4. Equações básicas na forma integral para um volume de controle

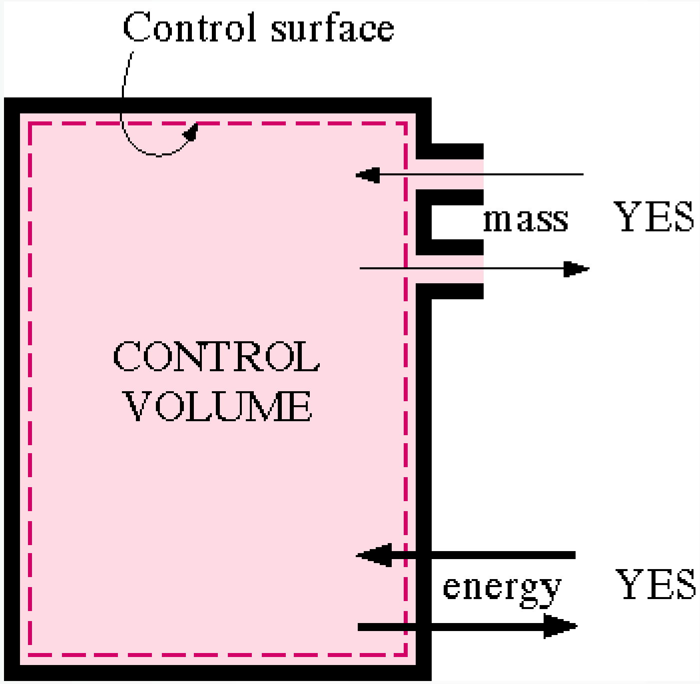
4. Equações básicas na forma integral para um volume de controle

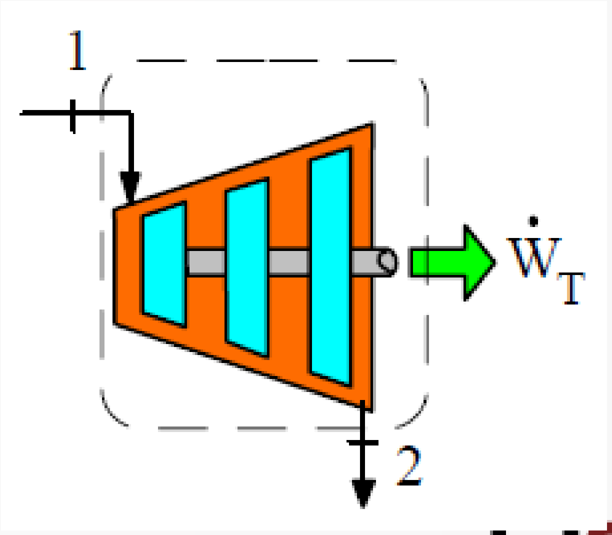
- ✓ Estudaremos os fluidos em movimentos;
- ✓ Usaremos a definição de Volume de Controle.

O que é um volume de controle ?

VOLUME DE CONTROLE – Volume imaginário ou real através do qual ocorre escoamento de massa para dentro ou para fora do objeto em estudo (também chamado sistema aberto).

SUPERFÍCIE DE CONTROLE (SC) – Superficie que delimita o volume de controle. Massa, calor, trabalho e quantidade de movimento podem atravessar a S.C.





4. Equações básicas na forma integral para um volume de controle

Por que não fazer a análise em um Sistema ?

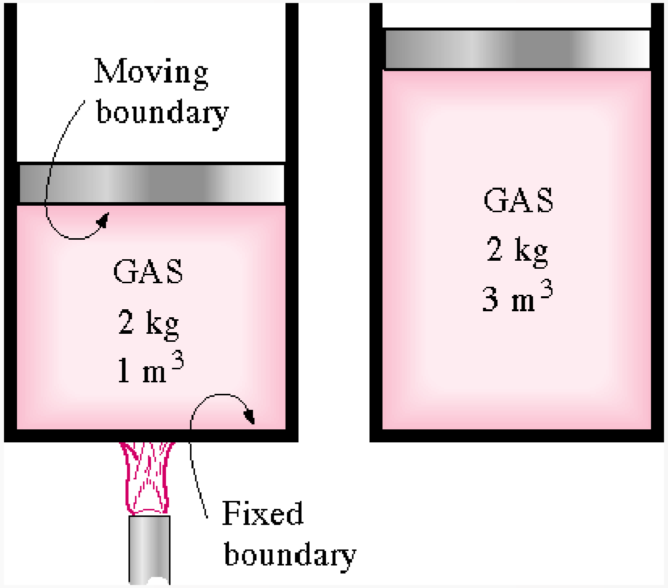
Por que é difícil identificar e seguir a mesma massa de fluido em todos os instantes e porque não estamos interessados no movimento de uma massa de fluido, mas sim no efeito do movimento global do fluido sobre algum dispositivo ou estrutura (ex.: efeito das forças de arrasto e de sustentação sobre a asa de um avião, vazão de um fluido dentro de uma tubulação, etc).

