UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA – UFV
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – CCE
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA - DEL

Sistemas de Controle II

ELT331

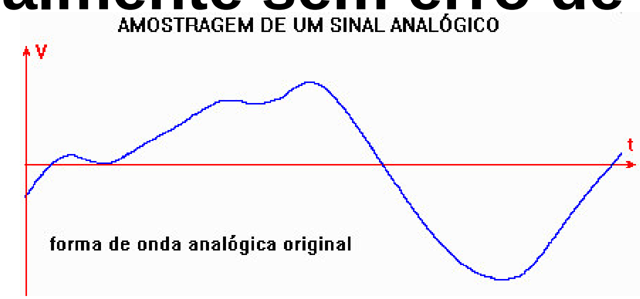
AULA 19 – Função de Transferência Pulsada em Malha Aberta

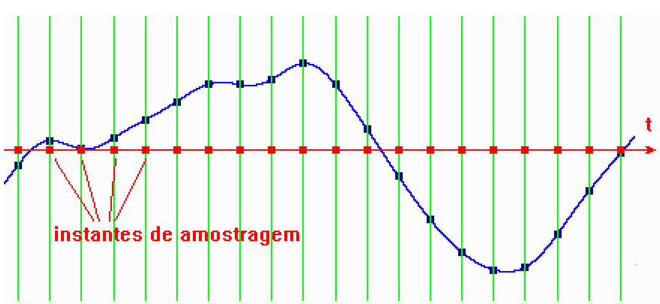
Prof. Tarcísio Pizziolo

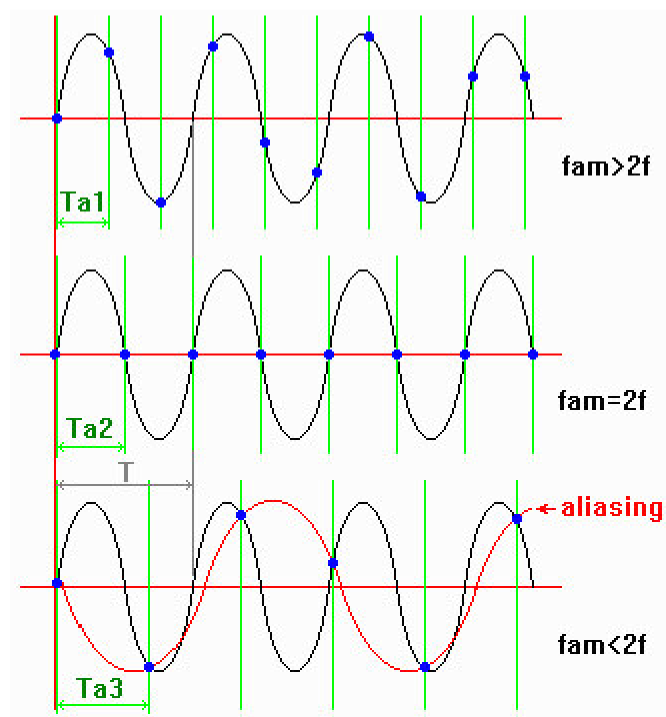
19. Função de Transferência Pulsada

Teorema da Amostragem (Shannon-Nyquist):

“A quantidade de amostras por unidade de tempo de um sinal, chamada taxa ou **frequência de amostragem (f_{am}), deve ser maior que o dobro da maior frequência (f) contida no sinal a ser amostrado, para que este possa ser reproduzido integralmente sem erro de *aliasing*.**



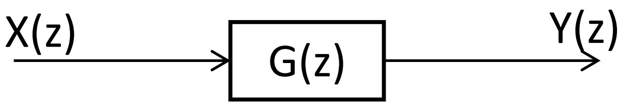




19.1 Função de Transferência Pulsada em Malha Aberta

Funções de Transferência Pulsada em Malha Aberta (FTPMA)

Seja o diagrama de blocos dado para um sistema de Função de Transferência Pulsada (amostrada).



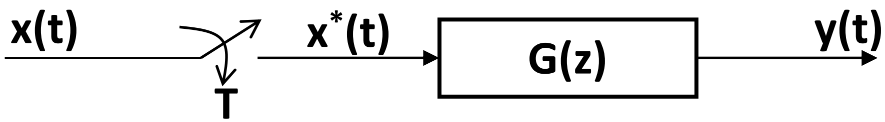
$$\mathbf{G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}}$$

Pode-se obter **G(z)** pelo seguinte procedimento:

1 – Obter a Função de Transferência **G(s)** do sistema.
2 – Obter a função de resposta ao Impulso Unitário **g(t)**.
3 – Calcular **G(z)** pela fórmula:

$$\mathbf{G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} [g(kT) z^{-k}]}$$

