MÉTODOS ITERATIVOS PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

- JACOBI-RICHARDSON
- GAUSS-SEIDEL
- CRITÉRIO DE PARADA

- MAT 271 – Cálculo Numérico PER3/2021/UFV
- Professor Amarísio Araújo DMA/UFV

NORMA DE UM VETOR

Dado um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$, definimos uma norma em V, denotada por $\|\cdot\|$, como sendo uma aplicação$\|\cdot\|: V \longrightarrow \mathbb{R}$, que, para cada $v \epsilon V$, leva a um $\|v\| \epsilon \mathbb{R}$, satisfazendo à seguintes condições:

$n1)\ \|v\| \geq 0, \forall v \epsilon V; \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0;$

$n2)\ \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|, \forall \alpha \epsilon \mathbb{R}, \forall v \epsilon V;$

$n3)\ \|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|, \forall v, u \epsilon V.$

NORMAS EM $\mathbb{R}^n$

Três normas muito utilizadas em $\mathbb{R}^n$:

Dado $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \epsilon \mathbb{R}^n$:

$\|v\|_1 = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n|$ (Norma da Soma)

$\|v\|_2 = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 \dots + {v_n}^2}$ (Norma Euclidiana)

$\|v\|_\infty = máx\{|v_1|, |v_2|, \dots, |v_n|\}$ (Norma do Máximo)

GEOMETRICAMENTE: COMPRIMENTO DE UM VETOR DE $\mathbb{R}^n$ OU DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS DE $\mathbb{R}^n$.

NORMAS EM $\mathbb{R}^n$: UM RESULTADO IMPORTANTE

i) $\|v\|_\infty \leq \|v\|_1 \leq n\|v\|_\infty$

ii) $\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \sqrt{n}\|v\|_\infty$

TOPOLOGICAMENTE EQUIVALENTES

iii) $\frac{1}{n}\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq \sqrt{n}\|v\|_1$

CONVERGÊNCIA: Uma sequência $x^{(i)} = \left(x_1{}^{(i)}, x_2{}^{(i)}, \dots, x_n{}^{(i)}\right), i = 1,2,3, \dots$, de vetores $\mathbb{R}^n$ converge para um vetor $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ se $\left\|x^{(i)} - \bar{x}\right\| \longrightarrow 0$ quando $i \longrightarrow \infty$, para qualquer norma em $\mathbb{R}^n$.

CRITÉRIO DE PARADA PARA OS MÉTODOS DE JACOBI-RICHARDSON E DE GAUSS-SEIDEL

Usaremos, aqui, o critério de parada para os métodos de Jacobi-Richardson e de Gauss-Seidel baseado no erro (absoluto ou relativo) entre dois termos consecutivos da sequência de aproximações obtida com as suas equações de iteratividade

Considerando que a sequência de aproximações é uma sequência de vetores de $\mathbb{R}^n$, $x^{(i)} = \left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}\right) \in \mathbb{R}^n, i = 1,2,3, \dots$, devemos usar uma norma para calcular o erro entre dois termos consecutivos $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right)$, $x^{(k+1)} = \left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}\right)$.

Como a convergência independe da norma, adotaremos aqui a Norma do Máximo: $\|\cdot\|_\infty$.

CRITÉRIO DE PARADA PARA OS MÉTODOS DE JACOBI-RICHARDSON E DE GAUSS-SEIDEL

ERRO ABSOLUTO: Se $\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_\infty < \varepsilon$, então $x^{(k+1)}$ é a aproximação da solução do sistema com erro absoluto menor que ε.

ERRO RELATIVO: Se $\frac{\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_\infty}{\left\|x^{(k+1)}\right\|_\infty} < \varepsilon$, então $x^{(k+1)}$ é a aproximação da solução do sistema com erro relativo menor que ε.

$$\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_\infty = \left\|\left({x_1}^{(k+1)} - {x_1}^{(k)}, {x_2}^{(k+1)} - {x_2}^{(k)}, \dots, {x_n}^{(k+1)} - {x_n}^{(k)}\right)\right\|_\infty$$

$$\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_\infty = max\left\{\left|{x_1}^{(k+1)} - {x_1}^{(k)}\right|, \left|{x_2}^{(k+1)} - {x_2}^{(k)}\right|, \dots, \left|{x_n}^{(k+1)} - {x_n}^{(k)}\right|\right\}$$

$$\left\|x^{(k+1)}\right\|_\infty = max\left\{\left|{x_1}^{(k+1)}\right|, \left|{x_2}^{(k+1)}\right|, \dots, \left|{x_n}^{(k+1)}\right|\right\}$$

EXEMPLO

Como vimos em aula anterior, o sistema $\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases}$ tem solução $x = (1,2,0)$.

