UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA – UFV
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – CCE
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA - DEL

Sistemas de Controle II

ELT331

AULA 6 – Projeto de Controlador em Avanço e Atraso de Fase pelo Método do Lugar das Raízes

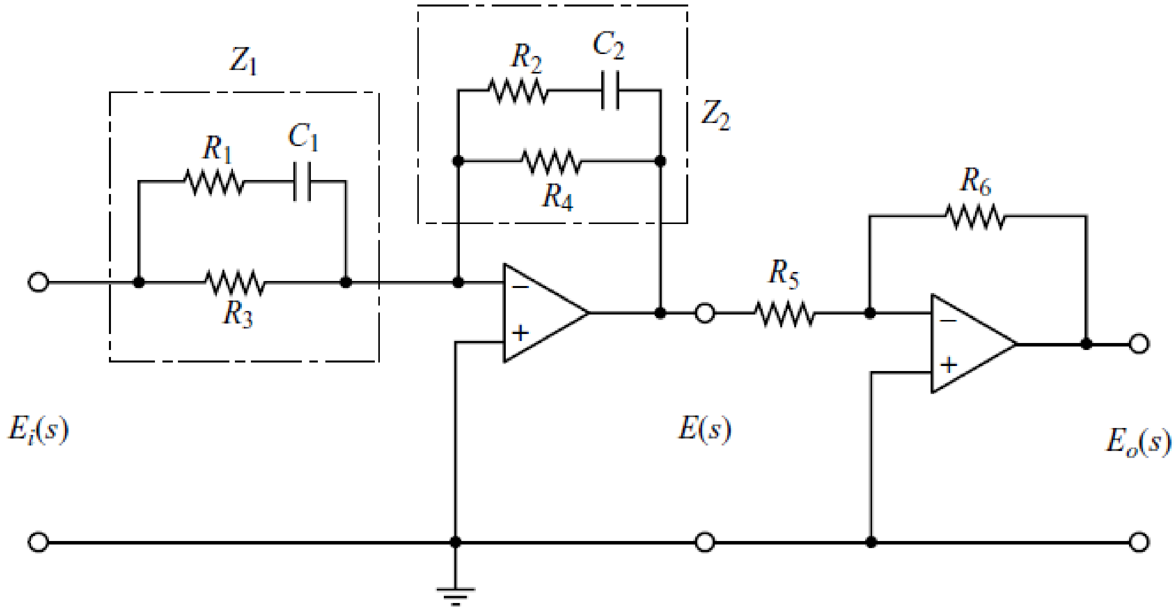
$\gamma \neq \beta$

Prof. Tarcísio Pizziolo

6. Projeto de Controlador em Avanço e Atraso de Fase

A compensação por Avanço e Atraso de fase é utilizada quando se deseja melhorar as características do sistema no estado transitório (Avanço) e também melhorar as características de estado permanente (Atraso).

O circuito utilizado para implementação deste tipo de controlador apresentado a seguir.



$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_c \frac{\beta}{\gamma}\left(\frac{T_1 s + 1}{\frac{T_1}{\gamma} s + 1}\right)\left(\frac{T_2 s + 1}{\beta T_2 s + 1}\right) = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\gamma}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)}$$

Onde:

$$\gamma = \frac{R_1 + R_3}{R_1} > 1, \qquad \beta = \frac{R_2 + R_4}{R_2} > 1, \qquad K_c = \frac{R_2 R_4 R_6}{R_1 R_3 R_5}\frac{R_1 + R_3}{R_2 + R_4}$$

$$T_1 = (R_1 + R_3)C_1 \quad \text{e} \quad T_2 = R_2 C_2$$

6. Projeto de Controlador em Avanço e Atraso de Fase

No projeto deste tipo de controlador deve-se considerar 2 casos:

1 – $\gamma \neq \beta$

2 - $\gamma = \beta$

Caso 1) $\gamma \neq \beta$

Neste caso o projeto é a combinação do Controlador em Avanço com o em Atraso.

