UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA – UFV
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – CCE
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA - DEL

Sistemas de Controle II

ELT331

AULA 12 – Sistemas de Fase Mínima e não Mínima e Erros Estacionários

Prof. Tarcísio Pizziolo

12. Sistemas de Fase Mínima e Não Mínima

Sistemas de Fase Mínima:

A Função de Transferência **NÃO** possui **PÓLOS e/ou ZEROS** no semiplano direito do plano s. Exemplo:

$$G_1(jw) = K\frac{(1 + jwT_1)}{(1 + jwT_2)}$$

Sistemas de Fase Não Mínima:

A Função de Transferência **POSSUI ZEROS** no semiplano direito do plano s. Exemplo:

$$G_2(jw) = K\frac{(1 - jwT_1)}{(1 + jwT_2)}$$

Característica de Módulo:

Estes dois sistemas possuem as mesmas características de **Módulo** para as suas Funções de Transferência.

$$|G_1(jw)| = |G_2(jw)| = K\frac{\sqrt{1 + w^2T_1^2}}{\sqrt{1 + w^2T_2^2}}$$

Característica de Ângulo:

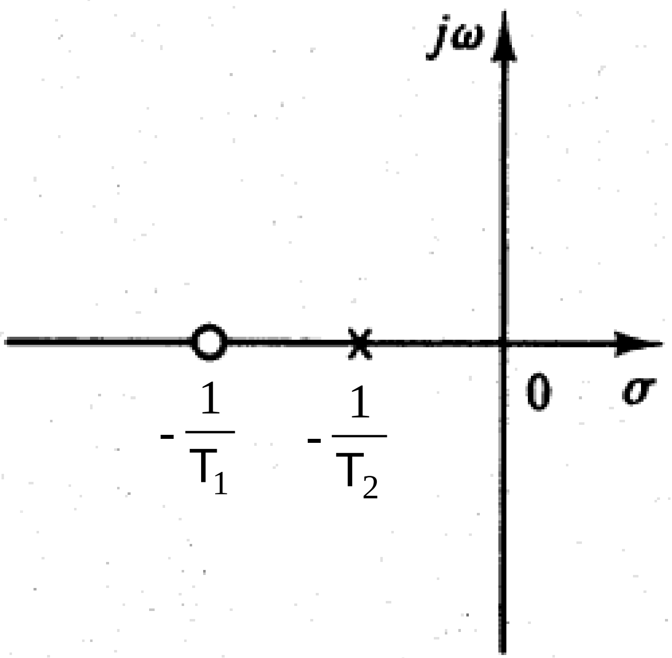
A gama de valores para o **Ângulo de Fase** da Função de Transferência para os sistemas de Fase Mínima é menor em relação aos sistemas de Fase Não Mínima.

12. Sistemas de Fase Mínima e Não Mínima

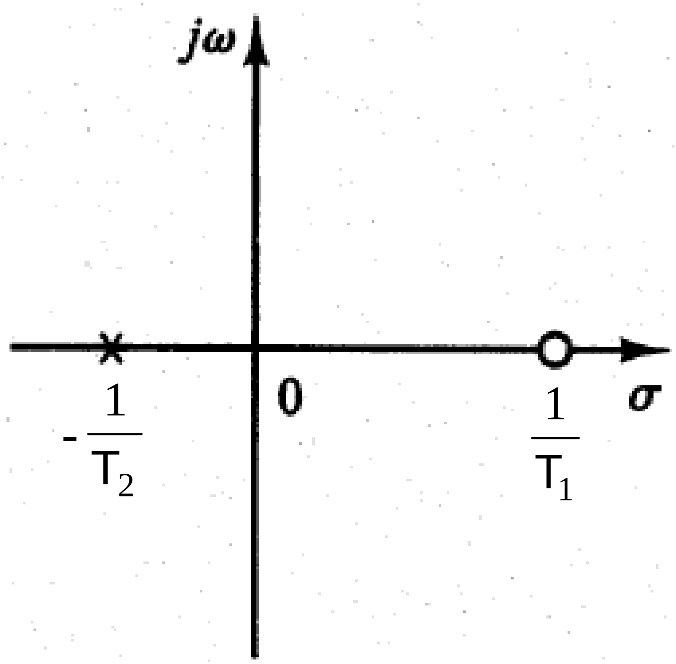
Dadas as duas Funções de Transferência **$G_1(jw)$** e **$G_2(jw)$**, analisemos o **Módulo** e o **Ângulo**:

$$G_1(jw) = K\frac{(1 + jwT_1)}{(1 + jwT_2)} \qquad \text{e} \qquad G_2(jw) = K\frac{(1 - jwT_1)}{(1 + jwT_2)}$$

A localizações dos **pólos** e **zeros** no **plano s** serão:

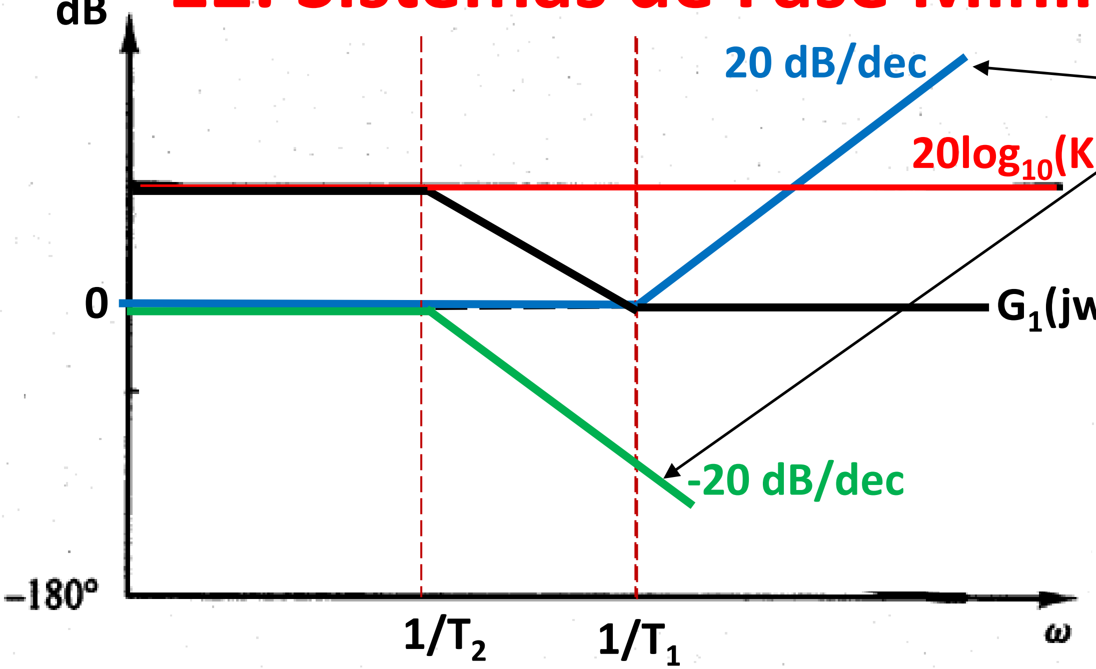


$$G_1(jw) = K\frac{(1 + jwT_1)}{(1 + jwT_2)}$$

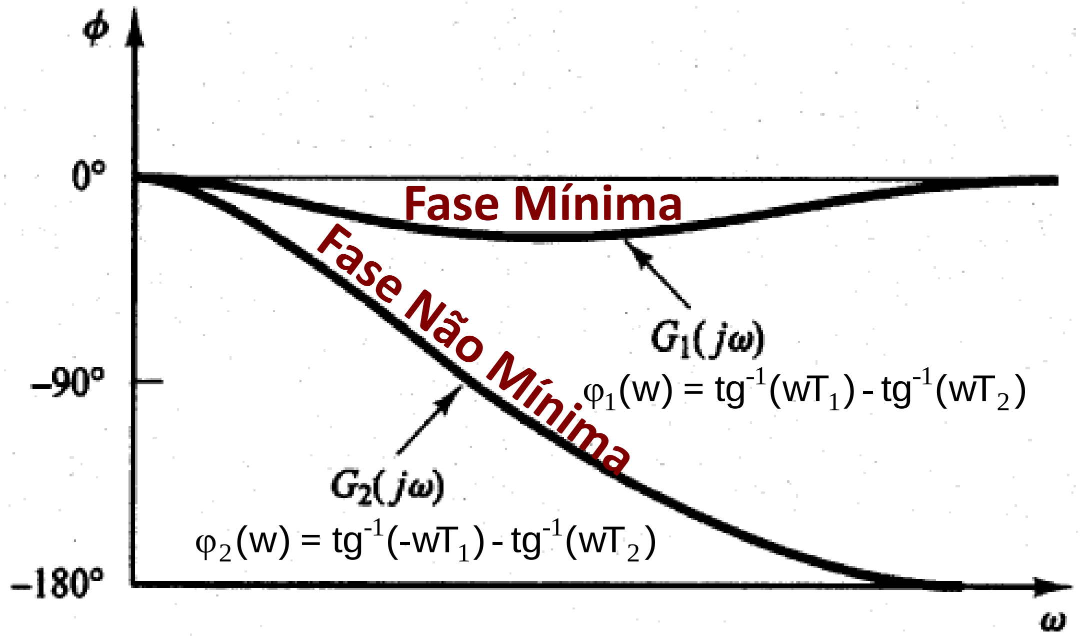


$$G_2(jw) = K\frac{(1 - jwT_1)}{(1 + jwT_2)}$$

12. Sistemas de Fase Mínima e Não Mínima



s valores do Log-Mod para os stemas de Fase Mínima G_1 e de ase Não Mínima G_2 são emelhantes para todas as equências.



s valores dos Ângulos de Fase ara o Sistema de Fase Mínima G_1 io menores em relação aos stema de Fase Não Mínima G_2 ara todas as frequências.

Conclusões

- Para sistemas de **Fase Mínima,** a inclinação da curva de **Módulo** em **dB,** quando $\omega \rightarrow \infty$, é igual a **-20(*p* - *q*)/década** onde ***p*** e ***q*** são os **graus dos polinômios** do **numerador** e do **denominador** da Função de Transferência. Esta condição também se aplica aos sistemas de **Fase Não-Mínima**.

- Para sistemas de **Fase Mínima,** o **Ângulo de Fase** quando $\omega \rightarrow \infty$ torna-se **$-90^0(p - q)$**, e para os sistemas de **Fase Não Mínima** o **Ângulo de Fase** quando $\omega \rightarrow \infty$ torna-se **$-2tg^{-1}(\infty) \rightarrow -180^{\circ}$.**

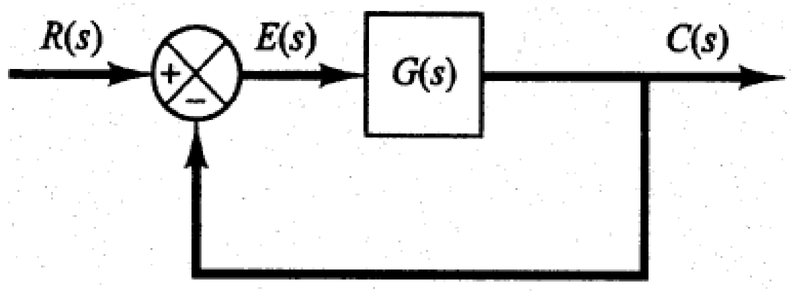
- Sistemas de Fase Não Mínima são encontrados em circuitos elétricos em Ponte, Termômetros de Bulbo, Aeronaves, Barcos, etc...

Conclusões

- Um zero à direita do plano s contribui com atraso de fase, da mesma forma que um pólo à esquerda atrasa a fase. A presença de zero no semi-plano direito do plano s resulta em uma fase mais negativa que o caso de não existir zero à direita, ou ainda com localização de zero à esquerda, pois este último adianta a fase.
- Os sistemas de fase não mínima correspondem a uma defasagem mais acentuada em relação à defasagem mínima.
- O significado do termo **Fase Mínima** deve ser entendido como sendo a menor variação possível de fase para uma dada curva de módulo de um sistema.

