ELT330 – Sistemas de Controle I

Prof. Tarcísio Pizziolo

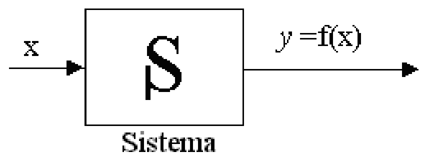
Aula 12 – Linearização de Sistemas Dinâmicos - EDO

1. Linearização de Funções não Lineares

O processo de linearização apresentado a seguir tem como base o desenvolvimento de uma **função não linear** em uma **Série de Taylor** em torno de um **Ponto de Operação** (**P.O.**) e a retenção somente do termo linear.

A linearização de um sistema não linear supõe que o sistema operará próximo de seu Ponto de Operação (**P.O.**), também chamado de **Ponto de Equilíbrio** (**P.E.**).

Seja um sistema **S** com entrada **x** e que apresente **y = f(x) NÃO LINEAR** na saída:



Considere que este sistema **S** opere **próximo** a um **Ponto de Operação** (**P.O.**) = **(x_0, y_0)** onde **$y_0 = f(x_0)$**.

Expandindo **y = f(x) não linear** em uma **Série de Taylor** em torno deste ponto tem-se:

$$y = f(x) \cong f(x_0) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3f(x)}{dx^3}\right|_{x=x_0} (x - x_0)^3 + \dots$$

A suposição de que o sistema **não linear** irá operar em torno do **P.O.**, implica que **x** ficará **próximo** de **x_0**, logo (**x - x_0**) será pequeno e quando elevado a 2, 3, ... será menor ainda, portanto pode-se considerar:

$$\frac{(x - x_0)^2}{2!} \cong 0 \ ; \ \frac{(x - x_0)^3}{3!} \cong 0 \ ; \ \dots$$

Daí a funçao **y = f(x)** pode ser aproximada por:

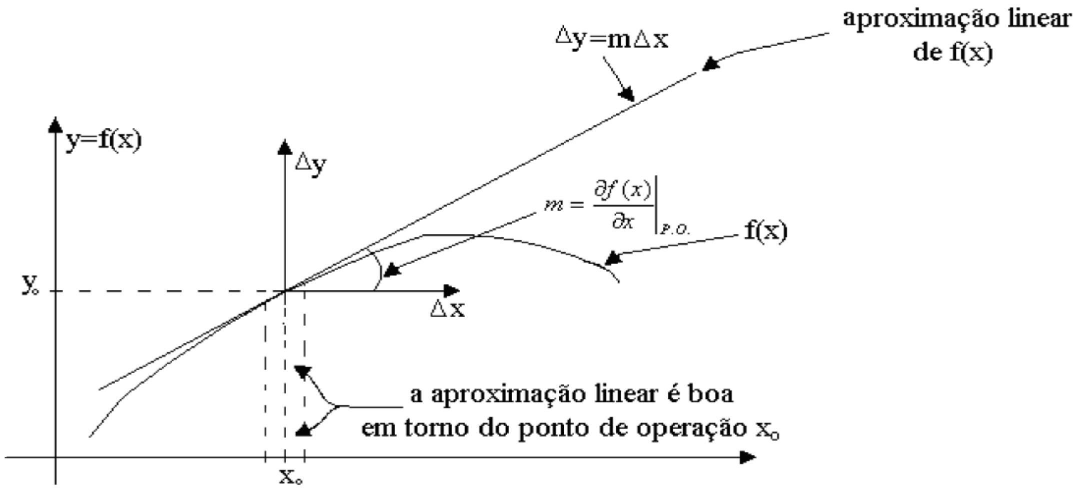
$$\boxed{y = f(x) \cong f(x_0) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} (x - x_0)}$$