Procedimentos para o projeto:

1 – determinar os polos dominantes de malha fechada e as especificações de desempenho (w_n, ξ e K_v) atuais.

2 – construir o gráfico do Lugar das Raizes marcando os polos de malha fechada atual e o desejado.

3 - determinar a contribuição φ que a parte em Avanço do controlador deverá contribuir.

4 – determine os valores de $\mathbf{T_1}$ e $\boldsymbol{\gamma}$ para a parte em Avanço pelo Método da Bissetriz.

5 – determine o valor do ganho K_c pela condição de módulo (**s_1 é o pólo de malha fechada desejado**).

$$\left| K_c \frac{s_1 + \dfrac{1}{T_1}}{s_1 + \dfrac{\gamma}{T_1}} G(s_1) \right| = 1$$

6. Projeto de Controlador em Avanço e Atraso de Fase

6 – dado o coeficiente de erro estático de velocidade $\mathbf{K_v}$ desejado, determina-se o valor de **β**.

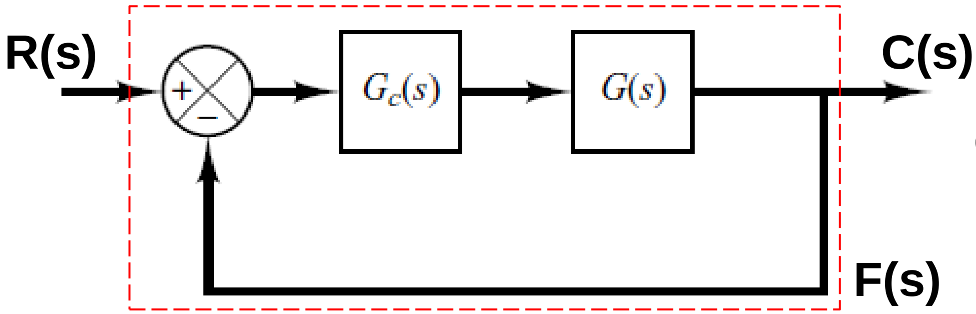
$$K_v = \lim_{s \to 0} sG_c(s)G(s)$$
$$= \lim_{s \to 0} sK_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right) G(s)$$
$$= \lim_{s \to 0} sK_c \frac{\beta}{\gamma} G(s)$$

7 – Utilizando o valor de **β** encontrado escolhe-se o valor de $\mathbf{T_2}$ tal que:

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right| \doteqdot 1 \quad \text{e} \quad -5^\circ < \angle \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} < 0^\circ$$

6.1 Exemplo (ɣ ≠ β)

Exemplo 7.1.1 Considere um sistema de controle com realimentação unitária negativa com a função de transferência de canal direto **G(s)** dada por:



$$G(s) = \frac{4}{s(s+0,5)}$$

Deseja-se projetar um controlador para ser utilizado em série com **G(s)** para que este sistema tenha **$\xi = 0,5$**, **$w_n = 5$ rd/s** e **$K_v = 80\ s^{-1}$**.

<u>Considerações iniciais:</u>

$$F(s) = \frac{\dfrac{4}{s(s+0,5)}}{1+\dfrac{4}{s(s+0,5)}} \Rightarrow F(s) = \frac{4}{(s^2+0,5s+4)} \Rightarrow \text{Pólos}_{M.F.}: \boxed{\begin{cases} s_1 = -0,25 + j1,9843 \\ s_2 = -0,25 - j1,9843 \end{cases}}$$

$$\boxed{\xi = 0,125} \;;\; \boxed{w_n = 2\,rd/s} \;\; e \;\; K_{v_{atual}} = \underbrace{\lim}_{s\to o} s\left[\frac{4}{s(s+0,5)}\right] \Rightarrow \boxed{K_v = 8\,s^{-1}}$$

Exemplo 6.1.1

Deve-se:

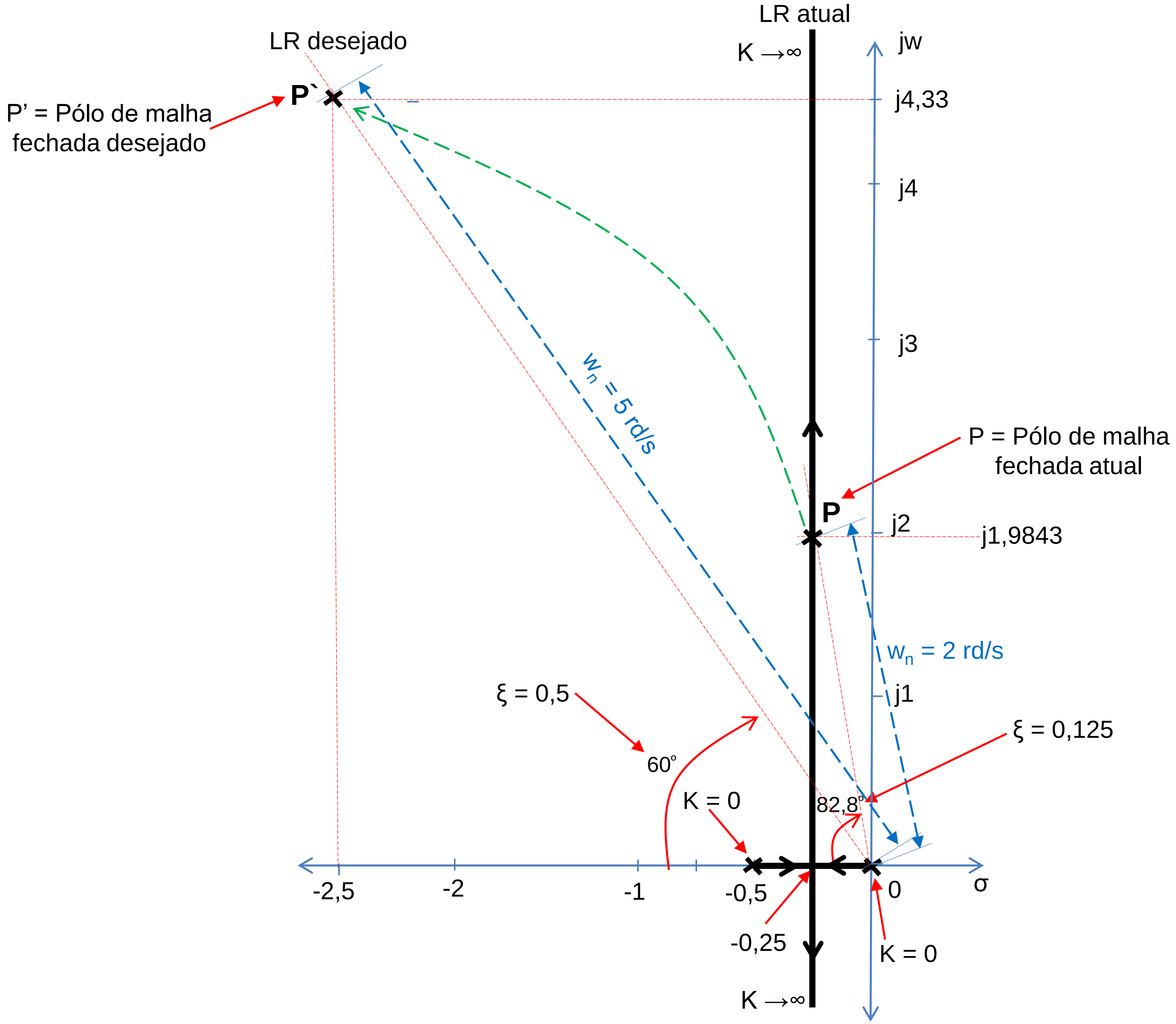
- aumentar ξ de 0,125 para $\xi = 0,5$ => tornar a resposta do sistema menos oscilatória no período transitório.