Relação entre o Tipo de Sistema e a Curva do Ganho (dB)

Considere um sistema de controle com realimentação unitária negativa representado pelo Diagrama de Blocos a seguir.



As constantes de **Erro Estático de Posição**, **Velocidade** e **Aceleração** descrevem o comportamento na faixa de **baixas frequências** dos **Tipos 0**, **1** e **2**, respectivamente.

Para um dado sistema, apenas uma das constantes de **Erro Estático** é **finita** e **significativa**.

O tipo de sistema determina a **inclinação** da curva de Ganho (dB) em baixas frequências.

A informação relativa ao **Erro Estático** de uma sistema de controle para uma dada entrada pode ser determinada a partir da **observação da região de baixas frequências da curva de Ganho em dB**.

Erros Estáticos de Posição, Velocidade e Aceleração

Entrada Degrau Unitário

Constante de Erro Estático de Posição: $K_P = \lim_{s \to 0} [G(s)]$

Erro Estático de Posição: $e_{ss} = \dfrac{1}{1 + K_P}$

Entrada Rampa Unitária

Constant e de Erro Estático de Velocidade: $K_v = \lim_{s \to 0} [sG(s)]$

Erro Estático de Velocidade: $e_{ss} = \dfrac{1}{K_v}$

Entrada Parabólica Unitária

Constante de Erro Estático de Aceleração: $K_a = \lim_{s \to 0} [s^2 G(s)]$

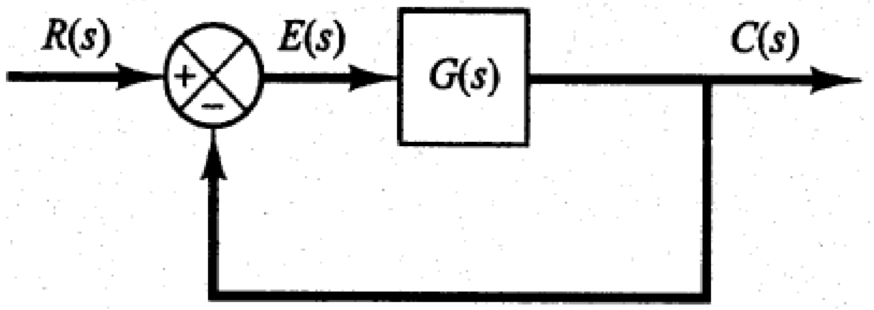
Erro Estático de Aceleração: $e_{ss} = \dfrac{1}{K_a}$

Erros Estacionários em Termos do Ganho K

Tipo do Sistema	Entrada Degrau $r(t) = 1$	Entrada Rampa $r(t) = t$	Entrada Parabólica $r(t) = (0,5)t^2$
0	$e_{ss} = \frac{1}{1+K}$	∞	∞
1	0	$e_{ss} = \frac{1}{K}$	∞
2	0	0	$e_{ss} = \frac{1}{K}$

Determinação do Erro Estático

Seja o sistema de controle a seguir.



Suponha que a Função de Transferência de **Malha Aberta** seja:

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1)\cdots(T_m s + 1)}{s^N(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\cdots(T_p s + 1)}$$

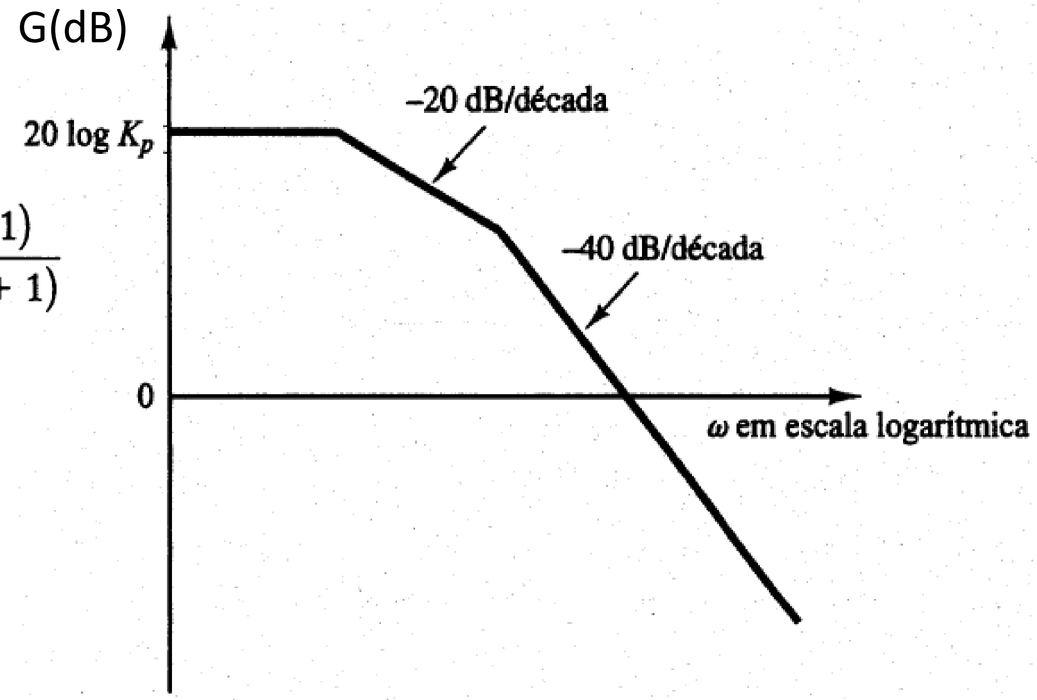
ou

$$G(j\omega) = \frac{K(T_a j\omega + 1)(T_b j\omega + 1)\cdots(T_m j\omega + 1)}{(j\omega)^N(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)\cdots(T_p j\omega + 1)}$$

Determinação do Erro Estático de Posição

Um exemplo de Gráfico do Ganho (dB) para um sistema do **Tipo N = 0** é dado por:

$$G(j\omega) = \frac{K(T_a j\omega + 1)(T_b j\omega + 1)\cdots(T_m j\omega + 1)}{(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)\cdots(T_p j\omega + 1)}$$



