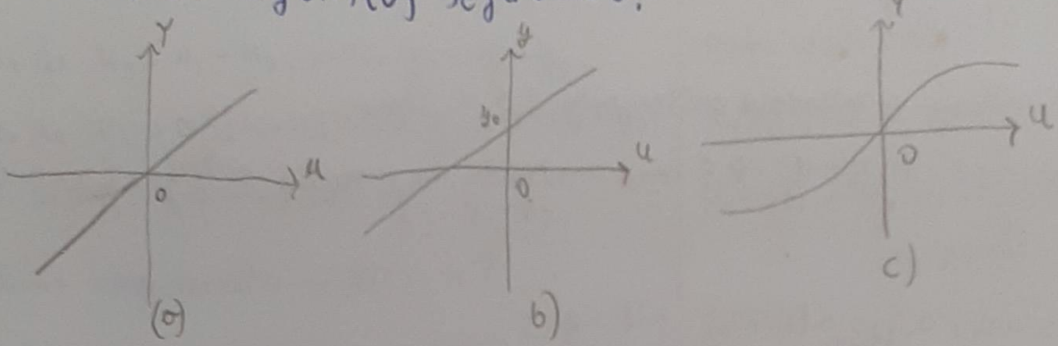
Lista de Exercícios CAP 2

√ **2.1** Considere os sistemas sem memória com características mostradas na figura 2.19 em que u denota a entrada e y a saída. Qual deles é um sistema linear? É possível introduzir uma nova saída de modo que o sistema da Fig 2.19(b) seja linear?

a - coeficiente angular



(a) $y = a*u$ → sistema linear

$y = a\,u_1 + a\,u_2 = a(u_1+u_2) = y_1 + y_2 = y$

(b) $y = a*u + b$ → não linear

$\begin{cases} y_1 = a\,u_1 + b \\ y_2 = a\,u_2 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 = a \times (u_1 + u_2) + 2 \times b \end{cases}$ Falha na propriedade da aditividade

Ao adicionar uma nova saída, temos:

$z = y - b = a \times u + b - b \Rightarrow \boxed{a \times u = z}$ Como dito na letra (a), é um sistema linear

(c) $y = a(u) \times u$ onde $a(u)$ é uma função de u

$\begin{cases} y_1 = a_1\,u_1 \\ y_2 = a_2\,u_2 \end{cases} \Rightarrow y = y_1 + y_2 = a_1 u_1 + a_2 u_2$, portanto para $a_1 \neq a_2$, a propriedade não é atendida.

2.3 Considere um sistema cuja entrada u e a saída y estão ~~rel~~ relacionadas por $y(t) = (P_\alpha u)(t) := \begin{cases} u(t) & \text{para } t \leq \alpha \\ 0 & \text{para } t > \alpha \end{cases}$ onde α é uma constante fixa. O sistema é chamado de operador de truncamento, que corta a entrada após o tempo α. O sistema é linear? É invariante no tempo? É casual?

• Considerando a relação de entrada e saída, para $t \leq \alpha$, temos:

$y = a u$, para $a = 1 \Rightarrow y = u \rightarrow$ E como mostrado no exercício anterior $(y = au)$, esta relação é linear.

Ex.: $y = y_1 + y_2 = a u_1 + a u_2 = a(u_1 + u_2) = a u = y$.

• Considerando a relação de entrada-saída, para $t > \alpha$, temos:

$y = a u$, para $a = 0$, o qual seguindo o mesmo raciocínio acima é comprovado a linearidade.

• Portanto, para $\forall\, t$, o sistema é linear.

→ Considerando que o sistema começa para $t \geq t_0$, temos:

$y(t) \begin{cases} u(t) & p/\ t_0 \leq t \leq \alpha \\ 0 & p/\ t > \alpha \end{cases} \Rightarrow$ Se adicionarmos um período T ao tempo inicial, teremos $t_0 \leq t \leq \alpha < t_0 + T$, portanto a entrada seguinte deverá ser $u(t-T)$ para $t \geq t_0 + T$, dessa forma $y'(t) = \begin{cases} u(t-T) & p/\ t_0+T \leq t \leq \alpha + T \\ 0 & p\ \ t > \alpha + T \end{cases}$ contudo pela primeira equação $[y(t)]$ para $t > \alpha$ $y = 0$, o que difere de $y'(t)$, portanto não é invariante no tempo

---

☆ Para qualquer tempo t, a saída do sistema $y(t)$ é decidida exclusivamente pela
? entrada $u(t)$. Portanto, é um sistema causal.

