

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA – UFV CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – CCE DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA - DEL

Medidas Elétricas e Magnéticas ELT210

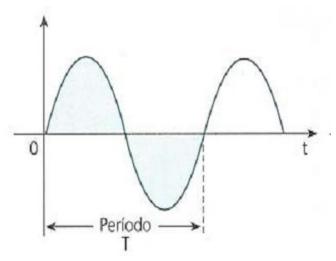
AULA 04 – Corrente CA

Prof. Tarcísio Pizziolo

Função trigonométrica que é aplicada como modelo matemático para estudo de tensão (ou corrente) alternada.

CARACTERÍSTICAS

Período: É o tempo em que ocorre um ciclo completo da função.

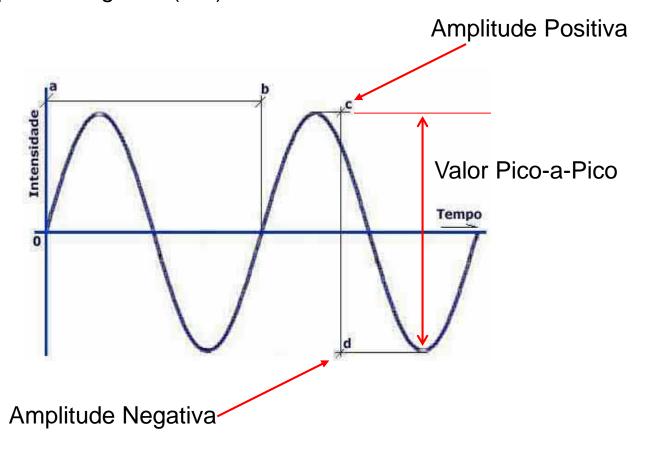


Portanto, a Função Senoidal é PERIÓDICA!

<u>Frequência:</u> É o número de ciclos ocorridos por segundo. Representa-se por f e a sua unidade é o **Hz** (Hertz). A frequência está relacionada com o período da seguinte forma: f = 1

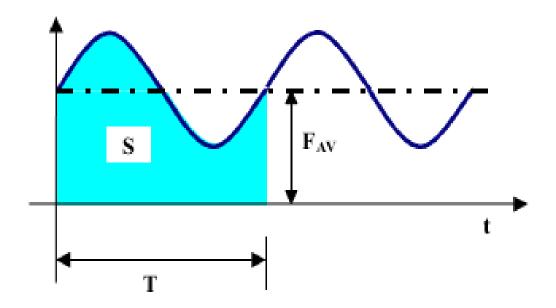
Amplitude: É o valor instantâneo mais elevado (ou mínimo) atingido pela função. Existe amplitude positiva (0-c) e amplitude negativa (0-d).

<u>Valor Pico-a-Pico (V_{PP}):</u> É o valor medido entre os valores de amplitude positiva e amplitude negativa (c-d).



<u>Valor Médio:</u> (Average ou av) de uma onda periódica está relacionado com a componente contínua desta onda.

$$F_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \, dt$$



Valor Eficaz

- Na representação senoidal de corrente e de tensão alternadas estas grandezas variam com o tempo (**v(t)** e **i(t)**).
- Considerando a variação da grandeza no tempo os medidores ficariam oscilando na medição! (É nesta situação que se utiliza o conceito de Valor Eficaz).

Definição de Valor Eficaz

Consideremos uma corrente alternada $i(t) = I_m.sen(wt)$ (A). O seu Valor Eficaz (que será constante!) é igual ao valor de uma corrente contínua I_{cc} que, atravessando um resistor com resistência R, dissipe a mesma Potência Média $p_m(t)$ devido a i(t). (O mesmo vale para a tensão v(t)).

Determinação do Valor Eficaz

Dada uma corrente *i(t)* periódica com período *T*, o valor da **Potência Instantânea** dissipada em um resistor de resistência R é dada por $p(t=t_0) = R.i(t=t_0)^2$ mas a Potência Média $p_m(t)$ é dada por:

 $P = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} Ri^{2}(t)dt$ $F_{av} = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} f(t) dt$

O valor da Potência Média p_m(t) dissipada nesse mesmo resistor por uma corrente contínua de valor I é $R(I_{ef})^2$. Igualando os valores destas potência o Valor Eficaz da corrente i(t) é:

$$p_{m}(t)_{CC} = p_{m}(t)_{CA} \Rightarrow R.(I_{ef})^{2} = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} R.[i(t)]^{2}.dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{I}_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{0}^{T} [\mathbf{i}(t)]^{2}.dt}$$

Generalizando, o valores eficazes corrente le e de tensão Ver são dados por:

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{0}^{T} i^{2}(t)dt} \qquad V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{0}^{T} v^{2}(t)dt}$$

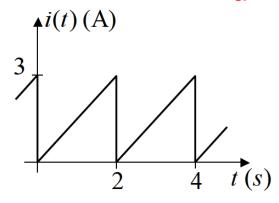
Note que a obtenção de I_{ef} (ou V_{ef}) requer que tomemos a raiz quadrada do valor médio do quadrado da corrente i(t) (ou v(t)). Por esse motivo, frequentemente, denomina-se o Valor Eficaz de valor rms (root mean square).

