Modelagem da Formação Triangular
Trabalho de Robótica Móvel - ELT 472

Werikson Alves
Universidade Federal de Viçosa (UFV), Viçosa, Brasil
e-mails: werikson.alves@ufv.br

25/11/2022

1 Modelagem de formações: Triangular

Neste trabalho é modelada a relação direta e inversa de transformação para uma formação triangular. Sendo assim, dada a estrutura apresentada na Figura 1, foram seguidos os passos descritos em cada seção.

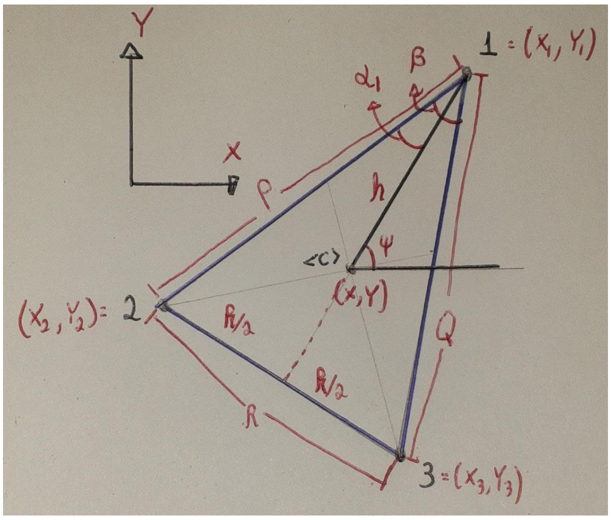


Figura 1: Modelo da formação triangular utilizado.

1.1 Relação direta

Para realizar a transformação direta são necessárias as informações acerca da posição dos robôs em relação ao mundo $[x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3]$ para encontrar as informações da formação descritas na imagem acima $[X, Y, \psi, P, Q, \beta]$.

1.1.1 X

Utilizando a fórmula do baricentro do triangulo podemos encontrar a coordenada X de $< c >$, logo:

$$X = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \tag{1}$$

1.1.2 Y

Utilizando a fórmula do baricentro do triangulo podemos encontrar a coordenada Y de $< c >$, logo:

$$Y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \tag{2}$$

1.1.3 ψ

Usando as informações adquiridas anteriormente, e seguindo a estrutura apresentada na Figura 2, temos:

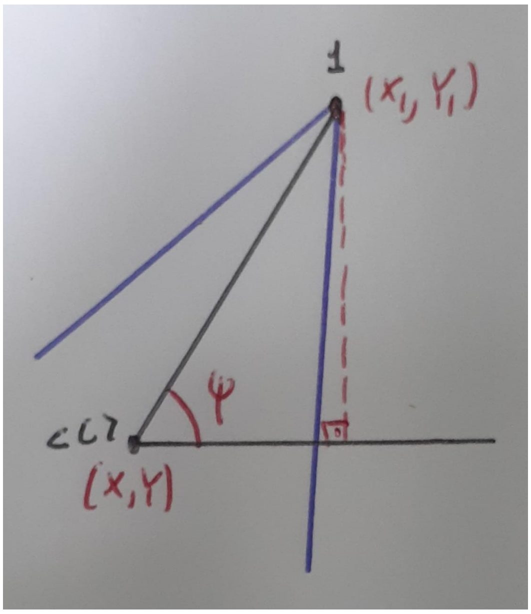


Figura 2: Calculo do angulo ψ.

$$\psi = \arctan\left(\frac{2y_1 - y_2 - y_3}{2x_1 - x_2 - x_3}\right) \tag{3}$$

1.1.4 P

Para o cálculo de P foi calculado a norma entre as coordenadas dos robôs 1 e 2.

$$P = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{4}$$

1.1.5 Q

Para o cálculo de Q foi calculado a norma entre as coordenadas dos robôs 1 e 3.

$$Q = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} \tag{5}$$

1.1.6 β

Para o cálculo de β foi necessário calcular a norma entre as coordenadas dos robôs 2 e 3, e depois aplicar a lei dos cossenos.

$$R = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} \tag{6}$$

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2 \cdot P \cdot Q \cdot \cos(\beta)$$

$$\beta = \arccos(\frac{P^2 + Q^2 - R^2}{2 \cdot P \cdot Q}) \tag{7}$$

1.2 Relação inversa

Agora, para realizar a transformação inversa serão necessárias as informações acerca da formação, $[X, Y, \psi, P, Q, \beta]$, para encontrar as informações dos robôs, $[x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3]$. Dessa forma, dada a estrutura apresentada na Figura 1, foram seguidos os seguintes passos.