Sabendo-se que: $K_P = \lim_{w \to 0} G(jw) \Longrightarrow \boxed{K_P = K}$

O Módulo de **|G(jw)|** em **baixas frequências** é igual a ***K = K$_p$*,** **então, a assíntota de baixa frequência** é uma **reta horizontal** **onde G(dB) = 20log$_{10}$K$_p$**. Determina-se **K$_p$** e:

$$\boxed{\mathbf{erro_{ss}} = \frac{1}{1 + K_P}}$$

Exemplo 1

Considere a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 4s + 25}$$

Construa o diagrama de Bode para essa função de transferência.

$$G(s) = \frac{\mathrm{num}(s)}{\mathrm{den}(s)}$$

```
num = [0 0 25];
den = [1 4 25];
bode(num,den)
title('Diagrama de Bode de G(s) = 25/(s^2 + 4s + 25)')
```

Determinar o Erro em Regime Permanente para uma entrada Degrau Unitária.

Exemplo 1

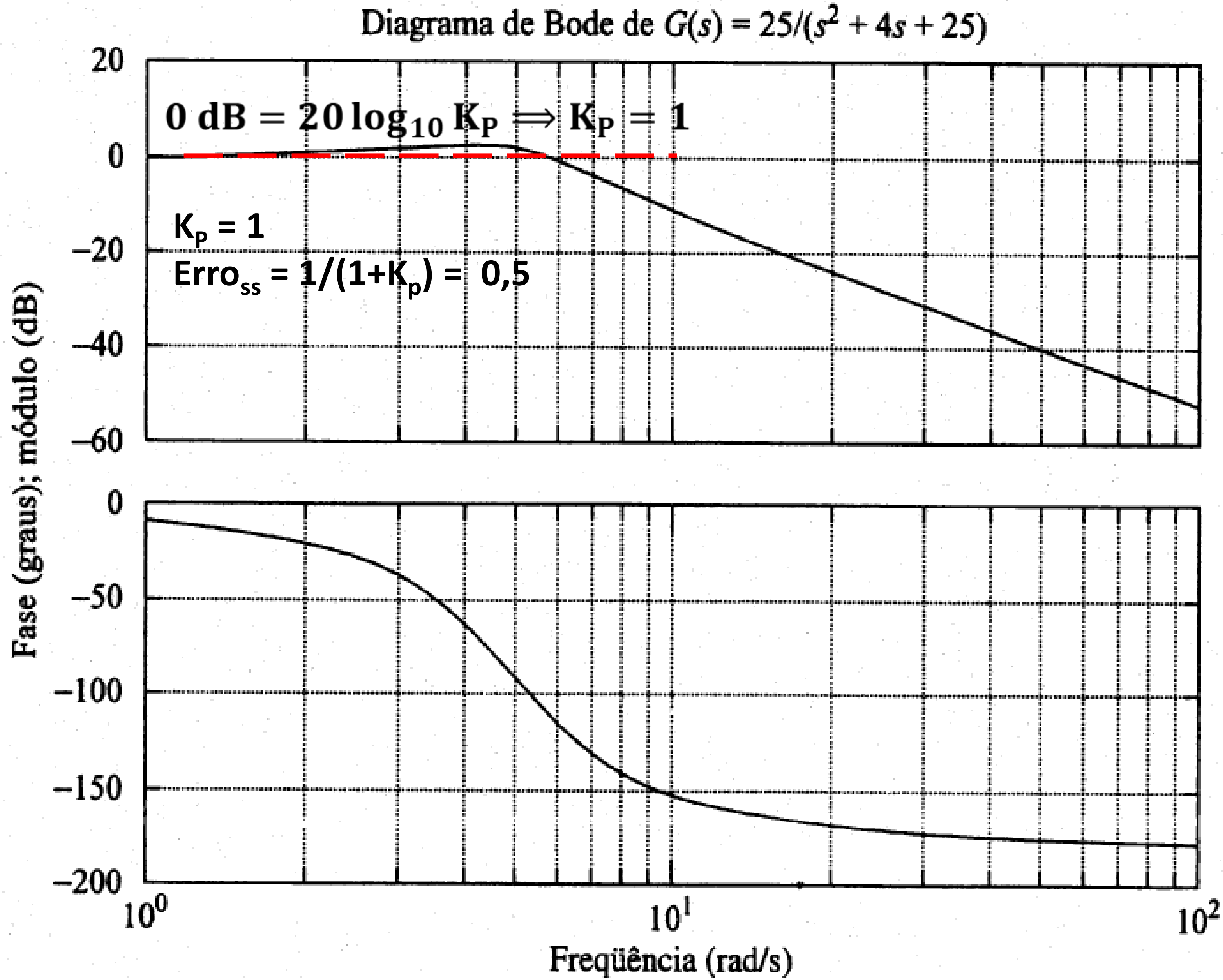
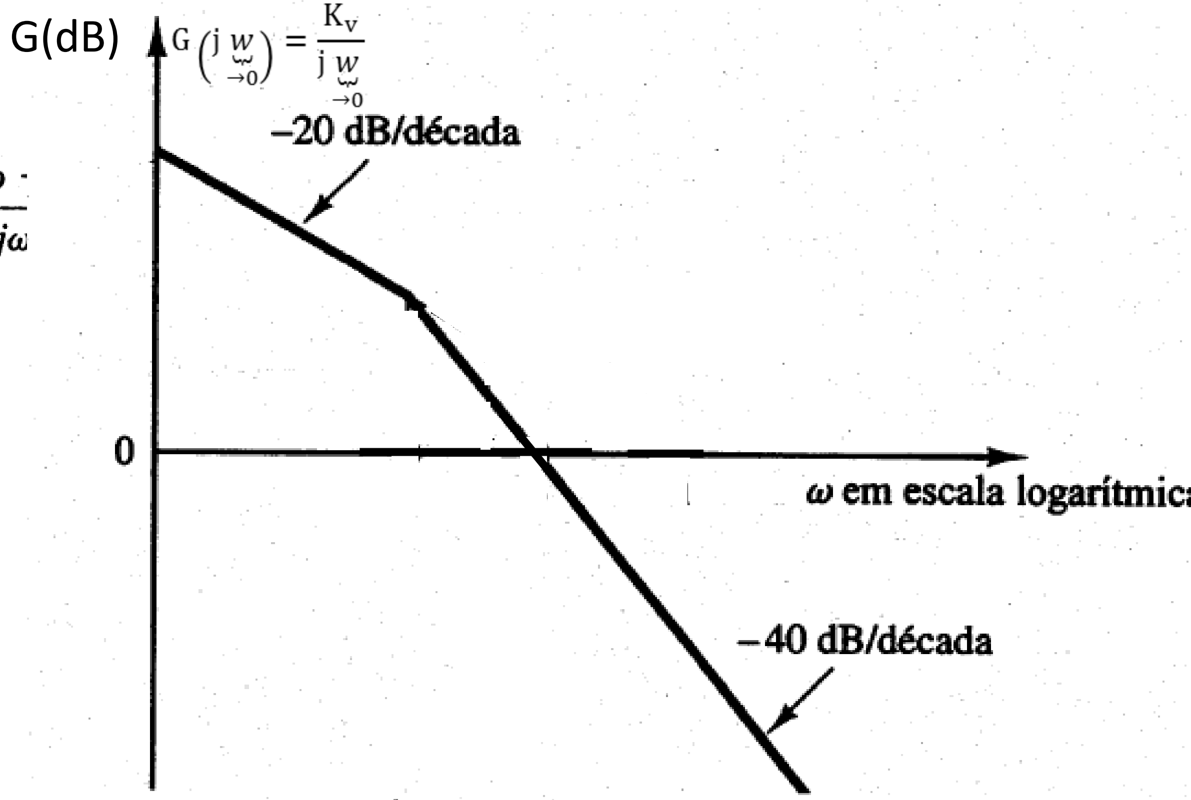


