ELT221 - Circuitos Elétricos II

Prof. Tarcísio Pizziolo

Aula 5

5) Resposta em Freqüência

Denomina-se **Resposta em Frequência** à saída de um **circuito** (ou sistema) relacionada apenas com os efeitos provocados por entradas as quais são excitadas através de funções que oscilam em uma determinada frequência. Geralmente estas entradas são modeladas matematicamente por **senóides** e **cossenóides**.
Para a análise desta resposta com esta condição de excitação oscilatória do circuito, deve-se observar a saída com relação às variações em relação ao tempo.
Como os circuitos analisados são lineares, a **Resposta em Frequência** somente poderá ser verificada quando for observado que **a saída estabilizou-se com a mesma frequência de excitação**.
Daí conclui-se que a **Resposta em Frequência** é estudada para o **Regime Permanente** (ou **Estacionário**), ou seja, para **s = jw** com **σ = 0**.

Então a Função de Transferência **H(s)**, antes **H(s = σ + jw),** passa a ser **H(s) = H(s=jw) = H(jw)** para o **Regime Permanente**.

Daí pode-se escrever que:

$$\mathbf{H(jw) = Re\big[H(jw)\big] + j\,Im\big[H(jw)\big]}$$

$$\mathbf{ou:}$$

$$\mathbf{H(jw) = \left|H(jw)\right| e^{j\varphi(w)} \quad ; \quad e^{j\varphi(w)} = cos\big[\varphi(w)\big] + jsen\big[\varphi(w)\big]}$$

Onde:

- $\mathbf{\left|H(jw)\right|}$ **é denominada *Resposta em Amplitude* ou *Módulo*.**
- $\mathbf{\varphi(w)}$ **é a *Resposta em Fase*.**

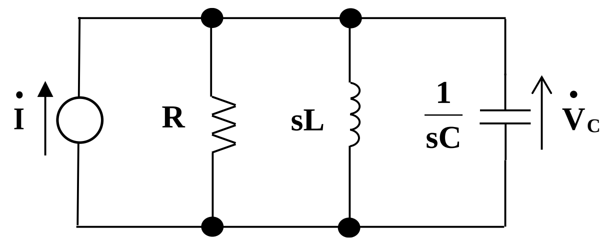
Assim:

$$\mathbf{\left|H(jw)\right| = \sqrt{Re^2\big[H(jw)\big] + Im^2\big[H(jw)\big]}}$$

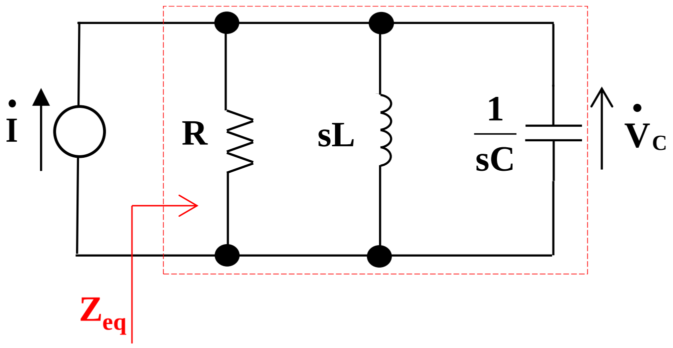
$$\mathbf{e}$$

$$\mathbf{\varphi(w) = tg^{-1}\left|\frac{Im\big[H(jw)\big]}{Re\big[H(jw)\big]}\right|}$$

Exemplo: Analisemos a resposta em frequência para o circuito **RLC Paralelo** dado a seguir.