Exemplo

1) Qual é o Valor Eficaz V_{ef} da tensão $v(t) = V_{p}sen(wt)$?

$$\begin{split} V_{(RMS)} &= \sqrt{\frac{1}{T}} \int_{0}^{T} v^{2}(t).dt \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{0}^{2\pi} V_{p}^{2} \cdot \operatorname{sen}^{2}(\omega.t) \cdot d\omega t = \sqrt{\frac{V_{p}^{2}}{2\pi}} \cdot \int_{0}^{2\pi} \operatorname{sen}^{2}(\omega t) \cdot d\omega t = \\ &= \sqrt{\frac{V_{p}^{2}}{2\pi}} \left[\frac{\omega t}{2} - \frac{\cos 2\omega t}{4} \right]_{0}^{2\pi} = \sqrt{\frac{V_{p}^{2}}{2\pi}} \left[\frac{2\pi}{2} - \frac{\cos 4\pi}{4} - \frac{0}{2} + \frac{\cos 0}{4} \right] = \\ &= \sqrt{\frac{V_{p}^{2}}{2\pi}} \left[\frac{2\pi}{2} \right] = \sqrt{\frac{V_{p}^{2}}{2}} = \frac{V_{p}}{\sqrt{2}} \end{split}$$

2) Qual é o Valor Eficaz lef da corrente dada pelo gráfico abaixo?



$$P = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} R t^{2}(t) dt = \frac{1}{2} \int_{0}^{2} R \left(\frac{3}{2}t\right)^{2} dt$$

$$= \frac{9R}{8} \frac{t^{3}}{3} \Big|_{0}^{2} = 3R$$

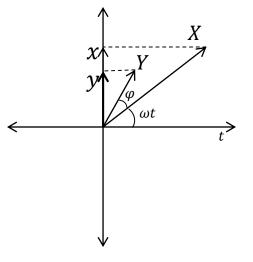
$$i(t) = \frac{3}{2}t \text{ para } 0 \le t < 2$$

$$RI_{ef}^2 = 3R \rightarrow I_{ef} = \sqrt{3}A$$

2. FASORES

Grandezas que variam "senoidalmente" em função do tempo podem ser representadas geometricamente através de Diagramas Fasoriais.

$\underline{Diagrama\ Fasorial}\ \omega$: velocidade angular de rotação (sentido



$$x = Xsen(\omega t)$$
$$y = Ysen(\omega t + \varphi)$$

anti-horário);

 \mathbf{X} e \mathbf{Y} : representam as amplitudes das funções; \mathbf{x} e \mathbf{y} : representam as projeções no eixo vertical indicando os valores instântaneos das funções;

 ϕ : representa o ângulo de rotação (diferença de fase entre fasores).

Aplicação de Fasores em Circuito Resistivo

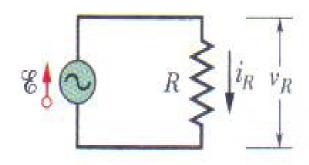
Aplicando LKT no circuito:

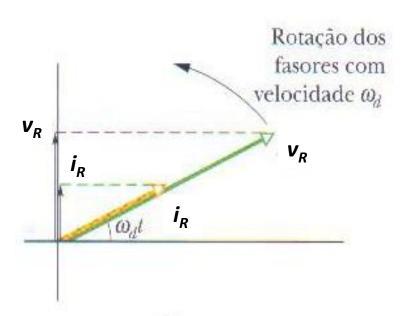
$$\mathscr{E} - \nu_R = 0.$$

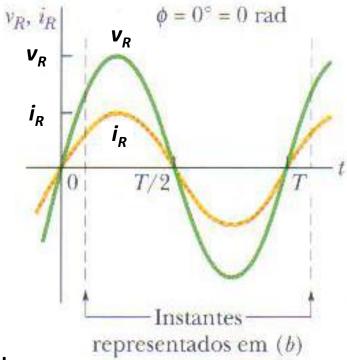
$$v_R = \mathcal{E}_m \operatorname{sen} \omega_d t$$
.

$$v_R = V_R \operatorname{sen} \omega_d t$$
.

$$i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{V_R}{R} \operatorname{sen} \omega_d t.$$







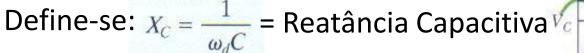
A corrente está em fase com a tensão!

Aplicação de Fasores em Circuito Capacitivo

A tensão no capacitor é dada por:

$$v_C = V_C \operatorname{sen} \omega_d t$$

$$i_C = C \cdot \frac{dv_C}{dt} \Rightarrow i_C = w_d \cdot C \cdot V_C \cdot \cos(w_d t)$$



Como:

$$\cos \omega_d t = \operatorname{sen}(\omega_d t + 90^\circ)$$

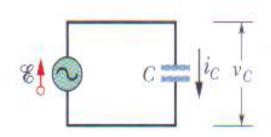
Tem-se que:

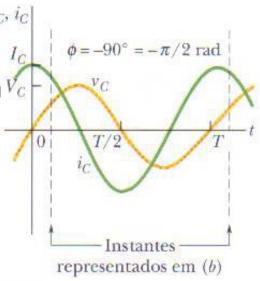
$$i_C = \left(\frac{V_C}{X_C}\right) \operatorname{sen}(\omega_d t + 90^\circ)$$

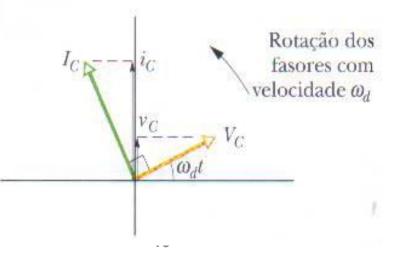
A corrente está defasada (adiantada) de 90º da tensão!

