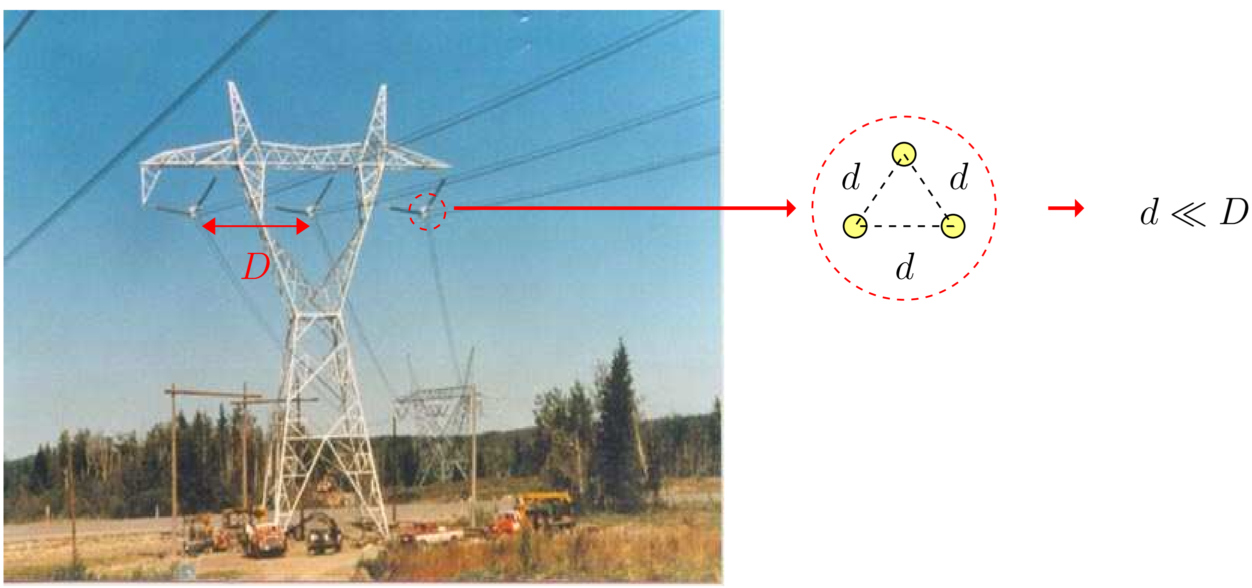
$$X_L = X_a + X_d = 0{,}399 + 0{,}3895 = 0{,}7885\ \Omega\textbf{/mi}$$

5.7.8 Condutores múltiplos por fase

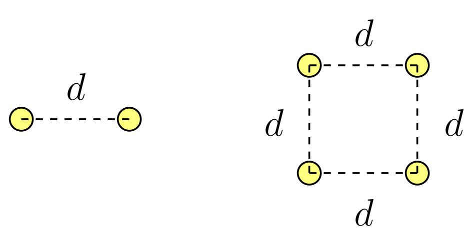
- **Extra-alta tensão (EAT ou EHV) $\rightarrow$ por exemplo 440 kV $\rightarrow$ efeito corona excessivo**

  Corona: descargas que se formam na superfície do condutor quando a intensidade do campo elétrico ultrapassa o limite de isolação do ar.
  Conseqüências: luz, ruído audível, ruído de rádio (interferência em circuitos de comunicação), vibração do condutor, liberação de ozônio, aumento das perdas de potência (deve ser suprida pela fonte)

- **Solução: colocação de dois ou mais condutores por fase $\rightarrow$ cabos múltiplos (bundled conductors)**



- **Outras configurações:**



- **Outra vantagem dos cabos múltiplos: redução da reatância (aumento do RMG). O RMG é calculado por:**

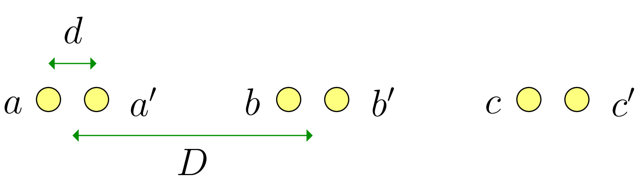
$$
\begin{cases}
\textbf{2 condutores} & D_s^b = \sqrt[4]{D_s^2 \cdot d^2} = \sqrt{D_s \cdot d} \\
\textbf{3 condutores} & D_s^b = \sqrt[9]{D_s^3 \cdot d^6} = \sqrt[3]{D_s \cdot d^2} \\
\textbf{4 condutores} & D_s^b = \sqrt[16]{D_s^4 \cdot d^{12} \cdot 2^2} = 1{,}09 \cdot \sqrt[4]{D_s \cdot d^3}
\end{cases}
$$

- **Equações da indutância e reatância são as mesmas, substituindo-se o RMG D_s do condutor simples por D_s^b para cabos múltiplos**

- **A corrente não é distribuída uniformemente entre os condutores da fase, pois reatâncias por fase não são iguais. Essa diferença é pequena e geralmente é desprezada**

Exemplo

Determine a reatância da linha trifásica mostrada a seguir.



Condutor ACSR Pheasant

$d = 45$ **cm**

$D = 8$ **m**

Comprimento da linha $\ell = 160$ **km**

- **Da tabela A.3, obtém-se o RMG do condutor Pheasant:**

$$D_s = 0{,}0466' \quad \rightarrow \quad 0{,}0466 \cdot 0{,}3048 = 0{,}0142 \ \textbf{m}$$

- **No entanto, cada fase é composta por dois condutores $\rightarrow$ deve-se calcular o RMG do cabo:**

$$D_s^b = \sqrt[4]{0{,}0142^2 \cdot 0{,}45^2} = 0{,}0799 \text{ **m**}$$

- **Espaçamento eqüilátero equivalente para a configuração dada (DMG mútua) – aproximação considerando-se apenas as distâncias entre os centros das fases:**

$$D_{eq} = \sqrt[3]{8 \cdot 8 \cdot 16} = 10{,}0794 \text{ **m**}$$

O cálculo correto do espaçamento eqüilátero equivalente neste caso seria:

$$\begin{aligned}
\textbf{DMG}_{ab} = \textbf{DMG}_{bc} &= \sqrt[4]{8 \cdot 8{,}45 \cdot 7{,}55 \cdot 8} = 7{,}9937 \ \textbf{m} \\
\textbf{DMG}_{ca} &= \sqrt[4]{16 \cdot 16{,}45 \cdot 15{,}55 \cdot 16} = 15{,}9968 \ \textbf{m} \\
D_{eq} &= \sqrt[3]{7{,}9937 \cdot 7{,}9937 \cdot 15{,}9968} = 10{,}0734 \ \textbf{m}
\end{aligned}$$

que corresponde a basicamente o mesmo resultado anterior.

- **Reatância por metro por fase:**

$$X_L = 2\pi \cdot 60 \cdot 2 \cdot 10^{-7} \cdot \ln \frac{10{,}0794}{0{,}0799} = 0{,}3647 \ \textbf{m}\Omega\textbf{/m}$$

- **Como a linha tem 160 km, a reatância total por fase da linha será:**

$$X = X_L \cdot 160000 = 58{,}36 \ \Omega$$

■

5.7.9 Linhas trifásicas de circuitos em paralelo

- **Duas linhas trifásicas idênticas em paralelo possuem a mesma reatância indutiva. A reatância equivalente será igual à metade de cada reatância individual, desde que a distância entre as linhas seja tão grande que a indutância mútua entre elas possa ser desprezada**

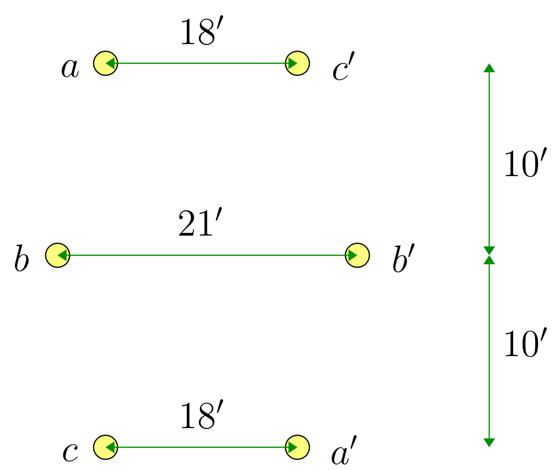
- **Duas linhas trifásicas em paralelo na mesma torre $\rightarrow$ indutâncias mútuas entre os circuitos deve ser considerada**

- **O método de cálculo é semelhante ao que foi mostrado anteriormente**

- **Considera-se sempre que haja a transposição, resultando em cálculos mais simples e resultados suficientemente precisos**

Exemplo

Uma linha trifásica de circuito duplo é constituída de condutores ACSR 26/7 tipo Ostrich de 300.000 CM dispostos de acordo com a figura a seguir. Determine a reatância indutiva por fase a 60 Hz em Ω/mi.



- **Pela tabela A.3, o RMG do condutor tipo Ostrich é** $D_s = 0{,}0229'$
- **DMG entre as fases** a **e** b**:**

$$D_{ab} = \sqrt{10^2 + 1{,}5^2} = 10{,}1119' = D_{a'b'}$$

$$D_{ab'} = \sqrt{10^2 + 19{,}5^2} = 21{,}9146' = D_{a'b}$$

$$\textbf{DMG}_{ab} = \left[(10{,}1119 \cdot 21{,}9146)^2 \right]^{1/4} = 14{,}8862'$$

$$\textbf{DMG}_{bc} = \textbf{DMG}_{ab} = 14{,}8862'$$

- **DMG entre as fases c e a:**

$$\mathbf{DMG}_{ca} = \left[(20 \cdot 18)^2\right]^{1/4} = 18{,}9737'$$

- **Espaçamento eqüilátero equivalente:**

$$D_{eq} = \left(\mathbf{DMG}_{ab}\,\mathbf{DMG}_{bc}\,\mathbf{DMG}_{ca}\right)^{1/3} = 16{,}1401'$$

- **RMG: lembrando que assume-se a transposição**

  - **Trecho 1 – fase a ocupando posição original:**

$$D_{aa'} = \sqrt{20^2 + 18^2} = 26{,}9072'$$

$$\mathbf{RMG}_1 = \left[(0{,}0229 \cdot 26{,}9072)^2\right]^{1/4} = 0{,}7850'$$

  - **Trecho 2 – fase a ocupando posição originalmente ocupada por b:**

$$D_{aa'} = 21'$$

$$\mathbf{RMG}_2 = \left[(0{,}0229 \cdot 21)^2\right]^{1/4} = 0{,}6935'$$

  - **Trecho 3 – fase a ocupando posição originalmente ocupada por c:**

$$\mathbf{RMG}_3 = \mathbf{RMG}_1 = 0{,}7850'$$

- **RMG da fase a:**

$$\textbf{RMG} = \left(0{,}7850^2 \cdot 0{,}6935\right)^{1/3} = 0{,}7532'$$

- **Indutância:**

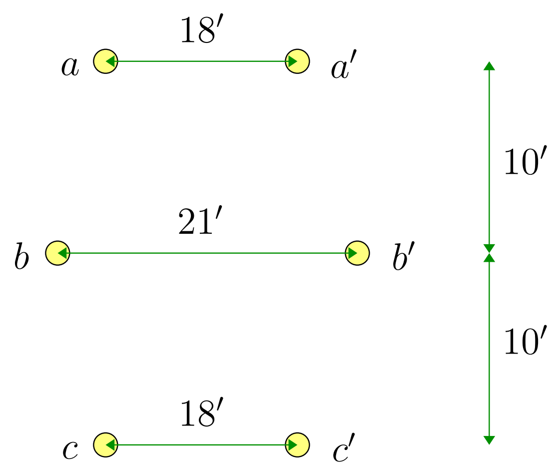
$$L = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \ln\left(\frac{16{,}1401}{0{,}7532}\right) = 6{,}1295 \cdot 10^{-7} \ \textbf{H/m}$$

- **Reatância por fase:**

$$X_L = 2\pi f L = 2{,}3108 \cdot 10^{-4} \ \Omega\textbf{/m} = 0{,}3718 \ \Omega\textbf{/mi}$$

■ **Exercício**

Repita o exemplo anterior para a configuração de linha mostrada a seguir e compare os resultados obtidos.



(Resposta: $X = 0{,}3962\ \Omega$**/mi,** $6{,}5\%$ **maior)**

■

5.8 Capacitância (C)

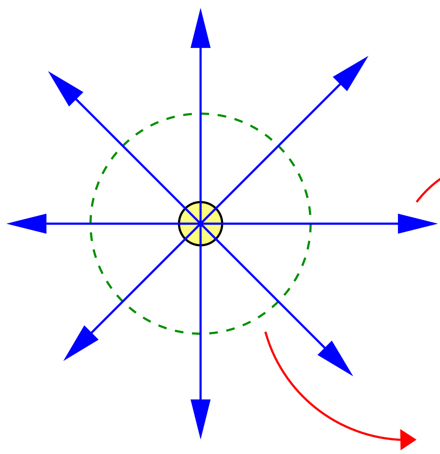
- **Existem cargas em movimento e uma diferença de potencial entre condutores** $\rightarrow$ **capacitância (carga/diferença de potencial** $\rightarrow C = Q/V$**)**

- **A linha se comporta como se os condutores fossem placas de capacitores**

5.8.1 Campo elétrico em um condutor cilíndrico

- **Considerar um condutor cilíndrico, com carga uniforme, longo e perfeito (resistividade $\rho = 0$)**

  O campo elétrico é radial:



- **Os pontos eqüidistantes do condutor (linha tracejada) são eqüipotenciais (apresentam a mesma intensidade de campo elétrico)**

- **A intensidade de campo elétrico no interior do condutor pode ser considerada nula**

  Considere a lei de Ohm (eletrostática):

$$\boldsymbol{E}_{\text{int}} = \rho \, \boldsymbol{J}$$

em que $\boldsymbol{J}$ é a densidade de corrente. Considerando $\rho = 0$ (condutor perfeito), tem-se $\boldsymbol{E}_{\text{int}} = 0$

Os elétrons no interior do condutor tenderiam a se repelir até a superfície do condutor, onde encontrariam um meio isolante

- **O cálculo da intensidade de campo elétrico a uma certa distância x do condutor é realizado utilizando a lei de Gauss:**

$$\varepsilon \oint_S E\, dS = Q$$

em que:

ε – **permissividade do meio:**

$$\varepsilon = \varepsilon_r\, \varepsilon_0$$

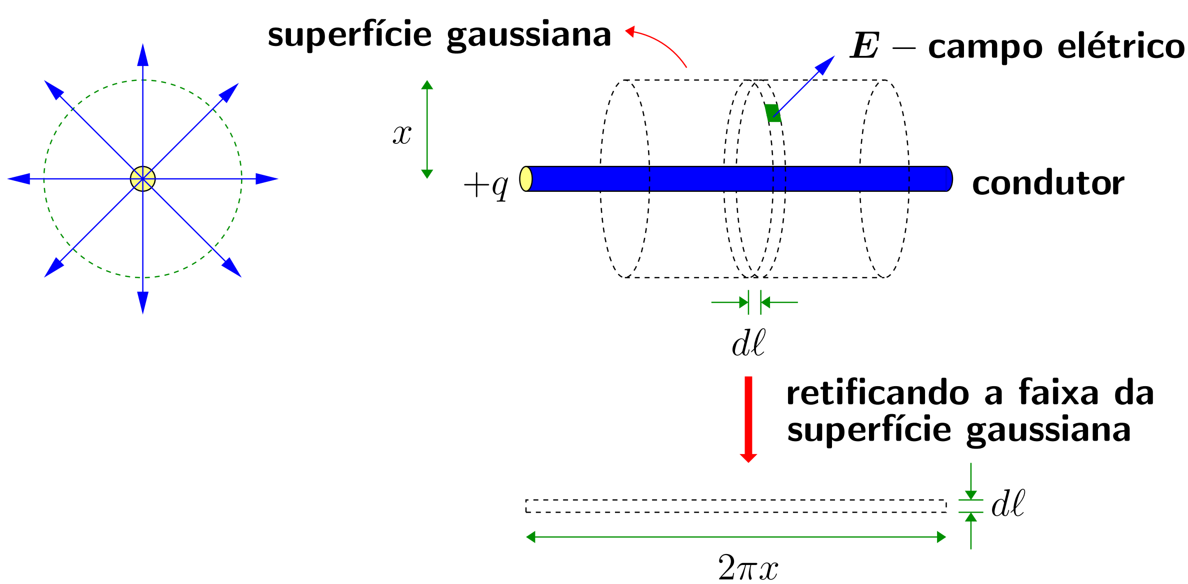
ε_0 **é a permissividade do vácuo e vale** $8{,}85 \cdot 10^{-12}$ **F/m.** ε_r **é a permissividade relativa do meio, sendo que para o ar seco vale** $1{,}00054$ **e é normalmente aproximada para** 1

E – **intensidade do campo elétrico**

S – **superfície gaussiana**

Q – **carga total contida em** S

- **Para a solução da equação de Gauss, deve-se imaginar uma superfície gaussiana, cilíndrica, concêntrica ao condutor e de raio igual a x:**



- **Tomando uma faixa da superfície gaussiana de comprimento diferencial $d\ell$ a equação fica:**

$$\varepsilon \int_{\ell} E \cdot 2\pi x d\ell = Q$$

pois a faixa tem área $2\pi x d\ell$

- **Integrando:**

$$\varepsilon \cdot E \cdot 2\pi x \ell = Q$$

e:

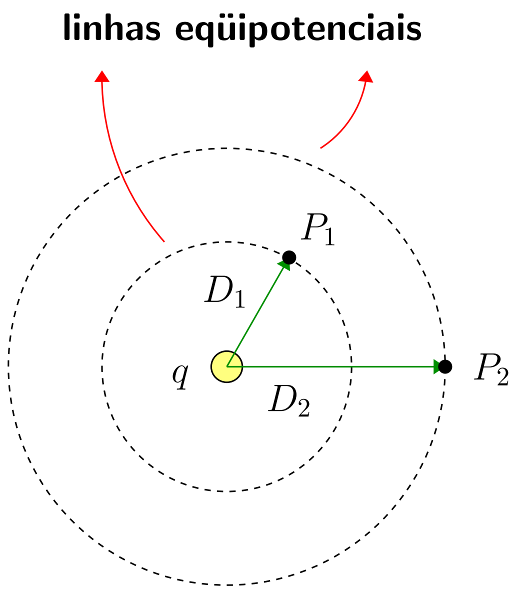
$$E = \frac{Q}{2\pi x \varepsilon \ell} \ \textbf{V/m}$$

- **Considerando a carga por unidade de comprimento $q = Q/\ell$:**

$$E = \frac{q}{2\pi x \varepsilon} \ \textbf{V/m}$$

5.8.2 Diferença de potencial entre dois pontos

- **Considere a seguinte situação:**



- **Fazendo uma analogia mecânica:**

campo elétrico	–	**força**
diferença de potencial	–	**trabalho**

A diferença de potencial representa o trabalho para mover uma carga unitária (1 C) entre dois pontos

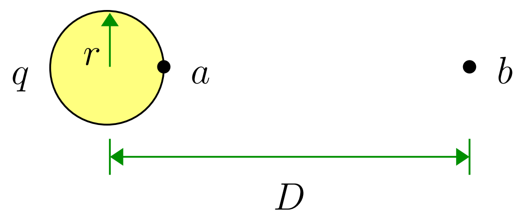
- **Diferença de potencial entre os pontos P_1 e P_2:**

$$V_{12} = V_1 - V_2 = \int_{D_1}^{D_2} E\, dx$$

$$= \int_{D_1}^{D_2} \frac{q}{2\pi x \varepsilon}\, dx$$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{D_2}{D_1} \ \textbf{V}$$

▶ **Caso particular – ddp entre os pontos a e b:**

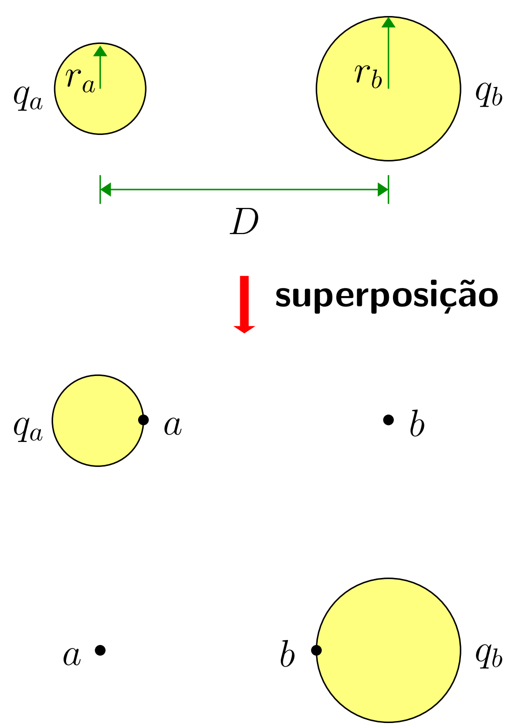


Considerando o ponto a na superfície do condutor e que $D \gg r$ tem-se:

$$V_{ab} = \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{D}{r} \ \mathbf{V}$$

