AVALIAÇÃO DO ERRO NA REGRA 1/3 DE SIMPSON

MAT 271 – Cálculo Numérico – PER3/2021/UFV

Professor Amarísio Araújo DMA/UFV

ERRO COMETIDO NA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Suponha que a integral $\int_a^b f(x)dx$ exista.

Dividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de mesmo comprimento $h = \frac{b-a}{n}$, podemos obter o polinômio interpolador $p_n(x)$, de grau $\leq n$, usando os pontos:

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, \dots, x_n = x_{n-1} + h = b.$$

Sendo $p_n(x)$ uma aproximação de $f(x)$ em $[a, b]$, o valor da integral $\int_a^b f(x)dx$ pode ser obtido, de forma aproximada:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b p_n(x)dx\,.$$

O erro em tal aproximação, $E_n = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b p_n(x)dx$, pode ser expresso pelo seguinte teorema:

TEOREMA

i) Se f possui $n+1$ derivadas contínuas no intervalo $[x_0, x_n]$ e n é um número ímpar (ou seja, o intervalo $[a, b]$ é subdividido em um número ímpar de subintervalos de mesmo comprimento h), então existe um $\xi \in [x_0, x_n]$ tal que:

$$E_n = \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n u(u-1) \dots (u-n) du$$

ii) Se f possui $n+2$ derivadas contínuas no intervalo $[x_0, x_n]$ e n é um número par (ou seja, o intervalo $[a, b]$ é subdividido em um número par de subintervalos de mesmo comprimento h), então existe um $\xi \in [x_0, x_n]$ tal que:

$$E_n = \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n \left(u - \frac{n}{2}\right) u(u-1) \dots (u-n) du$$

ERRO NA REGRA 1/3 DE SIMPSON (SIMPLES)

Na Regra 1/3 de Simpson, a integral $\int_a^b f(x)dx$ é calculada de forma aproximada a partir de uma aproximação de $f(x)$ por um polinômio interpolador $p_2(x)$, usando $x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = b$, com a divisão do intervalo $[a, b]$ em 2 subintervalos de mesmo comprimento $h = \frac{b-a}{2}$.

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b p_2(x)dx\,.$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]}$$

ERRO NA REGRA 1/3 DE SIMPSON (SIMPLES)

Assim, aplicando o item ii) do Teorema, com $n = 2$, se f possui as derivadas $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $f^{(3)}$ e $f^{(4)}$ contínuas no intervalo $[x_0, x_2] = [a, b]$, então existe um $\xi \in [a, b]$ tal que o erro E_2 no cálculo aproximado da integral $\int_a^b f(x)dx$ é:

$$E_2 = \frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_0^2 (u-1)u(u-1)(u-2)du$$

ERRO NA REGRA 1/3 DE SIMPSON (SIMPLES)

Resolvendo a integral $\int_0^2 (u-1)u(u-1)(u-2)du$:

$$\int_0^2 (u-1)u(u-1)(u-2)du = -\frac{4}{15}$$

Assim:

$$E_2 = \frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_0^2 (u-1)u(u-1)(u-2)du = \frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{4!}\left(-\frac{4}{15}\right) = -\frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{90}$$

$$\boxed{E_2 = -\frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{90}}$$

ERRO ABSOLUTO NA REGRA 1/3 DE SIMPSON (SIMPLES)

$$|E_2| = \left|-\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)\right| = \left|-\frac{h^5}{90}\right| \left|f^{(4)}(\xi)\right| = \frac{h^5}{90} \left|f^{(4)}(\xi)\right|$$

Como $\left|f^{(4)}(\xi)\right| \leq max\{\left|f^{(4)}(x)\right|, x \epsilon [a, b]\}$, temos que:

$$|E_2| \leq \frac{h^5}{90} max\{\left|f^{(4)}(x)\right|, x \epsilon [a, b]\}$$

O valor $\frac{h^5}{90} max\{\left|f^{(4)}(x)\right|, x \epsilon [a, b]\}$ é um LIMITANTE SUPERIOR PARA O ERRO na Regra 1/3 de Simpson (Caso simples).

