MAIS SOBRE O CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DE JACOBI-RICHARDSON

MAT 271 – Cálculo Numérico – PER3/2021/UFV

Professor Amarísio Araújo DMA/UFV

SISTEMA LINEAR $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Considerando que $detA \neq 0$, seja $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) \epsilon \mathbb{R}^n$ a solução única do sistema.

UMA JUSTIFICATIVA PARA O MÉTODO DE JACOBI-RICHARDSON

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Supondo $a_{ii} \neq 0, i = 1, \ldots, n$:

$$(*) \Leftrightarrow (**)\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n) \\ x_2 = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n) \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} - \dfrac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1}) \end{cases}$$

UMA JUSTIFICATIVA PARA O MÉTODO DE JACOBI-RICHARDSON

$$Ax = b \iff \begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n) \\ x_2 = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n) \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} - \dfrac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1}) \end{cases}$$

$$(a_{ii} \neq 0, i = 1, \ldots, n)$$

UMA JUSTIFICATIVA PARA O MÉTODO DE JACOBI-RICHARDSON

Sejam as funções reais de n variáveis $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$: $\phi_i: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, i = 1,2,\dots,n$.

Para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\phi_1(x) = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n)$$
$$\phi_2(x) = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n)$$
$$\vdots$$
$$\phi_n(x) = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1})$$

UMA JUSTIFICATIVA PARA O MÉTODO DE JACOBI-RICHARDSON

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n) \\ x_2 = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n) \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} - \dfrac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1}) \end{cases} \iff \boxed{\begin{matrix} x_1 = \phi_1(x) \\ x_2 = \phi_2(x) \\ \vdots \\ x_n = \phi_n(x) \end{matrix}}$$

UMA JUSTIFICATIVA PARA O MÉTODO DE JACOBI-RICHARDSON

Considere, agora, a função $\Phi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, tal que, para cada $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\Phi(x) = \big(\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)\big).$$

Então:

$$\begin{array}{c} x_1 = \phi_1(x) \\ x_2 = \phi_2(x) \\ \vdots \\ x_n = \phi_n(x) \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad x = \Phi(x)$$

Assim, chegamos à seguinte equivalência: $\boxed{Ax = b \Leftrightarrow x = \Phi(x).}$

Isto nos sugere uma analogia com o método das aproximações sucessivas para equações reais $f(x) = 0$ ($f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x)$).

UMA JUSTIFICATIVA PARA O MÉTODO DE JACOBI-RICHARDSON

$$\boxed{Ax = b \Leftrightarrow x = \Phi(x).}$$

Uma sequência de aproximações para a solução do sistema $Ax = b$ é, então, construída a partir de uma aproximação inicial $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)$, sendo os demais termos da sequência obtidos através da função Φ assim:

$$x^{(k+1)} = \Phi\left(x^{(k)}\right), k = 0,1,2, \dots$$

E, pela definição de $\Phi(x)$, as relações $x^{(k+1)} = \Phi\left(x^{(k)}\right), k = 0,1,2, \dots$, nos levam às equações de iteração do Método de Jacobi-Richardson:

UMA JUSTIFICATIVA PARA O MÉTODO DE JACOBI-RICHARDSON

$$x^{(k+1)} = \Phi\left(x^{(k)}\right)$$

$$\left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}\right) = \left(\phi_1\left(x^{(k)}\right), \phi_2\left(x^{(k)}\right), \dots, \phi_n\left(x^{(k)}\right)\right)$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(k)} - \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k)} - \dfrac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} x_n^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{b_n}{a_{nn}} - \dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1^{(k)} - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}} x_{n-1}^{(k)} \end{cases} \quad (k = 0,1,2,3, \dots)$$

$$x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right) (n - upla\ qualquer\ de\ \mathbb{R}^n\ )$$

CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DE JACOBI-RICHARDSON

Como vimos, a função $\Phi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, é tal que, para cada $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\Phi(x) = \big(\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)\big),$$

onde $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\colon \phi_i\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, i = 1,2, \dots, n$, são dadas por:

$$\phi_1(x) = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n)$$

$$\phi_2(x) = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n)$$

$$\vdots$$

$$\phi_n(x) = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1})$$

CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DE JACOBI-RICHARDSON

A derivada de $\Phi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, denotada por $J\Phi$, é a seguinte matriz:

$$J\Phi = (\phi_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

onde $\phi_{ij} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1,2, \dots, n$.

$$J\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ & \vdots & & \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix}$$

MATRIZ JACOBIANA

OBTENDO A MATRIZ JACOBIANA

$$\phi_1(x) = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n)$$
$$\phi_2(x) = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n)$$
$$\vdots$$
$$\phi_n(x) = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1})$$

$$J\Phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_{11}(x) & \phi_{12}(x) & \dots & \phi_{1n}(x) \\ \phi_{21}(x) & \phi_{22}(x) & \dots & \phi_{2n}(x) \\ & \vdots & & \\ \phi_{n1}(x) & \phi_{n2}(x) & \dots & \phi_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

$$J\Phi(x) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ & & \vdots & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

NORMA DE UMA MATRIZ

Dado o espaço vetorial M das matrizes reais $n \times n$, podemos considerar, dentre outras, a seguinte Norma, chamada de Norma Linha, que denotaremos aqui por $\|\cdot\|_L$:

Dada $V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ & \vdots & & \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} \epsilon\ M, \quad \|V\|_L = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |v_{ij}|.$

$$\boxed{\|V\|_L = \max\left\{\sum_{j=1}^{n} |v_{1j}|, \sum_{j=1}^{n} |v_{2j}|, \dots, \sum_{j=1}^{n} |v_{nj}|\right\}}$$