5.8.3 Diferença de potencial entre dois condutores

▶ **A diferença de potencial entre os dois condutores é obtida usando-se o princípio da superposição:**



Considera-se que:

- $D \gg r_a, r_b$, **ou seja, um observador em um condutor enxerga o outro condutor como um ponto**
- **o campo interno ao condutor seja desprezível**
- **a diferença de potencial total deve-se às contribuições de** q_a **e** q_b

$$V_{ab} = V_{ab}^{\text{devido a } q_a} + V_{ab}^{\text{devido a } q_b} = \frac{q_a}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{D}{r_a} + \frac{q_b}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_b}{D}$$

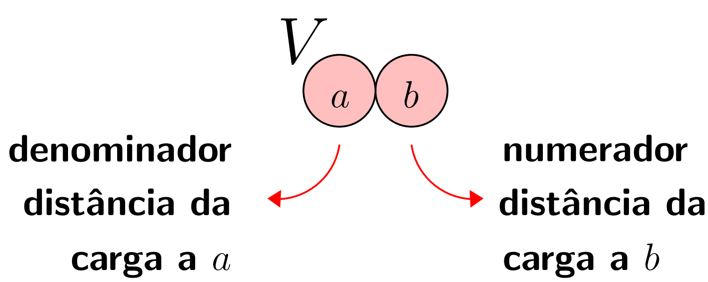
$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon} \left(q_a \ln \frac{D}{r_a} + q_b \ln \frac{r_b}{D} \right)$$

Observações:

- **Na equação:**

$$V_{ab} = \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{B}{A}$$

a referência está em q, **ou seja:**



- **ddp devido a** q_a $\rightarrow$ **referência no centro do condutor** a $\rightarrow$ **caminho de integração** a **para** b **(**r_a **para** D**)**
- **ddp devido a** q_b $\rightarrow$ **referência no centro do condutor** b $\rightarrow$ **caminho de integração** a **para** b **(**D **para** r_b**)**

5.8.4 Capacitância de uma linha monofásica

- **Capacitância:**

$$C = \frac{q}{v} \ \textbf{F/m}$$

- **Considere uma linha para a qual:**
  - **os raios dos condutores são iguais:** $r_a = r_b = r$
  - $q_a = -q_b = q$

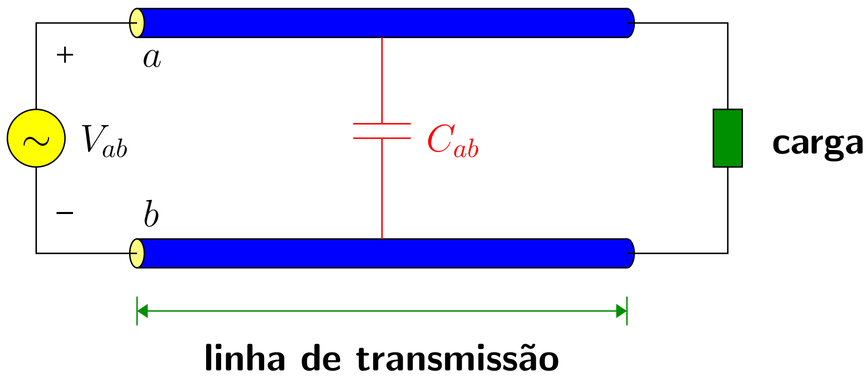
- **A diferença de potencial entre os dois condutores será:**

$$\begin{aligned} V_{ab} &= \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{D}{r} - \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r}{D} \\ &= \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \left(\frac{D}{r}\right)^2 \\ &= \frac{q}{\pi\varepsilon} \ln \frac{D}{r} \ \textbf{V} \end{aligned}$$

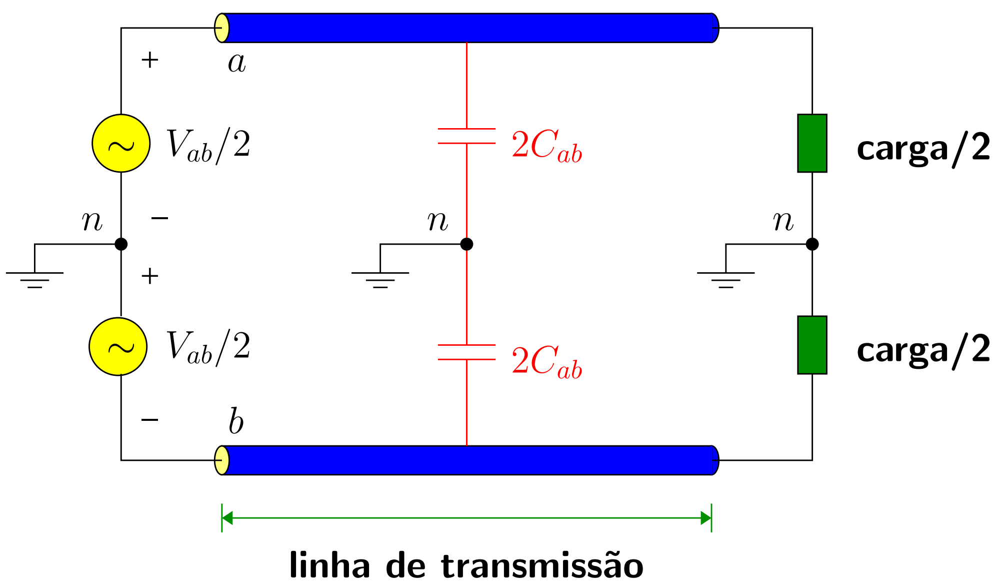
- **Utilizando a definição de capacitância e assumindo que para o ar tem-se** $\varepsilon_r = 1$**:**

$$C_{ab} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(D/r)} = \frac{8{,}85\pi \cdot 10^{-12}}{\ln(D/r)} \ \textbf{F/m}$$

- **Considere a seguinte situação:**



O circuito pode ser representado por:



- **A capacitância entre cada condutor e a terra vale:**

$$C_{an} = C_{bn} = 2C_{ab} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(D/r)} = \frac{17{,}7\pi \cdot 10^{-12}}{\ln(D/r)} \ \textbf{F/m}$$

e a reatância capacitiva fase-terra é dada por:

$$
\begin{aligned}
X_C &= \frac{1}{2\pi f C} \\
&= \frac{2{,}8622}{f} \cdot 10^9 \cdot \ln \frac{D}{r} \ \Omega\cdot\mathbf{m} \\
&= \frac{1{,}7789}{f} \cdot 10^6 \cdot \ln \frac{D}{r} \ \Omega\cdot\mathbf{mi}
\end{aligned}
$$

- **Da mesma forma que para as reatâncias indutivas, a expressão da reatância capacitiva fase-terra pode ser escrita como:**

$$
\begin{aligned}
X_C &= \underbrace{\frac{1{,}7789}{f} \cdot 10^6 \cdot \ln \frac{1}{r}}_{X'_a} + \underbrace{\frac{1{,}7789}{f} \cdot 10^6 \cdot \ln D}_{X'_d} \\
&= X'_a + X'_d
\end{aligned}
$$

em que X'_a é a reatância capacitiva para um pé de afastamento e X'_d é o fator de espaçamento

r é o raio externo do condutor (se for encordoado, é uma aproximação que leva a erros muito pequenos). Este valor é obtido na tabela de dados dos condutores

■ Exemplo

Determine a capacitância, reatância capacitiva e susceptância capacitiva por milha de uma linha monofásica que opera a 60 Hz. O condutor é o Partridge e o espaçamento entre centros dos condutores é de 20 ft.

Para o condutor especificado, o diâmetro externo é de $0{,}642''$. Portanto, o raio externo é $r = 0{,}0268'$.

Capacitância entre condutores:

$$C_{ab} = \frac{\pi \varepsilon_0}{\ln (D/r)} = \frac{\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{\ln (20/0{,}0268)} = 4{,}2030 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

ou, multiplicando por 1609 tem-se $C_{ab} = 6{,}7626 \cdot 10^{-9}$ F/mi. A capacitância fase-terra é:

$$C_{an} = 2C_{ab} = 13{,}5252 \cdot 10^{-9} \text{ F/mi}$$

Reatância capacitiva:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C_{an}} = 0{,}1961 \text{ M}\Omega\text{·mi}$$

ou, aplicando a fórmula direta:

$$X_C = \frac{1{,}7789}{60} \cdot 10^6 \cdot \ln \frac{20}{0{,}0268} = 0{,}1961 \text{ M}\Omega\text{·mi}$$

Susceptância capacitiva:

$$B_C = \frac{1}{X_C} = 5{,}0985 \cdot 10^{-6} \text{ S/mi}$$

Da tabela A.3:

$$X'_a = 0{,}1074 \text{ M}\Omega\cdot\text{mi}$$

Da tabela A.5, para $D = 20'$:

$$X'_d = 0{,}0889 \text{ M}\Omega\cdot\text{mi}$$

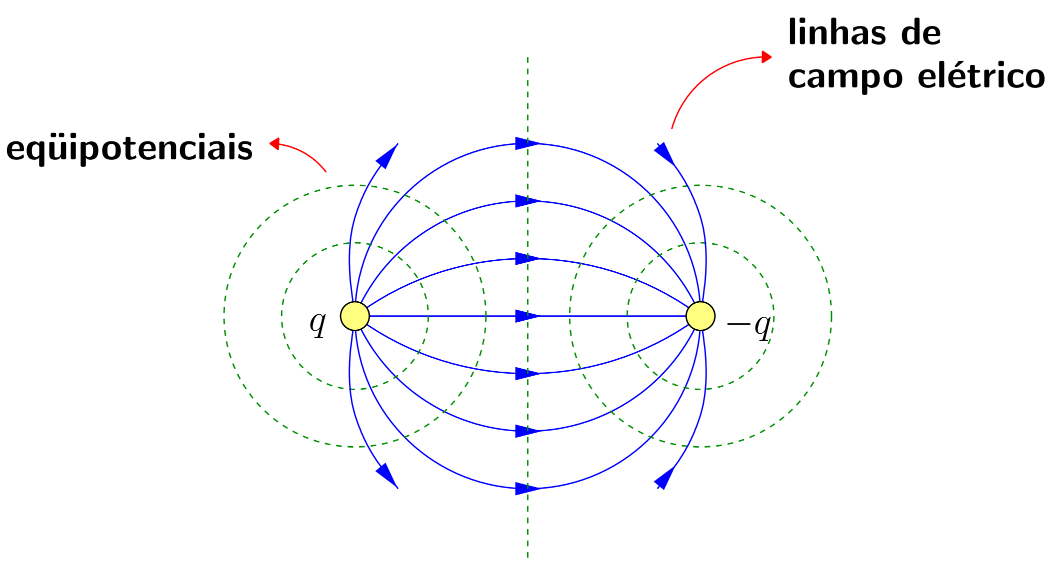
Reatância capacitiva fase-terra total:

$$X_C = X'_a + X'_d = 0{,}1963 \text{ M}\Omega\cdot\text{mi}$$

■

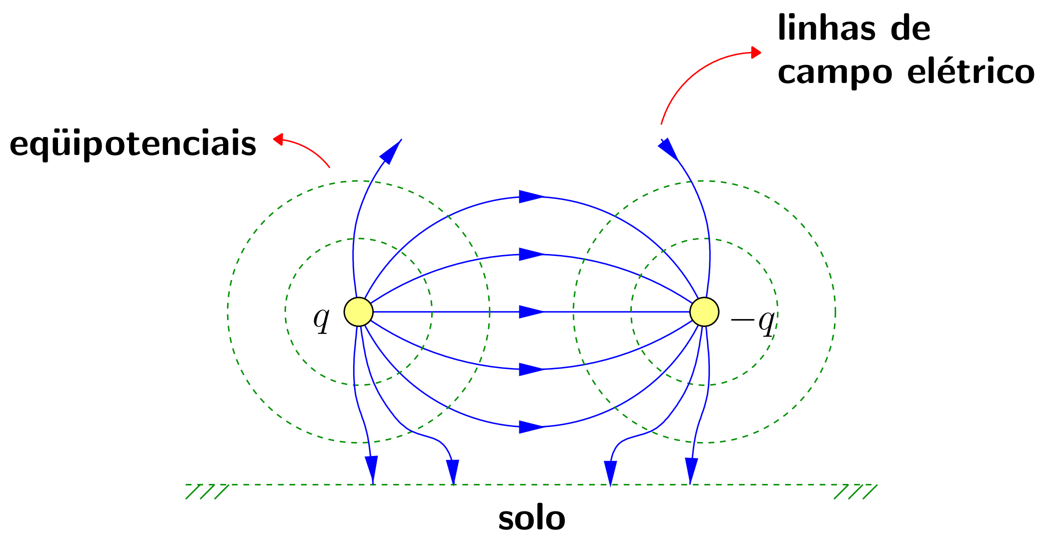
5.8.5 Influência do solo

▶ **Considere a seguinte linha monofásica isolada:**



As linhas de campo elétrico são normais às eqüipotenciais.

- Caso a linha esteja suficientemente perto do solo, tem-se:

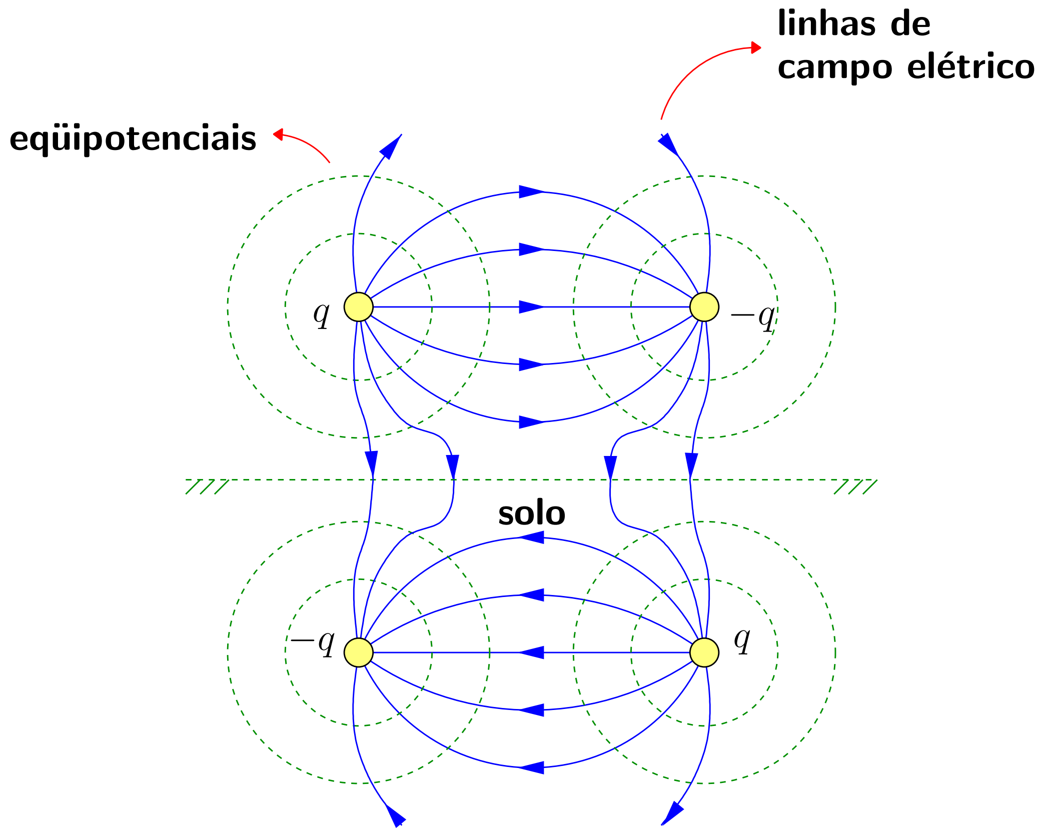


O solo também é uma superfície eqüipotencial, causando uma distorção nas linhas de campo elétrico, que serão normais a ele

A proximidade do solo altera o formato das linhas de campo elétrico $\rightarrow$ altera a capacitância

O efeito é maior quanto mais próxima a linha estiver do solo

- Imagine uma continuação das linhas de campo elétrico abaixo do solo e simétrica ao plano do solo (como em um espelho), terminando em cargas sob o solo:



As cargas sob o solo são denominadas cargas imagem

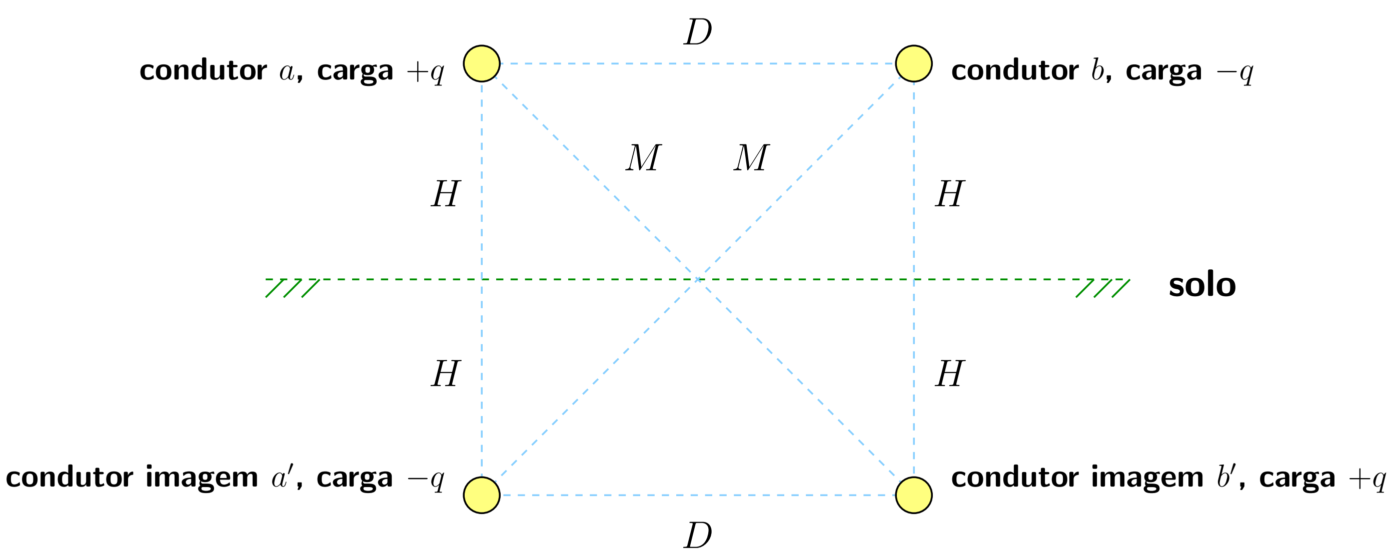
Pode-se remover a linha do solo e calcular a diferença de potencial e a capacitância da maneira usual (método das imagens)

■ Exemplo

No exemplo anterior foi determinada a capacitância entre condutores de uma linha monofásica que opera a 60 Hz com condutores Partridge e espaçamento entre centros dos condutores de 20 ft. Foi obtido o valor $C_{ab} = 4{,}2030 \cdot 10^{-12}$ F/m. Obtenha a expressão da capacitância levando em conta o efeito do solo e calcule a capacitância da linha, supondo que ela esteja a 30 pés ($\approx$ 10 metros) e 90 pés ($\approx$ 30 metros) acima da terra.

A expressão da capacitância considerando o efeito do solo será obtida através do método das imagens.

Considere a superfície do solo como um espelho. Assim, tem-se uma linha idêntica à original, localizada abaixo da terra, e com carga oposta à primeira:



A tensão V_{ab} deve levar em conta o efeito de todas as quatro cargas:

$$V_{ab} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left[\underbrace{q\ln\frac{D}{r}}_{\textbf{devido a } q_a} + \left(\underbrace{-q\ln\frac{r}{D}}_{\textbf{devido a } q_b}\right) + \left(\underbrace{-q\ln\frac{M}{2H}}_{\textbf{devido a } q_{a'}}\right) + \underbrace{q\ln\frac{2H}{M}}_{\textbf{devido a } q_{b'}}\right]$$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{D^2}{r^2} + \ln\frac{(2H)^2}{M^2}\right) \qquad \left(M = \sqrt{D^2 + (2H)^2}\right)$$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{D^2}{r^2}\cdot\frac{(2H)^2}{(2H)^2 + D^2}\right)$$

Capacitância entre condutores:

$$C_{ab} = \frac{q}{V_{ab}} = \frac{2\pi\varepsilon_o}{\ln\left(\frac{D^2}{r^2}\cdot\frac{(2H)^2}{(2H)^2+D^2}\right)}$$

O efeito da terra pode ser desconsiderado se $H \to \infty$:

$$C'_{ab} = \lim_{H\to\infty} C_{ab} = \frac{\pi\varepsilon_o}{\ln(D/r)}$$

que é uma expressão que já foi obtida anteriormente.