Fasorialmente:

$$V_C = I_C X_C$$







Aplicação de Fasores em Circuito Indutivo

A tensão no indutor é dada por:

$$\begin{aligned} v_L &= V_L \operatorname{sen} \omega_d t \\ i_L &= \frac{1}{L} \int_0^t v_L(t) . dt = \frac{1}{L} \int_0^t V_L . \operatorname{sen}(w_d t) . dt = \\ &= -\frac{V_L}{w_d . L} . \cos(w_d t) \end{aligned}$$

Define-se: $X_L = \omega_d L$ = Reatância Indutiva

Como:
$$-\cos \omega_d t = \operatorname{sen}(\omega_d t - 90^\circ)$$

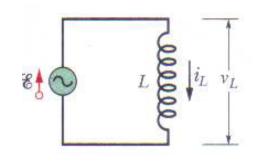
Tem-se que V_L

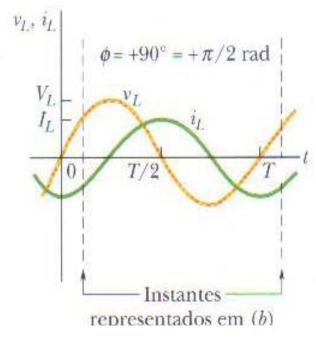
Tem-se que $i_L = \left(\frac{V_L}{X_t}\right) \operatorname{sen}(\omega_d t - 90^\circ)$

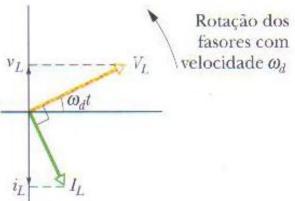
A corrente está defasada (atrasada) de 90º da tensão!

Fasorialmente:

$$V_L = I_L X_L$$







Quadro Resumo

Elemento	Símbolo	Resistência ou Reatância	Fase da Corrente	
Resistor	R	R	Em fase com v_R	
Capacitor	C	$X_C = 1/\omega_d C$	Adiantada de 90° (= $\pi/2$ rad) em relação a v_C	
Indutor	L	$X_L = \omega_d L$	Atrasada de 90° (= $\pi/2$ rad) em relação a v_L	

Elemento	Símbolo	Constante de Fase (ou Ângulo) ϕ	Relação de Amplitudes
Resistor	R	0° (= 0 rad)	$V_R = I_R R$
Capacitor	C	$-90^{\circ} (= -\pi/2 \text{ rad})$	$V_C = I_C X_C$
Indutor	L	$+90^{\circ} (= +\pi/2 \text{ rad})$	$V_L = I_L X_L$

3. Fasores Aplicados ao Circuito RLC Série

Seja uma fem aplicada no circuito RLC:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \operatorname{sen} \omega_d t$$

A corrente que circula será dada por:

$$i = I \operatorname{sen}(\omega_d t - \phi)$$

Determinação da amplitude *I* e da fase **Φ**:

$$\mathscr{E} = v_R + v_C + v_L$$

Pelo Diagrama Fasorial:

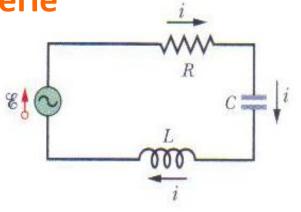
$$\mathscr{E}_m^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2$$

Então:

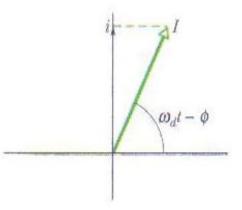
$$\mathcal{E}_m^2 = (IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2$$

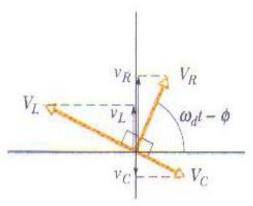
Daí:

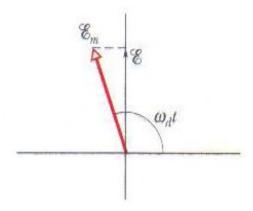
$$I = \frac{\mathscr{E}_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}.$$

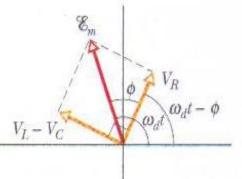


Diagramas Fasoriais









4. Impedância

É a relação do Fasor Tensão pelo Fasor Corrente.

A Impedância possui Módulo (amplitude) e Fase (ângulo).

Da Lei de Ohm :
$$\mathbf{Z} = \frac{\dot{\mathbf{V}}}{\dot{\mathbf{I}}} = |\mathbf{Z}| \angle \Phi$$

Determinação do **Módulo da Impedância**:

$$I = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \Rightarrow \frac{\varepsilon_m}{I} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = |\mathbf{Z}|$$
$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Determinação da Fase da Impedância:

$$\tan \phi = \frac{V_L - V_C}{V_R}$$
 ou $\tan \phi = \frac{X_L - X_C}{R}$

A fase será positiva se $X_L > X_C$ e negativa se $X_C > X_L$.