2.5) Considere um sistema com entrada u e saída y. Três experimentos são realizados no sistema usando as entradas $u_1(t)$, $u_2(t)$ e $u_3(t)$ para $t \geq 0$. Em cada caso, o estado inicial $x(0)$ no tempo $t=0$ é o mesmo. As saídas correspondentes são indicadas por y_1, y_2 e y_3. Quais das seguintes as afirmações estão corretas se $x(0) = 0$?

1. Se $u_3 = u_1 + u_2$, então $y_3 = y_1 + y_2$.
2. Se $u_3 = 0.5(u_1+u_2)$, então $y_3 = 0.5(y_1+y_2)$.
3. Se $u_3 = u_1 - u_2$, então $y_3 = y_1 - y_2$.

Quais estão corretas se $x(0)=0$?

Para um sistema linear, deve-se ter a propriedade abaixo:

$$\left.\begin{matrix} \alpha_1 x_1(t_0) + \alpha_2 x_2(t_0) \\ \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t), t \geq t_0 \end{matrix}\right\} \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t), t \geq t_0$$

Caso 1: $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 x_1(t_0) + 1 x_2(t_0) = x_1(t_0) + x_2(t_0) \overset{(\cdot)}{=} 2x(0)$

(•) Pois os estados iniciais $x(0)$ são iguais para todos, portanto $2x(0) \neq x(0)$.

Falso.

Caso 2: $\begin{cases} \alpha_1 = 0.5 \\ \alpha_2 = 0.5 \end{cases} \Rightarrow 0.5\, x_1(t_0) + 0.5 x_2(t_0) = 0.5(x_1(t_0) + x_2(t_0)) = x(0) = x(0)$

Certo

Caso 3: $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow x_1(t_0) - x_2(t_0) = 0 \neq x(0)$

Falso

Portanto, apenas a afirmação 2 está correta.

2.7) Mostre que se a propriedade de aditividade vale, então a propriedade de homogeneidade vale para todos os números racionais α. Assim, se

? Um sistema tem alguma propriedade de "continuidade", então a aditividade implica em homogeneidade.

$$\begin{cases} \text{Se} \left.\begin{matrix} x(t_0) \\ u_1(t) \end{matrix}\right\} \text{para } t \geq t_0 \quad y_1 = f(x(t_0), u_1(t)) \\ \text{e} \left.\begin{matrix} x(t_0) \\ u_2(t) \end{matrix}\right\} \text{para } t \geq t_0 \quad y_2 = f(x(t_0), u_2(t)) \\ \text{então } y_3 = y_1 + y_2 = f(x(t_0), (u_1(t) + u_2(t))) \quad (1) \end{cases}$$

Sejo $\left.\begin{matrix} x(t_0) \\ u(t) \end{matrix}\right\} y(t)$, temos que:

generalizando

Se $u_1 = u_2 \Rightarrow y_3 = 2y_1 \rightarrow \boxed{m u = m y}$

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, para a homogeneidade, temos que: $\{\alpha u_1(t), p\ t > t_0 \rightarrow y = \alpha y_1$

Logo, $y = \alpha y_1 = \alpha u_1$. Sabendo que um número racional é dado pela divisão de dois números inteiros $\left[\alpha_1 = \frac{m}{n}\right]$ e que $\alpha_1 \in \mathbb{Q}$ está contido em $\alpha \in \mathbb{R}$, portanto, se $(m, n \in \mathbb{Z})$ e partindo de (1), tem-se:

$$\boxed{y_3' = y(\alpha_1')}$$

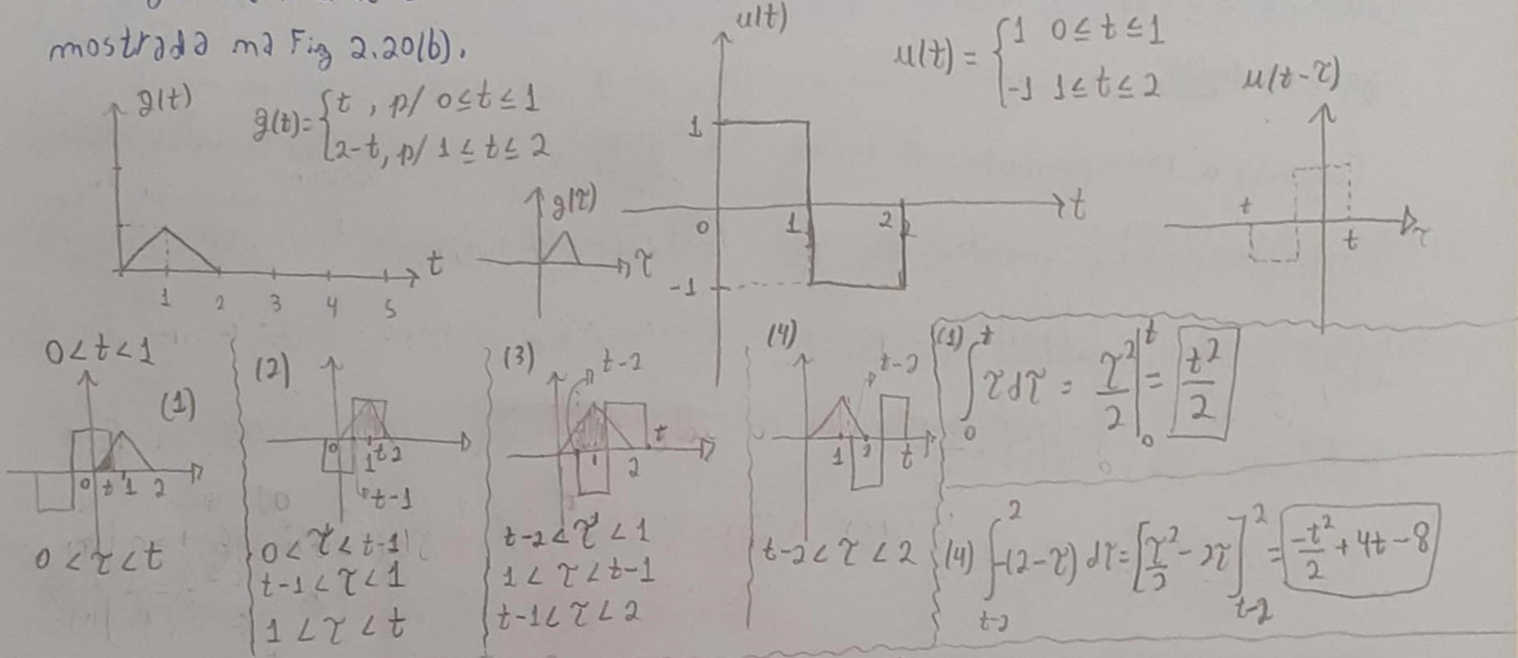
$$y_3 = y_1 + y_2 = m y_1 + n y = y(m+n) = yn\left(\frac{m}{n} + 1\right) = yn(\alpha_1 + 1) = yn(\alpha_1') \Rightarrow \frac{y_3}{n} = y(\alpha_1')$$

4 nem toda continuidade tem aditividade

2.9) Considere um sistema com resposta ao impulso como mostrado na Fig 2.20 (a). Qual é a resposta de estado zero excitada pela entrada u(t) mostrada na Fig 2.20(b).

$$g(t)=\begin{cases} t, & p/\ 0\le t\le 1 \\ 2-t, & p/\ 1\le t\le 2\end{cases}$$

$$u(t)=\begin{cases} 1 & 0\le t\le 1 \\ -1 & 1\le t\le 2\end{cases}$$



$0<\tau<t$

$0<\tau<t-1$
$t-1<\tau<1$
$1<\tau<t$

$t-2<\tau<1$
$1<\tau<t-1$
$t-1<\tau<2$

$t-2<\tau<2$

(1) $\displaystyle\int_0^t \tau\, d\tau = \left.\frac{\tau^2}{2}\right|_0^t = \boxed{\frac{t^2}{2}}$

(4) $\displaystyle\int_{t-2}^{2} -(2-\tau)\, d\tau = \left[\frac{\tau^2}{2} - 2\tau\right]_{t-2}^{2} = \boxed{\frac{-t^2}{2}+4t-8}$