Função de Transferência:



$$H(s)=\frac{\dot{V}_C(s)}{\dot{I}(s)}=Z_{eq}\Rightarrow \boxed{H(s)=\frac{1}{\left(\frac{1}{R}+sC+\frac{1}{sL}\right)}}$$

$$\text{Para}: s=jw \quad \Rightarrow \quad H(s)=\frac{1}{\left(\frac{1}{R}\right)+j\left[wC-\left(\frac{1}{wL}\right)\right]}$$

$$\text{Então}: \boxed{|H(jw)|=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2+\left[wC-\left(\frac{1}{wL}\right)\right]^2}}}$$

$$\text{e} \quad \varphi(w)=-tg^{-1}\left[\frac{\left(wC-\frac{1}{wL}\right)}{\frac{1}{R}}\right]\Rightarrow \boxed{\varphi(w)=-tg^{-1}\left[R\left(wC-\frac{1}{wL}\right)\right]}$$

Análise da Resposta em Amplitude (Módulo):

$$\text{Para } |H(jw)| \text{ ser máximo} \Rightarrow \left(wC-\frac{1}{wL}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{w=w_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

$$\text{Então}: \boxed{|H(jw)|_{máx}=|H(jw_0)|_{w=w_0}=R}$$

$$\text{Para } w\to 0 \Rightarrow |H(jw)|_{w\to 0}=\lim_{w\to 0}\left\{\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2+\left[wC-\left(\frac{1}{wL}\right)\right]^2}}\right\}=0\Rightarrow \boxed{|H(jw)|_{w\to 0}=0}$$

$$\text{Para } w\to \infty \Rightarrow |H(jw)|_{w\to \infty}=\lim_{w\to \infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2+\left[wC-\left(\frac{1}{wL}\right)\right]^2}}\right\}=0\Rightarrow \boxed{|H(jw)|_{w\to 0}=0}$$

Análise da Resposta em Fase:

$$\text{Para} \quad w\to 0 \Rightarrow \varphi(w)|_{w\to 0}=\lim_{w\to 0}\left\{-tg^{-1}\left[R\left(wC-\frac{1}{wL}\right)\right]\right\}=+\frac{\pi}{2}\Rightarrow \boxed{\varphi(w)|_{w\to 0}=+\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{Para} \quad w\to \infty \Rightarrow \varphi(w)|_{w\to\infty}=\lim_{w\to\infty}\left\{-tg^{-1}\left[R\left(wC-\frac{1}{wL}\right)\right]\right\}=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow \boxed{\varphi(w)|_{w\to\infty}=-\frac{\pi}{2}}$$

5.1) Representação Gráfica (*Diagrama de Bode*)

As variações do **Módulo** de **H(jw)** e de **φ(jw)** em função de **w** podem ser representadas conjuntamente por dois **Gráficos**. Quando a Resposta em **Amplitude** é dada em ***Decibéis***, estes dois Gráficos constituem o ***Diagrama de Bode***.

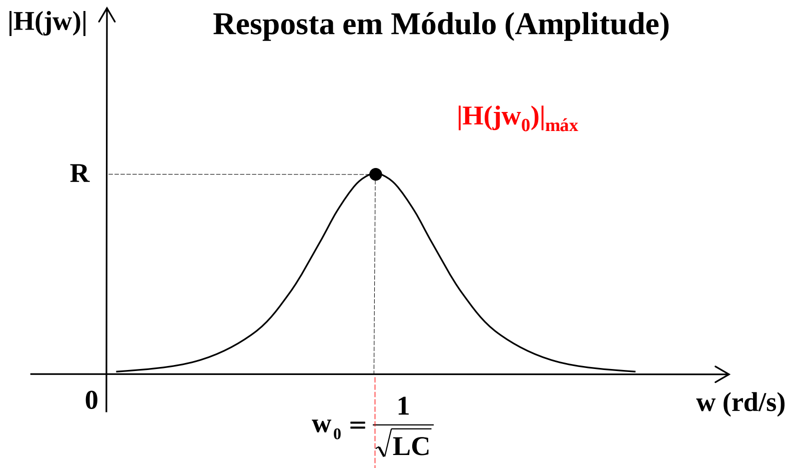
Para o exemplo anterior:

I) Gráfico da Resposta em Amplitude:

$$\textbf{Para } |H(jw)|_{w=w_0} \Rightarrow \textbf{máximo} \Rightarrow \boxed{w_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

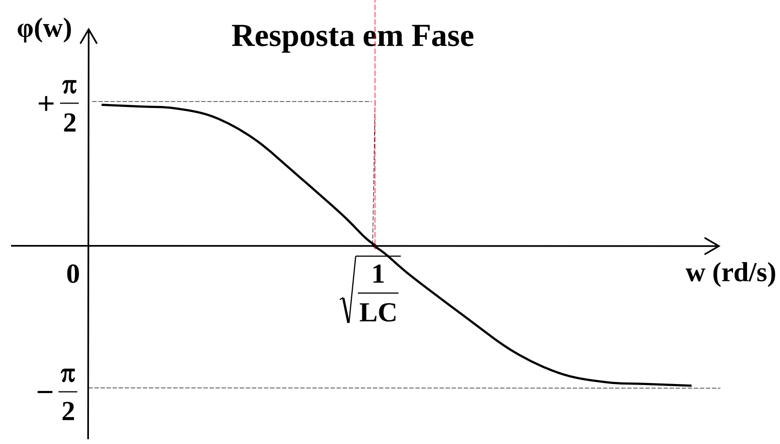
$$\textbf{Então: } \boxed{|H(jw_o)|_{máx} = R}$$

$$\textbf{Para: } \boxed{|H(jw)|_{w\to 0} = 0} \;\; \textbf{e} \;\; \boxed{|H(jw)|_{w\to\infty} = 0}$$



II) Gráfico da Resposta em Fase:

$$\begin{cases} \boxed{\varphi(w)|_{w=w_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \\ \textbf{Para } \;\; w \to 0 \Rightarrow \boxed{\varphi(w)|_{w\to 0} = +\frac{\pi}{2}} \\ \textbf{Para } \;\; w \to \infty \Rightarrow \boxed{\varphi(w)|_{w\to \infty} = -\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$



No circuito deste exemplo, se:

$$i(t) = I_m \cos(wt + \theta) \;\Rightarrow\; \dot{I} = I_m \angle \theta^{o} \quad \text{então} \quad \dot{V}_C = H(s)\,\dot{I} \Rightarrow$$

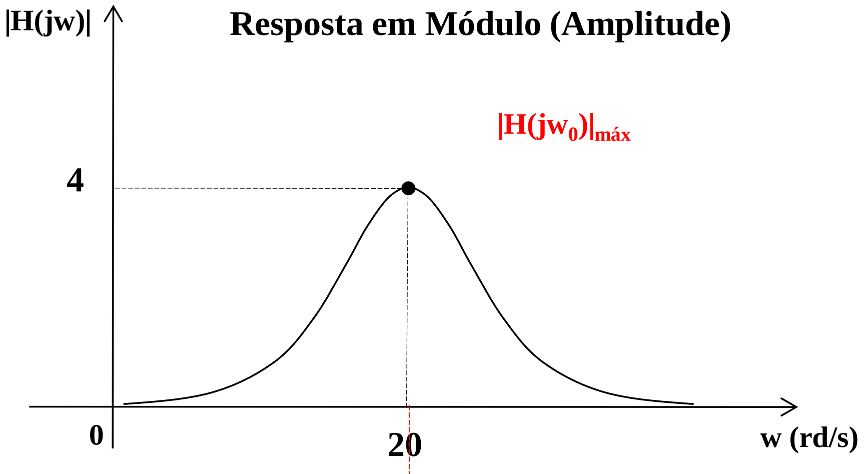
$$\Rightarrow \dot{V}_C = (|H(s)|\angle\varphi(s))(|I_m|\angle\theta(s)) \Rightarrow \boxed{\dot{V}_C = (|H(s)|.|I_m|)\angle(\varphi(s)+\theta(s))}$$

Para um dado valor de **w** obtém-se **|H(jw)|** e **φ(jw)** nos gráficos e determina-se a saída $\dot{V}_C$.

