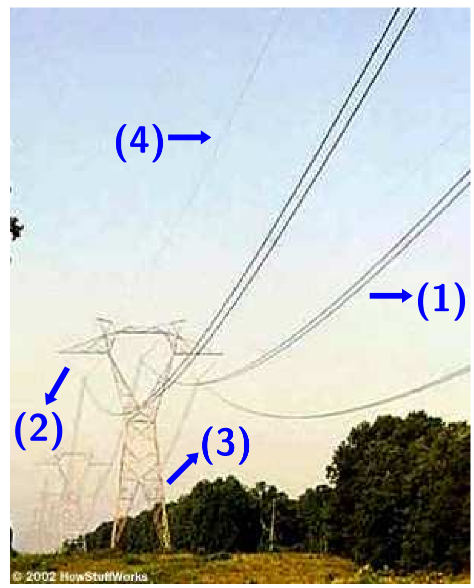
ET720 – Sistemas de Energia Elétrica I

Capítulo 5: Linhas de transmissão

5.1 Introdução

- **Componentes de uma linha de transmissão:**
  - **(1)** condutores
  - **(2)** isoladores (cadeia de isoladores de porcelana ou vidro)
  - **(3)** estruturas de suporte (torres, postes)
  - **(4)** cabos pára-raios (cabos de aço colocados no topo da estrutura para proteção contra raios)



5.2 Classes de tensão

Sigla	Denominação	Valores típicos de tensão (de linha)
LV	low voltage	< 600 V
MV	medium voltage	13,8 23 34,5 69 kV
HV	high voltage	115 138 230 kV
EHV	extra high voltage	345 440 500 600DC 765 kV
UHV	ultra high voltage	1100 kV

5.3 Tipos de condutores

- **Material**

  No passado: cobre

  Atualmente: cobre, alumínio$^{(*)}$

  $^{(*)}$ **mais barato, mais leve, requer área da seção reta maior que o cobre para as mesmas perdas**

- **Aéreos, subterrâneos**

- **Unidades mais comumente usadas:**

  - **comprimento: metro [m], pé (foot) [ft], milha (mile) [mi]**

$$
\begin{aligned}
1 \text{ ft} &= 0{,}3048 \text{ m} \\
1 \text{ mi} &= 1609 \text{ m}
\end{aligned}
$$

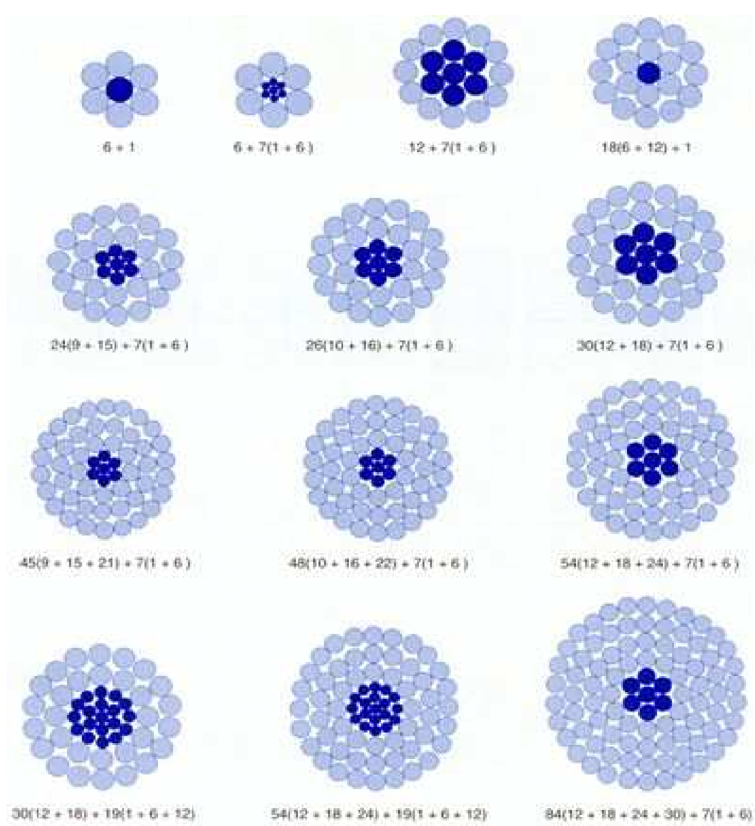
  - **área da seção reta: milimetro quadrado [mm**^{2}**], circular mil [CM]**$^{(*)}$

    $^{(*)}$ 1 **CM = área de um condutor de um milésimo de polegada (mil) de diâmetro**

▶ **Condutores de alumínio (linhas aéreas):**

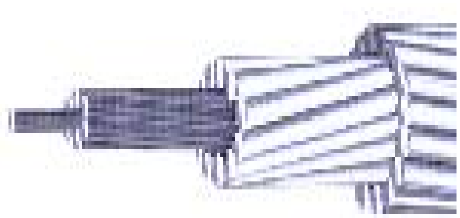
Sigla (Inglês/Português)	Significado (Inglês/Português)
AAC / CA	all aluminum conductor (alumínio puro)
AAAC / AAAC	all aluminum alloy conductor (liga de alumínio pura)
ACSR / CAA	aluminum conductor steel reinforced (alumínio com alma de aço)
ACAR / ACAR	aluminum conductor alloy reinforced (alumínio com alma de liga de alumínio)
outros	para aplicações especiais

- **ACSR (alumínio com alma de aço): aço mais barato que alumínio, a alma de aço o faz ser mais resistente à tração (admite lances maiores) → é o mais utilizado**



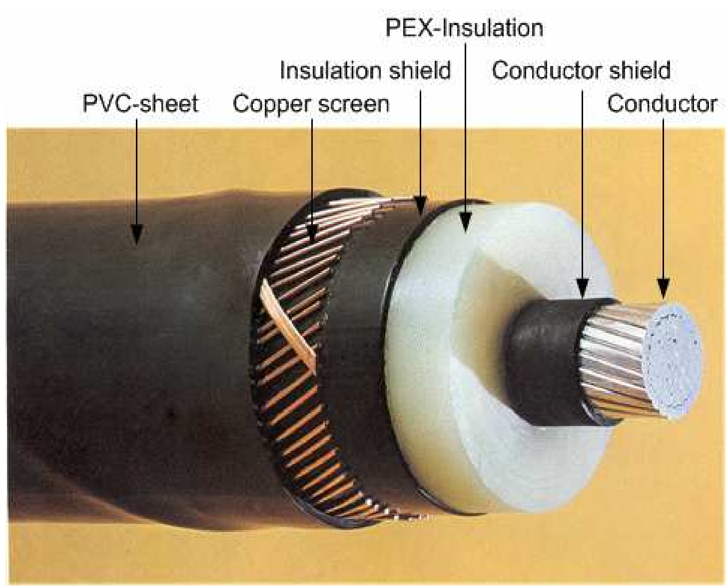
- **liga de alumínio: alumínio + magnésio/silício, por exemplo**
- **os condutores são nus (não há camada isolante)**
- **condutores são torcidos para uniformizar a seção reta. Cada camada é torcida em sentido oposto à anterior (evita que desenrole, empacotamento é melhor)**

ACSR (CAA)



AAC (CA)

- **Cabos de cobre (linhas subterrâneas): sólidos ou encordoados. Condutores isolados com papel impregnado em óleo. Existem outros tipos de isolação**



■ Exemplo

Determine a área de alumínio e a área externa total do condutor ACSR 26/7 Linnet em cm^2.

De acordo com a tabela A.3, o condutor Linnet apresenta as seguintes características:

Área de alumínio : 336.400 CM

Diâmetro externo : $0{,}721$ in^2

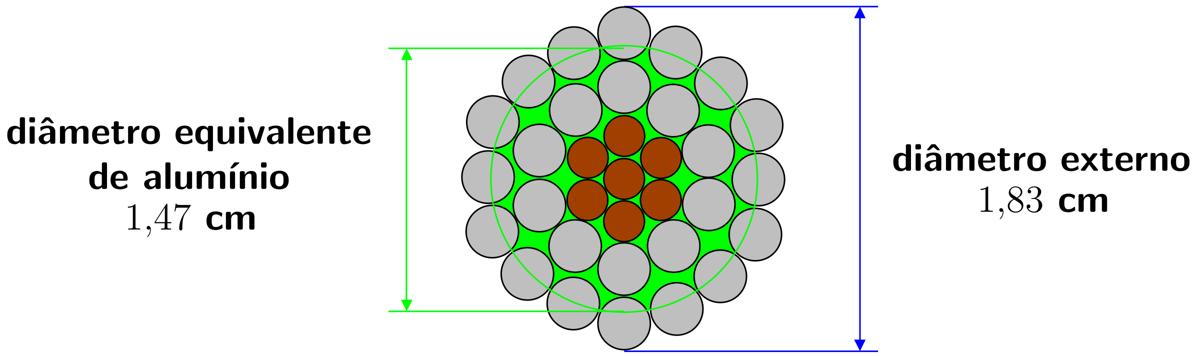
Calculando a área de alumínio em cm^2:

$$\begin{array}{rcl} 1\ \textbf{CM} & = & \pi\left(\frac{0{,}001}{2}\right)^2\ \textbf{in}^2 \\ 336.400\ \textbf{CM} & = & S_{\mathrm{Al}} \end{array} \quad \Rightarrow \quad S_{\mathrm{Al}} = 0{,}264\ \textbf{in}^2 = 1{,}7\ \textbf{cm}^2$$

que corresponderia a um condutor de alumímio de $1{,}47$ cm de diâmetro. A área externa total é:

$$S_{\mathrm{ext}} = \pi\left(\frac{0{,}721}{2}\right)^2 = 0{,}408\ \textbf{pol}^2 = 2{,}634\ \textbf{cm}^2$$

Visualizando:



■

5.4 Projeto de linhas de transmissão

- **Fatores elétricos:**

  Determinam o tipo de condutor, a área e o número de condutores por fase

  Capacidade térmica: condutor não deve exceder limite de temperatura, mesmo sob condições de emergência quando pode estar temporariamente sobrecarregado

  Número de isoladores: manter distâncias fase-estrutura, fase-fase etc. Deve operar sob condições anormais (raios, chaveamentos etc.) e em ambientes poluídos (umidade, sal etc.)

