UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA – UFV
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – CCE
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA - DEL

Sistemas de Controle II

ELT331

AULA 23 – Implementação de Controladores Digitais

Prof. Tarcísio Pizziolo

23. Implementação de Controladores Digitais

A implementação de Controladores Digitais depende de seus parâmetros que serão substituídos em seu algoritmo de execução

Os algoritmos são ciclos a serem realizados por computadores onde a aproximação do tempo contínuo pelo tempo discreto pode ser feita por dois métodos os quais iremos estudar.

1) Método de Euler
2) Método de Tustin (Bilinear)

23.1. Método de Euler (Aplica-se no domínio s)

Utiliza a aproximação da derivada de x(t) pela expressão matemática:

$$\dot{x}(t) \cong \frac{x(k+1) - x(k)}{T}$$

<u>Exemplo 1:</u> Dado o controlador **$G_C(s)$** no tempo contínuo, obter a lei de controle pelo **Método de Euler** para um controlador digital equivalente.

$$G_C(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_c \frac{(s+a)}{(s+b)}$$

$$M(s)(s+b) = K_c(s+a)E(s) \Rightarrow L^{-1}\{.\} \Rightarrow \dot{m}(t) + bm(t) = K_c\dot{e}(t) + K_c ae(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{m}(t) + bm(t) = K_c[\dot{e}(t) + ae(t)]$$

Aplicando a aproximação de Euler às derivadas de **m(t)** e de **e(t)**:

$$\frac{m(k+1) - m(k)}{T} + bm(k) = K_c[\frac{e(k+1) - e(k)}{T} + ae(k)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(k+1) = m(k) + T\{-bm(k) + K_c[\frac{e(k+1) - e(k)}{T} + ae(k)]\}$$

23.1. Método de Euler

Atrasando 1 (um) período de amostragem:

$$m(k) = m(k-1) + T\{-bm(k-1) + K_c[\frac{e(k) - e(k-1)}{T} + ae(k-1)]\}$$

Nota: O período de amostragem influencia a equação de diferenças afetando o valor dos coeficientes da lei de controle.

Algoritmo para implementação da lei de controle

- Ler **y(k)** (saída) e $\mathbf{y_r(k)}$ (set-point)
- Calcular **e(k)** = $\mathbf{y_r(k) - y(k)}$
- Calcular **m(k)** pela lei de controle
- Limitar **m(k)** aos valores mínimos e máximos ($\mathbf{M_{min}}$, $\mathbf{M_{max}}$)
- Aplicar **m(k)**
- Atualizar **m(k-1)** = **m(k)** e **e(k-1) = e(k)**
- Esperar até completar **T** segundos.

23.1. Método de Euler

<u>Exemplo 2:</u> Seja **G_c(s)** um controlador em Avanço de Fase projetado utilizando ferramentas clássicas dado por:

$$G_c(s) = 70\frac{(s+2)}{(s+10)}$$

Para um período de amostragem **T = 0,05 s**, determinar a lei de controle para este controlador pelo **Método de Euler**.

Solução:

$$m(k) = m(k-1) + 0{,}05\{-10m(k-1) + 70[\frac{e(k)-e(k-1)}{0{,}05} + 2e(k-1)]\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m(k) = 0{,}5m(k-1) + 70[e(k) - 0{,}9e(k-1)]}$$

Entretanto, se for para **T = 0,025 s** tem-se:

$$\boxed{m(k) = 0{,}75m(k-1) + 70[e(k) - 0{,}95e(k-1)]}$$

NOTA: Observar que para **T = 0,025 s** o controlador altera (aumenta) os coeficientes de **m(k-1)** e de **e(k-1)**.

23.2. Método de Tustin (Bilinear) (Aplica-se no domínio z)

Dado um controlador $\mathbf{G_C(s)}$ no tempo contínuo, aplicando-se a aproximação de **Tustin** (ou bilinear) diretamente sobre a equação do mesmo btém-se o controlador digital **D(z)**.

$$s \cong \frac{2}{T}\frac{(z-1)}{(z+1)}$$

Exemplo 3: Dado o controlador $\mathbf{G_c(s)}$ no tempo contínuo, obter o controlador digital **D(z)** e sua lei de controle equivalente para **T = 1 s**.

$$G_c(s) = 10\frac{(s+3)}{(s+5)}$$

$$G_c(s) = 10\frac{\left(\frac{2}{1}\frac{(z-1)}{(z+1)}+3\right)}{\left(\frac{2}{1}\frac{(z-1)}{(z+1)}+5\right)} \Rightarrow D(z) = 10\frac{\left(\frac{2(z-1)+3(z+1)}{(z+1)}\right)}{\left(\frac{2(z-1)+5(z+1)}{(z+1)}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{D(z) = 10\frac{(5z+1)}{(7z+3)}}$$

23.2. Método de Tustin (Bilinear) (Aplica-se no domínio z)

Lei de controle pelo Método de Tustin (Bilinear)

$$D(z) = 10\frac{(5z+1)}{(7z+3)} \Rightarrow \frac{M(z)}{E(z)} = 10\frac{(5z+1)}{(7z+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (7z+3)M(z) = 10(5z+1)E(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7zM(z) + 3M(z) = 50zE(z) + 10E(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7m(k+1) + 3m(k) = 50e(k+1) + 10e(k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(k+1) = -\frac{3}{7}m(k) + \frac{50}{7}e(k+1) + \frac{10}{7}e(k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m(k) = -\frac{3}{7}m(k-1) + \frac{50}{7}e(k) + \frac{10}{7}e(k-1)}$$