- aumentar w_n de 2 rd/s para $w_n = 4$ rd/s => tornar a resposta do sistema mais rápida no período transitório.

- aumentar K_v de 8 s^{-1} para $K_v = 80$ s^{-1} => reduzir o erro no regime permanente de 12,5% para 1,25%.

Como o controlador deverá atuar nos períodos transitório e permamente, deve-se projetar um controlador em Atraso e Avanço de Fase.

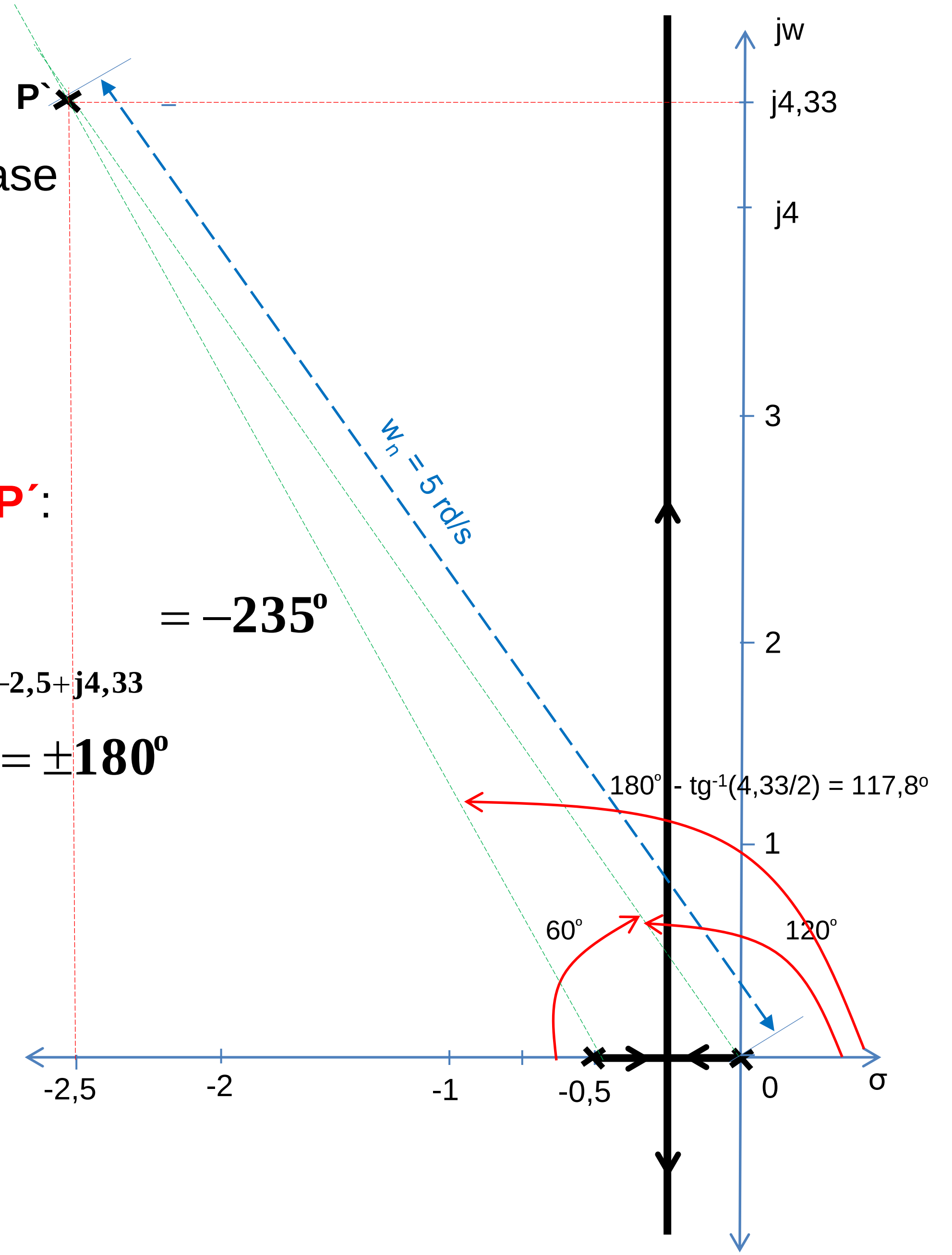
Exemplo 6.1.1



LR atual
LR desejado
jw
K →∞
P`
P' = Pólo de malha fechada desejado
j4,33
j4
j3
w_n = 5 rd/s
P = Pólo de malha fechada atual