  Esses fatores determinam os parâmetros da linha relacionados com o modelo da linha

- **Fatores mecânicos:**

  Condutores e estruturas sujeitos a forças mecânicas (vento, neve etc.)

- **Fatores ambientais:**

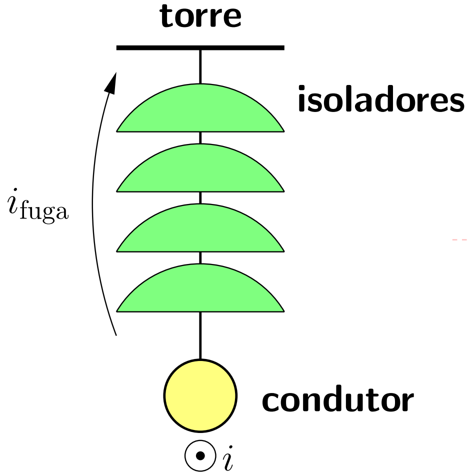
  Uso da terra (valor, população existente etc.)

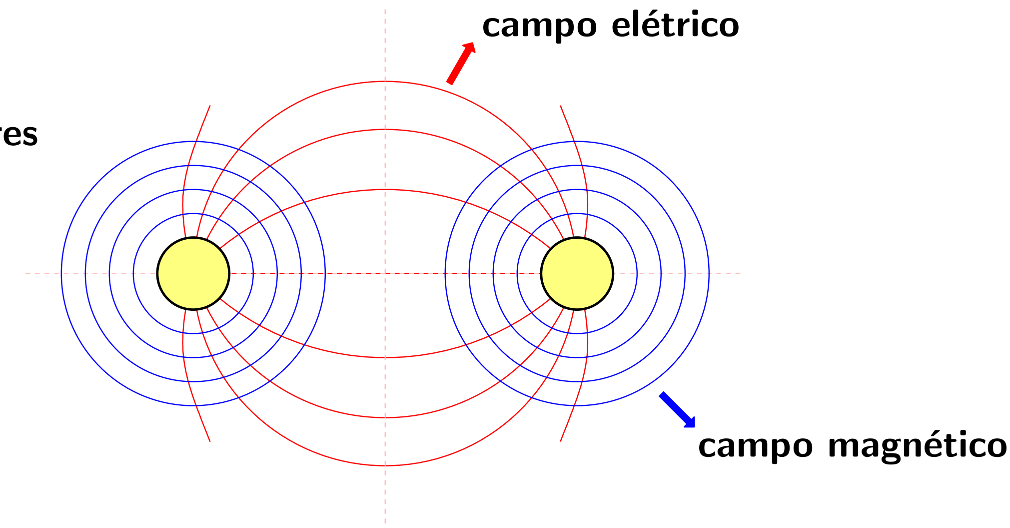
  Impacto visual (estético)

- **Fatores econômicos:**

  Linha deve atender todos os requisitos a um mínimo custo

5.5 Parâmetros das linhas de transmissão





- **Resistência (R)**

  Dissipação de potência ativa devido à passagem de corrente

- **Condutância (G)**

  Representação de correntes de fuga entre condutores e pelos nos isoladores (principal fonte de condutância)

  Depende das condições de operação da linha (umidade relativa do ar, nível de poluição, etc.)

  É muito variável, em função dos fatores acima

  Seu efeito é em geral desprezado (sua contribuição no comportamento geral de operação da linha é muito pequena)

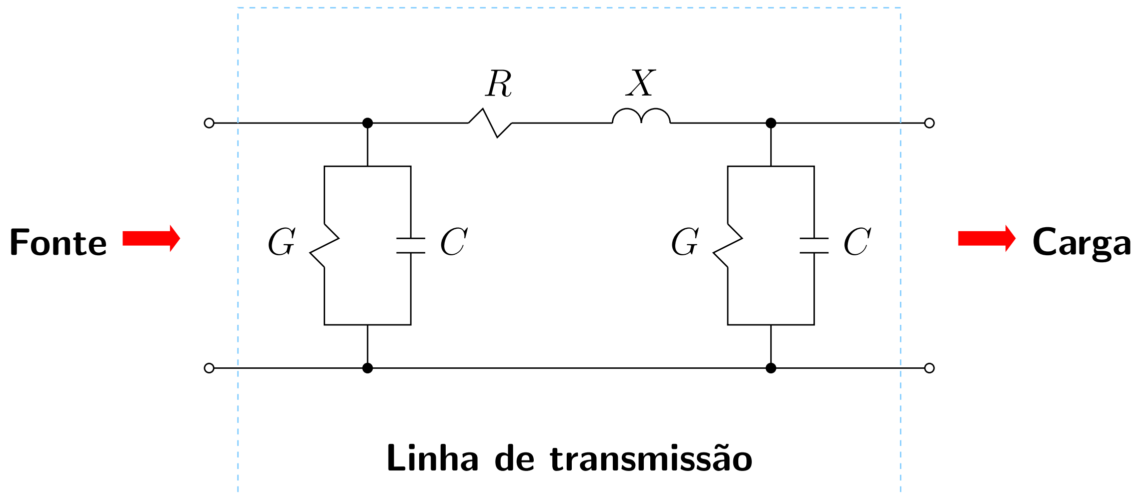
- **Indutância (L)**

  Deve-se aos campos magnéticos criados pela passagem das correntes

- **Capacitância (C)**

  Deve-se aos campos elétricos: carga nos condutores por unidade de diferença de potencial entre eles

- **Com base nessas grandezas que representam fenômenos físicos que ocorrem na operação das linhas, pode-se obter um circuito equivalente (modelo) para a mesma, como por exemplo:**



5.6 Resistência (R)

- **Causa a dissipação de potência ativa:**

$$R = \frac{\text{potência dissipada no condutor}}{I_{ef}^2}$$

- **Resistência CC:**

$$R_0 = \rho \frac{\ell}{A} \ \Omega$$

ρ – **resistividade do material ($\Omega \cdot$ m)**
ℓ – **comprimento (m)**
A – **área da seção reta (m^2)**

- **Cobre recozido a $20°$: $\rho = 1{,}77 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m**

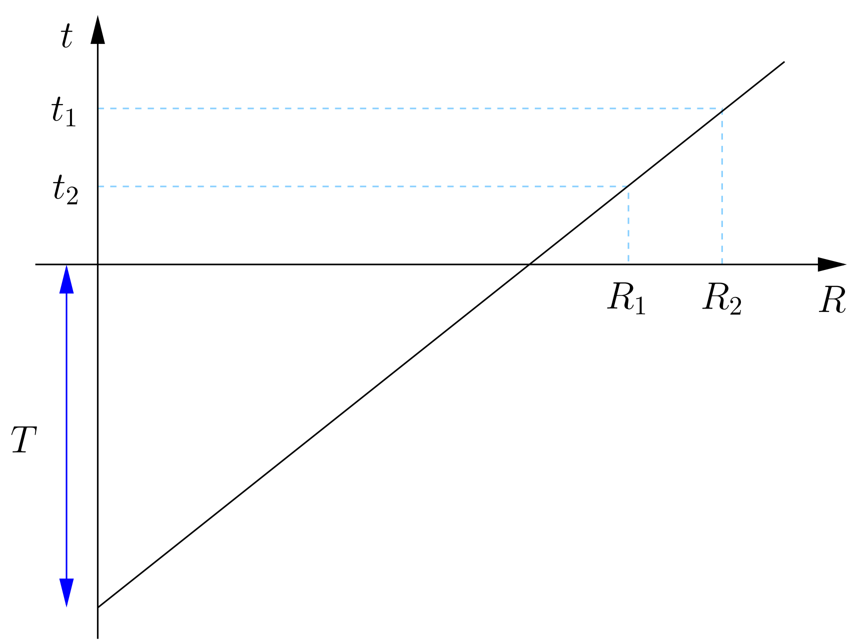
  Alumínio a $20°$: $\rho = 2{,}83 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m

- **ρ depende da temperatura $\rightarrow R_0$ varia com a temperatura (ρ aumenta $\rightarrow R_0$ aumenta):**

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{T + t_2}{T + t_1}$$

em que a constante T depende do material:

$$T = \begin{cases} 234{,}5 & \textbf{cobre recozido com 100\% de condutividade} \\ 241{,}0 & \textbf{cobre têmpera dura com 97,3\% de condutividade} \\ 228{,}0 & \textbf{alumínio têmpera dura com 61\% de condutividade} \end{cases}$$



