INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

MAT 271 – Cálculo Numérico – PER3/UFV/2021

Professor Amarísio Araújo – DMA/UFV

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL APROXIMAÇÕES DE FUNÇÕES

- A Interpolação Polinomial é uma das estratégias de Aproximações de Funções.
- O objetivo é encontrar uma função polinomial p que possa ser usada como uma aproximação de uma dada função real f em algum intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
- A necessidade de se fazer tal aproximação pode ocorrer em situações práticas, como as seguintes:

APROXIMAÇÕES DE FUNÇÕES

- A expressão para $f(x)$ não é conhecida, e só sabemos dos valores de $f(x)$ em um número finito de pontos do intervalo $[a, b]$, isto é, conhecemos $f(x_0), f(x_1), f(x_2),\dots, f(x_n)$, em $n+1$ pontos $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ do intervalo $[a, b]$ (a função é tabelada). Assim, se quisermos saber quem é $f(\bar{x})$ para algum $\bar{x}$ entre x_0 e x_n, que não seja nenhum dos $x_k, k = 0,1,2, \dots n$, podemos usar a função polinomial p para estima-lo: $f(\bar{x}) \cong p(\bar{x})$.

- A expressão $f(x)$ da função é conhecida e f é uma função de difícil derivação ou de difícil integração, por exemplo. Usando uma função polinomial p como uma aproximação de f, a derivação e a integração de $p(x)$ seriam uma aproximação da derivação e da integração de $f(x)$no intervalo $[x_0, x_n]$.

EXEMPLIFICANDO A PRIMEIRA SITUAÇÃO

A tabela abaixo mostra o tamanho da população brasileira (em milhões) entre os anos de 1960 a 2010, a cada 10 anos.

Ano	**1960**	**1970**	**1980**	**1990**	**2000**	**2010**
População	72.7759	96.0604	121.7404	149.6483	174.5049	195.2102

Podemos considerar que a tabela mostra a população brasileira como uma função f de modo que $f(x)$ representa a população brasileira no ano x com $x \in [1960,2010]$.

Assim, para saber a população brasileira no ano de 1985, por exemplo, que está entre 1960 e 2010 e não aparece na tabela, uma estratégia é obter um polinômio $p(x)$ que seja uma aproximação de $f(x)$ no intervalo considerado, e obter uma estimativa para a população brasileira em 1985:

$$\boxed{f(1985) \cong p(1985)}$$

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Seja a função f tal que os valores $f(x_0), f(x_1), f(x_2),..., f(x_n)$ em $n+1$ pontos distintos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ de um intervalo $[a, b]$ são conhecidos.

Fazer uma interpolação polinomial de $f(x)$ é encontrar um polinômio $p_n(x)$ de grau menor ou igual a n tal que:

$$p_n(x_i) = f(x_i), i = 0,1, \dots, n.$$

Polinômio interpolador de $f(x)$

Considerando $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, $p_n(x)$ é uma aproximação da função $f(x)$ no intervalo $[x_0, x_n]$.

VAMOS MOSTRAR QUE ESTE POLINÔMIO EXISTE E É ÚNICO

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

$$p_n(x_i) = f(x_i), i = 0,1, \dots , n.$$

O objetivo é: encontrar números reais $a_0, a_1, a_2, \dots , a_n$ (coeficientes do polinômio), e mostrar que são únicos.

VAMOS MOSTRAR QUE ESTE POLINÔMIO EXISTE E É ÚNICO

$$p_n(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 {x_i}^2 + \cdots + a_n {x_i}^n = f(x_i), i = 0,1,\ldots,n.$$

$$p_n(x_0) = f(x_0) \quad \Longrightarrow \quad a_0 + a_1 x_0 + a_2 {x_0}^2 + \cdots + a_n {x_0}^n = f(x_0)$$

$$p_n(x_1) = f(x_1) \quad \Longrightarrow \quad a_0 + a_1 x_1 + a_2 {x_1}^2 + \cdots + a_n {x_1}^n = f(x_1)$$

$$\vdots$$

$$p_n(x_n) = f(x_n) \quad \Longrightarrow \quad a_0 + a_1 x_n + a_2 {x_n}^2 + \cdots + a_n {x_n}^n = f(x_n)$$

UM SISTEMA LINEAR

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2{x_0}^2 + \cdots + a_n{x_0}^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2{x_1}^2 + \cdots + a_n{x_1}^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2{x_n}^2 + \cdots + a_n{x_n}^n = f(x_n) \end{cases}$$

Um sistema linear com $n + 1$ incógnitas, a_0, a_1, a_2,..., a_n, e $n + 1$ equações.

$AX = B$, com $X = [a_0, a_1, \dots, a_n]^T$, $B = [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)]^T$ e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 & \dots & {x_0}^n \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^n \end{bmatrix}$$

DETERMINANTE DA MATRIZ A DOS COEFICIENTES

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 & \cdots & {x_0}^n \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^n \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

(Determinante de Vandermonde)

$$\det(A) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\dots(x_1 - x_n)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)\dots(x_2 - x_n)\dots(x_{n-1} - x_n)$$

Como os pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$ são todos distintos, segue que $\det(A) \neq 0$.

