ELT221 - Circuitos Elétricos II

Prof. Tarcísio Pizziolo

Aula 8

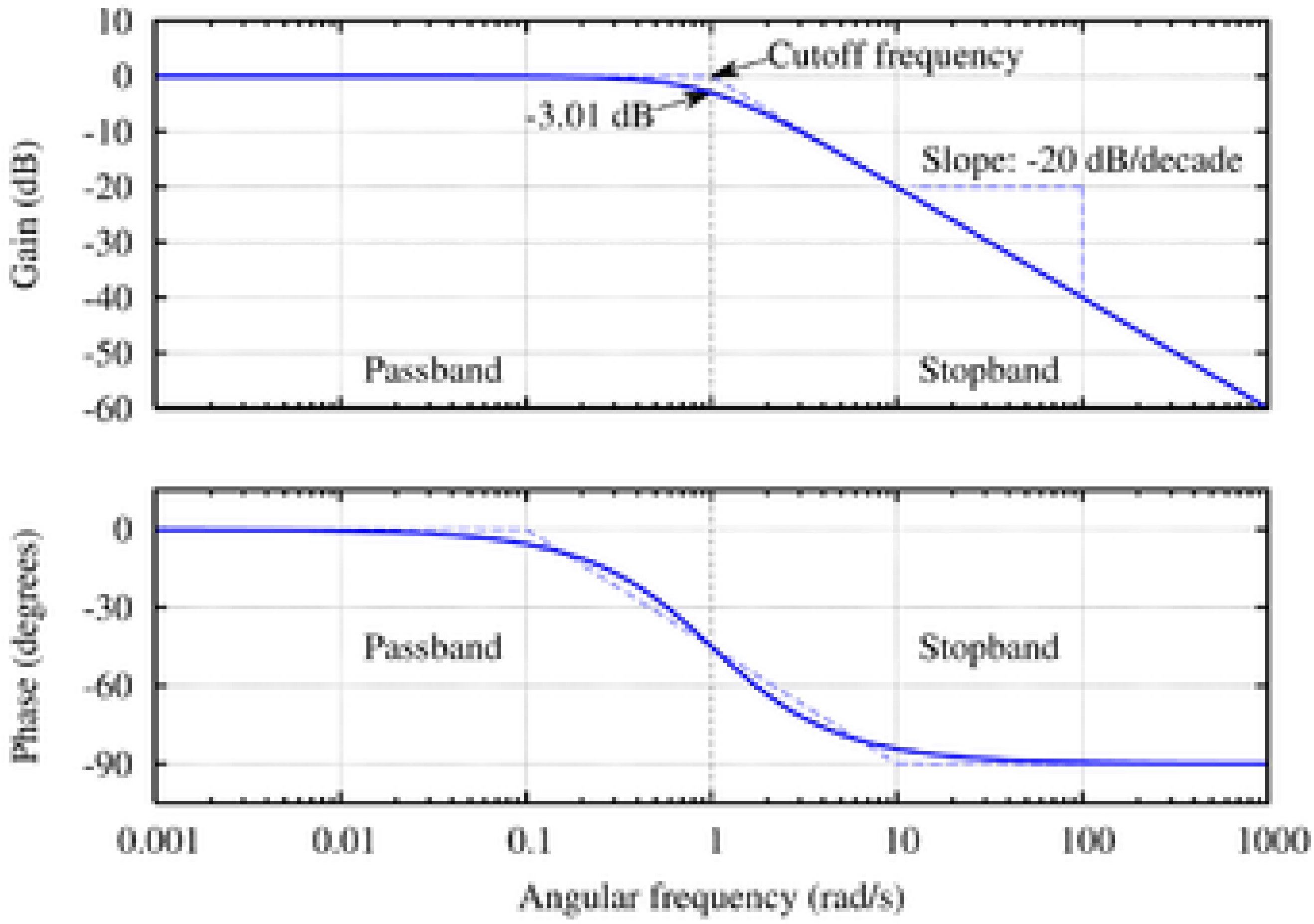
8) Filtros Especiais

8.1) Filtro Butterworth

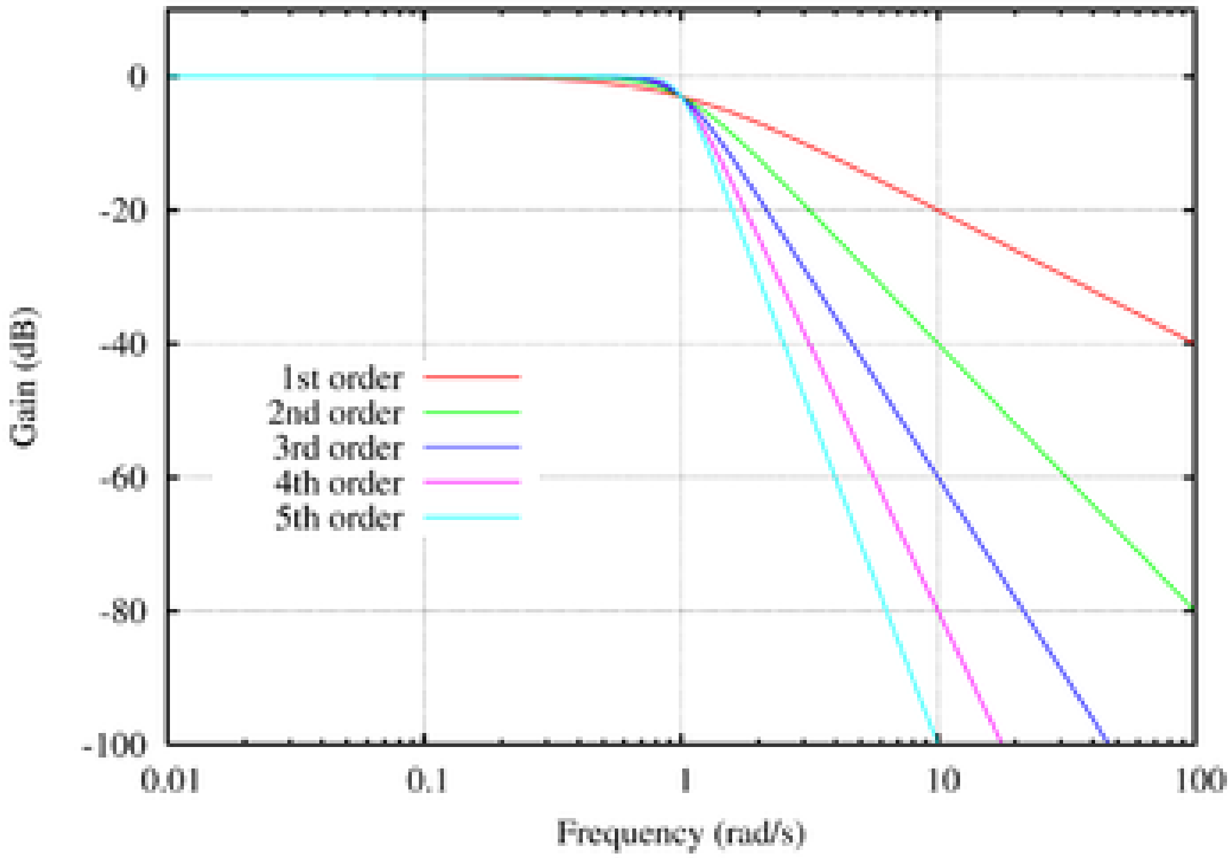
O **Filtro Butterworth** é um tipo de projeto de **filtros eletrônicos**. Ele é desenvolvido de modo a ter **uma resposta em frequência o mais plana o quanto for matematicamente possível na banda passante**.