Admitindo-se que **$f(x_0) = y_0$**, **$\Delta x = (x - x_0)$**, **$\Delta y = (y - y_0)$** e $m = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$, pode-se escrever:

$$y \cong \underbrace{f(x_0)}_{y_0} + \underbrace{\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}}_{m} \underbrace{(x - x_0)}_{\Delta x} \Rightarrow y = y_0 + m.\Delta x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(y - y_0)}_{\Delta y} = m.\Delta x \Rightarrow \boxed{\Delta y = m.\Delta x} \dots \text{ Equação Linear}$$

Interpretação Gráfica:



Se a função **não linear** possuir **várias variáveis**:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{sendo} \quad P.O. = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}, y_0)$$

a expansão em **Série de Taylor desprezando-se potências maiores que 1** é dada por:

$$y \cong \underbrace{f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})}_{y_0} + \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\substack{x=x_{10}\\ x=x_{20}\\ \ldots\\ x=x_{n0}}}}_{m_1} \underbrace{(x_1 - x_{10})}_{\Delta x_1} +$$

$$+ \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\substack{x=x_{10}\\ x=x_{20}\\ \ldots\\ x=x_{n0}}}}_{m_2} \underbrace{(x_2 - x_{20})}_{\Delta x_2} + \ldots + \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{\substack{x=x_{10}\\ x=x_{20}\\ \ldots\\ x=x_{n0}}}}_{m_n} \underbrace{(x_n - x_{n0})}_{\Delta x_n}$$

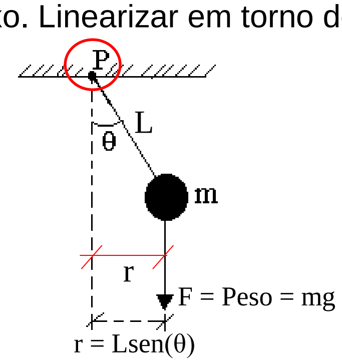
Daí:

$$\underbrace{y - y_0}_{\Delta y} \cong m_1.\Delta x_1 + m_2.\Delta x_2 + \ldots + m_n.\Delta x_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta y \cong m_1.\Delta x_1 + m_2.\Delta x_2 + \ldots + m_n.\Delta x_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Equação Linear}$$

<u>Obs.:</u> Se os cálculos de $\mathbf{y_0}$, $\mathbf{m_1}$, $\mathbf{m_2}$, ... e $\mathbf{m_n}$ não forem possíveis de serem realizados devido à ocorrência de divisão por zero, diz-se que o sistema **“não é linearizável em torno do P.O.”** em questão.

Exemplo: Linearize a função que corresponde **Torque** que a massa **m** faz com relação ao ponto **P** do pêndulo simples abaixo. Linearizar em torno do ponto de operação **θ = 0**.



O Torque é dado por: **T = F.r**
Sendo: **F = Peso = m.g** e **r = L.sen(θ)**
Logo: T = m.g.L.sen(θ)

Então a função **T** = **f(θ) = m.g.L.sen(θ)**
Note que **f(θ) não é linear**, pois:
- para $\theta = \theta_1 \rightarrow f(\theta_1) = m.g.L.sen(\theta_1)$
- para $\theta = \theta_2 \rightarrow f(\theta_2) = m.g.L.sen(\theta_2)$
- para $\theta = (\alpha\theta_1 + \beta\theta_2) \rightarrow f(\alpha\theta_1 + \beta\theta_2) = m.g.L.[sen(\alpha\theta_1).cos(\beta\theta_2) + sen(\beta\theta_2).cos(\alpha\theta_1) \neq$
$\neq m.g.L.[\alpha.sen(\theta_1) + \beta.sen(\theta_2)]$ (**Não é linear!**)

Considerando o **Ponto de Operação $\theta_0 = 0$** e expandindo na **Série de Taylor**, temos:

$$f(\theta) \cong f(\theta)|_{\theta=\theta_0} + \left.\frac{df(\theta)}{dt}\right|_{\theta=\theta_0} (\theta - \theta_0)$$

Como;