Para este exemplo, tem-se $r = 0{,}0268'$ e $D = 20'$.

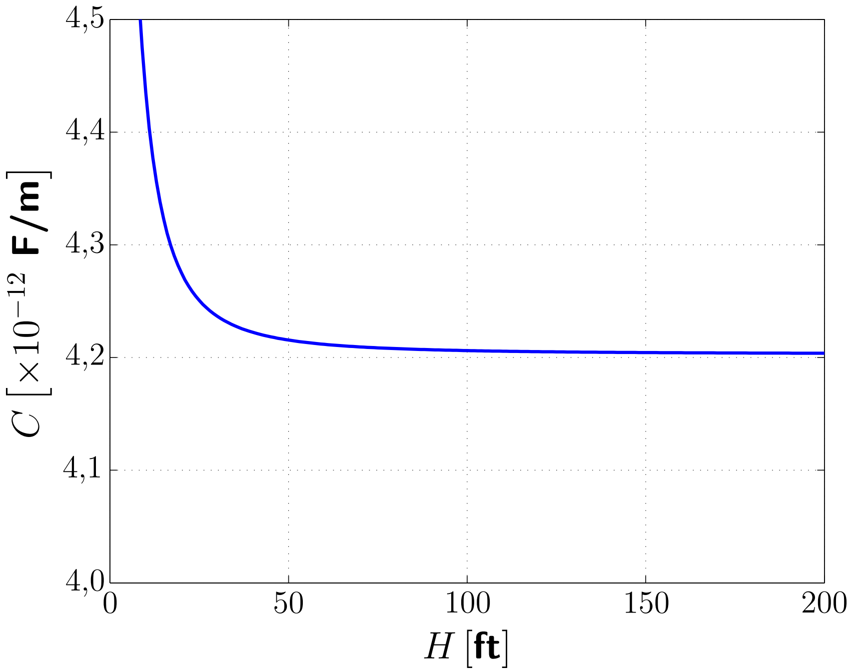
Para uma distância de $90'$, $H = 90'$ e $M = \sqrt{(2\cdot 90)^2 + 20^2} = 181{,}1077'$ e:

$$C_{ab} = 4{,}2069 \cdot 10^{-12} \textbf{ F/m}$$

Para uma distância de $30'$, $H = 30'$ e $M = \sqrt{(2\cdot 30)^2 + 20^2} = 63{,}2456'$ e:

$$C_{ab} = 4{,}2367 \cdot 10^{-12} \textbf{ F/m}$$

A figura a seguir mostra o valor da capacitância em função da altura da linha em relação ao solo:



5.8.6 Cabos

- **Para cabos, tem-se:**
  - $\varepsilon_r \gg 1$
  - $\varepsilon \gg \varepsilon_0$
  - **distâncias pequenas entre condutores (fases)**

- A capacitância atinge valores altos

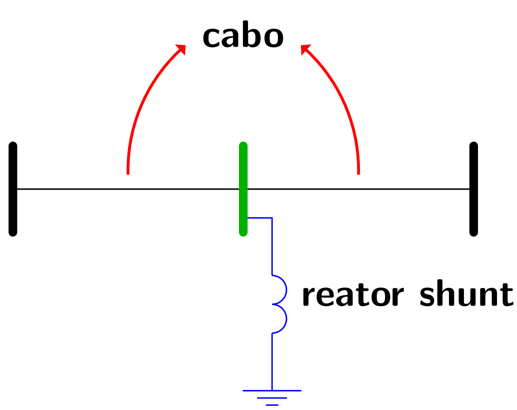
- Cabos geram uma quantidade significativa de potência reativa:

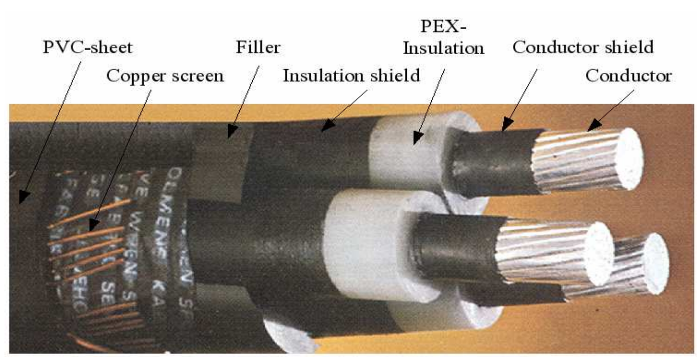
  - 132 **kV** $\longrightarrow$ 2000 **kvar/mi**
  - 220 **kV** $\longrightarrow$ 5000 **kvar/mi**
  - 400 **kV** $\longrightarrow$ 15000 **kvar/mi**

  resultando em restrições nos comprimentos das linhas, devido a limitações térmicas (temperatura de operação) dos cabos. Exemplos de comprimentos críticos:

  - 132 **kV** $\longrightarrow$ 40 **mi**
  - 200 **kV** $\longrightarrow$ 25 **mi**
  - 400 **kV** $\longrightarrow$ 15 **mi**

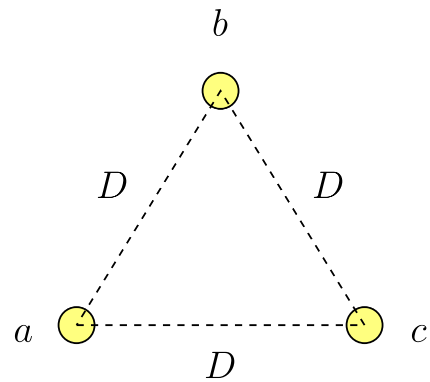
  Solução: colocar reatores shunt ao longo da linha





5.8.7 Capacitância de linhas trifásicas com espaçamento simétrico

- **Considere a seguinte linha de transmissão trifásica:**



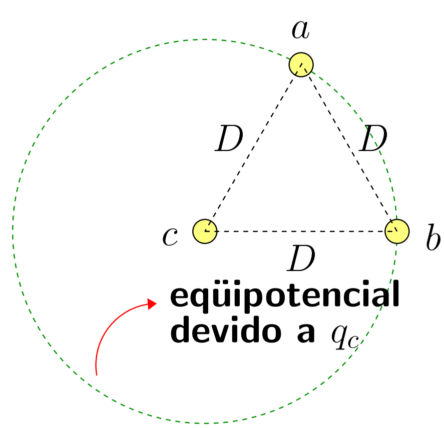
- **Considere a situação mais comum na prática:**
  - **condutores idênticos:** $r_a = r_b = r_c = r$
  - **linha equilibrada:** $q_a + q_b + q_c = 0$

- **Tensões fase-fase → cada tensão recebe contribuição das três cargas:**

$$V_{ab} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\left(q_a \ln\frac{D}{r} + q_b \ln\frac{r}{D} + q_c \underbrace{\ln\frac{D}{D}}_{=0}\right)$$

$$V_{bc} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\left(q_b \ln\frac{D}{r} + q_c \ln\frac{r}{D}\right)$$

$$V_{ca} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\left(q_a \ln\frac{r}{D} + q_c \ln\frac{D}{r}\right)$$



▶ **Considere os fasores de tensão:**

$$V_{an} = V\angle 0^\circ \ \textbf{V} \qquad V_{ab} = \sqrt{3}V\angle 30^\circ \ \textbf{V}$$
$$V_{bn} = V\angle -120^\circ \ \textbf{V} \qquad V_{bc} = \sqrt{3}V\angle -90^\circ \ \textbf{V}$$
$$V_{cn} = V\angle 120^\circ \ \textbf{V} \qquad V_{ca} = \sqrt{3}V\angle 150^\circ \ \textbf{V}$$

▶ **Pode-se mostrar (fica como exercício) que:**

$$V_{an} = \frac{1}{3}\left(V_{ab} - V_{ca}\right)$$

▶ **Fazendo as substituições:**

$$V_{an} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\underbrace{q_a \ln\frac{D}{r} + q_b \ln\frac{r}{D}}_{\textbf{de } V_{ab}}\underbrace{-q_a \ln\frac{r}{D} - q_c \ln\frac{D}{r}}_{\textbf{de } V_{ca}}\right)$$

▶ **Considerando** $q_c = -\left(q_a + q_b\right)$**:**

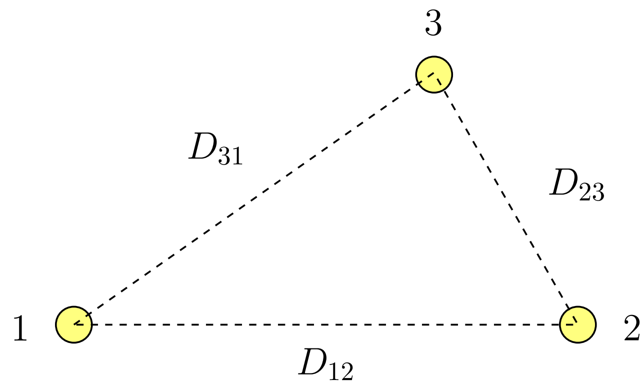
$$V_{an} = \frac{q_a}{6\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{D}{r}\right)^3 = \frac{q_a}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D}{r} \ \textbf{V}$$

▶ **A capacitância fase-neutro vale:**

$$C_{an} = \frac{q_a}{V_{an}} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(D/r\right)} \ \textbf{F/m}$$

5.8.8 Capacitância de linhas trifásicas com espaçamento assimétrico

- **Considere a seguinte linha trifásica:**



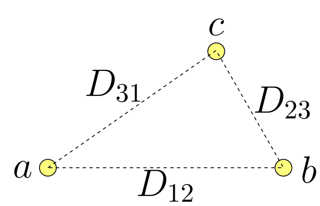
- **Hipóteses:**

  - **os condutores têm o mesmo raio** r
  - **linha é transposta (igual ao caso da indutância)** $\rightarrow$ **obtém-se a capacitância média**

- **Considerando a transposição, a linha pode ser separada em três trechos distintos:**

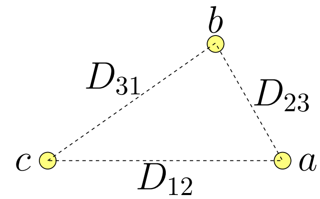
  - **Para o trecho 1 em que a fase** a **está na posição 1,** b **na posição 2 e** c **na posição 3, tem-se:**

$$V_{ab_1} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \left(q_a \ln \frac{D_{12}}{r} + q_b \ln \frac{r}{D_{12}} + q_c \ln \frac{D_{23}}{D_{31}} \right)$$

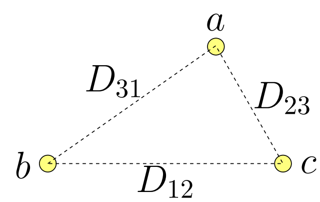


- **Analogamente para os outros 2 trechos:**

$$V_{ab_2} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(q_a \ln\frac{D_{23}}{r} + q_b \ln\frac{r}{D_{23}} + q_c \ln\frac{D_{31}}{D_{12}}\right)$$



$$V_{ab_3} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(q_a \ln\frac{D_{31}}{r} + q_b \ln\frac{r}{D_{31}} + q_c \ln\frac{D_{12}}{D_{23}}\right)$$



▶ **A tensão V_{ab} é a média das tensões nos três trechos:**

$$V_{ab} = \frac{1}{3}\left(V_{ab_1} + V_{ab_2} + V_{ab_3}\right) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(q_a \ln\frac{\sqrt[3]{D_{12}D_{23}D_{31}}}{r} + q_b \ln\frac{r}{\sqrt[3]{D_{12}D_{23}D_{31}}}\right)$$

▶ **Analogamente:**

$$V_{ca} = \frac{1}{3}\left(V_{ca_1} + V_{ca_2} + V_{ca_3}\right) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(q_a \ln\frac{r}{\sqrt[3]{D_{12}D_{23}D_{31}}} + q_c \ln\frac{\sqrt[3]{D_{12}D_{23}D_{31}}}{r}\right)$$

▶ **Lembrando que:**

$$V_{an} = \frac{1}{3}\left(V_{ab} - V_{ca}\right)$$

e:

$$C_{an} = \frac{q_a}{V_{an}}$$

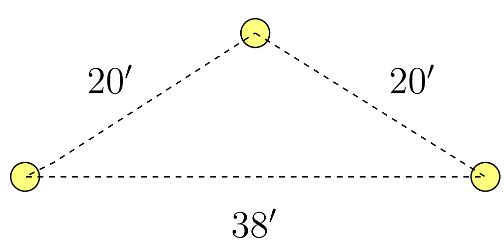
tem-se finalmente (para carga equilibrada $\rightarrow q_a + q_b + q_c = 0$):

$$C_{an} = C_{bn} = C_{cn} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(D_{eq}/r\right)} \text{ F/m}$$

em que $D_{eq} = \sqrt[3]{D_{12}D_{23}D_{31}}$ é o espaçamento eqüilátero da linha.

Exemplo

Determine a capacitância e a reatância capacitiva por milha da linha trifásica mostrada a seguir. O condutor é CAA Drake, o comprimento da linha é de 175 milhas e a tensão normal de operação é 220 kV a 60 Hz. Determine também a reatância capacitiva total da linha e a potência reativa de carregamento.



Da tabela A.3, o diâmetro externo do condutor é $1,108''$. O raio externo em pés é:

$$r = 1{,}108'' \cdot \frac{1'}{12''} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}0462'$$

Espaçamento eqüilátero equivalente:

$$D_{eq} = \sqrt[3]{20 \cdot 20 \cdot 38} = 24{,}7712'$$

Capacitância fase-neutro:

$$C_{an} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(24{,}7712/0{,}0462\right)} = 8{,}8482 \cdot 10^{-12}\ \textsf{\textbf{F/m}}$$

Reatância capacitiva:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C_{an}} = 299{,}7875\ \textsf{\textbf{M}}\Omega\textsf{\textbf{·m}} = 0{,}1863\ \textsf{\textbf{M}}\Omega\textsf{\textbf{·mi}}$$

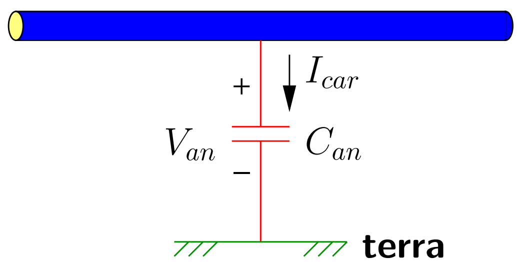
Pelas tabelas A.3 e A.5 (usando interpolação):

$$\left.\begin{array}{l} X'_a = 0{,}0912 \cdot 10^6 \\ X'_d = 0{,}0953 \cdot 10^6 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad X_C = X'_a + X'_d = 0{,}1865\ \textsf{\textbf{M}}\Omega\textsf{\textbf{·mi}}$$

Reatância total da linha:

$$X = \frac{X_C}{175} = 1065{,}7143\ \Omega$$

Para o cálculo da corrente de carregamento, considere a seguinte situação:



Portanto:

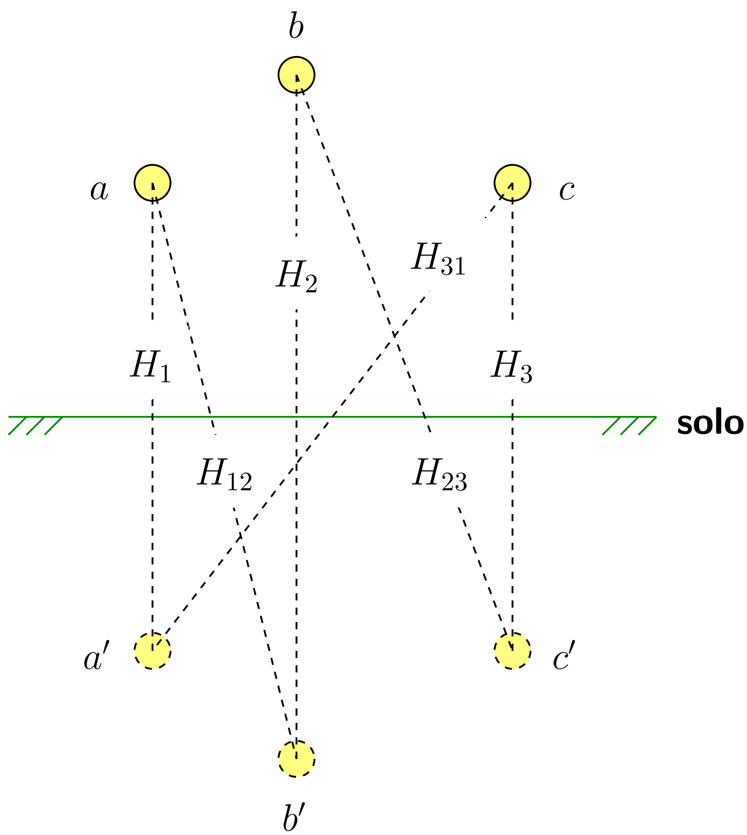
$$I_{car} = \frac{V_{an}}{X} = \frac{220 \cdot 10^3/\sqrt{3}}{1065{,}7143} = 119{,}2 \text{ A}$$

Potência reativa trifásica gerada na linha:

$$\begin{aligned} Q_C &= 3\, V_{an}\, I_{car} \\ &= 3\, \frac{V_{ab}}{\sqrt{3}}\, I_{car} \\ &= \sqrt{3}\, V_{ab}\, I_{car} = 45{,}4 \text{ Mvar} \end{aligned}$$

5.8.9 Efeito do solo sobre a capacitância de linhas trifásicas

▶ **Utiliza-se o método das imagens:**



obtendo-se uma expressão para a capacitância que leva em conta as distâncias entre os condutores e as distâncias entre os condutores e as imagens:

$$C_{an} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{D_{eq}}{r} \cdot \frac{\sqrt[3]{H_1 H_2 H_3}}{\sqrt[3]{H_{12} H_{23} H_{31}}}\right)} \text{ F/m}$$

5.8.10 Condutores múltiplos por fase

- **Para n condutores, considera-se que a carga em cada um seja de q_a/n (para a fase a)**

- **O procedimento para a obtenção da capacitância é semelhante ao que já foi feito até agora e o resultado final é:**

$$C_{an} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(D_{eq}/D_{sC}^b\right)} \text{ F/m}$$

em que:

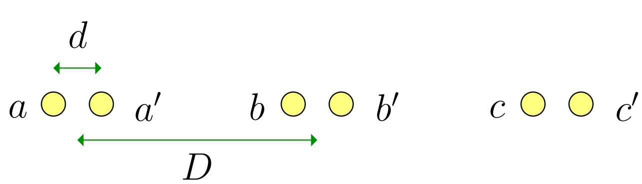
$$D_{sC}^b = \sqrt{rd} \qquad \textbf{dois condutores por fase}$$
$$D_{sC}^b = \sqrt[3]{rd^2} \qquad \textbf{três condutores por fase}$$
$$D_{sC}^b = 1{,}09\sqrt[4]{rd^3} \qquad \textbf{quatro condutores por fase}$$

Os D_{sC}^b são RMG modificados em relação aos RMG usados no cálculo das indutâncias, pois o raio externo substitui o raio efetivo

---

■ **Exemplo**

Determine a reatância capacitiva por fase da linha trifásica mostrada a seguir.