Diagrama de Bode de $G(s) = 25/(s^2 + 4s + 25)$
$0\ \mathrm{dB} = 20\log_{10} K_P \Rightarrow K_P = 1$
$K_P = 1$
$Erro_{ss} = 1/(1+K_p) = 0{,}5$
20
0
−20
−40
−60
0
−50
−100
−150
−200
10^0
10^1
10^2
Fase (graus); módulo (dB)
Freqüência (rad/s)

Determinação do Erro Estático de Velocidade

Um exemplo de Gráfico do Ganho (dB) para um sistema do **Tipo N = 1** é dado por:

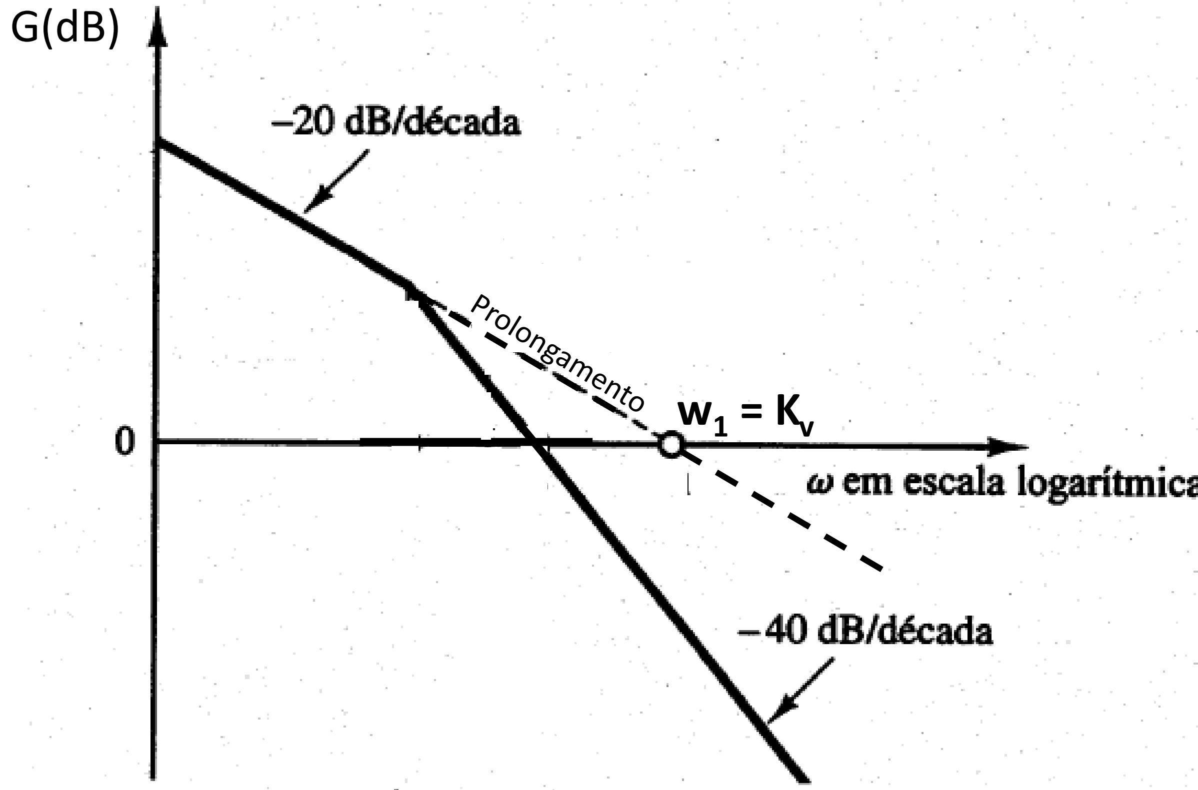
$$G(j\omega) = \frac{K(T_a j\omega + 1)(T_b j\omega + 1)\cdots(T_m j\omega}{(j\omega)\;(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)\cdots(T_p j\omega}$$



Como $K_v = \lim_{w \to 0} (jw)G(jw)$; tem-se para baixas frequências:

$$\boxed{G\left(j \underbrace{w}_{\to 0}\right) = \frac{K_v}{j \underbrace{w}_{\to 0}}}$$

