INTEGRAÇÃO NUMÉRICA:

REGRA 1/3 DE SIMPSON

MAT 271 – Cálculo Numérico – PER3/2021/UFV

Professor Amarísio Araújo DMA/UFV

RESOLVER DE FORMA APROXIMADA UMA INTEGRAL DEFINIDADA

Consideremos que f seja uma função integrável no intervalo $[a, b]$.

Vamos aprender, aqui, mais uma técnica para calcular, de forma aproximada, a integral definida

$$\int_a^b f(x)dx\,.$$

Trata-se da Regra 1/3 de Simpson, baseada na aproximação de $f(x)$ por um polinômio interpolador $p_2(x)$, de grau ≤ 2, no intervalo $[a, b]$, de modo que:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b p_2(x)dx\,.$$

REGRA 1/3 DE SIMPSON

Vamos obter um polinômio interpolador $p_2(x)$ para $f(x)$ no intervalo $[a, b]$.

Para tal, dividimos o intervalo $[a, b]$ em dois subintervalos $[x_0, x_1]$ e $[x_1, x_2]$ de mesmo comprimento $h = \frac{b-a}{2}$, sendo $x_0 = a$, $x_1 = a + h$ e $x_2 = b$.

Usando interpolação de Newton, por exemplo:

$$p_2(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(x - x_0) + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1),$$

onde $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$.

REGRA 1/3 DE SIMPSON

Resolvendo a integral $\int_a^b p_2(x)dx$:

$$\int_a^b \left[y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(x - x_0) + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1)\right] dx =$$

$$= \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Temos, então, a Regra 1/3 de Simpson (Caso Simples):

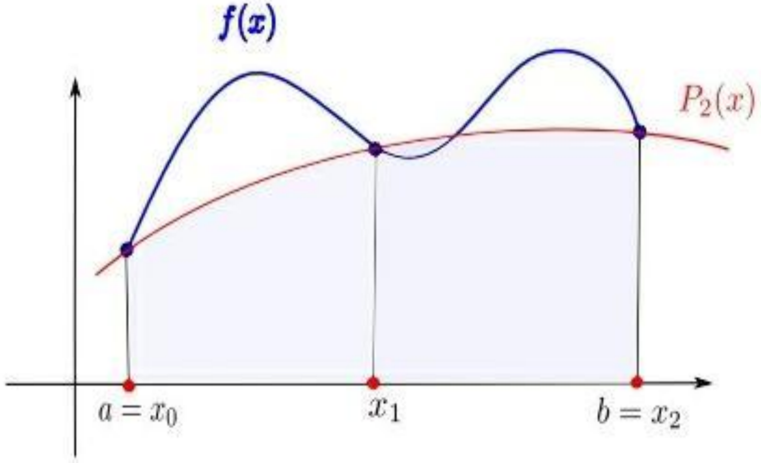
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]}$$

($h = \frac{b-a}{2}$; $x_0 = a$, $x_1 = a + h$ e $x_2 = b$)

REGRA 1/3 DE SIMPSON (CASO SIMPLES)

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

$$f(x) > 0$$



A ÁREA SOB O GRÁFICO DE f NO INTERVALO $[a, b]$ É APROXIMADA

PELA ÁREA SOB O GRÁFICO DO POLINÔMIO INTERPOLADOR $p_2(x)$.

EXEMPLO 1

Vamos aplicar a Regra 1/3 de Simpson para resolver de forma aproximada a integral:

$$\int_0^1 e^{-x} dx\,.$$

Temos: $f(x) = e^{-x}; a = 0, b = 1.$ Assim: $h = \frac{1-0}{2} = 0.5; x_0 = 0, x_1 = 0.5$ e $x_2 = 1.$

Aplicando a Regra 1/3 de Simpson: $\int_0^1 e^{-x} dx \cong \frac{h}{3}[f(x_0) \ + 4f(x_1) + f(x_2)]$

$$\int_0^1 e^{-x} dx \cong \frac{0.5}{3}[f(0) \ + 4f(0.5) + f(1)] = \frac{0.5}{3}[1 + 4e^{-0.5} + e^{-1}] = 0.6323337$$

$$\boxed{\int_0^1 e^{-x} dx \cong 0.6323337}$$

EXEMPLO 1

COMPARANDO

EXATO

$$\int_0^1 e^{-x}dx \cong 0.6321206$$

1/3 DE SIMPSON (SIMPLES)

$$\int_0^1 e^{-x}dx \cong 0.6323337$$

TRAPÉZIO (SIMPLES)

$$\int_0^1 e^{-x}dx \cong 0.6839397$$

TRAPÉZIO (GENERALIZADA $n = 2$)

$$\int_0^1 e^{-x}dx \cong 0.6452352$$

TRAPÉZIO (GENERALIZADA $n = 4$)

$$\int_0^1 e^{-x}dx \cong 0.6354309$$

REGRA 1/3 DE SIMPSON GENERALIZADA

Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i], i = 1,2, \dots, n$ (n par), de mesmo comprimento $h = \frac{b-a}{n}$, sendo:

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, \dots, x_n = x_{n-1} + h = b.$$

Como f é integrável em $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx\,.$$