Condutor ACSR Pheasant

$d = 45$ **cm**

$D = 8$ **m**

Comprimento da linha $\ell = 160$ **km**

Da tabela A.3, o raio externo em metros é:

$$r = \frac{1{,}382 \cdot 0{,}3048}{2 \cdot 12} = 0{,}0176 \ \textbf{m}$$

RMG modificado da linha:

$$D_{sC}^{b} = \sqrt{0{,}0176 \cdot 0{,}45} = 0{,}0890 \ \textbf{m}$$

Espaçamento eqüilátero equivlente:

$$D_{eq} = \sqrt[3]{8 \cdot 8 \cdot 16} = 10{,}0794 \ \textbf{m}$$

Capacitância:

$$C_{an} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(10{,}0794/0{,}0890\right)} = 11{,}7570 \cdot 10^{-12} \ \textbf{F/m}$$

Reatância capacitiva por unidade de comprimento:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C_{an}} = 225{,}6173 \ \textbf{M}\Omega\textbf{·m} = 0{,}1402 \ \textbf{M}\Omega\textbf{·mi}$$

Reatância capacitiva da linha:

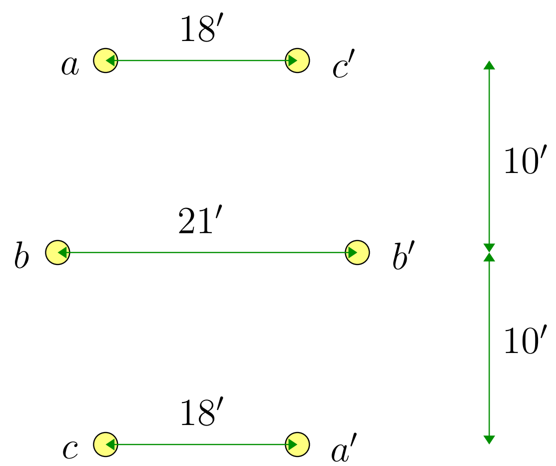
$$X = \frac{X_C}{\ell} = \frac{225{,}6173 \cdot 10^6}{160 \cdot 10^3} = 1410{,}11 \ \Omega$$

■

5.8.11 Linhas trifásicas de circuitos em paralelo

■ **Exemplo**

Obtenha a susceptância capacitiva por fase da linha trifásica de circuito duplo mostrada a seguir, que é composta por condutores CAA 26/7 Ostrich 300.000 **CM.**



- **Pela tabela A.3, o diâmetro externo do condutor tipo Ostrich é** $D_s = 0{,}680''$**. O raio externo em pés é:**

$$r = \frac{0{,}680}{2} \cdot \frac{1}{12} = 0{,}0283'$$

- **DMG entre as fases e espaçamento eqüilatero equivalente:**

$$D_{ab} = \sqrt{10^2 + 1{,}5^2} = 10{,}1119' = D_{a'b'}$$

$$D_{ab'} = \sqrt{10^2 + 19{,}5^2} = 21{,}9146' = D_{a'b}$$

$$\textsf{DMG}_{ab} = \left[(10{,}1119 \cdot 21{,}9146)^2\right]^{1/4} = 14{,}8862'$$

$$\textsf{DMG}_{bc} = \textsf{DMG}_{ab} = 14{,}8862'$$

$$\textsf{DMG}_{ca} = \left[(20 \cdot 18)^2\right]^{1/4} = 18{,}9737'$$

$$D_{eq} = (\textsf{DMG}_{ab}\,\textsf{DMG}_{bc}\,\textsf{DMG}_{ca})^{1/3} = 16{,}1401'$$

- **RMG:**

$$\textsf{RMG}_{a} = \left[(r \cdot D_{aa'})^2\right]^{1/4} = 0{,}873'$$

$$\textsf{RMG}_{b} = \left[(r \cdot D_{bb'})^2\right]^{1/4} = 0{,}771'$$

$$\textsf{RMG}_{c} = \textsf{RMG}_{a} = 0{,}873'$$

$$D_{sC}^{b} = (\textsf{RMG}_{a}\,\textsf{RMG}_{b}\,\textsf{RMG}_{c})^{1/3} = 0{,}837'$$

- **Capacitância por fase:**

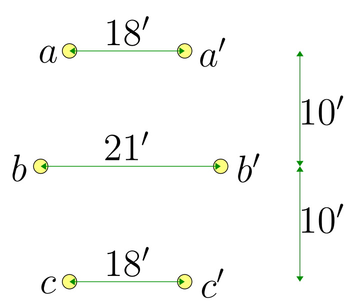
$$C_n = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(D_{eq}/D_{sC}^b\right)} = 18{,}58 \textbf{ pF/m}$$

- **Susceptância por fase:**

$$B_c = 2\pi f C_n = 7 \textbf{ nS/m} = 11{,}27 \ \mu\textbf{S/mi}$$

Exercício

Repita o exemplo anterior para a configuração de linha mostrada a seguir e compare os resultados obtidos.



(Resposta: $C_n = 17{,}60$ **pF/m,** $5{,}3\%$ **menor)**

5.9 Modelo da linha de transmissão

- **Pode-se associar a uma linha de transmissão todos os parâmetros discutidos anteriormente:**

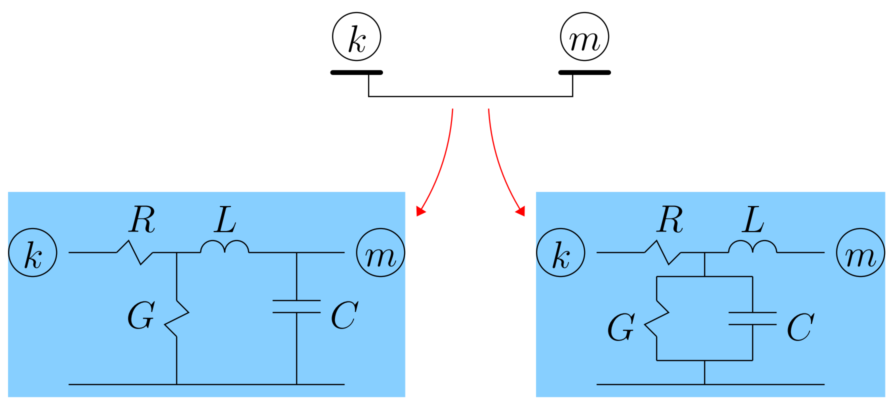
  Resistência – parâmetro série – perda de potência ativa com passagem de corrente

  Indutância – parâmetros série – campos magnéticos com passagem da corrente

  Capacitância – parâmetro shunt – campos elétricos com diferença de potencial

  Condutância – parâmetro shunt – correntes de fuga

- **Como representá-los?**

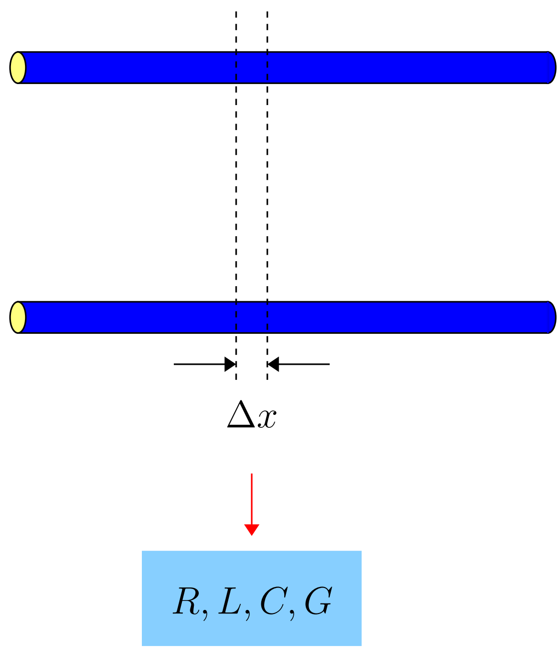


- **Existem ainda outras possibilidades de representação**

- **Em todos os modelos, as tensões e correntes em cada elemento são todas diferentes**

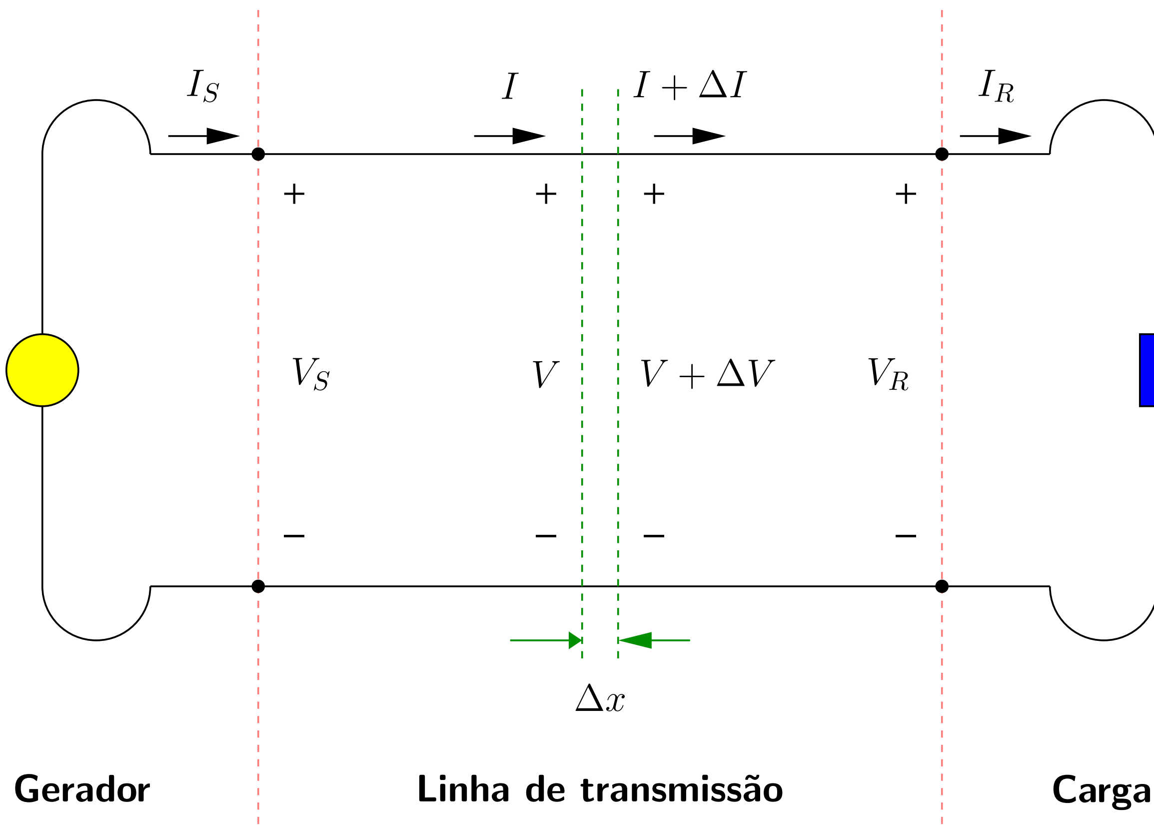
- Esses parâmetros são calculados por unidade de comprimento da linha e estão distribuídos ao longo da linha

  Portanto, cada trecho da linha Δx, mesmo muito pequeno, apresenta os quatro parâmetros:



5.9.1 Modelo da linha longa

▶ **Considere o seguinte modelo de uma linha de transmissão, que pode ser uma linha monofásica ou uma fase (fase-neutro) de uma linha trifásica:**



▶ **O equacionamento será feito na forma fasorial**

▶ **Considere:**

$z\,\Delta x = (R + j\omega L)\,\Delta x$ – **impedância série do trecho diferencial**

$y\,\Delta x = (G + j\omega C)\,\Delta x$ – **admitância shunt do trecho diferencial**

$\omega = 2\pi f$ **(p.ex. para** $f = 60$ **Hz** $\rightarrow \omega = 377$ **rad/s)**

- **A corrente pela impedância série é a média das correntes no início e no fim do trecho diferencial:**

$$\frac{I + (I + \Delta I)}{2} = I + \frac{\Delta I}{2}$$

A tensão na admitância shunt é a média das tensões no início e no fim do trecho diferencial:

$$\frac{V + (V + \Delta V)}{2} = V + \frac{\Delta V}{2}$$

- **As tensões no início e no fim do trecho diferencial são V e $V + \Delta V$, respectivamente. A diferença ΔV se deve à queda de tensão associada à passagem de corrente (média) pelos parâmetros série:**

$$\underbrace{V + \Delta V}_{\textbf{fim}} = \underbrace{V}_{\textbf{início}} - \underbrace{z \, \Delta \, x \, I_{\textbf{médio}}}_{\textbf{queda}}$$

$$\Delta V = -\left(z\Delta x\right) \cdot \left(I + \frac{\Delta I}{2}\right) = -zI\Delta x - \underbrace{\frac{z\Delta x \Delta I}{2}}_{\approx 0} \approx -zI\Delta x$$

- **As correntes no início e no fim do trecho diferencial são I e $I + \Delta I$, respectivamente. A diferença ΔI se deve ao desvio de parte da corrente pelos parâmetros shunt, que estão submetidos a uma tensão (média):**

$$\underbrace{I + \Delta I}_{\textbf{fim}} = \underbrace{I}_{\textbf{início}} - \underbrace{y \, \Delta \, x \, V_{\textbf{médio}}}_{\textbf{desvio}}$$

$$\Delta I = -\left(y\Delta x\right) \cdot \left(V + \frac{\Delta V}{2}\right) = -yV\Delta x - \underbrace{\frac{y\Delta x \Delta V}{2}}_{\approx 0} \approx -yV\Delta x$$

- **Note que os produtos de termos diferenciais são desprezados (muito pequenos)**

- **Fazendo $\Delta x \rightarrow 0$ (definição de derivada):**

$$\frac{d}{dx}V = -zI$$
$$\frac{d}{dx}I = -yV$$

- **Derivando em relação a x:**

$$\frac{d^2}{dx^2}V = -z\frac{d}{dx}I$$
$$\frac{d^2}{dx^2}I = -y\frac{d}{dx}V$$

- **Fazendo as substituições das derivadas:**

$$\frac{d^2}{dx^2}V = zyV$$
$$\frac{d^2}{dx^2}I = zyI$$

que pode ser posta na seguinte forma:

$$\frac{d^2}{dx^2}V(x) = \gamma^2 V(x)$$
$$\frac{d^2}{dx^2}I(x) = \gamma^2 I(x)$$

que são as equações de onda e:

$$\gamma = \sqrt{zy} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta$$

em que γ é a constante de propagação, α é a constante de atenuação e β é a constante de fase

- **Tomando como exemplo a equação de V: a solução da equação para V é tal que diferenciando a solução duas vezes se chegue à própria expressão original de V multiplicada por uma constante $\rightarrow$ isto sugere uma solução do tipo exponencial**

- **Considere a solução geral das equações diferenciais na forma:**

$$V(x) = A\cosh\gamma x + B\,\mathrm{senh}\,\gamma x$$
$$I(x) = C\cosh\gamma x + D\,\mathrm{senh}\,\gamma x$$

em que:

$$\cosh\gamma x = \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2}$$
$$\mathrm{senh}\,\gamma x = \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2}$$

e as constantes A, B, C e D dependem das condições iniciais

- **Supondo conhecidas a tensão e a corrente no início da linha:**

$$V(x=0) = V(0) \quad \textbf{e} \quad I(x=0) = I(0)$$

tem-se:

$$A = V(0) \quad \textbf{e} \quad C = I(0)$$

- **As constantes B e D são obtidas substituindo-se as expressões das soluções nas equações de primeira ordem obtidas anteriormente:**

$$\frac{d}{dx}V(x) = -zI(x)$$
$$\frac{d}{dx}I(x) = -yV(x)$$

Lembrando que:

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x \quad \textbf{e} \quad \frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x$$

obtém-se:

$$\gamma\left(A \operatorname{senh}\gamma x + B\cosh\gamma x\right) = -z\left(C\cosh\gamma x + D\operatorname{senh}\gamma x\right)$$
$$\gamma\left(C \operatorname{senh}\gamma x + D\cosh\gamma x\right) = -y\left(A\cosh\gamma x + B\operatorname{senh}\gamma x\right)$$

▶ **Para $x = 0$:**

$$\gamma B = -zC = -zI(0)$$
$$\gamma D = -yA = -yV(0)$$

$$B = -\frac{z}{\gamma} I(0) = -\sqrt{\frac{z}{y}} I(0) = -Z_c I(0)$$
$$D = -\frac{y}{\gamma} V(0) = -\sqrt{\frac{y}{z}} V(0) = -\frac{1}{Z_c} V(0)$$

▶ **A solução fica finalmente:**

$$V(x) = V(0)\cosh\gamma x - Z_c I(0)\,\mathrm{senh}\,\gamma x$$
$$I(x) = I(0)\cosh\gamma x - \frac{1}{Z_c} V(0)\,\mathrm{senh}\,\gamma x$$

em que $Z_c = \sqrt{z/y}$ é a impedância característica da linha – interpretação: Z_c é a impedância a ser colocada no final da linha para que se tenha a máxima transferência de potência entre gerador e carga $\rightarrow$ casamento de impedâncias

As equações fornecem a tensão e a corrente em qualquer ponto da linha, sabendo-se $V(0)$ e $I(0)$ no início da linha

$\gamma = \sqrt{zy}$ e $Z_c = \sqrt{z/y}$ dependem somente dos parâmetros da linha

▶ **Potência complexa em um ponto x da linha:**

$$S(x) = V(x)\ I(x)^* = P(x) + jQ(x)$$

- **Se, ao invés da tensão e corrente no início da linha, forem fornecidas a tensão e corrente no final da linha, as equações ficam:**

$$
\begin{aligned}
V(x) &= V(\ell)\cosh\gamma x + Z_c I(\ell)\,\mathrm{senh}\,\gamma x \\
I(x) &= I(\ell)\cosh\gamma x + \frac{1}{Z_c} V(\ell)\,\mathrm{senh}\,\gamma x
\end{aligned}
$$

em que ℓ é o comprimento da linha, $V(\ell)$ e $I(\ell)$ são a tensão e a corrente no final da linha e x é medido a partir do final da linha em direção ao início da linha

- **Outras maneiras de calcular senos e cossenos hiperbólicos:**

$$
\begin{aligned}
\cosh(a + jb) &= \cosh a \cos b + j\,\mathrm{senh}\,a\,\mathrm{sen}\,b \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{a}\angle b + e^{-a}\angle - b\right) \\
\mathrm{senh}(a + jb) &= \mathrm{senh}\,a \cos b + j\cosh a\,\mathrm{sen}\,b \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{a}\angle b - e^{-a}\angle - b\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cosh\theta &= 1 + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} + \cdots \\
\mathrm{senh}\,\theta &= \theta + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \frac{\theta^7}{7!} + \cdots
\end{aligned}
$$

■ Exemplo

Considere uma linha monofásica cujos condutores têm um raio de 2 cm, estão espaçados de 1 m, e:

- **a resistência e a condutância são desprezadas**
- **a freqüência é 60 Hz**
- **a tensão no início da linha é** $V(0) = 130\,\angle 0^\circ$ **kV**
- **a corrente no início da linha é** $I(0) = 50\,\angle -20^\circ$ **A**

Determine as expressões da tensão e da corrente ao longo da linha. Trace os gráficos dos valores absolutos da tensão e da corrente para x **variando de** 0 **a** 5000 **km. Verifique o que ocorre com a tensão ao longo da linha se ela tem um comprimento de** 200 **km.**

De acordo com o que foi apresentado anteriormente:

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D}{r'} = 4 \cdot 10^{-7} \ln \left(\frac{1}{0{,}02 \cdot 0{,}7788} \right) = 1{,}6648\ \mu\textbf{H/m}$$

$$C = \frac{\pi \varepsilon_0}{\ln(D/r)} = \frac{8{,}85\pi \cdot 10^{-12}}{\ln(1/0{,}02)} = 7{,}1071\ \textbf{pF/m}$$

Os parâmetros característicos da linha são:

$$z = R + j\omega L = j6{,}2763 \cdot 10^{-4} \ \Omega/\mathbf{m}$$
$$y = G + j\omega C = j2{,}6794 \cdot 10^{-9} \ \mathbf{S/m}$$

$$Z_c = \sqrt{z/y} = \sqrt{L/C} = 483{,}9883 \ \Omega$$
$$\gamma = \sqrt{zy} = j\omega\sqrt{LC} = j1{,}2968 \cdot 10^{-6} \ \mathbf{m}^{-1}$$

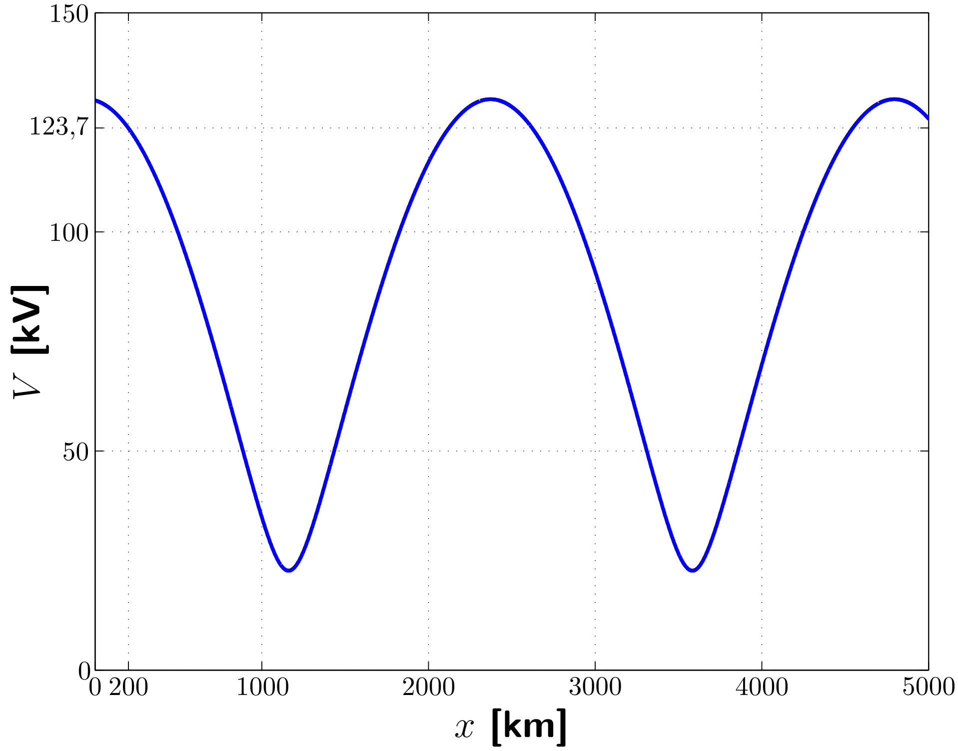
$$\alpha = \Re\{\gamma\} = 0$$
$$\beta = \Im\{\gamma\} = 1{,}2968 \cdot 10^{-6} \ \mathbf{m}^{-1}$$