ERRO NA REGRA 1/3 DE SIMPSON GENERALIZADA

Na Regra 1/3 de Simpson Generalizada, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n (n par) subintervalos $[x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n$ de mesmo comprimento $h = \frac{b-a}{n}$, sendo:

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, \dots, x_n = x_{n-1} + h = b.$$

Aplicamos o caso simples da Regra a cada integral em $[x_{i-2}, x_i], i = 2,4, \dots, n$:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{\substack{i=2 \\ i\,par}}^{n} \left(\int_{x_{i-2}}^{x_i} f(x)dx \right) \cong \sum_{\substack{i=2 \\ i\,par}}^{n} \left(\frac{h}{3}[f(x_{i-2}) \ + 4f(x_{i-1}) + f(x_i)] \right)$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}[f(x_0) \ + 4(f(x_1) + f(x_3) \dots . + f(x_{n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{n-2})) + f(x_n)]}$$

ERRO ABSOLUTO NA REGRA 1/3 DE SIMPSON GENERALIZADA

O erro E na Regra 1/3 de Simpson Generalizada é obtido somando-se os erros da Regra 1/3 de Simpson (Caso Simples) aplicada a cada par de subintervalos $[x_{i-2}, x_{i-1}]$, $[x_{i-1}, x_i]$, que é: $E_{2i} = -\frac{h^5 f^{(4)}(\xi_{2i})}{90}$

Como $\left|f^{(4)}(\xi_{2i})\right| \leq max\{\left|f^{(4)}(x)\right|, x \in [a,b]\}$: $|E_{2i}| \leq \frac{h^5}{90} max\{\left|f^{(4)}(x)\right|, x \in [a,b]\}$

Assim:

$$|E| \leq \frac{n}{2}\frac{h^5}{90} max\{\left|f^{(4)}(x)\right|, x \in [a,b]\} = \frac{h^4}{180}(b-a) max\{\left|f^{(4)}(x)\right|, x \in [a,b]\}$$

$$\boxed{|E| \leq \frac{h^4}{180}(b-a) max\{\left|f^{(4)}(x)\right|, x \in [a,b]\}}$$

REGRA 1/3 DE SIMPSON

SIMPLES $n = 2$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]}$$

$$|E_2| \leq \boxed{\frac{h^5}{90} max\{|f^{(4)}(x)|, x \in [a,b]\}}$$ LIMITANTE SUPERIOR PARA O ERRO

GENERALIZADA $n \geq 4$, n PAR

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3) \ldots . + f(x_{n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{n-2})) + f(x_n)]}$$

$$|E| \leq \boxed{\frac{h^4}{180}(b-a) max\{|f^{(4)}(x)|, x \in [a,b]\}}$$ LIMITANTE SUPERIOR PARA O ERRO

EXEMPLO

Vamos aplicar a Regra 1/3 de Simpson, com $n = 4$, para calcular de forma aproximada a integral $\int_1^4 \sqrt{x}dx$ e obter um limitante superior para o erro.

Temos: $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 1$, $b = 4$.

EXEMPLO

$n = 4 \Longrightarrow$ $h = \frac{4-1}{4} = 0.75$, e temos: $x_0 = 1$, $x_1 = 1.75$, $x_2 = 2.5$, $x_3 = 3.25$ e $x_4 = 4$.

$$\int_1^4 \sqrt{x}dx \cong \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\big(f(x_1) + f(x_3)\big) + 2f(x_2) + f(x_4)\right]$$

$$\int_1^4 \sqrt{x}dx \cong \frac{0.75}{3}\left[f(1) + 4\big(f(1.75) + f(3.25)\big) + 2f(2.5) + f(4)\right]$$

$$\int_1^4 \sqrt{x}dx \cong \frac{0.75}{3}\left[1 + 4\big(\sqrt{1.75} + \sqrt{3.25}\big) + 2\sqrt{2.5} + 2\right] = 4.6662207$$

$$\boxed{\int_1^4 \sqrt{x}dx \cong 4.6662207}$$

EXATO $\boxed{\int_1^4 \sqrt{x}dx = 4.6666666}$

EXEMPLO

Calculando um limitante superior para o erro: $|E| \leq \frac{h^4}{180}(b-a)max\{|f^{(4)}(x)|, x \in [a,b]\}$

$f(x) = \sqrt{x}$; $f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$; $f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$; $f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}$; $f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-7/2}$;

$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16(\sqrt{x})^7}$; $|f^{(4)}(x)| = \left|-\frac{15}{16(\sqrt{x})^7}\right| = \frac{15}{16(\sqrt{x})^7}$;

