UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA – UFV
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – CCE
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA - DEL

Sistemas de Controle II

ELT331

AULA 11 – Critério de Estabilidade de Nyquist

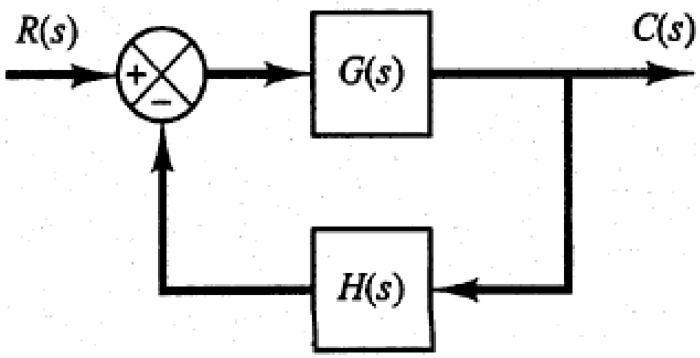
Prof. Tarcísio Pizziolo

11. Critério de Estabilidade de Nyquist

•Determina a estabilidade de um sistema de Malha Fechada com base:

– na Resposta em Frequência de Malha Aberta

– nos polos de Malha Aberta



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Para obter estabilidade, todas as raízes da equação característica $1 + G(s)H(s) = 0$ devem ficar no semiplano esquerdo do plano *s*.

- Polos e Zeros de **G(s)H(s)** (malha aberta) podem estar no semiplano direito do plano s, mas o sistema será estável se os polos de **1+G(s)H(s)** (malha fechada) estiverem no semiplano esquerdo do plano s.

Teorema do Mapeamento

- Uma função **F(s) = Z(s) / P(s)** é uma relação de dois polinômios em s.

- Seja **P** o **nº** de **polos** e **Z** o **nº** de **zeros** de F(s) que estão no interior de um contorno fechado do plano s, considerando-se a multiplicidade dos polos e dos zeros.

- Este contorno não deve passar por nenhum polo ou zero de F(s).

- Este contorno no plano s, é então mapeado no plano F(s) como uma curva fechada.

- Quando um ponto descreve todo o contorno do plano s no **SENTIDO HORÁRIO**, o nº total **N** de **envolvimentos da origem no SENTIDO HORÁRIO**, no plano **F(s)**, é igual a **(Z - P)**.

Então:

N = Z - P

Exemplo 1

Considere, por exemplo, a seguinte função de transferência de malha aberta:

$$G(s)H(s) = \frac{2}{s-1}$$

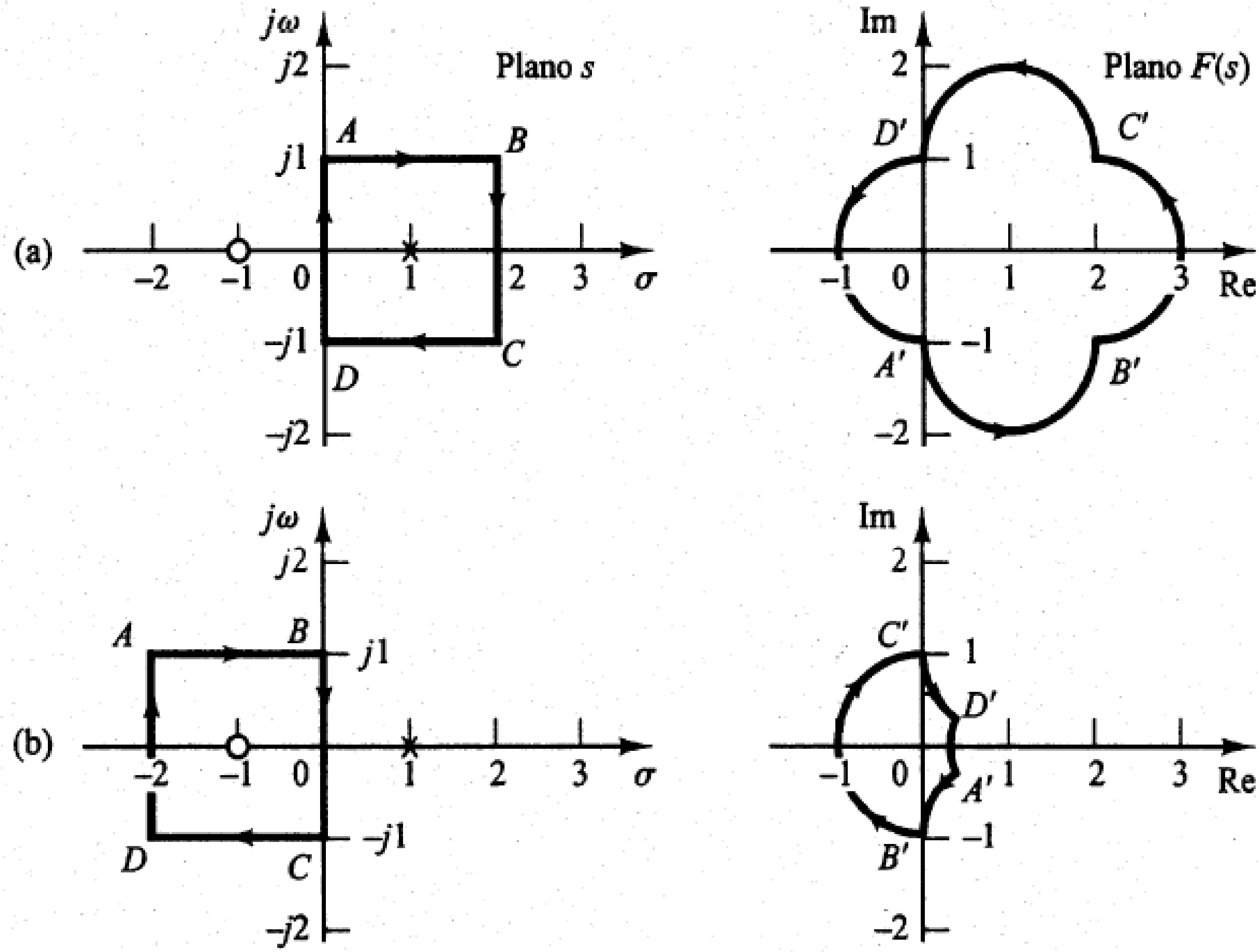
A equação característica é: $F(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{2}{s-1} = \frac{s+1}{s-1} = 0$

A função $F(s)$ é analítica em todos os pontos do plano s, exceto em seus pontos singulares.