Os **Filtros Butterworth** foram descritos primeiramente pelo engenheiro britânico **Stephen Butterworth** em sua publicação "*On the Theory of Filter Amplifiers*", *Wireless Engineer* (também chamada de *Experimental Wireless and the Radio Engineer*), vol. 7, 1930, pp. 536-541.

A figura a seguir apresenta a resposta em frequência de um **Filtro Butterworth Passa-Baixas de primeira ordem**.



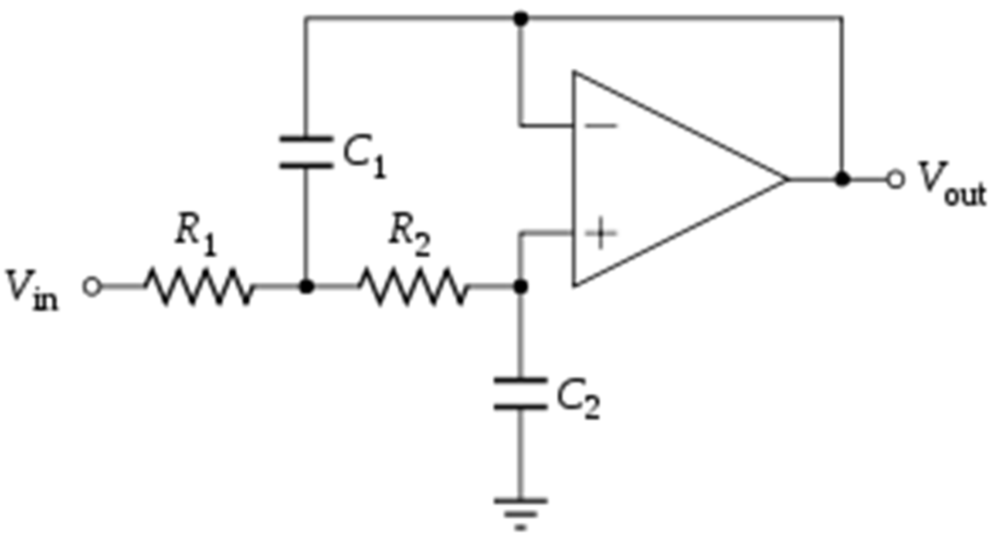
A figura a seguir apresenta uam visão geral das respostas em frequência de um **Filtro Butterworth Passa-Baixas de primeira até quinta ordem**.



A resposta em frequência de um **Filtro Butterworth é “muito plana”** (não possui ***ripple***, ou ondulações) **na banda passante**, e **se aproxima do zero na banda rejeitada**. Quando visto em um gráfico logarítmico, esta resposta desce linearmente até o infinito negativo. **Para um filtro de primeira ordem, a resposta varia em −20 dB por década**.

Para um **Filtro Butterworth de segunda ordem**, **a resposta em frequência varia em −40 dB por década, em um filtro de terceira ordem a variação é de −60 dB por década e assim por diante.** Os **Filtros Butterworth** possuem uma queda na sua magnitude como uma **função linear com w**.

A figura a seguir apresenta **um exemplo** de um **Filtro Passa-Baixas Butterworth** de **segunda ordem**.



O **Filtro Butterworth é o único filtro que mantém o mesmo formato para ordens mais elevadas** (porém com uma inclinação mais íngreme na banda atenuada).

Função de Transferência

Como em todos os gêneros de filtros, o modelo típico do **Filtro Butterworth** é o **Filtro Passa-Baixas**, que pode ser modificado para se tornar um **Filtro Passa-Altas**, ou colocado em série com outros filtros para formar **Filtros Passa-Faixa** ou **Corta-Faixa**, e versões de ordem mais elevadas destes.