REGRA 1/3 DE SIMPSON GENERALIZADA

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

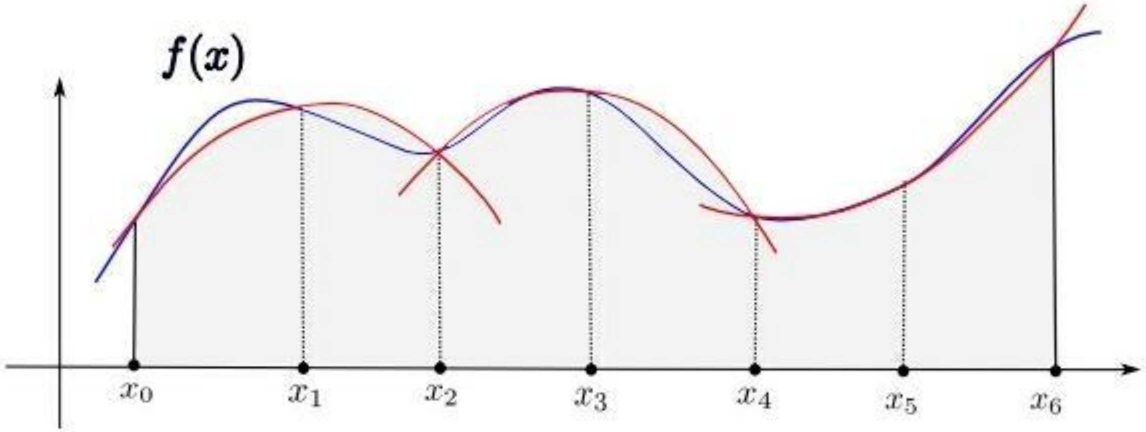
Aplicando a Regra 1/3 de Simpson (Caso Simples) a cada integral do lado direito, que é uma integral de $f(x)$ num intervalo $[x_{i-2}, x_i], i = 2,4, \dots, n$, temos:

$$\int_{x_{i-2}}^{x_i} f(x)dx \cong \frac{h}{3}[f(x_{i-2}) + 4f(x_{i-1}) + f(x_i)],, i = 2,4, \dots, n.$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{\substack{i=2 \\ i\ par}}^{n} \frac{h}{3}[f(x_{i-2}) + 4f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

REGRA 1/3 DE SIMPSON GENERALIZADA

ILUSTRANDO: $n = 6$



O CASO SIMPLES É APLICADO A CADA PAR DE INTERVALOS, $[x_{i-2}, x_{i-1}], [x_{i-1}, x_i], \ i = 2,4, \dots, n.$

POR ISTO O NÚMERO n DE SUBINTERVALOS DEVE SER PAR!

REGRA 1/3 DE SIMPSON GENERALIZADA

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \cong \frac{h}{3}[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]$$

$$\vdots$$

$$\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{h}{3}[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{i\ \text{ímpar}} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i\ \text{par}\\ i\neq 0,n}} f(x_i) + f(x_n)\right]}$$

REGRA 1/3 DE SIMPSON GENERALIZADA

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}[f(x_0) \ + 4(f(x_1) + f(x_3) + \cdots . + f(x_{n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \cdots . + f(x_{n-2})) + f(x_n)]}$$

$n \geq 4, n$ PAR

REGRA 1/3 DE SIMPSON

REGRA 1/3 DE SIMPSON GENERALIZADA: $n \geq 4, n$ PAR

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}[f(x_0) \ + 4(f(x_1) + f(x_3) + \cdots. + f(x_{n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \cdots. + f(x_{n-2})) + f(x_n)]$$

REGRA 1/3 DE SIMPSON SIMPLES: $n = 2$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}[f(x_0) \ + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

EXEMPLO 2

Vamos aplicar a Regra 1/3 de Simpson Generalizada, com $n = 4$, para resolver de forma aproximada a mesma integral do exemplo 1: $\int_0^1 e^{-x}dx$.

Temos: $f(x) = e^{-x}$; $a = 0$, $b = 1$; $h = \frac{1-0}{4} = 0.25$; $x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 0.75$ e $x_4 = 1$.

$$\int_0^1 e^{-x}dx \cong \frac{0.25}{3}\left[f(x_0) \ + 4\big(f(x_1) + f(x_3)\big) + 2f(x_2) + f(x_4)\right]$$

$$\int_0^1 e^{-x}dx \cong \frac{0.25}{3}\left[f(0) \ + 4\big(f(0.25) + f(0.75)\big) + 2f(0.5) + f(1)\right]$$

$$\int_0^1 e^{-x}dx \cong \frac{0.25}{3}[1 \ + 4(e^{-0.25} + e^{-0.75}) + 2e^{-0.5} + e^{-1}] = 0.6321342$$

COMPARANDO

VALOR EXATO DA INTEGRAL: $\int_0^1 e^{-x}dx = 0.6321206$

VALORES APROXIMADOS DA INTEGRAL COM A REGRA DO TRAPÉZIO:

$(n = 1)$: $\int_0^1 e^{-x}dx \cong 0.6839397$

$(n = 2)$: $\int_0^1 e^{-x}dx \cong 0.6452352$

$(n = 4)$: $\int_0^1 e^{-x}dx \cong 0.6354309$

VALORES APROXIMADOS DA INTEGRAL COM A REGRA 1/3 DE SIMPSON:

$(n = 2)$: $\int_0^1 e^{-x}dx \cong 0.6323337$

$(n = 4)$: $\int_0^1 e^{-x}dx \cong 0.6321342$

À medida em que aumentamos o número n de subintervalos, a aproximação melhora.