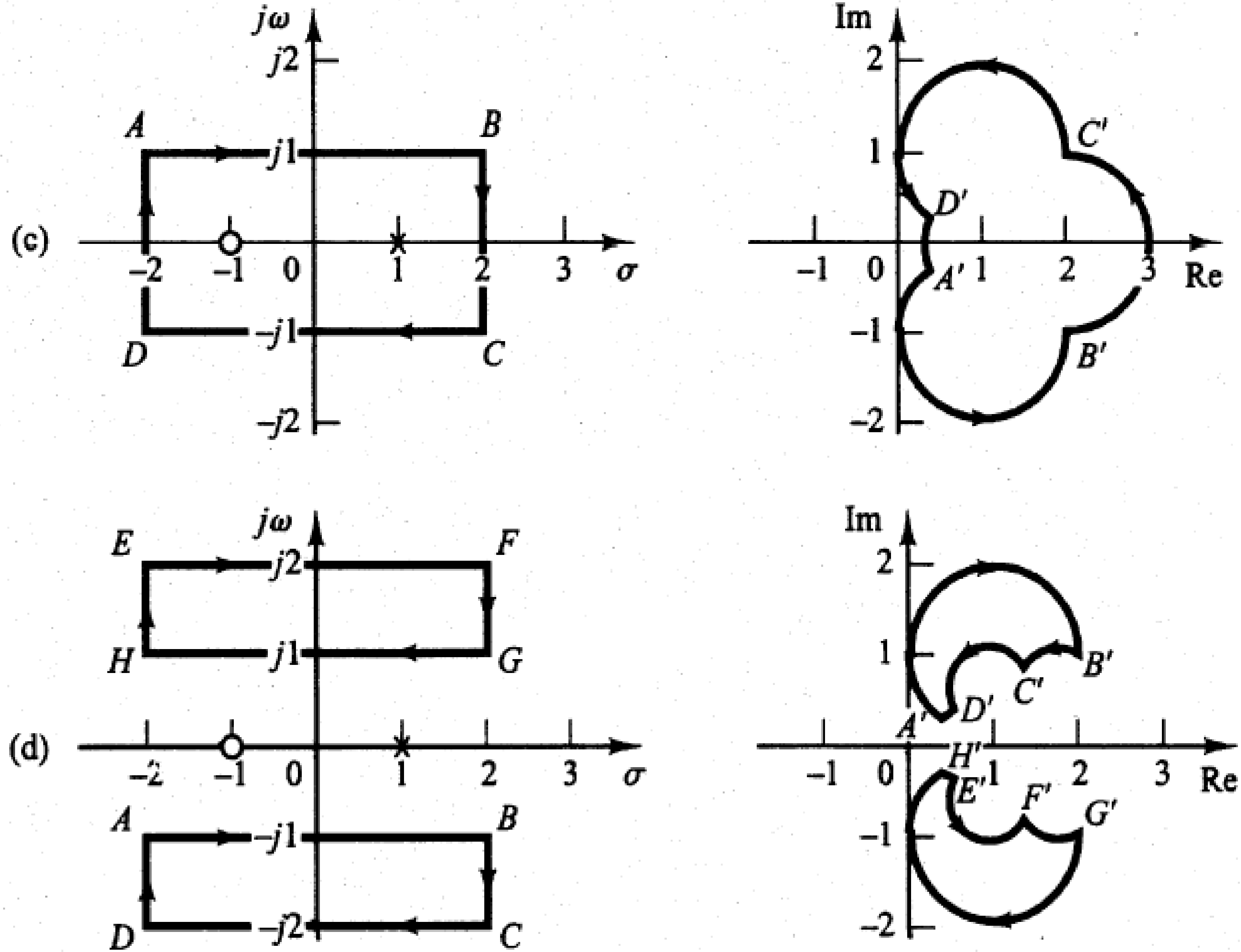
Para cada ponto de analiticidade no plano s corresponde um ponto no plano $F(s)$.

Por exemplo, se $s = 2 + j1$, então $F(s)$ será: $F(2 + j1) = \frac{2 + j1 + 1}{2 + j1 - 1} = 2 - j1$