P
j2
j1,9843
w_n = 2 rd/s
ξ = 0,5
j1
ξ = 0,125
60°
K = 0
82,8°
-2,5
-2
-1
-0,5
0
σ
-0,25
K = 0
K →∞

Exemplo 6.1.1

<u>Solução:</u> Parte em Avanço de Fase



Condição de Ângulo para o pólo **P´**:

$$\angle \mathbf{G(s)}\Big|_{\mathbf{s=-2,5+j4,33}} = \angle \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{s(s+0,5)}}\Bigg|_{\mathbf{s=-2,5+j4,33}} = \mathbf{-235^o}$$

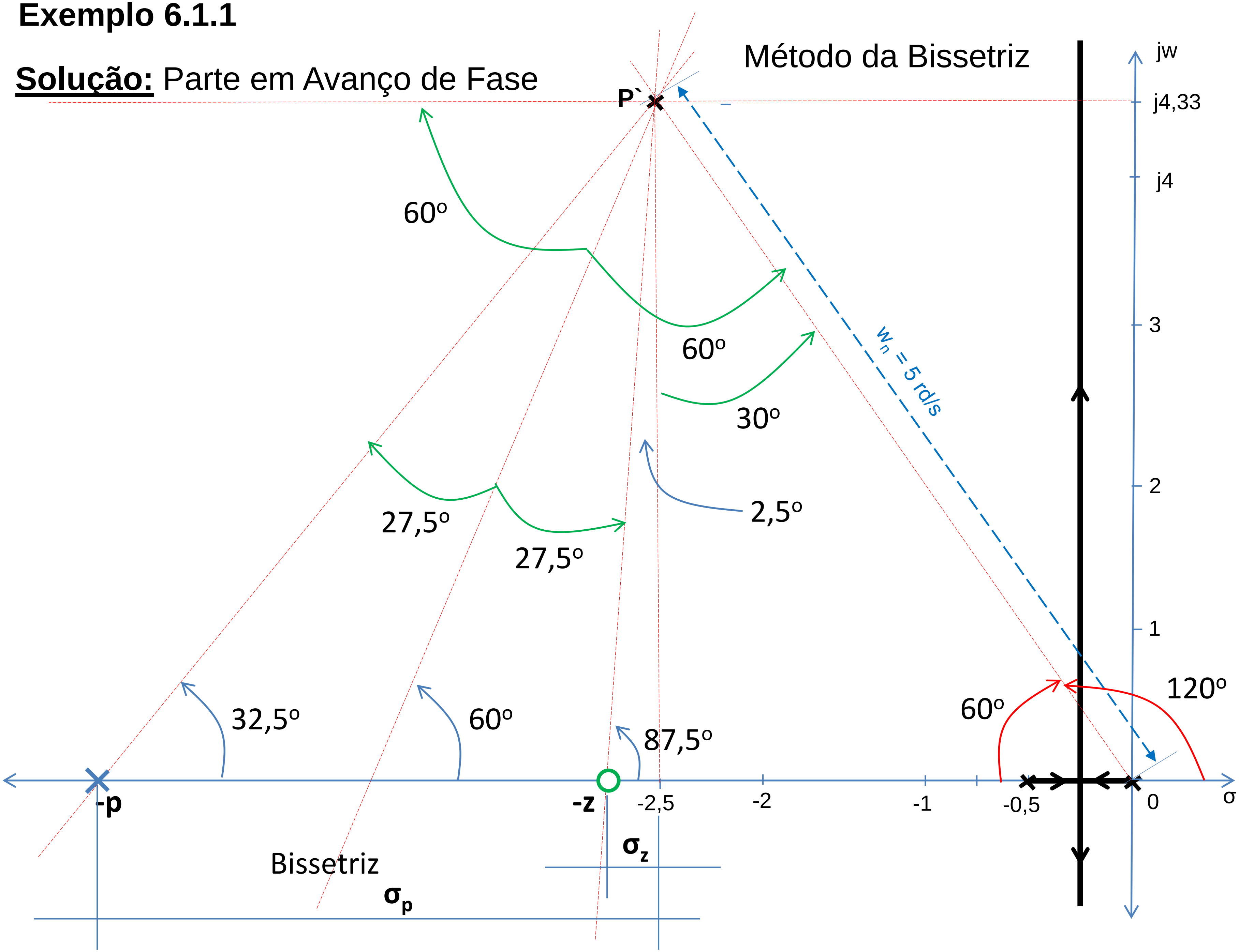
$$\textbf{Para que } \angle \mathbf{G_c(s)G(s)}\Big|_{\mathbf{s=-2,5+j4,33}} = \mathbf{\pm 180^o}$$