- R_0 **aumenta de** 1 **a** 2% **para cabos torcidos (fios de alumínio torcidos, p.ex. cabos ACSR)**

  Para se ter x **metros de cabo, necessita-se de** $1{,}01x$ **a** $1{,}02x$ **metros de fios para depois agrupá-los e torcê-los**

- **Em corrente alternada a distribuição de corrente não é uniforme pela seção reta do condutor** $\rightarrow$ **a corrente concentra-se na periferia do condutor**

  "Área útil" para passagem da corrente diminui $\rightarrow R_{AC} > R_0 \rightarrow$ **efeito pelicular ("skin effect")**

Exemplo

Um cabo AAAC Greeley (6201-T81) apresenta as seguintes características (dados de tabela):

resistência CC a 20°	$0{,}07133\ \Omega/$**km**
resistência CA a 50°	$0{,}08202\ \Omega/$**km**
coeficiente de variação com a temperatura (α**)**	$0{,}00347\ {}^\circ\mathbf{C}^{-1}$

Calcule o aumento percentual da resistência devido ao efeito pelicular, considerando a seguinte equação para a variação da resistência em função da temperatura:

$$R_2 = R_1 \left[1 + \alpha \left(t_2 - t_1\right)\right]$$

A resistência CC a 50° **é:**

$$\begin{aligned} R_0^{50} &= R_0^{20} \left[1 + \alpha \left(50^\circ - 20^\circ\right)\right] \\ &= 0{,}07133 \cdot \left[1 + 0{,}00347 \cdot \left(50^\circ - 20^\circ\right)\right] = 0{,}07876\ \Omega/\textbf{km} \end{aligned}$$

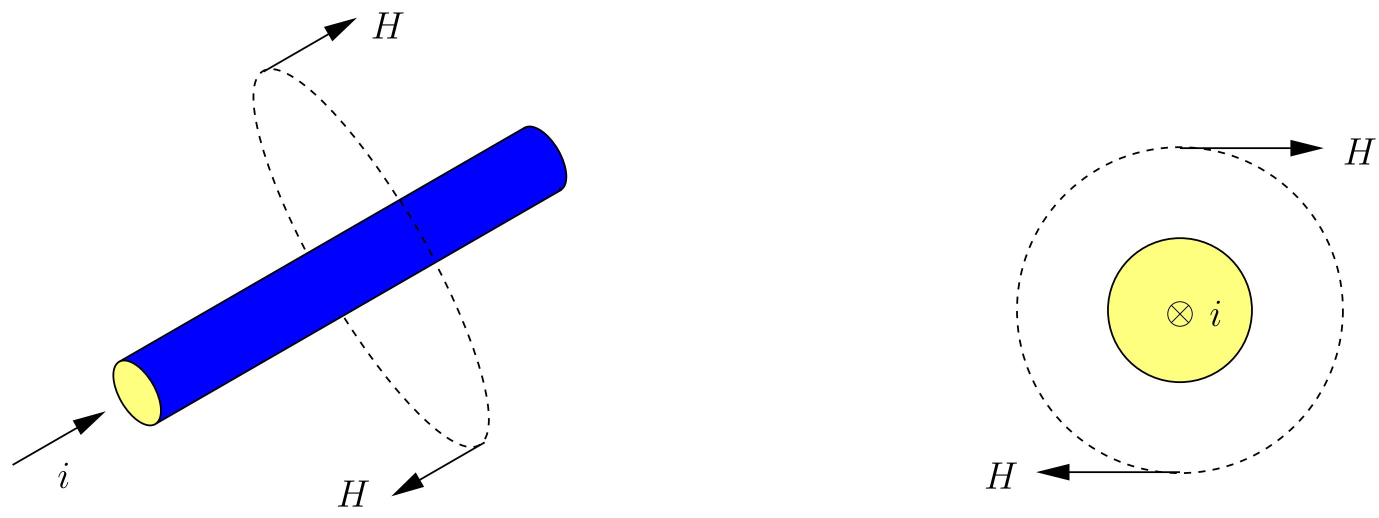
A relação entre as resistências CA (dada) e CC (calculada) a 50° é:

$$\frac{R_{CA}^{50}}{R_0^{50}} = \frac{0{,}08202}{0{,}07876} = 1{,}0414$$

ou seja, o efeito pelicular faz com que a resistência CA aumente em $4{,}14\%$

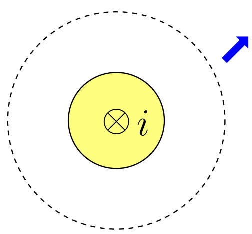
5.7 Indutância (L)

- **Relacionada com os campos magnéticos produzidos pela passagem de corrente pelo condutor $\rightarrow$ corrente produz campo magnético**



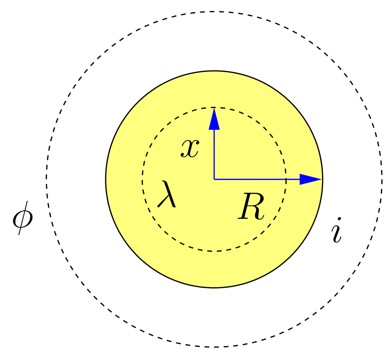
- **Fluxo concatenado com uma corrente (λ): é aquele que enlaça a corrente líquida**

  - **Fluxo concatenado externo ao condutor: a corrente produz um campo magnético (ϕ). O fluxo externo concatenado com a corrente enlaça toda a corrente, portanto:**



$$\lambda = \phi$$

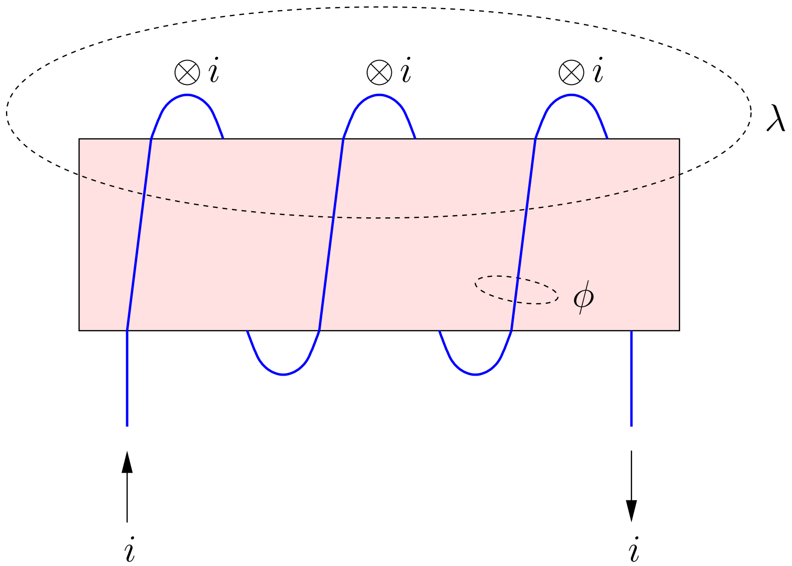
  - **Fluxo concatenado interno ao condutor: o fluxo interno concatenado com a corrente a uma distância x do centro do condutor de raio R é:**



$$\lambda = \phi \left(\frac{x}{R}\right)^2$$

Assumindo densidade de corrente (distribuição de carga por área) uniforme, a corrente enlaçada a uma distância x é proporcional à corrente total. Aparece portanto na expressão de λ a relação entre áreas $\left(\pi x^2/\pi R^2\right)$

■ **Fluxo concatenado com uma bobina:**



$\lambda = 3\,\phi$

A bobina tem 3 espiras. Logo, o fluxo concatenado "enxerga" três vezes a corrente i

▶ **Lei de Faraday:**

$$e = \frac{d}{dt}\lambda$$

Relação entre tensão e corrente para o indutor:

$$e = L\frac{d}{dt}i$$

Dividindo uma equação pela outra, obtém-se uma expressão para a indutância:

$$L = \frac{d}{di}\lambda$$

Se o circuito magnético possui permeabilidade magnética constante:

$$L = \frac{\lambda}{i} \ \mathbf{H} \ ^{(*)}$$

$(*)$

$$L = \frac{d}{di}\lambda = \frac{d}{di}N\phi = N\,\frac{d}{di}BA = NA\,\frac{d}{di}\mu H = NA\,\frac{d}{di}\mu\,\frac{Ni}{\ell} = \frac{N^2A}{\ell}\,\frac{d}{di}\mu i$$

Se o circuito magnético possui permeabilidade magnética constante:

$$\begin{aligned} L &= \frac{N^2A\mu}{\ell}\,\frac{d}{di}i = \frac{N^2A\mu}{\ell} \qquad \times\,(i/i) \\ &= \frac{N^2A\mu i}{\ell i} = \frac{Ni}{\ell}\cdot\frac{NA\mu}{i} = H\,\frac{NA\mu}{i} \\ &= \mu H\,\frac{NA}{i} = \frac{BNA}{i} = \frac{\phi N}{i} = \frac{\lambda}{i} \end{aligned}$$

5.7.1 Indutância de um condutor

- **Deve-se calcular a indutância devido ao fluxo interno, indutância devido ao fluxo externo e a indutância total**
- **Consideração: o condutor está isolado, isto é, outros condutores estão muito afastados e os seus campos magnéticos não o afetam**

