MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE ORDEM 4

UM EXEMPLO

MAT 271 – Cálculo Numérico – PER3/2021/UFV

Professor Amarísio Araújo DMA/UFV

$$\text{PVI:} \begin{cases} y' = f(x,y) \\ \\ y(x_0) = y_o \end{cases}$$

Objetivo: encontrar, de forma aproximada, $y(b)$ para $b > x_0$ e, assim, encontrar uma aproximação da solução y do PVI no intervalo $[x_0, b]$.

Tomamos $h = \frac{b-x_0}{N}$ (h é o tamanho do passo e N é o número de passos).

Discretizamos o intervalo $[x_0, b]$: x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, ..., $x_N = x_{N-1} + h = b$.

Calculamos os valores aproximados de $y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2), \dots, y_N = y(x_N)$, usando:

$$\boxed{\begin{gathered} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), n = 0,1,2,\dots,N-1 \\ k_1 = f(x_n, y_n), \qquad k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \qquad k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{gathered}}$$

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE ORDEM 4

EXEMPLO

Seja o seguinte PVI: $y' = x + y, \ \ y(0) = 1.$

Vamos aplicar o método de Runge-Kutta de ordem 4, com $N = 4$, para calcular uma aproximação de $y(2)$.

$$h = \frac{2-0}{4} = 0.5; \quad x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1, x_3 = 1.5, x_4 = 2; y_0 = 1; \quad f(x,y) = x + y.$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), n = 0,1,2,3.$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) \qquad k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \qquad k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

EXEMPLO

$h = 0.5.$ $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1, x_3 = 1.5, x_4 = 2$ $y_0 = 1$ $f(x,y) = x + y$

$\boxed{n = 0}$ $k_1 = f(x_0, y_0) = f(0,1) = 1$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) = f\left(0 + \frac{0.5}{2}, 1 + \frac{0.5}{2}(1)\right) = f(0.25, 1.25) = 1.5$$

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_2\right) = f\left(0 + \frac{0.5}{2}, 1 + \frac{0.5}{2}(1.5)\right) = f(0.25, 1.375) = 1.625$$

$$k_4 = f(x_0 + h, y_0 + hk_3) = f(0 + 0.5, 1 + 0.5(1.625)) = f(0.5, 1.8125) = 2.3125$$

$$\boxed{y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1 + \frac{0.5}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.796875}$$

EXEMPLO

$h = 0.5.$ $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1, x_3 = 1.5, x_4 = 2$ $y_0 = 1$ $f(x, y) = x + y$

$\boxed{y_1 = 1.796875}$

$\boxed{n = 1}$ $k_1 = f(x_1, y_1) = f(0.5{,}1.796875) = 2.296875$

$$k_2 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_1\right) = f\left(0.5 + \frac{0.5}{2}, 1.796875 + \frac{0.5}{2}(2.296875)\right) = f(0.75{,}2.371094) = 3.121094$$

$$k_3 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_2\right) = f\left(0.5 + \frac{0.5}{2}, 1.796875 + \frac{0.5}{2}(3.121094)\right) = f(0.75{,}2.577149) = 3.327149$$

$$k_4 = f(x_1 + h, y_1 + hk_3) = f(0.5 + 0.5{,}1.796875 + 0.5(3.327149)) = f(1{,}3.460450) = 4.460450$$

$$\boxed{y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.796875 + \frac{0.5}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 3.434693}$$

EXEMPLO

$h = 0.5.$ $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1, x_3 = 1.5, x_4 = 2$ $y_0 = 1$ $f(x,y) = x + y$

$\boxed{y_1 = 1.796875}$ $\boxed{y_2 = 3.434693}$

$\boxed{n = 2}$ $k_1 = f(x_2, y_2) \quad = f(1{,}3.434693) \quad = 4.434693$

$$k_2 = f\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{h}{2}k_1\right) \quad = f\left(1 + \frac{0.5}{2}, 3.434693 + \frac{0.5}{2}(4.434693)\right) \quad = f(1.25{,}4.543366) \quad = 5.793366$$

$$k_3 = f\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{h}{2}k_2\right) \quad = f\left(1 + \frac{0.5}{2}, 3.434693 + \frac{0.5}{2}(5.793366)\right) \quad = f(1.25{,}4.883034) \quad = 6.133034$$

$$k_4 = f(x_2 + h, y_2 + hk_3) \quad = f(1 + 0.5{,}3.434693 + 0.5(6.133034)) \quad = f(1.5{,}6.501210) \quad = 8.001210$$

$$\boxed{y_3 = y_2 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 3.434693 + \frac{0.5}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 6.458752}$$

EXEMPLO

$h = 0.5.$ $\quad x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1, x_3 = 1.5, x_4 = 2$ $\quad y_0 = 1$ $\quad f(x, y) = x + y$

$\boxed{y_1 = 1.796875}$ $\boxed{y_2 = 3.434693}$ $\boxed{y_3 = 6.458752}$

$\boxed{n = 3}$ $\quad k_1 = f(x_3, y_3) \quad = f(1.5{,}6.458752) \quad = 7.958752$

$$k_2 = f\left(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{h}{2}k_1\right) \quad = f\left(1.5 + \frac{0.5}{2}, 6.458752 + \frac{0.5}{2}(7.958752)\right) = f(1.75{,}8.448440) \quad = 10.198440$$

$$k_3 = f\left(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{h}{2}k_2\right) \quad = f\left(1.5 + \frac{0.5}{2}, 6.458752 + \frac{0.5}{2}(10.198440)\right) = f(1.75{,}9.008362) \quad = 10.758362$$

$$k_4 = f(x_3 + h, y_3 + hk_3) \quad = f(1.5 + 0.5{,}6.458752 + 0.5(10.758362)) \quad = f(2{,}11.837933) \quad = 13.837933$$

$$\boxed{y_4 = y_3 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 6.458752 + \frac{0.5}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 11.767942}$$

$$\boxed{y(2) \cong y_4 = 11.767942}$$

COMPARANDO

Na aula síncrona anterior, abordamos o mesmo PVI do exemplo acima, com o cálculo aproximado de $y(2)$ pelo Método de Euler (Runge-Kutta de ordem 1), com $N = 10$ e pelo Método de Euler Aperfeiçoado (Runge-Kutta de ordem 2), com $N = 10$ e $N = 5$.

Comparemos com a aproximação que acabamos de obter, usando o Método de Runge-Kutta de ordem 4.

Lembrando: A solução exata deste problema, encontrada analiticamente, é $y = 2e^x - (x + 1)$.

VALOR EXATO:	$y(2) = 11.77811$
COM EULER (RK1), COM $N = 10$:	$y(2) \cong y_{10} = 9.38347$
EULER APERFEIÇOADO (RK2), COM $N = 10$:	$y(2) \cong y_{10} = 11.60924$
EULER APERFEIÇOADO (RK2), COM $N = 5$:	$y(2) \cong y_5 = 11.20164$
RUNGE-KUTTA DE ORDEM 4, COM $N = 4$:	$y(2) \cong y_4 = 11.76794$

FAÇAM!!!