Universidade Federal de Viçosa

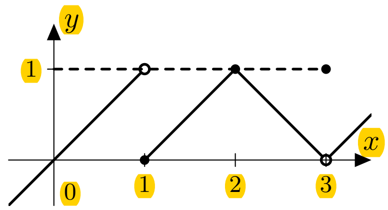
Departamento de Matemática

MAT 141 (Turma 1) – Cálculo Diferencial e Integral I – 2017/II

1^a Lista de Limite e Continuidade

1) Para a função g, cujo gráfico é apresentado abaixo, encontrar os seguintes limites ou explicar porque não existe.

a) $\lim_{x\to 1} g(x)$ b) $\lim_{x\to 2} g(x)$ c) $\lim_{x\to 3} g(x)$



2) Suponha que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to 0} g(x) = -5$. Calcule: $\lim_{x\to 0} \dfrac{2f(x)-g(x)}{(f(x)+7)^{\frac{2}{3}}}$.

3) Calcule os limites:

a) $\lim_{s\to 4} \dfrac{3s^2-8s-16}{2s^2-9s+4}$

b) $\lim_{y\to -2} \dfrac{y^3+8}{y+2}$

c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

d) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{h+1}-1}{h}$

e) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{8-x^2}$

f) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$

g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

h) $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$,

4) Seja f definida por $f(t) = \begin{cases} t+4, & \text{se } t \leq -4, \\ 4-t, & \text{se } t > -4. \end{cases}$.

Faça o esboço do gráfico de f e calcule $\lim_{t\to -4^+} f(t)$, $\lim_{t\to -4^-} f(t)$, $\lim_{t\to -4} f(t)$. Se o limite não existir, justifique.

5) Dada a função f, definida por $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$, calcule $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x)$. O limite $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe? Justifique.

6) Calcule os limites laterais no ponto que não pertence ao domínio de f definida por $f(x) = \dfrac{|3x-2|}{2-3x}$.

7) Determine o valor da constante a para que exista $\lim_{x\to -1} f(x)$, em que $f(x) = \begin{cases} 3x-2, & \text{se } x > -1 \\ 3, & \text{se } x = -1 \\ 5-ax, & \text{se } x < -1 \end{cases}$

8) Resolva os seguintes limites laterais.

a) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{2x+1}{x}$

b) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x-3}{x^2}$

c) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{3}{x^2-x}$

d) $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-3x}{x^2-6x+9}$

e) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{2x+1}{x^2+x}$

f) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{3x-5}{x^2+3x-4}$

g) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{3+x^2}}{x}$

h) $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$

i) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ j) $\lim_{x\to 0^-} \frac{2-4x^3}{5x^2+3x^3}$ k) $\lim_{x\to -4^-} \frac{2}{x^2+3x-4} - \frac{3}{x+4}$

9) Sejam x e y números reais quaisquer.

a) Mostre que $|x+y| \leq |x| + |y|$.

b) Use o item anterior para mostrar que $|x| - |y| \leq |x-y|$

c) Use o item anterior para mostrar que $||x| - |y|| \leq |x-y|$

10) Suponha que $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Mostre que:

a) $\lim_{x\to a} |g(x)| = |M|$

b) Se $M \neq 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|g(x)| > |M|/2$

c) Se $M \neq 0$, então $\lim_{x\to a} 1/g(x) = 1/M$

11) a) Mostre que se $|x-3| < \frac{1}{2}$, então $\frac{1}{|x-2|} < 2$

b) Usando o item (11a), mostre por definição de limite que $\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-2} = 1$.

12) a) Mostre que se $|x+1| < 1$, então $|x-3| < 5$

b) Usando o item (12a), mostre por definição de limite que $\lim_{x\to -1} x^2 - 2x + 3 = 6$.