(2) $\displaystyle\int_0^{t-1} -\tau\, d\tau + \int_{t-1}^{1} \tau\, d\tau + \int_1^t (2-\tau)\, d\tau = \left[\frac{\tau^2}{2}\right]_0^{t-1} + \left[\frac{\tau^2}{2}\right]_{t-1}^{1} + \left[2\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_1^t = \boxed{-\frac{3t^2}{2}+\frac{8t}{2}-\frac{4}{2}}$

(3) $\displaystyle\int_{t-2}^{1} -\tau\, d\tau + \int_1^{t-1} -(2-\tau)\, d\tau + \int_{t-1}^{2} (2-\tau)\, d\tau = \left[-\frac{\tau^2}{2}\right]_{t-2}^{1} + \left[\frac{\tau^2}{2} - 2\tau\right]_1^{t-1} + \left[2\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_{t-1}^{2} = \boxed{\frac{3t^2}{2}-8t+10}$

$(1)+(2)+(3)+(4) = \cancel{\frac{t^2}{2}} - \cancel{\frac{3t^2}{2}} + 4t - 2 + \cancel{\frac{3t^2}{2}} - 8t + 10 - \cancel{\frac{t^2}{2}} + 4t - 8 = 0$ //

2.11) Seja $\bar{y}(t)$ a resposta ao degrau unitário de um sistema linear invariante no tempo. Mostre que a resposta ao impulso do sistema é igual a $dy(t)$.

Fazendo a transformada de Laplace em $y(t)$ e na resposta ao impulso, temos:

$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ — Considerando que $h(t)$ representa a função do sistema, temos:

$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$ — $\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s)$

Portanto, $Y(s) = H(s) \cdot \frac{1}{s}$

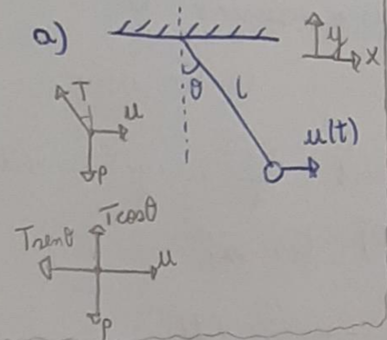
$$Y(s) = \frac{H(s)}{s} \Rightarrow H(s) = s\,Y(s) = \bar{Y}(s)$$

Fazendo a inversa, encontramos:

$$\bar{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

2.15) Encontre as equações para descrever os sistemas de pêndulos na Fig. 2.22. Os sistemas são úteis para ~~manter~~ modelar manipuladores robóticos de um ou dois links. Se θ, θ_1 e θ_2 são muito pequenos, você pode considerar os dois sistemas como lineares?

a)



Pelas leis de Newton, temos:

$$\sum F_y = m a_y \Rightarrow T\cos\theta - P = m\frac{d^2(l\cos\theta)}{dt^2} \Rightarrow T\cos\theta - mg = ml(-\cos(\theta)\dot\theta^2 - \sin(\theta)\ddot\theta) \quad (1)$$

$$\sum F_x = m a_x \Rightarrow u - T\sin\theta = m\frac{d^2(l\sin\theta)}{dt^2} \Rightarrow u - T\sin\theta = ml(\ddot\theta\cos\theta - \dot\theta^2\sin\theta) \quad (2)$$

Considerando que θ é muito pequeno, temos que $\begin{cases}\sin\theta = \theta \\ \cos\theta = 1\end{cases}$ logo,

$$\begin{cases} T - mg = ml(-\dot\theta^2 - \theta\ddot\theta) \\ u - T\theta = ml(\ddot\theta - \dot\theta^2\theta)\end{cases}$$

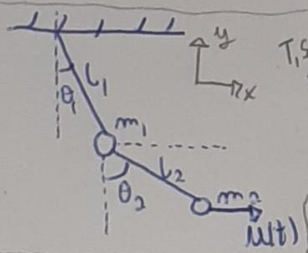
Mantendo apenas os termos lineares em θ e $\dot\theta$, obtém-se: $\begin{cases} T - mg = 0 \Rightarrow T = mg \\ u - mg\theta = ml\ddot\theta \Rightarrow \ddot\theta = \frac{u}{ml} - \frac{mg\theta}{ml}\end{cases}$