Resumo dos Filtros de Butterworth

Função de Transferência: $\boxed{G_n(jw) = \dfrac{w_c^n}{Q(s)}}$

Ordem do Filtro n	*Polinômio Q(s)*
1	$s+\omega_c$
2	$s^2+\sqrt{2}\,\omega_c s+\omega_c^2$
3	$s^3+2\omega_c s^2+2\omega_c^2 s+\omega_c^3$
4	$s^4+2.6131\omega_c s^3+3.4142\omega_c^2 s^2+2.6131\omega_c^3 s+\omega_c^4$
5	$s^5+3.2361\omega_c s^4+5.2361\omega_c^2 s^3+5.2361\omega_c^3 s^2+3.2361\omega_c^4 s+\omega_c^5$
6	$s^6+3.8637\omega_c s^5+7.4641\omega_c^2 s^4+9.1416\omega_c^3 s^3+7.4641\omega_c^4 s^2+3.8637\omega_c^5 s+\omega_c^6$

A **amplitude** (módulo) da resposta em frequência de um **Filtro Passa-Baixas** de ordem ***n*** pode ser **definida matematicamente** como:

$$|G_n(jw)| = \frac{w_c^n}{\sqrt{1+\left(\dfrac{w}{w_c}\right)^{2n}}}$$

onde:

- ***$G_n(jw)$*** é a Função de Transferência
- ***n*** é a ordem do filtro
- **w** é a frequência angular do sinal em rad/s'
- **w_c** é a frequência de corte

Normalizando a expressão (**$w_c = 1$**), tem-se:

$$|G_n(jw)| = \frac{1}{\sqrt{1+w^{2n}}}$$

8.2) Filtro Chebyshev

Os **Filtros Chebyshev** são **filtros analógicos** ou **digitais** que possuem um **aumento na atenuação mais íngreme** e uma **maior ondulação** (***ripple***) na **banda passante** que os **Filtros Butterworth**.

Os **Filtros Chebyshev** possuem a propriedade de **minimizarem o erro entre as características do filtro idealizado e o real com relação à faixa do filtro, porém com ripples na banda passante**.

Este tipo de filtro recebeu seu nome em homenagem **Pafnuty Chebyshev**, devido a suas **características matemáticas** serem derivadas dos **polinômios de Chebyshev**.

Filtros Chebyshev do Tipo I

Estes são o tipo **mais comum dos Filtros Chebyshev**.

A sua característica da amplitude em frequência de ordem **n** pode ser descrita matematicamente como:

$$|G_n(jw)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{w}{w_c}\right)}} \; ; \; T_n = \begin{cases} \cos(n \times \cos^{-1}(w/w_c)); & 0 \le w/w_c \le 1 \\ \cosh(n \times \cosh^{-1}(w/w_c)); & w/w_c > 1 \end{cases} \; ; \; |\varepsilon| < 1$$

O parâmetro ε é relacionado à atenuação da **Banda Rejeitada** γ em decibéis dada por:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1\gamma} - 1}$$

Para uma atenuação de banda rejeitada de γ = **5 dB**, ε = **0,6801**; para uma atenuação de **10 dB**, ε = **0,3333**.

Na frequência de corte **w = w**$_c$ e para **T = 1 s** tem-se que $|G(jw_c)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$.

Filtros Chebyshev do Tipo II

Também conhecidos como **Chebyshev Invertidos**, este tipo é menos comum pois requer uma maior quantidade de componentes. **Ele não possui *ripple* em sua banda passante, porém possui *ripple* na sua banda atenuada**. Sua função de transferência é:

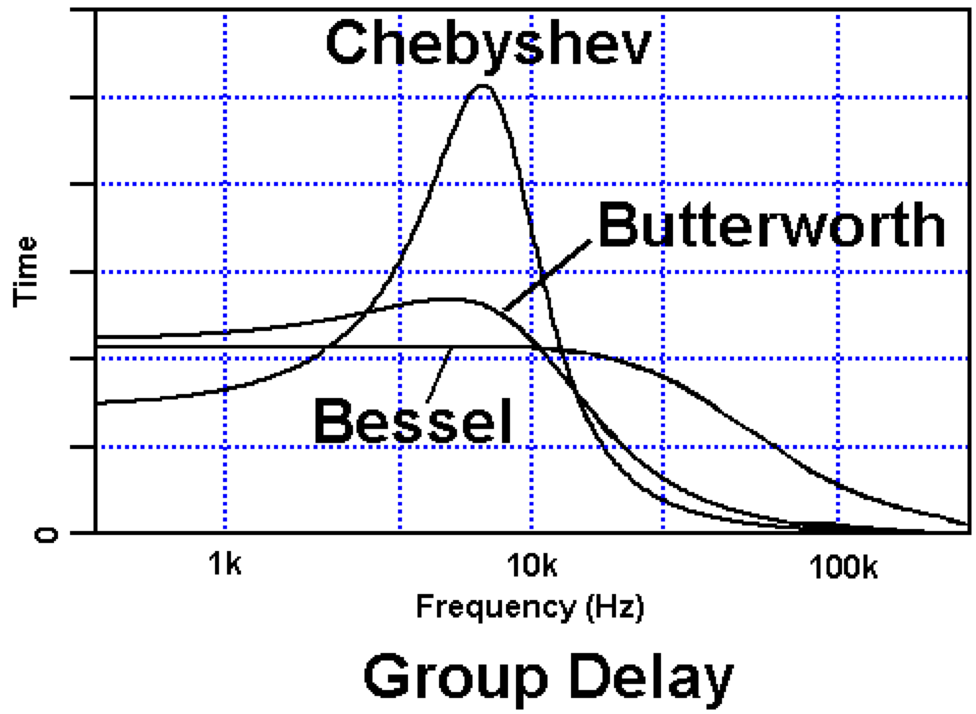
$$|G(jw)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{w_c}{w}\right)}\right)}}$$

<u>8.3) Filtro Bessel</u>

O termo **Filtro Bessel** refere a um **tipo de resposta de filtro** e não a um tipo de Filtro.

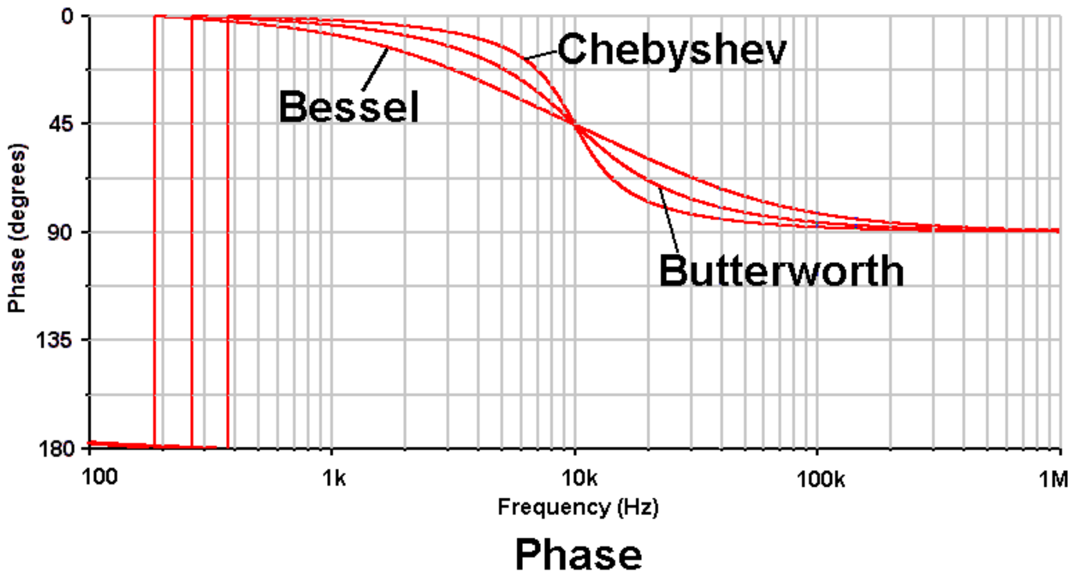
A aproximação de Bessel tem uma **banda de passagem suave e resposta atenuada**, como o **Filtro Butterworth**. Para a mesma ordem do filtro, a atenuação da faixa de rejeição da aproximação de **Bessel** é muito menor do que a da aproximação **Butterworth**.