CALCULANDO A NORMA LINHA DA MATRIZ JACOBIANA $J\Phi(x)$

$$J\Phi(x) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ & \vdots & & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\|J\Phi(x)\|_L = \max\left\{\left|\frac{a_{12}}{a_{11}}\right| + \left|\frac{a_{13}}{a_{11}}\right| + \cdots + \left|\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right|, \left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right| + \left|\frac{a_{23}}{a_{22}}\right| + \cdots + \left|\frac{a_{2n}}{a_{22}}\right|, \dots, \left|\frac{a_{n1}}{a_{nn}}\right| + \left|\frac{a_{n2}}{a_{nn}}\right| + \cdots + \left|\frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}\right|\right\}$$

$$\boxed{\|J\Phi(x)\|_L = \max\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}}$$

CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DE JACOBI-RICHARDSON: UM RESULTADO

TEOREMA

Seja a sequência $x^{(k+1)} = \Phi\left(x^{(k)}\right), k = 0,1,2, \ldots,$ onde $x^{(0)}$ é um elemento qualquer de $\mathbb{R}^n$. Se $\|J\Phi(x)\|_L < 1$ a sequência converge para a solução $\bar{x}$ do sistema $Ax = b$.

Como vimos: $\|J\Phi(x)\|_L = \max\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$

Portanto: $\|J\Phi(x)\|_L < 1 \Leftrightarrow \max\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} < 1$

Mas $\max\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} < 1 \Leftrightarrow \beta_i < 1, i = 1,2, \ldots, n$

$$\boxed{\|J\Phi(x)\|_L < 1 \Leftrightarrow \beta_i < 1, i = 1,2, \ldots, n.}$$

O Critério Norma Linha é uma consequência do TEOREMA acima.

ANALOGIA COM O MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS PARA EQUAÇÕES DE UMA ÚNICA VARIÁVEL

No método das aproximações sucessivas para equações reais $f(x) = 0$, usamos a equivalência $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x)$ e construímos uma sequência pela fórmula $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ com um x_0 qualquer.

Se φ for derivável, com $|\varphi'(x)| < 1$ em um intervalo contendo a solução $\bar{x}$ da equação, então a sequência converge para $\bar{x}$, ou seja, o método das aproximações sucessivas é convergente.

No método de Jacobi-Richardson, da equivalência $Ax = b \Leftrightarrow x = \Phi(x)$, constrói-se a sequência de $\mathbb{R}^n$ dada por $x^{(k+1)} = \Phi\left(x^{(k)}\right)$, a partir de uma n-upla qualquer $x^{(0)}$. E, como vimos, se a norma linha da derivada de Φ for menor que 1, então a sequência converge para a solução do sistema $Ax = b$.

UMA OUTRA VERSÃO PARA O CRITÉRIO “NORMA LINHA < 1”

Se o critério norma linha é satisfeito, então:

$$\beta_1 < 1 \iff \left|\frac{a_{12}}{a_{11}}\right| + \left|\frac{a_{13}}{a_{11}}\right| + \cdots + \left|\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right| < 1 \iff |a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}|$$

$$\beta_2 < 1 \iff \left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right| + \left|\frac{a_{23}}{a_{22}}\right| + \cdots + \left|\frac{a_{2n}}{a_{22}}\right| < 1 \iff |a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}| + \cdots + |a_{2n}|$$

$$\beta_3 < 1 \iff \left|\frac{a_{31}}{a_{33}}\right| + \left|\frac{a_{32}}{a_{33}}\right| + \cdots + \left|\frac{a_{3n}}{a_{33}}\right| < 1 \iff |a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}| + \cdots + |a_{3n}|$$

$$\vdots$$

$$\beta_n < 1 \iff \left|\frac{a_{n1}}{a_{nn}}\right| + \left|\frac{a_{n2}}{a_{nn}}\right| + \cdots + \left|\frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}\right| < 1 \iff |a_{nn}| > |a_{n1}| + |a_{n2}| + \cdots + |a_{nn-1}|$$

UMA OUTRA VERSÃO PARA O CRITÉRIO “NORMA LINHA < 1”

$$|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}|$$

$$|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}| + \cdots + |a_{2n}|$$

$$|a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}| + \cdots + |a_{3n}|$$

$$\vdots$$

$$|a_{nn}| > |a_{n1}| + |a_{n2}| + \cdots + |a_{nn-1}|$$

Estas desigualdades nos dizem que a matriz A dos coeficientes do sistema é tal que, em cada linha i de A, o valor absoluto do elemento a_{ii} é maior que a soma dos valores absolutos dos demais elementos da linha i, o que classifica a matriz A como uma *matriz estritamente diagonal dominante*.

Portanto o critério de convergência do Método de Jacobi-Richardson poderia ser este:

Se a matriz A dos coeficientes do sistema for estritamente diagonal dominante, há garantia de convergência do Método de Jacobi-Richardson.

EXEMPLO

Seja o sistema linear: $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 8 \end{cases}$.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}; detA = 99; a_{ii} \neq 0.$$

$$5 > 2 + 1$$

$$4 > 1 + 2$$

$$7 > 2 + 3$$

A matriz dos coeficientes do sistema é estritamente diagonal dominante.

Logo, o Método de Jacobi-Richardson pode ser usado para obter uma aproximação da solução única do sistema, com garantia de convergência.