E, usando as equações de iteratividade do método de Gauss-Seidel, com $x^{(0)} = (0,0,0)$, para $k = 0,1,2,3$, obtivemos os seguintes termos da sequência de aproximações da solução $(1,2,0)$.

$$x^{(0)} = (0,0,0)$$

$$x^{(1)} = (1.4000, 1.9200, -0.0560)$$

$$x^{(2)} = (1.0216, 2.0069, -0.0064)$$

$$x^{(3)} = (0.9993, 2.0014, -0.0003)$$

$$x^{(4)} = (0.9987, 2.0001, 0.0001)$$

EXEMPLO

$x^{(0)} = (0,0,0)$, $x^{(1)} = (1.4000, 1.9200, -0.0560)$, $x^{(2)} = (1.0216, 2.0069, -0.0064)$

$x^{(3)} = (0.9993, 2.0014, -0.0003)$, $x^{(4)} = (0.9987, 2.0001, 0.0001)$

Vamos calcular os erros absolutos entre termos consecutivos, usando a norma $\|\cdot\|_\infty$.

$$\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_\infty = \|(1.4000, 1.9200, -0.0560)\|_\infty = 1.9200$$

$$\left\|x^{(2)} - x^{(1)}\right\|_\infty = \|(-0.3784, 0.0869, 0.0496)\|_\infty = 0.3784$$

$$\left\|x^{(3)} - x^{(2)}\right\|_\infty = \|(-0.0223, -0.0055, 0.0061)\|_\infty = 0.0223$$

$$\left\|x^{(4)} - x^{(3)}\right\|_\infty = \|(-0.0006, -0.0013, 0.0004)\|_\infty = 0.0013$$

Assim, se estivéssemos interessados em uma aproximação da solução do sistema com erro absoluto menor que $\varepsilon = 0.01$, esta aproximação seria $x^{(4)} = (0.9987, 2.0001, 0.0001)$, ou seja, o processo pararia em $k = 3$.

EXEMPLO

$x^{(0)} = (0,0,0), \quad x^{(1)} = (1.4000, 1.9200, -0.0560), \qquad x^{(2)} = (1.0216, 2.0069, -0.0064)$

$x^{(3)} = (0.9993, 2.0014, -0.0003), \qquad x^{(4)} = (0.9987, 2.0001, 0.0001)$

Vamos calcular os erros relativos entre termos consecutivos, usando a norma $\|\cdot\|_\infty$.

$$\frac{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty}{\|x^{(1)}\|_\infty} = \frac{\|(1.4000, 1.9200, -0.0560)\|_\infty}{\|(1.4000, 1.9200, -0.0560)\|_\infty} = 1. \qquad \frac{\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty}{\|x^{(2)}\|_\infty} = \frac{\|(-0.3784, 0.0869, 0.0496)\|_\infty}{\|(1.0216, 2.0069, -0.0064)\|_\infty} = \frac{0.3784}{2.0069} = 0.1885.$$

$$\frac{\|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty}{\|x^{(3)}\|_\infty} = \frac{\|(-0.0223, -0.0055, 0.0061)\|_\infty}{\|(0.9993, 2.0014, -0.0003)\|_\infty} = \frac{0.0223}{2.0014} = 0.0111.$$

$$\frac{\|x^{(4)} - x^{(3)}\|_\infty}{\|x^{(4)}\|_\infty} = \frac{\|(-0.0006, -0.0013, 0.0004)\|_\infty}{\|(0.9987, 2.0001, 0.0001)\|_\infty} = \frac{0.0013}{2.0001} = 0.0006.$$

Assim, se estivéssemos interessados em uma aproximação da solução do sistema com erro relativo menor que $\varepsilon = 0.001$, esta aproximação seria $x^{(4)} = (0.9987, 2.0001, 0.0001)$, ou seja, o processo pararia em $k = 3$.