ELT330 – Sistemas de Controle I

Prof. Tarcísio Pizziolo

Aula 8 – Fórmula de Mason

1. Fórmula de Mason

A Fórmula de Mason permite determinar o ganho geral de um diagrama de fluxo de sinais.

Se a Fórmula de Mason for aplicada em um diagrama de blocos de um sistema de controle, esta permitirá, por analogia, a determinação de sua função de transferência. Deve-se primeiro, transformar o diagrama de blocos em um diagrama de fluxo de sinais para aplicar a Fórmula de Mason.

Fórmula de Mason

$$\mathrm{F(s)} = \frac{1}{\Delta}\sum_{k} \mathrm{P_k}\Delta_k$$

Onde:

$$\Delta\ (\text{determinante}) = 1 - \sum_{a} L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \cdots$$

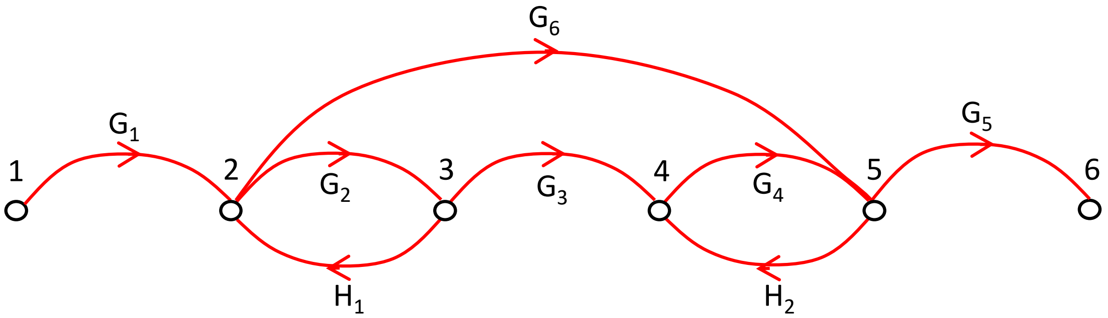
$$\sum_{a} \mathrm{L_a} = \text{soma dos ganhos individuais de todas as malhas}$$

$$\sum_{b,c} \mathrm{L_b L_c} = \text{soma dos produtos dos ganhos de todas as possíveis combinações de 2 (duas) malhas que não se tocam}$$

$$\sum_{d,e,f} \mathrm{L_d L_e L_f} = \text{soma dos produtos dos ganhos de todas as possíveis combinações de 3 (três) malhas que não se tocam}$$

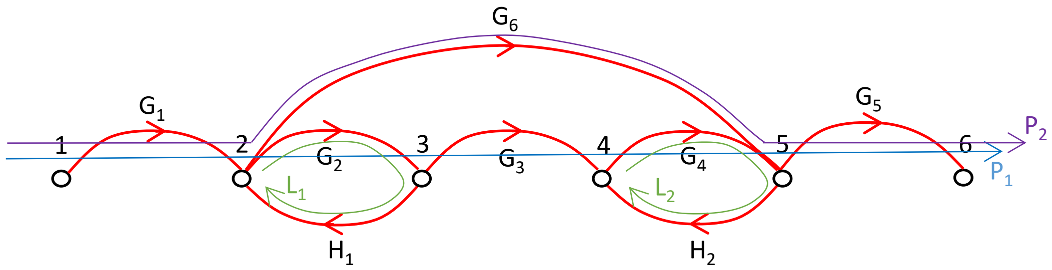
P_k = ganho (transmitância) do k-ésimo caminho direto.
Δ_k = (co-fator de Δ) é calculado a partir de Δ pela remoção dos ganhos (transmitância) das malhas que tocam o caminh P_k.

Exemplo 1: Seja o diagrama de fluxo de sinais dado a seguir.



Determinar o ganho geral reduzindo o diagrama de fluxo e sinais a um nó de entrada, um nó de saída e a somente um caminho direto.

