SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

MAT 271 – Cálculo Numérico – PER3/2021/UFV

Professor Amarísio Araújo – DMA/UFV

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES REAIS

(n equações e n incógnitas)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1,2, \dots, n$ (coeficientes), $b_i \in \mathbb{R}, i, = 1,2, \dots, n$,
$x_i \in \mathbb{R}, i = 1,2, \dots, n$ (incógnitas).

FORMA MATRICIAL $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Aprenderemos, aqui, métodos para resolver o sistema, considerando que ele tenha solução única, o que ocorre se o determinante da matriz A (dos coeficientes) for diferente de zero: $detA \neq 0$.

A solução única é uma matriz coluna $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ que satisfaz $Ax = b$.

Vamos, quase sempre, escrevê-la como uma *n-upla* de $\mathbb{R}^n$: $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

SOLUÇÃO ÚNICA DE $Ax = b$

Sendo A^{-1} a inversa da matriz A (se $detA \neq 0$), a solução única do sistema pode ser obtida assim: $x = A^{-1}b$. Esta é, portanto, uma das estratégias para encontrar a solução única do sistema, o que exige encontrar a matriz A^{-1}.

Outras estratégias são aprendidas em um curso introdutório de Álgebra Linear, baseadas em operações elementares sobre as equações (ou sobre as linhas ou colunas das matrizes do sistema). O objetivo de tais operações é transformar o sistema inicial em um outro sistema equivalente mais fácil de ser resolvido.

Os métodos de Gauss e de Gauss-Jordan, vistos em um curso introdutório de Álgebra Linear, têm a “vantagem” de não prescindirem do cálculo da matriz A^{-1}. Eles nos permitem concluir sobre a existência de solução do sistema (solução única ou infinitas soluções ou não existência de soluções) sem o cálculo, à priori, do determinante da matriz A.

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \xrightarrow{op.elementares} \begin{cases} x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b_1{}^* \\ 0x_1 + x_2 + \cdots + 0x_n = b_2{}^* \\ \vdots \\ 0x_1 + 0x_2 + \cdots + x_n = b_n{}^* \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & & b_n \end{array}\right] \xrightarrow{op.elementares} \left[\begin{array}{c:c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}}_{\text{MATRIZ IDENTIDADE}} & \begin{matrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_n^* \end{matrix} \end{array}\right]$$

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \xrightarrow{op.elementares} \begin{cases} a_{11}^*x_1 + a_{12}^*x_2 + \cdots + a_{1n}^*x_n = b_1{}^* \\ 0x_1 + a_{22}^*x_2 + \cdots + a_{2n}^*x_n = b_2{}^* \\ \vdots \\ 0x_1 + 0x_2 + \cdots + a_{nn}^*x_n = b_n{}^* \end{cases}$$

SISTEMA TRIANGULAR SUPERIOR

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \xrightarrow{op.elementares} \left[\begin{array}{ccccc:c} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{13}^* & \cdots & a_{1n}^* & b_1^* \\ 0 & a_{22}^* & a_{23}^* & \cdots & a_{2n}^* & b_2^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^* & b_n^* \end{array}\right]$$

MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \xrightarrow{op.elementares} \begin{cases} a_{11}^{*}x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b_1{}^{*} \\ a_{21}^{*}x_1 + a_{22}^{*}x_2 + \cdots + 0x_n = b_2{}^{*} \\ \vdots \\ a_{n1}^{*}x_1 + a_{n2}^{*}x_2 + \cdots + a_{nn}^{*}x_n = b_n{}^{*} \end{cases}$$

SISTEMA TRIANGULAR INFERIOR

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \xrightarrow{op.elementares} \left[\begin{array}{ccccc:c} a_{11}^{*} & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1^{*} \\ a_{21}^{*} & a_{22}^{*} & 0 & \cdots & 0 & b_2^{*} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{*} & a_{n2}^{*} & a_{n3}^{*} & \cdots & a_{nn}^{*} & b_n^{*} \end{array}\right]$$

MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

MÉTODOS DIRETOS E MÉTODOS ITERATIVOS

As três estratégias acima são métodos diretos, que levam à solução exata de um sistema linear, considerando que ele tenha solução única.

Aprenderemos, aqui, três outros métodos para a obtenção da solução única de um sistema linear. O primeiro deles, também um método direto, leva a uma solução exata. Os outros dois, são métodos iterativos, que nos levam a uma solução aproximada.

Um dos grandes problemas que pode ocorre na resolução de um sistema linear está relacionado ao seu "mal condicionamento", que será ilustrado a seguir.

SISTEMA LINEAR MAL CONDICIONADO

PEQUENAS MODIFICAÇÕES NOS COEFICIENTES OU NAS CONSTANTES DO SISTEMA → GRANDES MODIFICAÇÕES NA SOLUÇÃO DO SISTEMA

$\boxed{\det A \cong 0}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1.0005 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \textit{solução}: X = [-40.0015 \quad 20.006 \quad -20.000]^T$$

$$\boxed{\det A = 0.0005}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1.001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \textit{solução}: X = [-20.0015 \quad 10.006 \quad -10.000]^T$$

$$\boxed{\det A = 0.001}$$

SISTEMA LINEAR MAL CONDICIONADO

PEQUENAS MODIFICAÇÕES NOS COEFICIENTES OU NAS CONSTANTES DO SISTEMA

$\Longrightarrow$

GRANDES MODIFICAÇÕES NA SOLUÇÃO DO SISTEMA

$\boxed{\det A \not\cong 0}$

$$\begin{bmatrix} 71 & 41 \\ 52 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100.4 \\ 69.3 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad solução: X = [-65 \quad 115]^T$$

$\boxed{\det A = -2}$

$$\begin{bmatrix} 71 & 41 \\ 52 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 70 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad solução: X = [-85.35 \quad 150.25]^T$$