Contribuição do Avanço :

$$\varphi\Big|_{\mathbf{s=-2,5+j4,33}} = \mathbf{180^o - 235^o = 55^o}$$

Exemplo 6.1.1

Solução: Parte em Avanço de Fase



Exemplo 6.1.1

Solução: Parte em Avanço de Fase

Determinação do Zero e do Polo da parte em Avanço:

Cálculo do Zero:

$$\mathrm{tg}(87{,}5^{o}) = \frac{4{,}33}{\sigma_z} \Rightarrow \sigma_z = \frac{4{,}33}{\mathrm{tg}(87{,}5^{o})} \Rightarrow \sigma_z = \frac{4{,}33}{22{,}9} \Rightarrow \sigma_z \cong 0{,}189$$

$$\text{Zero:} \quad -\frac{1}{T_1} = -(0{,}189 + 2{,}5) \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{T_1} = -2{,}689}$$

$$T_1 = \frac{1}{2{,}689} \Rightarrow \boxed{T_1 = 0{,}372}$$

Cálculo do Pólo:

$$\mathrm{tg}(32{,}5^{o}) = \frac{4{,}33}{\sigma_p} \Rightarrow \sigma_p = \frac{4{,}33}{\mathrm{tg}(32{,}5^{o})} \Rightarrow \sigma_p = \frac{4{,}33}{0{,}637} \Rightarrow \sigma_p \cong 6{,}8$$

$$\text{Pólo:} \quad -\frac{\gamma}{T_1} = -(2{,}5 + 6{,}8) \Rightarrow \boxed{-\frac{\gamma}{T_1} = -9{,}3}$$

$$\gamma = 9{,}3 \times T_1 \Rightarrow \gamma = 9{,}3 \times 0{,}372 \Rightarrow \boxed{\gamma = 3{,}46}$$

Determinação do ganho K_c no polo desejado de malha fechada:

$$\left|G_c(s)_{Avanço} G(s)\right|_{s=(-2,5+j4,33)} = 1 \Rightarrow \left| K_c \underbrace{\frac{(s+2{,}689)}{(s+9{,}3)}}_{G_c(s)_{Aavanço}} \underbrace{\frac{4}{s(s+0{,}5)}}_{G(s)} \right|_{s=(-2,5+j4,33)} = 1 \Rightarrow K_c = \left| \frac{s(s+9{,}3)(s+0{,}5)}{4(s+2{,}689)} \right|_{s=(-2,5+j4,33)} \Rightarrow \boxed{K_c = 11}$$

