**ELT330 – Sistemas de Controle I**
**Prof. Tarcísio Pizziolo**

**Aula 19 – Estabilidade - Critério de Routh**

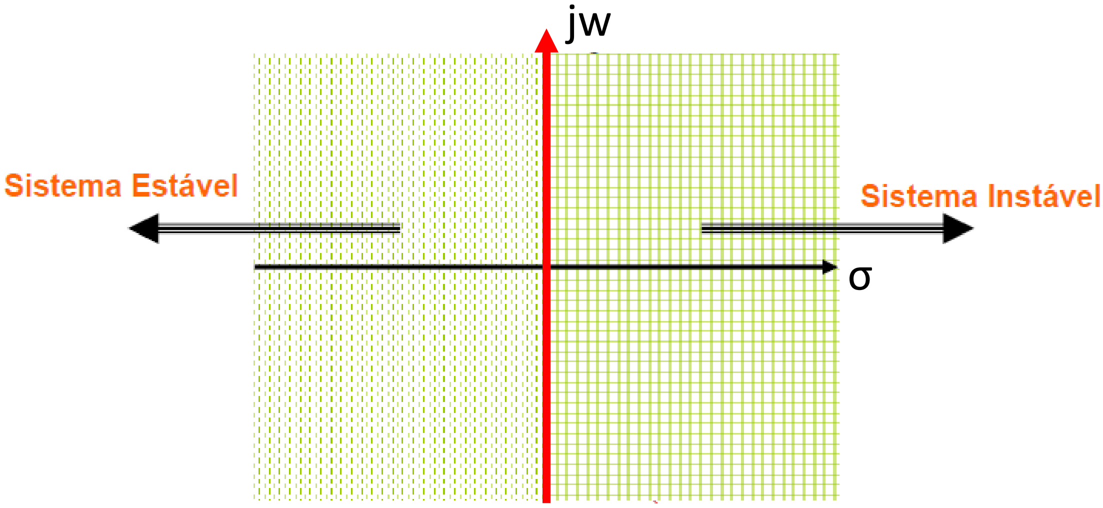
## 1. Definição de Estabilidade

Um sistema linear é estável quando qualquer sinal de entrada de amplitude finita produz sinais de saída também de amplitude finita.

## 2. Teorema da Estabilidade

Um Sistema Linear Invariante no Tempo (SLIT) e de parâmetros concentrados é estável, se e somente se, **nenhum dos polos** de sua função de transferência (ou seja, nenhuma das raízes de sua equação característica) **localize no semiplano direito do plano complexo s**.

Ou seja, todas as raízes da equação característica do sistema tenham parte real negativa.




## 3. Condições de Estabilidade

### 1ª. Condição Necessária

Para que todas as raízes da equação característica do sistema tenham parte real negativa é necessário que todos os coeficientes da mesma tenham o mesmo sinal.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{(m-1)} + \cdots + b_{(m-1)1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{(n-1)} + \cdots + a_{(n-1)} s + a_n}$$

### 2ª. Condição Necessária e Suficiente

A condição necessária e suficiente para que todas as raízes da equação característica tenham parte real negativa é que todos os elementos da primeira coluna da **Matriz de Routh** devem ser positivos.

## 3. Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Para que todas as raízes do polinômio característico tenham parte real negativa requer que todos os coeficientes da equação característica sejam positivos. Se um dos coeficientes for zero ou negativo, então o sistema terá polos localizados fora do semiplano esquerdo.

**Matriz de Routh-Hurwitz**

Seja o polinômio característico,

$$Q(s)= a_0s^n + a_1s^{(n-1)} + a_2s^{(n-2)} + ... + a_{(n-1)}s + a_n$$

Os coeficientes do polinômio característico **Q(s)** são inicialmente dispostos em uma matriz denominada **Matriz de Routh** da seguinte forma,

$$\begin{array}{c} s^n \\ s^{(n-1)} \\ s^{(n-2)} \\ s^{(n-3)} \\ s^{(n-4)} \end{array} \left\|\left[\begin{array}{cccccc} a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \cdots \\ a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & \cdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_1 & d_2 & \cdots. & \cdots. & \cdots & \cdots \end{array}\right]\right.$$

Onde:

$$b_1 = \frac{(a_1a_2 - a_0a_3)}{a_1} \quad b_2 = \frac{(a_1a_4 - a_0a_5)}{a_1} \quad b_3 = \frac{(a_1a_6 - a_0a_7)}{a_1}$$

$$b_4 = \frac{(a_1a_8 - a_0a_9)}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{(b_1a_3 - a_1b_2)}{b_1} \quad c_2 = \frac{(b_1a_5 - a_1b_3)}{b_1} \quad c_3 = \frac{(b_1a_7 - a_1b_4)}{b_1}$$

$$d_1 = \frac{(c_1b_2 - b_1c_2)}{c_1} \quad d_2 = \frac{(c_1b_3 - b_1c_3)}{c_1}$$

....................................................

Quando não houver condições de calcular os termos da **Matriz de Routh** deve-se preenchê-los com elementos nulos, zeros, para completar a Matriz.

**Critério de Routh-Hurwitz**

O Critério de Routh que estabelece uma condição necessária e suficiente para estabilidade diz:

“**Todos os elementos na primeira coluna da Matriz de Routh devem ser positivos. Se houver troca de sinal nos elementos na primeira coluna da Matriz de Routh, o número de vezes de troca de sinal será igual ao número de raízes da equação característica que se localizam no semiplano direito do plano s. Isto ocorrendo o sistema será instável**.”