1.2.1 Variáveis auxiliares

Primeiramente, para o cálculo de todas as variáveis foi necessário determinar o tamanho do seguimento h, e para isso foi utilizado a relação de Stewart, Figura 3, no qual basta isolarmos m e trocarmos para nossas variáveis do problema.

- p = R/2
- q = R/2
- m = H
- a = P
- b = Q
- c = R

Figura 3: Modelo da formação triangular utilizado.

$$P^2 \cdot \frac{R}{2} + Q^2 \cdot \frac{R}{2} = H^2 \cdot R + R \cdot \frac{R}{2} \cdot \frac{R}{2}$$

$$H = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(P^2 + Q^2 - \frac{R^2}{2}\right)}$$

E agora, por fim, determinando o seguimento h:

$$h = \frac{2}{3} \cdot H \tag{8}$$

Em seguida, foi determinado a equação para α_1, por meio da lei dos cossenos.

$$\frac{R}{2}^2 = P^2 + h^2 - 2 * P * h * \cos(\alpha_1)$$

$$\alpha_1 = \arccos\left(\frac{4 * P^2 + 4 * h^2 - R^2}{8 * P * h}\right) \tag{9}$$

1.2.2 x_1

Conhecendo a equação (8) e sabendo a coordenada X de $< c >$, e utilizando como base o triângulo em vermelho, $(T1)$, na Figura 4, e aplicando as relações trigonométricas no triangulo retângulo, temos que:

$$x_1 = X + h \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)$$

$$x_1 = X + \frac{2H}{3} \cdot \cos(\psi) \tag{10}$$

1.2.3 y_1

Conhecendo a equação (8) e sabendo a coordenada Y de $< c >$, e utilizando como base o triângulo em **vermelho**, $(T1)$, na Figura 4, e aplicando as relações trigonométricas no triangulo retângulo, temos que:

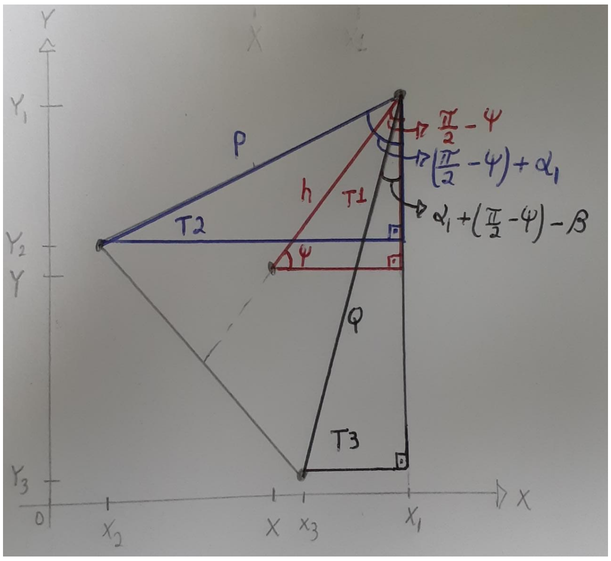


Figura 4: Modelo da formação triangular utilizado.

$$y_1 = Y + h \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)$$

$$y_1 = Y + \frac{2H}{3} \cdot \sin(\psi) \tag{11}$$

1.2.4 $\mathbf{x_2}$

Conhecendo as equações (8) e (9) e conhecendo as informações adquiridas anteriormente, ao utilizarmos como base o triângulo em **azul**, ($T2$), na Figura 4, e aplicando as relações trigonométricas no triangulo retângulo, temos que:

$$x_2 = x_1 - P \cdot \sin\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} - \psi\right)$$

$$x_2 = X + \frac{2H}{3} \cdot \cos(\psi) - P \cdot \sin\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} - \psi\right) \tag{12}$$

