ELT221 - Circuitos Elétricos II

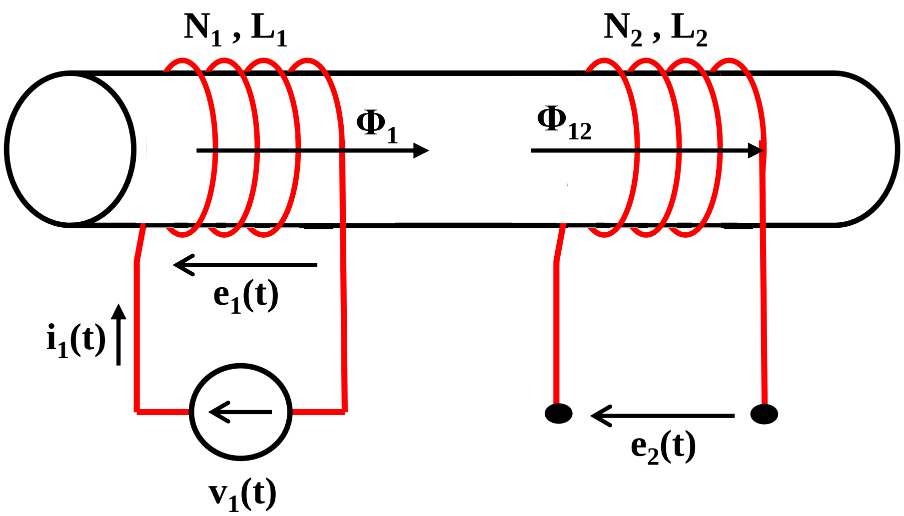
Prof. Tarcísio Pizziolo

Aula 9

9) Indutância Mútua

9.1) Coeficiente de Indução Mútua

Sejam duas **bobinas acopladas magneticamente** enroladas em um núcleo:



Bobina-1:
- possui N_1 espiras e auto-indutância L_1.
- possui uma fonte de tensão $v_1(t)$ conectada em seus terminais produzindo uma corrente $i_1(t)$.
- a corrente $i_1(t)$ produz (**regra da mão direita**) um fluxo magnético $\Phi_1(t)$ no entreferro.

Bobina-2:
- possui N_2 espiras e uma auto-indutância L_2.
- seus terminais encontram-se abertos.
- a corrente e o fluxo magnético nesta bobina são nulos.

A bobina-1 produz um **fluxo magnético** que **enlaça** as espiras da bobina-2 sendo denominado $\Phi_{12}(t)$.

$$\frac{\Phi_{12}(t)}{\Phi_1(t)} = K \leq 1$$ => **Coeficiente de Acoplamento Magnético**.

Pela **Lei de Faraday** a **Força Eletromotriz induzida** na **bobina-1** é dada por:

$$e_1(t) = v_1(t) = N_1 \frac{d\Phi_1(t)}{dt} \;;$$

ou

$$e_1(t) = v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \;.$$

Igualando as forças eletromotrizes induzidas:

$$\frac{d\Phi_1(t)}{dt} = \frac{L_1}{N_1}\frac{di_1(t)}{dt}$$

A **Força Eletromotriz induzida** nos terminais da **bobina-2** será (**Lei de Faraday):**

$$e_2(t) = N_2\frac{d\Phi_{12}(t)}{dt}$$

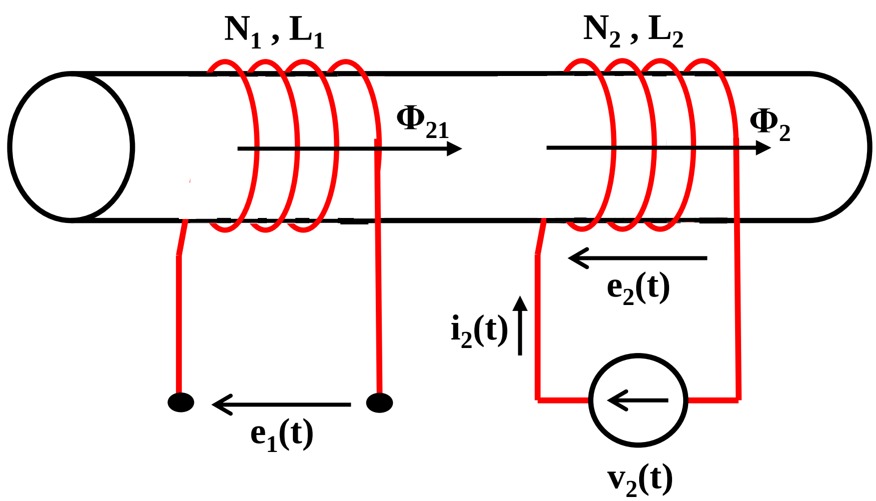
Substituindo $\frac{\Phi_{12}(t)}{\Phi_1(t)} = K$ e $\frac{d\Phi_1(t)}{dt} = \left(\frac{L_1}{N_1}\right)\left(\frac{di_1(t)}{dt}\right)$ em $e_2(t) = N_2\frac{d\Phi_{12}(t)}{dt}$ obtém-se:

$$e_2(t) = N_2\frac{d[K\Phi_1(t)]}{dt} = (N_2K)\frac{d\Phi_1(t)}{dt} = (N_2K)\left(\frac{L_1}{N_1}\frac{di_1(t)}{dt}\right) = \left(K\frac{N_2}{N_1}L_1\right)\frac{di_1(t)}{dt}$$

Define-se então o **Coeficiente de Indutância Mútua** entre as duas bobinas como sendo:

$$M_{12} = K\frac{N_2}{N_1}L_1\,(\text{Henry})$$

Agora consideremos as **bobinas-1 e 2 com a seguinte configuração**:



Bobina-1:
- possui $\mathbf{N_1}$ espiras e auto-indutância $\mathbf{L_1}$.
- seus terminais encontram-se abertos.
- a corrente e o fluxo magnético nesta bobina são nulos.

Bobina-2:
- possui $\mathbf{N_2}$ espiras e uma auto-indução $\mathbf{L_2}$.
- possui uma fonte de tensão $\mathbf{v_2(t)}$ conectada em seus terminais produzindo uma corrente $\mathbf{i_2(t)}$.
- a corrente $\mathbf{i_2(t)}$ produz (**regra da mão direita**) um fluxo magnético $\mathbf{\Phi_2(t)}$ no entreferro.