Exemplo: Para o exemplo anterior, consideremos que **R = 4 Ω**, **L = 0,1 H** e $\mathbf{C = \frac{1}{40}\,F}$. Determinar o valor da **amplitude máxima** de **H(s)** e o ponto onde ela ocorre. Esboçar os gráficos das **Respostas em Amplitude** e em **Fase**.

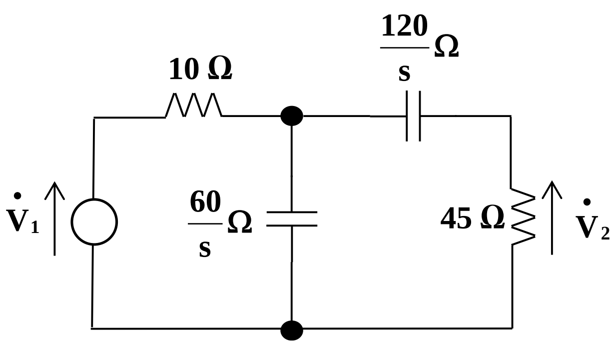
$$\left|H(jw)\right|_{máx} = \left|H(jw_o)\right| = R = 4\,\Omega \quad ; \quad w_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow w_o = \frac{1}{\sqrt{(0,1).(\frac{1}{40})}} \Rightarrow w_o = 20\,(rd/s)$$

Resposta em Amplitude:

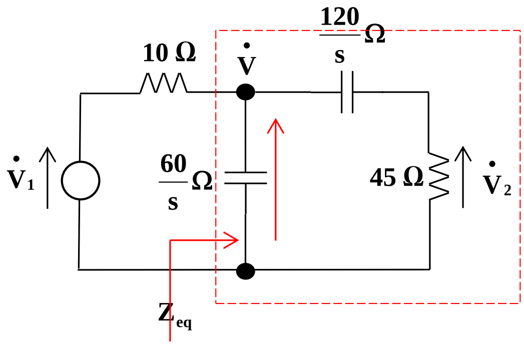


Resposta em Fase:

Exemplo: Dado o circuito abaixo, calcule $\mathbf{H(s)} = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$ e determine o valor da **amplitude máxima** de **H(s)** calculando o ponto onde ela ocorre. Esboce as **Respostas** em **Amplitude** e **Fase**.



Aplicando **divisores de tensão** pode-se dterminar $\mathbf{H(s)} = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$ com se segue.



$$Z_{eq} = \left(\frac{120}{s} + 45\right) // \left(\frac{60}{s}\right) \Rightarrow (Z_{eq} + 10) = \frac{(6s+16)}{(s^2+10s+16)}; \quad \dot{V} = \frac{Z_{eq}}{(Z_{eq}+10)}\dot{V}_1 = \frac{(6s+16)}{(s^2+10s+16)}\dot{V}_1 \quad ;$$

$$\text{Então:} \quad \dot{V}_2 = \frac{45}{\left(\frac{120}{s}+45\right)}\dot{V} \Rightarrow \boxed{\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = H(s) = \frac{6s}{(s^2+10s+16)}}$$

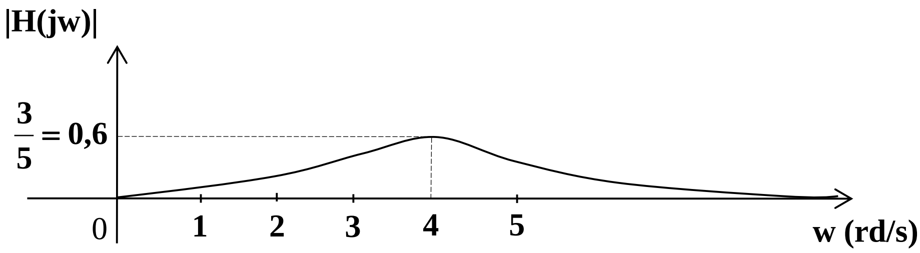
Substituindo **s = jw**:

$$H(jw) = \frac{j6w}{(-w^2 + j10w + 16)} = \frac{j6w}{(16-w^2) + j10w} = \frac{1}{\left[\left(\frac{5}{3}\right) - j\left(\frac{16-w^2}{6w}\right)\right]} \Rightarrow \boxed{|H(jw)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{25}{9}\right) + \left[\frac{(16-w^2)}{6w}\right]^2}}}$$

$$\text{Para:} \quad |H(jw_o)|_{máx} \Rightarrow \frac{(16-w_o^2)}{6w_o} = 0 \Rightarrow \boxed{w_o = 4\,(rd/s)}; \quad \boxed{|H(jw_o)|_{máx} = \frac{3}{5}}$$

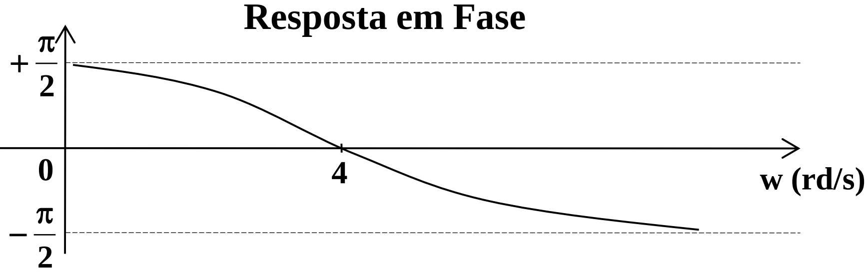
$$\varphi(jw) = -tg^{-1}\left[\frac{\left(-\frac{(16-w^2)}{6w}\right)}{\left(\frac{5}{3}\right)}\right] \quad ; \quad \boxed{\varphi(w_o) = \varphi(4) = 0^o}$$

$$\text{Resposta em amplitude:} \begin{cases} \textbf{Quando} \quad w \to 0 \Rightarrow |H(jw)| \to 0 \\ \textbf{Quando} \quad w \to \infty \Rightarrow |H(jw)| \to 0 \end{cases}$$