Logo, o sistema linear possui solução única e, portanto, os coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ do polinômio $p_n(x)$ são únicos e obtidos como solução do sistema.

Portanto, acabamos de mostrar que o polinômio interpolador $p_n(x)$ de $f(x)$, com as condições $p_n(x_i) = f(x_i), i = 0,1,2, \dots, n$, existe e é único.

EXEMPLO

Consideremos a função f dada pela tabela:

x	-1	0	2
$f(x)$	4	1	-1

Vamos encontrar o polinômio interpolador de f: $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$\boxed{\begin{aligned} p_2(-1) &= f(-1) = 4 \\ p_2(0) &= f(0) = 1 \\ p_2(2) &= f(2) = -1 \end{aligned}} \Rightarrow \begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 4 \\ a_0 = 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -1 \end{cases}$$

Solução do sistema: $a_0 = 1,\ a_1 = -\frac{7}{3},\ a_2 = \frac{2}{3}$

$\boxed{\text{Portanto: } p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2}$

Estimando o valor de f no ponto $x = 0.8$ (não tabelado), por exemplo:

$$f(0.8) \cong p_2(0.8) = -0.44$$

MÉTODOS PARA ENCONTRAR O POLINÔMIO INTERPOALADOR SEM USAR SISTEMAS LINEARES

- O polinômio interpolador existe e é único.
- Podemos obter o polinômio interpolador, resolvendo um sistema linear.
- Há outras estratégias mais interessantes do ponto de vista computacional para encontrar o polinômio interpolador.
- Aprenderemos, aqui, duas dessas estratégias.

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL DE LAGRANGE

- Seja a função f tal que os valores $f(x_0), f(x_1), f(x_2),..., f(x_n)$ em $n+1$ pontos distintos $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ de um intervalo $[x_0, x_n]$ são conhecidos.
- Propõe-se um polinômio interpolador de $f(x)$, como um polinômio $p_n(x)$ de grau menor ou igual a n da seguinte forma:

$$p_n(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + \cdots + f(x_n)L_n(x).$$

POLINÔMIO DE LAGRANGE

Sendo $L_k(x), k = 0,1,2, \ldots, n$, polinômios de grau n, obtidos como veremos a seguir:

OBTENDO OS POLINÔMIOS $L_k(x), k = 0,1,2, \dots, n$

- $p_n(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + \cdots + f(x_n)L_n(x)$

- $p_n(x_i) = f(x_i), i = 0,1,2, \dots, n.$

- Observe que se $L_k(x_i) = \begin{cases} 1, & se\ i = k \\ 0, & se\ i \neq k \end{cases}$, teremos $p_n(x_i) = f(x_i), i = 0,1,2, \dots, n.$

- Logo, os polinômios $L_k(x), k = 0,1,2, \dots, n$, devem ser construídos com a condição apresentada acima.

OBTENDO OS POLINÔMIOS $L_k(x), k = 0,1,2, \ldots, n$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)\,(x - x_2)\,(x - x_3) \ldots\,(x - x_n)}{(x_0 - x_1)\,(x_0 - x_2)\,(x_0 - x_3) \ldots\,(x_0 - x_n)}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} L_0(x_0) = 1 \\ L_0(x_i) = 0, i \neq 0 \end{array}}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)\,(x - x_2)\,(x - x_3) \ldots\,(x - x_n)}{(x_1 - x_0)\,(x_1 - x_2)\,(x_1 - x_3) \ldots\,(x_1 - x_n)}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} L_1(x_1) = 1 \\ L_1(x_i) = 0, i \neq 1 \end{array}}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_3) \ldots\,(x - x_n)}{(x_2 - x_0)\,(x_2 - x_1)\,(x_2 - x_3) \ldots\,(x_0 - x_n)}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} L_2(x_2) = 1 \\ L_2(x_i) = 0, i \neq 2 \end{array}}$$

$$\vdots$$

OBTENDO OS POLINÔMIOS $L_k(x), k = 0,1,2,\ldots,n$

$$L_n(x) = \frac{(x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)\,(x_n - x_1)\,(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} L_n(x_n) = 1 \\ L_n(x_i) = 0, i \neq n \end{array}}$$

UMA FÓRMULA GERAL

$$\boxed{L_k(x) = \frac{(x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\,(x_k - x_1)\,(x_k - x_2)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}}$$

PARA EVITAR CONFUSÃO, É MELHOR CONSIDERAR A FÓRMULA ACIMA PARA $k \neq 0$, ESCREVENDO O CASO $k = 0$ SEPARADO:

$$\boxed{L_0(x) = \frac{(x - x_1)\,(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)\,(x_0 - x_2)\,(x_0 - x_3)\ldots(x_0 - x_n)}}$$