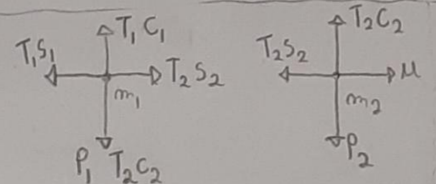
Considerando $x_1 = \theta$ e $x_2 = \dot\theta$, temos:

$$\begin{bmatrix}\dot x_1 \\ \dot x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml}\end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2\end{bmatrix}$$

b)





* Aplicando pequenos sinais, temos: $\begin{cases} S_1 = \theta_1 \\ C_1 = 1 \\ S_2 = \theta_2 \\ C_2 = 1\end{cases}$

(✪) $(1) \Rightarrow T_1 - P_1 - T_2 = 0 \Rightarrow \boxed{T_1 = (m_1 + m_2)g}$ (5)

$(2) \Rightarrow \boxed{T_2\theta_2 - T_1\theta_1 = m_1 l_1\ddot\theta_1}$ (6)

$(3) \Rightarrow T_2 - P_2 = 0 \Rightarrow \boxed{T_2 = m_2 g}$ (7)

$(4) \Rightarrow \boxed{u - T_2\theta_2 = m_2 l_1\ddot\theta_1 + m_2 l_2\ddot\theta_2}$ (8)

Para a massa 1, temos:

$$\sum F_y = m a_y \Rightarrow T_1C_1 - P_1 - T_2C_2 = m_1\frac{d^2(l_1C_1)}{dt^2} \Rightarrow T_1C_1 - P_1 - T_2C_2 = m_1 l_1(-C_1\dot\theta_1^2 - S_1\ddot\theta_1) \overset{*}{\Rightarrow} \boxed{T_1 - P_1 - T_2 = m_1 l_1(-\cancel{\dot\theta_1^2} - \cancel{\theta_1\ddot\theta_1})} \quad (1)$$

$$\sum F_x = m a_x \Rightarrow T_2S_2 - T_1S_1 = m_1\frac{d^2(l_1S_1)}{dt^2} \Rightarrow T_2S_2 - T_1S_1 = m_1 l_1(\ddot\theta_1 C_1 - \dot\theta_1^2 S_1) \overset{*}{\Rightarrow} \boxed{T_2\theta_2 - T_1\theta_1 = m_1 l_1(\ddot\theta_1 - \cancel{\dot\theta_1^2\theta_1})} \quad (2)$$

Para a massa 2, temos:

$$\sum F_y = m a_y \Rightarrow T_2C_2 - P_2 = m_2\frac{d^2(l_1C_1 + l_2C_2)}{dt^2} \overset{*}{\Rightarrow} \boxed{T_2 - P_2 = m_2 l_1(-\cancel{\ddot\theta_1\theta_1} - \cancel{\dot\theta_1^2}) + m_2 l_2(-\cancel{\dot\theta_2^2} - \cancel{\theta_2\ddot\theta_2})} \quad (3)$$

$$\sum F_x = m a_x \Rightarrow u - T_2S_2 = m_2\frac{d^2(l_1S_1 + l_2S_2)}{dt^2} \overset{*}{\Rightarrow} \boxed{u - T_2\theta_2 = m_2 l_1(\ddot\theta_1 - \cancel{\dot\theta_1^2\theta_1}) + m_2 l_2(\ddot\theta_2 - \cancel{\dot\theta_2^2\theta_2})} \quad (4)$$

Mantendo apenas os termos lineares em função de θ_1, θ_2, $\dot\theta_1$ e $\dot\theta_2$, em (1), (2), (3) e (4), obtemos: (✪)

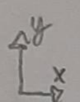
Considerando $x_1 = \theta_1$, $x_2 = \dot\theta_1$, $x_3 = \theta_2$ e $x_4 = \dot\theta_2$, e partindo de (5), (6), (7) e (8), temos:

$$\begin{array}{c} \dot\theta_1 \\ \ddot\theta_1 \\ \dot\theta_2 \\ \ddot\theta_2 \end{array}\begin{bmatrix}\dot x_1 \\ \dot x_2 \\ \dot x_3 \\ \dot x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(m_1+m_2)g}{m_1 l_1} & 0 & \frac{m_2 g}{m_1 l_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{g(m_1+m_2)}{l_2 m_1} & 0 & -\frac{g(m_1+m_2)}{m_1 l_2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2 l_2}\end{bmatrix} u \; ; \; \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4\end{bmatrix}$$

