ELT330 – Sistemas de Controle I
Prof. Tarcísio Pizziolo

Aula 16 – Sistemas de Ordem Superior

1. Introdução

Os sistemas de ordem maior ou igual a 3 (3ª ordem) são geralmente denominados Sistemas de Ordem Superior. A inclusão de mais pólos, ou seja, mais raizes na equação característica, leva a uma resposta mais complexa do que os sistemas de 2ª ordem. Desta forma, para estudos de sistemas de ordem superior pode-se realizar a redução da ordem para 2ª ordem e então determinar as especificações, contanto que não se altere significativamente as características da resposta do sistema.

Seja a função de transferência de um sistema de 3ª ordem em malha fechada:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{w_n^2}{(s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2)(s + p)}$$

A resposta ao degrau unitário deste sistema é dada por:

$$C(s) = 1 - \frac{e^{-\xi w_n t}}{\beta\xi^2(\beta - 2) + 1}\left\{\beta\xi^2(\beta - 2)\cos\left(\sqrt{1-\xi^2}\,w_n t\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\beta\xi[\xi^2(\beta - 2) + 1}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\mathrm{sen}\,(\left(\sqrt{1-\xi^2}\,w_n t\right)\right\} - \frac{e^{-pt}}{\beta\xi^2(\beta - 2) + 1}$$

Onde:

$$\beta = \frac{p}{\xi w_n}$$

A redução de um sistema de ordem superior para um sistema de 1ª ou de 2ª ordem pode ser realizada considerando:
I) os polos dominantes, ou
II) análise gráfica da resposta transitória do sistema.

I) Polos Dominantes: são os polos mais próximos à esquerda do eixo imaginário jw considerando que o sistema é estável.

Os polos dominantes de um sistema em malha fechada “demoram” mais tempo para eliminar seus efeitos sobre a resposta transitória. Desta maneira, a influência destes polos na resposta transitória pode ser considerada a mais significativa. Os polos mais distantes à esquerda do eixo jw, rapidamente deixam de influenciar a resposta transitória, podendo assim serem desprezados com relação aos efeitos dos pólos dominantes.

Exemplo: Seja um sistema que possui a seguinte função de transferência em malha fechada,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{(s^2 + 4s + 1)}\,.$$

Ao se aplicar uma entrada degrau unitário a resposta é:

$$\boxed{c(t) = 1 + 0{,}077e^{-3{,}73t} - 1{,}077e^{-0{,}27t}}$$

As constantes de tempo deste sistema são:

$$\tau_1 = \frac{1}{0{,}27} = 3{,}704\ s \quad e \quad \tau_2 = \frac{1}{3{,}73} = 0{,}268\ s$$

Nota: Se as relações das partes reais forem maiores do que 5 e não houver zeros nas proximidades, então os polos de malha fechada mais próximos do eixo ***jω*** serão dominantes no comportamento da resposta transitória porque correspondem aos termos da resposta transitória que decrescem lentamente.

Como a constante de tempo **τ_2 > 5τ_1**, o desempenho deste sistema pode ser analisado por meio da maior constante de tempo. Assim pode-se aproximá-lo por um sistema de 1ª ordem com a seguinte função de transferência:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{w_n^2}{(s+p_1)(s+p_2)} \cong \frac{p_1}{(s+p_1)}$$