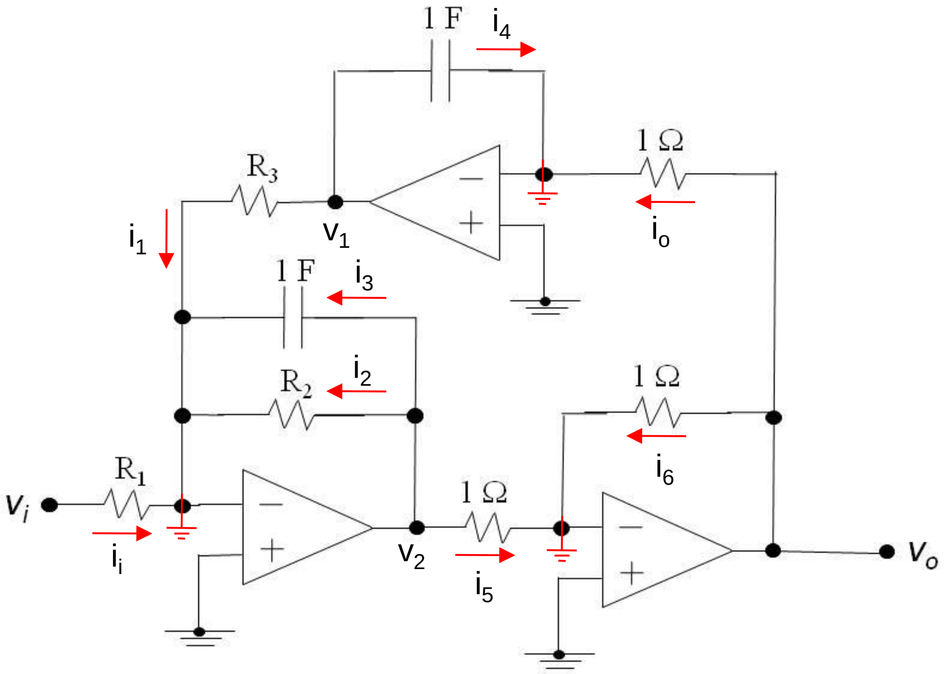


$$\text{Resposta em Fase:} \begin{cases} \textbf{Quando} \quad w \to 0 \Rightarrow \varphi(w \to 0) \to +\frac{\pi}{2} \\ \textbf{Quando} \quad w \to \infty \Rightarrow \varphi(w \to \infty) \to -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Resposta em Fase



Exemplo: Calcule a $\mathbf{H(s)} = \dfrac{\mathbf{V_o(s)}}{\mathbf{V_i(s)}}$ para o circuito a seguir e esboce as **Respostas em Amplitude** e em **Fase**.



$$\begin{cases} \mathbf{i_i = \dfrac{v_i}{R_1};\quad i_1 = \dfrac{v_1}{R_3};\quad i_2 = \dfrac{v_2}{R_2};\quad i_3 = \dfrac{v_2}{\left(\dfrac{1}{s}\right)};\quad i_4 = \dfrac{v_1}{\left(\dfrac{1}{s}\right)};\quad i_5 = \dfrac{v_2}{1};\quad i_6 = \dfrac{v_o}{1};\quad i_o = \dfrac{v_o}{1}} \\ \mathbf{(i_i + i_1 + i_2 + i_3) = 0;\quad (i_o + i_4) = 0;\quad (i_5 + i_6) = 0 \;.................(I)} \end{cases}$$

$$\mathbf{De\ (I):\ \frac{v_i}{R_1} + \frac{v_1}{R_3} + \frac{v_2}{R_2} + sv_2 = 0 \Rightarrow v_i = R_1\left(-\frac{v_1}{R_3} - \left(\frac{R_2 s + 1}{R_2}\right)v_2\right) \;......(II)}$$

$$\mathbf{(i_o + i_4) = 0 \Rightarrow v_o = -sv_1 \Rightarrow v_1 = -\frac{v_o}{s};\quad (i_5 + i_6) = 0 \Rightarrow v_2 = -v_o}$$

Substituindo v_1 e v_2 em (II):

$$\mathbf{v_i = R_1\left(\frac{v_o}{R_3 s} + \left(\frac{R_2 s + 1}{R_2}\right)v_o\right) \Rightarrow \frac{v_o}{v_i} = \frac{R_2 R_3 s}{(R_1 R_2 R_3 s^2 + R_1 R_3 s + R_1 R_2)}}$$

$$\mathbf{Dividindo\ por\ (R_1 R_2 R_3):\quad H(s) = \frac{\left(\dfrac{1}{R_1}\right)s}{\left[s^2 + \left(\dfrac{1}{R_2}\right)s + \dfrac{1}{R_3}\right]}}$$

Substituindo **s = jw**:

$$\mathbf{H(jw)} = \frac{\left(\dfrac{1}{R_1}\right)jw}{\left[(jw)^2 + \left(\dfrac{1}{R_2}\right)jw + \dfrac{1}{R_3}\right]} = \frac{jw}{\left(-R_1 w^2 + j\dfrac{R_1 w}{R_2} + \dfrac{R_1}{R_3}\right)} = \frac{1}{\left(-\dfrac{R_1 w^2}{jw} + \dfrac{jR_1 w}{jR_2 w} + \dfrac{R_1}{jR_3 w}\right)} \Rightarrow$$