A bobina-2 produz um **fluxo magnético** que **concatena** as espiras da bobina-1 sendo denominado $\boldsymbol{\Phi_{21}(t)}$.

$$\frac{\Phi_{21}(t)}{\Phi_2(t)} = K \leq 1 \Rightarrow \textbf{Coeficiente de Acoplamento Magnético}.$$

Pela **Lei de Faraday** a **Força Eletromotriz induzida** na **bobina-2** é dada por:

$$e_2(t) = v_2(t) = N_2 \frac{d\Phi_2(t)}{dt}$$

ou

$$e_2(t) = v_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt}$$

Igualando as forças eletromotrizes induzidas:

$$\frac{d\Phi_2(t)}{dt} = \frac{L_2}{N_2}\frac{di_2(t)}{dt}$$

A **Força Eletromotriz induzida** nos terminais da **bobina-1** será (**Lei de Faraday):**

$$e_1(t) = N_1 \frac{d\Phi_{21}(t)}{dt}$$

Substituindo $\frac{\Phi_{21}(t)}{\Phi_2(t)} = K$ e $\frac{d\Phi_2(t)}{dt} = \left(\frac{L_2}{N_2}\right)\left(\frac{di_2(t)}{dt}\right)$ em $e_1(t) = N_1 \frac{d\Phi_{21}(t)}{dt}$ obtém-se:

$$e_1(t) = N_1 \frac{d[K\Phi_2(t)]}{dt} = (N_1 K)\frac{d\Phi_2(t)}{dt} = (N_1 K)\left(\frac{L_2}{N_2}\frac{di_2(t)}{dt}\right) = \left(K\frac{N_1}{N_2}L_2\right)\frac{di_2(t)}{dt}$$

Define-se então o **Coeficiente de Indutância Mútua** entre as duas bobinas como sendo:

$$M_{21} = K\frac{N_1}{N_2}L_2 \text{ (Henry)}$$

Como os **Coeficientes de Indutância Mútua,** ou simplesmente **Indutância Mútua,** entre as bobinas são iguais:

$$M = M_{12} = M_{21} \Rightarrow K\frac{N_2}{N_1}L_1 = K\frac{N_1}{N_2}L_2 \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

Então:

$$M = K\frac{N_2}{N_1}L_1 = K\left(\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\right)L_1 \Rightarrow M = K\sqrt{L_1 L_2}$$

<u>Conclusão:</u>

A **Indutância Mútua** entre duas bobinas acopladas magneticamente é dada por:

$$\boxed{M = K\sqrt{L_1 L_2}}$$

Onde **K** é o C**oeficiente de Acoplamento** e $\mathbf{L_1}$ e $\mathbf{L_2}$ são as **auto-indutâncias** das bobinas **acopladas magneticamente**.

<u>Análise do Coeficiente de Acoplamento</u>

Partindo de $\mathbf{M} = \mathbf{K}\sqrt{\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K} = \dfrac{\mathbf{M}}{\sqrt{\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2}}$.

Considerando $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}_{21} \Rightarrow \mathbf{M}^2 = \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{21} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} = \sqrt{\mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{21}}$; então:

$$\mathbf{K} = \frac{\sqrt{\mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{21}}}{\sqrt{\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2}} \quad \mathbf{e} \quad \begin{cases} \mathbf{M}_{12}\left(\dfrac{\mathbf{di}_1}{\mathbf{dt}}\right) = \mathbf{N}_2\left(\dfrac{\mathbf{d\Phi}_{12}}{\mathbf{dt}}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}_{12} = \left[\dfrac{\mathbf{N}_2\left(\dfrac{\mathbf{d\Phi}_{12}}{\mathbf{dt}}\right)}{\left(\dfrac{\mathbf{di}_1}{\mathbf{dt}}\right)}\right] \\ \mathbf{M}_{21}\left(\dfrac{\mathbf{di}_2}{\mathbf{dt}}\right) = \mathbf{N}_1\left(\dfrac{\mathbf{d\Phi}_{21}}{\mathbf{dt}}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}_{21} = \left[\dfrac{\mathbf{N}_1\left(\dfrac{\mathbf{d\Phi}_{21}}{\mathbf{dt}}\right)}{\left(\dfrac{\mathbf{di}_2}{\mathbf{dt}}\right)}\right] \\ \mathbf{N}_1\left(\dfrac{\mathbf{d\Phi}_1}{\mathbf{dt}}\right) = \mathbf{L}_1\left(\dfrac{\mathbf{di}_1}{\mathbf{dt}}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_1 = \dfrac{\mathbf{N}_1\left(\dfrac{\mathbf{d\Phi}_1}{\mathbf{dt}}\right)}{\left(\dfrac{\mathbf{di}_1}{\mathbf{dt}}\right)} \\ \mathbf{N}_2\left(\dfrac{\mathbf{d\Phi}_2}{\mathbf{dt}}\right) = \mathbf{L}_2\left(\dfrac{\mathbf{di}_2}{\mathbf{dt}}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_2 = \dfrac{\mathbf{N}_2\left(\dfrac{\mathbf{d\Phi}_2}{\mathbf{dt}}\right)}{\left(\dfrac{\mathbf{di}_2}{\mathbf{dt}}\right)} \end{cases}$$

Substituindo $\mathbf{M_{12}}$, $\mathbf{M_{21}}$, $\mathbf{L_1}$ e $\mathbf{L_2}$ em **K**, temos:

$$\mathbf{K} = \frac{\sqrt{\left(\dfrac{\mathbf{N}_2\left(\dfrac{\mathbf{d\Phi}_{12}}{\mathbf{dt}}\right)}{\left(\dfrac{\mathbf{di}_1}{\mathbf{dt}}\right)}\right) \cdot \left(\dfrac{\mathbf{N}_1\left(\dfrac{\mathbf{d\Phi}_{21}}{\mathbf{dt}}\right)}{\left(\dfrac{\mathbf{di}_2}{\mathbf{dt}}\right)}\right)}}{\sqrt{\left(\dfrac{\mathbf{N}_1\left(\dfrac{\mathbf{d\Phi}_1}{\mathbf{dt}}\right)}{\left(\dfrac{\mathbf{di}_1}{\mathbf{dt}}\right)}\right) \cdot \left(\dfrac{\mathbf{N}_2\left(\dfrac{\mathbf{d\Phi}_2}{\mathbf{dt}}\right)}{\left(\dfrac{\mathbf{di}_2}{\mathbf{dt}}\right)}\right)}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K} = \left(\sqrt{\frac{\mathbf{d\Phi}_{12}}{\mathbf{d\Phi}_1}}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{\mathbf{d\Phi}_{21}}{\mathbf{d\Phi}_2}}\right) \le 1$$

