Notas de aula: Superfícies Quádricas

Professor: Filipe Augusto Alves de Oliveira

Universidade Federal de Viçosa - UFV

22 de agosto de 2016

Introdução

A equação geral do 2º grau nas três variáveis x, y e z:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0$$

com pelo menos um dos coeficientes a, b, c, d, e ou f não nulo, representa uma **superfície quádrica** ou simplesmente uma quádrica.

- Desta equação pode derivar uma cônica, quando a superfície quádrica for cortada por um plano.
  Exemplo: plano xy $(z = 0)$

$$ax2 + by2 + 2dxy + mx + ny + q = 0.$$

- A intersecção de uma superfície com um plano é chamado traço da superfície no plano.

Tipos de Quádricas

- Elipsóides
- Hiperbolóides (de uma folha e de duas folhas)
- Cones
- Parabolóides (elípticos e hiperbólicos)
- Cilindros

Superfícies Quádricas Centradas

- Se nenhum dos coeficientes for nulo, a equação padrão de uma superfície quádrica centrada em $(0,0,0)$ é:

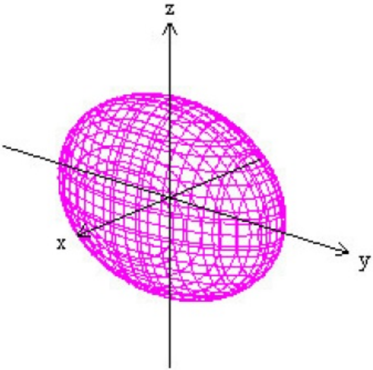
$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1.$$

- Desta equação podem ser originadas três superfícies, de acordo com a variação dos sinais $(+,+,+)$, $(+,+,-)$ e $(+,-,-)$:
  - Elipsóide $(+,+,+)$
  - Hiperbolóide de uma folha $(+,+,-)$
  - Hiperbolóide de duas folhas $(+,-,-)$

Elipsóide

Todos os coeficientes na equação são positivos e a, b e c são positivos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Denomina-se Elipsóide, já que seus traços são elipses:

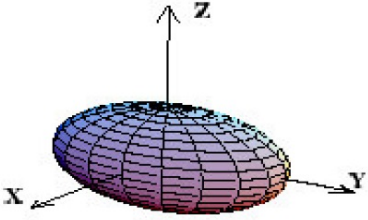
Se $x = 0$, então $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ representa uma elipse.

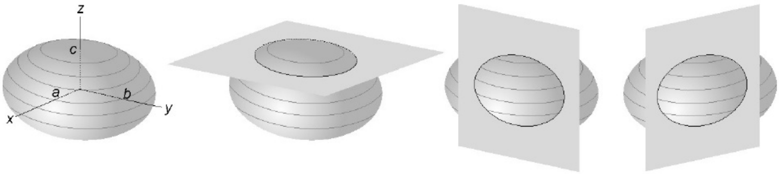
Se $y = 0$, então $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ representa uma elipse.

Se $z = 0$, então $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ representa uma elipse.

Características:

1. Simetria em relação aos eixos coordenados e à origem;
2. Sua intersecção com qualquer plano paralelo aos planos coordenados é uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio.



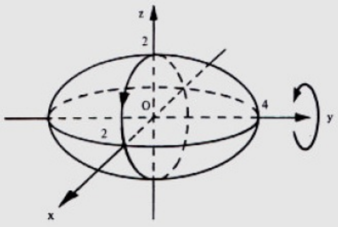


(a) (b) (c) (d)

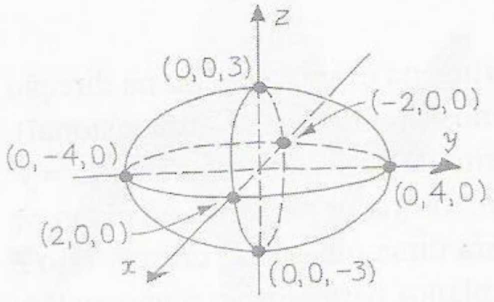
Elipsóide de revolução: ocorre quando pelo menos dois dos valores de a, b ou c são iguais.

Exemplo: $a = c = 2$, $b = 4$ e o centro $C = (0, 0, 0)$.