1.2.5 $\mathbf{y_2}$

Conhecendo as equações (8) e (9) e conhecendo as informações adquiridas anteriormente, ao utilizarmos como base o triângulo em **azul**, ($T2$), na Figura 4, e aplicando as relações trigonométricas no triangulo retângulo, temos que:

$$y_2 = y_1 - P \cdot \cos\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} - \psi\right)$$

$$y_2 = Y + \frac{2H}{3} \cdot \sin(\psi) - P \cdot \cos\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} - \psi\right) \tag{13}$$

1.2.6 $\mathbf{x_3}$

Conhecendo as equações (8) e (9) e conhecendo as informações adquiridas anteriormente, ao utilizarmos como base o triângulo em **preto**, ($T3$), na Figura 4, e aplicando as relações trigonométricas no triangulo retângulo, temos que:

$$x_3 = x_1 - Q \cdot \sin\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} - \psi - \beta\right)$$

$$x_3 = X + \frac{2H}{3} \cdot \cos(\psi) - Q \cdot \sin\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} - \psi - \beta\right) \tag{14}$$

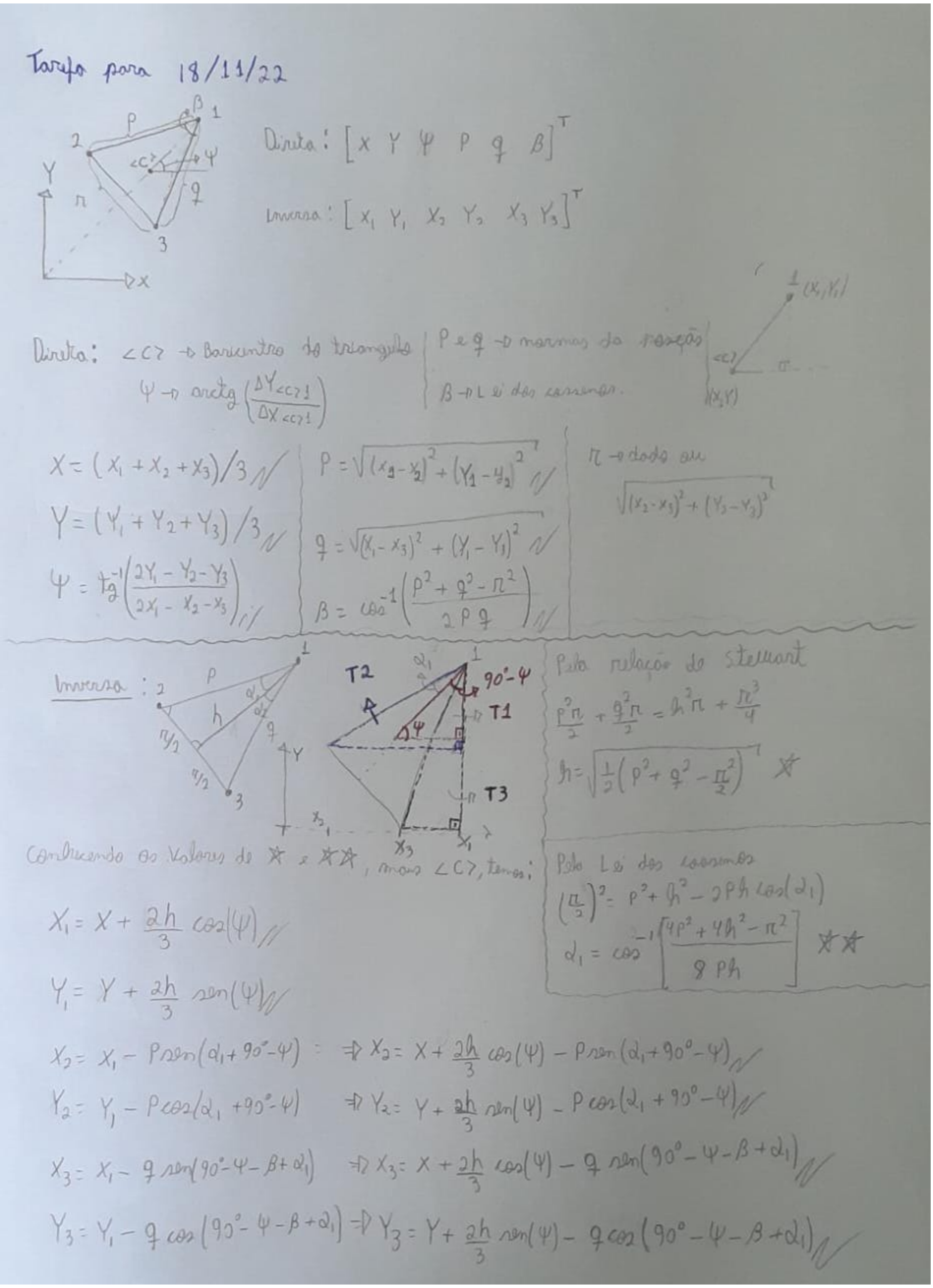
1.2.7 $\mathbf{y_3}$

Conhecendo as equações (8) e (9) e conhecendo as informações adquiridas anteriormente, ao utilizarmos como base o triângulo em **preto**, ($T3$), na Figura 4, e aplicando as relações trigonométricas no triangulo retângulo, temos que:

$$y_3 = y_1 - Q \cdot \cos\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} - \psi - \beta\right)$$

$$y_3 = Y + \frac{2H}{3} \cdot \sin(\psi) - Q \cdot \cos\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} - \psi - \beta\right) \tag{15}$$

2 Anexo:


Tarefa para 18/11/22

Direta: $[X \; Y \; \psi \; p \; q \; \beta]^T$

Inversa: $[X_1 \; Y_1 \; X_2 \; Y_2 \; X_3 \; Y_3]^T$

Direta: $\langle C \rangle \rightarrow$ Baricentro do triangulo