Como $|f^{(4)}(x)|$ é decrescente em $[1,4]$, $max\{|f^{(4)}(x)|, x \in [a,b]\} = |f^{(4)}(1)| = 0.9375.$

$$|E| \leq \frac{(0.75)^4}{180} \times 3 \times 0.9375 = 0.00494$$

$$\boxed{|E| \leq 0.00494}$$

DETERMINANDO UM NÚMERO DE SUBINTERVALOS QUE GARANTA UMA DADA PRECISÃO PARA O ERRO ABSOLUTO NA REGRA 1/3 DE SIMPSON

Ao usar a Regra 1/3 de Simpson Generalizada para resolver a integral $\int_a^b f(x)dx$, com hipóteses adequadas para a função f, obtivemos uma majoração para o erro absoluto $|E|$ cometido na aproximação, dada por:

$|E| \leq \frac{h^4}{180}(b-a)max\{|f^{(4)}(x)|, x \epsilon [a,b]\}$, sendo $h = \frac{b-a}{n}$ (n par).

Se quisermos que o erro absoluto seja menor que um dado $\varepsilon > 0$, basta que

$\frac{h^4}{180}(b-a)max\{|f^{(4)}(x)|, x \epsilon [a,b]\} < \varepsilon$.

DETERMINANDO UM NÚMERO DE SUBINTERVALOS QUE GARANTA UMA DADA PRECISÃO PARA O ERRO ABSOLUTO NA REGRA 1/3 DE SIMPSON

Consideremos, então a inequação $\frac{h^4}{180}(b-a)max\{|f^{(4)}(x)|, x \in [a,b]\} < \varepsilon$.

Como $h = \frac{b-a}{n}$, temos: $\frac{(b-a)^5}{180n^4}max\{|f^{(4)}(x)|, x \in [a,b]\} < \varepsilon$

$$\Rightarrow \quad n^4 > \frac{(b-a)^5}{180\varepsilon}max\{|f^{(4)}(x)|, x \in [a,b]\}$$

$$\Rightarrow \quad n > \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{180\varepsilon}max\{|f^{(4)}(x)|, x \in [a,b]\}}$$

$$a > 0$$

$$x^4 > a \Leftrightarrow x^4 - a > 0 \Leftrightarrow (x^2 - \sqrt{a})(x^2 + \sqrt{a}) > 0$$

$x^2 - \sqrt{a} > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt[4]{a}$ ou $x < -\sqrt[4]{a}$

$$x > 0 \Rightarrow x > \sqrt[4]{a}$$

DETERMINANDO UM NÚMERO MÍNIMO DE SUBINTERVALOS QUE GARANTA UMA DADA PRECISÃO PARA O ERRO ABSOLUTO NA REGRA 1/3 DE SIMPSON

Portanto, ao aplicar a Regra 1/3 de Simpson para resolver a integral $\int_a^b f(x)dx$, para garantir que o erro absoluto cometido na aproximação seja menor que um dado $\varepsilon > 0$, basta que o número n de subintervalos a ser considerado satisfaça a seguinte desigualdade:

$$\boxed{n > \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{180\varepsilon} max\{|f^{(4)}(x)|, x \in [a,b]\}}}$$

Assim, o menor natural par n tal que $n > \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{180\varepsilon} max\{|f^{(4)}(x)|, x \in [a,b]\}}$ é um número de subintervalos que nos garante que, ao aplicar a Regra 1/3 de Simpson para resolver a integral $\int_a^b f(x)dx$, o erro absoluto cometido na aproximação seja menor que um dado $\varepsilon > 0$.

EXEMPLO

Vamos encontrar o número de subintervalos que garanta que o erro absoluto ao se calcular de forma aproximada a integral $\int_1^4 \sqrt{x}dx$ pela Regra 1/3 de Simpson seja menor que $\varepsilon = 0.001$.

$$n > \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{180\varepsilon} max\{|f^{(4)}(x)|, x \in [a,b]\}}$$

$$a = 1, b = 4$$

Como já vimos no exemplo anterior: $max\{\left|f^{(4)}(x)\right|, x \in [a,b]\} = \left|f^{(4)}(1)\right| = 0.9375$

$$\Rightarrow n > \sqrt[4]{\frac{(4-1)^5}{180 \times 0.001} \times 0.9375} \quad \Rightarrow n > 5.9645 \quad \Rightarrow n \geq 6$$

Portanto, com $n = 6$ subintervalos, há garantia de que o erro absoluto seja menor que 0.001

Na Regra do Trapézio, encontramos $n = 24$.

(Aula Assíncrona anterior)