Exemplo 1: Obter **G(z)** pulsada para o sistema dado a seguir.



$$G(s)=\frac{K}{(s+a)(s+b)}$$

Expandindo **G(s)** em frações parciais: $$G(s)=\frac{K}{(b-a)}\left[\frac{1}{(s+a)}-\frac{1}{(s+b)}\right]$$

A resposta ao Impulso Unitário é dada por: $$g(t)=\frac{K}{(b-a)}(e^{-at}-e^{-bt})$$

A discretização de **g(t)** será para **t = kT**, então:

$$g(kT)=\frac{K}{(b-a)}(e^{-akT}-e^{-bkT})$$

A obtenção de **G(z)** é realizada por:

$$G(z)=\sum_{k=0}^{\infty}[g(kT)z^{-k}]=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{K}{(b-a)}(e^{-akT}-e^{-bkT})z^{-k}\right]\Rightarrow$$

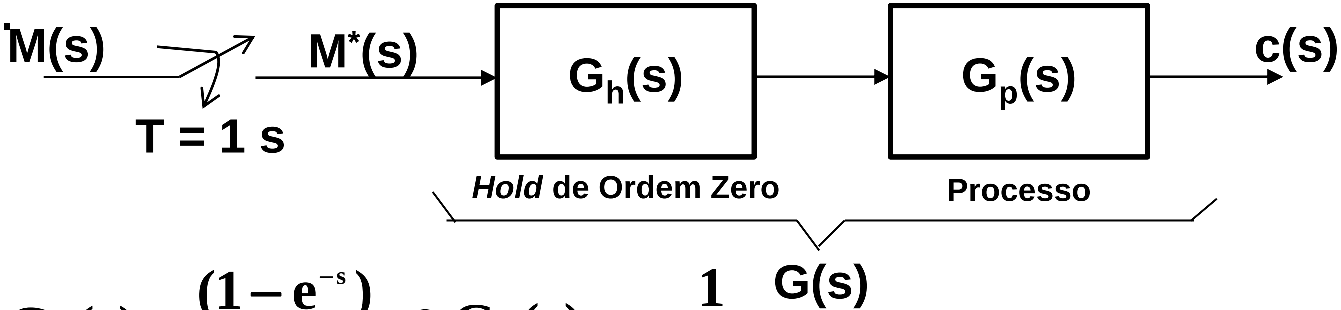
$$\Rightarrow G(z)=\frac{K}{(b-a)}\left\{\left[\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-akT}z^{-k})\right]-\left[\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-bkT}z^{-k})\right]\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(z)=\frac{K}{(b-a)}\left[\frac{1}{(1-e^{-aT}z^{-1})}-\frac{1}{(1-e^{-bT}z^{-1})}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(z)=\frac{K}{(b-a)}\left[\frac{z(e^{-aT}-e^{-bT})}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}\right]$$

*Considerando **T = 1 s**, **K = 2**, **b = 3** e **a = 1**, determine **G(z)**!

Exemplo 2: Obter **G(z)** pulsada e “segurada” para o sistema dado a seguir.



Dados: $G_h(s) = \dfrac{(1-e^{-s})}{s}$ e $G_p(s) = \dfrac{1}{(s+1)}$

1 - Determinação de **G(s)**:

$$G(s) = \frac{C(s)}{M^*(s)} = \frac{(1-e^{-s})}{s}\,\frac{1}{(s+1)} = \frac{(1-e^{-s})}{s(s+1)} = (1-e^{-s})[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(s) = [\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)}] - (\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{(s+1)})$$

2 - Determinação de **g(t)**:

$$\text{Como: } G(s) = [\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)}] - (\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{(s+1)})$$

$$\text{Tem-se que } g(t) = L^{-1}\{G(s)\} = L^{-1}\{[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)}] - (\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{(s+1)})\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(t) = (1-e^{-t})u(t) - (1-e^{-(t-1)})u(t-1)$$

3 – Discretização de **g(t)**, **t = kT**:

$$g(kT) = (1 - e^{-k})U(k) - (1 - e^{-(k-1)})U(k-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(k) = (e^{-(k-1)} - e^{-k})\,;\, \text{para } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Como **k = 0** tem que ser incluído, deve-se calculá-lo para **g(k)** mas depois excluí-lo em **G(z)**. Então: $g(0) = (e - 1)$.