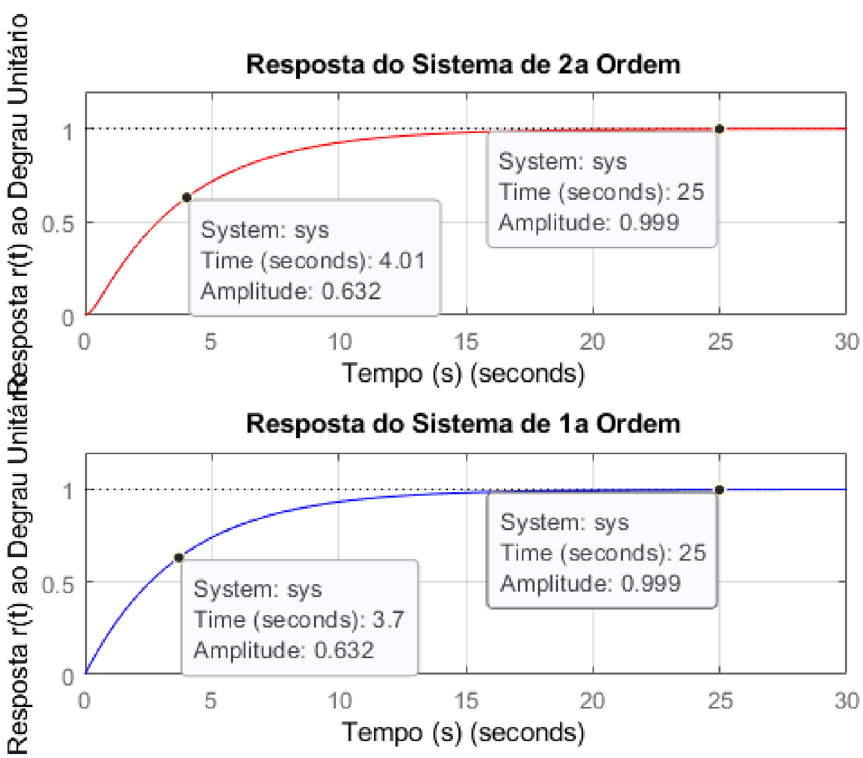
O numerador deve ter o mesmo valor do polo **p_1** para que o valor final seja 1.
Ou seja;

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2+4s+1} = \frac{1}{(s+0{,}27)(s+3{,}73)} \cong \frac{0{,}27}{(s+0{,}27)}$$

A resposta no domínio do tempo será:

$$\boxed{c(t) = 1 - e^{-0{,}27t}}$$

Gráficos de comparação após a aplicação do degrau unitário.



Exemplo: Seja um sistema que possui a seguinte função de transferência em malha fechada,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(s+10)}{(s^3+6s^2+9s+10)}\,.$$

Os pólos da função de transferência são:

$$\boxed{p_1 = -4{,}492};\ \boxed{p_2 = -0{,}754 + j1{,}2875}\ \text{e}\ \boxed{p_3 = -0{,}754 - j1{,}2875}$$

Considerando que a parte real dos polos complexos conjugados p_2 e p_3 é aproximadamente 6 vezes menor que o pólo real p_1, pode-se assumir os polos dominantes com sendo:

$p_2 = -0{,}754 + j1{,}2875$ e $p_3 = -0{,}754 - j1{,}2875$

Assim, reconstruindo a função de transferência somente com os pólos dominantes tem-se:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{(s+0{,}754+j1{,}2875)(s+0{,}754+j1{,}2875)} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{(s^2+1{,}508s+2{,}2262)}}$$

Para que o valor final da resposta do sistema seja igual a 1 (estável) na aplicação do degrau unitário, o ganho no numerador deverá ser igual a 2,2262. Então:

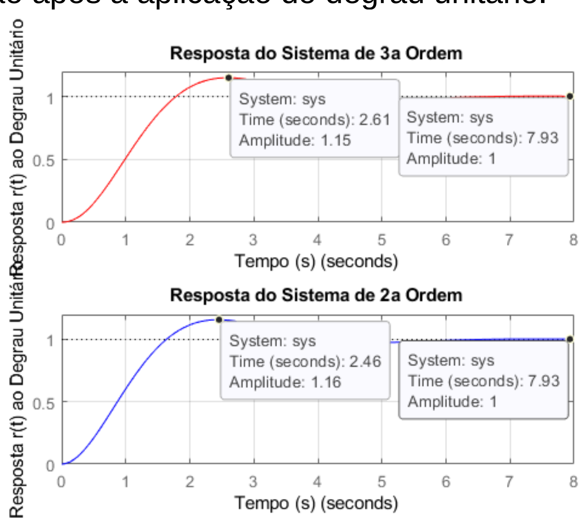
$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2{,}2262}{(s^2+1{,}508s+2{,}2262)}}$$

A partir desta função de transferência reduzida determina-se $\mathbf{w_n}$ e $\boldsymbol{\xi}$.

$$w_n^2 = \sqrt{2{,}2262} \Longrightarrow \boxed{w_n = 1{,}492}$$
$$2\xi w_n = 1{,}508 \Longrightarrow \boxed{\xi = 0{,}5}$$

A partir de $\mathbf{w_n}$ e $\boldsymbol{\xi}$ pode-se determinar as especificações.