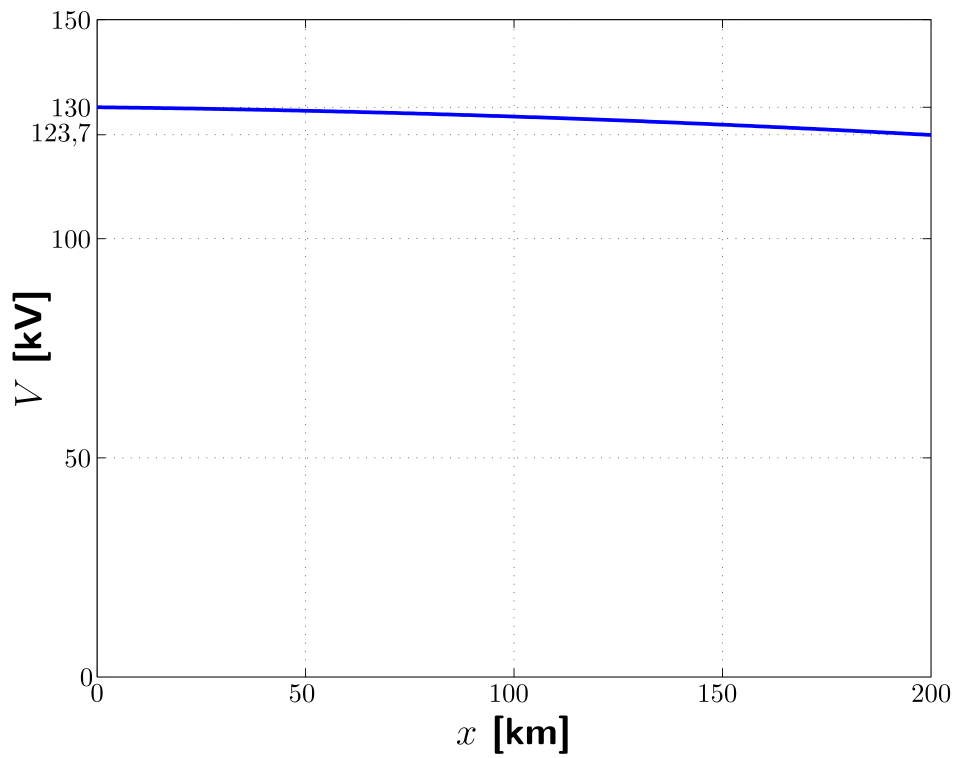
Tem-se ainda:

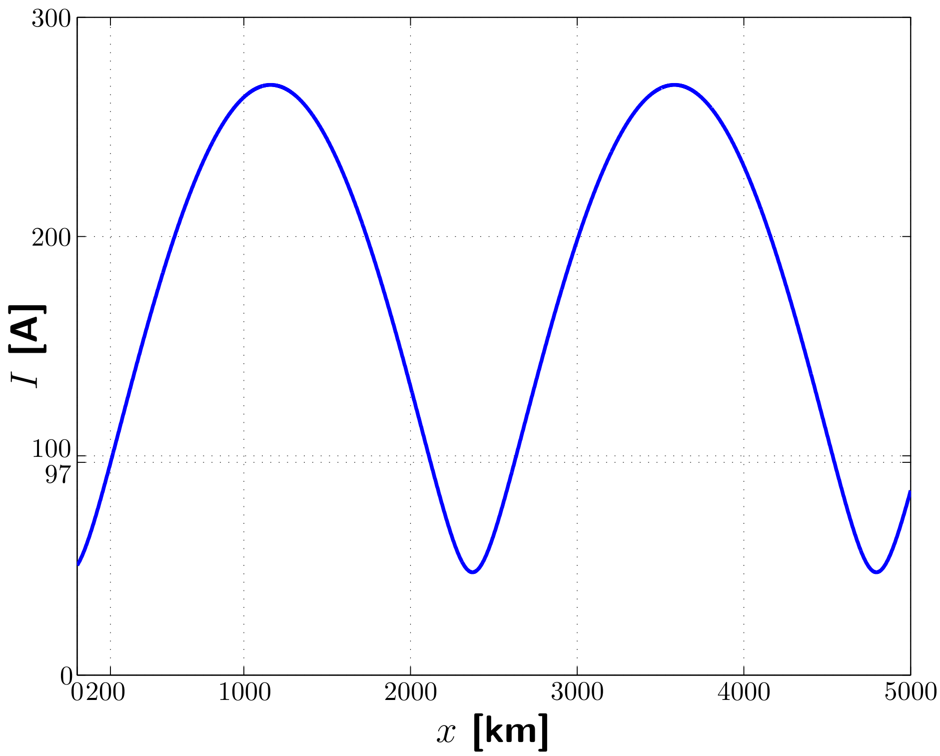
$$\cosh\gamma x = \cosh j\beta x = \frac{e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}}{2} = \cos\beta x$$
$$\operatorname{senh}\gamma x = \operatorname{senh} j\beta x = \frac{e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}}{2} = j \operatorname{sen}\beta x$$

Substituindo os valores numéricos nas expressões de tensão e corrente tem-se finalmente:

$$V(x) = 130 \cdot 10^3 \angle 0^\circ \cdot \cos\left(1{,}2968 \cdot 10^{-6} x\right) - 24{,}2 \cdot 10^3 \angle 70^\circ \cdot \operatorname{sen}\left(1{,}2968 \cdot 10^{-6} x\right) \ \mathbf{V}$$
$$I(x) = 50 \angle -20^\circ \cdot \cos\left(1{,}2968 \cdot 10^{-6} x\right) - 268{,}6015 \angle 90^\circ \cdot \operatorname{sen}\left(1{,}2968 \cdot 10^{-6} x\right) \ \mathbf{A}$$


150
123,7
100
50
0
0 200
1000
2000
3000
4000
5000
x [km]
V [kV]


150
130
123,7
100
50
0
0
50
100
150
200
x [km]
V [kV]



Das curvas pode-se notar que:

- **a tensão e a corrente variam ao longo da linha**
- **para** $x \approx 1160$ **km a tensão atinge o valor mínimo de aproximadamente** 23 **kV**
- **para uma linha com essas características e de comprimento igual a** 200 **km, a tensão no início da linha é de** 130 **kV e no final da linha é de aproximadamente** $123{,}7$ **kV, apresentando uma regulação de:**

$$\textbf{Regulação} = \frac{130 - 123{,}7}{123{,}7} \cdot 100 = 5{,}1\%$$

■ Exemplo

Uma linha de transmissão trifásica apresenta os seguintes parâmetros característicos por fase: $R = G = 0$**,** $L = 1{,}33 \cdot 10^{-7}$ **H/m e** $C = 8{,}86 \cdot 10^{-12}$ **F/m. Sabendo que no início da linha (**$x = 0$**) tem-se** $V(0) = 220/\sqrt{3}\,\angle 0°$ **kV (de fase) e** $S(0) = 150 + j50$ **MVA (por fase), obtenha:**

(a) a constante de propagação γ

Este exemplo refere-se a uma linha trifásica cujos parâmetros da representação por fase são fornecidos. Deve-se tratar uma fase da linha trifásica como uma linha monofásica:

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \sqrt{zy} \\
&= \sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)} \\
&= \sqrt{j\omega L \cdot j\omega C} \\
&= j\omega \sqrt{LC} \\
&= j4{,}0925 \cdot 10^{-7} \ \textbf{m}^{-1}
\end{aligned}
$$

(b) a impedância característica Z_c

$$
\begin{aligned}
Z_c &= \sqrt{z/y} \\
&= \sqrt{(R + j\omega L)\,(G + j\omega C)} \\
&= \sqrt{L/C} \\
&= 122{,}5206 \ \Omega
\end{aligned}
$$

(c) a tensão, a corrente e a potência no final da linha se o seu comprimento é de 300 km

A corrente no início da linha vale:

$$I(0) = \left(\frac{S(0)}{V(0)}\right)^* = 1244{,}9913\,\angle - 18{,}43^\circ \text{ A}$$

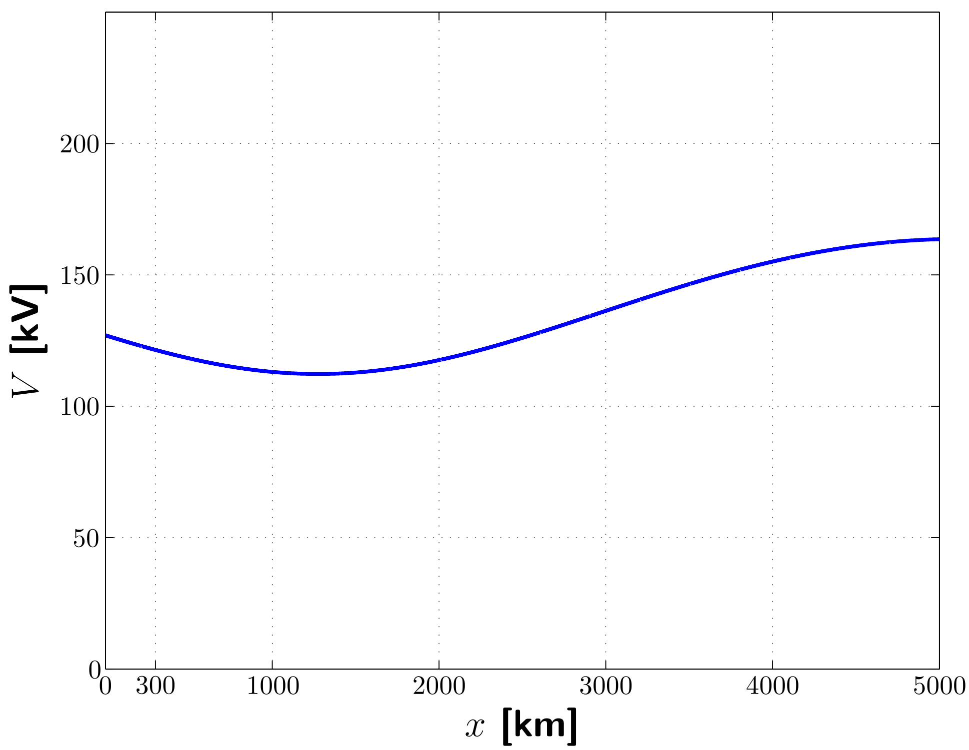
De modo similar ao exercício anterior:

$$\cosh \gamma x = \cosh j\beta x = \cos \beta x$$
$$\operatorname{senh} \gamma x = \operatorname{senh} j\beta x = j \operatorname{sen} \beta x$$

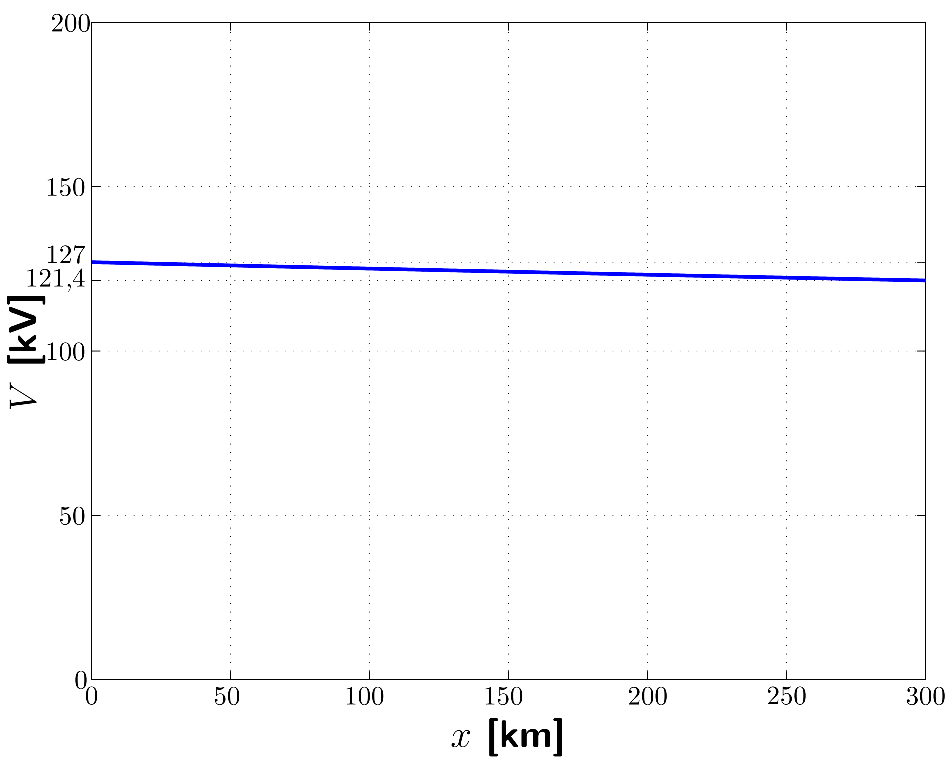
As equações de onda são:

$$\begin{aligned} V(x) &= 127 \cdot 10^3 \cdot \cos\left(4{,}0925 \cdot 10^{-7} \cdot x\right) - \\ &\quad 152{,}5371 \cdot 10^3\,\angle - 18{,}43^\circ \cdot \operatorname{sen}\left(4{,}0925 \cdot 10^{-7} \cdot x\right) \\ I(x) &= 1244{,}9913\,\angle - 18{,}43^\circ \cdot \cos\left(4{,}0925 \cdot 10^{-7} \cdot x\right) - \\ &\quad 1036{,}5604 \cdot \operatorname{sen}\left(4{,}0925 \cdot 10^{-7} \cdot x\right) \end{aligned}$$

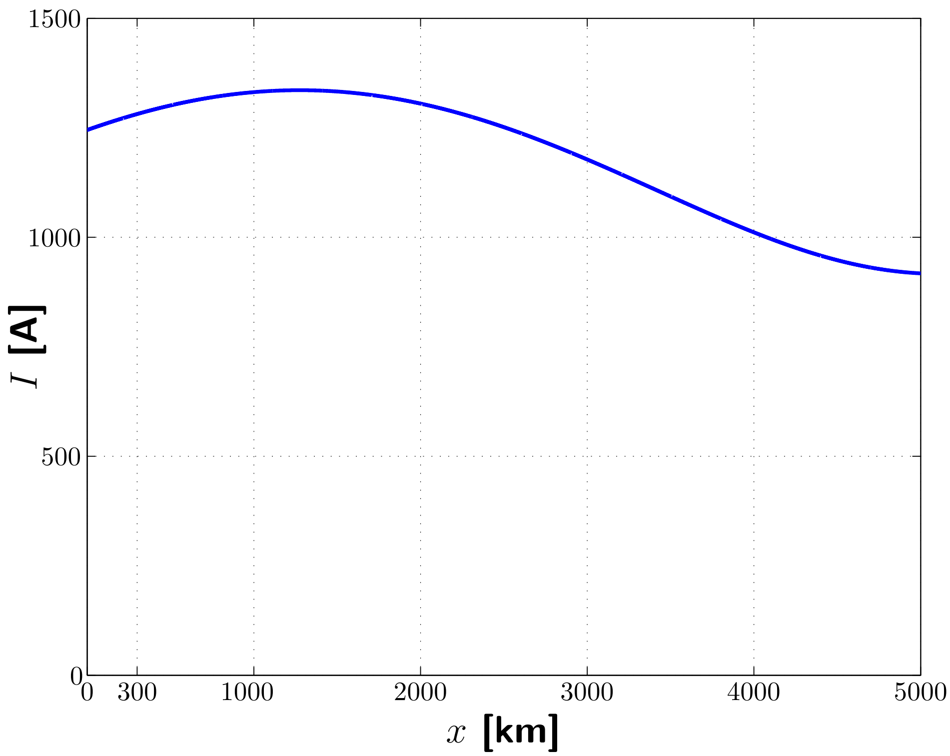
As figuras a seguir mostram os valores absolutos (rms) da tensão e corrente em função da distância ao ponto inicial da linha.



200
150
100
50
0
0
300
1000
2000
3000
4000
5000
V [kV]
x [km]



200
150
127
121,4
100
50
0
0
50
100
150
200
250
300
V [kV]
x [km]



Para um comprimento de 300 km, tem-se:

$$V\,(300) = 121{,}4402\,\angle - 8{,}39 \text{ **kV**}$$

$$I\,(300) = 1281{,}3949\,\angle - 23{,}82 \text{ **A**}$$

$$S\,(300) = V\,(300)\ I\,(300)^{*} = 155{,}6128\,\angle 15{,}43 \text{ **MVA**} = 150 + j41{,}4024 \text{ **MVA**}$$

Nota-se que a potência ativa no final da linha é igual à do início da linha (linha sem perdas) e que a potência reativa no final da linha é menor que à do início da linha, indicando que a linha apresenta um comportamento predominantemente indutivo.

- **É possível interpretar as equações de onda de tensão e corrente como ondas viajantes $\rightarrow$ pode-se decompor a onda em onda incidente e onda refletida, que resultam nas variações observadas nos exercícios anteriores**

- **Se carga apresenta impedância igual à impedância característica $\rightarrow$ não há onda refletida $\rightarrow$ linha plana ou linha infinita $\rightarrow$ formas de onda de tensão e corrente planas se a linha for sem perdas**

  De outra forma: se a impedância vista pela fonte é igual a Z_c $\rightarrow$ não há onda refletida $\rightarrow$ linha plana ou linha infinita $\rightarrow$ formas de onda de tensão e corrente planas

- **Valores típicos de Z_c são $400\ \Omega$ para linhas aéreas de circuito simples e $200\ \Omega$ para dois circuitos em paralelo. O ângulo de fase de Z_c está normalmente entre $0°$ e $15°$**

- **Cabos múltiplos têm Z_c menor porque L é menor e C é maior**

- **Comprimento de onda: distância entre dois pontos da linha correspondentes a um ângulo de fase de $360°$ ou 2π radianos:**

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

  Para linhas sem perdas:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{LC}} = \frac{1}{f\sqrt{LC}}$$

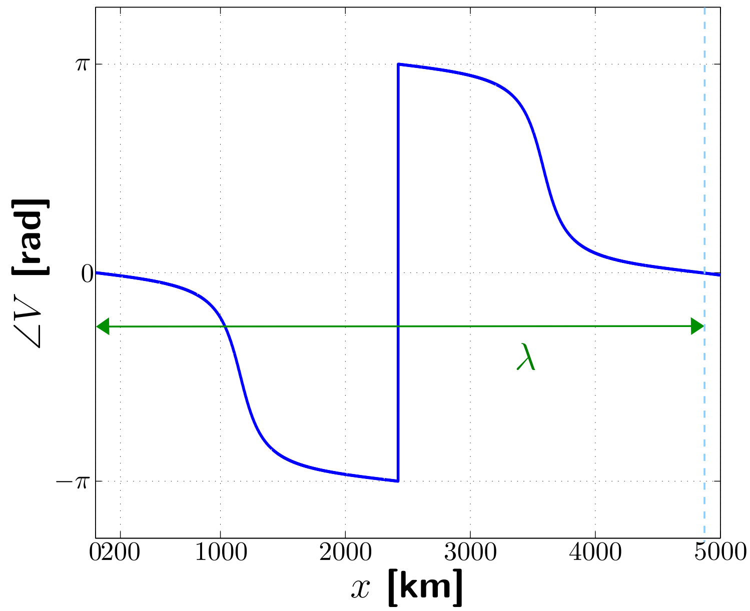
  Valores típicos para 60 Hz giram em torno de 5000 km

- **Velocidade de propagação da onda:**

$$v = f\,\lambda$$

■ Exemplo

Para a linha de transmissão monofásica estudada em exemplo anterior tem-se:



$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{1{,}2968 \cdot 10^{-6}} = 4845 \textbf{ km}$$

$$v = f\,\lambda = 2{,}91 \cdot 10^{8} \textbf{ m/s}$$

■

▶ **A velocidade de propagação calculada é sempre menor que a velocidade da luz no espaço livre, que é dada por:**

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

Considere uma linha monofásica sem perdas com dois condutores de raio r e separados por uma distância D. A indutância e a capacitância da linha valem:

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D}{r'} \qquad \textbf{e} \qquad C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(D/r)}$$

em que $r' = 0{,}7788r$. A impedância série e a capacitância shunt por unidade de comprimento valem:

$$z = j\omega L \qquad \textbf{e} \qquad y = j\omega C$$

A constante de propagação é igual a:

$$\gamma = \sqrt{zy} = j\omega\sqrt{LC} \quad \Rightarrow \quad \beta = \Im\{\gamma\} = \omega\sqrt{LC} = 2\pi f\sqrt{LC}$$

O comprimento de onda é:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{1}{f\sqrt{LC}}$$

A velocidade de propagação é:

$$
\begin{aligned}
v = \lambda f &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\
&= \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D}{r'} \cdot \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln{(D/r)}} \right)^{-1/2} \\
&= \left(\mu_0\varepsilon_0 \ln \frac{D}{r'} \frac{1}{\ln{(D/r)}} \right)^{-1/2}
\end{aligned}
$$

$$
v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0 \frac{\ln(D/r')}{\ln(D/r)}}}
$$

Das equações acima nota-se que se $r' = r$ tem-se:

$$
v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 2{,}9986 \cdot 10^8 \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}
$$

Como $r' < r$ tem-se $v < c$. O raio efetivo r' aparece em razão da existência do fluxo magnético interno ao condutor. Se o fluxo magnético fosse totalmente externo ao condutor, a velocidade de propagação seria igual à velocidade da luz para uma linha sem perdas.