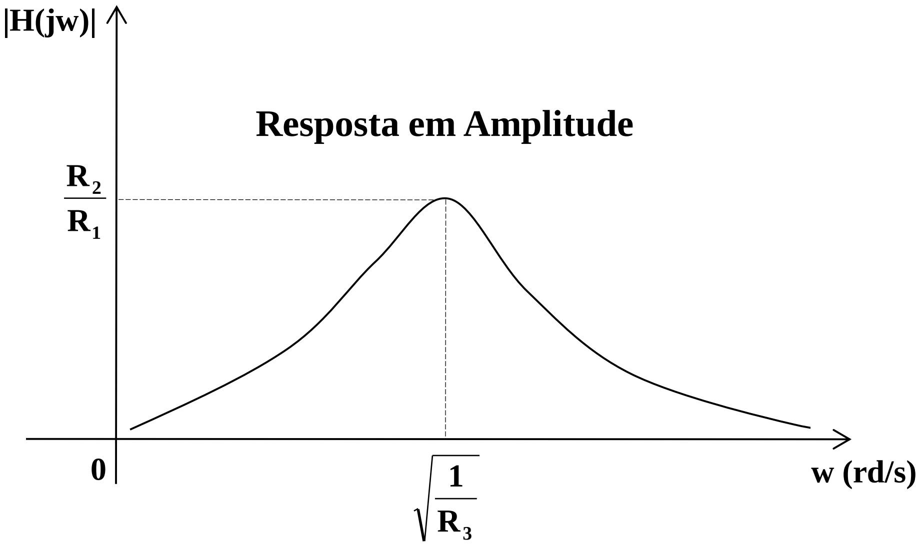
$$\Rightarrow \mathbf{H(jw)} = \frac{1}{\left(jR_1 w + \dfrac{R_1}{R_2} - \dfrac{jR_1}{wR_3}\right)} \Rightarrow \boxed{\mathbf{H(jw)} = \frac{1}{\left[(\dfrac{R_1}{R_2}) + j(\dfrac{R_1 R_3 w^2 - R_1}{R_3 w})\right]}}$$

$$\textbf{Daí:}\quad \boxed{|H(jw)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 + \left[\frac{(R_1R_3w^2 - R_1)}{R_3w}\right]^2}}}$$

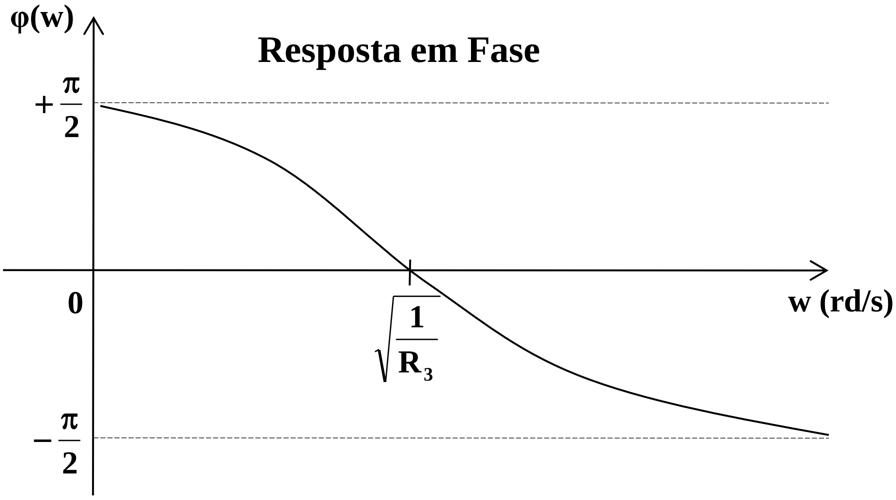
$$\textbf{Para:}\quad |H(jw_o)|_{máx} \Rightarrow \frac{(R_1R_3w_o{}^2 - R_1)}{R_3w_o} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{w_o = \sqrt{\frac{1}{R_3}}\ \left(rd/s\right)}; \qquad \boxed{|H(jw_o)|_{máx} = \frac{R_2}{R_1}}$$

$$\boxed{\varphi(jw) = -tg^{-1}\left[\frac{\frac{(R_1R_3w^2 - R_1)}{R_3w}}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}\right]} \quad ; \quad \boxed{\varphi(w_o) = \varphi\left(\sqrt{\frac{1}{R_3}}\right) = 0^o}$$