2.17] A fase do pouso suave de um módulo lunar descendo na lua pode ser modelado conforme na fig 2.24. O empuxo gerado é assumido como proporcional a $\dot{m}$, onde m é a massa do módulo. Então, o sistema pode ser descrito por $m\ddot{y} = K\dot{m} - mg$, onde g é a constante de gravidade na superfície lunar. Defina as variações de estado como $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = m$ e $u = \dot{m}$. Encontre uma equação de espaço de estados para descrever os sistemas.

(3) $m\ddot{y} = -K\dot{m} - mg$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ x_3 = m \\ u = \dot{m} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{x}_1 = \dot{y} \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} \\ \dot{x}_3 = \dot{m} \\ \dot{u} = \ddot{m} \end{array}\right.$$



Como há multiplicação de estados, deve-se fazer a linearização das equações. Partindo da equação $S = S_0 + V_0 t + \frac{a t^2}{2}$ e considerando que o módulo parte do repouso ($V_0 = 0$), temos:

$$y = \tilde{y} + 0 - \frac{g t^2}{2} \Rightarrow \dot{y} = -gt + \dot{\tilde{y}} \Rightarrow \ddot{y} = -g + \ddot{\tilde{y}} \quad (1)$$

A massa é dada pela massa do módulo e pelo combustível, logo a massa total é dada por: $m = m_0 + \tilde{m} \Rightarrow \dot{m} = \dot{\tilde{m}}$ (2)

Substituindo (1) e (2) em (3), temos: $\left\{(m_0 + \tilde{m})(-g + \ddot{\tilde{y}}) = -K(\dot{\tilde{m}}) - (m_0 + \tilde{m})g\right.$

$$-\cancel{m_0 g} + m_0\ddot{\tilde{y}} - \cancel{\tilde{m} g} + \tilde{m}\ddot{\tilde{y}} = -K\dot{\tilde{m}} - \cancel{m_0 g} - \cancel{\tilde{m} g}$$

$$m_0\ddot{\tilde{y}} + \tilde{m}\ddot{\tilde{y}} = -K\dot{\tilde{m}}$$

Mantendo apenas os termos lineares em função de $\tilde{m}$ e $\tilde{y}$, temos:

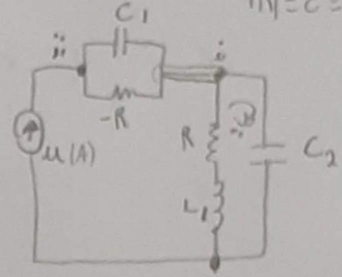
$$\boxed{m_0\ddot{y} = -K\dot{\tilde{m}}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -K/m_0 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{u}$$

1×3

3×1

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}$$

2.19) Encontre uma equação de estado para descrever a rede mostrada na Fig 2.26. Encontre também sua função de transferência. $|R| = c = L = 1$



Considerando a tensão do capacitor C_1 como X_1;

" " " " " C_2 como X_2;

" " corrente do indutor L_1 como X_3, temos ao aplicar LKC e LKT

$i_c = c\frac{dV_c}{dt}$

$V_L = L\frac{di}{dt}$

(i) $\Rightarrow C_2\frac{dX_2}{dt} + X_3 = u \Rightarrow \dot{X}_2 = \frac{u}{C_2} - \frac{X_3}{C_2} \Rightarrow \dot{X}_2 = u - X_3$

(ii) $\Rightarrow +u = \frac{X_1}{R} + C_1\dot{X}_1 \Rightarrow \dot{X}_1 = \frac{u}{C_1} - \frac{X_1}{RC_1} \Rightarrow \dot{X}_1 = u - X_1$

(iii) $\Rightarrow -X_2 + L\dot{X}_3 + RX_3 = 0 \Rightarrow \dot{X}_3 = +\frac{X_2}{L} - \frac{RX_3}{L} \Rightarrow \dot{X}_3 = +X_2 - X_3$