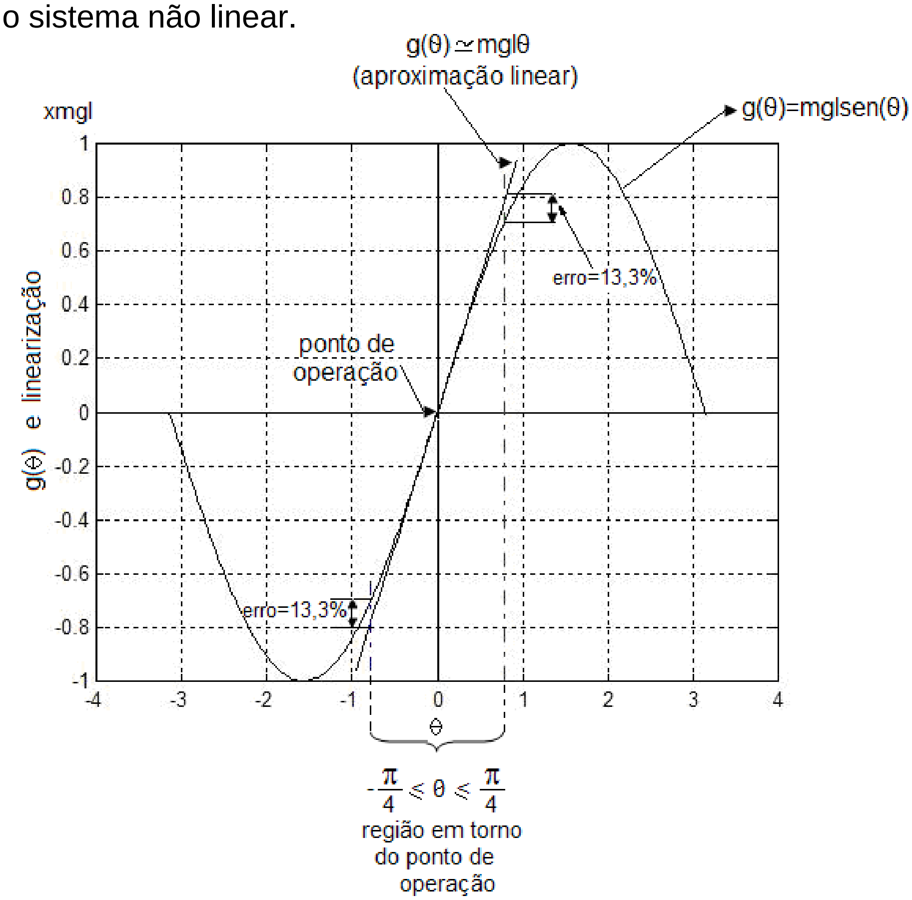
$$f(\theta)|_{\theta=0} = mgLsen(0) = 0\ ;$$

$$\left.\frac{df(\theta)}{dt}\right|_{\theta=\theta_0} = mgLcos(0) = mgL$$

Tem-se:

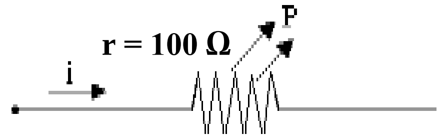
$$f(\theta) \cong 0 + mgL(\theta - 0) \Longrightarrow \boxed{f(\theta) \cong mgL\theta \quad \Longrightarrow \quad \text{Equação linear!!!}}$$

A figura a seguir mostra que para $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{4}$ o sistema linearizado tem uma boa aproximação do sistema não linear.



Exercício: Repita o exemplo anterior para que g(θ) = 0,1.cos(θ), e $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$. Use o MATLAB para desenhar os gráficos da função não linear e a linearizada.

Exemplo: Linearize a função $P(i) = r.i^2$ em torno do P.O. $i_0 = 1$ A. Faça o gráfico (interpretação geométrica).



P(i) = r.i² é uma **função quadrática**, ou seja, **não linear**!

