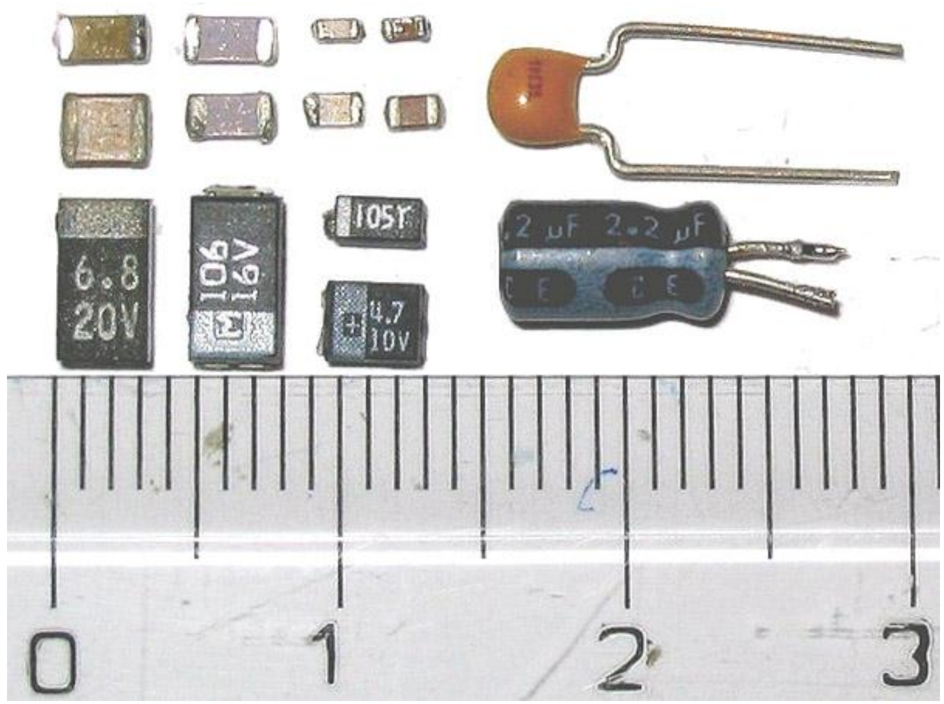
UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA – UFV
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – CCE
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA - DEL

Medidas Elétricas e Magnéticas

ELT210

AULA 03 – Capacitor e Indutor

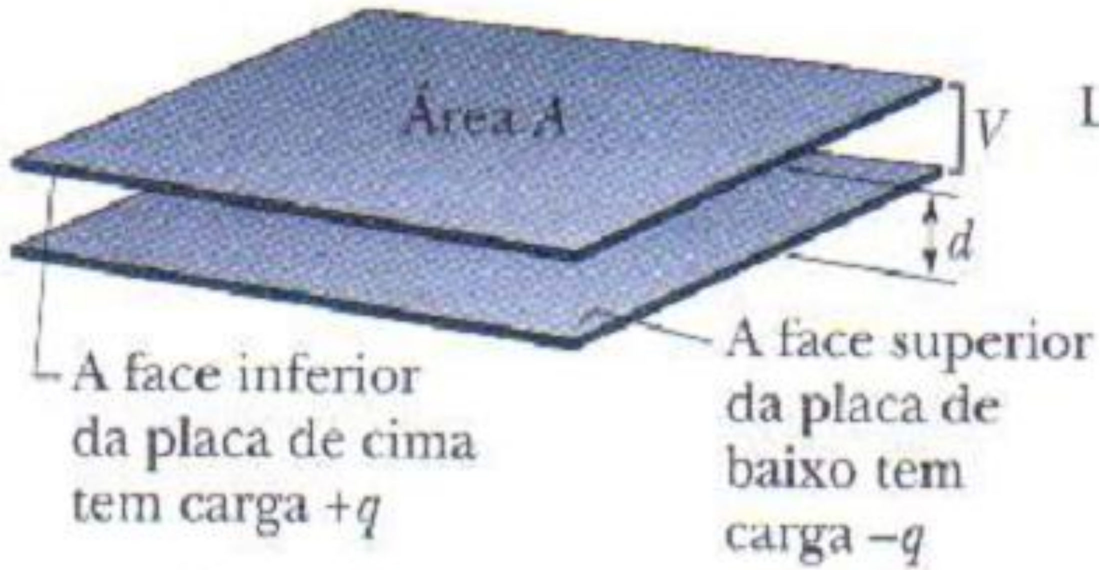
Prof. Tarcísio Pizziolo



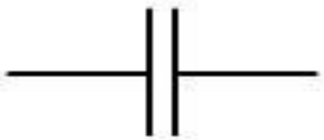
Capacitor e Capacitância

1. Capacitor

A figura ao lado mostra duas placas paralelas condutoras de **área A** e separadas por uma **distância d**.
Esta configuração representa um **Capacitor de Placas Paralelas**.



Símbolo



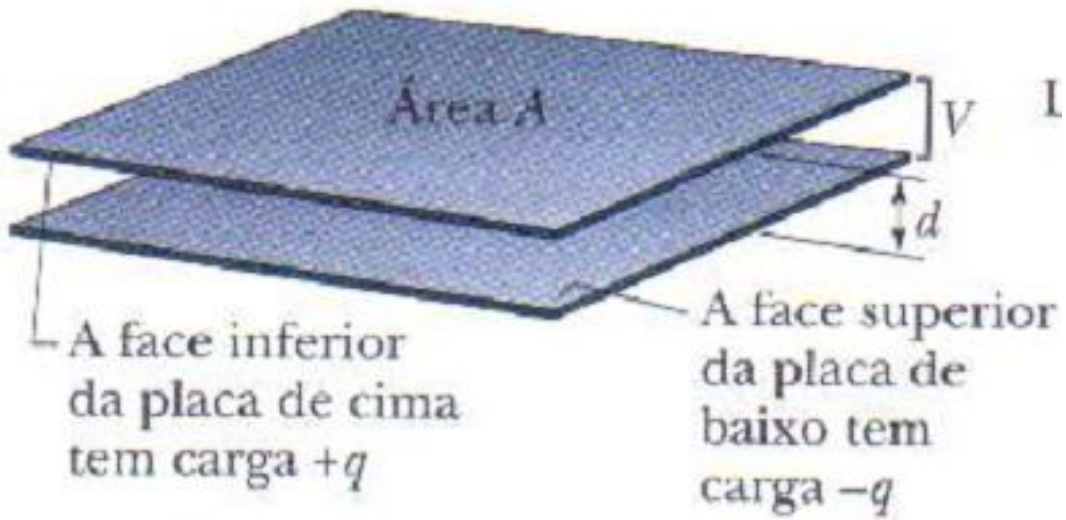
C

As placas contém cargas de mesmo valor absoluto e sinais opostos, **+q** e **–q.**

As placas são **superfícies equipotenciais**, ou seja, todos os pontos da placa possuem o mesmo potencial elétrico.

1.1 Capacitância

- Existe uma diferença de potencial entre as duas placas (representada por **V**)



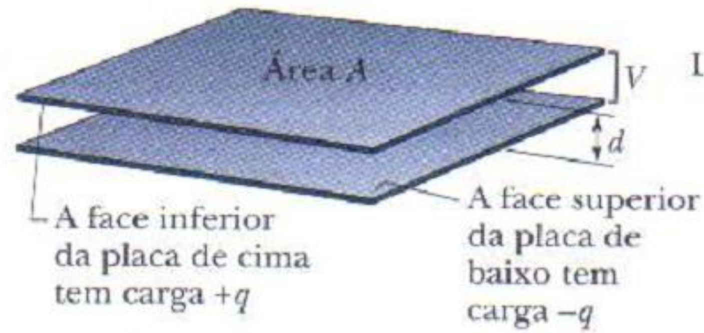
- A carga **q** e a tensão **V** de um capacitor são **diretamente proporcionais**, então:

$$\uparrow\mathbf{V} \sim \uparrow\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q = C.V} \quad \textbf{ou} \quad C = \frac{Q}{\Delta V}$$

A constante C é chamada de Capacitância do capacitor.