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1.$$



Outro exemplo: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 1.$



Quando $a = b = c$ obtemos a equação da forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

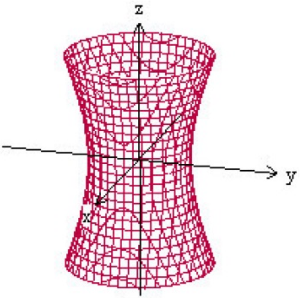
isto é, uma superfície esférica de $C = (0, 0, 0)$ e raio a.

Se $a = b = c$ e centro (x_0, y_0, z_0),

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2.$$

Hiperbolóide de uma folha

Dada a equação inicial: $\dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2} \pm \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, temos o hiperbolóide de uma folha, com dois coeficientes positivos e um negativo: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.



Sinal negativo em z significa figura no eixo z. O mesmo ocorre quando o sinal é negativo em x ou em y.

Denomina-se Hiperbolóide de uma folha já que seus traços são:

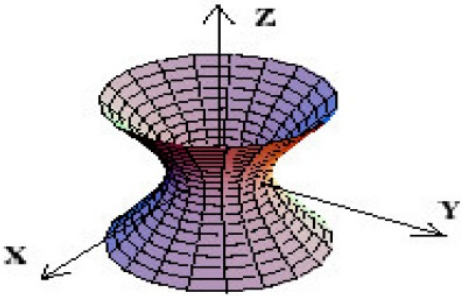
Se $x = 0$, então $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ representa uma hipérbole.

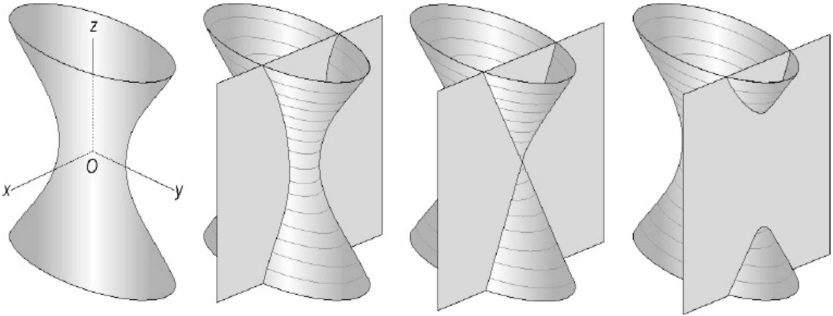
Se $y = 0$, então $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ representa uma hipérbole.

Se $z = 0$, então $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ representa uma elipse.

Características:

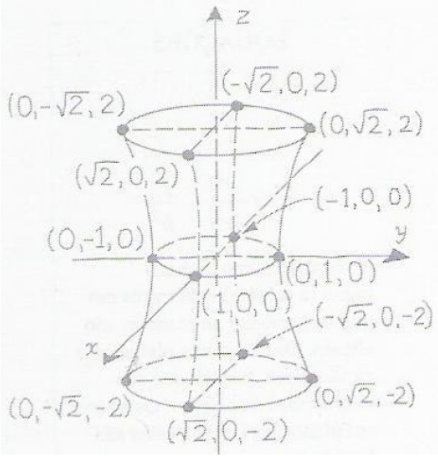
1. Simetria em relação aos eixos coordenados e à origem;
2. Sua intersecção com um plano paralelo ao plano xOy é uma elipse e sua intersecção com um plano paralelo ao plano xOz ou yOz é uma hipérbole.
3. Se $a = b$, então temos o Hiperbolóide de revolução em torno do eixo Oz





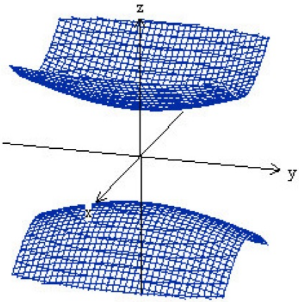
(a) (b) (c) (d)

Exemplo Se $a = b = 1$ e $c = 2$, então temos a equação: $x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 1$.



Hiperbolóide de duas folhas

Dada a equação inicial: $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$, temos o hiperbolóide de uma folha, com dois coeficientes negativos e um positivo: $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.



Sinal positivo em z significa figura no eixo z. O mesmo ocorre quando o sinal é positivo em x ou em y.

