Prova de ELT 336 - 5/8/22 - Werikson Alves - 96708

Questão 1 → considere o sistema $\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

a) Utilizando a lei de controle $u = \vec{K} v$, com $\vec{K} = [K_1 \; K_2]$, determine os ganhos K_1 e K_2 que leve os autovalores do sistema realimentado para a posição -1 e -3.

b) Para um ganho $\vec{K} = [K \; K]$, determine o valor de C para que seja possível alocar os autovalores do sistema realimentado como raízes do polinômio $p_c(S) = S^2 + CS + 5$.

a)

$$\dot{\vec{V}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \vec{V} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [K_1 \; K_2] \vec{V} \Rightarrow \dot{\vec{V}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \vec{V} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_1 & K_2 \end{bmatrix} \vec{V} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K_1-2 & K_2-3 \end{bmatrix} \vec{V}$$

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 2-K_1 & \lambda+3-K_2 \end{pmatrix} = \lambda(\lambda+3-K_2) + (2-K_1) \Rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda(3-K_2) + (2-K_1)$$

$$\boxed{[K_1 \; K_2] = [-1 \;\; -1]}$$

$$P(-1) = (-1)^2 + (-1)(3-K_2) + (2-K_1) = 1 - 3 + K_2 + 2 - K_1 = K_2 - K_1 = 0 \Rightarrow \boxed{K_2 = K_1}$$

$$P(-3) = (-3)^2 + (-3)(3-K_2) + (2-K_1) = \cancel{9} - \cancel{9} + 3K_2 + 2 - K_1 = 3K_2 + 2 - K_1 = 0 \Rightarrow 3K_2 - K_2 = -2 \Rightarrow \boxed{K_2 = -1}$$

b) Considerando $K_1 = K_2 = K$, temos que $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda(3-K) + (2-K)$, logo:

$$\lambda = \frac{-(3-K) \pm \sqrt{(3-K)^2 - 4(2-K)}}{2} = \frac{-(3-K) \pm \sqrt{(K-1)^2}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = K-2 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

Fazendo $\lambda_1 = S_1$ e $\lambda_2 = S_2$, sendo $\lambda_1, \lambda_2, S_1$ e S_2 as raízes de $P(\lambda)$ e $P_c(S)$, temos:

$$P(K-2) = (K-2)^2 + C(K-2) + 5 = 0$$

$$P(-1) = (-1)^2 + C(-1) + 5 = 0 \Rightarrow 1 - C + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{C = 6}$$

$P_c(S) = S^2 + 6S + 5$

$S_1 = -5$ e $S_2 = -1$

$K - 2 = -5 \Rightarrow \boxed{K = -3}$

Portanto, para alocar os autovalores do sistema realimentado como raízes do polinômio P_c, C deve ser igual a 6.

Questão 2) Defina observabilidade e apresente duas formas distintas para verificar se um sistema é observável.

Um sistema linearmente invariante no tempo é observável se qualquer condição inicial $X(0)$ pode ser obtida conhecendo-se as entradas $\vec{u}(t)$ e as saídas $\vec{y}(t)$ do sistema para todo instante de tempo t entre 0 e $T > 0$.

Dado o sistema $\begin{cases} \dot{\vec{x}}(t) = \vec{A}\,\vec{x}(t) \\ \vec{y}(t) = \vec{C}\,\vec{x}(t) \end{cases}$ de ordem n, com vetor de entradas $u(t) = 0$, temos:

Para verificar se o sistema é observável, é necessário analisar as matrizes A e C. Dessa forma, o par n-dimensional (A, C) é observável, se e somente se,

$O_{n-q+1} = \begin{bmatrix} \vec{C} & \vec{C}\vec{A} & \vec{C}\vec{A}^2 & \dots & \vec{C}\vec{A}^{n-q} \end{bmatrix}^T$ onde $\rho(\vec{C}) = q$, tem posto n ou se a matriz $O_{n-q+1}^T \times O_{n-q+1}$ é não singular.

Outro teste é verificar se $W_o(T) = \int_0^T e^{\vec{A}^T t}\, \vec{C}^T \vec{C}\, e^{\vec{A}t}\, dt$ é não singular para todo $T > 0$.

Questão 3) Seja o sistema abaixo

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} u \qquad \dot{\vec{v}} = \vec{A}\vec{v} + Bu$$

a) Determine os valores de c_1 e c_2 para os quais o sistema deixa de ser controlável. O par n-dimensional $(\vec{A}, \vec{B})$ é controlável, se e somente se, a matriz $C_{n-p+1} := [\vec{B} \; \vec{A}^{n-p}\vec{B}]$, onde $\rho(B) = p = 1$, tem rank n ou a matriz ✱ $C_{n-p+1} \cdot C'_{n-p+1}$ é não singular.