Indutância devido ao fluxo interno

- **Considerar um condutor sólido pelo qual circula uma corrente i**

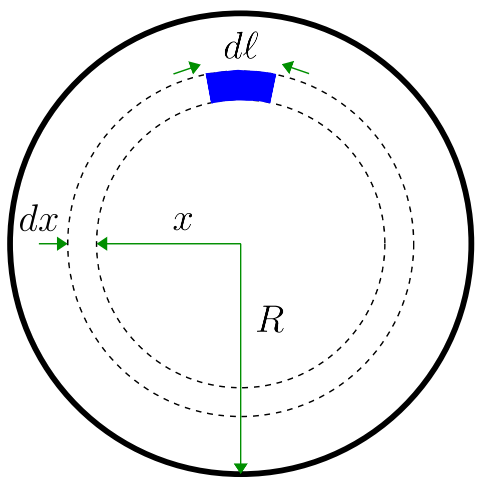
- **Lei de Ampère:**

$$\oint_c H \, d\ell = i_c$$

"a intensidade de campo magnético (A/m) ao longo de qualquer contorno é igual à corrente que atravessa a área delimitada por este contorno"

Esta expressão é válida para CC ou CA (utilizar fasores neste caso)

- **Considerar a seguinte situação (condutor visto de frente):**



- **Resolvendo a equação de Ampère:**

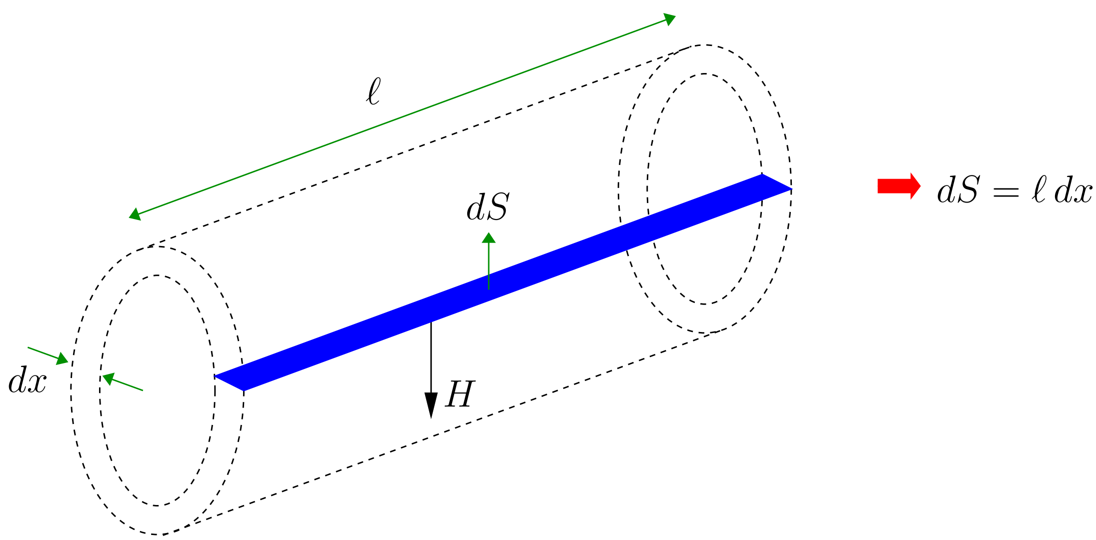
$$H \ (2\pi \, x) = \frac{\pi x^2}{\pi R^2} i \qquad \rightarrow \qquad H = \frac{x}{2\pi R^2} i \ \textbf{A/m}$$

- **Densidade de fluxo:**

$$B = \mu_r \, \mu_0 \, H \text{ } \mathbf{Wb/m^2}$$

em que $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m é a permeabilidade do vácuo e μ_r é a permeabilidade relativa do material

- **Considerar o elemento tubular de espessura dx e comprimento ℓ:**



O fluxo magnético é igual à densidade de fluxo B vezes a área da seção transversal que o campo atravessa ($H \perp dS$):

$$d\phi = B \, dS \text{ } \mathbf{Wb}$$

Da figura tem-se $dS = \ell \, dx$ e:

$$d\phi = \mu_r \mu_o H \ell dx \text{ } \mathbf{Wb}$$

O fluxo por unidade de comprimento do condutor é (dividindo por ℓ):

$$d\phi = \mu_r \mu_o H dx \textbf{ Wb/m}$$

- **O fluxo concatenado com a corrente é proporcional à área de raio x:**

$$\begin{aligned} d\lambda &= \frac{x^2}{R^2} d\phi \\ &= \frac{x^2}{R^2} \mu_r \mu_0 H dx \\ &= \frac{x^2}{R^2} \mu_r \mu_0 \underbrace{\frac{x}{2\pi R^2}}_{H} i dx \\ &= \mu_r \mu_0 \frac{x^3}{2\pi R^4} i dx \textbf{ Wb/m} \end{aligned}$$

Integrando:

$$\lambda_{\text{int}} = \int_0^R \mu_r \mu_0 \frac{x^3}{2\pi R^4} i dx = \frac{\mu_r \mu_0}{8\pi} i \textbf{ Wb/m}$$

e independe do raio do condutor, dependendo somente do material e da intensidade da corrente

▶ **A indutância devido ao fluxo interno é dada por:**

$$L_{\text{int}} = \frac{d}{di}\lambda_{\text{int}} \overset{(*)}{=} \frac{\lambda_{\text{int}}}{i} \qquad \longrightarrow \qquad L_{\text{int}} = \frac{\mu_r \mu_0}{8\pi} \text{ H/m}$$

(∗) **considerando permeabilidade constante**

e é constante. Para materiais como o alumínio, cobre, ar, água, tem-se $\mu_r = 1$ **e:**

$$L_{\text{int}} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

Outra maneira de obter a indutância devido ao fluxo interno é através da energia armazenada no campo magnético, que é dada por:

$$E = \frac{1}{2} L_{\text{int}} i^2 \text{ J}$$

Considerando um cilindro de base circular com raio x **e comprimento** ℓ**, a energia armazenada também pode ser obtida por:**

$$\frac{d}{dV}E = \frac{1}{2}\mu_r \mu_0 H^2$$

em que V **é o volume do cilindro:**

$$V = \pi x^2 \ell$$

Portanto:

$$\frac{d}{dx}V = 2\pi x\ell$$

Por unidade de comprimento:

$$dV = 2\pi x\,dx$$

Logo:

$$dE = \frac{1}{2}\mu_r\mu_0 H^2 2\pi x\,dx = \frac{1}{2}\mu_r\mu_0\left(\frac{ix}{2\pi R^2}\right)^2 2\pi x\,dx$$

Para a obtenção da energia, deve-se integrar de 0 a R, o que resulta em:

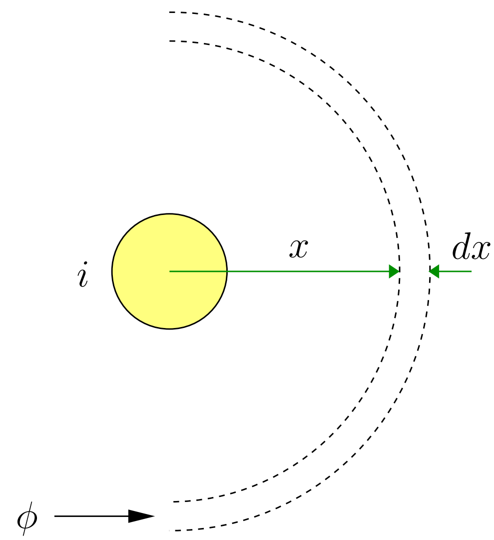
$$E = \frac{1}{2}\mu_r\mu_0 i^2\frac{1}{8\pi}$$

que, comparando com a primeira expressão da energia fornece:

$$L_{\text{int}} = \frac{\mu_r\mu_0}{8\pi}\ \textbf{H/m}$$

Indutância devido ao fluxo externo

- **Considere a seguinte situação em que se deseja obter o fluxo concatenado externo ao condutor:**



- **A corrente total i é enlaçada. Aplicando a Lei de Ampère:**

$$\oint_c H\,d\ell = i$$

$$2\pi x H = i$$

$$H = \frac{i}{2\pi x}$$

- **Densidade de campo magnético:**

$$B \overset{(*)}{=} \mu_0 H = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}$$

$(*)$ $\mu_r = 1$ **(ar)**

- **Fluxo magnético (lembrando do elemento tubular de comprimento ℓ e espessura dx):**

$$d\phi = BdS = B\ell dx$$

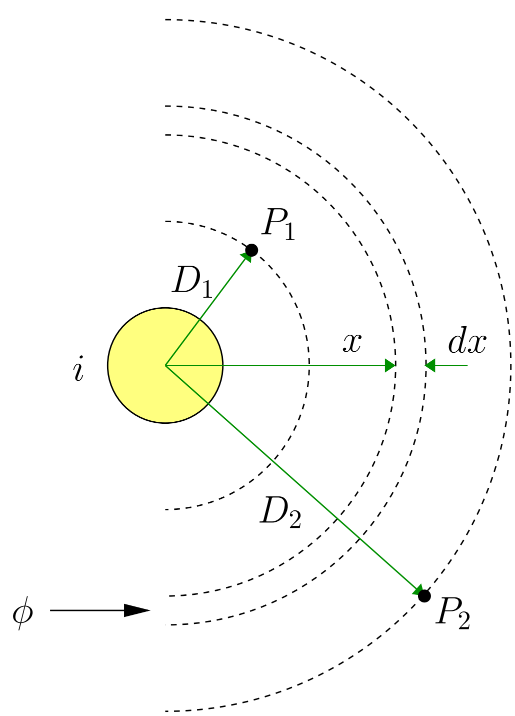
- **Fluxo por unidade de comprimento:**

$$d\phi = Bdx = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}dx$$

- **O fluxo concatenado é igual ao fluxo pois o mesmo enlaça toda a corrente uma vez:**

$$d\lambda = d\phi = Bdx = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}dx$$