4 – Cálculo de **G(z)**:

$$G(z) = [\sum_{k=0}^{\infty} g(k).Z^{-k}] = [\sum_{k=0}^{\infty} (e^{-(k-1)} - e^{-k}).Z^{-k}] - (e - 1) \Rightarrow$$

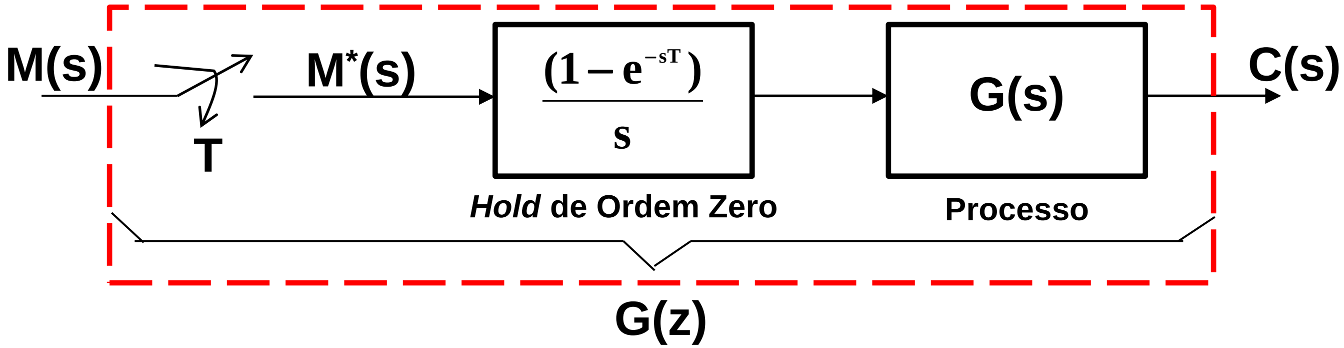
$$\Rightarrow G(z) = [\sum_{k=0}^{\infty} (e^{-k}e - e^{-k})z^{-k}] - (e - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(z) = (e - 1)[\sum_{k=0}^{\infty} (e^{-k})z^{-k}] - (e - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(z) = (e - 1)\{[\sum_{k=0}^{\infty} (e^{-k})z^{-k}] - 1\} = 1{,}72[\frac{z}{(z - e^{-1})} - 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(z) = 1{,}718[\frac{z}{(z - 0{,}368)} - 1] \Rightarrow \boxed{G(z) = \frac{0{,}632}{(z - 0{,}368)}}$$

Também pode-se determinar **G(z)** aplicando a **Z{.}**.



$$G(z) = \frac{C(z)}{M(z)} = Z\left[\left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\right) G(s) \right] = Z\left[\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s}\right) G(s) \right] = Z\left[\left(\frac{G(s)}{s} - e^{-sT}\frac{G(s)}{s}\right) \right]$$

Fazendo **G'(s) = G(s)/s** :

$$L^{-1}\left[\left(\frac{G(s)}{s} - e^{-sT}\frac{G(s)}{s}\right) \right] = L^{-1}\left[(G'(s) - e^{-sT}G'(s) \right] = g'(t) - g'(t-T)$$

$$\text{Para} \quad t = kT: \quad g'(kT) - g'(kT-T) = g'(k) - g'(k-1)$$

Daí:

$$Z\left[(g'(k) - g'(k-1)) \right] = (1-z^{-1})G'(z) = (1-z^{-1})Z\left[\frac{G(s)}{s} \right]$$

Então: $$\boxed{G(z) = (1-z^{-1})Z\left[\frac{G(s)}{s} \right]}$$

Determinando G(z) aplicando a **Z{.}**.

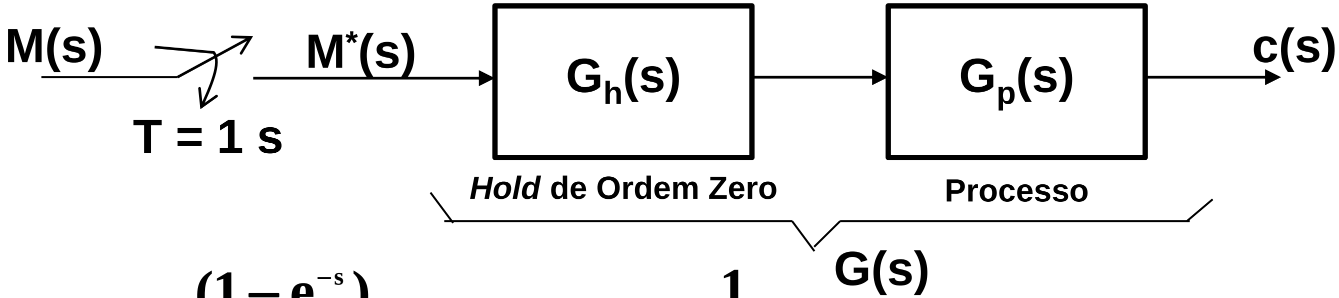
$$G(s) = \frac{(1-e^{-s})}{s(s+1)}; \quad G(z) = Z\{G(s)\}$$