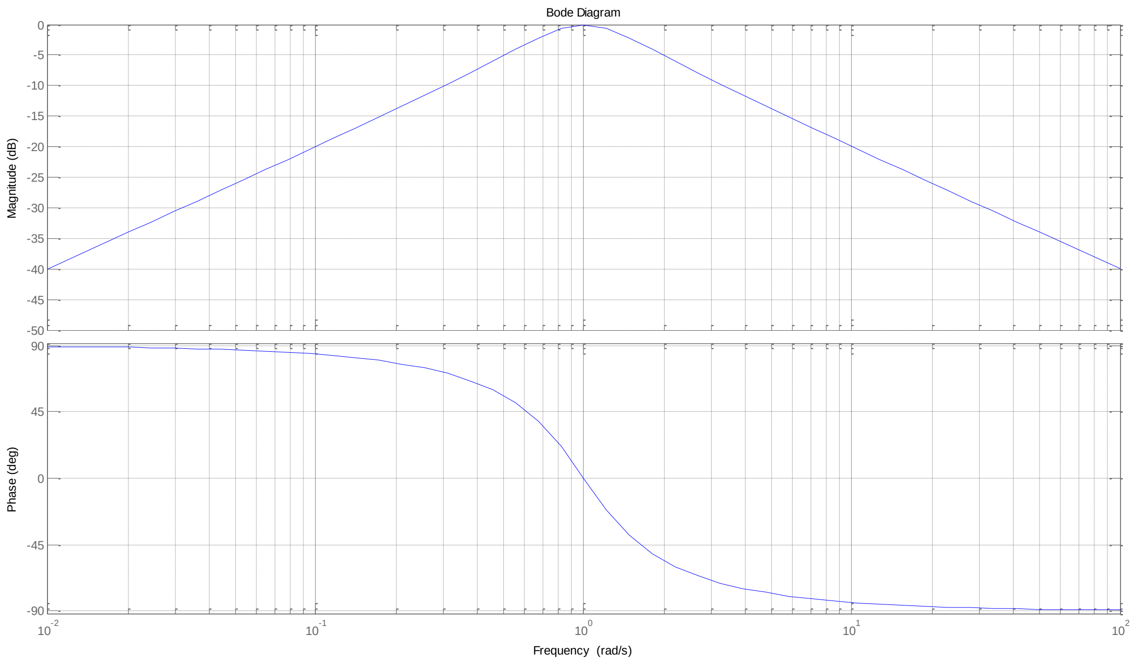
Resposta em amplitude: $\begin{cases} \textbf{Quando } w \to 0 \ \Rightarrow |H(jw)| \to 0 \\ \textbf{Quando } w \to \infty \Rightarrow |H(jw)| \to 0 \end{cases}$



Resposta em Fase: $\begin{cases} \textbf{Quando } w \to 0 \Rightarrow \varphi(w \to 0) \to \frac{\pi}{2} \\ \textbf{Quando } w \to \infty \Rightarrow \varphi(w \to \infty) \to -\frac{\pi}{2} \end{cases}$



Para valores de $\mathbf{R_1 = R_2 = R_3 = 1\ \Omega}$, o **Diagrama de Bode** é apresentado a seguir.



Exercício: Dado um circuito **RLC série** com uma fonte de tensão $\mathbf{v_1(t)}$, a tensão no capacitor é dada por $\mathbf{v_2(t)}$.

a) Determinar a Função de Transferência $\mathbf{H(s) = V_2(s)/V_1(s)}$.

b) Esboçar a resposta em frequência para **H(jw)**.