Denomina-se Hiperbolóide de duas folhas já que seus traços são:

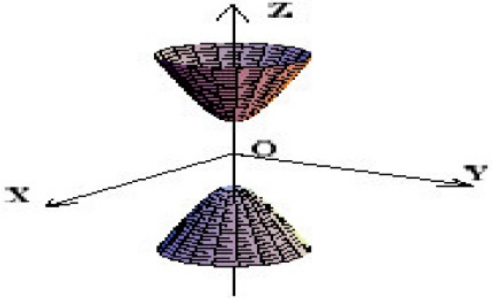
Se $x = 0$, então $-\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ representa uma hipérbole.

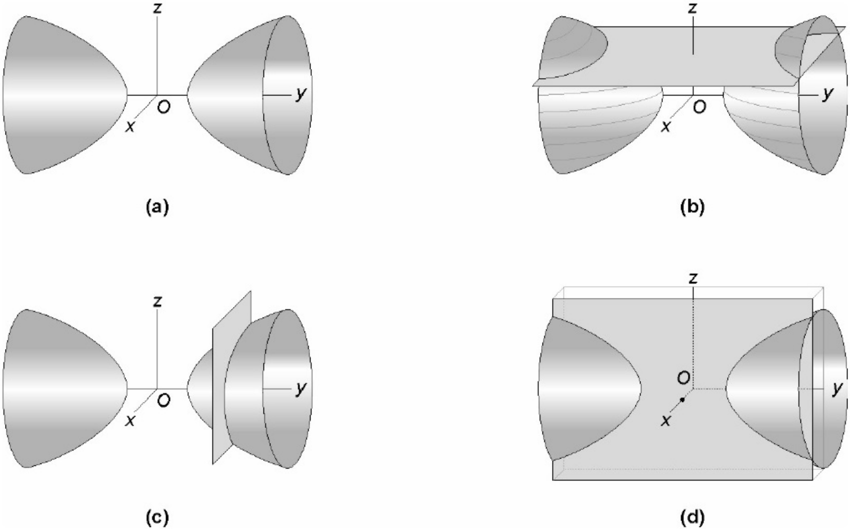
Se $y = 0$, então $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ representa uma hipérbole.

Se $z = 0$, então $-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, logo NÃO EXISTE GRÁFICO.

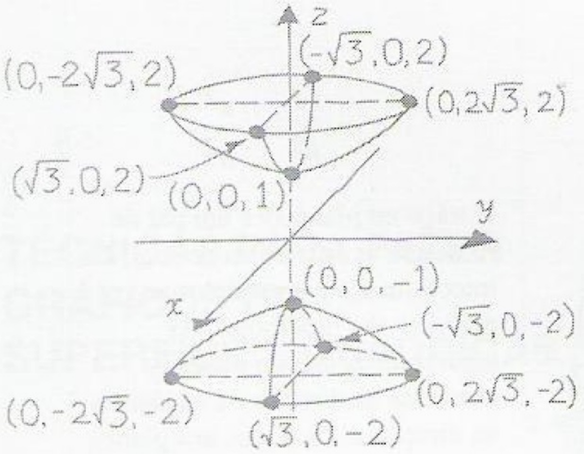
Características:

1. Simetria em relação aos eixos coordenados e à origem;
2. Sua intersecção com um plano paralelo ao plano xOy é uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio e sua intersecção com um plano paralelo ao plano xOz ou yOz é uma hipérbole.
3. Se $a = b$, então temos o hiperbolóide de revolução, gerado pela rotação de uma hipérbole em torno do eixo Oz.



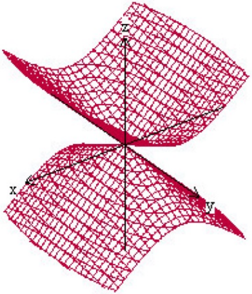

z
O
x
y
(a)
(b)
(c)
(d)

Exemplo Se $a = c = 1$ e $b = 2$, então temos a equação: $z^2 - x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1.$



Superfície Cônica

Considere a superfície quádrica dada pela equação: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0.$



Sinal negativo em z significa figura no eixo z. O mesmo ocorre quando o sinal é negativo em x ou em y.