1.1 Capacitância

- A **Capacitância** é uma medida da quantidade de carga que precisa ser acumulada nas placas de um capacitor para produzir uma diferença de potencial **V** entre elas.



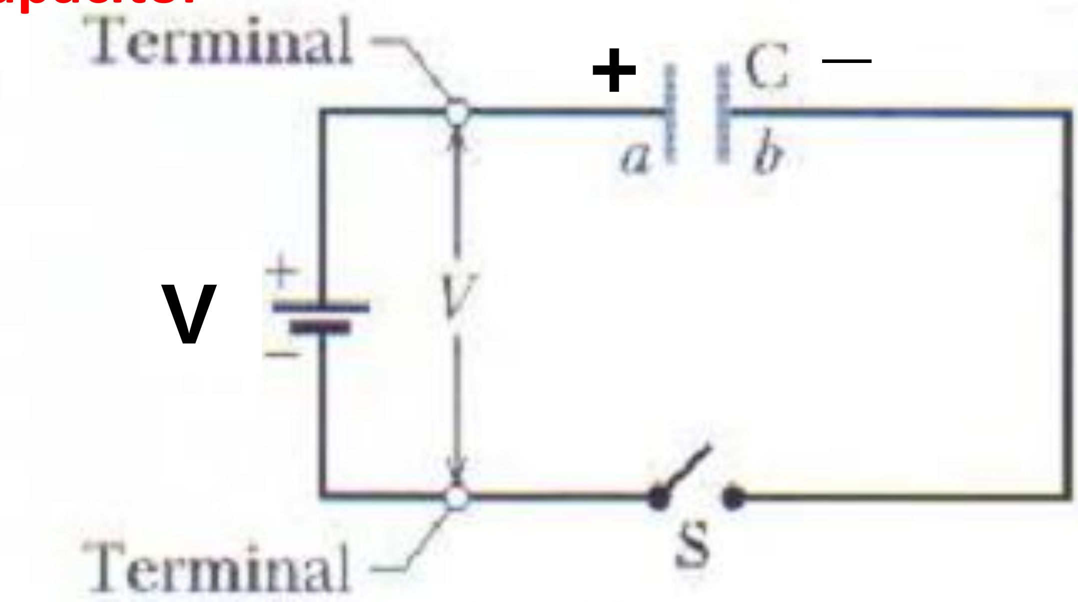
- A unidade de capacitância no **SI** é o Coulomb por Volt (**C/V**), ou Farad (F).
- A capacitância também é a propriedade que os capacitores têm de armazenar energia elétrica sob a forma de um campo eletrostático.

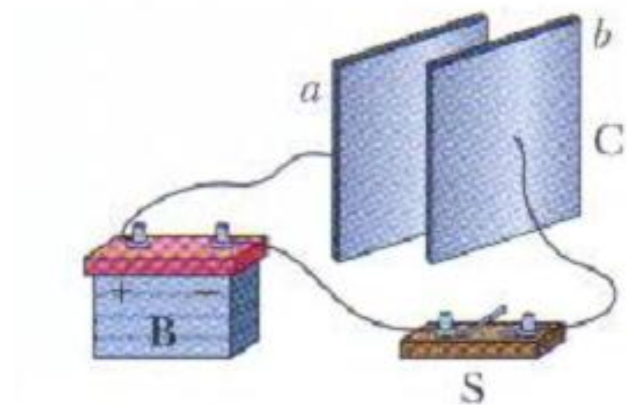
1 farad = 1 F = 1 Coulomb/Volt = 1 C/V

Na prática, submúltiplos como **microfarad (*μF*)** e o **picofarad (*pF*)** são mais utilizados.

1.2 Aplicação de Tensão em um Capacitor

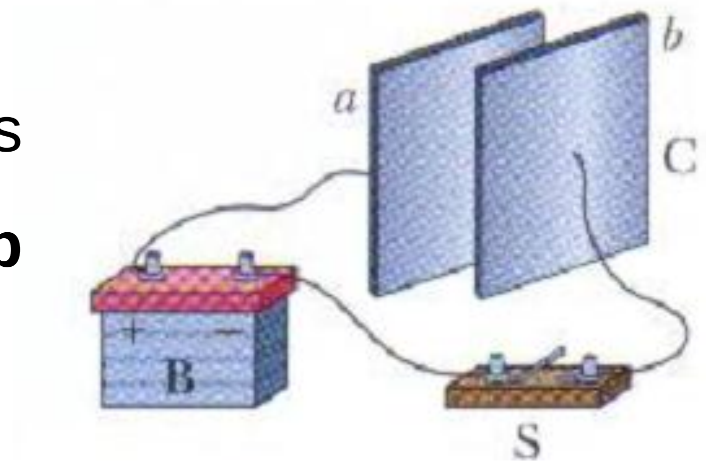
- Uma forma de carregar um capacitor é aplicar uma **ddp** (**V**) em suas placas.
- Elétrons se deslocam da placa **a** para o **terminal positivo** da **fonte V**, ficando a **placa a positivamente carregada.**
- Elétrons se deslocam do **terminal negativo** da **fonte V** para a placa **b** ficando assim **carregada negativamente**.





<u>Nota:</u> Os elétrons não podem passar diretamente através do dielétrico de uma placa do capacitor para a outra. Quando uma tensão é aplicada a um capacitor através de uma fonte externa, a corrente flui para uma das placas, carregando-a, enquanto flui da outra placa, carregando-a, inversamente.

1.2 Aplicação de Tensão em um Capacitor



- No instante em que a chave é fechada, as duas placas estão descarregadas e a **ddp** entre elas é zero;

- Enquanto as placas estão sendo carregadas, a **ddp** entre elas aumenta até se tornar **igual à ddp V** da fonte (capacitor totalmente carregado);

Para o capacitor de placas paralelas: $\boldsymbol{C = \varepsilon_r . \varepsilon_0 . \frac{A}{d}}$

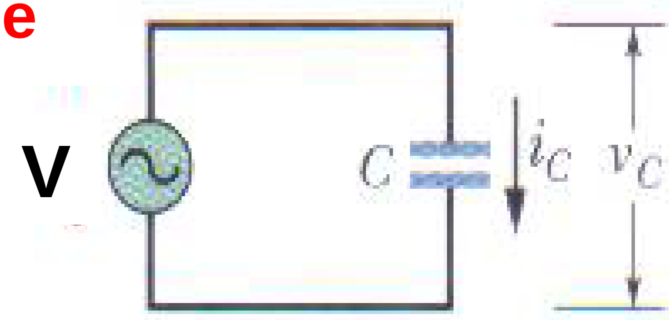
A = área de uma das placas; d = distância entre as placas;

ε_0 = constante de permissividade do vácuo: $\mathbf{\varepsilon_0 = 8,85.10^{-12}\ F/m = 8,85\ pF/m}$

$\boldsymbol{\varepsilon_r}$ = constante dielétrica ou permissividade relativa do isolante utilizado.