23.2. Método de Tustin (Bilinear)

Considerando um controlador digital com entrada **E(z)** e saída **M(z)**:

$$E(s) \longrightarrow \boxed{G_c(s)} \longrightarrow M(z) \quad \Rightarrow \quad \underset{X(z)}{E(z)} \longrightarrow \boxed{D(z)} \longrightarrow \underset{Y(z)}{M(z)}$$

$$G_c(s) = \frac{1}{s}$$

$$\text{Pelo Método de Tustin:} \quad Y(z) = \overbrace{\frac{T}{2}\frac{(z+1)}{(z-1)}}^{1/s} X(z)$$

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{T}{2}\left[\frac{(z+1)}{(z-1)}\right] \Rightarrow M(z) = \frac{T}{2}\left[\frac{(z+1)}{(z-1)}\right]E(z) \Rightarrow (z-1)M(z) = \frac{T}{2}(z+1)E(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow zM(z) = M(z) + \frac{T}{2}zE(z) + \frac{T}{2}E(z)$$

$$\text{Aplicando a } Z^{-1}\{.\}:$$

$$m[(k+1)T] = m(kT) + \frac{T}{2}\{e[(k+1)T] + e(kT)\}$$

$$\text{Atrasando uma amostragem e retirando o } T:$$

$$\boxed{m(k) = m(k-1) + \frac{T}{2}[e(k-1) + e(k)]}$$

Esta é a lei de controle aplicando o **Método de Tustin**!

23.2. Método de Tustin (Bilinear)

Exemplo 4: Dado o controlador **D(z)** obter a lei de controle pelo Método de Tustin.

$$D(z) = \frac{(z-0{,}7)}{(z-0{,}5)}$$

Solução:

$$D(z) = \frac{(z-0{,}7)}{(z-0{,}5)} \Rightarrow (z-0{,}5)M(z) = (z-0{,}7)E(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow zM(z) - 0{,}5M(z) = zE(z) - 0{,}7E(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m[(k+1)T] - 0{,}5m(kT) = e[(k+1)T] - 0{,}7e(kT) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m[(k+1)T] = 0{,}5m(kT) + e[(k+1)T] - 0{,}7e(kT) \Rightarrow$$

Atrasando uma amostragem:

$$\Rightarrow m(kT) = 0{,}5m[(k-1)T] + e(kT) - 0{,}7e[(k-1)T]$$

Retirando T:

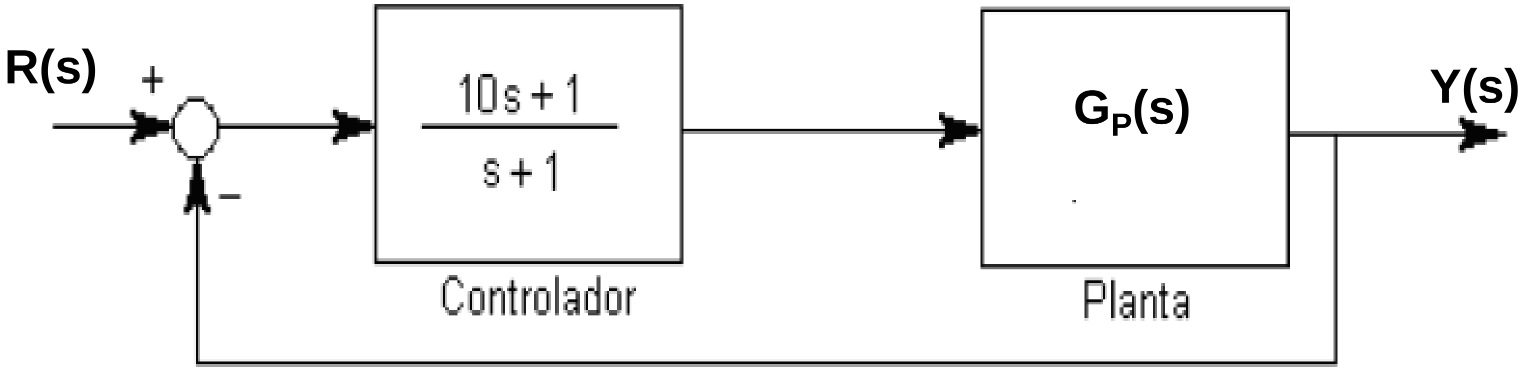
$$\boxed{m(k) = 0{,}5m(k-1) + e(k) - 0{,}7e(k-1)}$$

Exercício:

Dado o sistema de controle abaixo, determinar as leis de controle para um controlador **D(z)** com **T = 0,2 s** utilizando:

a) o Método de Euler;

b) o Método de Tustin.



$$G_c(s) = \frac{10s + 1}{s + 1} \Longrightarrow \boxed{G_c(s) = 10\,\frac{(s + 0{,}1)}{(s + 1)}}$$

SOLUÇÃO:

$$D(z) = 9,16\frac{(z-0,9802)}{(z-0,8187)}$$

a) EULER:

$$\mathbf{m(k) = m(k-1) + T\{-bm(k-1) + K_c[\frac{e(k)-e(k-1)}{T} + ae(k-1)]\}}$$

b) TUSTIN:

$$\mathbf{m(k) = m(k-1) + \frac{T}{2}[e(k-1) + e(k)]}$$

Resposta onde u(k) = m(k):

$$u(k) = 0,8187.u(k-1) + 9,16\left[e(k) - 0,9802.e(k-1)\right]$$