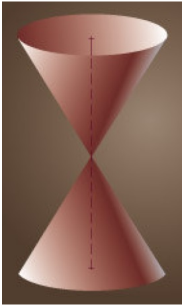
Denomina-se Cone e seus traços são:

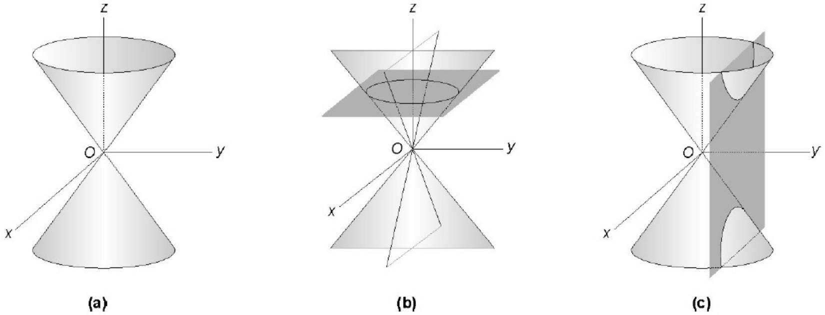
Se $x = 0$, então $\dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$, ou seja, $|y| = |\dfrac{b}{c}z|$ representa duas retas.
Se $y = 0$, então $\dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$, ou seja, $|x| = vvert\dfrac{a}{c}z|$ representa duas retas.
Se $z = 0$, então $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ que representa o ponto $(0, 0, 0)$.
Se $z = k$, onde k é uma constante, então $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{k^2}{c^2}$ que representa uma elipse (ou uma circunferência, caso $a = b$).

Obs.: Os traços nos planos $x = k$ e $y = k$ são hipérboles.

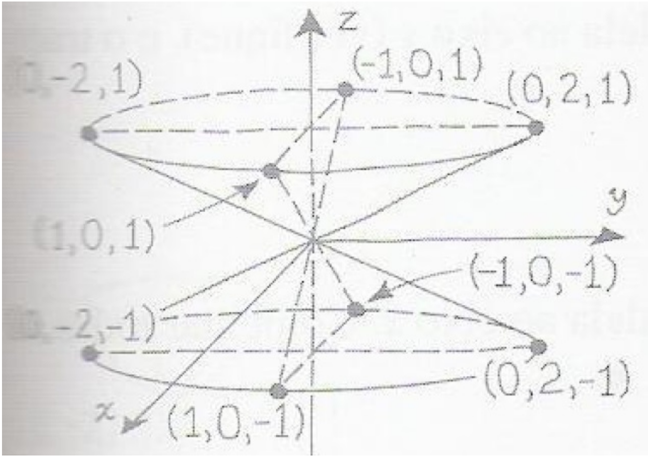
Características:

1. O traço no plano xOz é constituído por duas retas que passam pela origem;
2. Os traços nos planos $z = k$ são elipses (se $a = b$ são circunferências obtendo-se a superfície cônica circular reta).



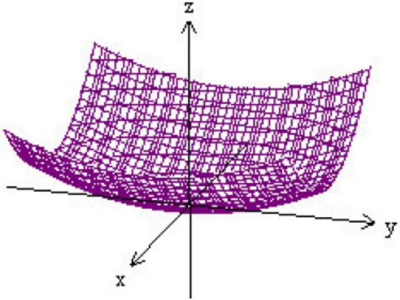

z
O
y
x
(a)
z
O
y
x
(b)
z
O
y
x
(c)

Exemplo Se $a = c = 1$ e $b = 2$, então temos a equação: $z^2 = x^2 + \dfrac{y^2}{4}$.



Parabolóide Elíptico

Considere a superfície quádrica dada pela equação: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = cz$.



Grau um em z significa figura no eixo z. O mesmo ocorre quando o grau um ocorre em x ou em y.

Denomina-se Parabolóide Elíptico e seus traços são:

Se $x = 0$, então $\dfrac{y^2}{b^2} = cz$, ou seja, $y^2 = b^2cz$ representa uma parábola.

Se $y = 0$, então $\dfrac{x^2}{a^2} = cz$, ou seja, $x^2 = a^2cz$ representa uma parábola.

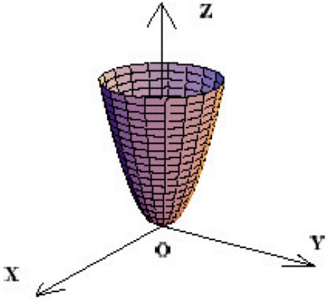
Se $z = 0$, então $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ que representa o ponto $(0, 0, 0)$.