- **O fluxo concatenado externo deve ser calculado entre dois pontos externos ao condutor:**



- **O fluxo entre dois pontos P_1 e P_2 quaisquer externos ao condutor é obtido pela integração de $d\lambda$:**

$$\lambda_{\text{ext}} = \lambda_{12} = \int_{D_1}^{D_2} d\lambda$$

em que D_1 e D_2 são as distâncias dos pontos ao condutor (considera-se que $r \ll x$). Logo:

$$\lambda_{12} = \int_{D_1}^{D_2} \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right) \ \textbf{Wb/m}$$

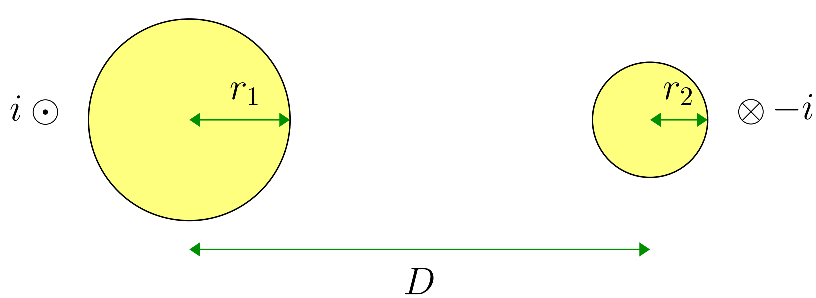
- **Indutância devido ao fluxo externo entre os dois pontos:**

$$L_{12} \overset{(*)}{=} \frac{\lambda_{12}}{i} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right) = 2 \cdot 10^{-7} \ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right) \ \textbf{H/m}$$

$(*)$ **considerando permeabilidade constante**

5.7.2 Indutância de uma linha monofásica

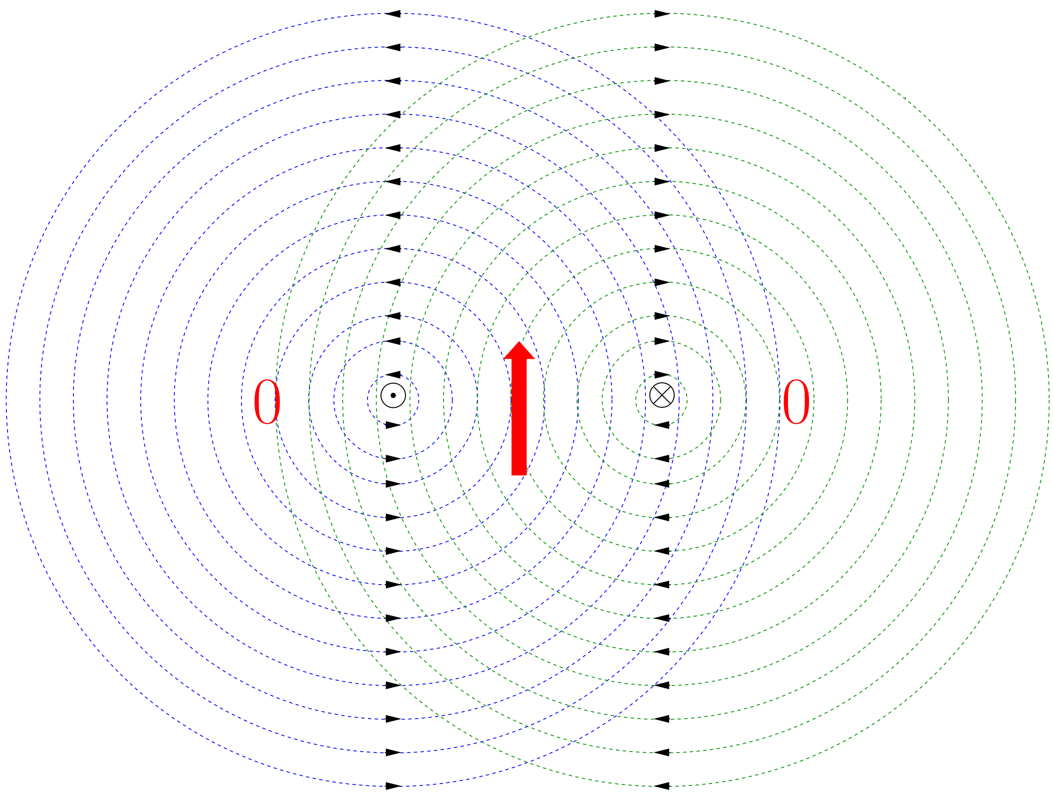
- **Considerar a linha monofásica:**



Hipótese simplificadora:

$$r_1 \ll D \quad \textbf{e} \quad r_2 \ll D$$

- **O fato da corrente no condutor 1 ser i e a corrente no condutor 2 ser $-i$ faz com que o cálculo de H para uma distância maior que a distância entre os condutores seja nula, pois neste caso a corrente total enlaçada será nula ($i_{total} = i + (-i) = 0$):**



- **Indutância externa entre os condutores produzida pelo condutor 1:**

  - **Uma linha de fluxo com raio maior ou igual a $D + r_2$ e com centro no condutor 1 não estará concatenada com o circuito, não induzindo portanto nenhuma tensão. Em outras palavras, a corrente enlaçada por esta linha de fluxo é nula, uma vez que a corrente no condutor 2 é igual e de sentido oposto à do condutor 1**

  - **Uma linha de fluxo externa ao condutor 1 e com raio menor ou igual a $D - r_2$ envolve uma vez a corrente total**

  - **As linhas de fluxo com raios entre $D - r_2$ e $D + r_2$ cortam o condutor 2 $\rightarrow$ envolvem uma fração da corrente do condutor 2 que varia entre 0 e 1**

- **Simplificações:**
  - **Admitir** $D \gg r_1, r_2 \rightarrow (D - r_1) \approx (D - r_2) \approx D$
  - **Considerar condutor 2 como um ponto, localizado a uma distância** D **do centro do condutor 1**

Então:

$$L_{1,\text{ext}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D}{r_1}$$

- **Indutância externa entre os condutores produzida pelo condutor 2 (lembrar a hipótese simplificadora** $r_2 \ll D$ **e o condutor 1 é representado por um ponto localizado no centro do condutor):**

$$L_{2,\text{ext}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D}{r_2}$$

- **Indutâncias internas: como considera-se que cada condutor "enxerga" o outro como um ponto, o fluxo externo de um condutor não afeta o fluxo interno do outro. Então:**

$$L_{1,\text{int}} = \frac{\mu_r \mu_0}{8\pi} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$
$$L_{2,\text{int}} = \frac{\mu_r \mu_0}{8\pi} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

▶ **Indutância total devido ao condutor 1:**

$$
\begin{aligned}
L_1 &= L_{1,\text{int}} + L_{1,\text{ext}} \\
&= \frac{\mu_r \mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{D}{r_1}\right)
\end{aligned}
$$

Considerando que a permeabilidade relativa dos materiais mais comuns das linhas (cobre, alumínio) é unitária e que $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m:

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{D}{r_1}\right)\right] \\
&= 2 \cdot 10^{-7} \cdot \left[\ln\left(e^{1/4}\right) + \ln\left(\frac{D}{r_1}\right)\right] \\
&= 2 \cdot 10^{-7} \cdot \left[\ln\left(\frac{e^{1/4} D}{r_1}\right)\right] \\
&= 2 \cdot 10^{-7} \cdot \left[\ln\left(\frac{D}{r_1 e^{-1/4}}\right)\right] \\
&= 2 \cdot 10^{-7} \ln\left(\frac{D}{r_1'}\right) \ \ \textbf{H/m}
\end{aligned}
$$

A expressão acima é parecida com a do fluxo externo, só que engloba também o fluxo interno. Equivale, portanto, ao fluxo externo de um condutor com raio:

$$
r_1' = r_1 e^{-1/4} = 0,7788\, r_1
$$

que é chamado de raio efetivo ou GMR – Geometric Mean Radius ou RMG – Raio Médio Geométrico

- **Indutância total devido ao condutor 2: o procedimento é o mesmo usado para o condutor 1, resultando em:**

$$\begin{aligned} L_2 &= L_{2,\mathrm{int}} + L_{2,\mathrm{ext}} \\ &= \frac{\mu_r \mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{D}{r_2}\right) \\ &= 2 \cdot 10^{-7} \cdot \left[\ln\left(\frac{D}{r_2 e^{-1/4}}\right)\right] \\ &= 2 \cdot 10^{-7} \ln\left(\frac{D}{r_2'}\right) \ \textbf{H/m} \end{aligned}$$

onde:

$$r_2' = r_2 e^{-1/4} = 0,7788\, r_2$$

é o raio efetivo ou GMR – Geometric Mean Radius do condutor 2.