5. Potência Ativa (W) em Circuitos CA

A potência ativa instantânea em um resistor R é dada por:

$$P = i^2 R = [I \operatorname{sen}(\omega_d t - \phi)]^2 R = I^2 R \operatorname{sen}^2(\omega_d t - \phi)$$

A potência média dissipada no mesmo resistor é:

$$P_{\text{méd}} = \frac{I^2 R}{2} = \left(\frac{I}{\sqrt{2}}\right)^2 R$$

Observe que 🖟 é a corrente rms do circuito. Isso implica que a

potência média e rms dissipada no resistor é: $P_{\text{méd}} = I_{\text{rms}}^2 R$

Então:

$$I_{\rm rms} = \frac{\mathscr{E}_{\rm rms}}{Z}$$
 $P_{\rm méd} = \frac{\mathscr{E}_{\rm rms}}{Z} I_{\rm rms} R = \mathscr{E}_{\rm rms} I_{\rm rms} \frac{R}{Z}$ $\frac{R}{Z} = \cos \phi$

$$P_{\rm méd} = \mathscr{E}_{\rm rms} I_{\rm rms} \cos \phi$$

$$\cos \phi = \text{Fator de Potência}$$

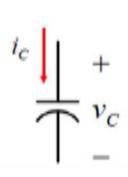


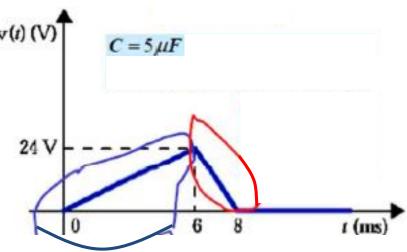
6. Considerações Iniciais

- Os capacitores e os indutores são amplamente utilizados em circuitos de medições!
- Uma grande aplicação é a condição de derivação e integração de funções as quais expressam as grandezas tensão e corrente, CC ou CA.
- A tensão nos terminais de um capacitor não varia bruscamente quando esta é submetida a uma variação em relação ao valor inicial, ou seja, $v_c(t=0^-) = v_c(t=0^+)$.
- A corrente que flui em um indutor não varia bruscamente quando esta é submetida a uma variação em relação ao valor inicial, ou seja, $i_{L}(t=0^{-}) = i_{L}(t=0^{+})$.

6.1 Aplicações de Capacitores

Um capacitor $C = 5 \mu F$ é submetido a uma tensão v(t) variável no tempo conforme o gráfico abaixo.

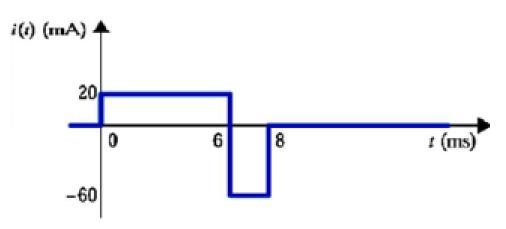




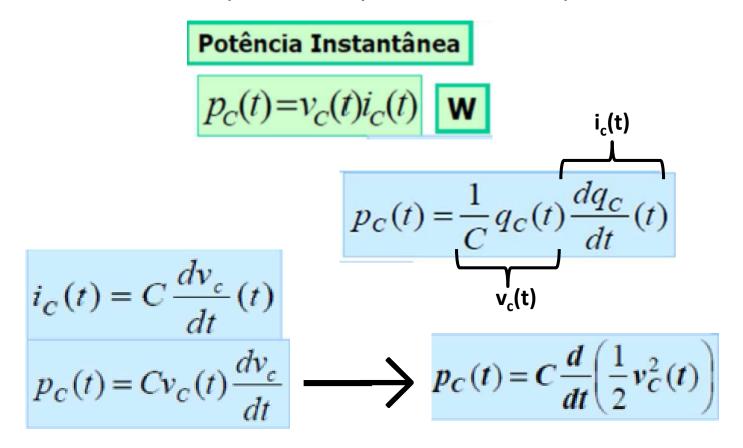
A variação da corrente i(t) no capacitor $C = 5\mu F$ é dada pelo gráfico:

Determinar a corrente!

$$i_C(t) = C \frac{dv_c}{dt}(t)$$



A potência instantânea para um capacitor C é dada por:



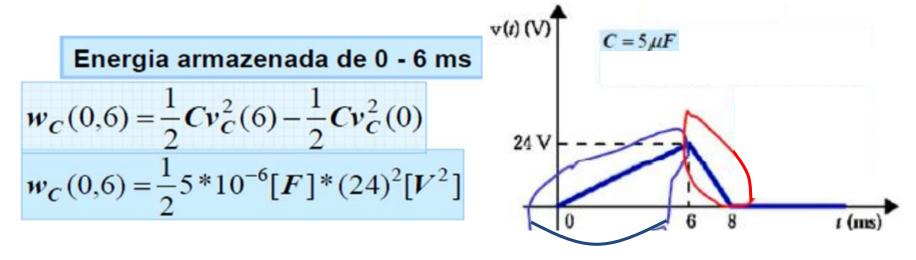
A energia armazenada em um capacitor C é dada por:

$$w_C(t_2, t_1) = \frac{1}{2}Cv_C^2(t_2) - \frac{1}{2}Cv_C^2(t_1)$$

$$w_C(t_2, t_1) = \frac{1}{C}q_C^2(t_2) - \frac{1}{C}q_C^2(t_1)$$

$$w_C(t_2, t_1) = \frac{1}{C}q_C^2(t_2) - \frac{1}{C}q_C^2(t_1)$$

A energia armazenada em um capacitor $C = 5 \mu F$ no intervalo de t = 0 a t = 6 ms é dada por:



A carga armazenada em um capacitor $C = 5\mu F$ em 3 ms é dada por:

Carga armazenada em 3ms $q_C(3) = Cv_C(3)$ $q_C(3) = 5*10^{-6}[F]*12[V] = 60\mu C$

Uma corrente i(t) variável no tempo dada pelo gráfico a seguir flui em um capacitor $C = 4 \mu F$. Determine a tensão nos terminais de C.