Gráficos de comparação após a aplicação do degrau unitário.



II) Análise Gráfica da Resposta Transitória do Sistema: Para a redução de sistemas de 2ª ordem para 1ª ordem pela análise gráfica da resposta transitória deve-se construir o gráfico de resposta do sistema para uma entrada degrau unitário.

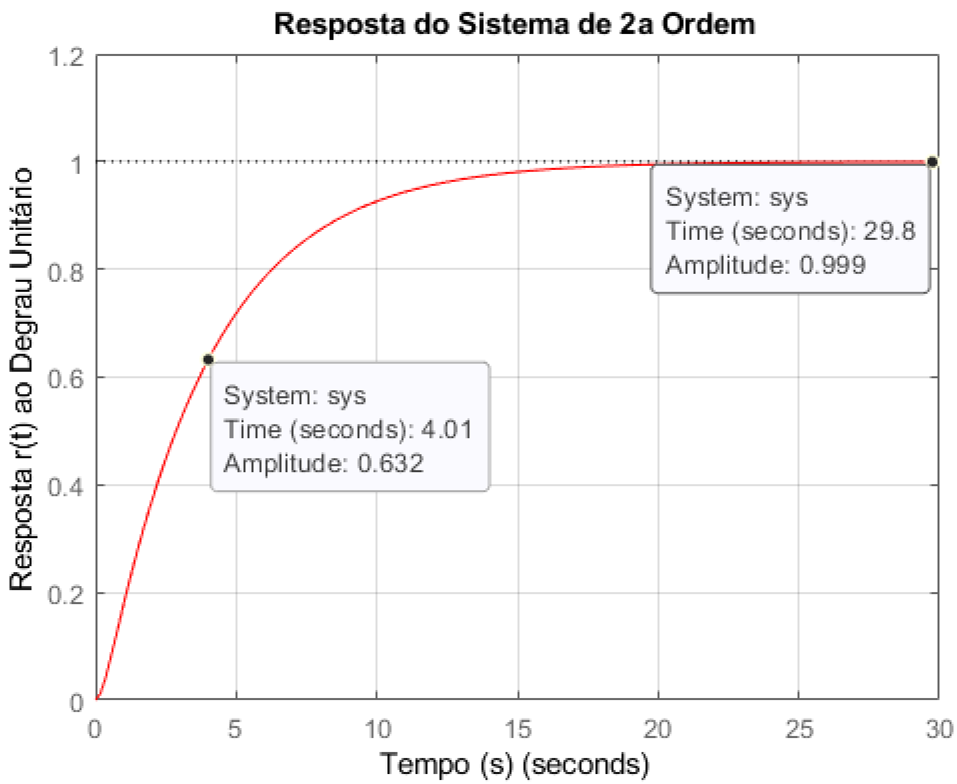
Em seguida, deve-se considerar o valor da saída igual a 0,632 e determinar no gráfico o valor do tempo corresponde à constante de tempo do sistema.

Em seguida, monta-se a função de transferência dada por:

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{(\tau s + 1)}}$$

Exemplo: Seja um sistema que possui a seguinte função de transferência em malha fechada,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{(s^2 + 4s + 1)}.$$



Considerando a constante de tempo τ igual a 4 s pode-se montar a função de transferência como sendo:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{(\tau s + 1)} \Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{(4s + 1)} \Rightarrow \boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{0{,}25}{(s + 0{,}25)}}$$

Esta função de transferência é bem aproximada da função de transferência do exemplo anterior.