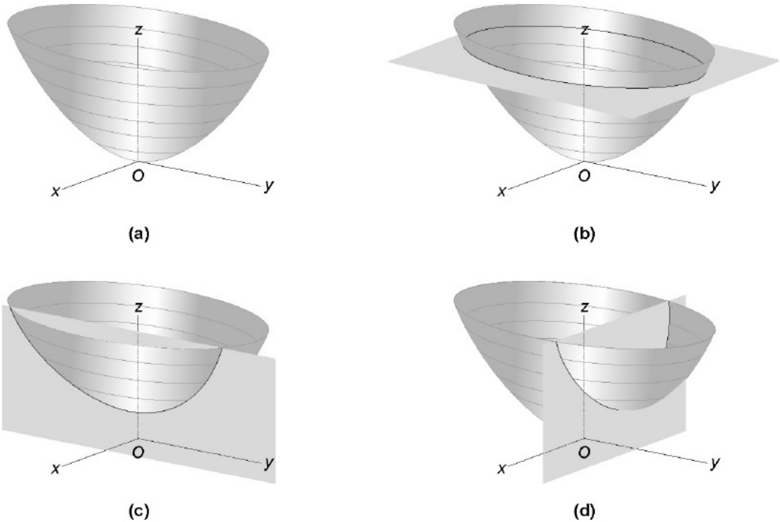
Se $z = k$, onde k é uma constante, então $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = ck$ que representa uma elipse (ou uma circunferência, caso $a = b$).

Obs.: Se $c > 0$, então a superfície situa-se inteiramente acima do plano xOy e, caso contrário, totalmente abaixo.

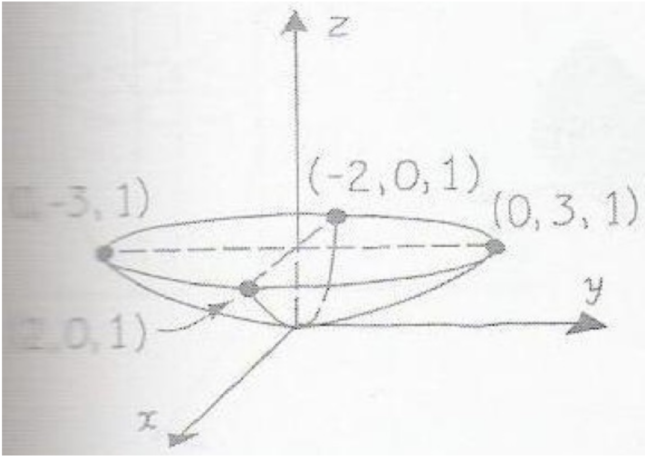
Características:

1. É simétrica relativamente aos planos coordenados xOz e yOz;
2. A intersecção com um paralelo ao plano xOy é uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio;
3. A intersecção com um paralelo aos planos xOz ou yOz é uma parábola;
4. Se $a = b$, o parabolóide é de revolução em torno do eixo Oz.



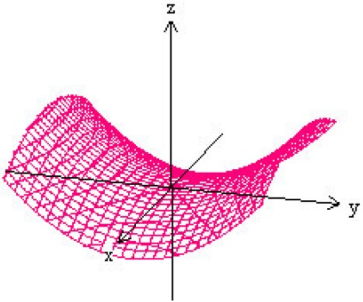

z
O
x
y
(a)
(b)
(c)
(d)

Exemplo Se $a = 2$, $b = 3$ e $c = 1$, então temos a equação: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = z$.

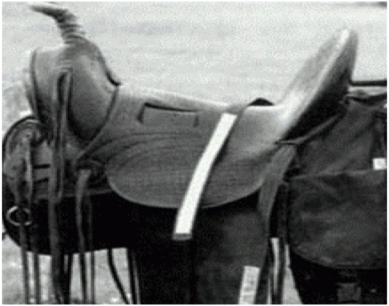


Parabolóide Hiperbólico

Considere a superfície quádrica dada pela equação: $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = cz.$



Parabolóide Hiperbólico



Denomina-se Parabolóide Hiperbólico e seus traços são:

Se $x = 0$, então $\dfrac{y^2}{b^2} = cz$, ou seja, $y^2 = b^2cz$ representa uma parábola de concavidade para cima.

