# INTEGRAÇÃO NUMÉRICA:

## RESOLVENDO UMA INTEGRAL IMPRÓPRIA

MAT 271 – Cálculo Numérico – PER3/2021/UFV

Professor Amarísio Araújo  DMA/UFV

# RESOLVENDO UMA INTEGRAL IMPRÓPRIA

Problema: Resolver a seguinte integral:

$$\int_0^1 \frac{senx}{x} dx$$

Trata-se de uma integral imprópria, pois a função a ser integrada não é contínua em $x = 0$.

Analiticamente, como visto em um curso de Cálculo II:

$$\int_0^1 \frac{senx}{x} dx = \lim_{\delta \to 0^+} \int_\delta^1 \frac{senx}{x} dx$$

se o limite existir.

# RESOLVENDO UMA INTEGRAL IMPRÓPRIA

Não é tarefa fácil resolver a integral $\int_{\delta}^{1} \frac{senx}{x} dx \ \ (\delta > 0)$.

Há, entretanto, resultados na teoria de integração imprópria que nos garantem que a integral $\int_{0}^{1} \frac{senx}{x} dx$ existe.

Considerando o seguinte fato:

$$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1\,,$$

seja a função $g$ dada por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{senx}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

# RESOLVENDO UMA INTEGRAL IMPRÓPRIA

Esta função $g$ dada por $g(x) = \begin{cases} \frac{senx}{x}, \ x \neq 0 \\ 1, \ x = 0 \end{cases}$ é contínua,

e é tal que $g(x) = \frac{senx}{x}$ para todo $x \neq 0$.

Na verdade, $g$ é uma redefinição da função $f$ dada por $f(x) = \frac{senx}{x}$, para remover sua descontinuidade, que ocorre em um único ponto ($x = 0$).

Assim:

$$\int_0^1 \frac{senx}{x} dx = \int_0^1 g(x) dx$$

Podemos, então, usar uma técnica numérica para resolver a integral $\int_0^1 g(x)dx$.

Vamos usar a Regra 1/3 de Simpson, com $n = 4$.

# RESOLVENDO UMA INTEGRAL IMPRÓPRIA

$h = \frac{1-0}{4} = 0.25$; $x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 0.75$ e $x_4 = 1$.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{senx}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^1 g(x)dx \cong \frac{h}{3}\left[g(x_0) + 4\big(g(x_1) + g(x_3)\big) + 2g(x_2) + g(x_4)\right]$$

$$\int_0^1 g(x)dx \cong \frac{0.25}{3}\left[g(0) + 4\big(g(0.25) + g(0.75)\big) + 2g(0.5) + g(1)\right]$$

$$\int_0^1 g(x)dx \cong \frac{0.25}{3}\left[1 + 4\left(\frac{sen(0.25)}{0.25} + \frac{sen(0.75)}{0.75}\right) + 2\frac{sen(0.5)}{0.5} + \frac{sen(1)}{1}\right] = 0.946087$$

Mas $\boxed{\int_0^1 \frac{senx}{x}dx = \int_0^1 g(x)dx}$

Logo: $\boxed{\int_0^1 \frac{senx}{x}dx \cong 0.946087}$

# OBSERVAÇÃO

Na prática, sabendo que a integral $\int_0^1 \frac{senx}{x} dx$ existe e que $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$, poderíamos ter considerado

$x_0 = 0.0001$ (por exemplo), $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 0.75$ e $x_4 = 1$ (ou seja, $x_0$ próximo de zero).

Assim:

$$\int_0^1 \frac{senx}{x} dx \cong \frac{0.25}{3}\left[\frac{sen(0.0001)}{0.0001} + 4\left(\frac{sen(0.25)}{0.25} + \frac{sen(0.75)}{0.75}\right) + 2\frac{sen(0.5)}{0.5} + \frac{sen(1)}{1}\right] = 0.946087$$

$$\boxed{0.999999 \cong 1}$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{senx}{x} dx \cong 0.946087}$$