Exemplo

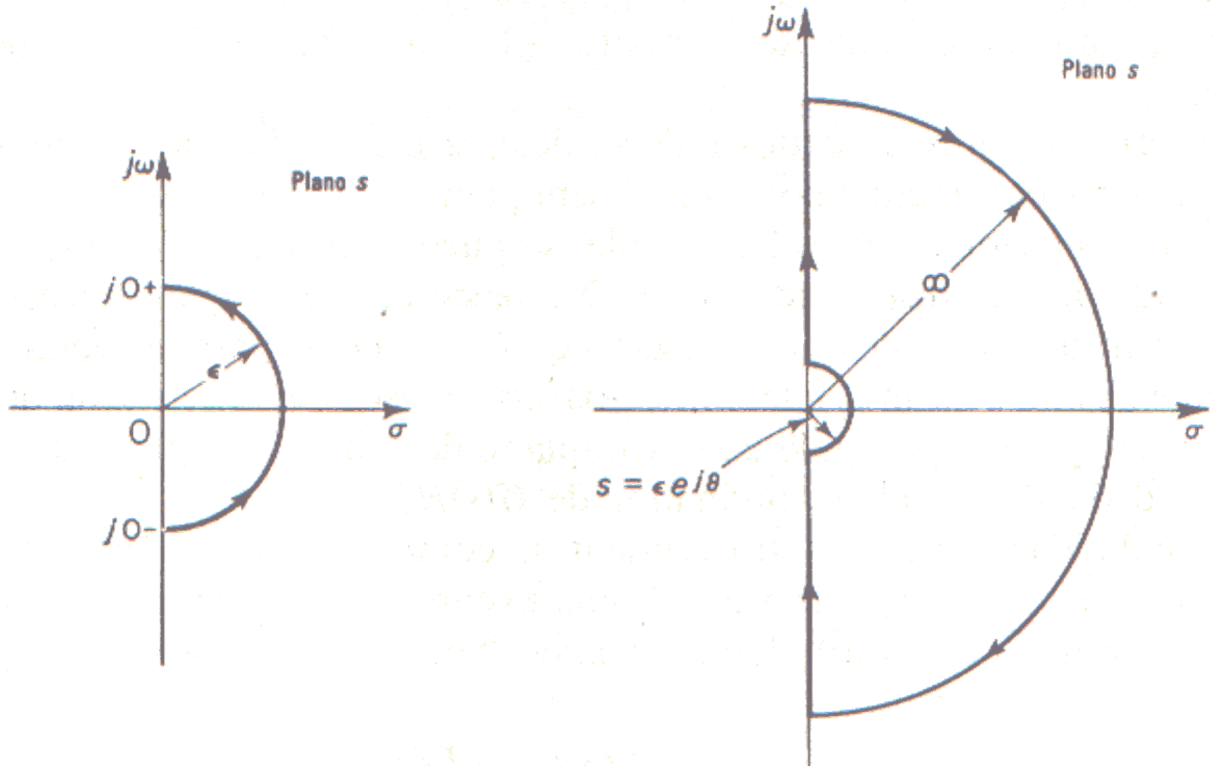


Exemplo



Aplicações do Teorema do Mapeamento

Contorno de Nyquist: Todo o eixo-jw de w → -∞ a w → +∞ é um percurso semicircular de raio infinito no semiplano direito do plano s.



Aplicações do Teorema do Mapeamento

- Se no semiplano direito do plano s **NÃO HOUVER ZEROS** de **1 + G(s)H(s)**, então **NÃO HAVERÁ POLOS DE MALHA FECHADA** e o sistema será **ESTÁVEL**.
- Se **G(s)H(s) tiver polos na origem** a Estabilidade do sistema será **indeterminada**!

Aplicando-se o **Contorno de Nyquist e rearranjando o Teorema do Mapeamento** :

$$Z = N + P$$

Onde:

Z = nº de zeros de [1 + G(s)H(s)]

N = nº de envolvimento da origem (**SENTIDO HORÁRIO**)

P = nº de polos de [1 + G(s)H(s)]

Análise de Estabilidade de Nyquist

Desenvolvido por **Harry Nyquist** (1932) nos Laboratórios Bell.

- O envolvimento da origem pelo gráfico de **F(s) = 1+ G(s)H(s)** ou **F(jw) = 1 + G(jw)H(jw)** (Gráfico 1), equivale ao envolvimento do ponto (-1 + j0) pelo Lugar Geométrico de **G(jw)H(jw)** (Gráfico 2),
- Daí a Estabilidade de um sistema de **Malha Fechada** pode ser analisada examinando-se os envolvimentos do ponto (-1 + j0) pelo Lugar Geométrico de **G(jw)H(jw)** (Malha Aberta).