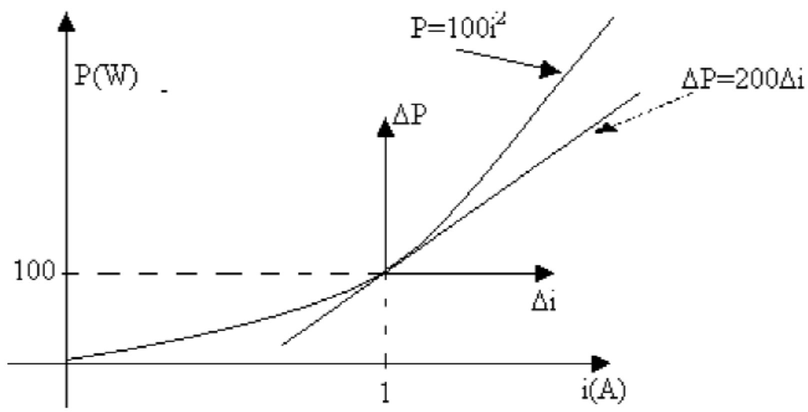
$$P(i) \cong P(i_0)\big|_{i_0=1} + \left.\frac{dP}{di}\right|_{i_0=1} (i - i_0)$$

$$\text{Como:}\;\; P(i_0)\big|_{i_0=1} = r.(i_0)^2 = r.1 = r \quad \text{e} \quad \left.\frac{dP}{di}\right|_{i_0=1} = \left.\frac{d(r.i^2)}{di}\right|_{i_0=1} = 2.r.i_0 = 2.r$$

$$\text{Tem}-\text{se que:} \quad P(i) \cong r + 2.r.(i - i_0) \Rightarrow P(i) \cong r + 2.r.(i-1) \Rightarrow P(i) \cong 2.r.i - r$$

$$\text{Substituindo} \quad r = 100\ \Omega: \quad \boxed{P(i) \cong 200.i - 100\ (w)}$$

Interpretação geométrica:



2. Linearização de Equações Diferenciais

No método de linearização mostrado anteriormente, as funções não envolvem **funções diferenciais**. Quando a **linearização envolve derivadas é necessário calcular o Ponto de Operação do sistema que será seu Ponto de Equilíbrio** (**P.E.**), o qual é obtido supondo que o **sistema esteja em equilíbrio** e, portanto, não está variando ao longo do tempo, ou seja, **todas as derivadas são nulas**. Depois, expande-se o sistema em função das variáveis e suas derivadas. Assim:

$$\boxed{\begin{aligned} g\left(x,\dot{x},\ldots,x^{\dot{n}}\right) \cong g\left(x,\dot{x},\ldots,x^{\dot{n}}\right)\Big|_{P.E.} + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{P.E.} \left(x - x|_{P.E.}\right) + \left.\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right|_{P.E.} \left(\dot{x} - \dot{x}|_{P.E.}\right) + \cdots + \\ + \left.\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right|_{P.E.} \left(x^{\dot{n}} - x^{\dot{n}}{}_{P.E.}\right) \end{aligned}}$$

Exemplo: Seja um sistema **não linear** descrito pela equação diferencial a seguir.

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2x(t) - x^2(t)$$

Portanto:

$$g(x, \dot{x}) = 0 \Longrightarrow 2x(t) - x^2(t) - \frac{dx(t)}{dt} = 0$$

Para linearizar o sistema em torno do ponto de equilíbrio (**P. E.**) deve-se fazer:

$$\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{P.E.} = 0$$

Assim:

$$2x(t)|_{P.E.} - x^2(t)|_{P.E.} - \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{P.E.} = 0 \Longrightarrow x^2(t)|_{P.E.} - 2x(t)|_{P.E.} = 0$$

As raízes são: $x(t)|_{P.E.} = 0$ e $x(t)|_{P.E.} = 2$

O modelo linear é dado por:

$$g(x, \dot{x}) = 0 \Longrightarrow g(x, \dot{x})|_{P.E.} + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{P.E.} (x - x|_{P.E.}) + \left.\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right|_{P.E.} (\dot{x} - \dot{x}|_{P.E.}) = 0 \Longrightarrow$$