Exemplo 6.1.1

<u>Solução:</u> Parte em Atraso de Fase

Determinação de **β** por meio de **K_v desejado**:

$$K_V\Big|_{desejado} = \lim_{s\to 0}\left[sK_c\frac{\beta}{\gamma}G(s)\right] = \lim_{s\to 0}\left[\frac{11\beta}{3{,}46}\left(\frac{4}{(s+0{,}5)}\right)\right] \Rightarrow 80 = \left[\frac{88\beta}{3{,}46}\right] \Rightarrow \boxed{\beta = 3{,}14}$$

Escolhe-se **T_2** tal que:

$$\left|\frac{(s+\frac{1}{T_2})}{(s+\frac{1}{\beta T_2})}\right|_{s=-2{,}5+j4{,}33} \cong 1 \Rightarrow \quad e \quad -5^o < \angle\left|\frac{(s+\frac{1}{T_2})}{(s+\frac{1}{\beta T_2})}\right|_{s=-2{,}5+j4{,}33} < 0^o$$

Escolhendo **T_2 = 5 s** e verificando as condições de **módulo** e de **ângulo** temos:

$$\left|\frac{(s+\frac{1}{5})}{(s+\frac{1}{(3{,}81)(5)})}\right|_{s=-2{,}5+j4{,}33} = \left|\frac{(s+0{,}2)}{(s+0{,}05)}\right|_{s=-2{,}5+j4{,}33} = 0{,}98 \cong 1\ (OK!)$$

$$-5^o < \angle\left|\frac{(s+\frac{1}{T_2})}{(s+\frac{1}{\beta T_2})}\right|_{s=-2{,}5+j4{,}33} < 0^o \Rightarrow -5^o < \angle\underbrace{\left|\frac{(s+0{,}2)}{(s+0{,}05)}\right|_{s=-2{,}5+j4{,}33}}_{=-1{,}52^o} < 0^o \Rightarrow (OK!)$$

Exemplo 6.1.1

Solução: O controlador em Avanço e Atraso de fase será:

$$G_c(s) = \underbrace{11}_{K_c}\underbrace{\frac{(s+2{,}689)}{(s+9{,}3)}}_{\text{Avanço}}\underbrace{\frac{(s+0{,}2)}{(s+0{,}05)}}_{\text{Atraso}} \Rightarrow \boxed{G_c(s) = \frac{11s^2+31{,}78s+5{,}92}{s^2+9{,}35s+0{,}465}}$$

O sistema compensado em malha aberta é dado por:

$$G_c(s)G(s) = \frac{(11s^2+31{,}78s+5{,}92)}{(s^2+9{,}35s+0{,}465)}\frac{4}{s(s+0{,}5)} \Rightarrow \boxed{G_c(s)G(s) = \frac{(44s^2+127{,}12s+23{,}68)}{(s^4+9{,}85s^3+5{,}12s^2+0{,}2325s)}}$$