Para a redução de sistemas de 3ª ordem ou superior para 2ª ordem pela análise gráfica da resposta transitória deve-se construir o gráfico de resposta do sistema para uma entrada degrau unitário. Em seguida, determina-se os valores do Sobressinal Máximo (M_P) e do Tempo de Pico (t_P).

Utilizando a fórmula de cálculo para do Sobressinal Máximo (M_P) determina-se ξ.

$$M_P = e^{-\frac{\sigma\pi}{w_d}} \Longrightarrow M_P = e^{-\frac{\xi w_n \pi}{w_n\sqrt{1-\xi^2}}} \Longrightarrow M_P = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Longrightarrow \boxed{\xi = \sqrt{\frac{\left[\frac{\ln(M_P)}{\pi}\right]^2}{1+\left[\frac{\ln(M_P)}{\pi}\right]^2}}}$$

Substituindo os valores de t_P e ξ determina-se w_n:

$$t_P = \frac{\pi}{w_d} \Longrightarrow t_P = \frac{\pi}{w_n\sqrt{1-\xi^2}} \Longrightarrow \boxed{w_n = \frac{\pi}{t_P\sqrt{1-\xi^2}}}$$

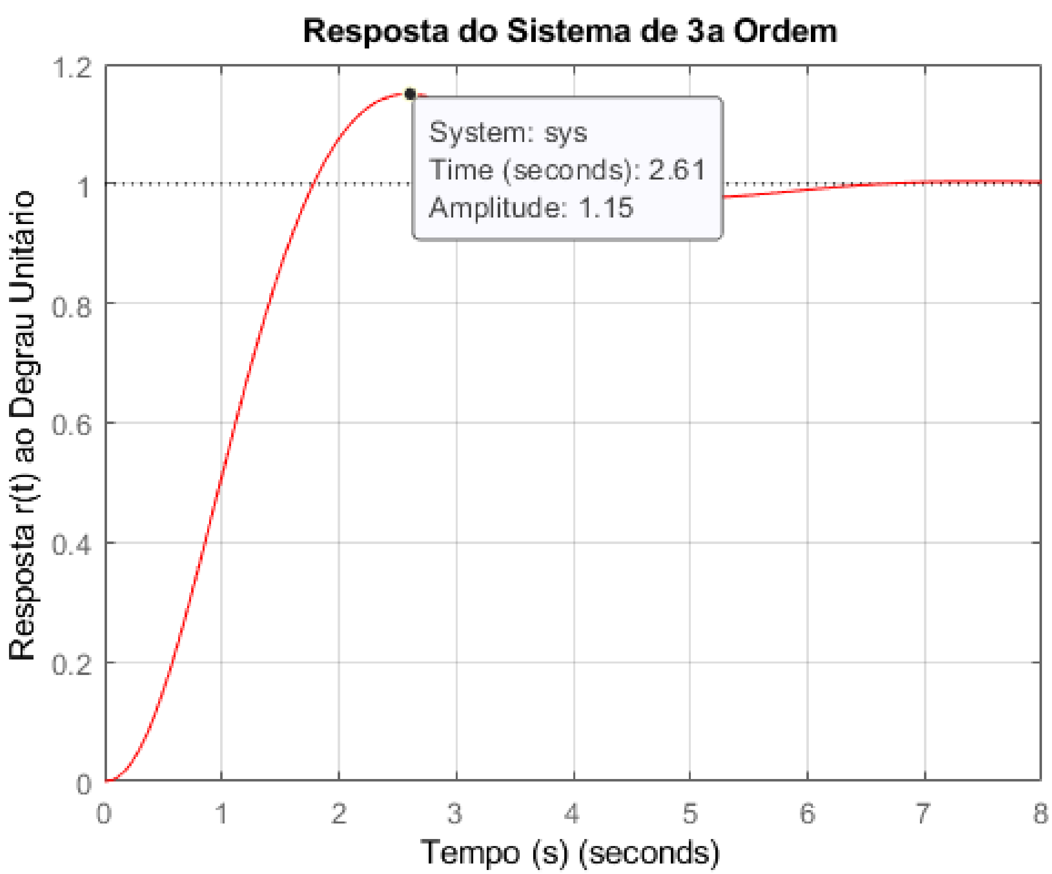
Finalmente monta-se a função de transferência com os valores de w_n e ξ.