Durrent (
$$\mu$$
A)

15 -
10 -
5 -
0
0.5 1 1.5 2.5 3 3.5 Time (ms)

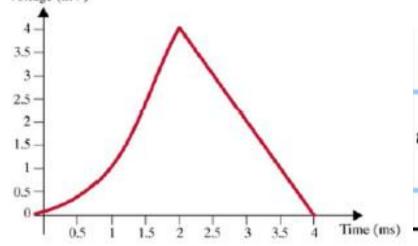
-5 -
-10 -

$$i(t) = \frac{16 \times 10^{-6} t}{2 \times 10^{-3}}$$
 $0 \le t \le 2 \text{ ms}$
= -8×10^{-6} $2 \text{ ms} \le t \le 4 \text{ ms}$
= 0 $4 \text{ ms} < t$

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_{0}^{t} i(x) dx; \ t > 0$$

$$v(t) = \frac{1}{(4)(10^{-6})} \int_{0}^{t} 8(10^{-3}) x \, dx = 10^{3} t^{2}$$

A variação da tensão v(t) no capacitor $C = 4\mu F$ é dada pelo gráfico:



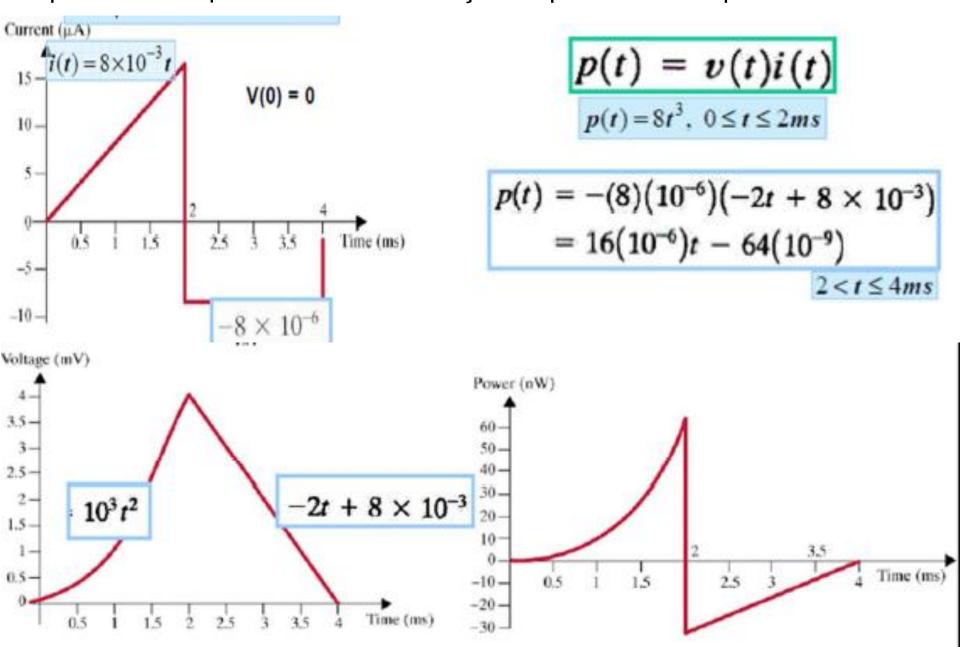
$$v(2 \text{ ms}) = 10^{3} (2 \times 10^{-3})^{2} = 4 \text{ mV}$$

$$v(t) = \frac{1}{(4)(10^{-6})} \int_{2(10^{-3})}^{t} -(8)(10^{-6}) dx + (4)(10^{-3})$$

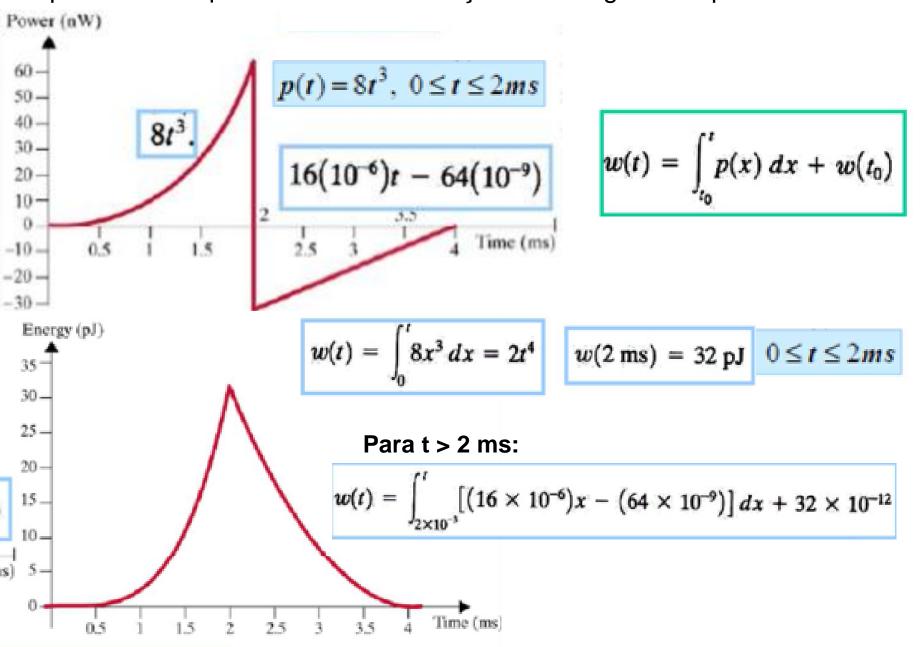
$$2 < t \le 4ms$$

$$v(t) = -2t + 8 \times 10^{-3} [V]$$

Uma corrente i(t) variável no tempo dada pelo gráfico a seguir flui em um capacitor C = 4 µF. Determine a variação da potência no capacitor C.