1.2 Aplicação de Tensão em um Capacitor

- Dado o circuito ao lado, ao ser aplicada a tensão **V** da fonte, **convenciona-se que haverá uma corrente i_c no capacitor**.



$$i_C = \frac{dQ}{dt} \rightarrow i_C = C.\frac{dV_C}{dt}$$

- A energia W_C armazenada no **campo elétrico** do capacitor para transportar as cargas **dq** de uma placa a outra é dada por:

$$W_c = \int_0^t p_c(t).dt = \int_0^t v_c(t).i_c(t).dt = \int_0^t v_c(t).\left[C.\frac{dv_c}{dt}\right].dt =$$

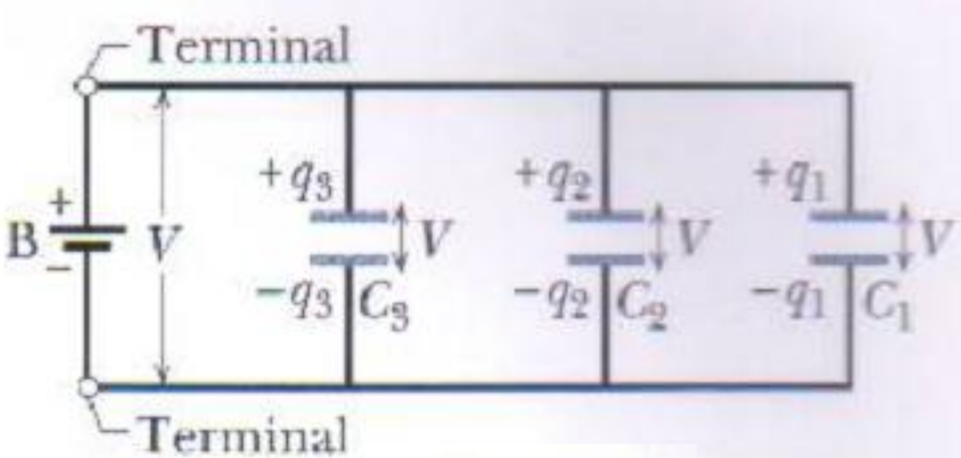
$$= C.\int_0^t v_c(t).dv_c \rightarrow \boxed{W_c = \frac{1}{2}.C.v_c^2}$$

1.3 Associação de Capacitores

Capacitores em Paralelo

Quando uma diferença de potencial V é aplicada a vários capacitores ligados em paralelo, a diferença de potencial V é a mesma entre as placas de todos os capacitores, e a carga total q armazenada nos capacitores é a soma das cargas armazenadas individualmente nos capacitores.

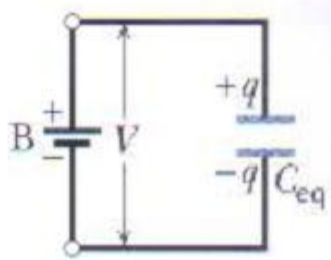
Capacitores ligados em paralelo podem ser substituídos por um capacitor equivalente com a mesma *carga total q* e a mesma diferença de potencial V que os capacitores originais.



$$q_1 = C_1V, \quad q_2 = C_2V, \quad \text{e} \quad q_3 = C_3V.$$

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)V.$$

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = C_1 + C_2 + C_3,$$



$$C_{eq} = \sum_{j=1}^{n} C_j$$

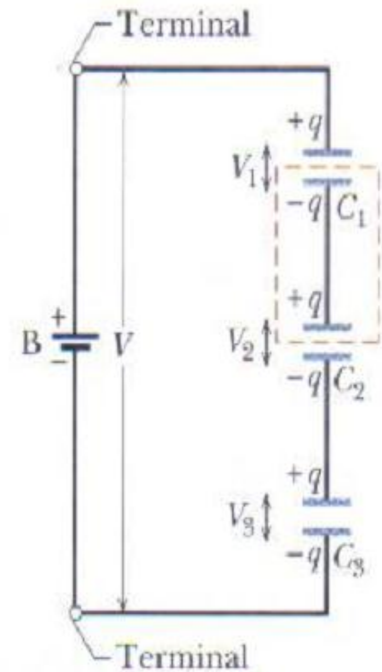
Capacitores em Série

Quando uma diferença de potencial V é aplicada a vários capacitores ligados em série, a carga q armazenada é a mesma em todos os capacitores e a soma das diferenças de potencial entre as placas dos capacitores é igual à diferença de potencial aplicada V.

Capacitores ligados em série podem ser substituídos por um capacitor equivalente com a *mesma carga q* e a mesma *diferença de potencial total V* que os capacitores originais.

A **fonte B** produz cargas apenas nas duas placas às quais está ligada diretamente.

As cargas das outras placas se devem ao deslocamento de cargas já existentes nesta placa



$$V_1 = \frac{q}{C_1}, \quad V_2 = \frac{q}{C_2}, \quad \text{e} \quad V_3 = \frac{q}{C_3}.$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right).$$

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3},$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

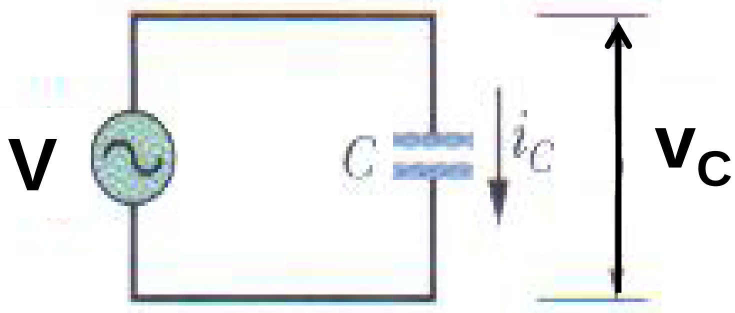
$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{C_j}$$

1.3 Associação de Capacitores

Em série	Em paralelo
Capacitores	
$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{C_j}$$	$$C_{eq} = \sum_{j=1}^{n} C_j$$
A carga é a mesma em todos os capacitores	A diferença de potencial é a mesma em todos os capacitores

Exemplos

1) Para o circuito dado **C = 2 μF** e a tensão **V = 2.sen(3t) (V)**. Calcule a corrente $\mathbf{i_C}$ no capacitor e a Energia $\mathbf{W_C}$ Armazenada em seu Campo Elétrico.



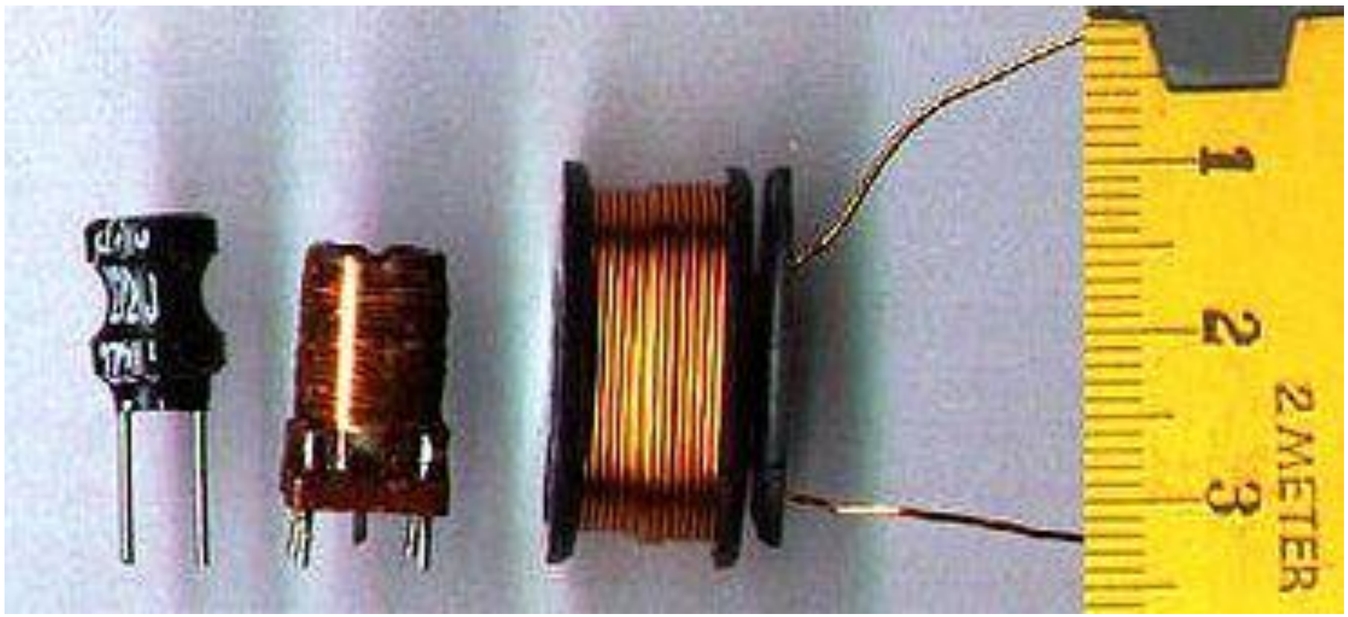
$$i_C = C.\frac{dV_C}{dt} = (2\mu).2.3.\cos(3t) =$$
$$= 12\mu\cos(3t)\ (A)$$
$$W_C = \frac{1}{2}C(Vc)^2 = \frac{1}{2}.2\mu\big(2.sen(3t)\big)^2\ (\mathrm{J})$$

2) Calcule a corrente $\mathbf{i_C}$ para o circuito anterior se a tensão **V = 2 (V)**.

$$i_C = C.\frac{dv_C}{dt} = 0\ (\mathrm{A})$$

NOTA: O capacitor “abre” o circuito quando a tensão aplicada em seus terminais for contínua, ou seja, as placas carregam até chegar ao nível de tensão estabilizada pela fonte não circulando mais corrente no estado permanente.