Gráfico

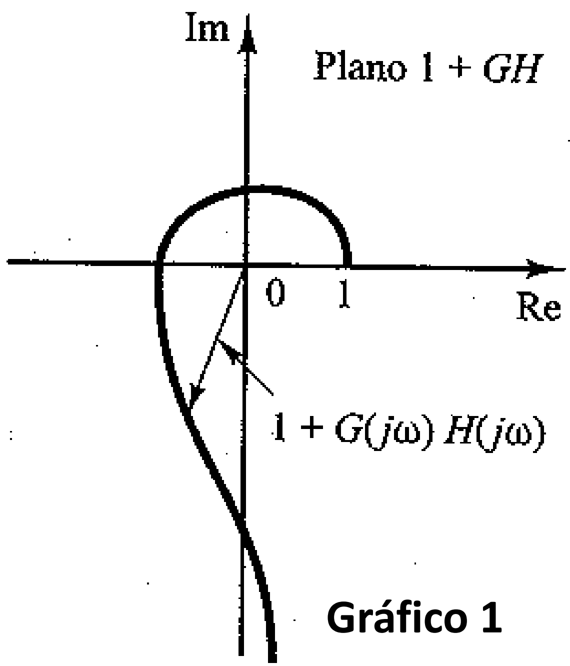


Gráfico 1

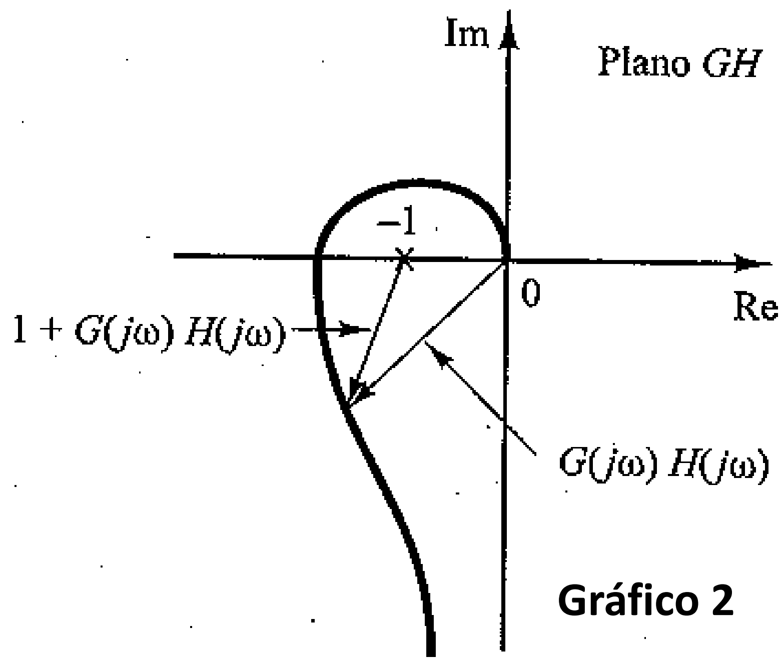


Gráfico 2

Análise de Estabilidade de Nyquist

Conclusão:

$$F(s) = 1 + G(s)H(s)$$

$$Z = N + P$$

Z = número de zeros (**Z é o número de polos da Malha Fechada**) de 1 + G(s)H(s) no semiplano direito do plano s.

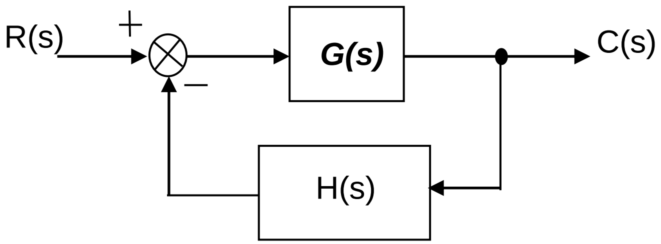
N = número de envolvimento do **ponto - 1** no **SENTIDO HORÁRIO.**

P = número de polos de G(s)H(s) no semiplano direito do plano s.

Se P ≠ 0 , para sistema estável implica Z = 0.

Análise de G(s)H(s) pelo Diagrama de Blocos

Seja o diagrama de blocos:



$$\leftarrow T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

Equação característica $\Rightarrow F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$

$$\mathbf{F(s) = \frac{M(s) \leftarrow Zeros}{N(s) \leftarrow Polos}}$$

Então:

$$\mathbf{T(s) = \frac{G(s)N(s)}{M(s)} \Rightarrow \{ \text{Zeros de } F(s) \text{ são polos de } T(s)}$$

$$\begin{cases} \mathbf{N = \text{número de envolvimento (no sentido horário) do ponto } (-1+j0) \text{ no plano GH.}} \\ \mathbf{Z = \text{números de zeros de } 1+G(s)H(s) \text{ no semiplano direito do plano } \underline{s} \text{ (pólos de malha}} \\ \mathbf{\text{fechada)}} \\ \mathbf{P = \text{número de polos de } G(s)H(s) \text{ no semiplano direito do plano } \underline{s}.} \end{cases}$$