Se $y = 0$, então $\dfrac{x^2}{a^2} = -cz$, ou seja, $x^2 = -a^2cz$ representa uma parábola de concavidade para baixo.

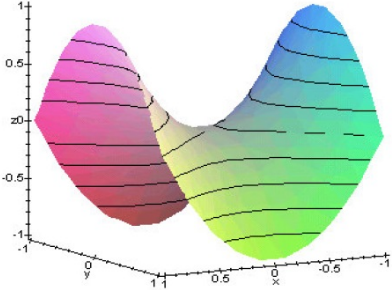
Se $z = 0$, então $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ que representa um par de retas concorrentes.

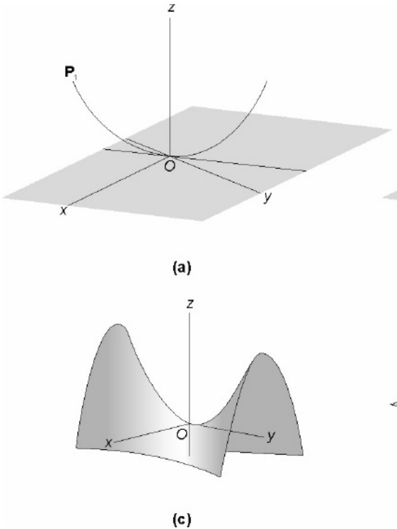
Se $z = k$, onde k é uma constante, então $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = ck$ que representa uma hipérbole (no eixo x se $k > 0$ e no eixo y se $k < 0$).

Obs.: Se $c > 0$, então a superfície está voltada para cima do plano xOy e, se $c < 0$, voltada para baixo.

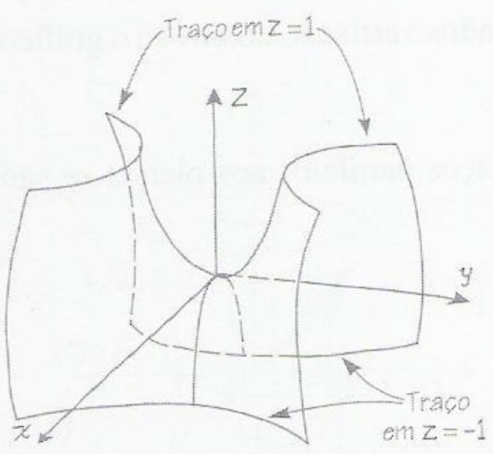
Características:

1. As parábolas tem o eixo z como eixo de simetria;
2. O traço no plano $z = k$ é uma hipérbole cujo eixo real é paralelo ao eixo dos y se $k > 0$ e paralelo ao eixo dos x se $k < 0$.




z
P1
O
x
y
(a)
z
P1
O
x
y
P2
(b)
z
O
x
y
(c)
(d)

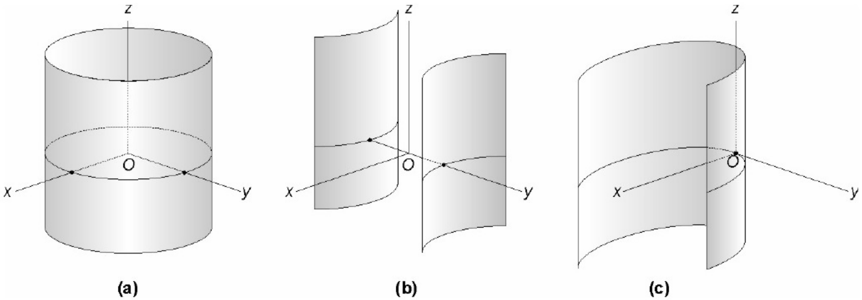
Exemplo Se $a = 3$, $b = 2$ e $c = 1$, então temos a equação: $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} = z$.



- Seja C uma curva plana e f uma reta fixa não contida nesse plano.
- Superfície cilíndrica é a superfície gerada por uma reta r que se move paralelamente à reta fixa f em contato permanente com a curva plana C.
- A reta r que se move é denominada geratriz e a curva C é a diretriz da superfície cilíndrica.

De modo geral:

- **Diretriz:** circunferência, elipse, hipérbole ou parábola.
- **Superfície:** circular, elíptica, hiperbólica ou parabólica.



Circular ou elíptica Hiperbólica Parabólica

Muito Obrigado!