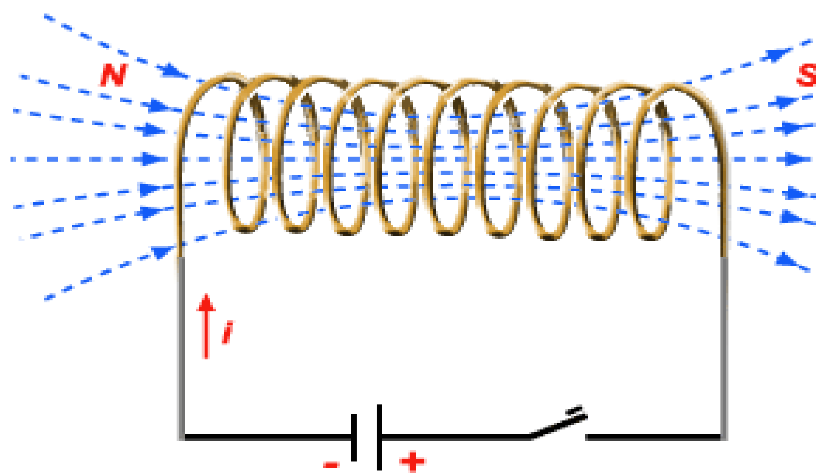
Indutor e Indutância



2. Indutor

- O indutor é um **enrolamento em espiral** de um **fio condutor**, formando uma **bobina**.
- Quando uma corrente flui por este dispositivo produz um **fluxo magnético φ enlaçando cada espira**.

Em uma **bobina** com ***N* espiras** o **fluxo total produzido** será igual a: $\lambda = N.\varphi$ **[Wb]**.



2.1 Indutância

- O fluxo magnético total é **diretamente proporcional à corrente** que circula no indutor.

$$\uparrow i \sim \uparrow \lambda \rightarrow \lambda = L.i$$

Ou:

$$N.\varphi = L.i \Rightarrow L = \frac{N.\varphi}{i}$$

A constante L é chamada de Indutância do indutor.

- A indutância é a medida de enlaçamento de fluxo magnético produzido pelo indutor por unidade de corrente.
- A unidade de medida no sistema internacional (SI) é:

$$\mathbf{1\ henry = 1\ H = 1\ \boxed{T.m^2}/A}$$

Wb (Weber)

2.2 Aplicação de Corrente em um Indutor

- Considere uma **bobina** (*solenóide*) com **N espiras** na Figura 1.

- Quando uma corrente circular pelo condutor gerando um fluxo magnético, a indutância será dada por:

$$L = \mu_0 . N^2 . A$$

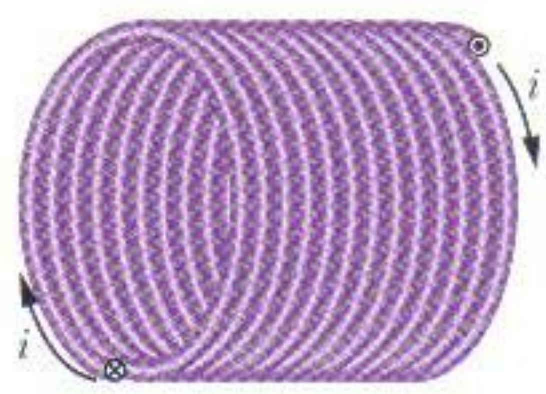


Figura 1. Um solenóide percorrido por uma corrente i.

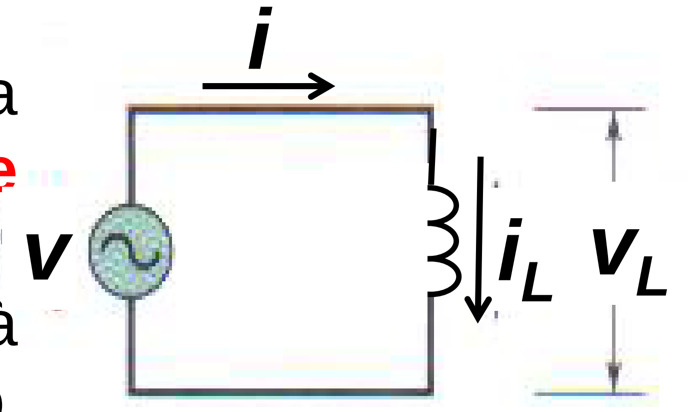
Onde:

- **A** é área do centro do solenóide.

$-\mu_0$ é a constante de permeabilidade do vácuo dada por:

$$\mu_0 = 4\pi . 10^{-7}\ T.m/A = 4\pi . 10^{-7}\ H/m$$

2.3 Aplicação de Corrente em um Indutor



- Dado o circuito ao lado, ao ser aplicada a corrente **i** da fonte, **convenciona-se que haverá uma tensão v_L no indutor**.

Lei da indução magnética: a tensão é igual à taxa de variação no tempo do fluxo magnético total. Daí:

$$\boldsymbol{v_L = \frac{d\lambda}{dt} = L.\frac{di_L}{dt}}$$

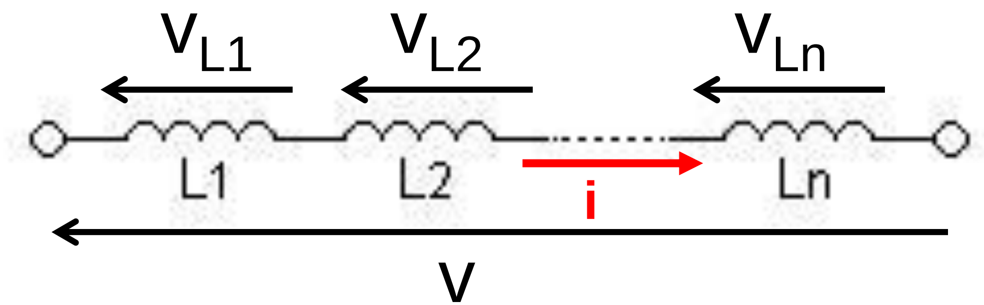
- A energia **W_L** armazenada no **campo magnético** do indutor é dada por:

$$W_L = \int_0^t p_L(t).dt = \int_0^t v_L(t).i_L(t).dt = \int_0^t i_L(t).\left[L.\frac{di_L}{dt}\right].dt =$$

$$= L.\int_0^t i_L(t).di_L \rightarrow \boxed{\boldsymbol{W_L = \frac{1}{2}.L.{i_L}^2}}$$

2.4 Associação de Indutores

Indutores em Série



Aplicando a LKT, tem-se:

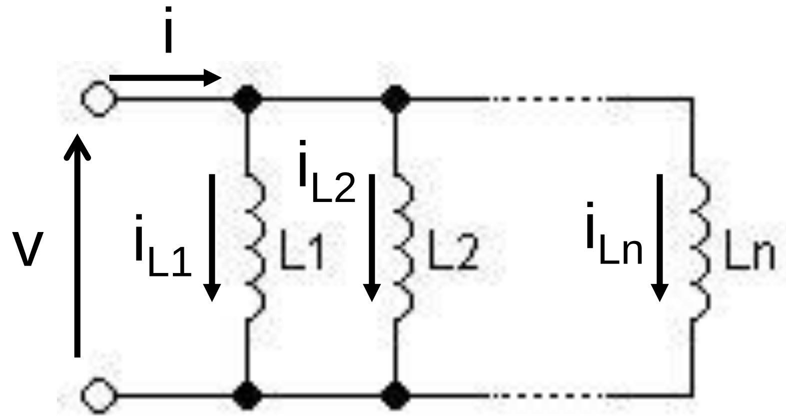
$$v = L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} + \cdots + L_n\frac{di}{dt} = (L_1 + L_2 + \cdots + L_n)\frac{di}{dt}$$

Logo,

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$$

2.4 Associação de Indutores

Indutores em Paralelo



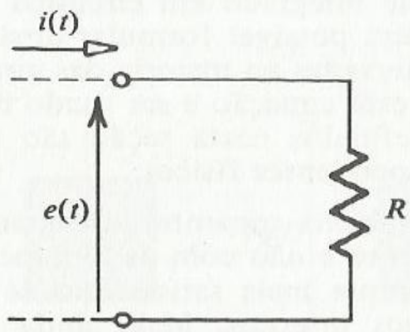
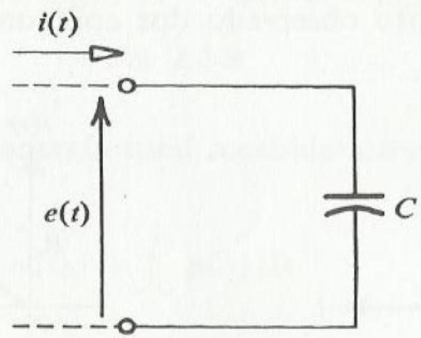
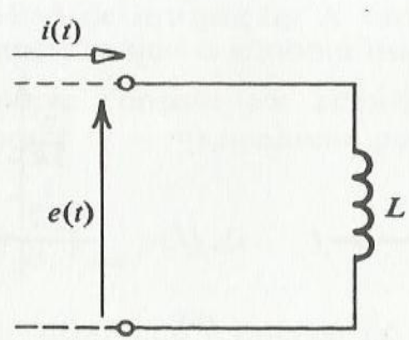
Aplicando a LKC, tem-se:

$$i = \frac{1}{L_1}\int v\,dt + \frac{1}{L_2}\int v\,dt + \cdots + \frac{1}{L_n}\int v\,dt = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}\right)\int v\,dt$$

Logo:

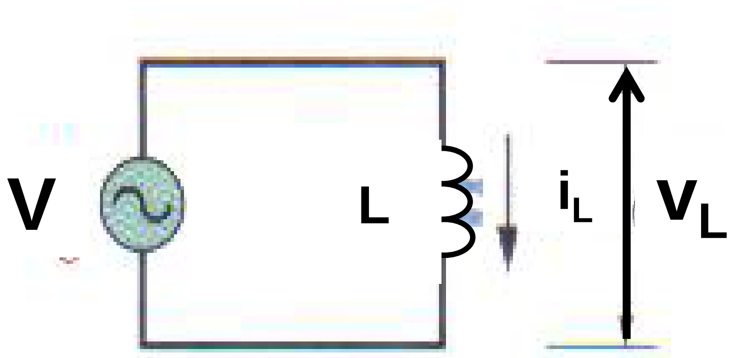
$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}$$

2.5 Resumo das Relações de Tensão e Corrente em Componentes Elétricos

Elemento de circuito	*Símbolo*	*Equação de definição*
Resistência: R ohms (Ω) Condutância: G (mhos) $= 1/R$		$e(t) = Ri(t)$ $i(t) = \frac{e(t)}{R} = Ge(t)$
Capacitância: C farads (f) Elastância: S (darafs) $= 1/C$		$i(t) = C\frac{de}{dt}$ $e(t) = \frac{1}{C}\int i\,dt$
Auto-indutância: L henrys (h) Indutância inversa: Γ (henrys inversos) $= 1/L$		$e(t) = L\frac{di}{dt}$ $i(t) = \frac{1}{L}\int e\,dt$

Exemplos

1) Para o circuito dado **L = 2 mF** e a corrente **i_L = 5.sen(2t) (A)**. Calcule a tensão **v_L** no indutor e a Energia **W_L** Armazenada em seu Campo Magnético.



$$v_L = L.\frac{di_L}{dt} = (2m).5.2.\cos(2t) =$$
$$= 20m\cos(2t)\,(V)$$
$$W_L = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}.2m\big(5.sen(2t)\big)^2\ (\mathrm{J})$$

2) Calcule a tensão **v_L** para o circuito anterior se a corrente **i_L = 3 (A)**.

$$v_L = L.\frac{di_L}{dt} = 0\ (\mathrm{V})$$

NOTA: O indutor atua como "curto-circuito" quando a corrente que atravessa seus terminais for contínua, ou seja, a tensão entre os terminais é igual a zero no estado permanente.

Exercícios

Capacitores

01) Se a tensão do capacitor de 5F for $v_c(t)$, determine a corrente e a potência.

$$v_{c(t)} = 2te^{-3t} \text{ V}$$

02) Uma corrente $i_c(t)$ atravessa um capacitor de 2F. Calcule a tensão $v(t)$ do capacitor sabendo que $v(0) = 1$ V.

$$i_{c(t)} = 6 \operatorname{sen} 4t \text{ A}$$

03) A corrente $i_c(t)$ atravessa um capacitor de 0,5F. Determine a tensão e a potência em t = 2 s. Considere $v(0) = 0$.

$$i_{c(t)} = 6\left(1 - e^{-t}\right)\text{A}$$

04) Uma tensão $v_c(t)$ aparece nos terminais de um capcitor de 3mF. Calcule a corrente do capacitor e a energia armazenada nele de t = 0 a t = 0,125 s.

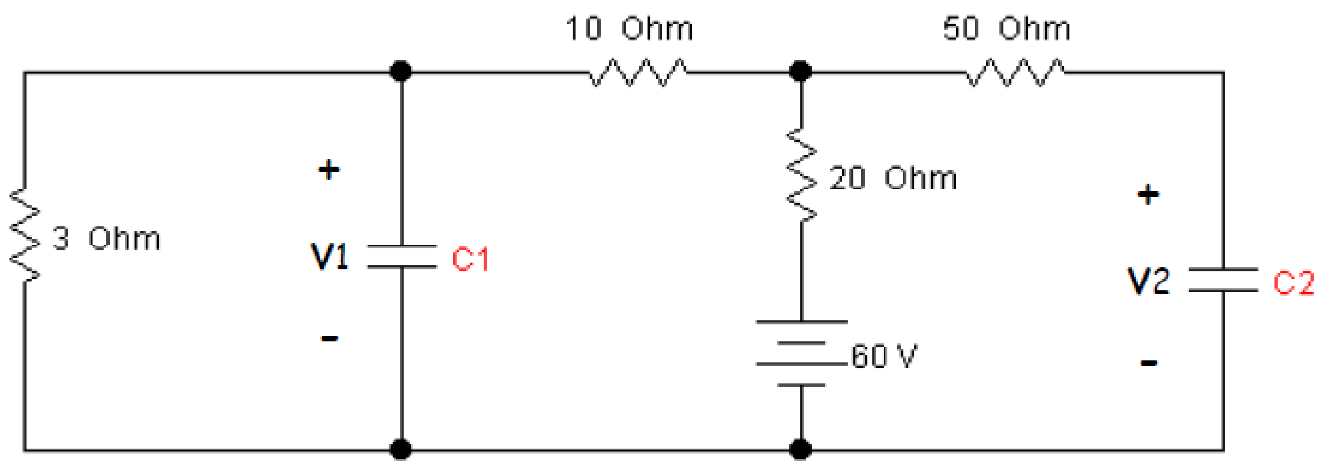
$$v_{c(t)} = 60 \cos 4\pi t \text{ V}$$

Exercícios

05) Dois capacitores (20μF e 30μF) são conectados em uma fonte de 100 V. Calcule a energia armazenada em cada capacitor se eles estiverem conectados em: (a) série e (b) paralelo.

