Universidade Federal de Viçosa
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Departamento de Engenharia Elétrica

# Robótica Industrial

# Cinemática da Velocidade e o Jacobiano

**Prof. Dr. Alexandre S. Brandão**
alexandre.brandao@ufv.br

# Matriz Antissimétrica

- Definição $S^T + S = 0$, i.e., $s_{ij} + s_{ji} = 0$

- $S = \begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix}$

**Considerando as bases unitárias**

$S(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $S(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $S(z) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Propriedades
  - i. É um operador linear, $S(\alpha a + \beta b) = \alpha S(a) + \beta S(b)$
  - ii. Para qualquer vetor $a$ e $p$ pertencentes a $R^3$, $S(a)p = a \times p$
  - iii. Para $R$ ortogonal, $R(a \times b) = Ra \times Rb$
  - iv. Para qualquer matriz $S$ e um vetor $X$, tem-se que $X^T S X = 0$
  - *v.* $RS(a)R^T = S(Ra)$

# Derivada da Matriz de Rotação

- Seja $R(\theta)R(\theta)^{\mathrm{T}} = I$.
- Tomando a derivada com respeito a $\theta$, tem-se $\frac{dR}{d\theta}R(\theta)^T + R(\theta)\frac{dR^T}{d\theta} = 0$.
- Seja $S = \frac{dR}{d\theta}R(\theta)^T$, então $S^T = \left(\frac{dR}{d\theta}R(\theta)^T\right)^T = R(\theta)\frac{dR^T}{d\theta}$.
- Logo, $S + S^T = 0$.

- Exemplo: Se $R = R_{x,\theta}$ representa uma rotação em torno do eixo $x$, determine $S$.

$$S = \frac{dR}{d\theta}R(\theta)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{s}_\theta & -\mathrm{c}_\theta \\ 0 & \mathrm{c}_\theta & -\mathrm{s}_\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{c}_\theta & \mathrm{s}_\theta \\ 0 & -\mathrm{s}_\theta & -\mathrm{c}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = S(x)$$

# Velocidade Angular: Caso Geral

- $S = \frac{dR}{d\theta} R(\theta)^T$, onde $\theta$ varia no tempo

- Seja $\dot{R}(t) = S(t)R(t)$ e $\omega(t)$ a velocidade angular de um referencial em relação ao referencial fixo, então

$$\dot{R}(t) = S\big(\omega(t)\big)R(t)$$

- Logo, se a orientação instantânea do referencial $o_1x_1y_1z_1$ com respeito a $o_0x_0y_0z_0$ é dada por $R_1^0$, então a relação de velocidades entre estes referenciais é dada pela derivada de $R_1^0$.

# Velocidade Angular: Caso Geral

- Exemplo: Dadas as coordenadas de um ponto $p$ representadas no referencial fixo, sua derivada temporal é dada por
  - $p^0 = R_1^0 p^1$
  - $\frac{d}{dt} p^0 = \dot{R}_1^0 p^1 + R_1^0 \dot{p}^1 = S(\omega_{0,1}^0) R_1^0 p^1 = \omega_{0,1}^0 \times R_1^0 p^1 = \omega_{0,1}^0 \times p^0$

- Propriedades
  i. É um operador linear, $S(\alpha a + \beta b) = \alpha S(a) + \beta S(b)$
  ii. Para qualquer vetor $a$ e $p$ pertencentes a $R^3$, $S(a)p = a \times p$
  iii. Para $R$ ortogonal, $R(a \times b) = Ra \times Rb$
  iv. Para qualquer matriz $S$ e um vetor $X$, tem-se que $X^T S X = 0$
  v. $RS(a)R^T = S(Ra)$

# Adição de Velocidade Angular

- Seja $R_2^0(t) = R_1^0(t)R_2^1(t)$
- Tomando sua derivada temporal, tem-se $\dot{R}_2^0 = \dot{R}_1^0 R_2^1 + R_1^0 \dot{R}_2^1$
- Pode-se escrever $\dot{R}_2^0 = S(\omega_{0,2}^0)R_2^0$, onde $\omega_{0,2}^0$ representa a velocidade total do referencial $o_2x_2y_2z_2$ com respeito a $o_0x_0y_0z_0$
- Por sua vez, $\dot{R}_1^0 R_2^1 = S\left(\omega_{0,1}^0\right)R_1^0 R_2^1 = S\left(\omega_{0,1}^0\right)R_2^0$
- E $R_1^0 \dot{R}_2^1 = R_1^0 S\left(\omega_{1,2}^1\right)R_2^1 = R_1^0 S\left(\omega_{1,2}^1\right){R_1^0}^T R_1^0 R_2^1 = S\left(R_1^0 \omega_{1,2}^1\right)R_2^0$
- Logo, $\dot{R}_2^0 = S\left(\omega_{0,1}^0\right)R_2^0 + S\left(R_1^0 \omega_{1,2}^1\right)R_2^0 = S\left(\omega_{0,1}^0 + R_1^0 \omega_{1,2}^1\right)R_2^0$
- Daí, $\omega_{0,2}^0 = \omega_{0,1}^0 + R_1^0 \omega_{1,2}^1 = \omega_{0,1}^0 + \omega_{1,2}^0$

$$\omega_{0,n}^0 = \omega_{0,1}^0 + R_1^0 \omega_{1,2}^1 + R_2^0 \omega_{2,3}^2 + \cdots + R_{n-1}^0 \omega_{n-1,n}^{n-1}$$
$$= \omega_{0,1}^0 + \omega_{1,2}^0 + \omega_{2,3}^0 + \cdots + \omega_{n-1,n}^0$$

- Propriedades

i. $S(\alpha a + \beta b) = \alpha S(a) + \beta S(b)$

ii. $S(a)p = a \times p$

iii. $R(a \times b) = Ra \times Rb$

iv. $X^T S X = 0$

v. $RS(a)R^T = S(Ra)$

# Velocidade Linear de um Ponto

- Seja um ponto p pertencente ao referencial $o_1x_1y_1z_1$ e rotacionado em torno do referencial $o_0x_0y_0z_0$ e transladado em relação a este referencial, tem-se

$$p^0 = R_1^0(t)p^1 + o_1^0$$

- Tomando sua derivada temporal, tem-se

$$\dot{p}^0 = \dot{R}_1^0 p^1 + \dot{o}_1^0 = S\left(\omega_{0,1}^0\right)R_1^0 p^1 + \dot{o}_1^0$$

- Logo

$$\dot{p}^0 = \omega_{0,1}^0 \times p^0 + \dot{o}_1^0$$