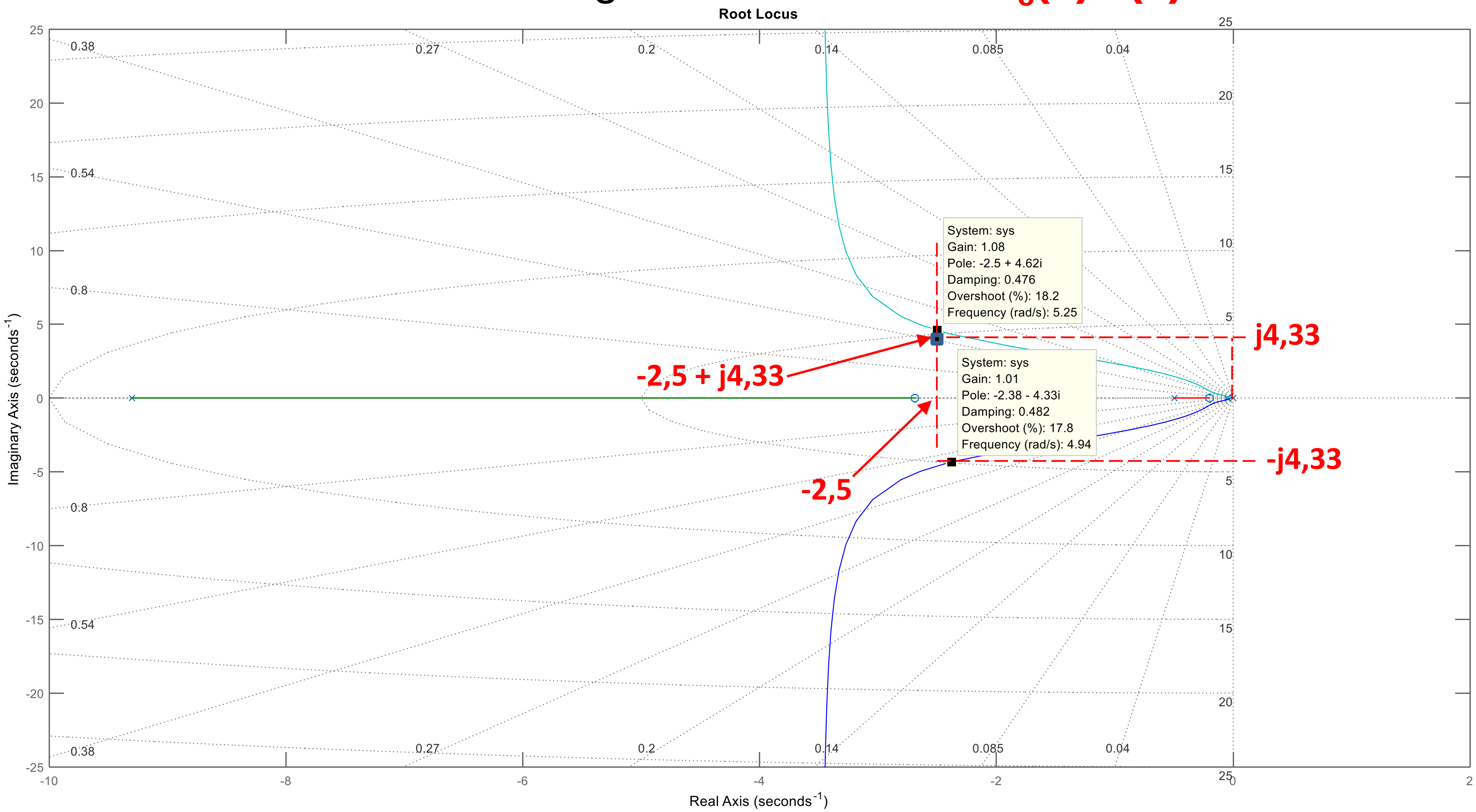
A função de transferência em malha fechada para o sistema compensado será:

$$F(s)_{\text{compensado}} = \frac{\dfrac{(44s^2+127{,}12s+2{,}1512)}{(s^4+9{,}85s^3+5{,}115s^2+0{,}2325s)}}{1+\dfrac{(44s^2+127{,}12s+2{,}1512)}{(s^4+9{,}85s^3+5{,}115s^2+0{,}2325s)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F(s)_{\text{compensado}} = \frac{(44s^2+127{,}12s+2{,}1512)}{(s^4+9{,}85s^3+49{,}115s^2+127{,}35s+2{,}1512)}}$$

Exemplo 6.1.1

Gráfico do Lugar das Raízes de $G_c(s)G(s)$



$$G_c(s)G(s) = \underbrace{\underbrace{11}_{K_c}\underbrace{\frac{(s+2{,}689)}{(s+9{,}3)}}_{\text{Avanço}}\underbrace{\frac{(s+0{,}2)}{(s+0{,}05)}}_{\text{Atraso}}}_{G_c(s)}\underbrace{\frac{4}{s(s+0{,}5)}}_{G(s)}$$

Exemplo 6.1.1

O controlador foi inserido na malha de controle do sistema e após a determinação da Função de Tansferência em malha fechada aplicou-se as entradas Degrau Unitário e Rampa unitária. As curvas de respostas são apresentadas a seguir.