Determinação do Erro Estático de Velocidade

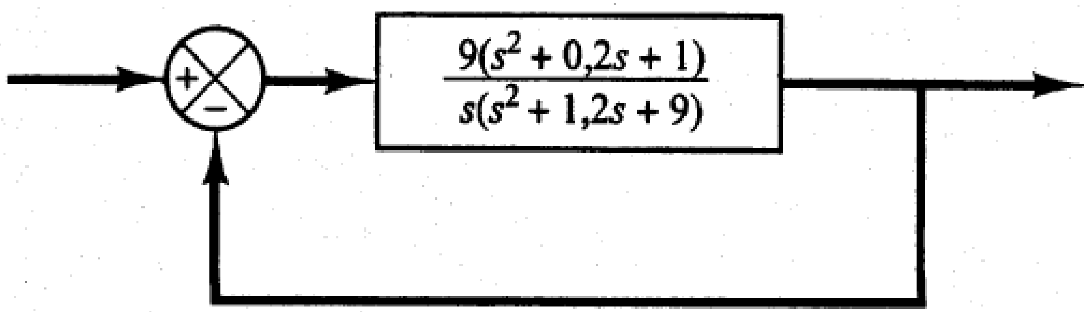


Definindo uma frequência $w = w_1$ na interseção do prolongamento de -20 dB/década com o eixo de 0 dB, temos que:

$$20\log_{10}|G(jw_1)| = 0 \Longrightarrow 20\log_{10}\left|\frac{K_v}{jw_1}\right| = 0 \Longrightarrow \boxed{K_v = w_1}$$

$$erro_{ss} = \frac{1}{K_v} \Rightarrow \boxed{erro_{ss} = \frac{1}{w_1}}$$

Exemplo 2



Trace o diagrama de Bode.

$$G(s) = \frac{9(s^2 + 0{,}2s + 1)}{s(s^2 + 1{,}2s + 9)}$$

```
num = [0 9 1.8 9];
den = [1 1.2 9 0];
bode(num,den)
title('Diagrama de Bode de G(s) = 9(s^2 + 0.2s + 1)/[s(s^2 + 1.2s + 9)]')
```

Determinar o Erro em Regime Permanente para uma entrada Rampa Unitária.

Exemplo 2

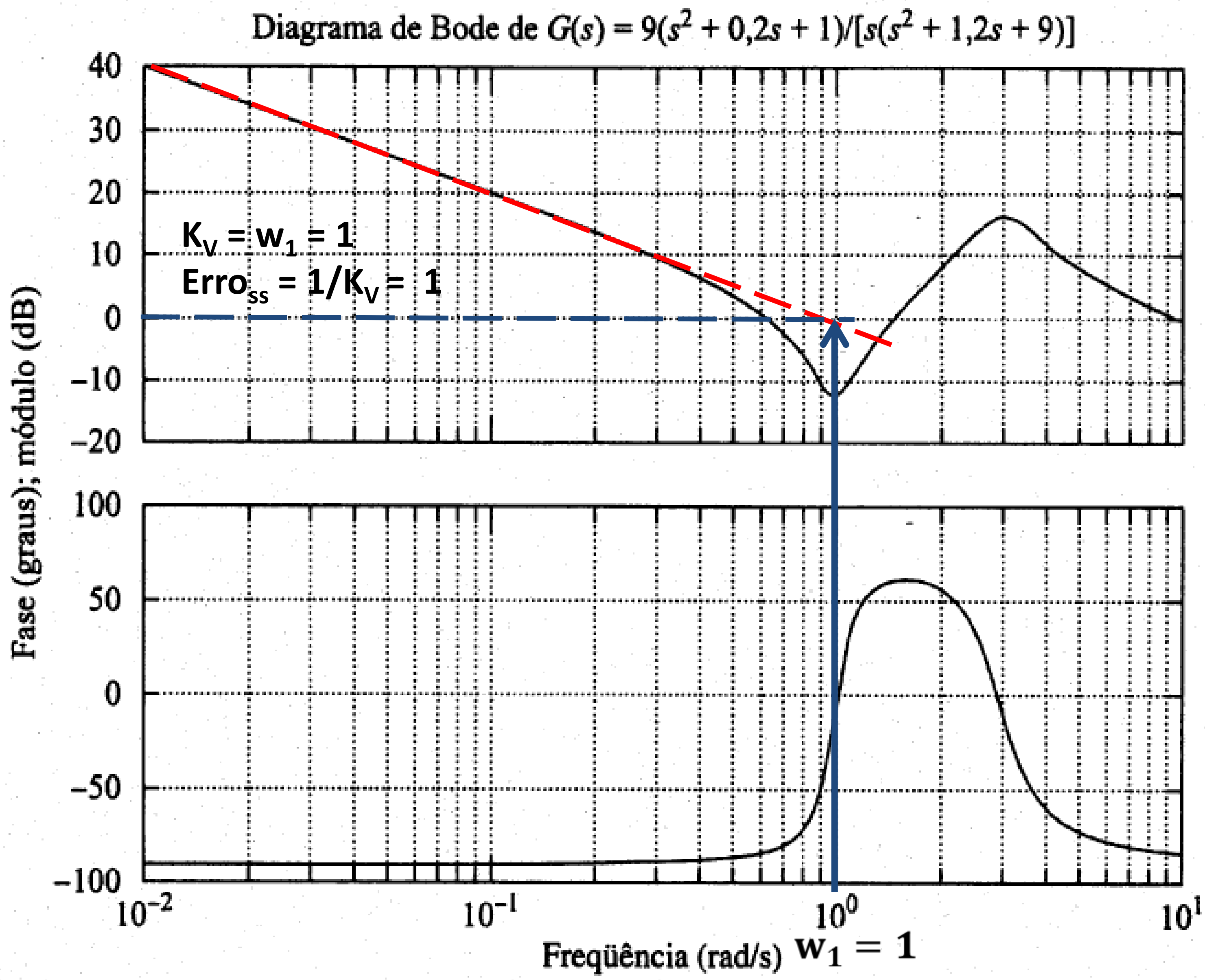
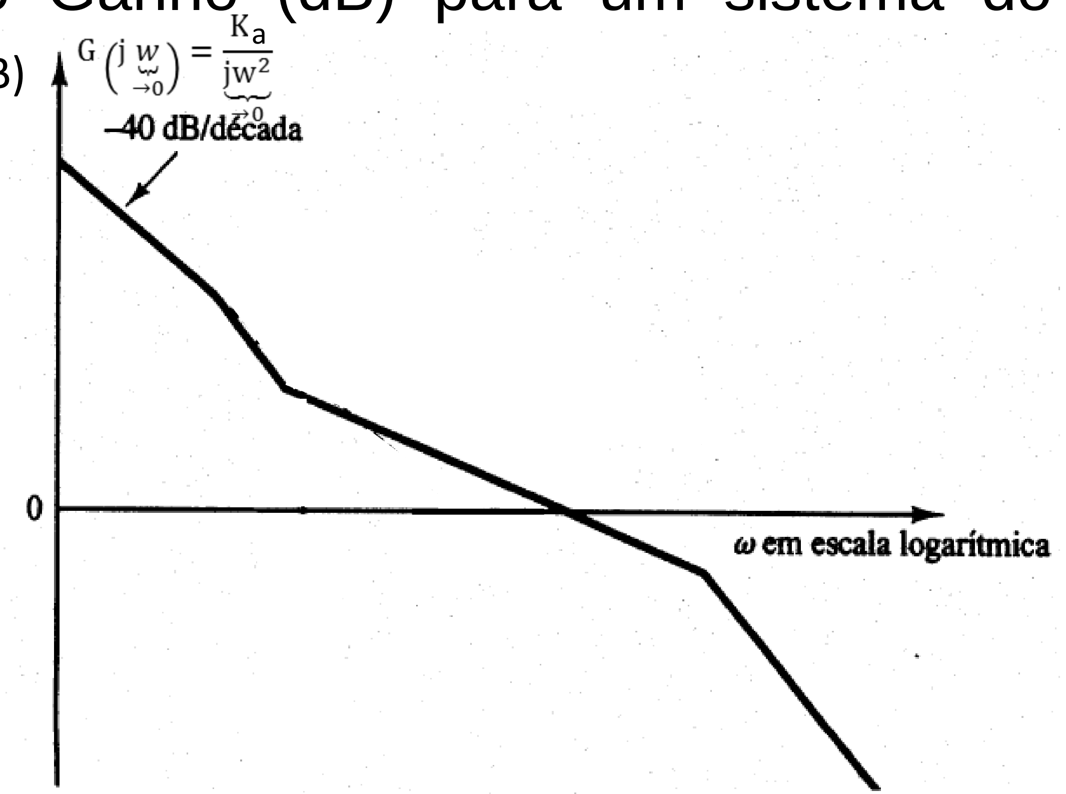