CASO MAIS SIMPLES

x	x_0	x_1
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$

Polinômio de Lagrange: $p_1(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x)$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \qquad L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$\boxed{p_1(x) = f(x_0)\frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + f(x_1)\frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}}$$

$$\boxed{p_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0)}$$

Equação da secante ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$

EXEMPLO

O mesmo anterior:

x	-1	0	2
$f(x)$	4	1	-1

Encontramos

$$p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$$

Usando Lagrange: $p_2(x) = 4L_0(x) + 1L_1(x) - 1L_2(x)$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)\,(x - x_2)}{(x_0 - x_1)\,(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0)\,(x - 2)}{(-1 - 0)\,(-1 - 2)} = \frac{1}{3}x(x - 2)$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)\,(x - x_2)}{(x_1 - x_0)\,(x_1 - x_2)} = \frac{(x - (-1))\,(x - 2)}{(0 - (-1))\,(0 - 2)} = -\frac{1}{2}(x + 1)(x - 2)$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)\,(x - x_1)}{(x_2 - x_0)\,(x_2 - x_1)} = \frac{(x - (-1))\,(x - 0)}{(2 - (-1))\,(2 - 0)} = \frac{1}{6}(x + 1)x$$

$$p_2(x) = \frac{4}{3}x(x - 2) - \frac{1}{2}(x + 1)(x - 2) - \frac{1}{6}(x + 1)x$$

$$\boxed{p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2}$$

RESOLVENDO AQUELE PROBLEMA LÁ DO INÍCIO

A tabela abaixo mostra o tamanho da população brasileira (em milhões) entre os anos de 1960 a 2010, a cada 10 anos

Ano	**1960**	**1970**	**1980**	**1990**	**2000**	**2010**
População	72.7759	96.0604	121.7404	149.6483	174.5049	195.2102

O tamanho da população brasileira no ano x é $f(x)$, com $x \in [1960{,}2010]$. Vamos encontrar o polinômio interpolador de Lagrange de $f(x)$ no intervalo acima e usá-lo para estimar a população brasileira em 1985.

		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x	**Ano**	**1960**	**1970**	**1980**	**1990**	**2000**	**2010**
$f(x)$	População	72.7759	96.0604	121.7404	149.6483	174.5049	195.2102
		$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$

$$L_0(x) = \frac{(x-1970)\,(x-1980)(x-1990)(x-2000)(x-2010)}{(-10)(-20)(-30)(-40)(-50)}$$

$$\boxed{L_0(x) = \frac{(x-1970)\,(x-1980)(x-1990)(x-200)(x-2010)}{-12000000}}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1960)\,(x-1980)(x-1990)(x-2000)(x-2010)}{(10)(-10)(-20)(-30)(-40)}$$

$$\boxed{L_1(x) = \frac{(x-1960)\,(x-1980)(x-1990)(x-2000)(x-2010)}{2400000}}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1960)\,(x-1970)(x-1990)(x-2000)(x-2010)}{(20)(10)(-10)(-20)(-30)}$$

$$\boxed{L_2(x) = \frac{(x-1960)\,(x-1970)(x-1990)(x-2000)(x-2010)}{-1200000}}$$

	x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x	**Ano**	**1960**	**1970**	**1980**	**1990**	**2000**	**2010**
$f(x)$	População	72.7759	96.0604	121.7404	149.6483	174.5049	195.2102
		$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$

$$L_3(x) = \frac{(x-1960)(x-1970)\,(x-1980)(x-2000)(x-2010)}{(30)(20)(10)(-10)(-20)}$$

$$\boxed{L_3(x) = \frac{(x-1960)(x-1970)\,(x-1980)(x-2000)(x-2010)}{1200000}}$$

$$L_4(x) = \frac{(x-1960)(x-1970)(x-1980)(x-1990)(x-2010)}{(40)(30)(20)(10)(-10)}$$

$$\boxed{L_4(x) = \frac{(x-1960)(x-1970)(x-1980)(x-1990)(x-2010)}{-2400000}}$$

$$L_5(x) = \frac{(x-1960)\,(x-1970)(x-1980)(x-1990)(x-2000)}{(50)(40)(30)(20)(10)}$$

$$\boxed{L_5(x) = \frac{(x-1960)\,(x-1970)(x-1980)(x-1990)(x-2000)}{12000000}}$$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x: **Ano**	**1960**	**1970**	**1980**	**1990**	**2000**	**2010**
$f(x)$: População	72.7759	96.0604	121.7404	149.6483	174.5049	195.2102
	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$

$$p_5(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) + f(x_4)L_4(x) + f(x_5)L_5(x)$$

$$p_5(1985) =$$
$$= f(x_0)L_0(1985) + f(x_1)L_1(1985) + f(x_2)L_2(1985) + f(x_3)L_3(1985) + f(x_4)L_4(1985) + f(x_5)L_5(1985)$$

$$p_5(1985) = 135729020$$

Portanto, a população brasileira em 1985 era de aproximadamente 135.729 milhões de habitantes