13) Resolva os seguintes limites no infinito.

a) $\lim_{x\to -\infty} [5 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}]$ e) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3+1}{x^4+2x+3}$ i) $\lim_{x\to +\infty} [x - \sqrt{x^2+1}]$

b) $\lim_{x\to +\infty} [2 - \frac{1}{x}]$ f) $\lim_{x\to -\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{x^2+3}}$ j) $\lim_{x\to +\infty} [\sqrt{x+1} - \sqrt{x+3}]$

c) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x+1}{x+3}$ g) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{\sqrt{x^2+x+1}}$ k) $\lim_{x\to +\infty} (5 - 4x + x^2 - x^5)$

d) $\lim_{x\to +\infty} \frac{5x^4-2x+1}{4x^4+3x+2}$ h) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x^2+3}$ l) $\lim_{x\to +\infty} (x^3 - 2x + 3)$

14) Ache todas a(s) assíntota(s) vertical(is) e horizontal(is) das funções abaixo.

a) $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ b) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ c) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2-4}}$

15) Calcule os seguintes limites (use o Primeiro limite fundamental):

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x}$ c) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$ e) $\lim_{y\to 0} \frac{3y}{\operatorname{sen} 5y}$

b) $\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t}$ d) $\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{tg}^2 x}{x^2}$

16) Calcule os seguintes limites (Use o Segundo Limite Fundamental)

a) $\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$ b) $\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+3}\right)^x$ c) $\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 1}{x}$

17) Verificar se a função f definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2}, & \text{se} \quad x \neq -2, \\ 4, & \text{se} \quad x = -2. \end{cases}$ é contínua em $x = -2$.

18) Seja a função real f definida por $f(x) = \begin{cases} x^2, \ \text{se } x < 1, \\ 4 - 3x, \ \text{se } x \geq 1 \end{cases}$.

a) Esboce o gráfico de f.

b) Calcule $\lim_{x \to 1} f(x)$.

c) Calcule $\lim_{x \to 2} f(x)$.

d) Mostre que f é contínua.

e) Calcule $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$.

f) Calcule $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$.

g) Determine um intervalo $[a, b]$ em que é garantido pelo TVI que f tem pelo menos uma raiz real. Justifique.

19) Determine os intervalos em que f é contínua.

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 4x + 3}$

b) $f(x) = 1 - \operatorname{cossec}(x)$

c) $f(x) = \sqrt{2x+4}$

d) $f(x) = \sinh x$

20) Exiba o gráfico de uma função f definida no intervalo $[-3, 5]$ tal que:

i) $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 2$.

ii) $\lim_{x \to 5^-} f(x) = 4$.

iii) f é descontínua em $x = 3$.

iv) $\lim_{x \to -1} f(x) = \infty$.

v) $f(-2) = 1$

vi) $\nexists \lim_{x \to 1} f(x)$

21) Mostre que não existe $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(1/x)$. Dica: tome $x = \dfrac{2}{(2n+1)\pi}$.

22) Use o teorema do confronto para determinar os limites.

a) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

b) $\lim_{x \to 0} x^4 \cos(\frac{2}{x})$

23) Sabendo-se que $\lim_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \mathbf{ln}\, a$, $0 < a \neq 1$ (Limite Fundamental Logarítmico), calcule os limites:

a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{2x}$

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x}$

c) $\lim_{h \to 0} \dfrac{e^{x+h} - e^x}{h}$

d) $\lim_{x \to 2} \dfrac{5^x - 25}{x - 2}$

24) Seja a função real f definida por $f(x) = x^3 - 4x + 2$. Encontre uma aproximação x_n para uma raiz a de f no intervalo $[0, 1]$ tal que $|f(x_n)| < 0,1$. Dica: divida o intervalo $[0, 1]$ e calcule $f(a_1)$, em que $a_1 = \dfrac{a+b}{2}$. Verifique se $f(a_1).f(b) < 0$ ou $f(a_1).f(a) < 0$. Escolha o novo intervalo que satisfaça as condições do TVI. Repita o procedimento até que $|f(x_n)| < 0,1)$.