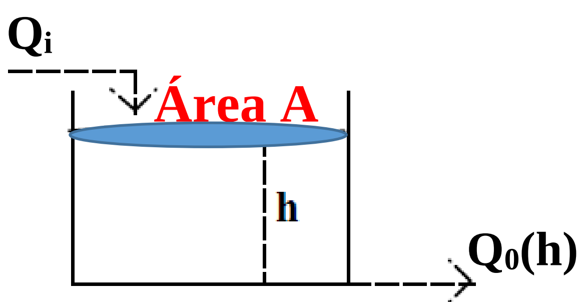
$$\Longrightarrow 0 + (2 - 2x)|_{P.E.}(x - x|_{P.E.}) - 1(\dot{x} - \dot{x}|_{P.E.}) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (2 - 4)(x - 2) - 1(\dot{x} - 0) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -2x + 4 - \dot{x} = 0 \Longrightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = -2x(t) + 4}$$ **A equação é linear!!!**

Exemplo: Linearização de Modelo não-Linear de Nível de um Tanque

Um tanque tem vazão de saída dada pela relação $Q_0(h) = k\sqrt{h}$.



Considerando-se densidade e temperatura constantes, tem-se pelo balanço de massa:

$$\frac{dV}{dt} = Q_i - Q_0 \Longrightarrow \frac{dV}{dt} + Q_0 = Q_i$$

Mas;

$$\frac{dV}{dt} = A\frac{dh}{dt} \quad \text{e} \quad Q_0(h) = k\sqrt{h}.$$

Então:

$$\boxed{A\frac{dh}{dt} + k\sqrt{h} = Q_i \ \Longrightarrow \text{Equação não linear!!!}}$$

A linearização de $Q_0(h) = k\sqrt{h}$ em torno de uma altura h_o fornece:

$$Q_0(h) \cong Q_0(h)|_{h=h_0} + \left.\frac{dQ_0}{dh}\right|_{h=h_0} (h - h_0)$$

Assim:

$$Q_0(h) \cong Q_0(h_0) + \left(\frac{k}{2\sqrt{h_0}}\right)(h - h_0) \implies \text{Equação Linear!!!}$$

Substituindo a expansão no modelo não linear acima temos:

$$A\frac{dh}{dt} + k\sqrt{h} = Q_i \implies A\frac{dh}{dt} + Q_0(h_0) + \left(\frac{k}{2\sqrt{h_0}}\right)(h - h_0) = Q_i \implies$$

$$\implies \boxed{A\frac{dh}{dt} + \left(\frac{k}{2\sqrt{h_0}}\right)(h - h_0) = Q_i - Q_0(h_0) \implies \text{Equação linear!!!}}$$

Obtendo-se assim um modelo linear que é válido na vizinhança de h_0.

Exemplo: Linearize a seguinte equação diferencial em torno de $x_0 = \pi/2$.

$$\frac{dx}{dt} = \cos(x)$$

O ponto $x_0 = \pi/2$ é um ponto de equilíbrio deste sistema dinâmico, pois,

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=x_0} = \cos(x_0) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \implies \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=x_0} = 0$$

<u>Solução</u>

$$\frac{dx}{dt} = \cos(x) \implies g(x) = \cos(x) \implies \boxed{\left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = -\mathrm{sen}(x_0) = -1}$$

Pela fórmula de Taylor:

$$g(x) \cong g(h_0) + \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0}(x(t) - x_0) \implies$$

$$\implies g(x) \cong 0 - \mathrm{sen}(x_0)(x(t) - x_0) \implies$$

$$\implies g(x) \cong -x(t) + x_0 \implies g(x) \cong -x(t) + \frac{\pi}{2}$$

A equação diferrencial linear será:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} \cong -x(t) + \frac{\pi}{2}}$$