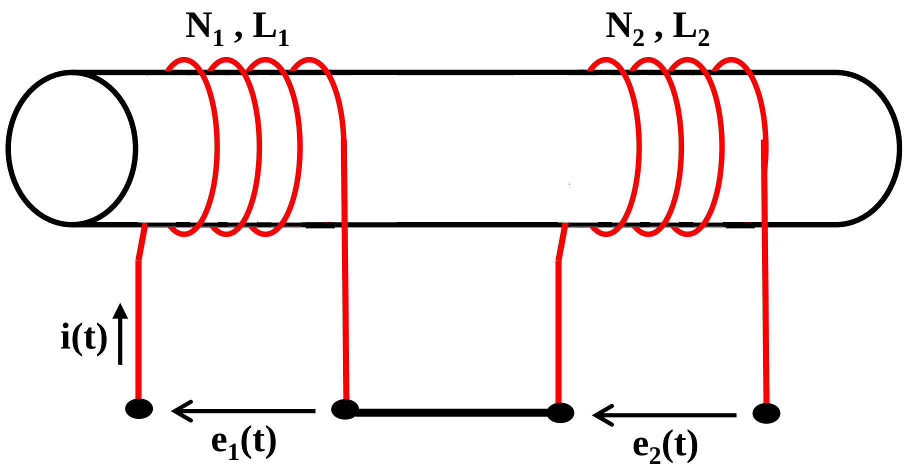
$$\frac{\mathbf{d\Phi}_{12}}{\mathbf{d\Phi}_1} \le 1 \quad \mathbf{e} \quad \frac{\mathbf{d\Phi}_{21}}{\mathbf{d\Phi}_2} \le 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le \mathbf{K} \le 1.$$

- Se **K = 0** => Não existe acoplamento magnético (**M = 0**).
- Se **K = 1** => O acoplamento é unitário, ou seja, todo o fluxo gerado pela bobina-1 enlaça a bobina-2 e vice-versa.

<u>Importante:</u> O valor de **K** depende das dimensões e do número de espiras de cada bobina, de suas posições relativas e das propriedades magnéticas do núcleo sobre o qual estão enroladas.
- Para **K < 0,5** => Bobinas fracamente acopladas! Se o núcleo for de **ar** => **K < 0,5**.
- Para **K > 0,5 =>** Bobinas fortemente acopladas! Se o núcleo for de **Ferro** => **K > 0,5**.

9.2) Associação de Bobinas Acopladas

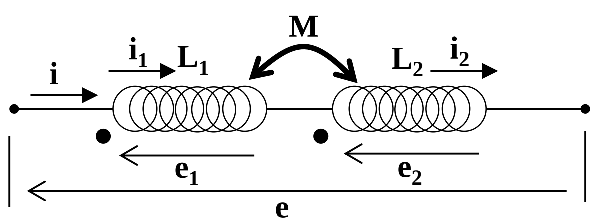
Considere as **duas bobinas acopladas magneticamente** com **os sentidos dos enrolamentos concordantes** representadas na figura a seguir.



Admita que ambas as bobinas são percorridas pela mesma corrente **i(t)**.

Como o **sentido da corrente** nas duas bobinas é **horário** os **fluxos magnéticos** gerados no núcleo comum serão **concordantes** (**somando-se**) e o acoplamento é dito **positivo**.

A representação das bobinas nesta situação é dada com a **marcação de "*PONTOS*"** conforme a seguir:



As **forças eletromotrizes induzidas** nos terminais das **bobinas 1** e **2** são, respectivamente (**$i = i_1 = i_2$**):

$$\mathbf{e_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = (L_1 + M)\frac{di}{dt}}$$

e

$$\mathbf{e_2(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = (L_2 + M)\frac{di}{dt}}$$

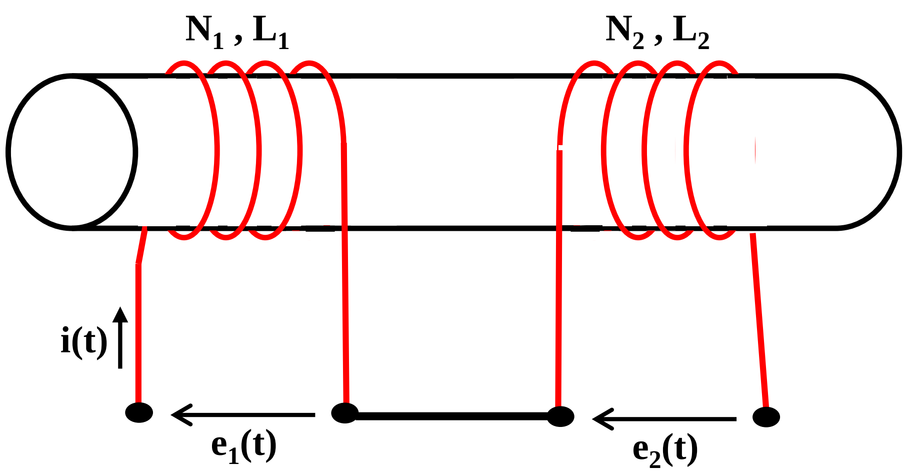
A **Força Eletromotriz total** será dada por:

$$\mathbf{e(t) = (L_1 + L_2 + 2M)\frac{di}{dt}}$$

A indutância total **L** do conjunto de **bobinas acopladas** e **associadas em série** com **enrolamentos concordantes** será dada por:

$$\mathbf{L = (L_1 + L_2 + 2M)}$$

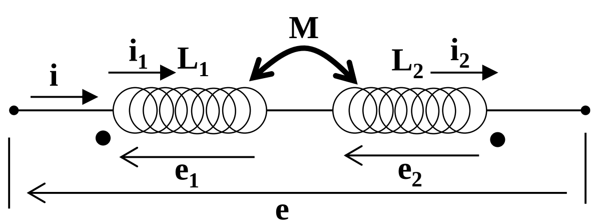
Considere agora as **duas bobinas acopladas magneticamente** com **os sentidos dos enrolamentos discordantes** representadas na figura a seguir.