25) Sejam f e g lineares tais que $(a, 0)$ pertence aos gráficos de f e de g, $(0, 3)$ pertence ao gráfico de f e $(0, 6)$ ao gráfico de g. Determine $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

26) Seja a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \text{ é racional e } x \neq 0 \\ -x^2 & x \text{ é irracional} \end{cases}$$

Então pode-se afirmar que:

(a) Não existe a tal que $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.

(b) Talvez exista a tal que $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, mas é impossível dizer qual o valor de a sem mais informações.

(c) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe somente se $a = 0$.

(d) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe para infinitos valores de a.

27) Verifique se as afirmações são verdadeiras ou falsas. Se verdadeira, prove. Se falsa, exiba um contra-exemplo.

a) Se $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de a (exceto possivelmente em a) e $\lim_{x \to a} g(x) = L \neq M = \lim_{x \to a} h(x)$, então $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.

b) Se f é uma função qualquer e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, então $\lim_{x \to a} g(x)f(x) = 0$.

c) Se f é uma função qualquer e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, então $\lim_{x \to a} g(x)f(x)$ existe.

d) Se f é uma função limitada em torno de a e $\lim_{x \to a} g(x)$ existe, então $\lim_{x \to a} g(x)f(x)$ existe.

28) Verifique se as afirmações são verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta.

a) Como a medida que x se aproxima de 100, $f(x) = 1/x$ se aproxima de 0, então o limite de $f(x)$ quando x tende a 100 é 0.

b) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que se x_1 está mais perto de a que x_2, então $f(x_1)$ estará mais próximo de L que $f(x_2)$.

c) Suponha que você quer saber se $\lim_{x \to 0} f(x)$. Para isso, você mostrar que $f(x) = 0$ para $x = 0.1, 0.01, 0.001, \ldots$. De fato, você consegue mostrar que para todo $n = 1, 2, \ldots$, $f(\frac{1}{10^n}) = 0$. Então conclui que $\lim_{x \to 0} f(x)$.

29) Mostre por definição que:

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x-1}{x+1} = -1$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 4} x^2 + x - 11 = 9$.

(c) $\displaystyle\lim_{x \to 9} \sqrt{x} = 3$.

(d) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x}{(1-x)^2} = +\infty$.

(e) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1-x)} = -1$

30) Calcule:

(a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+9})$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$

(c) $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x+|x|}{7x-5|x|}$

(d) $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{2x^2-5x-3}{x-1}$

(e) $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{|16-x^2|+1}{(4-x)\sqrt{5-|x-1|}}$

(f) $\displaystyle\lim_{x \to \pi} \frac{1 - \operatorname{sen}(\frac{x}{2})}{\pi - x}$

(g) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}(x)} - \sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}}{x}$

(h) Calcule $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+4}{x-1}\right)^{x+4}$

(i) Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\ x}{x^3-x^2}$

(j) Calcule $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{5^x}{3^x+2^x}$

(k) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x\text{sen}(x)}{1-\cos(x)}$

(l) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-5x+4}{|x-1|}$

(m) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}(x)}{x}$

(n) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}-1}$.

(o) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2\,\text{tg}(x)}{x^2+1}$

(p) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\cos^2(2x)}{3-2x}$

(q) $\lim_{x\to +\infty} \text{arcsen}\left(\dfrac{2x}{1+4x}\right)$

31) Determine as assíntotas ao gráfico das funções definidas por:

(a) $\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^2+1}}$ (b) $\dfrac{x^2+3x-1}{x+1}$ (c) $\dfrac{2x^2-x+3}{x^2-1}$

32) Determine as constantes a e $b \in \mathbb{R}$ para que as funções a seguir sejam contínuas em $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \begin{cases} x\,\text{sen}\,(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} -2\text{sen}\,(x), & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a\text{sen}\,(x)+b, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos(x), & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

33) Mostre que $f(x) = x^3 - 4x + 2$ admite três raízes reais distintas.