Leis básicas para um Sistema

Conservação da massa

$$\left.\frac{dM}{dt}\right|_{SISTEMA} = 0$$

$$dm = \rho \, d\forall$$



$$M_{SISTEMA} = \int_{SISTEMA} dm = \int_{VOLUME} \rho \, d\forall$$

Segunda Lei de Newton

A soma de todas as forças externas agindo sobre um sistema é igual à taxa de variação da quantidade de movimento linear.

$$\vec{F} = \left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right|_{SISTEMA}$$

$$\vec{P}_{SISTEMA} = \int_{M(SISTEMA)} \vec{V}\, dm = \int_{\forall(SISTEMA)} \vec{V}.\rho.d\forall$$

Primeira Lei da Termodinâmica

$$\dot{Q} - \dot{W} = \left.\frac{dE}{dt}\right|_{SISTEMA}$$

✓ A taxa de transferência de calor é positiva quando calor é adicionado ao sistema pela sua vizinhança.

✓ A taxa de trabalho é positiva quando trabalho é realizado pelo sistema sobre sua vizinhança.

A energia total do sistema (E) é dado por:

$$E_{SISTEMA} = \int_{M(sistema)} e.dm = \int_{\forall(sistema)} e.\rho.d\forall$$

$$e = u + \frac{V^2}{2} + g.z$$

UFV

Como converter as equações acima aplicadas a sistema para aplicações em volumes de controle?

Seja N uma propriedade extensiva do sistema (quantidade de massa, ou movimento linear, ou energia).

Seja η uma propriedade intensiva correspondente (propriedade extensiva por unidade de massa).

De uma maneira genérica podemos escrever:

$$N_{SISTEMA} = \int_{M(sistema)} \eta . dm = \int_{\forall(sistema)} \eta . \rho . d\forall$$

Se N = M então η = 1, logo

$$M_{SISTEMA} = \int_{M(sistema)} dm = \int_{\forall(sistema)} \rho . d\forall$$

$$N_{SISTEMA} = \int_{M(sistema)} \eta . dm = \int_{\forall(sistema)} \eta . \rho . d\forall$$