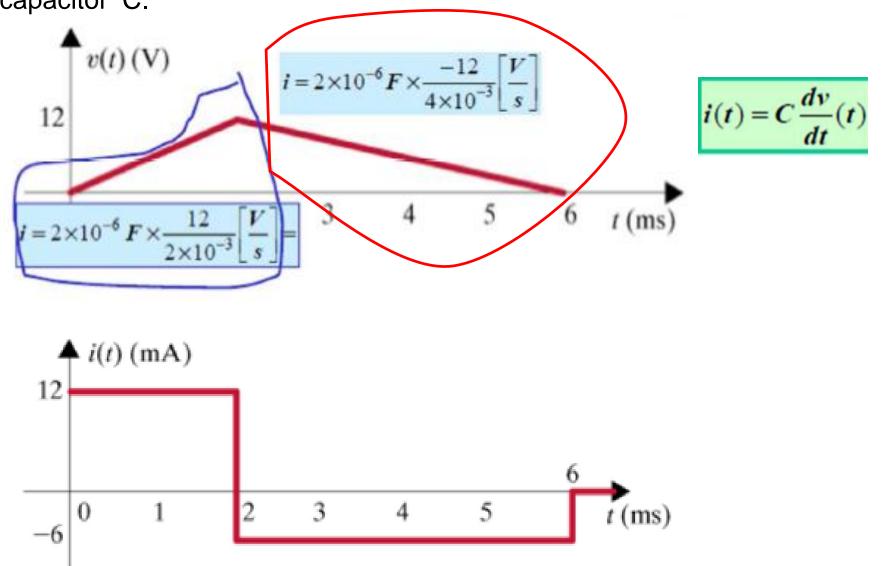


Uma corrente i(t) variável no tempo dada pelo gráfico a seguir flui em um capacitor C = 4 µF. Determine a variação da energia no capacitor C.



Uma tensão v(t) variável no tempo dada pelo gráfico a seguir é aplicada nos terminais de um capacitor $C=2~\mu F$. Determine a corrente que flui no

capacitor C.



Uma tensão v(t) senoidal v(t) = 130.sen(120 π t) (V) é aplicada nos terminais de um capacitor C = 2 μ F. Determine:

v(t)

 $v(t) = 130\sin(120\pi t)$

 $C = 2\mu F$

- a) a energia armazenada em t = 1/240 s.
- b) a carga armazenada em t = 1/120 s.
- c) a corrente no capacitor em t = 1/120 s

a)
$$E(t) = \frac{1}{2} C v_C^2(t)$$

$$E(1/240) = \frac{1}{2} 2*10^{-6} [F] *130^{2} \sin^{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)$$

b)
$$q_C(t) = Cv_C(t)$$

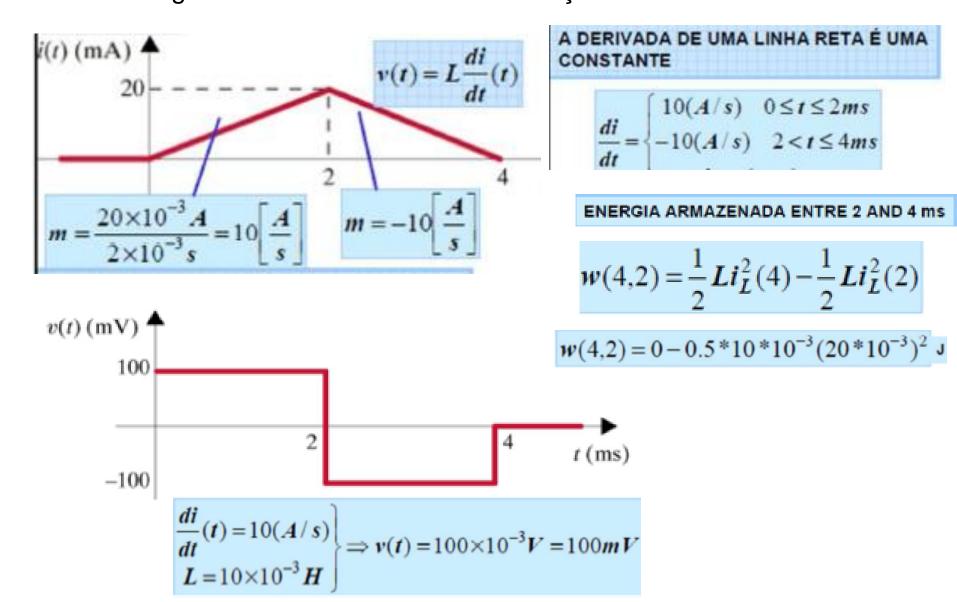
$$q_C(1/120) = 2*10^{-6}[C]*\sin(\pi)[V] = 0$$
 C