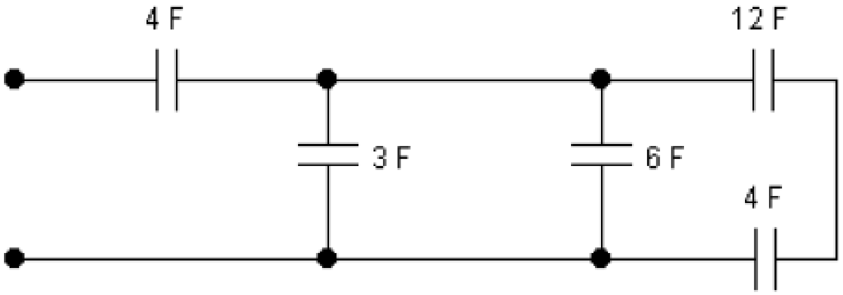
06) Qual é a capacitância total de quatro capacitores de 30mF conectados em: (a) paralelo e (b) série ?

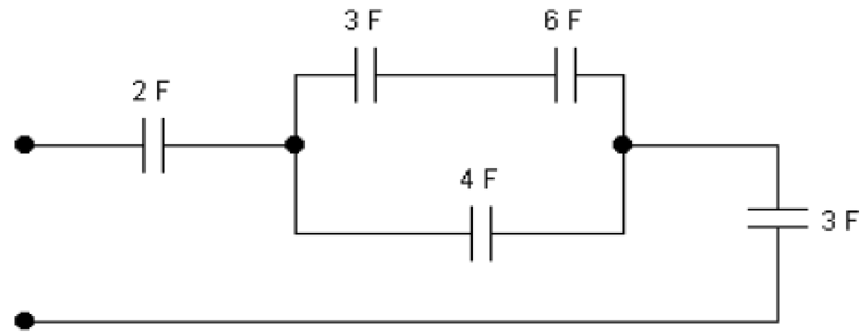
07) Determine a tensão em cada capacitor do circuito abaixo.

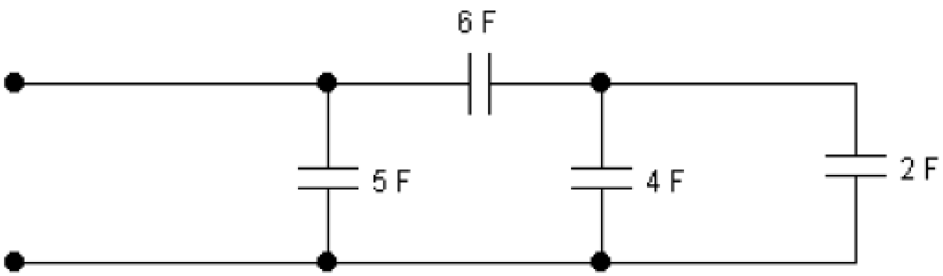


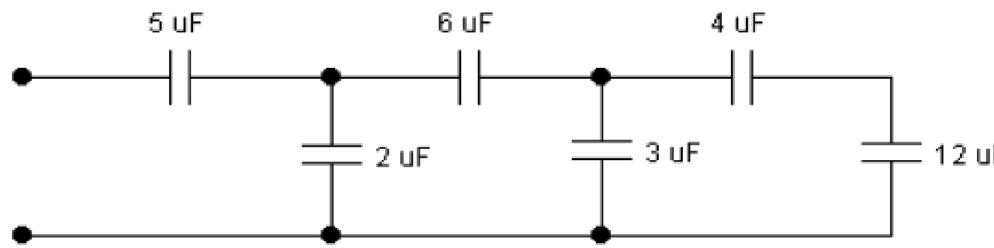
Exercícios

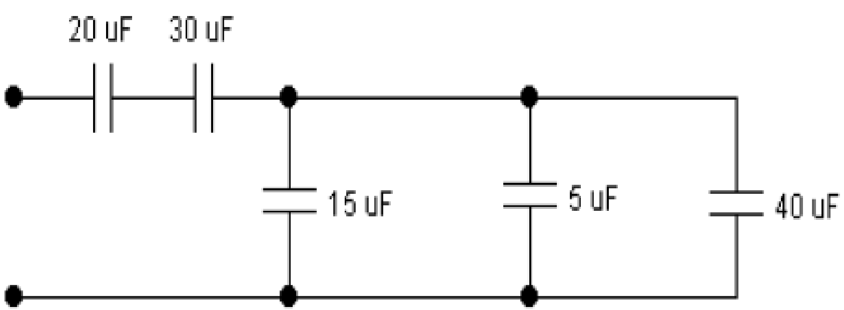
08) Determine a capacitância equivalente para cada circuito mostrado abaixo.

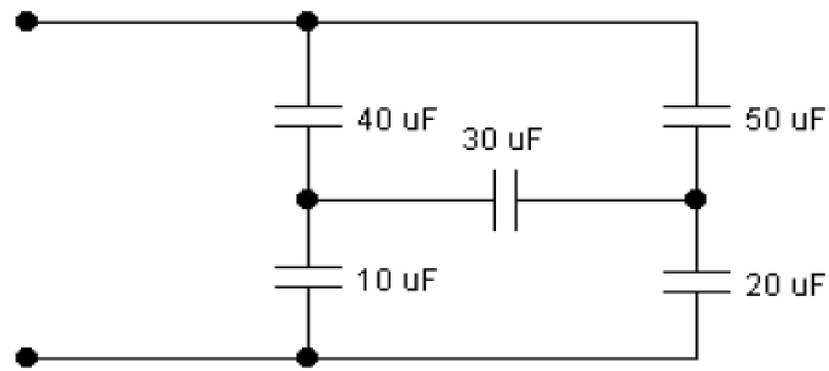










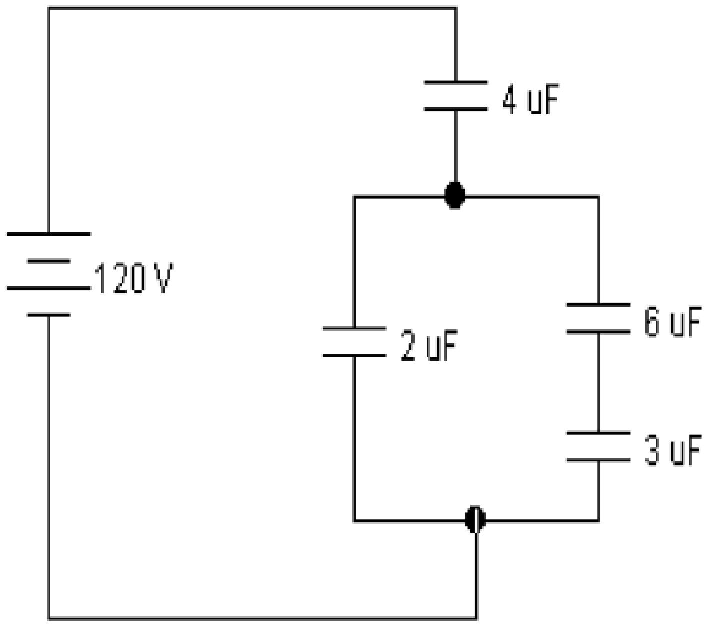


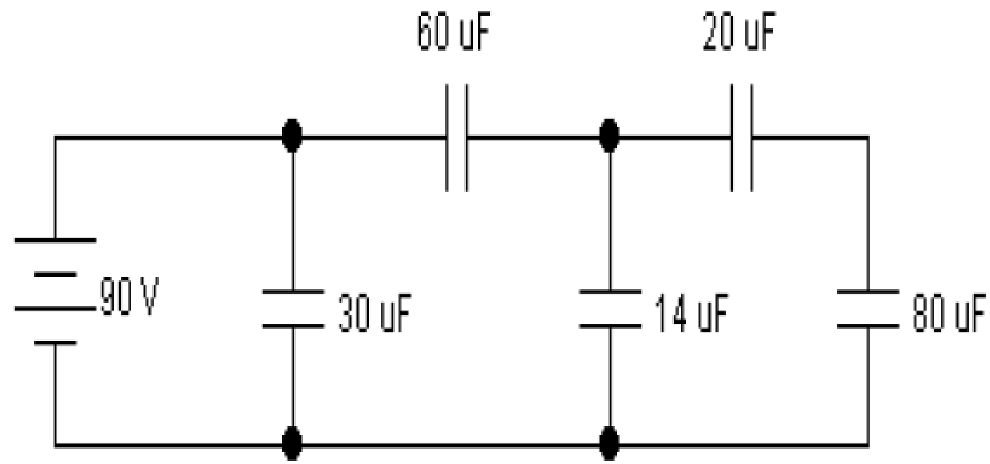
Exercícios

09) Para os circuitos a seguir, determine:

a) A tensão em cada capacitor.

b) A energia armazenada emm cada capacitor.