A presença de perdas também resulta em uma velocidade de propagação menor.

■ **Exemplo**

Uma linha monofásica operando em 60 Hz é composta de dois condutores de raio 1 cm espaçados de 1 m. Calcule as velocidades de propagação para os casos em que:

(a) $R = 0$ **(linha sem perdas)**

O raio efetivo é:

$$r' = e^{-1/4} r = 0{,}0078 \text{ m}$$

A indutância da linha é dada por:

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{D}{r'}\right) = 9{,}7103 \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

em que $D = 1$ **m. A capacitância é igual a:**

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(D/r)} = 1{,}2075 \cdot 10^{-11} \text{ F/m}$$

Impedância série:

$$z = R + j\omega L = j0{,}0004 \ \Omega\text{/m}$$

Admitância shunt:

$$y = j\omega C = j4{,}5521 \cdot 10^{-9} \textbf{ S/m}$$

Constante de propagação:

$$\gamma = \sqrt{z \cdot y} = j1{,}2909 \cdot 10^{-6} \textbf{ m}^{-1}$$

que corresponde a uma constante de fase de:

$$\beta = \Im\{\gamma\} = 1{,}2909 \cdot 10^{-6} \textbf{ m}^{-1}$$

Comprimento de onda:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 4{,}8674 \cdot 10^{6} \textbf{ m}$$

Velocidade de propagação:

$$v = \lambda\, f = 2{,}9204 \cdot 10^{8} \textbf{ m/s}$$

que corresponde a $97{,}3\%$ **da velocidade da luz.**

(b) $R = 4 \cdot 10^{-5}$ **Ω/m.**

Neste caso a seqüência de cálculos é a mesma. As diferenças ocorrem para os seguintes valores:

$$
\begin{aligned}
z &= 4 \cdot 10^{-5} + j0{,}0004 \ \Omega/\mathbf{m} \\
\gamma &= 7{,}0422 \cdot 10^{-8} + j1{,}2928 \cdot 10^{-6} \ \mathbf{m}^{-1} \\
\beta &= 1{,}2928 \cdot 10^{-6} \mathbf{m}^{-1} \\
\lambda &= 4{,}8601 \cdot 10^{6} \ \mathbf{m} \\
v &= 2{,}9161 \cdot 10^{8} \ \mathbf{m/s}
\end{aligned}
$$

que corresponde a $97{,}2\%$ **da velocidade da luz. A inclusão de perdas resultou em uma velocidade de propagação menor.**

(c) $R = 4 \cdot 10^{-4}$ **Ω/m.**

Neste caso tem-se:

$$
\begin{aligned}
z &= 0{,}0004 + j0{,}0004 \ \Omega/\mathbf{m} \\
\gamma &= 6{,}3319 \cdot 10^{-7} + j1{,}4378 \cdot 10^{-6} \ \mathbf{m}^{-1} \\
\beta &= 1{,}4378 \cdot 10^{-6} \ \mathbf{m}^{-1} \\
\lambda &= 4{,}37 \cdot 10^{6} \ \mathbf{m} \\
v &= 2{,}622 \cdot 10^{8} \ \mathbf{m/s}
\end{aligned}
$$

que corresponde a $87{,}4\%$ **da velocidade da luz.**

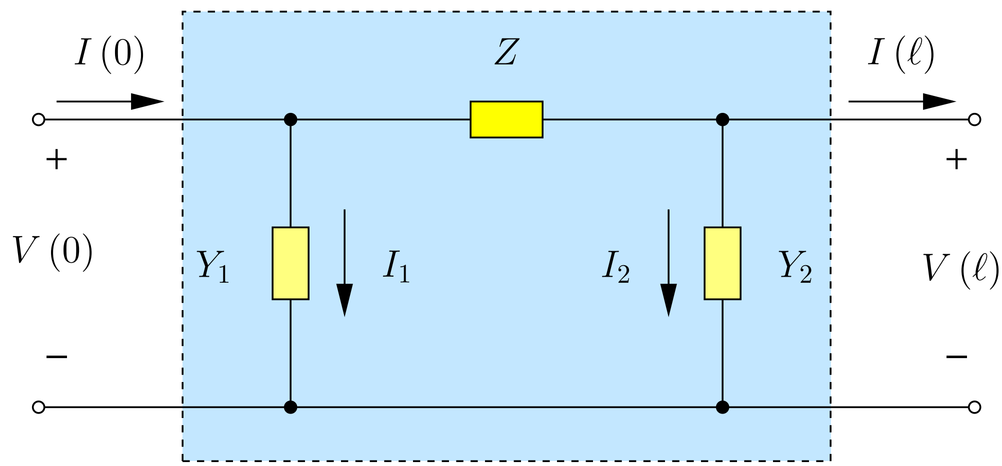
■

5.9.2 Circuito equivalente com parâmetros concentrados

- **Em geral tem-se interesse somente nas grandezas nos extremos da linha**

- **Idéia: obter um circuito com parâmetros concentrados que seja equivalente ao modelo de uma linha longa descrito pelas equações de onda $\rightarrow$ simplifica os cálculos**

- **O circuito π equivalente de uma linha de comprimento ℓ é:**



Linha de transmissão

- **o circuito equivalente poderia ser T, mas implicaria na criação de um nó fictício no circuito**

Linhas longas (mais que 240 km)

- **Idéia: obter equações para $V(\ell)$ e $I(\ell)$ em função de $V(0)$ e $V(0)$ e comparar com as equações do modelo distribuído.**

- **Do circuito π-equivalente tem-se:**

$$V(\ell) = V(0) - Z\left[I(0) - Y_1 V(0)\right]$$
$$I(\ell) = I(0) - Y_1 V(0) - Y_2 V(\ell)$$

$$V(\ell) = V(0) - Z\left[I(0) - Y_1 V(0)\right]$$
$$I(\ell) = I(0) - Y_1 V(0) - Y_2 V(0) + Z Y_2\left[I(0) - Y_1 V(0)\right]$$

$$V(\ell) = (1 + Z Y_1) V(0) - Z I(0)$$
$$I(\ell) = (1 + Z Y_2) I(0) - (Y_1 + Y_2 + Y_1 Y_2 Z) V(0)$$

- **Comparando com as equações de onda:**

$$1 + Z Y_1 = 1 + Z Y_2 = \cosh \gamma x$$
$$Z = Z_c \cdot \operatorname{senh} \gamma x$$
$$Y_1 + Y_2 + Y_1 Y_2 Z = \frac{1}{Z_c} \operatorname{senh} \gamma x$$

▶ Z **já está determinado. Determinação de** Y_1 **e** Y_2**:**

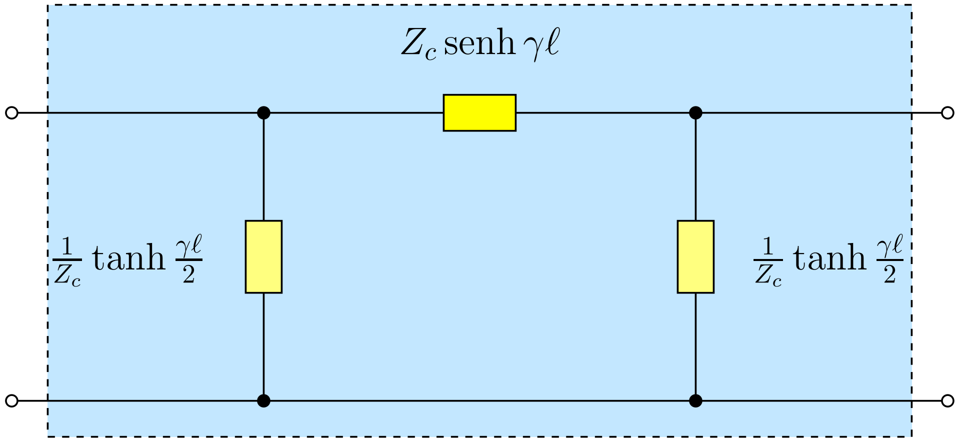
$$Y_1 = \frac{\cosh \gamma x - 1}{Z} = \frac{1}{Z_c} \frac{\cosh \gamma x - 1}{\operatorname{senh} \gamma x}$$

$$= \frac{1}{Z_c} \frac{\frac{e^{\gamma x}+e^{-\gamma x}}{2} - 1}{\frac{e^{\gamma x}-e^{-\gamma x}}{2}} = \frac{1}{Z_c} \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x} - 2}{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}$$

$$= \frac{1}{Z_c} \frac{\operatorname{senh}^2 \frac{\gamma x}{2}}{\operatorname{senh} \frac{\gamma x}{2} \cdot \cosh \frac{\gamma x}{2}} = \frac{1}{Z_c} \frac{\operatorname{senh} \frac{\gamma x}{2}}{\cosh \frac{\gamma x}{2}}$$

$$Y_1 = \frac{1}{Z_c} \tanh \frac{\gamma x}{2} = Y_2$$

e o circuito π**-equivalente para uma linha de comprimento** ℓ **fica:**



■ Exemplo

Para uma linha de transmissão trifásica, 60 Hz, tem-se $R = 0{,}107 \cdot 10^{-3}$ Ω/m, $L = 1{,}35 \cdot 10^{-6}$ H/m e $C = 8{,}45 \cdot 10^{-12}$ F/m. A tensão no início da linha é igual a 220 kV e o seu comprimento é de 362 km.

(a) Determine Z_c e γ.

Tem-se os seguintes resultados:

$$
\begin{aligned}
z &= R + j\omega L = (1{,}07 + j5{,}0895) \cdot 10^{-4} \ \Omega/\mathbf{m} \\
y &= G + j\omega C = j3{,}1856 \cdot 10^{-9} \ \mathbf{S/m} \\
Z_c &= \sqrt{\frac{z}{y}} = 404{,}0493 \angle -5{,}94^\circ \ \Omega \\
\gamma &= \sqrt{zy} = 1{,}2872 \cdot 10^{-6} \angle 84{,}06^\circ \ \mathbf{m}^{-1}
\end{aligned}
$$

(b) Determine o circuito π equivalente da linha.

Para um comprimento $\ell = 362$ km, os parâmetros dos circuito π equivalente são:

$$
\begin{aligned}
Z &= Z_c \operatorname{senh} \gamma\ell = 181{,}6733 \angle 78{,}56^\circ \ \Omega \\
Y_1 = Y_2 &= \frac{1}{Z_c} \tanh \frac{\gamma x}{2} = 5{,}8703 \cdot 10^{-4} \angle 89{,}78^\circ \ \mathbf{S}
\end{aligned}
$$

(c) Determine a impedância vista pela fonte caso uma impedância igual a Z_c seja conectada no final da linha.

A impedância vista no início da linha será:

$$Z_{\text{vista}} = Y_1^{-1} // \left[Z + \left(Z_c // Y_1^{-1} \right) \right] = 404{,}0493 \angle -5{,}94^\circ \ \Omega = Z_c$$

ou seja, a fonte no início da linha enxerga uma impedância igual à impedância característica Z_c.

■

■ **Exercício**

Obtenha o gráfico $[\, |V_{\text{linha}}| \times x \,]$ para a linha do exemplo anterior, considerando a situação descrita no item (c).

■

Linhas médias (até 240 km)

- **É feita a seguinte aproximação:**

Os termos $\cosh$ e senh apresentam termos exponenciais. Desenvolvendo esses termos exponenciais em série de Taylor tem-se:

$$e^{x} \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$
$$e^{-x} \approx 1 - x + \frac{x^2}{2!}$$

$\rightarrow$ **termos de ordem maior que 2 foram desprezados**

- Se o comprimento da linha ℓ é pequeno, então $|\gamma\ell|$ será pequeno e as seguintes aproximações são válidas:

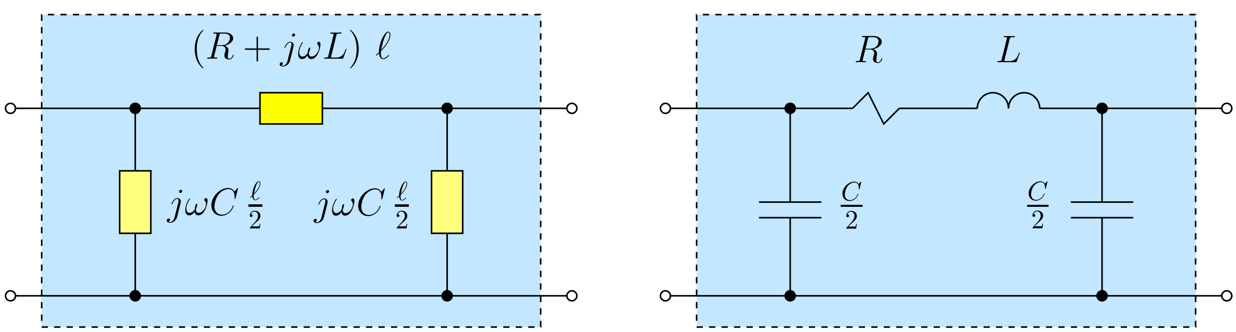
$$\begin{aligned} \operatorname{senh} \gamma\ell &\approx \gamma\ell \\ \cosh \gamma\ell &\approx 1 + (\gamma\ell)^2/2 \\ \tanh \frac{\gamma\ell}{2} &\approx \frac{\gamma\ell}{2} \end{aligned}$$

- Os elementos do circuito equivalente ficam:

$$Z = Z_c \operatorname{senh} \gamma\ell \approx Z_c \gamma\ell = \sqrt{\frac{z}{y}} \cdot \sqrt{zy} \cdot \ell = z\,\ell = (R + j\omega L)\,\ell$$

$$Y_1 = Y_2 = \frac{1}{Z_c} \tanh \frac{\gamma\ell}{2} \approx \frac{1}{Z_c} \cdot \frac{\gamma\ell}{2} = \sqrt{\frac{y}{z}} \cdot \sqrt{zy} \cdot \frac{\ell}{2} = y\,\frac{\ell}{2} = (G + j\omega C)\,\frac{\ell}{2}$$

- O circuito equivalente da linha de transmissão com os parâmetros simplificados é chamado de **modelo π nominal**:



- Nas figuras, a condutância G foi desprezada e, no circuito da direita, o comprimento da linha é considerado nos valores dos parâmetros

- **Observações:**

  - **Quase todas as linhas são modeladas como linhas médias (modelo π-nominal)**

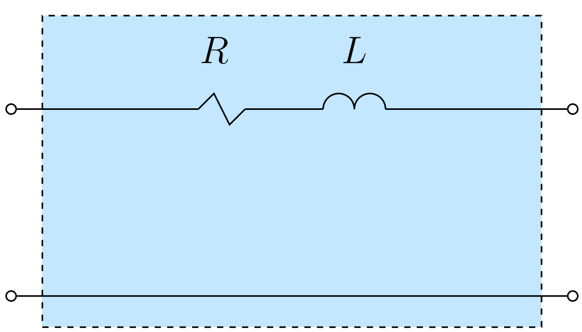
  - **Se a linha é longa, é modelada como vários circuitos π-nominal em cascata**

  - **Em certos estudos exige-se uma grande precisão $\rightarrow$ equações de onda são usadas $\rightarrow$ por exemplo em estudos de transitórios em linhas de transmissão, etc.**

Linhas curtas (até 80 km)

- **Encontradas normalmente em redes de distribuição e subtransmissão em média tensão**

- **Os efeitos dos campos elétricos podem ser desprezados $\rightarrow$ capacitâncias shunt desprezadas:**



■ Exemplo

Para a linha de transmissão trifásica, 60 Hz, de um exemplo anterior, tem-se $R = 0{,}107 \cdot 10^{-3}$ Ω/m, $L = 1{,}35 \cdot 10^{-6}$ H/m e $C = 8,45 \cdot 10^{-12}$ F/m. Os seguintes valores foram obtidos:

$$
\begin{aligned}
z &= 5{,}2008 \cdot 10^{-4} \angle 78{,}13^\circ \ \Omega/\mathbf{m} \\
y &= 3{,}1856 \cdot 10^{-9} \angle 90^\circ \ \mathbf{S/m} \\
Z_c &= 404{,}0493 \angle -5{,}94^\circ \ \Omega \\
\gamma &= 1{,}2872 \cdot 10^{-6} \angle 84{,}06^\circ \ \mathbf{m}^{-1}
\end{aligned}
$$

Determine os circuitos π equivalente e π nominal da linha e compare os resultados obtidos. Considerar a linha com 362 km e com 100 km.

O circuito equivalente π equivalente da linha para $\ell = 362$ km já foi calculado anteriormente. Os parâmetros do circuito π nominal são:

$$
\begin{aligned}
Z &= (R + j\omega L)\ \ell = 188{,}2690 \angle 78{,}13^\circ \ \Omega \\
Y_1 = Y_2 &= j\omega C \, \frac{\ell}{2} = 5{,}759 \cdot 10^{-4} \ \mathbf{S}
\end{aligned}
$$

A tabela a seguir mostra a comparação entre os modelos, incluindo o erro resultante, calculado por:

$$
\textbf{erro}_{\%} = \frac{|\,\textbf{parâmetro-}\pi\textbf{-equiv}\,| - |\,\textbf{parâmetro-}\pi\textbf{-nom}\,|}{|\,\textbf{parâmetro-}\pi\textbf{-equiv}\,|} \cdot 100\%
$$

parâmetro	π equivalente	π nominal	erro$_{\%}$
$\mid Z \mid$	$181{,}6733$	$188{,}2675$	$-3{,}6$
$\mid Y \mid$	$5{,}8703 \cdot 10^{-4}$	$5{,}7660 \cdot 10^{-4}$	$1{,}8$

Os parâmetros para $\ell = 100$ km e os erros resultantes são mostrados na tabela a seguir.

parâmetro	π equivalente	π nominal	erro$_{\%}$
$\mid Z \mid$	$51{,}8693$	$52{,}0076$	$-0{,}3$
$\mid Y \mid$	$1{,}5950 \cdot 10^{-4}$	$1{,}5930 \cdot 10^{-4}$	$0{,}1$

Verifica-se que as diferenças entre os modelos π equivalente e π nominal aumentam para linhas mais longas.

■

■ Exemplo (para ser estudado em casa)

Uma linha de transmissão trifásica de 60 Hz de circuito simples tem um comprimento de 370 km (230 mi). Os condutores são do tipo Rook com espaçamento horizontal plano de $7{,}25$ m ($23{,}8$ ft) entre condutores. A carga na linha é de 125 MW, a 215 kV, com fator de potência de 100%. Determine a tensão, a corrente e a potência na barra transmissora e a regulação de tensão da linha. Determine também o comprimento de onda e a velocidade de propagação da linha.