Admita que ambas as bobinas são percorridas pela mesma corrente ***i***(***t***).

Como o **sentido da corrente** na bobina-1 é **horário** e o **sentido da corrente** na bobina-2 é **anti-horário**, os **fluxos magnéticos** gerados no núcleo comum serão **discordantes** (**subtraindo-se**) e o acoplamento é dito **negativo**.

A representação das bobinas nesta situação é dada com a **marcação de "*<u>PONTOS</u>*"** conforme a seguir:



As **forças eletromotrizes induzidas** nos terminais das **bobinas 1** e **2** são, respectivamente (i = $\mathbf{i_1}$ = $\mathbf{i_2}$):

$$\mathbf{e_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} = (L_1 - M)\frac{di}{dt}}$$

e

$$\mathbf{e_2(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt} = (L_2 - M)\frac{di}{dt}}$$

A **Força Eletromotriz total** será dada por:

$$\mathbf{e(t) = (L_1 + L_2 - 2M)\frac{di}{dt}}$$

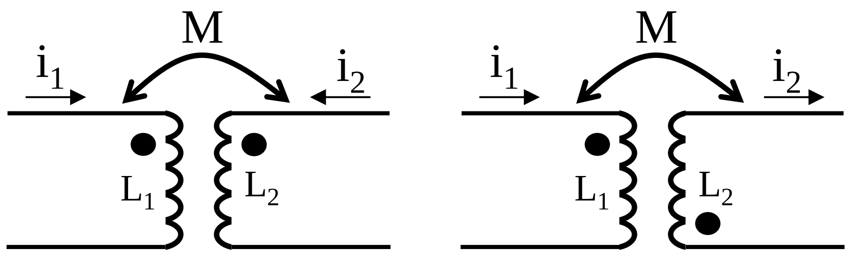
A indutância total **L** do conjunto de **bobinas acopladas** e **associadas em série** com **enrolamentos discordantes** será dada por:

$$\mathbf{L = (L_1 + L_2 - 2M)}$$

<u>Nota:</u> Se o **acoplamento magnético** entre as bobinas for perfeito, **K = 1**, e as bobinas iguais, então **L = 0**. Esta é uma das técnicas utilizadas na construção de **resistências bobinadas**.

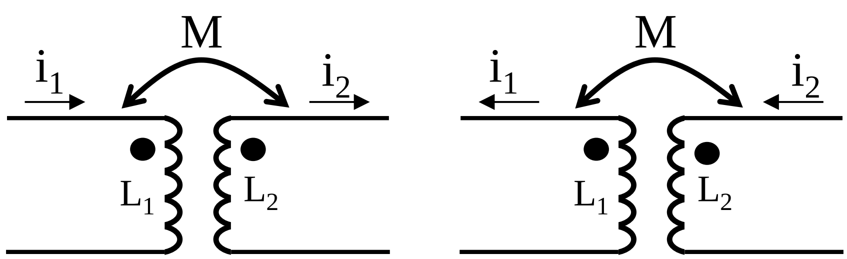
Convenção do ponto para a análise de circuitos:
– A polaridade da indutância mútua depende dos aspectos construtivos.
– A convenção de pontos elimina a necessidade de descrever os aspectos construtivos em circuitos (sentido do enrolamento).
- Um ponto é colocado no circuito em um dos terminais de cada uma das bobinas acopladas magneticamente.
- Em seguida indica-se a direção do fluxo magnético provocado pela corrente na bobina.

As figuras a seguir apresentam os "***PONTOS***" para as bobinas acopladas.



Fluxos Concordantes

Fluxo concordante: as correntes $\mathbf{i_1}$ e $\mathbf{i_2}$ entram nas bobinas pelo "**Pont**o".



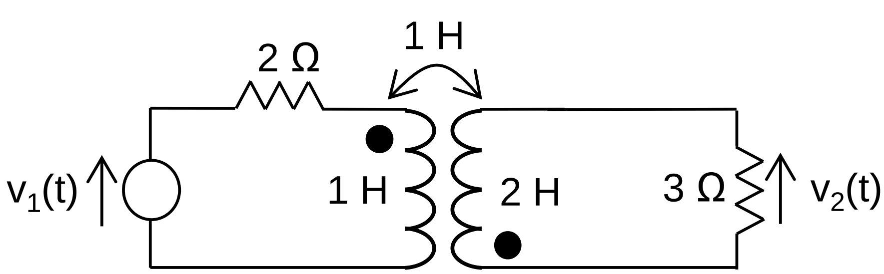
Fluxos Discordantes

Fluxo discordante: a corrente $\mathbf{i_1}$ entra na bobina pelo "**Ponto**" e a corrente $\mathbf{i_2}$ sae da bobina pelo "**Pont**o" e vice-versa.

__Regra do Ponto__

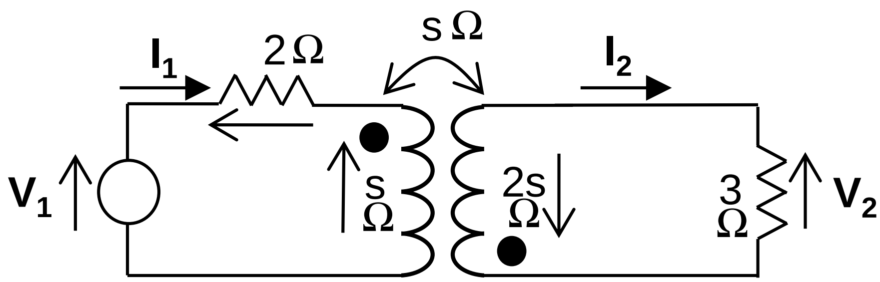
- Se ambas as correntes entram ou saem de um par de bobinas acopladas pelos terminais que têm ponto, os sinais da indutância mútua **M** são positivos.
- Se uma corrente entra **e a outra sai de um par de bobinas acopladas pelos terminais que têm ponto, os sinais dos termos** de **M** são negativos.