Assim, $C_n := \begin{bmatrix} c_1 & 2c_1 + c_2 \\ c_2 & 9c_1 + 10c_2 \end{bmatrix}$ e para deixar de ser controlável ✱ deve ser singular.

$$(P) = \begin{bmatrix} c_1 & 2c_1 + c_2 \\ c_2 & 9c_1 + 10c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ 2c_1 + c_2 & 9c_1 + 10c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5c_1^2 + 4c_1c_2 + c_2^2 & 18c_1^2 + 30c_1c_2 + 10c_2^2 \\ 18c_1^2 + 30c_1c_2 + 10c_2^2 & 81c_1^2 + 180c_1c_2 + 101c_2^2 \end{bmatrix}$$

$\det(P) = 81c_1^4 + 144c_1^3c_2 + 46c_1^2c_2^2 - 16c_1c_2^3 + c_2^4 = 0 \rightarrow$ Resolvendo a equação de 4º grau, isolando c_2, temos: $c_2 = -c_1$, $c_2 = -c_1$, $c_2 = 9c_1$ ou $c_2 = 9c_1$

b) Escolha um par de valores c_1 e c_2 que torne o sistema não controlável.

$c_1 = 2$ / $c_2 = -2$ $\Rightarrow 81(2)^4 + 144(2)^3(-2) + 46(2)^2(-2)^2 - 16(2)(-2)^3 + (-2)^4 = 0$

c) Transforme o sistema para que seja possível evidenciar os modos controláveis e os modos não controláveis.. $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

Dado o sistema, temos: $\dot{\vec{v}} = \vec{A}\vec{v} + \vec{B}\vec{u}$

Seja $\bar{v} = \vec{P} v$, tem-se: $\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v} + \bar{B}u$, sendo $\bar{A} = \vec{P}\vec{A}\vec{P}^{-1}$ e $\bar{B} = \vec{P} \cdot \vec{B}$ (Arbitrário)

Considerando $c_2 = -2$ e $c_1 = 2$, temos: $\vec{C} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ e $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

LI de $\vec{C}$

continuação 3 c)

$\det(\vec{P}^{-1}) = 2$

Logo, $\vec{\bar{A}} = \vec{P}\,\vec{A}\,\vec{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4.5 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$ e $\vec{\bar{B}} = P\,\vec{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\dot{\bar{v}} = \begin{bmatrix} 1 & -4.5 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} \bar{v} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Evidenciando os modos controláveis e não controláveis, encontra-se

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_C \\ \bar{v}_{NC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4.5 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_C \\ \bar{v}_{NC} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \vec{u}$$

$\dot{\bar{v}}_C \to$ controlável

$\dot{\bar{v}}_{NC} \to$ não controlável.

---

d) compute a função de transferência do sistema transformado.

$$\vec{G}(s) = \vec{\bar{C}}\,(s\vec{I} - \vec{\bar{A}})^{-1} \cdot \vec{\bar{B}} + \cancel{\vec{\bar{D}}}_{0} =$$

$$\vec{G}(s) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -4.5 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{s-1}$$

Questão 4) Considere o sistema linear autônomo descrito pela equação dinâmica

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} v$$

a) Determine a matriz P solução da equação de Lyapunov (indicando a matriz Q utilizada) associada ao sistema dado. Em função da solução encontrada, classifique o sistema (justificando sua resposta) como assintoticamente estável ou não.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\vec{A}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}}_{\vec{P}} + \underbrace{\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}}_{\vec{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}}_{\vec{A}} = \underbrace{-\begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix}}_{-Q}$$

$\vec{Q} = \vec{I}$, $Q = Q^T$, $P = P^T$

$\det(\lambda I - \vec{A})$ (☆)

$$\begin{bmatrix} \lambda + \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = (\lambda + \tfrac{1}{2})(\lambda + 2) \quad \lambda_1 = -\tfrac{1}{2} \quad \lambda_2 = -2$$

$$\begin{bmatrix} -0.5P_{11} + 2P_{21} & -0.5P_{12} + 2P_{22} \\ 0P_{11} - 2P_{21} & 0P_{12} - 2P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.5P_{11} + 2P_{12} & 0P_{11} - 2P_{12} \\ -0.5P_{21} + 2P_{22} & 0P_{21} - 2P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (1,1) & -P_{11} + 2P_{21} + 2P_{12} = -1 \Rightarrow \boxed{P_{11} = \frac{9}{5}} \\ (2,1) & -2.5P_{21} + 2P_{22} = 0 \Rightarrow \boxed{P_{21} = \frac{1}{5}} \\ (1,2) & -2.5P_{12} + 2P_{22} = 0 \Rightarrow \boxed{P_{12} = \frac{1}{5}} \\ (2,2) & -4P_{22} = -1 \Rightarrow \boxed{P_{22} = \frac{1}{4}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(P) = \frac{9}{5} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{9}{20} - \frac{1}{25} = \frac{41}{100}$$

como $\det(P) > 0$, P é definida positiva. Logo, (☆) todos os autovalores de $\vec{A}$ tem parte real negativa, dessa forma o sistema é assintoticamente estável. (Teorema 5.4).

b) É possível certificar a estabilidade do sistema usando uma matriz P na forma diagonal?

Sim, considerando P como a solução de Lyapunov, temos que: $P = P^T$, logo é simétrica e $\det(P) > 0$, logo definida positiva. Portanto, pelos teoremas 3.6 e 3.7, existe uma matriz D (diagonal) com os autovalores de P, os quais serão reais e caso todos os autovalores sejam positivos então podemos certificar a estabilidade.