Diagrama de Bode de $G(s) = 9(s^2 + 0,2s + 1)/[s(s^2 + 1,2s + 9)]$
$K_V = w_1 = 1$
$Erro_{ss} = 1/K_V = 1$
40
30
20
10
0
−10
−20
100
50
0
−50
−100
Fase (graus); módulo (dB)
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
Freqüência (rad/s)
$w_1 = 1$

Determinação do Erro Estático de Aceleração

Um exemplo de Gráfico do Ganho (dB) para um sistema do **Tipo N = 2** é dado por:

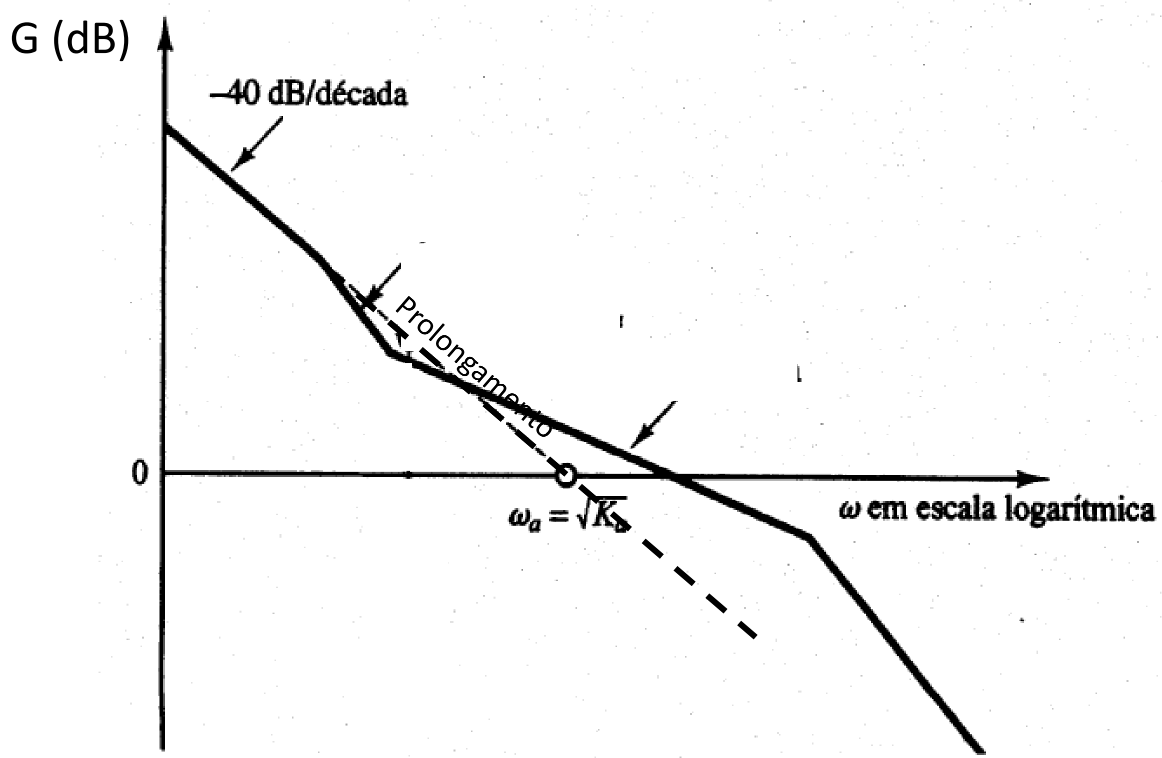
$$G(j\omega) = \frac{K(T_a j\omega + 1)(T_b j\omega + 1)\cdots(T_m j\omega + 1)}{(j\omega)^2(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)\cdots(T_p j\omega + 1}$$