Exemplo 1: Seja o ciruito dado a seguir.



a) Calcular a tensão $\mathbf{v_2(t)}$ dado que $\mathbf{v_1(t) = 100cos(10t)\ (V)}$.
b) Traçar o diagrama de pólos e zeros de **H(s)**.
c) Esboçar o gráfico de resposta em frequência para **|H(jw)|**.
d) Em que frequência ocorre a máxima resposta em regime permanente **CA**?

O circuito no domínio da frequência é dado por:



a) Aplicando a LKT nas malhas:

$$\begin{cases} V_1 = 2I_1 + sI_1 + sI_2 \\ 0 = sI_1 + 2sI_2 + 3I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s+2)I_1 + sI_2 = V_1 \\ sI_1 + (2s+3)I_2 = 0 \end{cases}$$

Assim:

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} (s+2) & V_1 \\ s & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (s+2) & s \\ s & (2s+3) \end{vmatrix}} \Rightarrow I_2 = -\frac{sV_1}{\left(s^2 + 7s + 6\right)} \quad ; \quad V_2 = 3I_2$$

A Função de Transferência H(s) será:

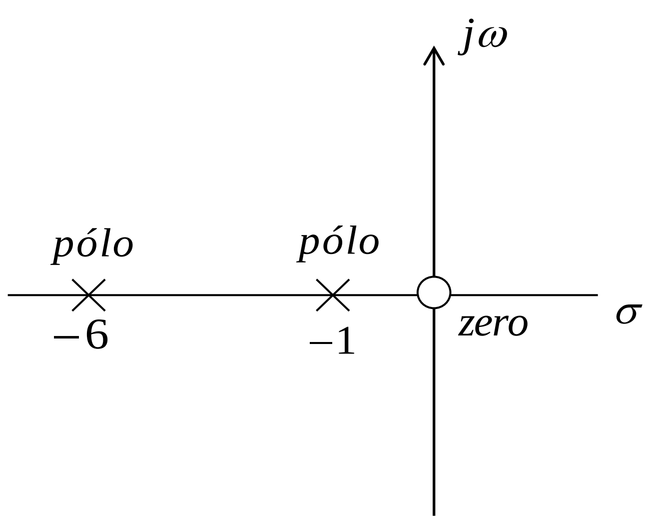
$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{3I_2}{V_1} = \frac{3(-sV_1)}{\left(s^2 + 7s + 6\right)V_1} \Rightarrow H(s) = -\frac{3s}{(s+1)(s+6)}$$

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} \Rightarrow V_2(s) = H(s)V_1(s) \Rightarrow V_2 = -\frac{3sV_1}{(s+1)(s+6)} \Rightarrow V_2 = -\frac{(3)(j10)(100\angle 0^{o})}{(j10+1)(j10+6)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_2 = -25{,}6\angle 126{,}7^{o} \Rightarrow V_2 = -25{,}6(-0{,}6 + j0{,}8) \Rightarrow V_2 = 15{,}36 - j20{,}48$$

Daí: $v_2(t) = 25{,}6\cos(10t - 53{,}13^{o})\ (V)$

b) O diagrama de pólos e zeros é dado a seguir:

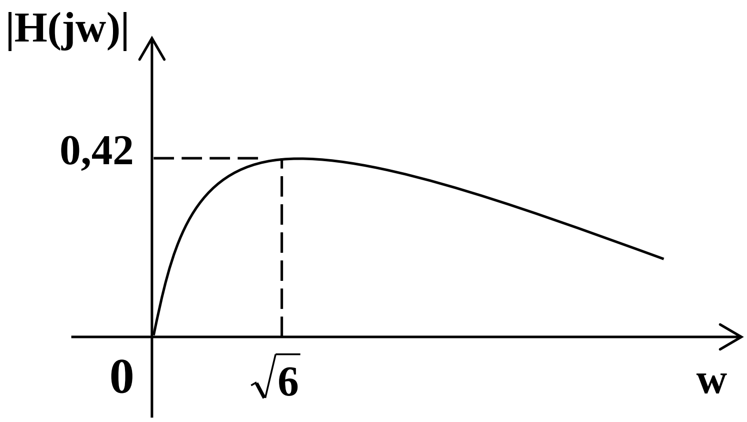


c) O gráfico de resposta em frequência para **|H(jw)|** é analisado abaixo.

$$\mathbf{H(jw)} = \frac{-3jw}{(jw)^2 + 7jw + 6} = \frac{1}{\left[-\frac{7}{3} + j\left(\frac{6-w^2}{3w}\right)\right]}$$

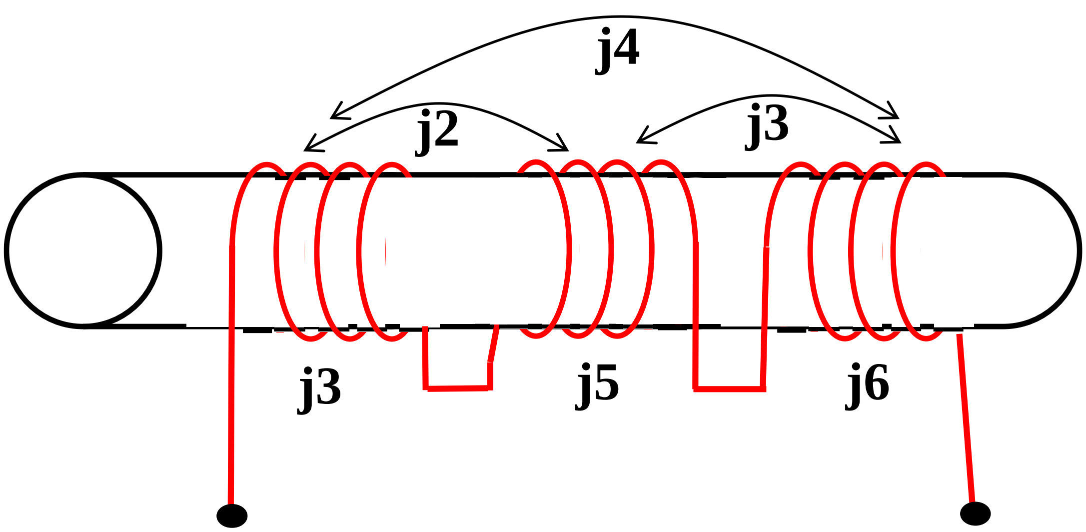
$$\left|\mathbf{H(jw)}\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2 + \left(\frac{6-w^2}{3\omega}\right)^2}} \quad ; \quad \left|\mathbf{H(jw)}\right|_{máx} = 6 - w^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad w_o = \sqrt{6}\ \left(rd/s\right)$$