Análise de G(s)H(s) pelo Diagrama de Blocos

Considerando: **N = Z - P**

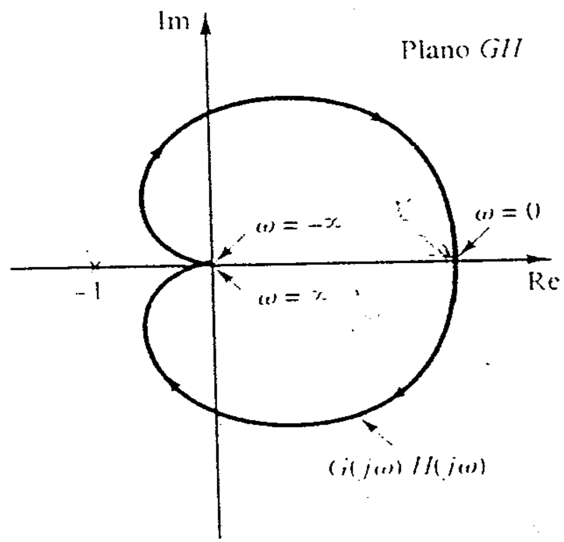
$$
\begin{cases}
\text{se } N = 0 \Rightarrow Z = P \Rightarrow \begin{cases} \text{Se não existe } P \Rightarrow \text{Sistema Estável} \\ \text{Se } \exists\, P \Rightarrow \text{Sistema Instável} \end{cases} \\
\text{se } N > 0 \Rightarrow Z > P \Rightarrow \exists\, Z \Rightarrow \text{Sistema Instável} \\
\text{se } \underbrace{N < 0}_{\text{(sentido anti-horário)}} \Rightarrow \begin{cases} \text{e } N = -P \Rightarrow Z = 0 \Rightarrow \text{Sistema Estável} \\ \text{e } N \neq -P \Rightarrow Z \neq 0 \Rightarrow \text{Sistema Instável} \end{cases}
\end{cases}
$$

Exemplo 2

Seja um sistema de malha fechada cuja função de transferência de malha aberta é dada por:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

Analisar a estabilidade de sistema dado o Diagrama Polar (Nyquist) de G(jw)H(jw) a seguir.



.rama polar de $G(j\omega)H(j\omega)$

<u>Solução</u>

Como G(s)H(s) não possui pólos no semiplano direito do plano ***s*** e o ponto (-1 + j0) não é envolvido pelo lugar geométrico de G(jw)H(jw), esse sistema é ESTÁVEL para quaisquer valores positivos de K, T_1 e T_2.