O espaçamento eqüilátero equivalente da linha é:

$$D_{eq} = \sqrt[3]{23{,}8 \cdot 23{,}8 \cdot 47{,}6} = 30 \text{ ft}$$

Das tabelas A.3, A.4 e A.5 tem-se:

$$z = 0{,}1603 + j\,(0{,}415 + 0{,}4127) = 0{,}8431\,\angle 79{,}04^\circ\ \Omega/\textbf{mi}$$

$$y = j\,[1/\,(0{,}0950 + 0{,}1009)] \cdot 10^{-6} = 5{,}105 \cdot 10^{-6}\,\angle 90^\circ\ \textbf{S/mi}$$

$$\gamma\ell = \sqrt{zy}\,\ell = 0{,}4772\,\angle 84{,}52^\circ = 0{,}0456 + j0{,}4750$$

$$Z_c = \sqrt{z/y} = 406{,}4\,\angle - 5{,}48^\circ\ \Omega$$

Na barra receptora tem-se:

$$V_R = \frac{215}{\sqrt{3}}\,\angle 0^\circ = 124{,}13\,\angle 0^\circ\ \textbf{kV}$$ **(tensão de fase, tomada como ref. angular)**

$$I_R = \left(\frac{S/3}{V_R}\right)^* = \left(\frac{125 \cdot 10^6/3}{215 \cdot 10^3/\sqrt{3}}\right)^* = 335{,}7\,\angle 0^\circ\ \textbf{A}$$

Das equações de onda:

$$\begin{aligned} V_S &= V_R \cosh\gamma\ell + Z_c I_R \,\mathrm{senh}\,\gamma\ell \\ &= 124{,}13 \cdot 10^3 \cdot 0{,}8904\,\angle 1{,}34^\circ + 406{,}4\,\angle - 5{,}48^\circ \cdot 335{,}7 \cdot 0{,}4596\,\angle 84{,}94 \\ &= 137{,}851\,\angle 27{,}77^\circ\ \textbf{kV} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_s &= I_R \cosh\gamma\ell + (V_R/Z_c)\,\mathrm{senh}\,\gamma\ell \\ &= 335{,}7 \cdot 0{,}8904\,\angle 1{,}34^\circ + \left(124{,}13 \cdot 10^3/406{,}4\,\angle - 5{,}48^\circ\right) \cdot 0{,}4596\,\angle 84{,}94 \\ &= 332{,}27\,\angle 26{,}33^\circ\ \textbf{A} \end{aligned}$$

Na barra transmissora:

$$\textbf{Tensão de linha} = \sqrt{3} \cdot 137{,}851 = 238{,}8 \textbf{ kV}$$
$$\textbf{Corrente de linha} = 332{,}27 \textbf{ A}$$
$$\textbf{Fator de potência} = \cos(27{,}77 - 26{,}33) = 0{,}9997$$
$$\textbf{Potência} = \sqrt{3} \cdot 238{,}8 \cdot 332{,}27 \cdot 0{,}9997 = 137{,}4 \textbf{ MW}$$

Considerando uma tensão fixa na barra transmissora, a tensão na barra receptora em vazio ($I_R = 0$) será:

$$V_R^{\text{vazio}} = \frac{V_S}{\cosh \gamma\ell}$$

Logo, a regulação será:

$$\textbf{Regulação} = \frac{V_R^{\text{vazio}} - V_R}{V_R} \cdot 100\% = \frac{137{,}85/0{,}8904 - 124{,}13}{124{,}13} \cdot 100\% = 24{,}7\%$$

O comprimento de onda e a velocidade de propagação podem ser calculados por:

$$\beta = \frac{\Im\{\gamma\ell\}}{\ell} = \frac{0{,}4750}{230} = 0{,}002065 \textbf{ mi}^{-1}$$
$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 3043 \textbf{ mi}$$
$$v = f\,\lambda = 182580 \textbf{ mi/s} = 2{,}94 \cdot 10^{8} \textbf{ m/s}$$

■

■ Exemplo (para ser estudado em casa)

Determine os circuitos π equivalente e π nominal para a linha do exemplo anterior. Compare os resultados obtidos.

Os parâmetros do modelo π equivalente são:

$$Z_{eq} = Z_c \operatorname{senh} \gamma\ell = 186{,}78 \angle 79{,}46^\circ \ \Omega$$

$$Y_{eq} = \frac{1}{Z_c} \tanh \frac{\gamma\ell}{2} = 0{,}000599 \angle 89{,}81^\circ \ \mathsf{S}$$

Os parâmetros do modelo π nominal são:

$$Z_{nom} = z\,\ell = 193{,}9 \angle 79{,}04^\circ \ \Omega$$

$$Y_{nom} = \frac{y}{2}\,\ell = 0{,}000587 \angle 90^\circ \ \mathsf{S}$$

A impedância série do modelo π nominal excede a do modelo π equivalente em $3{,}8\%$**. A admitância em derivação do modelo π nominal é** 2% **menor que a do modelo π equivalente.**

■

5.10 Carregamento característico da linha

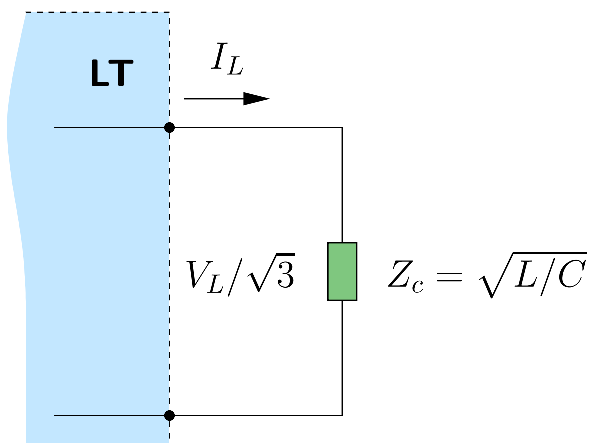
- **Conforme definido anteriormente, Z_c corresponde à impedância característica da linha**

- **Para uma linha sem perdas ($G = R = 0$):**

$$Z_c = \sqrt{\frac{z}{y}} = \sqrt{\frac{L}{C}}\ \Omega \quad \rightarrow \quad \textbf{impedância de surto (surge impedance)}$$

- **Em alguns tipos de estudo, como por exemplo de descargas atmosféricas em linhas de transmissão, as perdas são em geral desprezadas**

- **Carregamento característico: potência fornecida a uma carga resistiva pura igual à impedância de surto:**



Esta potência é transmitida através da linha de transmissão

Em Inglês SIL – Surge Impedance Loading

▶ **A equação de onda da tensão pode ser dada por:**

$$V(x) = V_R \cosh \gamma x + Z_c I_R \sinh \gamma x$$

em que V_R e I_R são a tensão e a corrente na barra receptora (final da linha)

▶ **Para a linha sem perdas:**

$$Z_c = \sqrt{L/C} \qquad \cosh \gamma x = \cos \beta x$$
$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC} \qquad \operatorname{senh} \gamma x = j \operatorname{sen} \beta x$$

▶ **Se uma carga com impedância $Z_c = \sqrt{L/C}$ for conectada na barra receptora, a corrente será:**

$$I_R = \frac{V_R}{Z_c}$$

e a equação de tensão fica:

$$\begin{aligned} V(x) &= V_R \cos \beta x + jZ_c \frac{V_R}{Z_c} \operatorname{sen} \beta x \\ &= V_R (\cos \beta x + j \operatorname{sen} \beta x) \\ &= V_R e^{j\beta x} \\ |V(x)| &= |V_R| \end{aligned}$$

ou seja, para uma carga cuja impedância é igual à impedância de surto, o perfil de tensão será plano

- **Análise semelhante para a equação de corrente fornece:**

$$
\begin{aligned}
I(x) &= I_R \cosh \gamma x + \frac{V_R}{Z_c} \operatorname{senh} \gamma x \\
&= \frac{V_R}{Z_c} e^{j\beta x} \\
|I(x)| &= |I_R|
\end{aligned}
$$

- **Potência complexa através da linha:**

$$
\begin{aligned}
S(x) &= V(x)\, I(x)^* \\
&= \frac{|V_R|^2}{Z_c}
\end{aligned}
$$

ou seja, a potência ativa é constante ao longo da linha e não há fluxo de potência reativa

- **Se V_L é a tensão de linha no final da linha, onde está conectada uma carga resistiva de impedância igual a $R_c = \sqrt{L/C}$ (impedância de surto), a corrente vale:**

$$
I_L = \frac{V_L/\sqrt{3}}{\sqrt{L/C}} \ \textbf{A}
$$

- **Potência total entregue à carga (carregamento característico):**

$$\textsf{SIL} = \sqrt{3} V_L I_L = \sqrt{3} V_L \, \frac{V_L/\sqrt{3}}{\sqrt{L/C}}$$
$$= \frac{V_L^2}{\sqrt{L/C}}$$

- **Em geral a tensão utilizada para o cálculo de SIL é a tensão nominal da linha. Portanto:**

$$\textsf{SIL} = \frac{V_{\text{nominal}}^2}{\sqrt{L/C}}$$

- **SIL fornece um termo de comparação das capacidades de carregamento das linhas**

- **É comum a representação da potência transmitida por uma linha em valores por unidade de SIL (p.ex.** $0{,}2$ **pu SIL)**

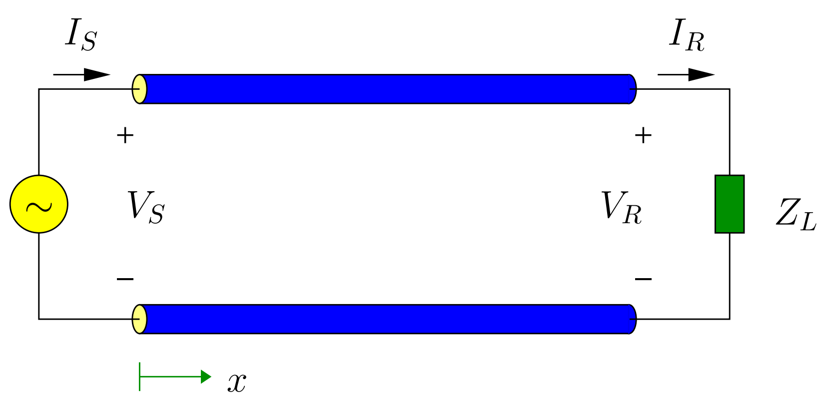
- **SIL não corresponde à máxima potência que pode ser transmitida pela linha. Esta depende de outros fatores, como o comprimento da linha etc.**

5.11 Perfil de tensão da linha

■ Exemplo

Considere novamente a linha de transmissão trifásica de 60 Hz de circuito simples de um exemplo anterior, que tem um comprimento de 370 km (230 mi). Os condutores são do tipo Rook com espaçamento horizontal plano de $7{,}25$ m ($23{,}8$ ft) entre condutores. Obtenha o perfil de tensão da linha, considerando as seguintes situações: (a) linha em vazio; (b) linha em curto-circuito; (c) carga SIL conectada à barra receptora (neste caso, desprezar as perdas ôhmicas da linha); (d) carga nominal conectada à barra receptora; (e) carga leve conectada à barra receptora; (f) carga pesada conectada à barra receptora.

Tem-se o seguinte circuito por fase:



Os dados da linha são:

$$z = 0{,}8431\,\angle 79{,}04^\circ \ \Omega/\textbf{mi}$$

$$y = 5{,}105 \cdot 10^{-6}\,\angle 90^\circ \ \textbf{S/mi}$$

$$\gamma = 2{,}0746 \cdot 10^{-3}\,\angle 84{,}52^\circ \ \textbf{mi}^{-1}$$

$$Z_c = 406{,}4\,\angle -5{,}48 \ \Omega$$

(a) Em vazio: tem-se $Z_L \to \infty$ e, portanto, $I_R = 0$. Da equação de onda de corrente:

$$I_R = I_S \cosh \gamma\ell - \frac{V_S}{Z_c} \operatorname{senh} \gamma\ell = 0 \qquad \to \qquad I_S = \frac{V_S}{Z_c} \operatorname{tgh} \gamma\ell$$

A equação de onda da tensão fica:

$$\begin{aligned} V(x) &= V_S \cosh \gamma x - Z_c I_S \operatorname{senh} \gamma x \\ &= V_S \left(\cosh \gamma x - \operatorname{tgh} \gamma\ell \, \operatorname{senh} \gamma x\right) \end{aligned}$$

(b) Em curto-circuito: tem-se $Z_L = 0$, e, portanto, $V_R = 0$. Da equação de onda da tensão:

$$V_R = V_S \cosh \gamma\ell - Z_c I_S \operatorname{senh} \gamma\ell = 0 \qquad \to \qquad I_S = \frac{V_S}{Z_c \operatorname{tgh} \gamma\ell}$$

A equação de onda da tensão fica:

$$\begin{aligned} V(x) &= V_S \cosh \gamma x - Z_c I_S \operatorname{senh} \gamma x \\ &= V_S \left(\cosh \gamma x - \frac{\operatorname{senh} \gamma x}{\operatorname{tgh} \gamma\ell}\right) \end{aligned}$$

(c) Neste caso, as perdas ôhmicas da linha são desprezadas, logo:

$$\begin{aligned} z' &= 0{,}8277 \angle 90^\circ \ \Omega/\textbf{mi} \\ y' &= y = 5{,}105 \cdot 10^{-6} \angle 90^\circ \ \textbf{S/mi} \\ \gamma' &= 2{,}0556 \cdot 10^{-3} \angle 90^\circ \ \textbf{mi}^{-1} \\ Z_c' &= 402{,}66 \ \Omega = Z_L \end{aligned}$$

Conforme visto anteriormente, a equação de onda da tensão neste caso fica:

$$V_R = V_S \cos\beta\ell - jZ'_c I_S \operatorname{sen}\beta\ell = Z'_c I_R$$
$$I_R = \frac{V_S}{Z'_c}\cos\beta\ell - jI_S \operatorname{sen}\beta\ell$$

Tomando a equação de onda de corrente tem-se:

$$I_R = I_S \cos\beta\ell - j\frac{V_S}{Z'_c}\operatorname{sen}\beta\ell$$

Comparando as duas equações para I_R, verifica-se que $V_S = Z'_c I_S$ e a equação das tensões fica:

$$V(x) = V_S(\cos\beta x - j\operatorname{sen}\beta x) = V_S e^{j\beta x}$$

(d) Considerando uma carga nominal Z_L: as equações de onda são:

$$V_R = V_S \cos\gamma\ell - Z_c I_S \operatorname{sen}\gamma\ell = Z_L I_R \quad (1)$$
$$I_R = I_S \cos\gamma\ell - \frac{V_S}{Z_c}\operatorname{sen}\gamma\ell = Z_L I_R \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) obtém-se a seguinte expressão para I_S:

$$I_S = \left(\frac{V_S \cos\gamma\ell + \frac{Z_L}{Z_c}V_S \operatorname{sen}\gamma\ell}{Z_L \cos\gamma\ell + Z_c \operatorname{sen}\gamma\ell}\right) \quad (3)$$

Portanto, a equação de onda de tensão fica:

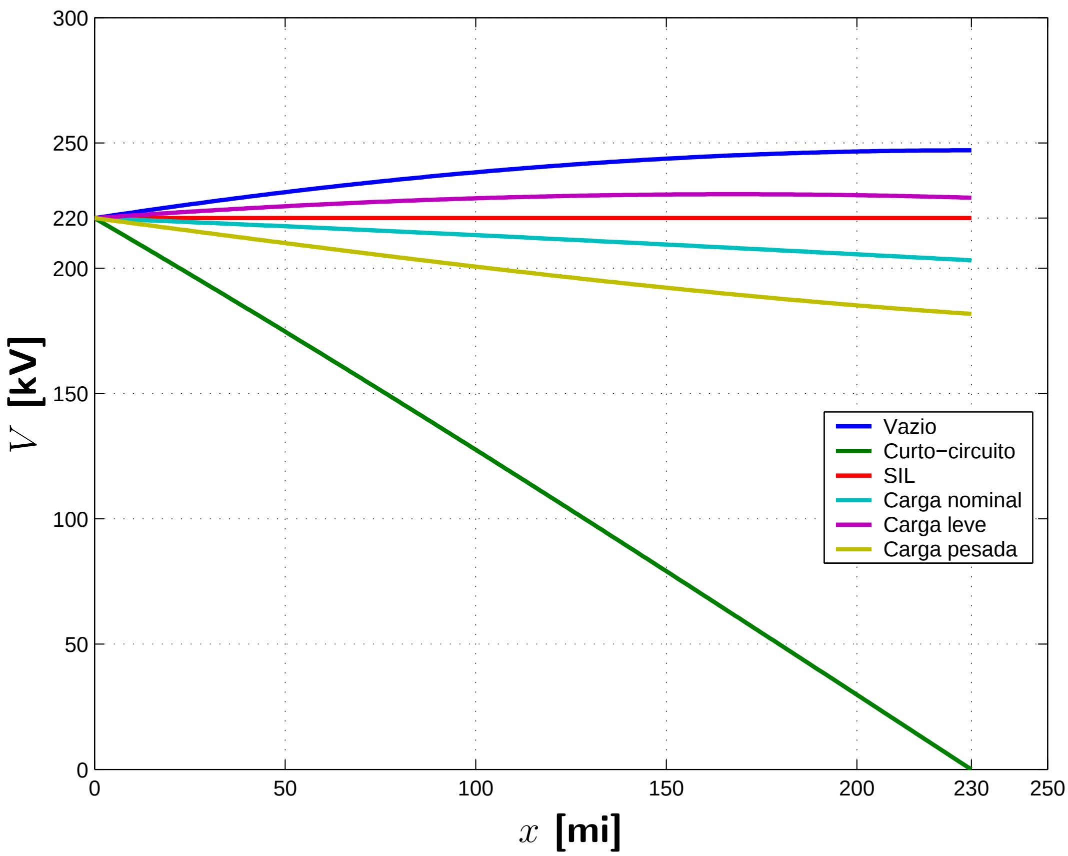
$$V(x) = V_S \cosh \gamma x - Z_c I_S \sinh \gamma x$$

em que I_S é dado por (3).

(e) Carga leve: vale a equação do item (d) com o valor apropriado de Z_L.

(f) Carga pesada: vale a equação do item (d) com o valor apropriado de Z_L.

A figura a seguir mostra os perfis de tensão para todos os casos estudados.



■

5.12 Limites térmico e de estabilidade

- **A equação de onda pode ser colocada na forma:**

$$V_S = AV_R + BI_R$$

em que:

$$\begin{aligned} V_S, V_R &: \textbf{ tensões nas barras inicial e final, respectivamente} \\ I_S, I_R &: \textbf{ correntes nas barras inicial e final, respectivamente} \\ A &= \cosh \gamma\ell \\ B &= Z_c \operatorname{senh} \gamma\ell \end{aligned}$$

- **Considerando:**

$$\begin{aligned} V_R &= V_R \angle 0^\circ \\ V_S &= V_S \angle \delta \\ A &= A \angle \alpha \\ B &= B \angle \beta \end{aligned}$$

tem-se:

$$I_R = \frac{V_S - AV_R}{B} = \frac{V_S}{B} \angle (\delta - \beta) - \frac{AV_R}{B} \angle (\alpha - \beta)$$

- **A potência complexa na barra receptora é:**

$$S_R = V_R I_R^* = \frac{V_S V_R}{B} \angle (\beta - \delta) - \frac{A V_R^2}{B} \angle (\beta - \alpha)$$

$$\Downarrow$$

$$P_R = \frac{V_S V_R}{B} \cos (\beta - \delta) - \frac{A V_R^2}{B} \cos (\beta - \alpha)$$

$$Q_R = \frac{V_S V_R}{B} \operatorname{sen} (\beta - \delta) - \frac{A V_R^2}{B} \operatorname{sen} (\beta - \alpha)$$

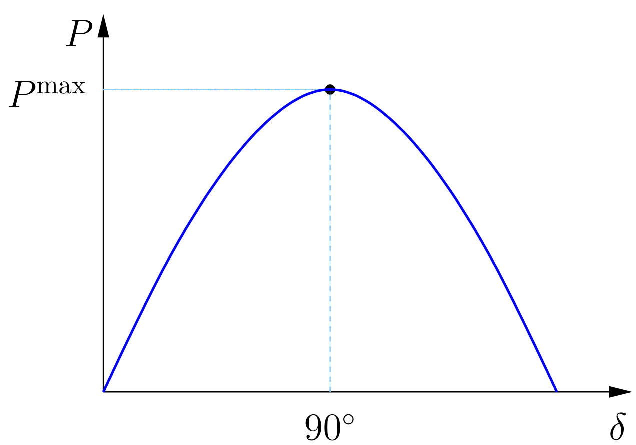
- **Para facilitar a análise, considera-se uma linha média sem perdas:**

$$A = \cosh \gamma\ell \approx 1 \angle 0^\circ$$

$$B = Z_c \operatorname{senh} \gamma\ell \approx Z_c \gamma\ell = z\,\ell = (j\omega L)\,\ell = jX = X \angle 90^\circ$$

- **Com relação à potência ativa:**

$$P_R = \frac{V_S V_R}{X} \cos (90^\circ - \delta) = \frac{V_S V_R}{X} \operatorname{sen} \delta$$