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}}$$

Exemplo: Seja um sistema que possui a seguinte função de transferência em malha fechada,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(s+10)}{(s^3+6s^2+9s+10)}\,.$$

Rrealize a redução da ordem deste sistema para 2ª ordem pela análise gráfica da resposta transitóra.



Pela análise gráfica tem-se:

$\boxed{M_P = 0{,}15}$ e $\boxed{t_P = 2{,}61\ s}$

Aplicando a fórmula de M_P:

$$\xi = \sqrt{\frac{\left[\frac{\ln(M_P)}{\pi}\right]^2}{1 + \left[\frac{\ln(M_P)}{\pi}\right]^2}} \Longrightarrow \xi = \sqrt{\frac{\left[\frac{\ln(0{,}15)}{\pi}\right]^2}{1 + \left[\frac{\ln(0{,}15)}{\pi}\right]^2}} \Longrightarrow \xi = \sqrt{\frac{0{,}365}{1 + 0{,}365}} \Longrightarrow \boxed{\xi = 0{,}517}$$

Aplicando a fórmula de t_P:

$$w_n = \frac{\pi}{t_P\sqrt{1-\xi^2}} \Longrightarrow w_n = \frac{\pi}{2{,}61\sqrt{1-(0{,}517)^2}} \Longrightarrow \boxed{w_n = 1{,}41\ rd/s}$$

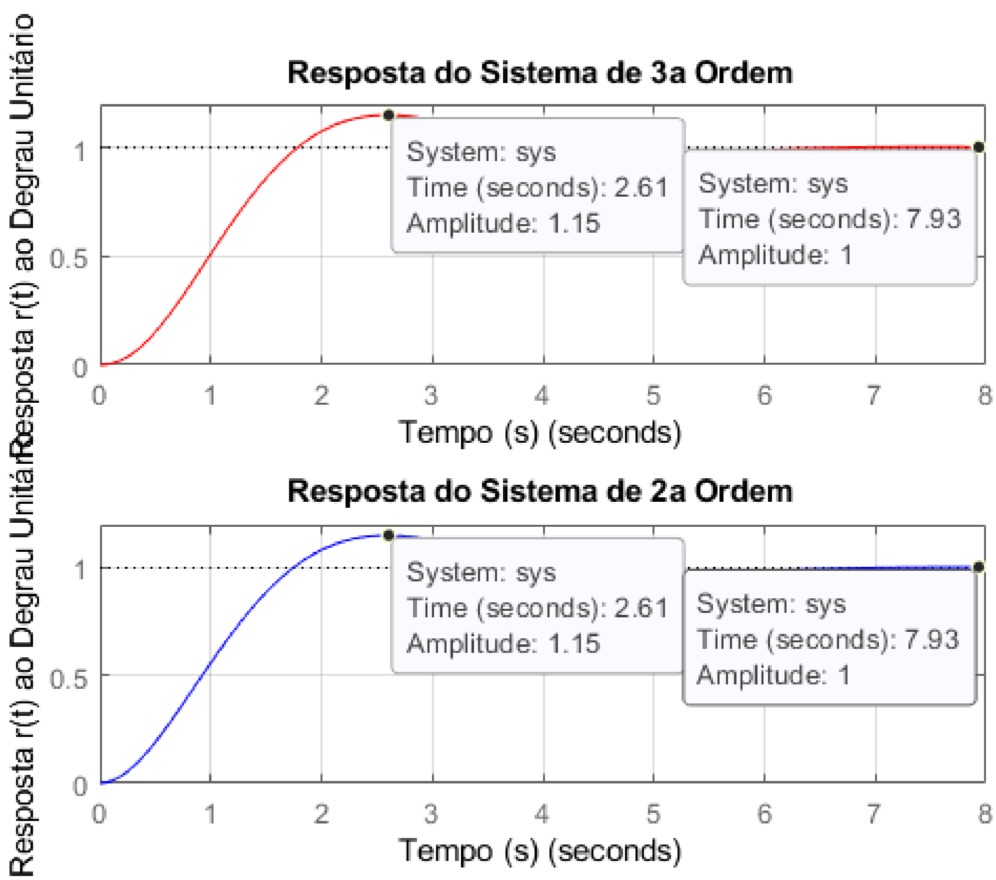
Finalmente monta-se a função de transferência com os valores de w_n e ξ.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2} \Longrightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(1{,}41)^2}{s^2 + 2(0{,}517)(1{,}41)s + (1{,}41)^2} \Longrightarrow$$

