INTEGRAÇÃO NUMÉRICA:

RESOLVENDO UMA INTEGRAL DUPLA

MAT 271 – Cálculo Numérico – PER3/2021/UFV

Professor Amarísio Araújo DMA/UFV

RESOLVENDO UMA INTEGRAL DUPLA

Problema: Considerando que f seja uma função real de duas variáveis, integrável na região plana $R = \{(x, y)\epsilon\mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, resolver de forma aproximada a integral:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)dy\, dx.$$

Como visto em um curso de Cálculo III: $\int_a^b \int_c^d f(x, y)dy\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy\right] dx$.

Assim, podemos escolher uma das técnicas numéricas de integração e aplicá-la em cada uma das integrais: primeiro na integral $\int_c^d f(x, y)dy$, que resultará numa $F(x)$, e, em seguida, na integral $\int_a^b F(x)dx$.

RESOLVENDO UMA INTEGRAL DUPLA

Exemplo: Usando a Regra 1/3 de Simpson, com $n = 4$, vamos resolver a integral: $\int_0^2 \int_0^1 \cos(x + y)\, dy\, dx$.

Resolvendo a integral $\int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 \cos(x + y)dy$:

O intervalo $[0,1]$ é subdividido em 4 subintervalos de mesmo comprimento $h = \frac{1-0}{4} = 0.25$.

Temos $y_0 = 0$, $y_1 = 0.25$, $y_2 = 0.5$, $y_3 = 0.75$ e $y_4 = 1$; $f(x,y) = \cos(x + y)$

$$\int_0^1 f(x,y)dy \cong \frac{h}{3}\left[f(x,y_0) + 4\big(f(x,y_1) + f(x,y_3)\big) + 2f(x,y_2) + f(x,y_4)\right]$$

$$\int_0^1 f(x,y)dy \cong \frac{0.25}{3}\left[f(x,0) + 4\big(f(x,0.25) + f(x,0.75)\big) + 2f(x,0.5) + f(x,1)\right]$$

$$\int_0^1 \cos(x+y)dy \cong \underbrace{\frac{0.25}{3}\left[\cos(x) + 4\big(cos(x + 0.25) + cos(x + 0.75)\big) + 2cos(x + 0.5) + cos(x + 1)\right]}_{F(x)}$$

RESOLVENDO UMA INTEGRAL DUPLA

$$\int_0^1 \cos(x+y)dy \cong \frac{0.25}{3}\left[\cos(x) + 4\left(cos(x+0.25) + cos(x+0.75)\right) + 2cos(x+0.5) + \cos(x+1)\right] = F(x)$$

$$\int_0^2 \int_0^1 \cos(x+y)\, dy\, dx = \int_0^2 \left[\int_0^1 \cos(x+y)dy\right] dx \cong \int_0^2 F(x)dx$$

Resolvendo a integral $\int_0^2 F(x)dx$:

O intervalo $[0,2]$ é subdividido em 4 subintervalos de mesmo comprimento $h = \frac{2-0}{4} = 0.5$.

Temos $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1.5$ e $x_4 = 2$;

$$\int_0^2 F(x)dx \cong \frac{h}{3}\left[F(x_0) + 4\left(F(x_1) + F(x_3)\right) + 2F(x_2) + F(x_4)\right]$$

$$\int_0^2 F(x)dx \cong \frac{0.5}{3}\left[F(0) + 4\left(F(0.5) + F(1.5)\right) + 2F(1) + F(2)\right]$$

RESOLVENDO UMA INTEGRAL DUPLA

$$F(x) = \frac{0.25}{3}\left[\cos(x) + 4\big(cos(x+0.25) + cos(x+0.75)\big) + 2cos(x+0.5) + cos(x+1)\right]$$

$$F(0) = \frac{0.25}{3}\left[\cos(0) + 4\big(cos(0.25) + cos(0.75)\big) + 2cos(0.5) + cos(1)\right] = 0.8415$$

$$F(0.5) = \frac{0.25}{3}\left[\cos(0.5) + 4\big(cos(0.75) + cos(1.25)\big) + 2cos(1) + cos(1.5)\right] = 0.5181$$

$$F(1) = \frac{0.25}{3}\left[\cos(1) + 4\big(cos(1.25) + cos(1.75)\big) + 2cos(1.5) + cos(2)\right] = 0.0678$$

$$F(1.5) = \frac{0.25}{3}\left[\cos(1.5) + 4\big(cos(1.75) + cos(2.25)\big) + 2cos(2) + cos(2.5)\right] = -0.3990$$

$$F(2) = \frac{0.25}{3}\left[\cos(2) + 4\big(cos(2.25) + cos(2.75)\big) + 2cos(2.5) + cos(3)\right] = -0.7682$$

$$\int_0^2 F(x)dx \cong \tfrac{0.5}{3}\left[F(0) + 4\big(F(0.5) + F(1.5)\big) + 2F(1) + F(2)\right]$$

$$\int_0^2 F(x)dx \cong \frac{0.5}{3}[0.8415 + 4(0.5181 - 0.3990) + 2(0.0678) - 0.7682] = 0.1142$$

RESOLVENDO UMA INTEGRAL DUPLA

$$\int_0^2 \int_0^1 \cos(x+y)\, dy\, dx \cong \int_0^2 F(x)dx \cong \frac{0.5}{3}[0.8415 + 4(0.5181 - 0.3990) + 2(0.0678) - 0.7682] = 0.1142$$

$$\boxed{\int_0^2 \int_0^1 \cos(x+y)\, dy\, dx \cong 0.1142}$$

Observação: poderíamos ter resolvido primeiro a integral $\int_0^2 \cos(x+y)dx$, que resultaria numa $F(y)$, e, em seguida, resolvido a integral $\int_0^1 F(y)dy$.