- **Indutância total: é a soma das indutâncias dos condutores 1 e 2:**

$$\begin{aligned} L &= L_1 + L_2 \\ &= 2 \cdot 10^{-7} \cdot \left[\ln\left(\frac{D}{r_1'}\right)\right] + 2 \cdot 10^{-7} \cdot \left[\ln\left(\frac{D}{r_2'}\right)\right] \\ &= 2 \cdot 10^{-7} \cdot \left[\ln\left(\frac{D^2}{r_1' r_2'}\right)\right] \\ &= 4 \cdot 10^{-7} \cdot \left[\ln\left(\frac{D}{\sqrt{r_1' r_2'}}\right)\right] \ \textbf{H/m} \end{aligned}$$

- **a indutância depende da distância entre os fios, dos raios dos condutores e do meio (μ_r e μ_0 estão embutidos no termo $4 \cdot 10^{-7}$)**
- **a indutância independe da corrente**

▶ **Se os condutores tiverem o mesmo raio:**

$$r_1' = r_2' = r'$$

e a indutância será:

$$L = 4 \cdot 10^{-7} \cdot \ln \left(\frac{D}{r'} \right) \ \textbf{H/m}$$

Exemplo

Determine a indutância de uma linha monofásica cuja distância entre condutores é de $1{,}5$ m e o raio dos condutores é igual a $0{,}5$ cm

Os dois condutores têm mesmo raio. O raio efetivo (GMR) é:

$$r' = 0{,}7788 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-2} = 0{,}0039 \ \textbf{m}$$

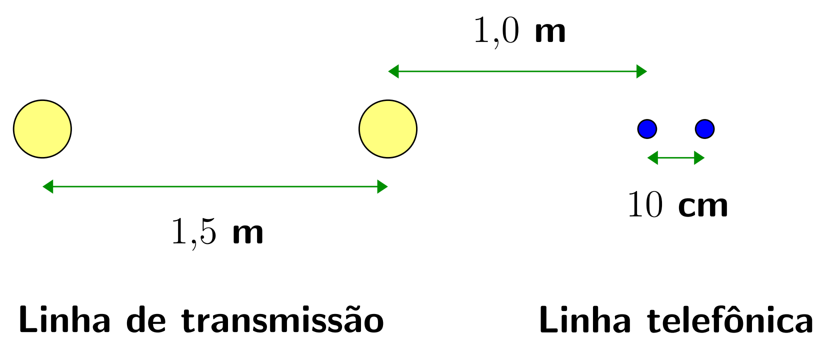
A indutância da linha vale:

$$L = 4 \cdot 10^{-7} \cdot \ln \left(\frac{1{,}5}{0{,}0039} \right) = 2{,}38 \ \mu\textbf{H/m}$$

■

■ Exemplo

A corrente pela linha de transmissão monofásica do exemplo anterior é igual a 120 A (rms), 60 Hz. Uma linha telefônica, cuja distância entre condutores é de 10 cm, está situada no mesmo plano dessa linha, afastada de 1 m, conforme mostra a figura a seguir. Calcule a tensão induzida na linha telefônica em Volts por metro de condutor. Considere que o raio dos condutores da linha telefônica é muito menor que as distâncias entre condutores do problema



A tensão induzida na linha telefônica é o resultado de um fluxo concatenado entre os dois condutores da linha, produzido pelas correntes nos condutores da linha de transmissão

Neste caso, o fluxo concatenado com a linha telefônica tem duas componentes, uma devido à corrente do condutor 1 (i) e a outra devido à corrente no condutor 2 ($-i$). Lembrando que:

$$d\lambda = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} dx$$

e chamando as componentes de fluxo concatenado de λ_1 e λ_2, tem-se:

$$\lambda_1 = 2 \cdot 10^{-7} \cdot i \cdot \int_{2{,}5}^{2{,}6} \frac{1}{x} dx = 2 \cdot 10^{-7} \cdot i \cdot \ln\left(\frac{2{,}6}{2{,}5}\right)$$

$$\lambda_2 = 2 \cdot 10^{-7} \cdot (-i) \cdot \int_{1{,}0}^{1{,}1} \frac{1}{x} dx = -2 \cdot 10^{-7} \cdot i \cdot \ln\left(\frac{1{,}1}{1{,}0}\right)$$

Notar que a corrente no condutor 2 tem sentido contrário à do condutor 2. O fluxo concatenado total é:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \cdot 10^{-7} \cdot i \cdot \left[\ln \left(\frac{2{,}6}{2{,}5} \right) - \ln \left(\frac{1{,}1}{1{,}0} \right) \right] = -1{,}1218 \cdot 10^{-8} \cdot i \ \textbf{Wb/m}$$

A corrente pelos condutores vale:

$$i(t) = 120 \cdot \sqrt{2} \cdot \operatorname{sen}(2\pi f t) \ \ \textbf{A}$$

em que f é a freqüência e considerou-se o ângulo de fase da corrente nulo (referência angular) Logo a expressão do fluxo fica:

$$\lambda = -1{,}3462 \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{2} \cdot \operatorname{sen}(2\pi f t) \ \ \textbf{Wb/m}$$

A tensão induzida na linha por unidade de comprimento vale:

$$v(t) = \frac{d}{dt}\lambda = 2\pi f \cdot (-1{,}3462) \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(2\pi f t) = -5{,}0750 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(2\pi f t) \ \ \textbf{V/m}$$

cujo valor eficaz é:

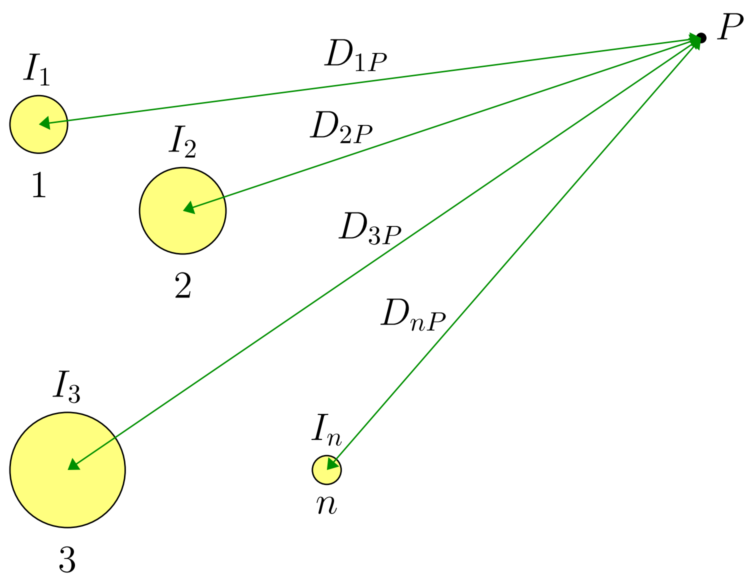
$$V_{ef} = 5{,}0750 \cdot 10^{-4} \ \textbf{V/m} = 0{,}5075 \ \textbf{V/km}$$

Este é o valor da tensão induzida na linha telefônica por unidade de comprimento da linha de transmissão

■

5.7.3 Fluxo concatenado com um condutor de um grupo de condutores

- **Considere o grupo de n condutores:**



- **A soma algébrica das correntes nos condutores é nula:**

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$

- **Idéia: calcular o fluxo concatenado com um condutor do grupo de condutores, por exemplo, o condutor 1**

  O fluxo concatenado dependerá das contribuições das correntes I_1 (do próprio condutor), I_2, I_3 . . . I_n

- **Fluxo concatenado com o condutor 1 devido à corrente I_1: é composto por duas parcelas $\rightarrow$ fluxo interno e fluxo externo**

  O fluxo externo será calculado até o ponto P somente (é um ponto de localização arbitrária e não influencia no resultado final)

  De acordo com os resultados obtidos anteriormente:

$$\lambda_{1P1} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot I_1 \cdot \ln\left(\frac{D_{1P}}{r_1'}\right) \ \textbf{Wb/m}$$

  em que r_1' é o raio efetivo. λ_{1P1} já inclui os fluxos interno e externo até o ponto P

- **Fluxo concatenado com o condutor 1 devido à corrente I_2:**

$$\lambda_{1P2} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot I_2 \cdot \ln\left(\frac{D_{2P}}{D_{12}}\right) \ \textbf{Wb/m}$$

  A expressão geral para o fluxo concatenado com o condutor i devido à corrente I_j é:

$$\lambda_{iPj} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot I_j \cdot \ln\left(\frac{D_{jP}}{D_{ij}}\right) \ \textbf{Wb/m}$$

▶ **Fluxo concatenado com o condutor 1 devido às correntes de todos os condutores:**

$$\begin{aligned}\lambda_{1P} &= 2\cdot 10^{-7}\cdot\left[I_1\cdot\ln\left(\frac{D_{1P}}{r_1'}\right)+I_2\cdot\ln\left(\frac{D_{2P}}{D_{12}}\right)+\ldots+I_n\cdot\ln\left(\frac{D_{nP}}{D_{1n}}\right)\right]\\ &= 2\cdot 10^{-7}\cdot\left[I_1\cdot\ln\left(D_{1P}\right)+I_2\cdot\ln\left(D_{2P}\right)+\ldots+I_n\cdot\ln\left(D_{nP}\right)\right]+\\ &\quad 2\cdot 10^{-7}\cdot\left[I_1\cdot\ln\left(\frac{1}{r_1'}\right)+I_2\cdot\ln\left(\frac{1}{D_{12}}\right)+\ldots+I_n\cdot\ln\left(\frac{1}{D_{1n}}\right)\right]\end{aligned}$$