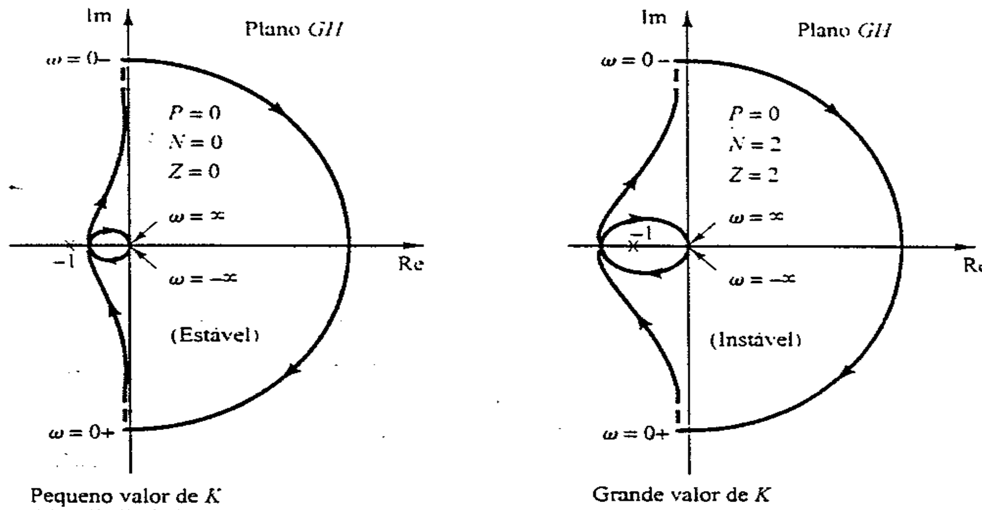
Exemplo 3

Considere um sistema de malha fechada cuja função de transferência de malha aberta é dada por:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

Dado o Diagrama Polar (Nyquist) a seguir com um pequeno valor de K e com um grande valor de K, determine a estabilidade do sistema para os dois casos:

a) o ganho K é pequeno.
b) o ganho K é grande.



Solução

O número de pólos de G(s)H(s) no semiplano direito do plano s é zero. Para que este sistema seja ESTÁVEL é necessário que N = Z = 0 ou que o lugar geométrico de G(jw)H(jw) não envolva o ponto (-1 + j0).

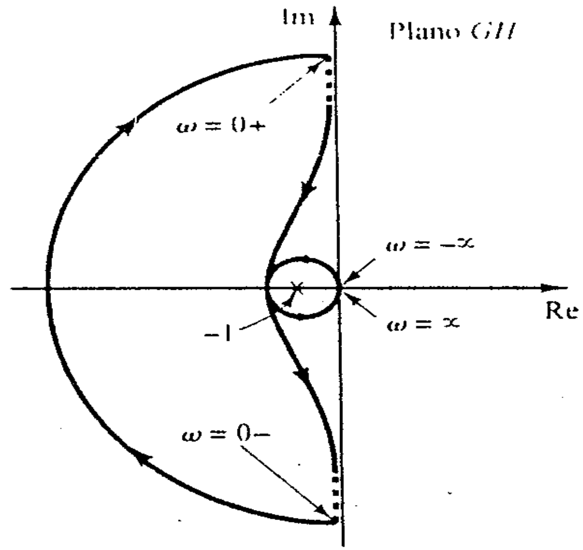
Para valores pequenos de K, não há nenhum envolvimento do ponto (-1 + j0). Portanto o sistema é ESTÁVEL para valores pequenos de K. Para valores elevados de K, o lugar geométrico de G(jw)H(jw) envolve o ponto (-1 + j0) duas vezes no sentido horário. Isto implica que existem dois pólos de malha fechada no semiplano direito do plano s e o sistema é INSTÁVEL.

Exemplo 4

Investigue a estabilidade de um sistema de malha fechada com a seguinte função de transferência de malha aberta:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{s(s-1)} \qquad (K > 1)$$

O Diagrama Polar (Nyquist) de G(jw)H(jw) é apresentado a seguir.



Solução

A função de transferência de malha aberta tem um pólo (s = 1) no semiplano direito do plano *s* ou P = 1. O sistema de malha aberta é INSTÁVEL. O ponto (-1 + j0) é envolvido pelo lugar geométrico G(jw)H(jw) uma vez no sentido anti-horário o que implica em N = -1. Então, Z é encontrado a partir de Z = N + P e vale Z = 0, o que indica que não há zeros de 1 + G(s)H(s) no semiplano direito do plano *s* e o sistema de malha fechada é ESTÁVEL. Este é um dos exemplos em que um sistema de malha aberta é INSTÁVEL e se torna ESTÁVEL quando em malha fechada.