Como $K_a = \lim_{w \to 0}(jw)^2 G(jw)$; tem-se para baixas frequências:

$$\boxed{G\left(j\underbrace{w}_{\to 0}\right) = \frac{K_a}{\underbrace{jw^2}_{\to 0}}}$$

Determinação do Erro Estático de Aceleração



Definindo uma frequência $w = w_a$ na interseção do prolongamento de -40 dB/década com o eixo de 0 dB, temos que:

$$20\log_{10}|G(jw_a)| = 0 \Rightarrow 20\log_{10}\left|\frac{K_a}{jw_a{}^2}\right| = 0 \Rightarrow \boxed{K_a = w_a^2}$$

$$erro_{ss} = \frac{1}{K_a} \Rightarrow \boxed{erro_{ss} = \frac{1}{w_a^2}}$$

Exemplo 3

Considere a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{200(s+1)}{s^2(s+2)(s^2+2s+4)}$$

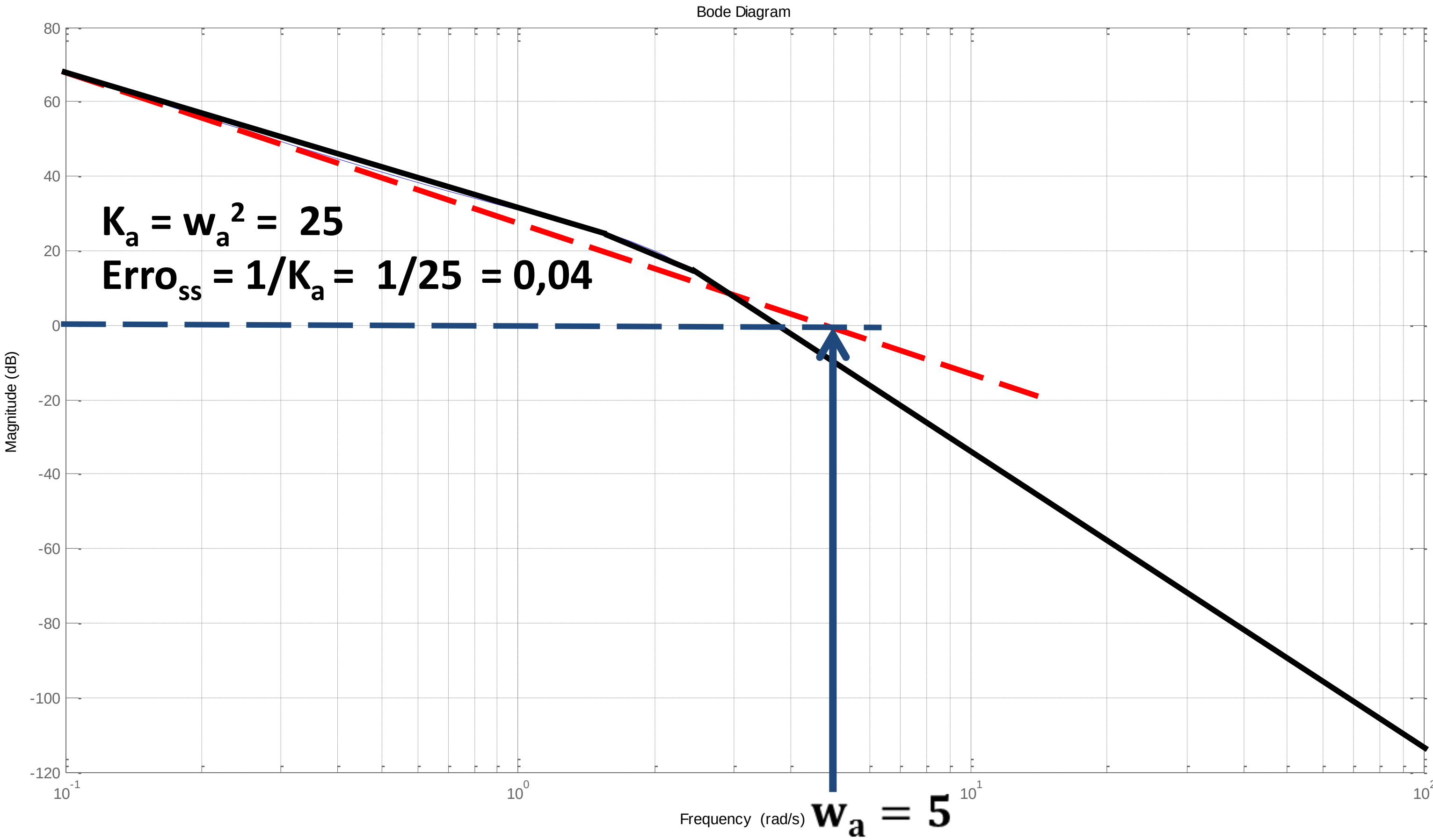
Construa o diagrama de Bode para essa função de transferência.

$$G(s) = \frac{\mathrm{num}(s)}{\mathrm{den}(s)}$$

```
num = [200   200];
den = [1   4   8   8   0   0];
bode(num,den)
Title('Diagrama de Bode de G(s)=200(s+1)/[s²(s+2)(s²+2s+4)]
```

Determinar o Erro em Regime Permanente para uma entrada Parabólica Unitária.

Exemplo 3



Bode Diagram
$K_a = w_a^2 = 25$
$Erro_{ss} = 1/K_a = 1/25 = 0{,}04$
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
Magnitude (dB)
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequency (rad/s)
$\mathbf{w_a = 5}$