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}(t)$$

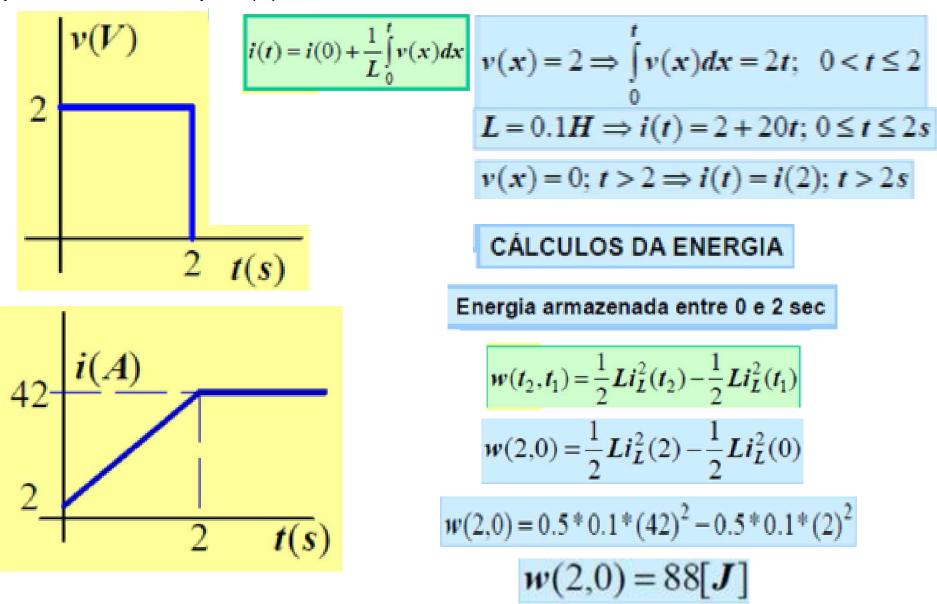
$$i_C(1/120) = 2*10^{-6}*130*120\pi\cos(\pi)$$
 A

6.2 Aplicações de Indutores

Um indutor L = 10 mH é submetido a uma corrente i(t) variável no tempo conforme o gráfico abaixo. Determine a variação da tensão neste indutor.



Um indutor L = 100 mH é submetido a uma tensão v(t) variável no tempo conforme o gráfico abaixo. Determine a variação da corrente neste indutor para t > 0 dado que i(0) = 2 A.



Um indutor L = 2 mH é atravessado por uma corrente i(t) = 2.sen(377t) A. Determine:

- a) a tensão nos terminais neste indutor.
- b) A energia armazenada no indutor.

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} = (2 \times 10^{-3}) \frac{d}{dt} (2 \sin 377t)$$

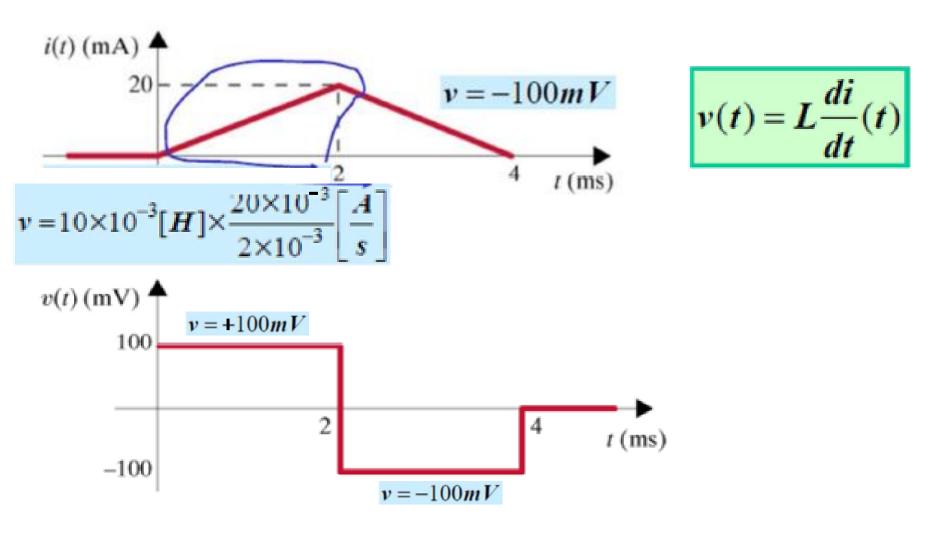
$$v(t) = 1.508 \cos 377t \text{ V}$$

$$w_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$$

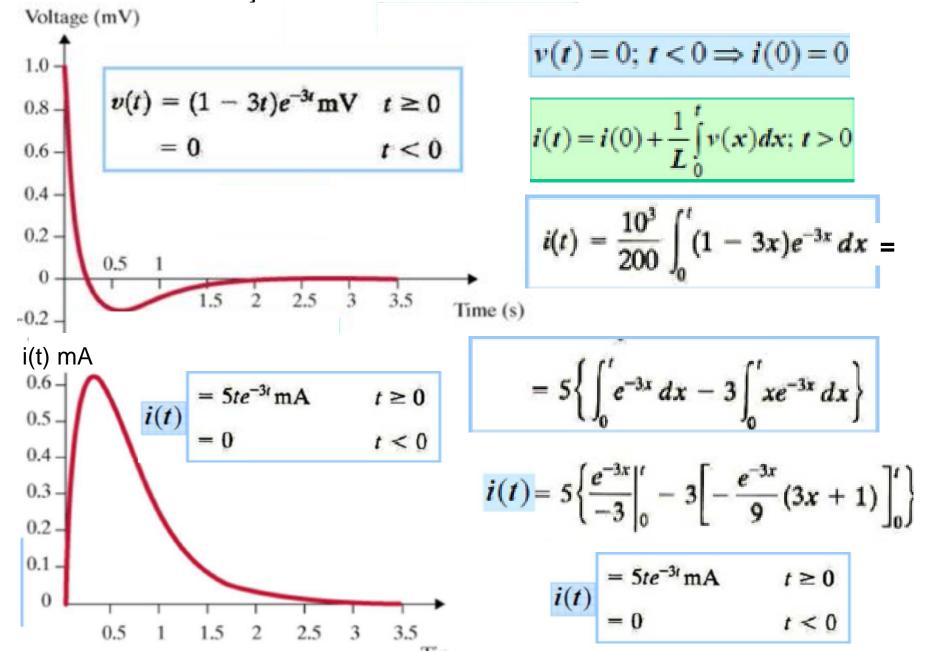
$$w_L(t) = \frac{1}{2}(2 \times 10^{-3})(2 \sin 377t)^2$$

$$= 0.004 \sin^2 377t$$
. (J)