**Exemplo:** Um sistema de controle possui a seguinte equação característica.

$$Q(s) = 6s^5 + 5s^4 + 4s^3 + 3s^2 + 2s + 1 = 0$$

Este sistema é estável ou instável pelo Critério de Routh-Hurwitz?

A Matriz de Routh é dada por,

$$\begin{array}{c} s^5 \\ s^4 \\ s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \left\| \begin{bmatrix} +6 & 4 & 2 \\ +5 & 3 & 1 \\ +0,4 & 0,8 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ +0,86 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right.$$

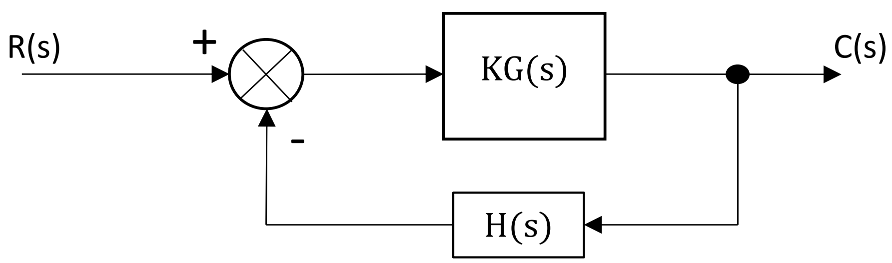
Um elemento da primeira coluna da Matriz de Routh possui sinal negativo (-7), o que caracteriza um **sistema instável**.
Como há duas trocas de sinais na primeira coluna, a equação característica possui 2 polos no semiplano direito do plano s.

**4. Ganho x Estabilidade**

Em um sistema de controle em malha fechada a variação do valor do ganho pode levar o sistema a instabilidade.
Isto ocorre porque a equação característica da função de transferência em malha fechada pode passar a possuir raízes no semiplano direito do plano complexo s.

O exemplo a seguir elucida esta possibilidade de instabilidade em função da variação do valor do ganho do sistema em malha fechada.

Seja o diagrama de blocos dado abaixo.




A função de transferência em malha fechada é dada por,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

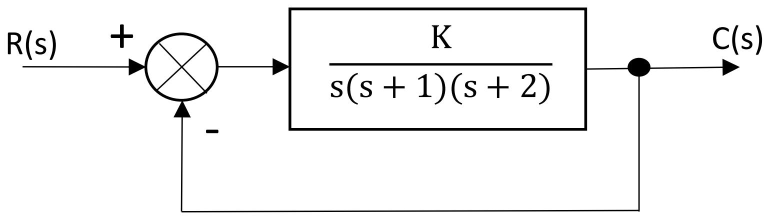
Analisando a equação característica em malha fechada,

$$1 + KG(s)H(s) = 0,$$

o fator ganho K na parcela KG(s)H(s) pode levar a equação a possuir raízes no semiplano direito levando o sistema à instabilidade.

Desta maneira, deve-se determinar os valores do ganho K os quais não instabilizam o sistema em malha fechada. O Critério de Routh pode ser aplicado para determinar esses valores do ganho K.

**Exemplo:** Calcule os valores do ganho K para que o sistema seja estável.




Função de transferência de malha fechada:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{s(s+1)(s+2)}}{1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)}} \Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s+1)(s+2) + K}$$

A equação característica é:

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

A Matriz de Routh é dada por,

$$\begin{array}{c} s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \left[ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & K \\ \frac{(6-K)}{3} & 0 \\ K & 0 \end{array} \right]$$

Para o sistema ser estável os elementos da primeira coluna da Matriz de Routh deverão ser positivos, ou seja, $m_{ij} > 0$. Daí, na terceira e quarta linhas tem-se, respectivamente,

$$\frac{(6-K)}{3} > 0 \Rightarrow K < 6$$

$$K > 0$$

Então, para satisfazer as duas inequações conclui-se que o sistema será estável para:

$$\boxed{0 < K < 6}$$

**Exemplo:** Dada a função de transferência em malha fechada H(s), determine a faixa de K para garantir a estabilidade (Concurso para a Petrobrás**).**

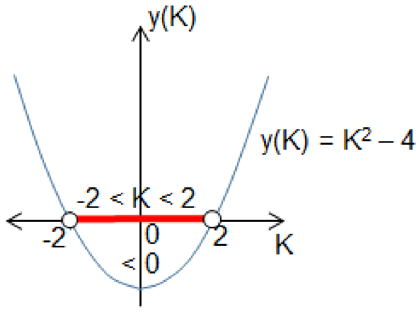
$$H(s) = \frac{s^3 - 4s - 11}{s^5 + s^4 + 4s^3 + 2s^2 + 3s + K - 1}$$

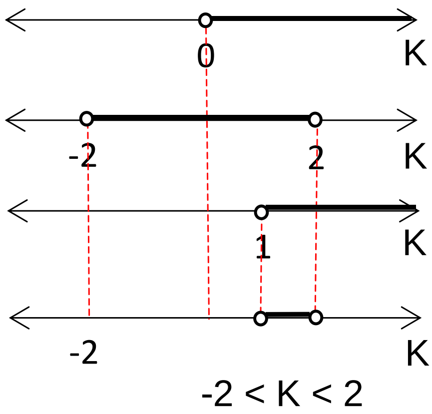
Aplicando a Matriz de Routh,

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & (K-1) \\ 2 & (4-K) & 0 \\ \frac{K}{2} & (K-1) & 0 \\ \frac{(-K^2+4)}{K} & 0 & 0 \\ (K-1) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{K}{2} > 0 \implies \boxed{K > 0}$$

$$\frac{(-K^2+4)}{K} > 0 \implies K^2 - 4 < 0 \implies \boxed{-2 < K < 2}$$




Para o sistema ser estável: $\boxed{1 < K < 2}$