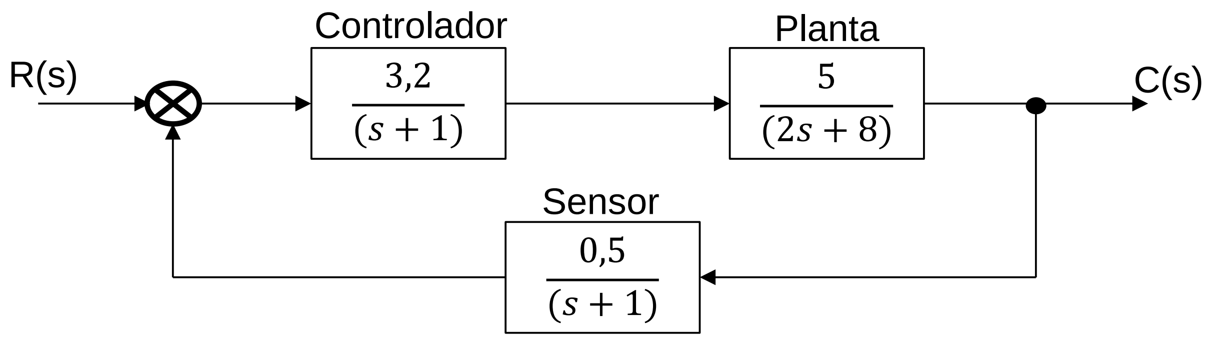
$$\Longrightarrow \boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{s^2 + 1{,}46s + 2}}$$

Note que, comparando os valores de w_n e ξ para as aproximações pelos polos dominantes e pela análise gráfica da resposta transitória, os valores são bem próximos.

Gráficos de comparação após a aplicação do degrau unitário.



Exercício) Um sistema de controle em malha fechada é dado pelo diagrama de blocos abaixo.



a) Determinar a função de transferência em malha fechada.
R.:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{32s^3 + 192s^2 + 288s + 128}{4s^5 + 44s^4 + 172s^3 + 308s^2 + 304s + 128}$$

b) Reduzir a ordem deste sistema para 2ª ordem utilizando os pólos dominantes.

Pólos: $p_1 = -4{,}3553$; $p_2 = -4$; $p_3 = -1$ e $p_{4,5} = -0{,}8223 \pm j1{,}0773$
Pólos Dominantes: $p_{4,5} = -0{,}8223 \pm j1{,}0773$
Denominador de F(s) = $s^2 + 1{,}6446s + 1{,}8367$

$$\left.\frac{C(s)}{R(s)}\right|_{\text{Reduzida}} = \frac{1{,}8367}{s^2 + 1{,}6446s + 1{,}8367}$$

c) Reduzir a ordem deste sistema para 2ª ordem utilizando análise gráfica da resposta transitória.
R.:

$$M_P = 0{,}273 \quad \text{e} \quad t_P = 1{,}87\ \text{s}$$

$$\xi = 0{,}3846 \quad \text{e} \quad w_n = 1{,}82\ \text{rd/s}$$

$$\left.\frac{C(s)}{R(s)}\right|_{\text{Reduzida}} = \frac{3{,}3124}{s^2 + 1{,}4s + 3{,}3124}$$

d) Esboçar os gráficos dos itens a), b) e c) para uma entrada degrau unitário.