Como $I_1+I_2+\ldots+I_n=0\rightarrow I_n=-\left(I_1+I_2+\ldots+I_{n-1}\right)$**. Então:**

$$\begin{aligned}\lambda_{1P} = 2\cdot 10^{-7}\cdot\Bigg[&I_1\cdot\ln\left(\frac{D_{1P}}{D_{nP}}\right)+I_2\cdot\ln\left(\frac{D_{2P}}{D_{nP}}\right)+\ldots+I_{n-1}\cdot\ln\left(\frac{D_{(n-1)1P}}{D_{nP}}\right)+\\ &I_1\cdot\ln\left(\frac{1}{r_1'}\right)+I_2\cdot\ln\left(\frac{1}{D_{12}}\right)+\ldots+I_n\cdot\ln\left(\frac{1}{D_{1n}}\right)\Bigg]\end{aligned}$$

Se considerarmos o ponto P **tendendo ao infinito (**$P\rightarrow\infty$**), os termos** D_{kP}/D_{nP} **tenderão a 1 e, portanto, seus logaritmos tenderão a zero. Logo, o fluxo concatenado com o condutor 1 vale (fazendo** $P\rightarrow\infty$**):**

$$\lambda_{1P} = 2\cdot 10^{-7}\cdot\left[I_1\cdot\ln\left(\frac{1}{r_1'}\right)+I_2\cdot\ln\left(\frac{1}{D_{12}}\right)+\ldots+I_n\cdot\ln\left(\frac{1}{D_{1n}}\right)\right]\ \textbf{Wb/m}$$

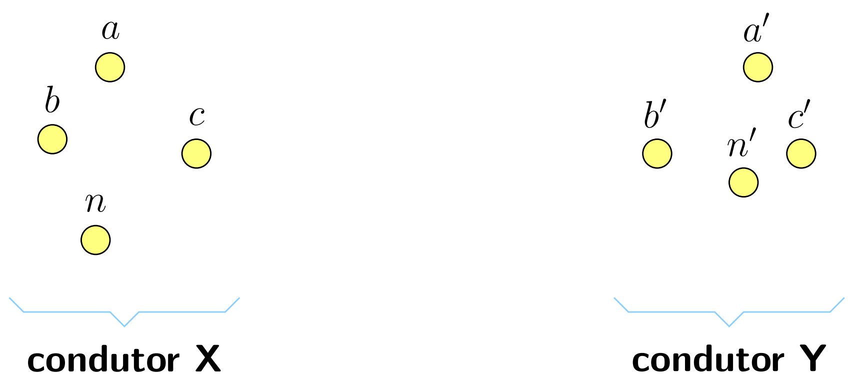
▶ **O afastamento do ponto** P **para o infinito é equivalente à inclusão de todo o fluxo concatenado com o condutor 1**

- **Lembre que a expressão do fluxo concatenado acima é a de um condutor pertencente a um grupo de condutores cuja soma das correntes seja nula**

- **A expressão é válida tanto para valores instantâneos (usar correntes instantâneas) como para fasores (usar fasores das correntes)**

5.7.4 Indutância de linhas com condutores compostos (mais de um condutor por fase)

- **Considere a seguinte linha monofásica:**



- **Características da linha:**

  - **Condutor composto: condutores encordoados, cabos.**

  - **A fase X (condutor X) é composto por n fios idênticos em paralelo e conduz uma corrente I uniformemente distribuída pelos fios. A corrente em cada fio é I/n.**

  - **A fase Y (condutor Y) é composto por m fios idênticos em paralelo e conduz uma corrente $-I$ uniformemente distribuída pelos fios. A corrente em cada foi é $-I/m$.**

- **Obtenção do fluxo concatenado com o fio a da fase X: deve-se levar em consideração o efeito de todas as correntes por todos os fios, inclusive o próprio fio a.**

- **De acordo com os resultados anteriores:**

$$\lambda_a = \underbrace{2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{I}{n} \cdot \left(\ln \frac{1}{r'_a} + \ln \frac{1}{D_{ab}} + \ldots + \ln \frac{1}{D_{an}} \right)}_{\textbf{fase X}}$$
$$\underbrace{-2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{I}{m} \cdot \left(\ln \frac{1}{D_{aa'}} + \ln \frac{1}{D_{ab'}} + \ldots + \ln \frac{1}{D_{am}} \right)}_{\textbf{fase Y}}$$

que resulta em:

$$\lambda_a = 2 \cdot 10^{-7} \cdot I \cdot \ln \frac{\sqrt[m]{D_{aa'} D_{ab'} \ldots D_{am}}}{\sqrt[n]{r'_a D_{ab} \ldots D_{an}}} \ \textbf{Wb/m}$$

- **Em geral considera-se:** $r'_a = D_{aa} = 0{,}7788 r_a$

- **A indutância do fio a é:**

$$L_a = \frac{\lambda_a}{I/n} = 2 \cdot n \cdot 10^{-7} \cdot \ln \frac{\sqrt[m]{D_{aa'} D_{ab'} \ldots D_{am}}}{\sqrt[n]{r'_a D_{ab} \ldots D_{an}}} \ \textbf{H/m}$$

- **Para o fio b:**

$$L_b = 2 \cdot n \cdot 10^{-7} \cdot \ln \frac{\sqrt[m]{D_{ba'} D_{bb'} \ldots D_{bm}}}{\sqrt[n]{D_{ba} D_{bb} \ldots D_{bn}}} \text{ H/m}$$

- **Para os outros fios da fase X o processo é semelhante.**

- **A indutância da fase X é calculada verificando-se que os fios a, b, . . . , n estão em paralelo:**

$$\frac{1}{L_X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i}$$

- **Utiliza-se também uma forma aproximada, que fornece bons resultados e simplifica bastante as deduções. Primeiro, calcula-se a indutância média da fase X:**

$$L_{av} = \frac{L_a + L_b + \ldots + L_n}{n}$$

Assume-se agora que a fase X é composta por n fios de indutância L_{av} em paralelo. Portanto, a indutância da fase X vale:

$$L_X = \frac{L_{av}}{n} = \frac{L_a + L_b + \ldots + L_n}{n^2} \text{ H/m}$$

- **Esta expressão é mais conveniente pois, substituindo os valores de L_a, L_b, etc. obtém-se:**

$$L_X = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \ln \frac{\sqrt[mn]{(D_{aa'} D_{ab'} \ldots D_{am})(D_{ba'} D_{bb'} \ldots D_{bm}) \ldots (D_{na'} D_{nb'} \ldots D_{nm})}}{\sqrt[n^2]{(D_{aa} D_{ab} \ldots D_{an})(D_{ba} D_{bb} \ldots D_{bn}) \ldots (D_{na} D_{nb} \ldots D_{nn})}} \textbf{ H/m}$$

- **Então:**

$$L_X = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \ln \frac{D_m}{D_{sX}} \textbf{ H/m}$$

- **Numerador: produto das distâncias dos fios da fase X e da fase Y:**

$$D_m = \sqrt[mn]{(D_{aa'} D_{ab'} \ldots D_{am})(D_{ba'} D_{bb'} \ldots D_{bm}) \ldots (D_{na'} D_{nb'} \ldots D_{nm})}$$

D_m **é a Distância Média Geométrica – DMG, ou Geometric Mean Distance – GMD, ou DMG mútua**

- **Denominador: produto das distâncias dos fios da fase X:**

$$D_{sX} = \sqrt[n^2]{(D_{aa} D_{ab} \ldots D_{an})(D_{ba} D_{bb} \ldots D_{bn}) \ldots (D_{na} D_{nb} \ldots D_{nn})}$$

D_{sX} **é o Raio Médio Geométrico – RMG, ou Geometric Mean Radius – GMR, ou DMG própria da fase X**

- **A indutância da fase Y é obtida de maneira idêntica à da fase X e resulta em L_Y:**

$$L_Y = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \ln \frac{D_m}{D_{sY}} \text{ H/m}$$

- **A indutância da linha é dada por:**

$$L = L_X + L_Y$$

- **Caso as fases X e Y sejam idênticas, tem-se:**

$$L = 4 \cdot 10^{-7} \cdot \ln \frac{D_m}{D_s} \text{ H/m}$$

em que $D_s = D_{sX} = D_{sY}$

- **Relembrando a expressão da indutância de uma fase de uma linha monofásica com um condutor por fase:**

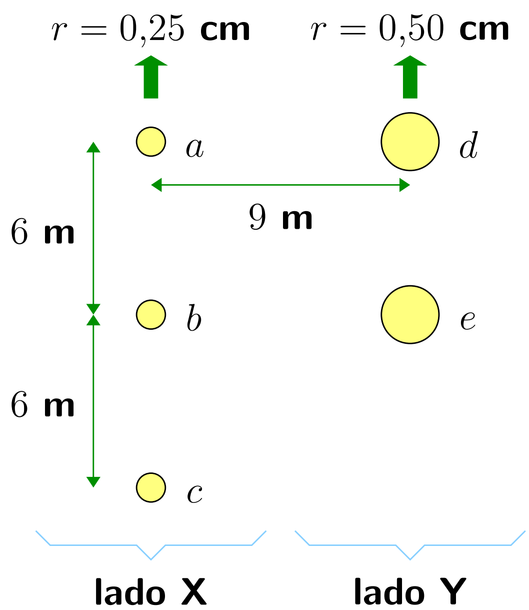
$$L_1 = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \ln \left(\frac{D}{r_1'} \right) \text{ H/m}$$

e comparando com a indutância da fase X da linha com condutores compostos L_X, percebe-se que a expressão de L_1 é um caso particular da expressão de L_1:

Condutor único por fase	Condutores múltiplos por fase
Distância entre fases (D)	Distância média geométrica – DMG (D_m)
Raio efetivo do condutor (r_1')	Raio médio geométrico – RMG (D_s)

■ Exemplo

Calcule a indutância da linha monofásica mostrada a seguir.



