MAT 271– Cálculo Numérico – PER3/UFV/2021

O MÉTODO DE NEWTON

NO CÁLCULO DE RAÍZES DE UM NÚMERO POSITIVO

SOLUÇÃO APROXIMADA DE UMA EQUAÇÃO, USANDO TRÊS MÉTODOS: BISSEÇÃO, APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS E NEWTON

Professor Amarísio Araújo – DMA/UFV

CALCULAR RAIZ QUADRADA DE UM NÚMERO POSITIVO

Problema: Encontrar a raiz quadrada de um número positivo A.

Ou seja, encontrar x tal que $x = \sqrt{A}$, com $A > 0$.

Ou seja, encontrar x tal que $x^2 = A$, com $x > 0,\ A > 0$.

Ou seja, encontrar solução positiva da equação $x^2 - A = 0$.

USANDO O MÉTODO DE NEWTON

Queremos encontrar a solução positiva da equação $x^2 - A = 0$.

- Fórmula do Método de Newton: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0,1,2,\ldots$
- $f(x) = x^2 - A$; $f'(x) = 2x$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{{x_n}^2 - A}{2x_n} \quad = x_n - \frac{{x_n}^2}{2x_n} + \frac{A}{2x_n} \quad = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{A}{2x_n}$$

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{A}{2x_n}\ , n = 0,1,2,3,\ldots}$$

UM EXEMPLO

Calculando uma aproximação para $\sqrt{5}$.

Usando aproximação inicial $x_0 = 2$, calculemos os próximos três termos da sequência de aproximações:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{A}{2x_n}, n = 0,1,2, \ \mathrm{A} = 5.$$

$$x_1 = \frac{x_0}{2} + \frac{5}{2x_0} = \frac{2}{2} + \frac{5}{2(2)} = 2.25$$

$$x_2 = \frac{x_1}{2} + \frac{5}{2x_1} = \frac{2.25}{2} + \frac{5}{2(2.25)} = 2.23611111$$

$$x_3 = \frac{x_2}{2} + \frac{5}{2x_2} = \frac{2.23611111}{2} + \frac{5}{2(2.23611111)} = 2.23606798$$

Na calculadora do Windows: $\sqrt{5} = 2.23606797749979$

MAIS GERAL: MÉTODO DE NEWTON PARA CALCULAR $\sqrt[k]{A}, A > 0, k \in \mathbb{N}$

Queremos encontrar a solução positiva da equação $x^k - A = 0$.

- Fórmula do Método de Newton: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0,1,2, \ldots$
- $f(x) = x^k - A$; $f'(x) = kx^{k-1}$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{{x_n}^k - A}{k{x_n}^{k-1}} \quad = x_n - \frac{{x_n}^k}{k{x_n}^{k-1}} + \frac{A}{k{x_n}^{k-1}} \quad = x_n - \frac{x_n}{k} + \frac{A}{k{x_n}^{k-1}}$$

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{k-1}{k} x_n + \frac{A}{k{x_n}^{k-1}}, n = 0,1,2,3, \ldots}$$

EXEMPLO Calculando uma aproximação para $\sqrt[3]{5}$:

Usando a relação $x_{n+1} = \frac{k-1}{k} x_n + \frac{A}{k(x_n)^{k-1}}, n = 0,1,2,$ com $A = 5, k = 3$:

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{2x_n}{3} + \frac{5}{3(x_n)^2}, n = 0,1,2.}$$

Consideremos a aproximação inicial $x_0 = 1.5$.

$$x_1 = \frac{2x_0}{3} + \frac{5}{3(x_0)^2} = \frac{2(1.5)}{3} + \frac{5}{3(1.5)^2} = 1.740741$$

$$x_2 = \frac{2x_1}{3} + \frac{5}{3(x_1)^2} = \frac{2(1.740741)}{3} + \frac{5}{3(1.740741)^2} = 1.710516$$

$$x_3 = \frac{2x_2}{3} + \frac{5}{3(x_2)^2} = \frac{2(1.710516)}{3} + \frac{5}{3(1.710516)^2} = 1.709976$$

Na calculadora do Windows $\sqrt[3]{5} = 1.70997594667670$

USANDO OS TRÊS MÉTODOS PARA ENCONTRAR A SOLUÇÃO APROXIMADA DE UMA EQUAÇÃO

Seja a equação: $lnx - x + 2 = 0$.

Como já vimos, esta equação possui uma solução única $\bar{x}$ no intervalo $[0.01,1]$.

Vamos encontrar aproximações de $\bar{x}$, usando os três métodos apresentados no curso, com erro relativo menor que $\varepsilon = 0.01$

Vamos considerar um arredondamento de 4 casas decimais na apresentação dos resultados.

MÉTODO DA BISSEÇÃO

$$f(x) = \ln x - x + 2;\ a_0 = 0.01,\ b_0 = 1;$$

f contínua em $[a_0, b_0]$, $f(a_0)f(b_0) < 0.$

Aplicando o método, obtemos:

$$\boxed{\bar{x} \cong x_{10} = 0.1579} \qquad \frac{|x_{10} - x_9|}{|x_{10}|} = 0.0061$$

$\boxed{10 \text{ passos}}$

MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

$f(x) = \ln x - x + 2$; f contínua em $[0.01,1]$.

$\varphi(x) = e^{x-2}$ é tal que $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x)$ e pode ser usada no método das aproximações sucessivas com garantia de convergência para a solução $\bar{x}$ da equação $\ln x - x + 2 = 0$.

MOSTREM!!!

Usando $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, com aproximação inicial $x_0 = 0.1$, obtemos:

$$\boxed{\bar{x} \cong x_3 = 0.1584} \qquad \frac{|x_3 - x_2|}{|x_3|} = 0.0076$$

3 passos

MÉTODO DE NEWTON

$f(x) = \ln x - x + 2$; f é derivável em $[0.01,1]$.

$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 \neq 0$ para todo $x \neq 1$, e derivável em $[0.01,1]$.

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ é contínua em $[0.01,1]$.

Temos garantia de convergência da sequência $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0,1,2,\ldots,$ tomando a aproximação inicial $x_0 = 0.1\epsilon[0.01,1)$. Assim:

$$\boxed{\bar{x} \cong x_3 = 0.1586} \qquad \frac{|x_3 - x_2|}{|x_3|} = 0.0046$$

$\boxed{3 \text{ passos}}$