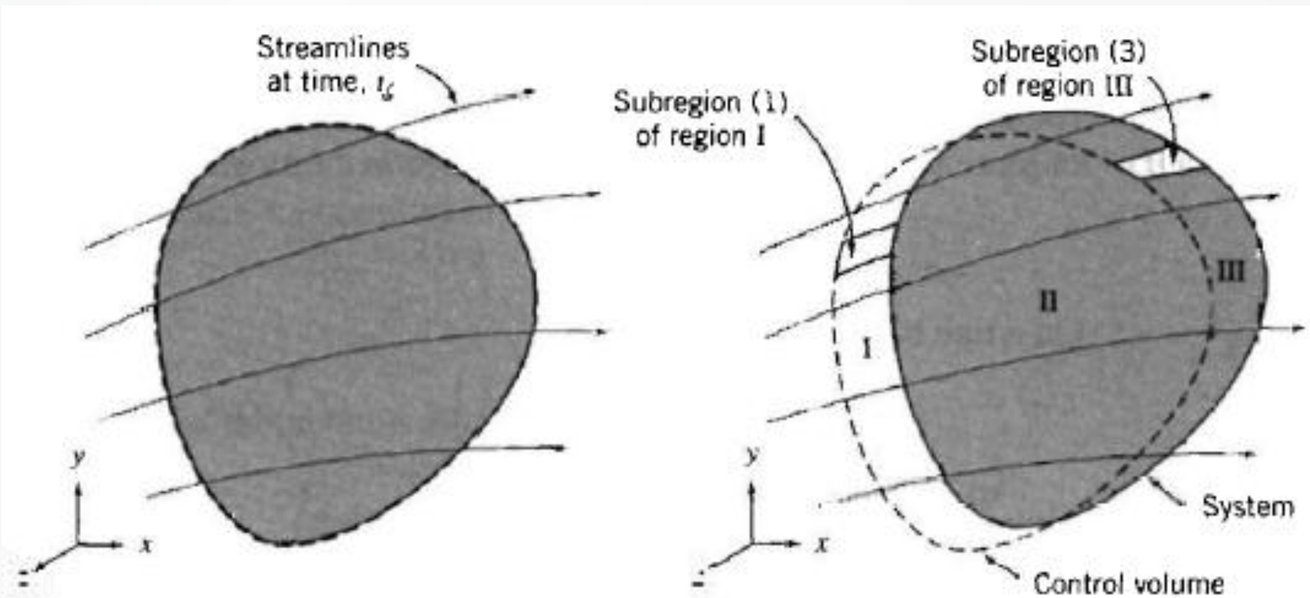
Se N = E então η = e, logo

$$E_{SISTEMA} = \int_{M(sistema)} e . dm = \int_{\forall(sistema)} e . \rho . d\forall$$

Se N = **P** então η = **V**, logo

$$\vec{P}_{SISTEMA} = \int_{M(SISTEMA)} \vec{V} \, dm = \int_{\forall(SISTEMA)} \vec{V} . \rho . d\forall$$

Imagine um VC e um sistema que possuem num dado instante a mesma quantidade de matéria e que o sistema esteja se deslocando, passando pelo volume de controle. Neste instante (t_o) ambos coincidem. Isto é como uma quantidade de fluido estivesse escoando pelo VC, o qual está fixo no espaço relativo às coordenadas xyz. Chamamos a atenção novamente para o fato de que neste momento o sistema coincide com o VC. Após um tempo infinitesimal Δt o sistema com aquela quantidade de massa terá se deslocado em relação ao VC, estando numa outra posição no instante $t_o + \Delta t$.



(a) Time, t_0 (b) Time, $t_0 + \Delta t$

UFV

Queremos estabelecer um relação entre a taxa de variação de qualquer propriedade extensiva arbitrária N do sistema, com quantidades associadas com o volume de controle.

Então vamos trabalhar com a derivada, que é uma taxa de variação.

Se quisermos conhecer a taxa de variação num intervalo de tempo pequeno basta fazer $\Delta t \rightarrow 0$. Neste caso o VC coincidirá com o sistema e todas as relações aplicadas ao sistema serão válidas para o VC, ou seja, aquilo que está acontencendo dentro do sistema estará também acontecendo dentro do VC, pois no limite, quando $\Delta t \rightarrow 0$, o sistema e o VC ocupam o mesmo volume e tem as mesmas fronteiras.

Demonstra-se, portanto, que:

$$\left.\frac{dN}{dt}\right|_{SISTEMA} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\eta\,\rho\,d\forall + \int_{SC}\eta\,\rho\,\vec{V}.d\vec{A}$$

Teorema de transporte de Reynolds

Significados dos termos da equação básica:

$\left.\frac{dN}{dt}\right|_{SISTEMA}$ Representa a taxa de variação de qualquer propriedade extensiva (massa, energia, etc) arbitrária do sistema.

$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\eta\rho d\forall$ Representa a taxa de variação da quantidade da propriedade extensiva N dentro do VC.

η – é a propriedade intensiva correspondente a N; η = N por unidade de massa;

ρ.dV – elemento de massa contido no VC.

$\int_{VC} \eta \rho d\forall$ - quantidade total da propriedade extensiva N dentro do VC.

$\int_{SC} \eta \rho \vec{V} . d\vec{A}$ - taxa líquida de fluxo da propriedade extensiva N através da superfície de controle

$\rho \vec{V} . d\vec{A}$ - taxa de fluxo de massa através do elemento de área $d\vec{A}$

$\eta \rho \vec{V} . d\vec{A}$ - taxa de fuxo da propriedade extensiva N através da área $d\vec{A}$

UFV

Equação da conservação da massa (equação da continuidade)

Se a propriedade extensiva N = M e η = 1 então a equação

$$\left.\frac{dN}{dt}\right|_{SISTEMA} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \eta\rho d\forall + \int_{SC} \eta\rho \vec{V}\cdot d\vec{A}$$ torna-se

$$\left.\frac{dM}{dt}\right|_{SISTEMA} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Como num sistema não ocorre variação da massa com o tempo:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V}\cdot d\vec{A} = 0}$$

equação da conservação da massa aplicada a um VC.

UFV

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho d\forall + \int_{SC}\rho \vec{V}.d\vec{A} = 0}$$

Ou seja, a soma da taxa de variação da massa dentro do VC com a taxa líquida de fluxo de massa através da SC é igual a zero.