$$\text{Então}: G(z) = Z\{\frac{(1-e^{-s})}{s(s+1)}\} = \underbrace{Z\{\frac{1}{s(s+1)}\}}_{\text{sem deslocamento}} - \underbrace{Z\{\frac{e^{-s}}{s(s+1)}\}}_{\text{com deslocamento de T=1s}}$$

$$\text{Daí}: G(z) = (1-z^{-1})Z\{\frac{1}{s(s+1)}\} = [\frac{(z-1)}{z}][\frac{(1-e^{-1})z}{(z-1)(z-e^{-1})}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{G(z) = \frac{0{,}632}{(z-0{,}368)}}$$

Exemplo 3: Obter **G(z)** para o sistema dado a seguir.



Dados: $G_h(s) = \dfrac{(1-e^{-s})}{s}$ e $G_p(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$

1 - Determinação de **G(s)**:

$$G(s) = \frac{C(s)}{M^*(s)} = \frac{(1-e^{-s})}{s}\frac{1}{s(s+1)} = \frac{(1-e^{-s})}{s^2(s+1)} = (1-e^{-s})[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{(s+1)}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(s) = [\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{(s+1)}] - [\frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-s}}{(s+1)}]$$

2 - Determinação de **g(t)**:

$$\text{Como: } G(s) = [\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{(s+1)}] - [\frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-s}}{(s+1)}]$$

$$\text{Tem-se que } g(t) = L^{-1}\{G(s)\} = L^{-1}\{[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{(s+1)}] - [\frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-s}}{(s+1)}]\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(t) = (t-1+e^{-t})u(t) - [(t-1)-1-e^{-(t-1)})u(t-1)$$

3 – Discretização de **g(t)**, **t = kT**:

$$\mathbf{g(k) = (k - 1 + e^{-k})U(k) - [(k-1) - 1 - e^{-(k-1)})U(k-1) \Rightarrow}$$

$$\mathbf{\Rightarrow g(k) = (e^{-k} + 1 - e^{-(k-1)})\ ;\ para\ k = 1,\ 2,\ 3,\ ...}$$

Como **k = 0** tem que ser incluído, deve-se calculá-lo para **g(k)** e em seguida excluí-lo em **G(z)**. Então: $\mathbf{g(0) = (2 - e)}$.

4 – Cálculo de **G(z)**:

$$\mathbf{G(z) = [\sum_{k=0}^{\infty} g(k).Z^{-k}] = [\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-k} + 1 - e^{-(k-1)}).Z^{-k}] - (2 - e) \Rightarrow}$$

$$\mathbf{\Rightarrow G(z) = \{\sum_{k=0}^{\infty}[1 + (1 - e)e^{-k}]z^{-k}\} + (e - 2) \Rightarrow}$$

$$\mathbf{\Rightarrow G(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(1)\,Z^{-k} + [(1 - e)\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-k})z^{-k}] + (e - 2) \Rightarrow}$$

$$\mathbf{\Rightarrow G(z) = \frac{z}{(z-1)} + (1 - e)\frac{z}{(z - e^{-1})} + (e - 2) \Rightarrow}$$

$$\mathbf{\Rightarrow \boxed{G(z) = \frac{(0{,}368z + 0{,}264)}{(z^2 - 1{,}368z + 0{,}368)}}}$$

Também pode-se determinar **G(z)** aplicando a **Z{.}**.

$$G(s)=\frac{(1-e^{-s})}{s^2(s+1)}; \quad G(z)=Z\{G(s)\}$$

$$\text{Então}: G(z)=Z\{\frac{(1-e^{-s})}{s^2(s+1)}\}=Z\{(1-e^{-s})[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{(s+1)}]\}$$

$$\text{Daí}: G(z)=(1-z^{-1})Z\{\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{(s+1)}\}=[\frac{(z-1)}{z}]\{Z\{\frac{1}{s^2}\}-Z\{\frac{1}{s}\}+Z\{\frac{1}{(s+1)}\}\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(z)=[\frac{(z-1)}{z}][\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{z}{(z-1)}+\frac{z}{(z-e^{-T})}]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(z)=[\frac{(z-1)}{z}][\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{z}{(z-1)}+\frac{z}{(z-e^{-1})}]=\frac{z[(1-1+e^{-1})z+(1-e^{-1}-e^{-1})]}{(z-1)^2(z-e^{-1})}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{G(z)=\frac{(0{,}368z+0{,}264)}{(z^2-1{,}368z+0{,}368)}}$$