- Os caminhos diretos e as malhas são representadas abaixo.



Aplicando a Fórmula de Mason

$$F(s) = \frac{1}{\Delta}\sum_k P_k \Delta_k$$

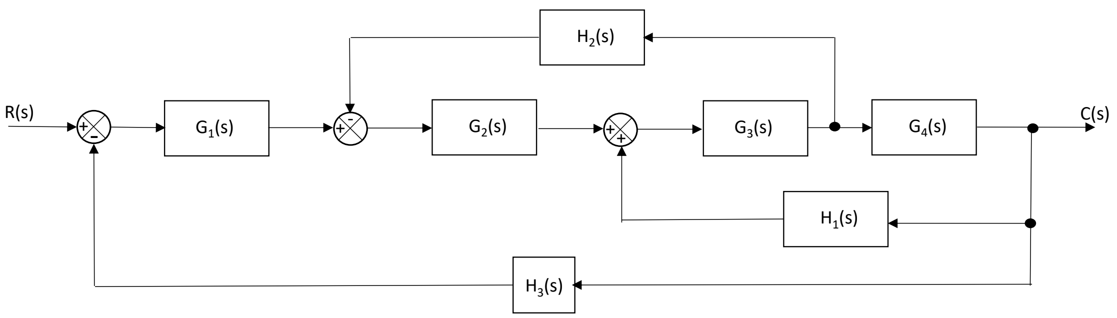
$$\Delta\ (\text{determinante}) = 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \cdots$$

$L_a = L_1 + L_2 = G_2H_1 + G_4H_2$
$L_bL_c = L_1L_2 = (G_2H_1)(G_4H_2) = G_2G_4H_1H_2$
$\Delta = 1 - L_a + L_bL_c = 1 - G_2H_1 - G_4H_2 + G_2G_4H_1H_2$
$P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5$ e $P_2 = G_1G_5G_6$
$\Delta_1 = 1$ e $\Delta_2 = 1$

Assim,

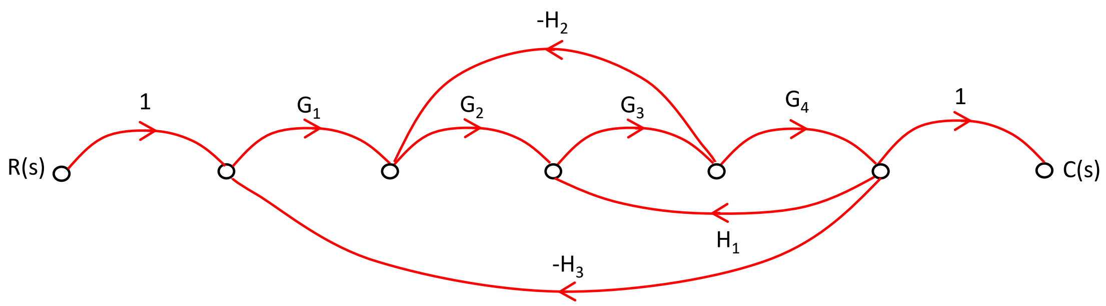
$$F(s) = \frac{G_1G_2G_3G_4G_5 + G_1G_5G_6}{1 - G_2H_1 - G_4H_2 + G_2G_4H_1H_2}$$

Exemplo 2: Seja o diagrama de blocos de um sistema de controle.