$$\begin{cases} \left|\mathbf{H(jw_o)}\right|_{máx} = \frac{3}{7} \cong 0{,}42 \\ \text{Para } w \to 0 \quad \Rightarrow \quad \left|\mathbf{H(jw)}\right| \to 0 \\ \text{Para } w \to \infty \quad \Rightarrow \quad \left|\mathbf{H(jw)}\right| \to 0 \end{cases}$$



d) A máxima resposta em regime permanente CA ocorre para **w =** $\sqrt{6}$ **rd/s**.

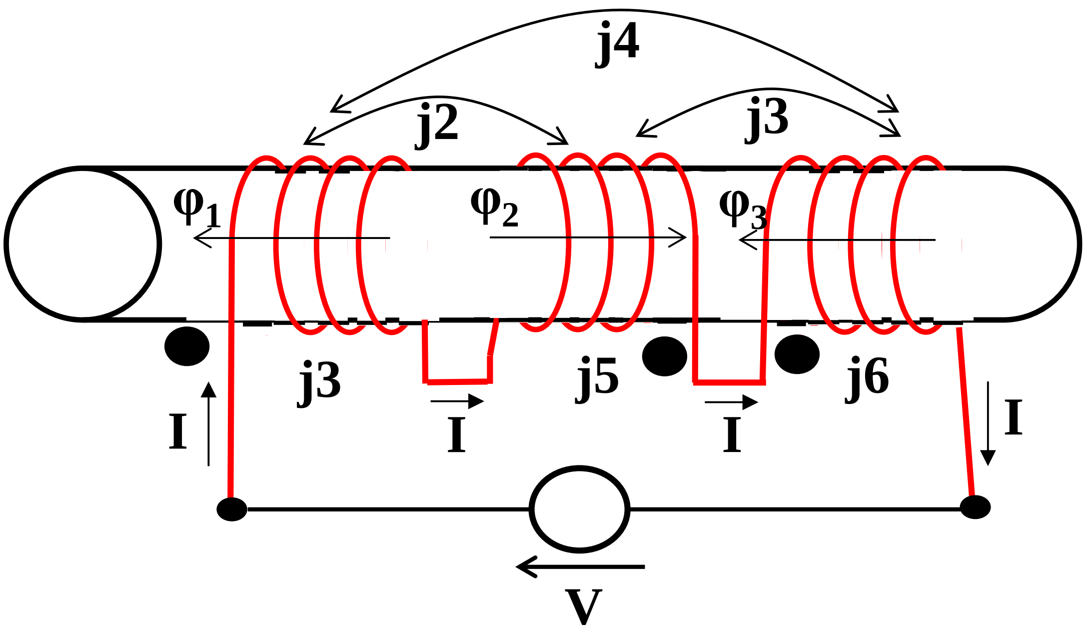
<u>Exemplo 2:</u> Sejam três bobinas enroladas em um núcleo de FeSi com os sentidos de enrolamento dados pelo esquema abaixo.



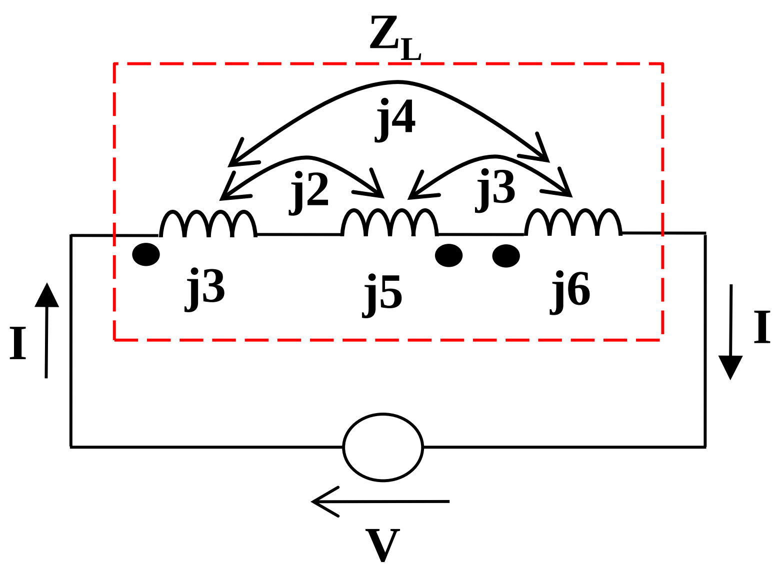
a) Efetuar a marcação dos pontos de polaridade das bobinas.
b) Determinar a reatância equivalente para esta combinação de bobinas.

Solução:

a) Efetuando a marcação dos pontos de polaridade das bobinas e energizando-as pode-se analisar os sentidos dos fluxos magnéticos provocados pelas mesmas.



b) Para determinar a reatância equivalente para esta combinação de bobinas analisemos o circuito equivalente apresentado a seguir.

