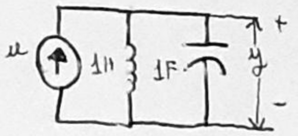
Weritran F. de O. Alves - 96708

5.1 A rede mostrada na Fig é BIBO estável? Se não, encontre uma entrada que excitará uma saída ilimitada.

A função de transferência do sistema é



$$\hat{g}(s) = \frac{s \cdot \frac{1}{s}}{s + \frac{1}{s}} = \frac{s}{s^2+1}$$

Se $u(t) = \text{sen}(t)$, então $\hat{y}(s) = \hat{g}(s)\,\hat{u}(s) = \frac{s}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \frac{s}{(s^2+1)^2}$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{y}(s)\} = 0.5\,t\,\text{sen}\,t \Rightarrow$ não é limitada

Portanto, a rede não é BIBO estável.

5.3 Um sistema com resposta ao impulso $g(t) = \frac{1}{t+1}$ é BIBO estável? E $g(t) = t e^{-t}$ para $t \geq 0$?

Como $\int_0^{\infty} \left|\frac{1}{t+1}\right| dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{t+1}\,dt = \ln(t+1) = \infty$, o sistema 1 não é BIBO estável.

Como $\int_0^{\infty} |t e^{-t}|\,dt = \int_0^{\infty} t e^{-t}\,dt = (-t e^{-t} - e^{-t})\Big|_0^{\infty} = 1 < +\infty$, o sistema 2 é BIBO estável.

5.4 Um sistema com função de transferência $\hat{g}(s) = \frac{e^{-2s}}{s+1}$ é BIBO estável?

$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s} \cdot \frac{1}{s+1}\right\} = e^{-(t-2)}$, para $t \geq 2$. Portanto, a resposta ao impulso do sistema é $\int_0^{\infty} |g(t)|\,dt = \int_2^{\infty} e^{-(t-2)}\,dt = 1 < +\infty$, e dessa forma o sistema é BIBO estável.

5.6 Considere um sistema com função de transferência $\hat{g}(s) = \frac{(s-2)}{s+1}$. Quais são estados estacionários das respostas excitadas por $u(t) = 3$, para $t \geq 0$, e por $u(t) = \sin(2t)$, para $t \geq 0$?

A resposta ao impulso do sistema é $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{s+1}\right\} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-3}{s+1}\right\} = \delta(t) - 3e^{-t}, t \geq 0$

$$\int_0^\infty |g(t)|\, dt = \int_0^\infty |\delta(t) - 3e^{-t}|\, dt \leq \int_0^\infty (|\delta(t)| + |3e^{-t}|)\, dt = 1 + 3 = 4 < +\infty$$

Logo, o sistema é BIBO estável.

Usando o teorema 5.2, pode-se obter as resposta de estado estacionário:

Se $u(t) = 3 \Rightarrow y(t) \rightarrow \hat{g}(0) \cdot 3 = -2 \cdot 3 = -6$

Se $u(t) = \sin(2t) \Rightarrow y(t) \rightarrow |\hat{g}(j2)| \sin(2t + \angle \hat{g}(2j)) = 1{,}26 \sin(2t + 1{,}25)$ //

5.7 Considere $\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad y = [-2 \quad 3]\, \vec{x} - 2u$

O sistema é BIBO estável?

A FT do sistema é $\hat{g}(s) = [-2 \quad 3] \begin{bmatrix} s+1 & -10 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 = [-2 \quad 3] \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} & \frac{10}{(s+1)(s-1)} \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 =$

$$= \frac{4}{s+1} - 2 = \frac{-2s+2}{s+1} \qquad \boxed{\text{Polo} = -1}$$

Como a polo fica dentro do semiplano esquerdo, então o sistema é BIBO estável.

5.9 A equação de estado do Problema 5.7 é marginalmente estável? Assintoticamente estável?

Polinômio característico $\Rightarrow \Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda+1 & -10 \\ 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)$

O autovalor 1 tem parte real positiva, portanto a equação não é marginalmente estável nem assintoticamente estável.

5.10) A equação de estado homogênea $\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}$ é marginalmente estável? Assintoticamente estável?

Polinômio característico: $\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2(\lambda+1)$

Polinômio mínimo: $\psi(\lambda) = \lambda(\lambda+1)$

Autovalores: 0, 0, -1

O autovalor 0 é uma raiz simples do mínimo, portanto, a equação é marginalmente estável.

O sistema não é assintoticamente estável porque a matriz tem zero autovalores.

5.11) A equação de estado homogêneo $\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}$ é ~~margi~~ marginalmente estável? Assintoticamente estável?

$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2(\lambda+1)$

(PM)

Autovalores: 0, 0, -1

Polinômio mínimo: $\psi(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)$

O autovalor 0 é uma raiz repetida do (PM) $\psi(\lambda)$, então a equação não é marginalmente estável, nem assintoticamente estável.

5.14) Use o teorema 5.5 para mostrar que todos os autovalores de $\vec{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$ tem parte real negativa.

$\boxed{\vec{N} = -\vec{I}}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\vec{A}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix}}_{\vec{M}} + \underbrace{\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix}}_{\vec{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix}}_{\vec{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\vec{N}}$$

$$\begin{cases} -0.5\,m_{12} - 0.5\,m_{12} = -1 \Rightarrow \boxed{m_{12} = 1} \\ m_{12} - m_{22} + m_{12} - m_{22} = -1 \Rightarrow \boxed{m_{22} = 1.5} \\ -0.5\,m_{22} + m_{11} - m_{12} = 0 \Rightarrow \boxed{m_{11} = 1.75} \end{cases}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1.75 & 1 \\ 1 & 1.5 \end{bmatrix} \quad \det(M) = \frac{7}{4} \times \frac{3}{2} - 1 \times 1 = \frac{21}{8} - 1 = \frac{13}{8} > 0$$

Logo, M é definida positiva.

Portanto, todos os autovalores de $\vec{A}$ tem parte real negativa.