10) Três capacitores C_1=5μF, C_2=10μF e C_3=20μF estão conectados em paralelo em uma fonte de 150 V. Determine:

a) A capacitância total.

b) A carga em cada capacitor.

c) A energia total armazenada na combinação paralela.

Exercícios

11) Agora os três capacitores $C_1=5\mu F$, $C_2=10\mu F$ e $C_3=20\mu F$ estão conectados em série com uma fonte de 200 V. Determine:

a) A capacitância total.

b) A carga em cada capacitor.

c) A energia total armazenada na combinação em série.

12) Para o circuito abaixo, e seja a tensão aplicada v(t) e conhecendo-se a tensão $v_1(0)$ no capacitor de 20μF, determine:

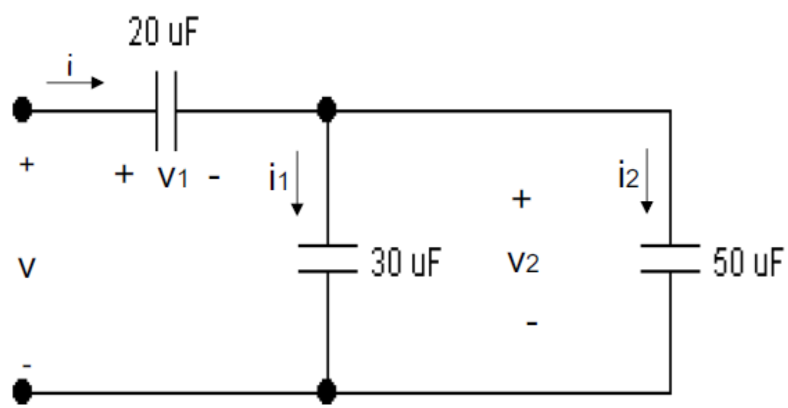
a) $v_2(0)$.

b) $v_1(t)$ e $v_2(t)$.

c) $i(t)$, $i_1(t)$ e $i_2(t)$.

$$v_{(t)} = 10\, e^{-3t} \text{ V}$$

$$v_{1(0)} = 2 \text{ V}$$



Exercícios

Indutores

13) Se a corrente em um indutor de 10mH for $i_L(t)$, determine a tensão e a potência em t = 3 s.

$$i_{L(t)} = 6e^{-\frac{t}{2}}\ \text{A}$$

14) A corrente em um indutor de 0,25mH é $i_L(t)$. Determine a tensão terminal e a potência.

$$i_{L(t)} = 12\cos 2t\ \text{A}$$

15) A corrente em um indutor de 12mH é $i_L(t)$. Determine a tensão e a energia armazenada no indutor para $0 < t < \pi/200$ s.

$$i_{L(t)} = 4\ sen\ 100\ t\ \text{A}$$

16) A corrente em um indutor de 40mH é i(t). Calcule a tensão v(t).

$$i_{(t)} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t\,e^{-2t}\ \text{A}, & t > 0 \end{cases}$$

Exercícios

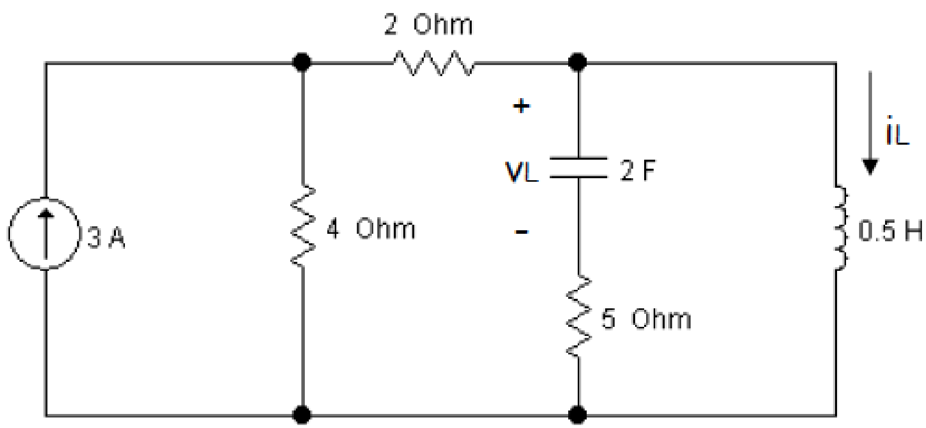
17) A tensão em um indutor de 2H é $v_L(t)$. Se a corrente inicial no indutor for de 0,3A, determine a corrente e a energia armazenada no indutor em t = 1 s.

$$v_{L(t)} = 20\left(1 - e^{-2t}\right)\mathrm{V}$$

18) A tensão aplicada em um indutor de 5H é $v_L(t)$. Determine a corrente $i_L(t)$ do indutor se $i(0) = -1$ A.

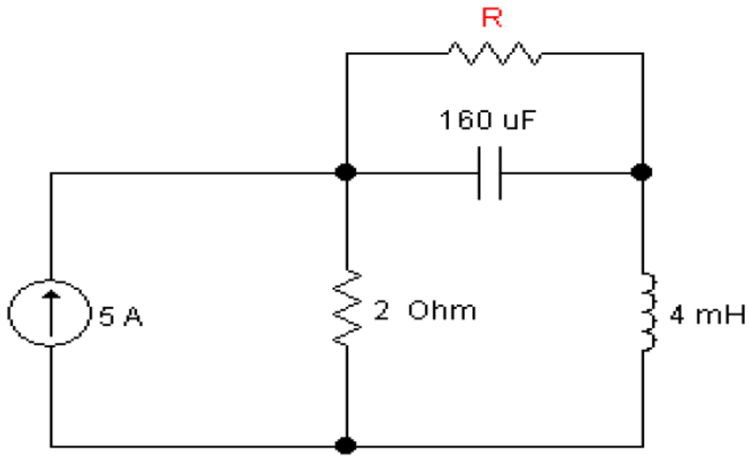
$$v_{L(t)} = (4 + 10\cos 2t)\mathrm{V}$$

19) Calcule v_c, i_L e a energia armazenada no capacitor e no indutor do circuito abaixo em condições cc.

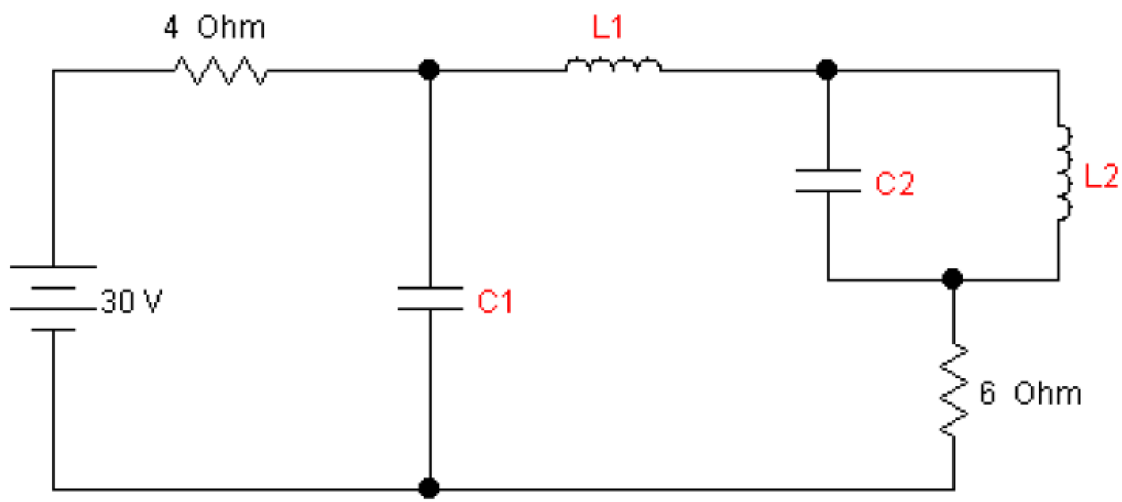


Exercícios

20) Para o circuito abaixo, calcule o valor de **R** que fará com que a energia armazenada no capacitor seja a mesma armazenada no indutor em condições cc.