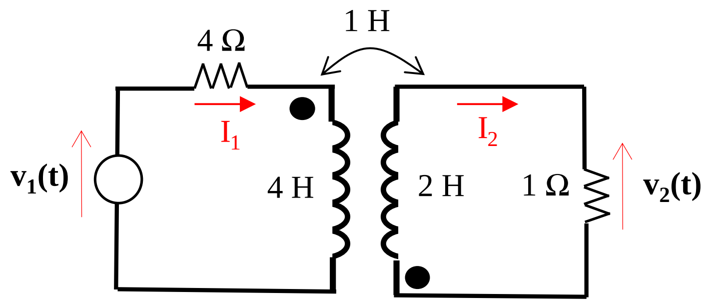


A reatância equivalente será dada por:

$$Z_L = \frac{V}{I} = j3 - j2 + j4 + j5 - j2 - j3 + j6 - j3 + j4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z_L = j(3 - 2 + 4 + 5 - 2 - 3 + 6 - 3 + 4) \Rightarrow Z_L = j12\,(\Omega)$$

Exemplo 3) Calcule o valor de $\mathbf{v_2(t)}$ em regime permanente para $\mathbf{v_1(t)} = 20\mathbf{cos(2t)}\ \mathbf{(V)}$



Aplicando a LKT:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = 4\mathbf{i}_1 + 4\dfrac{\mathbf{di}_1}{\mathbf{dt}} + 1\dfrac{\mathbf{di}_2}{\mathbf{dt}} \\ 0 = 1\mathbf{i}_2 + 2\dfrac{\mathbf{di}_2}{\mathbf{dt}} + 1\dfrac{\mathbf{di}_1}{\mathbf{dt}} \end{cases}$$

Aplicando a Transformada de Laplace:

$$\begin{cases} \mathbf{V}_1 = 4\mathbf{I}_1 + 4\mathbf{sI}_1 + \mathbf{sI}_2 \\ 0 = \mathbf{I}_2 + 2\mathbf{sI}_2 + \mathbf{sI}_1 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \mathbf{V}_1 = (4+4\mathbf{s})\mathbf{I}_1 + \mathbf{sI}_2 \\ 0 = \mathbf{sI}_1 + (2\mathbf{s}+1)\mathbf{I}_2 \end{cases} \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \begin{cases} \mathbf{V}_1 = (4+4\mathbf{s})\mathbf{I}_1 + \mathbf{sI}_2 \\ \mathbf{I}_1 = -\dfrac{(2\mathbf{s}+1)\mathbf{I}_2}{\mathbf{s}} \end{cases} \qquad \mathbf{V}_1 = (4\mathbf{s}+4)\left[-\dfrac{(2\mathbf{s}+1)\mathbf{I}_2}{\mathbf{s}}\right] + \mathbf{sI}_2 \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \mathbf{V}_1 = \left[-\dfrac{(4\mathbf{s}+4)(2\mathbf{s}+1)}{\mathbf{s}} + \mathbf{s}\right]\mathbf{I}_2 \quad \therefore \quad \mathbf{V}_1 = \left[-\dfrac{(4\mathbf{s}+4)(2\mathbf{s}+1) + \mathbf{s}^2}{\mathbf{s}}\right]\mathbf{I}_2 \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \dfrac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_1} = \dfrac{-\mathbf{s}}{(9\mathbf{s}^2 + 12\mathbf{s} + 4)} \quad \therefore \quad \dfrac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \dfrac{-\mathbf{s}}{(9\mathbf{s}^2 + 12\mathbf{s} + 4)}$$

$$\mathbf{V}_1 = 20\angle 0^{\circ}\ \mathbf{V} \quad ; \quad \mathbf{V}_2 \begin{cases} \mathbf{V}_1 = 4\mathbf{I}_1 + 4\mathbf{sI}_1 + \mathbf{sI}_2 \\ 0 = \mathbf{I}_2 + 2\mathbf{sI}_2 + \mathbf{sI}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4+4\mathbf{s})\mathbf{I}_1 + \mathbf{sI}_2 = \mathbf{V}_1 \ldots(1) \\ \mathbf{sI}_1 + (2\mathbf{s}+1)\mathbf{I}_2 = 0 \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

$$\textbf{De } (2): \mathbf{I}_1 = -\dfrac{(2\mathbf{s}+1)}{\mathbf{s}}\mathbf{I}_2; \textbf{ Substituindo } \mathbf{I}_1 \textbf{ em } (1):$$

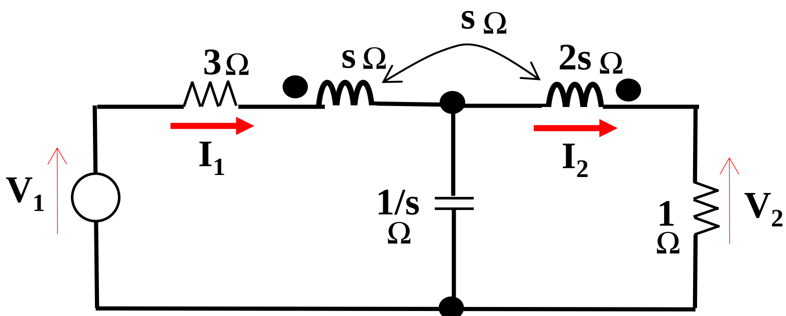
$$\mathbf{I}_2 = \left[-\dfrac{\mathbf{s}}{(4\mathbf{s}+4)(2\mathbf{s}+1) + \mathbf{s}^2}\right]\mathbf{V}_1 = \dfrac{-\mathbf{s}}{(9\mathbf{s}^2 + 12\mathbf{s} + 4)}\mathbf{V}_1 \Rightarrow \mathbf{V}_2 = \dfrac{-\mathbf{s}}{(9\mathbf{s}^2 + 12\mathbf{s} + 4)}(20\angle 0^{\circ}) \quad ; \quad \mathbf{s} = \mathbf{j}2$$

$$\textbf{Substituindo } \mathbf{s} = \mathbf{j}2:$$

$$\mathbf{V}_2 = -\dfrac{\mathbf{j}40}{(-32 + \mathbf{j}24)} = \dfrac{(40\angle -90^{\circ})}{(40\angle +143{,}13^{\circ})} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}_2 = 1\angle -233{,}13^{\circ} \quad \mathbf{V}$$

$$\textbf{Daí: } \quad \mathbf{v}_2(\mathbf{t}) = 1(\mathbf{cos}2\mathbf{t} - 233{,}13^{\circ}) \quad \mathbf{V}$$

Exemplo 4) Determinar a tensão $\mathbf{v_2(t)}$ no estado permanente para o circuito dado considerando $\mathbf{v_1(t) = 16cos(2t)\ (V)}$.