- **Mantendo V_S e V_R constantes, um aumento da carga implica em um aumento do ângulo δ. Existe um limite máximo de potência ativa que pode ser entregue:**

$$\frac{d}{d\delta} P_R = \frac{V_S V_R}{X} \cos\delta = 0$$

ou $\delta = 90^\circ$ e:

$$P_R^{\max} = \frac{V_S V_R}{X}$$

que representa o limite de estabilidade da linha sem perdas

- **Considere que:**

$$V_S = V_R = V$$
$$\delta = 90^\circ$$
$$X = x\,\ell$$

Logo:

$$P_R^{\max} = \frac{V_S V_R}{X} = \frac{V^2}{x\,\ell} = \frac{K}{\ell}$$

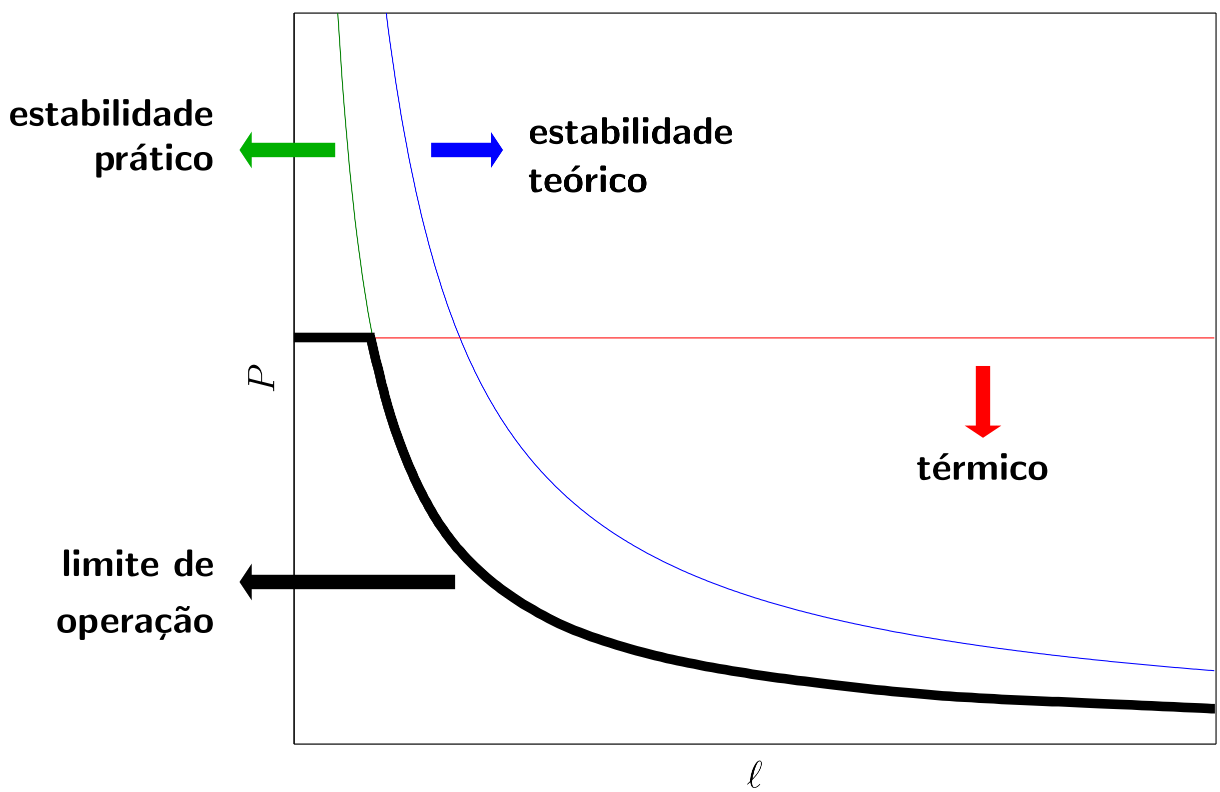
ou seja, o limite de estabilidade da linha é inversamente proporcional ao seu comprimento

Na prática, no entanto, considera-se (por motivos de segurança):

$$V_S = V$$
$$V_R \approx 0{,}95V$$
$$\delta \approx 30^\circ$$
$$X = x\,\ell$$

Logo:

$$P_R^{\max\prime} = \frac{V_S V_R}{X}\,\mathrm{sen}\,\delta = \frac{0{,}95V^2}{x\,\ell}\,\mathrm{sen}\,30^\circ = 0{,}475\,\frac{V^2}{x\,\ell} = 0{,}475\,P_R^{\max} = \frac{K'}{\ell}$$



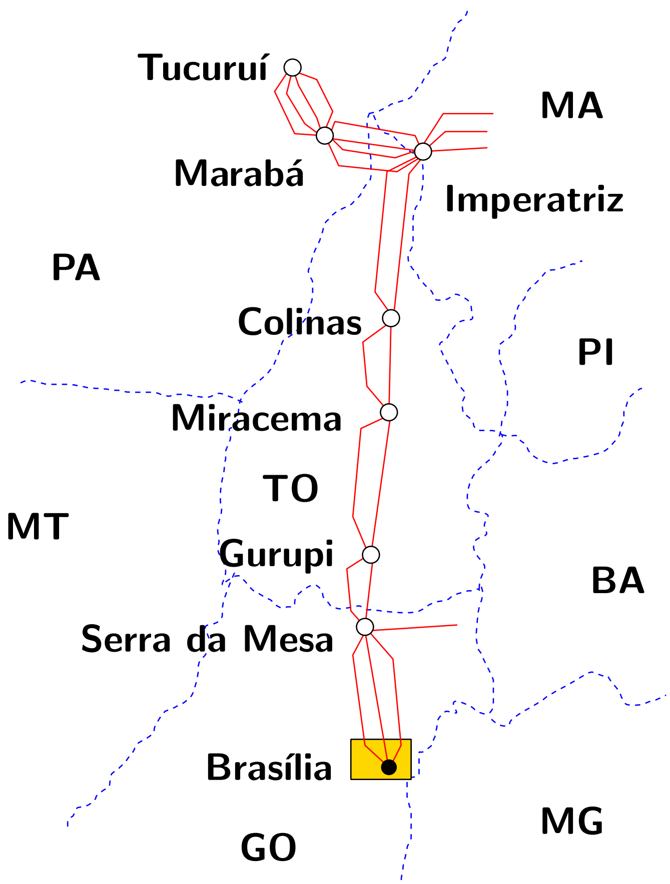
▶ A utilização do limite prático de estabilidade visa manter a estabilidade durante transitórios provocados por distúrbios na rede

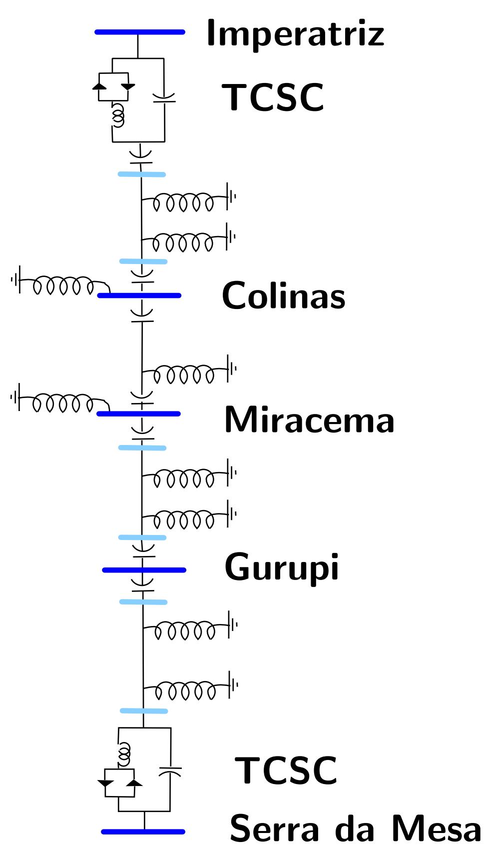
O limite térmico, determinado pelo tipo de condutor (dados do fabricante) é preponderante para linhas curtas

---

■ Exemplo

A figura a seguir mostra a interligação entre as regiões Norte e Sul do Brasil, feita através de linhas de transmissão de 500 kV.





- **O trecho Imperatriz-Serra da Mesa tem aproximadamente 1020 km $\rightarrow$ linha longa**

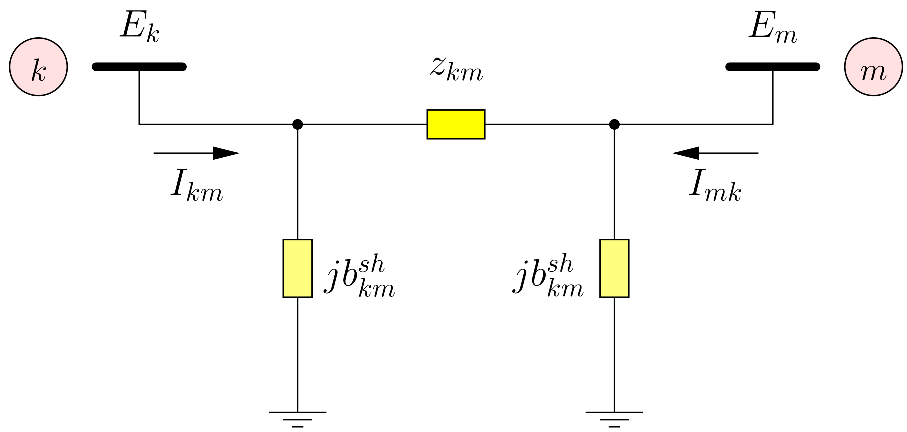
- **A linha conta com compensação série (capacitores) e compensação shunt (reatores)**

  A compensação é realizada para controlar os níveis de tensão e aumentar a capacidade de transmissão da linha

- **TCSC (Thyristor Controlled Series Capacitor) é utilizado para amortecer as oscilações eletromecânicas entre os sistemas Norte e Sul**

5.13 Fluxos de potência nas linhas de transmissão

- **As linhas de transmissão podem ser representadas pelo modelo π equivalente (ou nominal), composto pela resistência série (r_{km}), pela reatância série (x_{km}) e pela susceptância shunt (b_{km}^{sh})**



- **Impedância série:**

$$z_{km} = r_{km} + jx_{km}$$

Admitância série:

$$y_{km} = \frac{1}{z_{km}} = g_{km} + jb_{km} = \frac{r_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2} + j\frac{-x_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2}$$

em que g_{km} é a condutância série e b_{km} é a susceptância série

Tem-se:

- $r_{km} \geq 0$ **;** $g_{km} \geq 0$
- $x_{km} \geq 0$ **;** $b_{km} \leq 0$ **(parâmetro série indutivo)**
- $b_{km}^{sh} \geq 0$ **(parâmetro shunt capacitivo)**

▶ **Corrente saindo da barra k:**

$$I_{km} = \underbrace{y_{km}\left(E_k - E_m\right)}_{\textbf{série}} + \underbrace{jb_{km}^{sh}E_k}_{\textbf{shunt}}$$

em que $E_k = V_k e^{j\theta_k}$ e $E_m = V_m e^{j\theta_m}$. Corrente saindo da barra m:

$$I_{mk} = \underbrace{y_{km}\left(E_m - E_k\right)}_{\textbf{série}} + \underbrace{jb_{km}^{sh}E_m}_{\textbf{shunt}}$$

▶ **O fluxo de potência complexa saindo da barra k é dado por:**

$$\begin{aligned}
S_{km}^* = P_{km} - jQ_{km} &= E_k^* I_{km} \\
&= E_k^* \left[y_{km}\left(E_k - E_m\right) + jb_{km}^{sh}E_k\right] \\
&= y_{km}V_k^2 - y_{km}E_k^*E_m + jb_{km}^{sh}V_k^2 \\
&= \left(g_{km} + jb_{km} + jb_{km}^{sh}\right)V_k^2 - \left(g_{km} + jb_{km}\right)V_kV_m\left(\cos\theta_{km} - j\,\mathrm{sen}\,\theta_{km}\right)
\end{aligned}$$

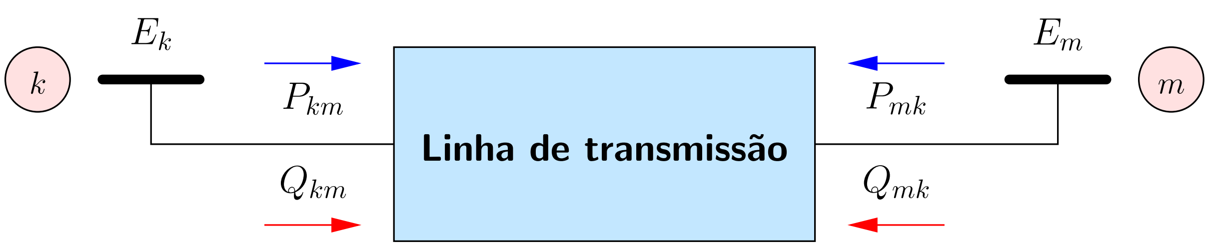
Separando as partes real e imaginária:

$$\begin{aligned}
P_{km} &= \Re\left\{S_{km}\right\} = g_{km}V_k^2 - V_kV_m\left(g_{km}\cos\theta_{km} + b_{km}\,\mathrm{sen}\,\theta_{km}\right) \\
Q_{km} &= \Im\left\{S_{km}\right\} = -\left(b_{km} + b_{km}^{sh}\right)V_k^2 - V_kV_m\left(g_{km}\,\mathrm{sen}\,\theta_{km} - b_{km}\cos\theta_{km}\right)
\end{aligned}$$

De maneira análoga:

$$P_{mk} = g_{km}V_m^2 - V_kV_m\left(g_{km}\cos\theta_{km} - b_{km}\,\text{sen}\,\theta_{km}\right)$$
$$Q_{mk} = -\left(b_{km} + b_{km}^{sh}\right)V_m^2 + V_kV_m\left(g_{km}\,\text{sen}\,\theta_{km} + b_{km}\cos\theta_{km}\right)$$

- **Note que as expressões dos fluxos de potência foram obtidas considerando que estes estão entrando na linha:**



Portanto, as perdas de potência na linha de transmissão são dadas por:

$$\begin{aligned}P^{\text{perdas}} &= P_{km} + P_{mk}\\ &= g_{km}\left(V_k^2 + V_m^2 - 2V_kV_m\cos\theta_{km}\right) = g_{km}\left|E_k - E_m\right|^2\end{aligned}$$

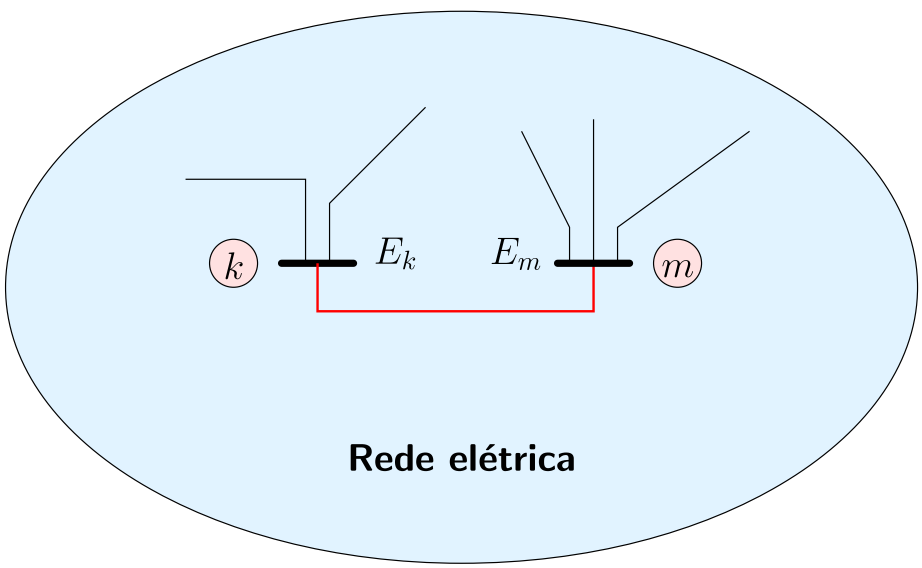
$$\begin{aligned}Q^{\text{perdas}} &= Q_{km} + Q_{mk}\\ &= -b_{km}^{sh}\left(V_k^2 + V_m^2\right) - b_{km}\left(V_k^2 + V_m^2 - 2V_kV_m\cos\theta_{km}\right)\\ &= -b_{km}^{sh}\left(V_k^2 + V_m^2\right) - b_{km}\left|E_k - E_m\right|^2\end{aligned}$$

Note que:

- $|E_k - E_m|$ **é a magnitude da tensão sobre o elemento série**
- $g_{km}\,|E_k - E_m|^2$ **são as perdas ôhmicas**
- $-b_{km}\,|E_k - E_m|^2$ **são as perdas reativas no elemento série (**$b_{km} < 0$**; potência positiva – consumida)**
- $-b_{km}^{sh}\left(V_k^2 + V_m^2\right)$ **corresponde à geração de potência reativa nos elementos shunt (**$b_{km}^{sh} > 0$**; potência negativa – fornecida)**

■ Exemplo

Considere a rede elétrica a seguir.



Os parâmetros da linha k-m **são:** $z_{km} = 0{,}01 + j0{,}05$ **pu e** $b_{km}^{sh} = 0{,}2$ **pu. Em um determinado instante durante a operação da linha, suas tensões terminais são** $E_k = 1{,}015\,\angle - 1{,}3^\circ$ **pu e** $E_m = 1{,}020\,\angle - 6{,}3^\circ$ **pu. Calcule os fluxos de potência e as perdas de potência na linha.**

A condutância série da linha é:

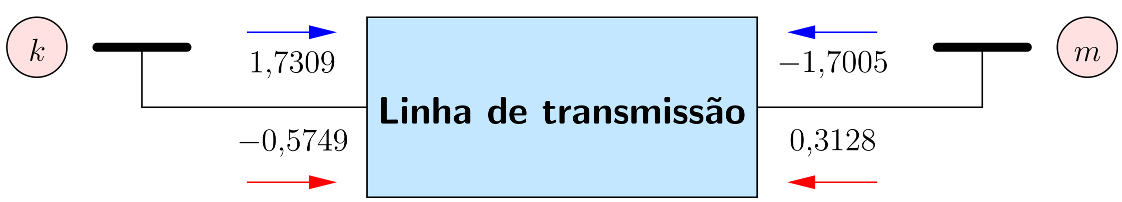
$$y_{km} = g_{km} + jb_{km} = \frac{1}{z_{km}} = 3{,}8462 - j19{,}2308 \text{ **pu**}$$

Os fluxos de potência valem:

$$P_{km} = g_{km}V_k^2 - V_kV_m \left(g_{km}\cos\theta_{km} + b_{km}\,\text{sen}\,\theta_{km}\right) = 1{,}7309 \text{ pu}$$
$$Q_{km} = -\left(b_{km} + b_{km}^{sh}\right)V_k^2 - V_kV_m \left(g_{km}\,\text{sen}\,\theta_{km} - b_{km}\cos\theta_{km}\right) = -0{,}5749 \text{ pu}$$

$$P_{mk} = g_{km}V_m^2 - V_kV_m \left(g_{km}\cos\theta_{km} - b_{km}\,\text{sen}\,\theta_{km}\right) = -1{,}7005 \text{ pu}$$
$$Q_{mk} = -\left(b_{km} + b_{km}^{sh}\right)V_m^2 + V_kV_m \left(g_{km}\,\text{sen}\,\theta_{km} + b_{km}\cos\theta_{km}\right) = 0{,}3128 \text{ pu}$$

e são mostrados na figura a seguir.



A figura indica que:

- **Um fluxo de potência ativa de $1{,}7309$ sai de k em direção a m. Um fluxo de $1{,}7005$ chega na barra m. Percebe-se que houve uma perda de potência na transmissão de potência ativa**

- **Um fluxo de potência reativa de $0{,}3128$ sai de m em direção a k. Um fluxo de $0{,}5749$ chega na barra k. Percebe-se que houve uma geração de potência reativa na transmissão de potência ativa**

Realizando o cálculo das perdas de potência:

$$P^{\text{perdas}} = P_{km} + P_{mk} = 0{,}0304 \textbf{ pu}$$

ou

$$P^{\text{perdas}} = g_{km} \mid E_k - E_m \mid^2 = 0{,}0304 \textbf{ pu}$$

$$Q^{\text{perdas}} = Q_{km} + Q_{mk} = -0{,}2621 \textbf{ pu}$$

ou

$$Q^{\text{perdas}} = -b_{km}^{sh} \left(V_k^2 + V_m^2\right) - b_{km} \mid E_k - E_m \mid^2 = -0{,}2621 \textbf{ pu}$$

Observando os termos da expressão de Q^{perdas} separadamente:

$$-b_{km} \mid E_k - E_m \mid^2 = 0{,}1520 \textbf{ pu}$$

$$-b_{km}^{sh} \left(V_k^2 + V_m^2\right) = -0{,}4141 \textbf{ pu}$$

ou seja, a susceptância série resulta em consumo de potência reativa (> 0), enquanto que a susceptância shunt resulta em geração de potência reativa (< 0). Neste caso em particular, a geração é maior que o consumo.

■

Referências

[1] A.J. Monticelli, A.V. Garcia, Introdução a sistemas de energia elétrica, Unicamp, 1999.

[2] J.D. Glover, M. Sarma, Power system analysis and Design, PWS-Kent, 1989.

[3] J.J. Grainger, W.D. Stevenson, Power System Analysis, McGraw-Hill, 1994.

[4] O.I. Elgerd, Introdução à teoria de sistemas de energia elétrica, Mc-Graw-Hill, 1981.

[5] W.D. Stevenson, Elementos de análise de sistemas de potência, McGraw-Hill, 1986.

[6] Transmission line reference book – 345 kV and above, EPRI, 1987.

[7] Operador Nacional do Sistema Elétrico, `http://www.ons.com.br`.