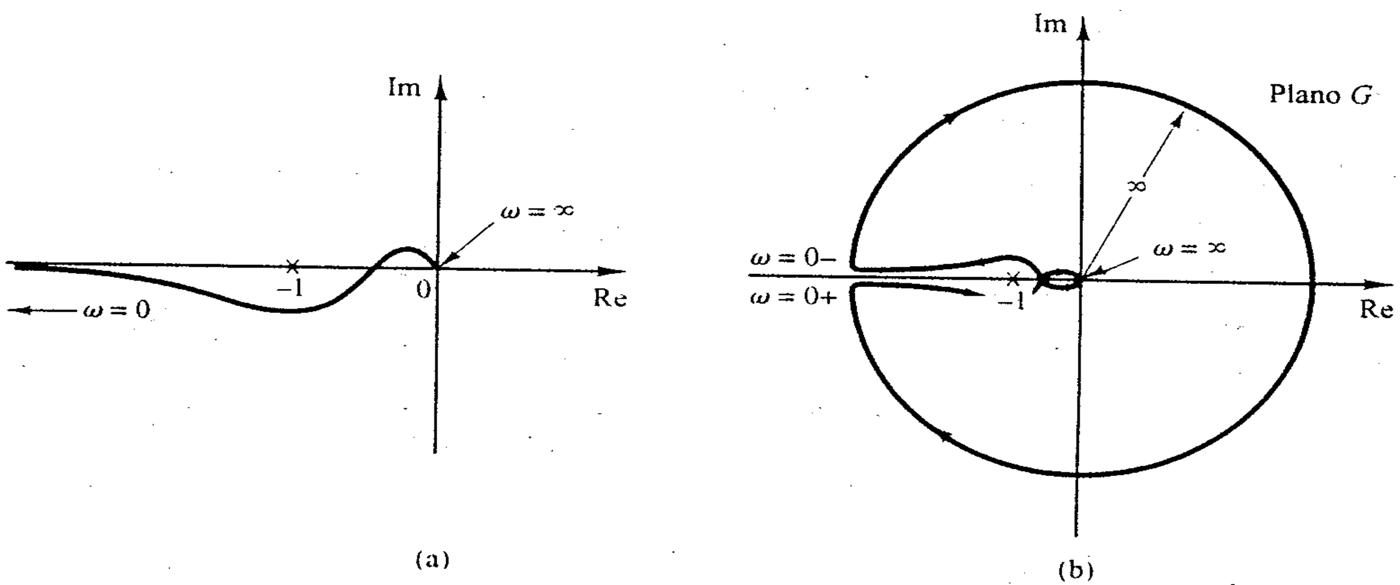
Exemplo 5

O Diagrama de Nyquist de malha aberta de um sistema de controle de malha fechada com realimentação unitária é mostrado na figura abaixo. Supondo-se que o percurso de Nyquist englobe todo o semiplano direito do plano s, responda às seguintes questões:

a) se a função de transferência de malha aberta não possui pólos no semiplano direito do plano s, o sistema de malha fechada é estável?

b) se a função de transferência de malha aberta possui um pólo e nenhum zero no semiplano direito do plano s, o sistema de malha fechada é estável?

c) se a função de transferência de malha aberta possui um zero e nenhum pólo no semiplano direito do plano s, o sistema de malha fechada é estável?



(a) Diagrama de Nyquist; (b) diagrama de Nyquist completo no plano G.

Solução

a) O sistema de malha fechada é ESTÁVEL porque o ponto crítico (-1 + j0) não é envolvido pelo Diagrama de Nyquist. Ou seja, como $P = 0$ e $N = 0$, temos $Z = N + P = 0$.

b) A função de transferência de malha aberta tem um pólo no semiplano direito do plano ***s***. Então, $P = 1$. O sistema de malha aberta é INSTÁVEL. Para que o sistema de malha fechada seja ESTÁVEL, o Diagrama de Nyquist deve envolver o ponto crítico uma vez no sentido anti-horário. Entretanto, o Diagrama de Nyquist não envolve nem 1 vez o ponto (-1 + j0) no sentido anti-horário, daí $N = 0$ implica que $Z = N + P = 1$ e o sistema de malha fechada é INSTÁVEL.

c) Como a função de transferência de malha aberta tem um zero, mas nenhum pólo, no semiplano direito do plano ***s*** tem-se $Z = N + P = 0$. Assim, o sistema de malha fechada é ESTÁVEL.