$\psi \rightarrow \operatorname{arctg}\left(\frac{\Delta Y_{\langle C \rangle 1}}{\Delta X_{\langle C \rangle 1}}\right)$

p e q $\rightarrow$ normas da posição

$\beta \rightarrow$ Lei dos cossenos.

$$X = (X_1 + X_2 + X_3)/3$$

$$Y = (Y_1 + Y_2 + Y_3)/3$$

$$\psi = tg^{-1}\left(\frac{2Y_1 - Y_2 - Y_3}{2X_1 - X_2 - X_3}\right)$$

$$p = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}$$

$$q = \sqrt{(X_1 - X_3)^2 + (Y_1 - Y_3)^2}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{p^2 + q^2 - r^2}{2pq}\right)$$

$r \rightarrow$ dado ou

$$\sqrt{(X_2 - X_3)^2 + (Y_2 - Y_3)^2}$$

Inversa:

Pela relação de Stewart

$$\frac{p^2 r}{2} + \frac{q^2 r}{2} = h^2 r + \frac{r^3}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{1}{2}\left(p^2 + q^2 - \frac{r^2}{2}\right)} \quad \star$$

Pela Lei dos cossenos

$$\left(\frac{r}{2}\right)^2 = p^2 + h^2 - 2ph\cos(\alpha_1)$$

$$\alpha_1 = \cos^{-1}\left[\frac{4p^2 + 4h^2 - r^2}{8ph}\right] \quad \star\star$$

Conhecendo os valores de $\star$ e $\star\star$, mais $\langle C \rangle$, temos:

$$X_1 = X + \frac{2h}{3}\cos(\psi)$$

$$Y_1 = Y + \frac{2h}{3}\operatorname{sen}(\psi)$$

$$X_2 = X_1 - p\operatorname{sen}(\alpha_1 + 90^\circ - \psi) \Rightarrow X_2 = X + \frac{2h}{3}\cos(\psi) - p\operatorname{sen}(\alpha_1 + 90^\circ - \psi)$$

$$Y_2 = Y_1 - p\cos(\alpha_1 + 90^\circ - \psi) \Rightarrow Y_2 = Y + \frac{2h}{3}\operatorname{sen}(\psi) - p\cos(\alpha_1 + 90^\circ - \psi)$$

$$X_3 = X_1 - q\operatorname{sen}(90^\circ - \psi - \beta + \alpha_1) \Rightarrow X_3 = X + \frac{2h}{3}\cos(\psi) - q\operatorname{sen}(90^\circ - \psi - \beta + \alpha_1)$$

$$Y_3 = Y_1 - q\cos(90^\circ - \psi - \beta + \alpha_1) \Rightarrow Y_3 = Y + \frac{2h}{3}\operatorname{sen}(\psi) - q\cos(90^\circ - \psi - \beta + \alpha_1)$$