Podemos ainda escrever que a taxa de aumento de massa no VC deve-se a variação da taxa líquida de massa através da SC.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho d\forall = -\int_{SC}\rho \vec{V}.d\vec{A}$$

Atenção :

Se escomento incompressível:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} d\forall + \rho \int_{SC} \vec{V} . d\vec{A} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \forall + \int_{SC} \vec{V} . d\vec{A} = 0$$

Se o VC é indeformável, V = constante (não varia com o tempo)

$$\int_{SC} \vec{\mathrm{V}} . \mathrm{d}\vec{\mathrm{A}} = 0$$

Equação da quantidade de movimento para um volume de controle inercial (estacionário)

Seja a propriedade extensiva N = **P** e η = **V** então a equação

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{system}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{CV}} \eta\, \rho\, d\forall + \int_{\text{CS}} \eta\, \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

torna-se

$$\left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{\text{system}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{CV}} \vec{V}\, \rho\, d\forall + \int_{\text{CS}} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Sabemos que as forças que atuam sobre um sistema são as forças de corpo $\mathbf{F}_B$ e as forças de superfície $\mathbf{F}_S$,que são as mesmas que atuam no VC quando o sistema e o VC coincidem em t_0.

$$\vec{F} = \left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right|_{\text{SISTEMA}} = \left.\vec{F}_s + \vec{F}_B\right|_{\text{sobre o volume de controle}}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{CV}} \vec{V}\rho\, d\forall + \int_{\text{CS}} \vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Ou seja:

A soma das forças de superfície e de campo sobre um VC é igual a soma da taxa de variação da quantidade de movimento dentro do VC, mais o fluxo líquido de quantidade de movimento pela superfície de controle

Como a quantidade de movimento é uma grandeza vetorial, suas componentes escalares são:

$$F_x = F_{S_x} + F_{B_x} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{CV}} u\,\rho\,d\forall + \int_{\mathrm{CS}} u\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$F_y = F_{S_y} + F_{B_y} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{CV}} v\,\rho\,d\forall + \int_{\mathrm{CS}} v\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$F_z = F_{S_z} + F_{B_z} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{CV}} w\,\rho\,d\forall + \int_{\mathrm{CS}} w\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Primeira Lei da Termodinâmica Aplicada a Volume de Controle

$$\dot{Q} - \dot{W} = \left.\frac{dE}{dt}\right|_{SISTEMA} \qquad (1)$$

Se a propriedade extensiva N = E e η = e então a equação

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{system} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \eta\,\rho\,d\forall + \int_{CS} \eta\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Torna-se:

$$\left.\frac{dE}{dt}\right)_{system} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} e\;\rho\,d\forall + \int_{CS} e\;\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad (2)$$

Fazendo 1 = 2, tem-se:

UFV

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} e \ \rho \, d\forall + \int_{CS} e \ \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

onde $$e = u + \frac{V^2}{2} + g.z$$ representa a energia por unidade de massa

e $$\dot{W} = \dot{W}_{eixo} + \dot{W}_{normal} + \dot{W}_{cisalhante} + \dot{W}_{outros}$$

Para uma formulação mais abrangente, no caso de ocorrer variação de pressão no fluido entre a entrada e saída no VC, deve-se considerar o trabalho realizado por pv (trabalho de fluxo ou de escoamento). A energia total passa então a:

$$e = u + pv + \frac{V^2}{2} + g.z$$

UFV

Onde u + pv = h (entalpia do sistema).

Logo, a formulação geral da primeira lei aplicada a volume de controle é dada por:

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{\text{shear}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} e\,\rho\, d\forall + \int_{CS}\left(u + pv + \frac{V^2}{2} + gz\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Obs.: Na maioria dos casos o trabalho cisalhante é nulo, uma vez que a tensão cisalhante atua num plano normal a velocidade do escoamento.

Em que termo da equação acima está incluído o trabalho realizado por tensões normais na superfície de controle?

Exercícios capítulo 4

7 ed	6 ed	7 ed	6 ed
12	12	35	26
14	15	37	28
15	14	38	29
16	16	40	32
17	-	42	33
18	-	43	35
20	-	44	36
21	18	45	-
22	17	-	-
23	-	61	51
24	-	62	52
25	-	67	-
26	-	68	55
27	-	72	58
28	19	198	183
29	20	200	185
30	21	202	186
31	23	203	188
34	25	205	189

Itens excluídos:

Análise de volume de controle diferencial.

Itens 4.5, 4.6, 4.7 e 4.9