Cálculo da DMG entre os lados X e Y (D_m):

$$D_m = \sqrt[6]{D_{ad} D_{ae} D_{bd} D_{be} D_{cd} D_{ce}} = 10{,}743 \text{ m}$$

em que:

$$D_{ad} = D_{be} = 9 \text{ m}$$

$$D_{ae} = D_{bd} = D_{ce} = \sqrt{6^2 + 9^2} = \sqrt{117} \text{ m}$$

$$D_{cd} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15 \text{ m}$$

RMG do lado X (D_{sX}):

$$D_{sX} = \sqrt[9]{D_{aa}D_{ab}D_{ac}D_{ba}D_{bb}D_{bc}D_{ca}D_{cb}D_{cc}} = 0{,}481 \textbf{ m}$$

em que:

$$D_{aa} = D_{bb} = D_{cc} = e^{-1/4}r = 0{,}7788 \cdot 0{,}25 \cdot 10^{-2} = 1{,}9470 \cdot 10^{-3} \textbf{ m}$$
$$D_{ab} = D_{ba} = D_{bc} = D_{cb} = 6 \textbf{ m}$$
$$D_{ac} = D_{ca} = 12 \textbf{ m}$$

RMG do lado Y (D_{sY}):

$$D_{sY} = \sqrt[4]{D_{dd}D_{de}D_{ed}D_{ee}} = 0{,}153 \textbf{ m}$$

em que:

$$D_{dd} = D_{ee} = e^{-1/4}r = 0{,}7788 \cdot 0{,}50 \cdot 10^{-2} = 3{,}8940 \cdot 10^{-3} \textbf{ m}$$
$$D_{de} = D_{ed} = 6 \textbf{ m}$$

Indutâncias dos lados X e Y:

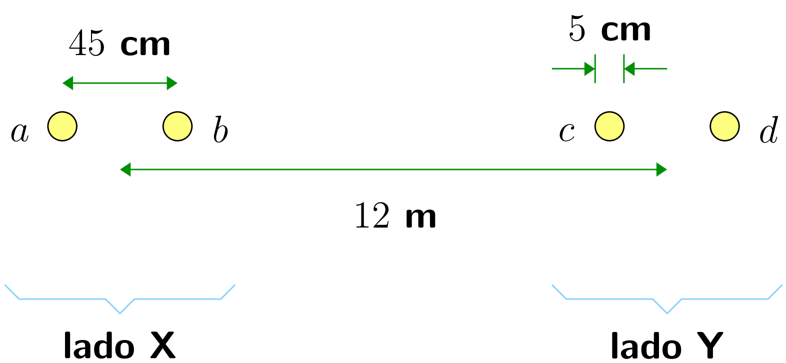
$$L_X = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \ln \frac{D_m}{D_{sX}} = 6{,}212 \cdot 10^{-7} \textbf{ H/m}$$
$$L_Y = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \ln \frac{D_m}{D_{sY}} = 8{,}503 \cdot 10^{-7} \textbf{ H/m}$$

Indutância completa da linha por unidade de comprimento:

$$L = L_X + L_Y = 14{,}715 \cdot 10^{-7} \ \textbf{H/m}$$

■ Exercício

Calcule a indutância e a reatância por unidade de comprimento a 60 Hz da linha monofásica mostrada na figura a seguir. Verifique que a DMG é praticamente igual à distância entre os centros das fases quando esta é muito maior que as distâncias entre os condutores de uma mesma fase.



(Resposta: $1{,}9413$ μ**H/m,** $0{,}732$ **m**Ω**/m)**

5.7.5 Uso de tabelas

- **Existem tabelas com várias informações sobre os condutores: resistência, reatâncias, RMG, etc.**

- **As tabelas fornecem a reatância para certas freqüências (por exemplo 60 Hz), ao invés da indutância.**

▶ **A reatância de um condutor (simples ou composto) vale:**

$$X_L = 2\pi f L = 2\pi f \cdot 2 \cdot 10^{-7} \cdot \ln \frac{D_m}{D_s} \qquad \left(\frac{\Omega}{m} \times \frac{1609\ \textbf{m}}{1\ \textbf{mi}}\right)$$

$$= 2{,}022 \cdot 10^{-3} \cdot f \cdot \ln \frac{D_m}{D_s}\ \Omega/\textbf{mi}$$

$$= \underbrace{2{,}022 \cdot 10^{-3} \cdot f \cdot \ln \frac{1}{D_s}}_{X_a} + \underbrace{2{,}022 \cdot 10^{-3} \cdot f \cdot \ln D_m}_{X_d}\ \Omega/\textbf{mi}$$

em que:

X_a – **reatância indutiva para espaçamento unitário (por exemplo, 1 pé se esta for a unidade utilizada) – depende da freqüência e do raio do condutor**

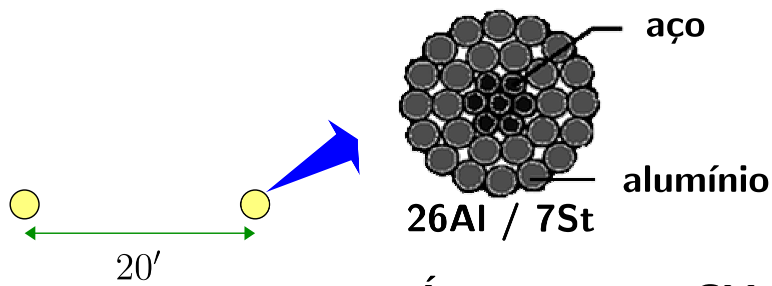
X_d – **fator de espaçamento da reatância indutiva – depende da freqüência e do espaçamento entre condutores**

■ Exemplo

Determine a reatância indutiva por milha de uma linha monofásica com as seguintes características:

freqüência	60 **Hz**
tipo dos cabos	**Partridge**
distância entre os centros dos cabos	20 **ft**

Tem-se portanto:



$$\textbf{Área} = 266.800\ \textbf{CM}$$

Conforme definido anteriormente:

$$1\ \textbf{CM} = \pi \left(\frac{0{,}001}{2}\right)^2\ \textbf{in}^2 = 0{,}7854 \cdot 10^{-6}\ \textbf{in}^2$$

Logo, para o cabo Partridge:

$$\textbf{Área} = 266.800\ \textbf{CM} = 0{,}2095\ \textbf{in}^2$$

que resulta em um diâmetro de $0{,}5165$ in. Da tabela de condutores obtém-se:

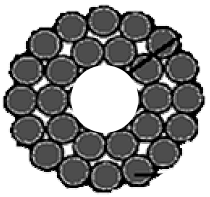
$$\textbf{Diâmetro externo} = 0{,}642\ \textbf{in} > 0{,}5165\ \textbf{in !}$$

A razão da diferença é que a área em CM fornecida na tabela refere-se à área de alumínio, enquanto que o diâmetro é externo, o que inclui o espaçamento entre os condutores.

Além disso, o raio é igual a $0{,}5165/2 = 0{,}2583$ in, ou $0{,}0215$ ft. Pela tabela de dados dos condutores tem-se:

$$\textbf{RMG} = 0{,}0217\ \textbf{ft} \neq (0{,}7788 \cdot 0{,}0215)\ \ \textbf{!}$$

Razão da diferença entre os RMG: o RMG $(0{,}7788 \cdot 0{,}0215)$ é calculado considerando um condutor sólido. No entanto, o condutor Partridge é encordoado, e o RMG deve ser calculado por:



$$\textbf{RMG} = \sqrt[26\cdot 26]{D_{aa} D_{ab} D_{ac} \ldots}$$

Da tabela A.3 de dados dos condutores, o RMG para o condutor é $D_s = 0{,}0217$ ft. Pode-se utilizar diretamente a equação da indutância e obter a reatância por condutor:

$$X = 2{,}022 \cdot 10^{-3} \cdot 60 \cdot \ln \frac{20}{0{,}0217} = 0{,}828\ \Omega/\text{mi}$$

e a reatância total será $X_L = 2\,X = 1{,}656\ \Omega$/mi

Ou então:

- **da tabela A.3 a reatância indutiva para um pé de afastamento é $X_a = 0{,}465\ \Omega$/mi**

- **da tabela A.4, para um espaçamento de 20 ft o fator de espaçamento é $X_d = 0{,}3635\ \Omega$/mi**

- **a reatância indutiva de um cabo será $X = X_a + X_d = 0{,}8285\ \Omega$/mi**

- **a reatância indutiva da linha (2 cabos): $X_L = 2X = 1{,}657\ \Omega$/mi**

■