AVALIAÇÃO DO ERRO NA REGRA DO TRAPÉZIO

MAT 271 – Cálculo Numérico – PER3/2021/UFV

Professor Amarísio Araújo DMA/UFV

ERRO NA REGRA DO TRAPÉZIO

Como vimos, na Regra do Trapézio, a integral $\int_a^b f(x)dx$ é calculada de forma aproximada a partir de uma aproximação de $f(x)$ pelo seu polinômio interpolador

$$p_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}(x - x_0)$$

sendo $x_0 = a, x_1 = b$, e $h = x_1 - x_0 = b - a$.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b p_1(x)dx.}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}[f(a) + f(b)]}$$

ERRO NA REGRA DO TRAPÉZIO

Seja E_1 o erro desta aproximação $\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b p_1(x)dx$:

$$E_1 = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b p_1(x)dx.$$

$$E_1 = \int_a^b (f(x) - p_1(x))dx.$$

ERRO NA REGRA DO TRAPÉZIO

Como visto na Teoria de Interpolação Polinomial:

Supondo que f'' exista e seja contínua em $[x_0, x_1]$, para cada $x \in [x_0, x_1]$, existe um $\xi \in (x_0, x_1)$ tal que:

$$f(x) - p_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)(x - x_1)$$

Logo:

$$E_1 = \int_a^b (f(x) - p_1(x))dx = \frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b (x - x_0)(x - x_1)dx$$

ERRO NA REGRA DO TRAPÉZIO

$$\int_a^b (x - x_0)(x - x_1)dx = \int_a^b (x - a)(x - b)dx = \int_a^b [x^2 - (a + b)x + ab]dx$$

$$\int_a^b [x^2 - (a + b)x + ab]dx = -\frac{(b - a)^3}{6} = -\frac{h^3}{6}$$

$$\boxed{E_1 = -\frac{h^3}{12} f''(\xi)}$$

ERRO ABSOLUTO NA REGRA DO TRAPÉZIO

Considerando o erro absoluto na aproximação, temos:

$$|E_1| = \left| -\frac{h^3}{12} f''(\xi) \right| \quad = \left| -\frac{h^3}{12} \right| |f''(\xi)| \quad = \frac{h^3}{12} |f''(\xi)|$$

Como $|f''(\xi)| \leq max\{|f''(x)|, x \in [x_0, x_1]\}$, temos, então, que:

$$|E_1| \leq \frac{h^3}{12} max\{|f''(x)|, x \in [x_0, x_1]\}$$

O valor $\frac{h^3}{12} max\{|f''(x)|, x \in [x_0, x_1]\}$ é um LIMITANTE SUPERIOR PARA O ERRO na Regra do Trapézio (Caso simples).

ERRO NA REGRA DO TRAPÉZIO GENERALIZADA

Como vimos, na Regra do Trapézio Generalizada, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i], i = 1, \ldots, n$ de mesmo comprimento $h = \frac{b-a}{n}$, sendo:

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, \ldots, x_n = x_{n-1} + h = b.$$

Daí, aplicamos o caso simples da Regra a cada integral no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, obtendo:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \right) \cong \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \right)$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2} [f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \ldots . + f(x_{n-1})) + f(x_n)]}$$

ERRO NA REGRA DO TRAPÉZIO GENERALIZADA

Então, o erro E na Regra do Trapézio Generalizada é obtido somando-se os erros na Regra do Trapézio (Caso Simples) aplicada em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, que é

$E_i = -\frac{h^3}{12} f''(\xi)$. Assim: $E = -n\frac{h^3}{12} f''(\xi)$

Como $h = \frac{b-a}{n}$, tem-se que $n = \frac{b-a}{h}$ e, portanto: $E = -\frac{h^2}{12} f''(\xi)(b-a)$

Logo:

$$\boxed{|E| \leq \frac{h^2}{12}(b-a)max\{|f''(x)|, x \in [x_0, x_n]\}}$$

$\frac{h^2}{12}(b-a)max\{|f''(x)|, x \in [x_0, x_n]\}$ é um LIMITANTE SUPERIOR PARA O ERRO na Regra do Trapézio Generalizada.

REGRA DO TRAPÉZIO

REGRA DO TRAPÉZIO SIMPLES $n = 1$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)]}$$

$$|E_1| \leq \boxed{\frac{h^3}{12} max\{|f''(x)|, x \in [a,b]\}}$$

LIMITANTE SUPERIOR PARA O ERRO

REGRA DO TRAPÉZIO GENERALIZADA $n \geq 2$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}[f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \ldots . + f(x_{n-1})) + f(x_n)]}$$

$$|E| \leq \boxed{\frac{h^2}{12}(b-a) max\{|f''(x)|, x \in [a,b]\}}$$

LIMITANTE SUPERIOR PARA O ERRO

EXEMPLO

Vamos aplicar a Regra do Trapézio Generalizada, com $n = 2$ e $n = 4$, para calcular de forma aproximada a integral $\int_1^4 \sqrt{x}dx$ e obter um limitante superior para o erro em cada caso.

Temos: $f(x) = \sqrt{x}; a = 1, b = 4$.