$$\mathbf{V_1} = 16\angle 0^o \quad ; \quad \mathbf{s} = j2 \ \left(\mathbf{rd}/\mathbf{s}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v_1(t)} = 16\,\mathbf{cos}(2\mathbf{t})\ \mathbf{V}$$

$$\mathbf{V_2} = (1)\mathbf{I_2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V_2} = \mathbf{I_2}$$

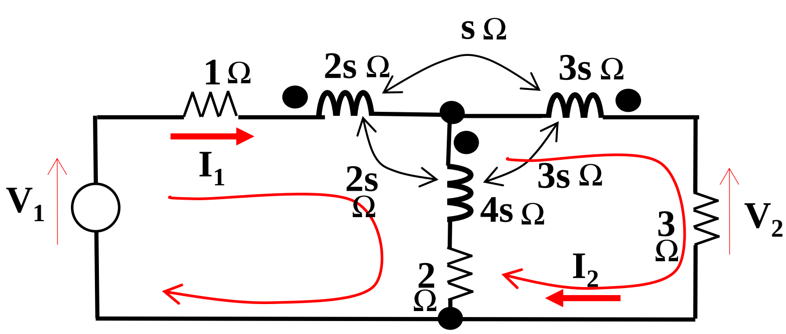
$$\begin{cases} \mathbf{V_1} = \left(\mathbf{s}+3+\dfrac{1}{\mathbf{s}}\right)\mathbf{I_1} - \left(\mathbf{s}+\dfrac{1}{\mathbf{s}}\right)\mathbf{I_2} \\ 0 = -\left(\mathbf{s}+\dfrac{1}{\mathbf{s}}\right)\mathbf{I_1} + \left(2\mathbf{s}+1+\dfrac{1}{\mathbf{s}}\right)\mathbf{I_2} \end{cases} \quad \therefore \quad \mathbf{H(s)} = \frac{\mathbf{I_2}}{\mathbf{V_1}} = \frac{\mathbf{V_2}}{\mathbf{V_1}} = \frac{\mathbf{s}^2+1}{(\mathbf{s}^3+7\mathbf{s}^2+4\mathbf{s}+4)}$$

Então :

$$\mathbf{V_2} = \frac{\left[(j2)^2+1\right](16\angle 0^o)}{(j2)^3+7(j2)^2+4(j2)+4} \quad \therefore \quad \mathbf{v_2(t)} = 2\,\mathbf{cos}(2\mathbf{t})\ (\mathbf{V})$$

Exemplo 5) Determinar a tensão $\mathbf{v_2(t)}$ no circuito dado.

(Circuito com Três Indutâncias Mútuas)



Calcular: $\mathbf{H(s)} = \dfrac{\mathbf{V_2}}{\mathbf{V_1}}$; $\mathbf{V_2} = 3\mathbf{I_2}$

$$\begin{cases} \mathbf{V_1 = (1)I_1 + 2sI_1 + 2s(I_1 - I_2) - sI_2 + 4s(I_1 - I_2) + 2sI_1 - 3sI_2 + 2(I_1 - I_2)} \\ \mathbf{0 = 2(I_2 - I_1) + 4s(I_2 - I_1) - 2sI_1 + 3sI_2 + 3sI_2 - sI_1 + 3s(I_2 - I_1) + 3I_2} \end{cases} \therefore$$

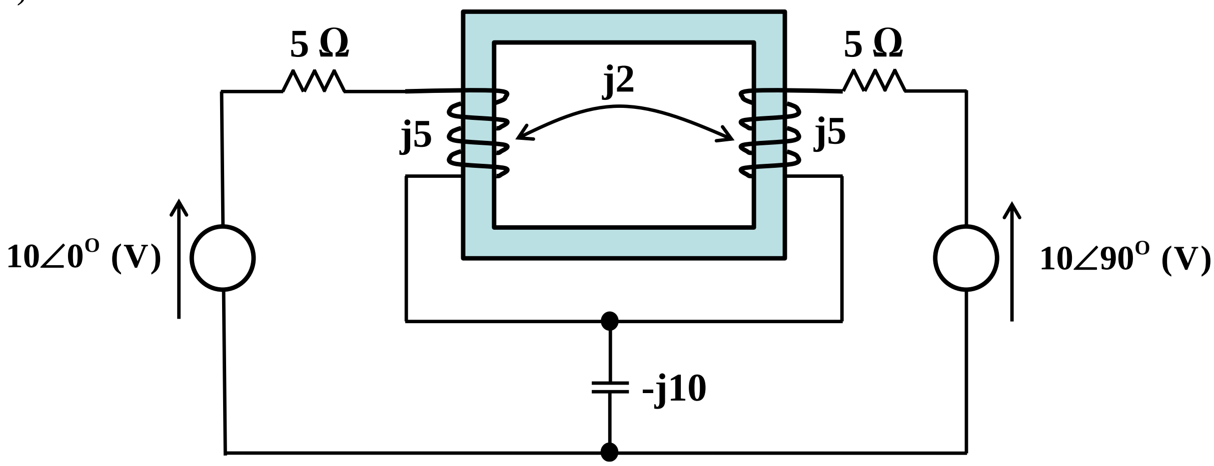
$$\therefore \quad \begin{cases} \mathbf{V_1 = (10s+3)\,I_1 - (10s+2)I_2} \\ \mathbf{0 = -(10s+2)\,I_1 + (13s+5)I_2} \end{cases}$$

$$\mathbf{H(s)} = \frac{\mathbf{V_2}}{\mathbf{V_1}} = \frac{\mathbf{3I_2}}{\mathbf{V_1}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H(s)} = \frac{\mathbf{3(10s+2)}}{\mathbf{(30s^2+49s+11)}}$$

Para calcular $\mathbf{v_2(t)} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V_2 = H(s)V_1(s)} \quad \therefore \quad \boxed{\mathbf{v_2(t) = L^{-1}\{H(s)V_1(s)\}}}$

<u>Exercícios:</u> **D**eterminar o circuito equivalente com os "**PONTOS**" de polaridade para os circuitos dados. Em seguida calcular as correntes para cada circuito equivalente.

a)



b)