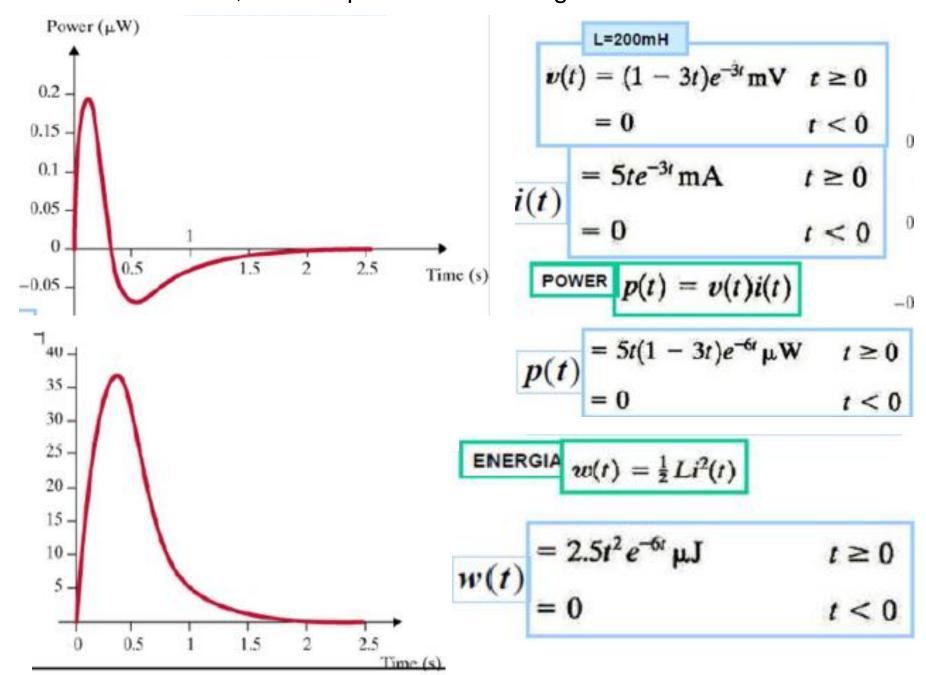
Um indutor L = 10 mH é percorrido por uma corrente i(t) variável no tempo conforme o gráfico abaixo. Determine a variação da corrente neste indutor para t > 0 dado que i(0) = 2 A.



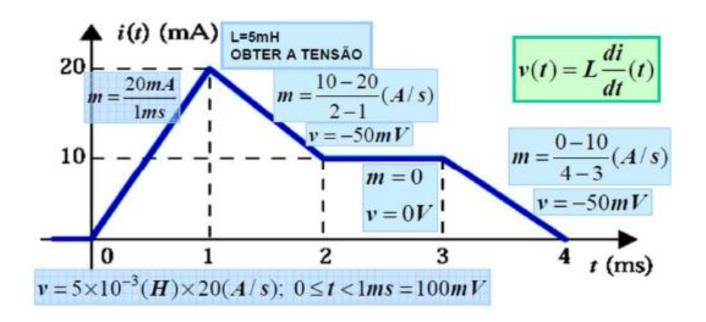
Um indutor L = 200 mH é submetido a uma tensão v(t) em seus terminais conforme as sentenças abaixo. Determine a corrente neste indutor.

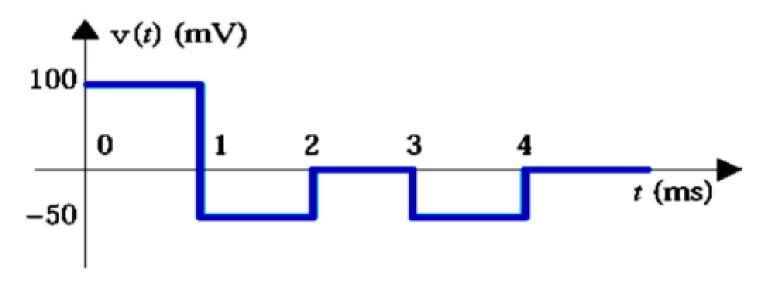


Para o caso anterior, obter a potência e a energia no indutor.



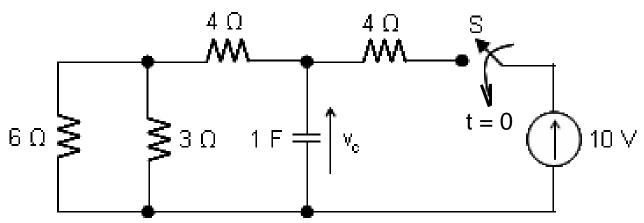
Um indutor L = 5 mH é submetido a uma corrente i(t) conforme o gráfico abaixo. Determine a tensão nos terminais deste indutor.





No circuito a seguir o capacitor está descarregado em t < 0. A chave S é fechada em t = 0. Determine a tensão v_c no capacitor para $t \to \infty$ (estado permanento)

permanente).



No circuito a seguir o indutor está descarregado em t < 0. A chave S é fechada em t = 0. Determine a corrente i_L no indutor para $t \to \infty$ (estado permanente).