EXEMPLO

Caso $n = 2$: Neste caso, $h = \frac{4-1}{2} = 1.5$, e temos: $x_0 = 1$, $x_1 = 2.5$ e $x_2 = 4$.

$$\int_1^4 \sqrt{x}dx \cong \frac{1.5}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2)] = 0.75[f(1) + 2f(2.5) + f(4)] = 4.6217$$

Calculando um limitante superior para o erro: $f(x) = \sqrt{x}$; $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$; $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$;

$$|E| \leq \frac{h^2}{12}(b-a)max\{|f''(x)|, x \in [a,b]\}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4(\sqrt{x})^3}; \quad |f''(x)| = \left|-\frac{1}{4(\sqrt{x})^3}\right| = \frac{1}{4(\sqrt{x})^3};$$

Como $|f''(x)|$ é decrescente em $[1,4]$, $max\{|f''(x)|, x \in [a,b]\} = |f''(1)| = 0.25$.

$$|E| \leq \frac{(1.5)^2}{12} \times 3 \times 0.25 = 0.1406$$

$$\boxed{|E| \leq 0.1406}$$

EXEMPLO

Caso $n = 4$:

Neste caso, $h = \frac{4-1}{4} = 0.75$, e temos: $x_0 = 1$, $x_1 = 1.75$ e $x_2 = 2.5$, $x_3 = 3.25$ e $x_4 = 4$.

$$\int_1^4 \sqrt{x}dx \cong \frac{h}{2}\left[f(x_0) \ + 2\big(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\big) + f(x_4)\right]$$

$$\int_1^4 \sqrt{x}dx \cong \frac{0.75}{2}\left[f(1) \ + 2\big(f(1.75) + f(2.5) + f(3.25)\big) + f(4)\right]$$

$$\int_1^4 \sqrt{x}dx \cong 0.375\left[1 + 2\left(\sqrt{1.75} + \sqrt{2.5} + \sqrt{3.25}\right) + 2\right] = 4.6551$$

$$|E| \leq \frac{(0.75)^2}{12} \times 3 \times 0.25 = 0.0352$$

$$\boxed{|E| \leq 0.0352}$$

DETERMINANDO O NÚMERO DE SUBINTERVALOS QUE GARANTA UMA DADA PRECISÃO PARA O ERRO ABSOLUTO NA REGRA DO TRAPÉZIO

Ao usar a Regra do Trapézio Generalizada para resolver a integral $\int_a^b f(x)dx$, com hipóteses adequadas para a função f, obtivemos uma majoração para o erro absoluto $|E|$ cometido na aproximação, dada por:

$|E| \leq \frac{h^2}{12}(b-a)max\{|f''(x)|, x \in [a,b]\}$, sendo $h = \frac{b-a}{n}$.

Logo, para que o erro absoluto $|E|$ seja menor que um dado $\varepsilon > 0$, basta que

$$\frac{h^2}{12}(b-a)max\{|f''(x)|, x \in [a,b]\} < \varepsilon,$$

pois, assim, por transitividade, teremos $|E| < \varepsilon$.

DETERMINANDO O NÚMERO DE SUBINTERVALOS QUE GARANTA UMA DADA PRECISÃO PARA O ERRO ABSOLUTO NA REGRA DO TRAPÉZIO

Consideremos, então a inequação $\frac{h^2}{12}(b-a)max\{|f''(x)|, x \in [a,b]\} < \varepsilon$.

Como $h = \frac{b-a}{n}$, temos: $\frac{(b-a)^3}{12n^2}max\{|f''(x)|, x \in [a,b]\} < \varepsilon$

$$\Longrightarrow \quad n^2 > \frac{(b-a)^3}{12\varepsilon}max\{|f''(x)|, x \in [a,b]\}$$

$$\Longrightarrow \quad n > \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12\varepsilon}max\{|f''(x)|, x \in [a,b]\}}$$

$$x^2 > a \Leftrightarrow x^2 - a > 0$$

$a \geq 0, x^2 - a > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{a}$ ou $x < -\sqrt{a}$

$$x > 0 \Longrightarrow x > \sqrt{a}$$

DETERMINANDO O NÚMERO MÍNIMO DE SUBINTERVALOS QUE GARANTA UMA DADA PRECISÃO PARA O ERRO ABSOLUTO NA REGRA DO TRAPÉZIO

Portanto, ao aplicar a Regra do Trapézio para resolver a integral $\int_a^b f(x)dx$, para garantir que o erro absoluto cometido na aproximação seja menor que um dado $\varepsilon > 0$, o número n de subintervalos a ser considerado deve satisfazer a seguinte desigualdade:

$$\boxed{n > \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12\varepsilon} max\{|f''(x)|, x \in [a,b]\}}}$$

Assim, o menor natural n tal que $n > \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12\varepsilon} max\{|f''(x)|, x \in [a,b]\}}$ é um número de subintervalos que nos garante que, ao aplicar a Regra do Trapézio para resolver a integral $\int_a^b f(x)dx$, o erro absoluto cometido na aproximação seja menor que um dado $\varepsilon > 0$.

EXEMPLO

Vamos encontrar o número de subintervalos que garanta que o erro absoluto ao se calcular de forma aproximada a integral $\int_1^4 \sqrt{x}dx$ pela Regra do Trapézio seja menor que $\varepsilon = 0.001 = 10^{-3}$.

$$n > \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12\varepsilon} max\{|f''(x)|, x \in [a,b]\}}$$

$$a = 1, b = 4 \qquad f(x) = \sqrt{x}; \qquad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}; \qquad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2};$$

Como já vimos no exemplo anterior: $max\{|f''(x)|, x \in [a,b]\} = |f''(1)| = 0.25$

$$\Rightarrow n > \sqrt{\frac{(4-1)^3}{12 \times 0.001} \times 0.25} \qquad \Rightarrow n > 23.717 \qquad \Rightarrow n \geq 24$$

Portanto, com $n = 24$ subintervalos, há garantia de que o erro absoluto seja menor que 0.001