A figura a seguir apresenta as curvas de resposta em frequência dos **Filtros Chebyshev**, **Butterworth** e **Bessel**.



Nota-se que não existe qualquer ondulação (pico) na banda passante de um Filtro de Bessel.

A resposta de fase dos **três tipos de filtro** é mostrada a seguir. **A resposta de Bessel tem a menor taxa de mudança de fase**.



8.4) Filtro Elíptico

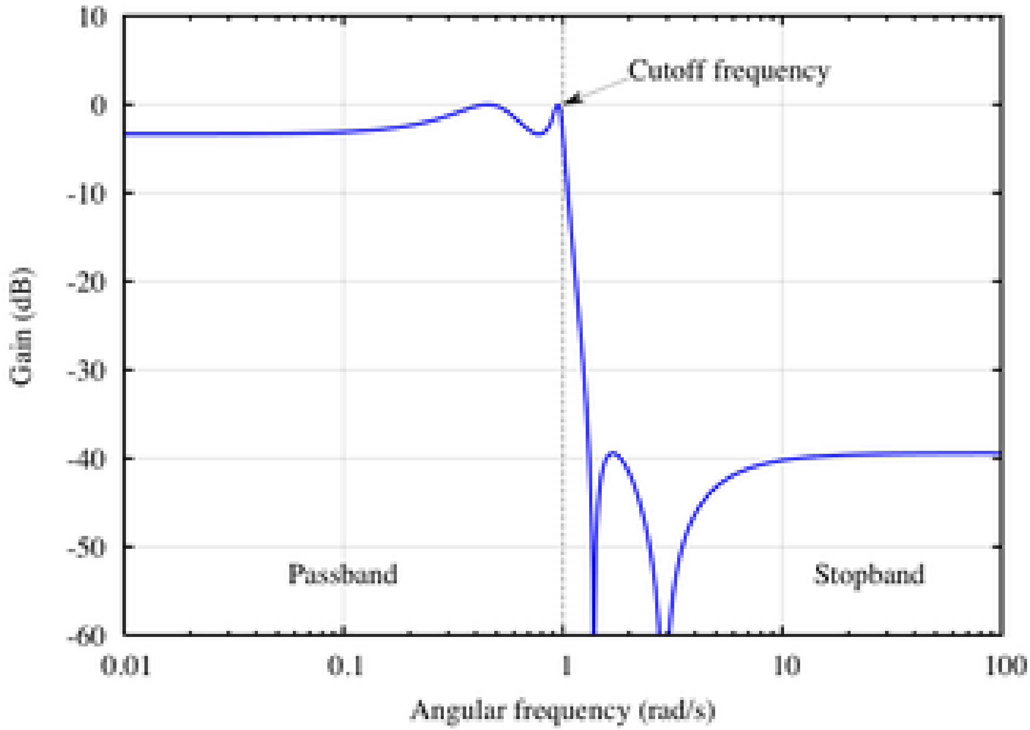
Um **Filtro Elíptico** (também conhecido como **Filtro de Cauer**) é um filtro com ondulações **(*ripple*)** na **banda passante** e na **banda rejeitada**.

Isto significa que ele **minimiza o erro máximo em ambas as bandas**, ao contrário do **Filtro Chebyshev**, que apresenta *ripple* apenas na banda passante, ou no caso do **Chebyshev** Iinverso, na banda rejeitada.

A magnitude da resposta em frequência de um **Filtro Passa-Baixas Elíptico** é dada por:

$$\left|\mathbf{G_n(jw)}\right| = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1+\varepsilon^2 R_n^2(jw)}}}$$

onde $\mathbf{R_n}$ é a **Função Racional de Chebyshev da ordem *n***.