(iv) $y = X_2 \qquad \Rightarrow y = X_2$

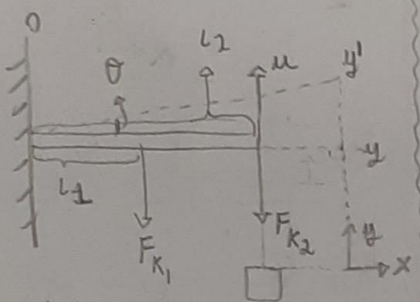
$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

$y = X_2$ e $X_2 = \dot{X}_3 + X_3$ sendo que $X_3 = u - \dot{X}_2 = u - \dot{y}$, então

$$\left.\begin{matrix} X_3 = u - \dot{y} \\ \dot{X}_3 = \dot{u} - \ddot{y} \end{matrix}\right\} X_2 = \dot{u} - \ddot{y} + u - \dot{y} \Rightarrow y = \dot{u} - \ddot{y} + u - \dot{y} \Rightarrow \ddot{y} + \dot{y} + y = \dot{u} + u$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

2.21 Considere o sistema mecânico mostrado na Fig 2.27. ~~Seja~~ Seja I denotando o momento de inercia da barra e do bloco em torno da dobradiça. Assume-se que o deslocamento angular θ é muito pequeno. Uma força externa u é aplicada à barra como mostrado. Seja y o deslocamento do bloco, de massa m_2, a partir do equilibrio. Encontre uma equação de espaço de estado para descrever o sistema. Encontre também a função de transferência de u para y.



deslocamento: $y' - y \Rightarrow \boxed{l_2\theta - y}$

$$y' = l_2 \operatorname{tg}\theta = l_2 \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \overset{*}{\Rightarrow} \boxed{y' = l_2\theta}$$

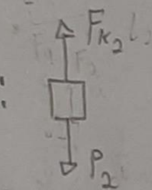
* Para θ pequeno temos $\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = \theta \\ \cos\theta = 1 \end{cases}$

$$\Sigma \tau_y = -l_1 k_1 l_1 \theta + l_2 u - l_2 k_2 (l_2\theta - y) = I\ddot{\theta}$$

$$= \frac{-l_1^2 k_1 \theta}{I} + \frac{l_2 u}{I} - \frac{l_2^2 k_2 \theta}{I} + \frac{l_2 k_2 y}{I} = \ddot{\theta}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = \theta\left(\frac{-l_1^2 k_1 - l_2^2 k_2}{I}\right) + y\left(\frac{+l_2 k_2}{I}\right) + u\left(\frac{l_2}{I}\right)}$$

y:



$$\Sigma F_y = k_2(l_2\theta - y) - m_2 g\theta = m_2\ddot{y}$$

$$\ddot{y} = \frac{k_2 l_2 \theta}{m_2} - \frac{k_2 y}{m_2} - \frac{m_2 g \theta}{m_2}$$

$$\boxed{\ddot{y} = \theta\left(\frac{k_2 l_2 - m_2 g}{m_2}\right) + y\left(\frac{-k_2}{m_2}\right)}$$

$x_1 = \theta \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{\theta}$

$x_2 = \dot{\theta} \Rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{\theta}$

$x_3 = y \Rightarrow \dot{x}_3 = \dot{y}$

$x_4 = \dot{y} \Rightarrow \dot{x}_4 = \ddot{y}$

$\dot{x}_2 = a x_1 + b x_3 + c u$

$\dot{x}_4 = d x_1 + w x_3$

$x_3 = y$

$\dot{x}_2 = \ddot{x}_1$

$x_1 = \frac{\dot{x}_4}{d} - \frac{w x_3}{d}$

$\boxed{x_1 = \frac{\ddot{y}}{d} - \frac{w}{d} y}$

$\boxed{\dot{x}_2 = \frac{\ddddot{y}}{d} - \frac{w}{d}\ddot{y}}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-l_1^2 k_1 - l_2^2 k_2}{I} & 0 & \frac{+l_2 k_2}{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2 l_2 - m_2 g}{m_2} & 0 & \frac{-k_2}{m_2} & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l_2}{I} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$\dot{x} = A[x] + B[u]$

$y = C[x] + 0[u]$

Jogando no matlab, para calcular a FT, encontramos a seguinte função.

$$FT = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_2 l_2^2}{I m_2 s^4 + \left[m_2(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) + I k_2\right] s^2 + k_1 k_2 l_1^2}$$