34) Determine um intervalo de comprimento 1 que possua pelo menos uma raiz da função h definida por $h(x) = 1 + x\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$.

35) Considere a função $f(x) = x^7 - 5x^4 + 1$. Existe algum ponto x_0 no intervalo $[-1, 0]$ tal que $f(x_0) = -2$? E no intervalo $[0, 1]$?

36) Mostre que $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = 1$.

37) Mostre que dado $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{h\to 0} \dfrac{\text{sen}\,(a+h) - \text{sen}\,(a)}{h} = \cos(a)$.

Resposta de alguns exercícios

1) a) Não existe   b) 1   c) 0

2) $\dfrac{7}{4}$

3) a) $\dfrac{16}{7}$ b) 12   c) $\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{1}{3}$ e) 8   f) $\dfrac{1}{4}$ g) 1   h) $\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$

4) $\lim\limits_{t\to -4^+} f(t) = 8$, $\lim\limits_{t\to -4^-} f(t) = 0$, O limite não existe,pois $\lim\limits_{t\to -4^+} f(t) \neq \lim\limits_{t\to -4^-} f(t)$.

5) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$. Não existe $\lim_{x\to 0} f(x)$

6) $\lim_{x\to 2/3^+} f(x) = -1$ e $\lim_{x\to 2/3^-} f(x) = 1$. Não existe $\lim_{x\to 2/3} f(x)$

7) $a = -10$

8) a) $+\infty$ c) $+\infty$ e) $+\infty$ g) $-\infty$ i) $-\infty$ k) $+\infty$
b) $-\infty$ d) $+\infty$ f) $-\infty$ h) $+\infty$ j) $+\infty$

13) a) 5   c) 2   e) 0   g) 1   i) 0   k) $-\infty$
b) 2   d) $\frac{5}{4}$ f) 0   h) 0   j) 0   l) $+\infty$

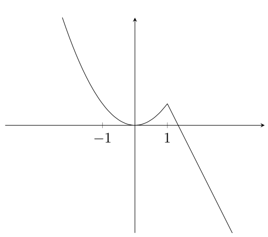
14) a) $y = 2$, $x = 3$ b) $y = 1$, $x = 0$ c) $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$

15) a) $\dfrac{3}{5}$ b) 0   c) 0   d) 2   e) $\dfrac{3}{5}$

16) a) e^3 b) e c) $\ln 3$

17) Não pois $\lim\limits_{x\to -2} f(x) \neq f(-2)$

18) a)



b) 1

c) 2

d) (i) Se $x < 1$, $f(x) = x^2$, então $\forall a < 1$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} x^2 = a^2 = f(a)$. (ii) Se $x > 1$, $f(x) = 3x = 4$ Logo, se $a > 1$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} 3x - 4 = 3a - 4 = f(a)$. (iii) Pelo item (a), f é contínua em $x = 1$. Logo, por (i)–(iii), f é contínua em $\mathbb{R}$.

e) não existe

f) -3

19) a) $\mathbb{R} - \{1, 3\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ c) $[2, \infty)$ d) $\mathbb{R}$

22)

a) 0 b) 0

23) a) 1/2 b) 1 c) e^x d) $25\ln(5)$

24) Aplicando-se sucessivamente o TVI no intervalo $[c,d]$, em que c ou d é atualizado em cada passo do algoritmo, obtém-se em particular, $a = 17/32$ com $f(a) < 0,1$.

30) (a) $\frac{1}{2}$ (d) $-\infty$ (g) 1 (j) $+\infty$ (m) 1 (o) 0
(b) $-\infty$ (e) $\nexists$ (h) e^5 (k) 2 (p) 0
(c) 2 e $\frac{1}{6}$ (f) 0 (i) $-\infty$ (l) -3 (n) $-\infty$ (q) $\pi/6$

31) (a) $y = -x, \quad y = x$
(b) $x = -1, \quad y = x + 2$
(c) $x = \pm 1, \quad y = 2$

32) (a) $a = 0$
(b) $a = -1, b = 1$