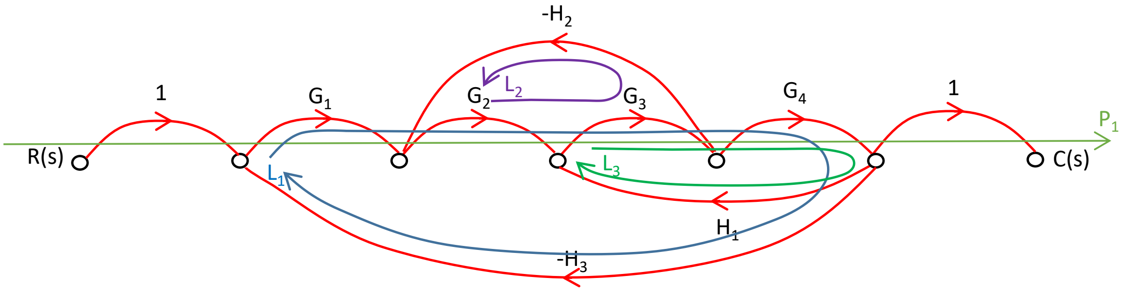


a) Transformar o diagrama de blocos em um diagrama de fluxo de sinais.
b) Determinar a função de transferência deste sistema de controle aplicando a Fórmula de Mason.

a)



- Os caminhos diretos e as malhas são representadas abaixo.



Aplicando a Fórmula de Mason

$$F(s) = \frac{1}{\Delta}\sum_{k} P_k \Delta_k$$

$$\Delta\ (\text{determinante}) = 1 - \sum_{a} L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \cdots$$

$L_a = L_1 + L_2 + L_3 = - G_1G_2G_3G_4H_3 - G_2G_3H_2 + G_3G_4H_1$

$\Delta = 1 - L_a = 1 + G_1G_2G_3G_4H_3 + G_2G_3H_2 - G_3G_4H_1$

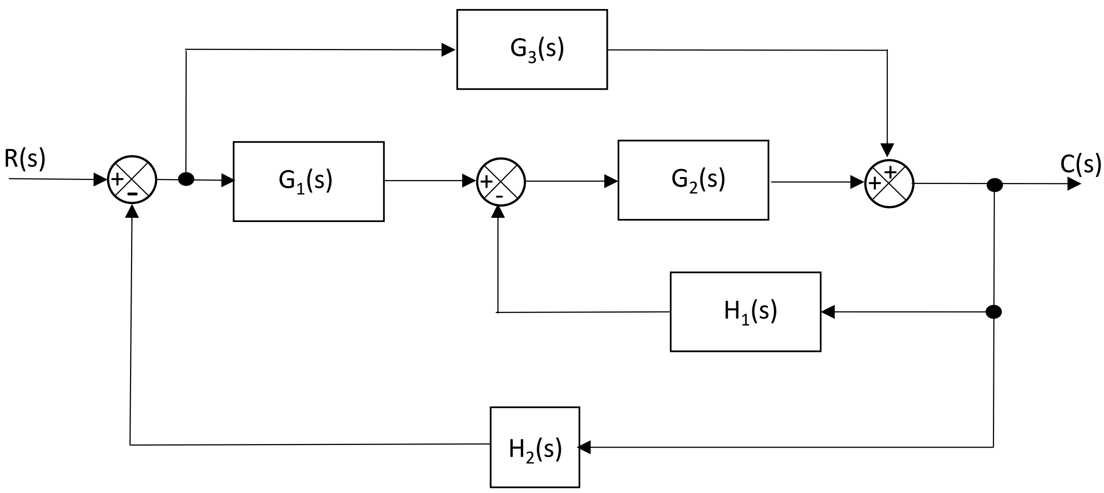
$P_1 = G_1G_2G_3G_4$

$\Delta_1 = 1$

Assim,

$$F(s) = \frac{G_1G_2G_3G_4}{1 + G_1G_2G_3G_4H_3 + G_2G_3H_2 - G_3G_4H_1}$$

Exercício: Seja o diagrama de blocos de um sistema de controle.



a) Transformar o diagrama de blocos em um diagrama de fluxo de sinais.

b) Determinar a função de transferência deste sistema de controle aplicando a Fórmula de Mason.

R.: $\dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{G_1(s)G_2(s)+G_3(s)}{1+G_1(s)G_2(s)\,H_2(s)+G_3(s)H_2(s)+G_2(s)H_1(s)}$