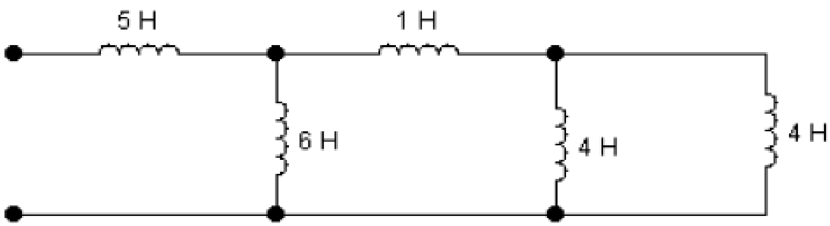


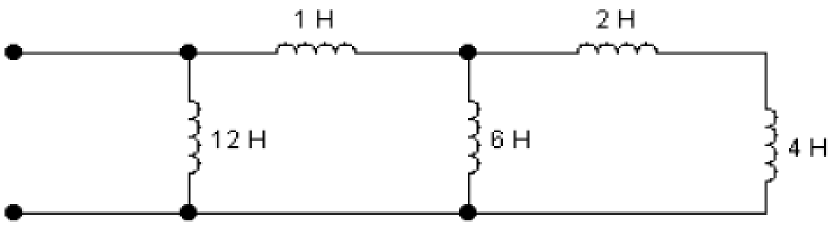
21) Em condições cc, calcule a queda de tensão dos capacitores e a corrente dos indutores no circuito a seguir.

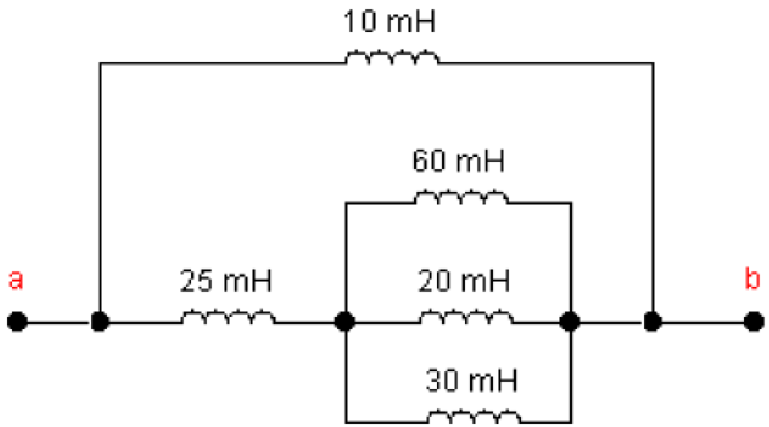


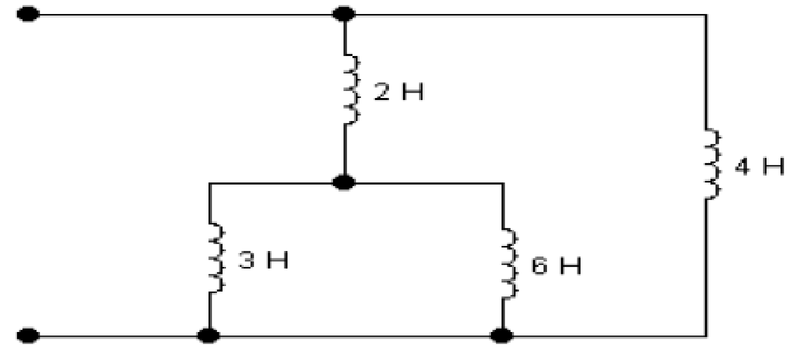
Exercícios

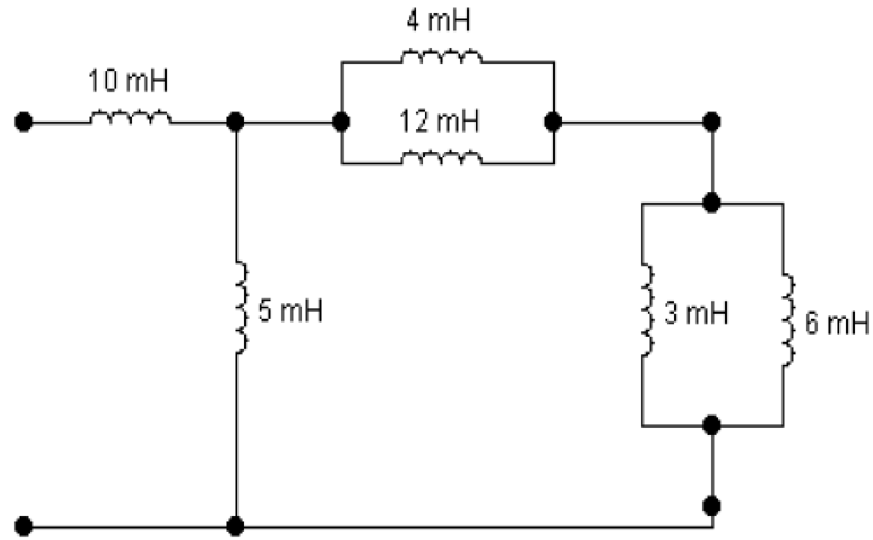
22) Determine a indutância equivalente para cada um dos circuitos mostrados abaixo.











Exercícios

23) No circuito a seguir, sabendo o valor de $i_s(t)$ e $i_1(0)$, determine:

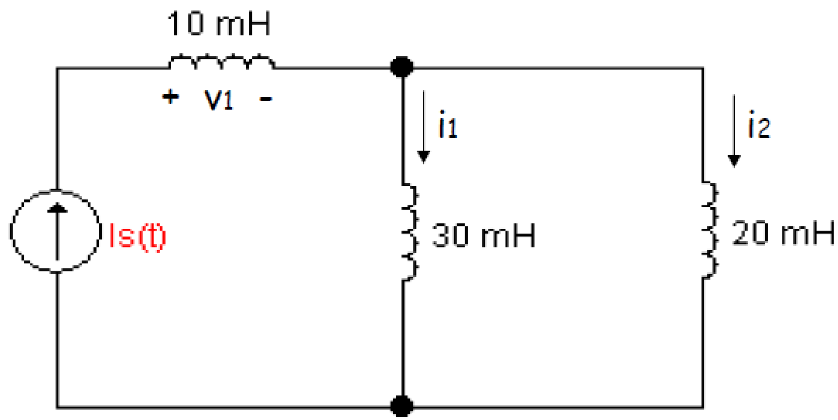
a) $i_2(0)$.

b) $i_1(t)$ e $i_2(t)$ $t > 0$.

c) $v_1(t)$ e $v_2(t)$, $t > 0$.

$$i_{s(t)} = 6e^{-2t} \text{ mA}$$

$$i_{1(0)} = 4 \text{ mA}$$



24) Sendo $v_{s(t)}$ o valor da tensão da fonte, calcule i e v no circuito abaixo, considerando $i(0) = 0$ e $v(0) = 0$.

$$v_{s(t)} = 12 \, sen \, 4t \text{ mV}$$