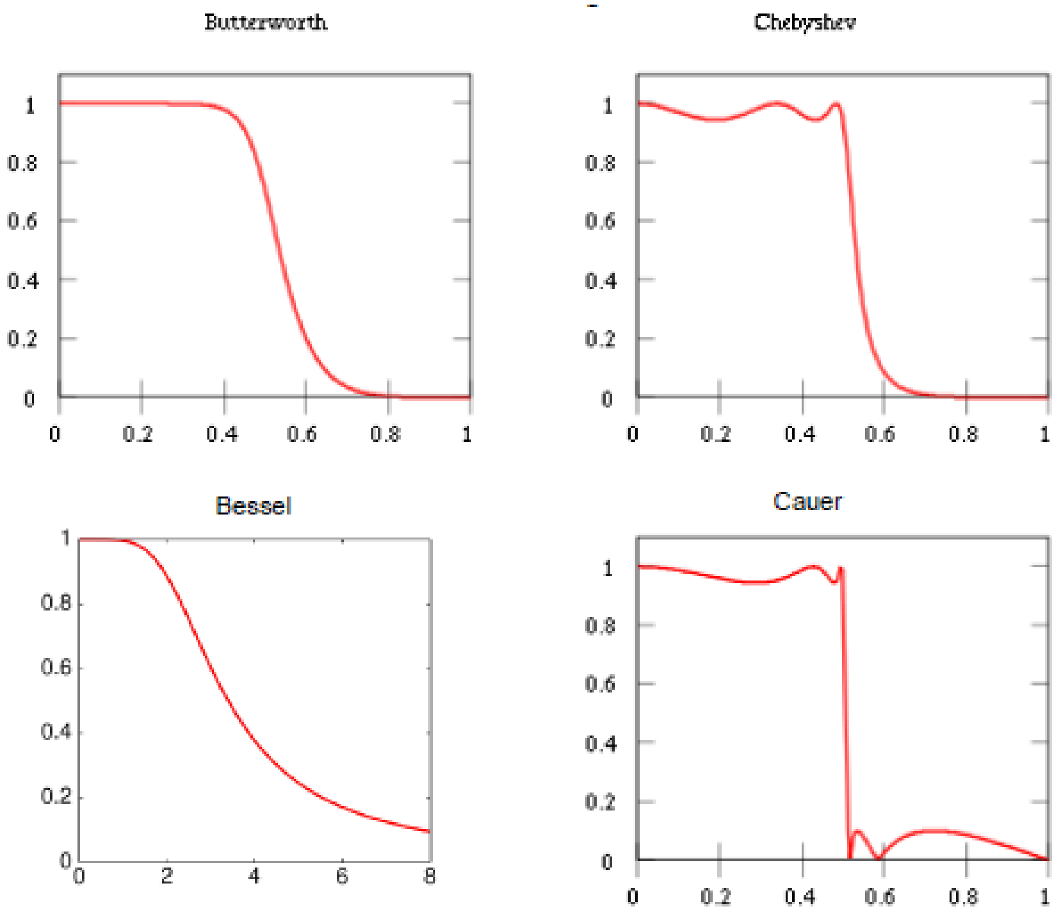


Resposta em frequência de um **Filtro Passa-Baixas Elíptico** de quarta ordem.

8.5) Comparação entre Filtros Lineares

Comparando o **Filtro Butterworth** com um **Filtro Chebyshev**, ou com um **Filtro de Cauer (Elíptico)**, o **Filtro Butterworth** possui uma queda **relativamente mais lenta**, e portanto irá requerer uma **ordem maior para implementar** um especificação de banda rejeitada particular. Entretanto, o **Filtro Butterworth** apresentará uma **resposta em fase mais linear na banda passante do que os Filtros Chebyshev ou de Cauer**.

As figuras a seguir apresentam resposta em frequência de **Filtros Lineares**.



O **Filtro de Cauer (Elíptico)** possui a queda mais acentuada de todos, porém este apresenta ***ripple*** em toda a largura de banda.