UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA – UFV
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – CCE
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA - DEL

Sistemas de Controle II

ELT331

AULA 21 – Projeto de Controlador Digital

Prof. Tarcísio Pizziolo

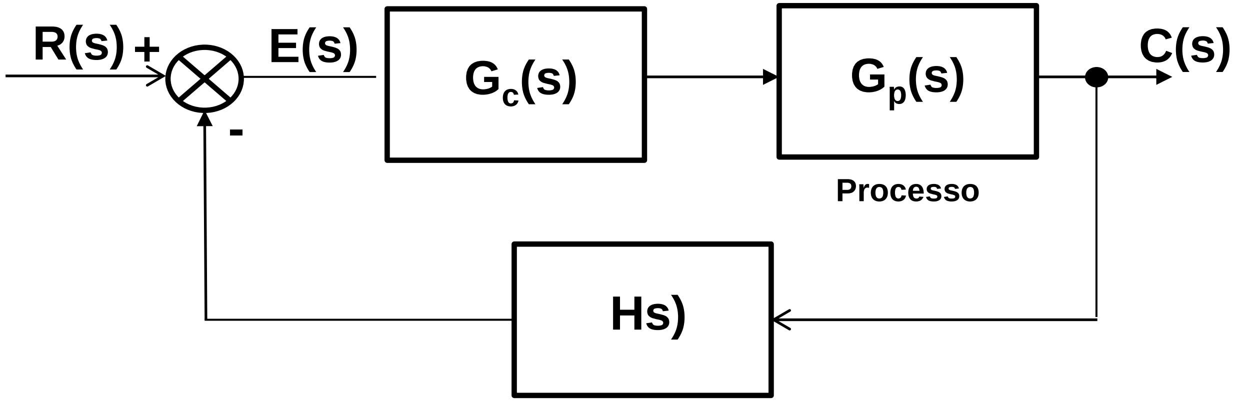
21. Controlador Digital (D(z))

Introdução

Um método utilizado para determinação de um Controlador Digital **D(z)** é obter primeiramente o Controlador **G_c(s)** relativo ao processo a controlar **G_p(s)** e em seguida convertê-lo em **D(z)** para um período de amostragem **T**.
Este método é denominado **Emulação**!

Para obtenção de **G_c(s)** aplicam-se os métodos anteriores para sistemas em tempo contínuo.

Seja o sistema de controle no tempo contínuo a seguir.



O Controlador **G_c(s)** deve ser especificado pelos métodos que o determinam contendo um **Ganho**, um **Zero** e um **Polo**.

21.1. Determinação de D(z)

Consideremos o Controlador em tempo contínuo $\mathbf{G_c(s)}$ sendo:

$$G_c(s) = K\frac{(s+a)}{(s+b)}$$

Um Controlador Digital pode ser obtido pela conversão de $\mathbf{G_c(s)}$ em **D(z)** aplicando a **Z{.}**.

Então:

$$D(z) = Z\{G_c(s)\}$$

Consideremos **D(z)** constituído também de um **Ganho**, um **Zero** e um **Polo**.

Daí:

$$D(z) = C\frac{(z+A)}{(z+B)}$$

21.1. Determinação de D(z)

Aplicando a igualdade **z = e^sT** temos que: $s = \frac{1}{T}\ln(z)$

Pela definição de **Z{.}** tem-se:

$$G_c(z) = G_c^*(s) = G_C^*\left(\frac{1}{T}\ln(z)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} g_c(kT)\, z^{-k} = Z\{G_c(s)\}$$

Substituindo $s = \frac{1}{T}\ln(z)$ em $\mathbf{G_c(s)}$:

$$D(z) = Z\{G_c(s)\} \Rightarrow C\frac{\overbrace{(z+A)}^{\text{zero de } D(z)}}{\underbrace{(z+B)}_{\text{polo de } D(z)}} = K\frac{\overbrace{[\frac{1}{T}\ln(z)+a]}^{\text{zero de } G_c(s)}}{\underbrace{[\frac{1}{T}\ln(z)+b]}_{\text{polo de } G_c(s)}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{ll}\text{Zero de } G_c(s): & \frac{1}{T}\ln(z)+a=0 \Rightarrow z=e^{-aT}\\ \text{Zero de } D(z): & z+A=0 \Rightarrow z=-A\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A=-e^{-aT}}\\ \left.\begin{array}{ll}\text{Polo de } G_c(s): & \frac{1}{T}\ln(z)+b=0 \Rightarrow z=e^{-bT}\\ \text{Polo de } D(z): & z+B=0 \Rightarrow z=-B\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{B=-e^{-bT}}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{D(z) = C\frac{\overbrace{(z-e^{-aT})}^{\text{zero de } D(z)}}{\underbrace{(z-e^{-bT})}_{\text{polo de } D(z)}}}$$

21.1. Determinação de D(z)

O Ganho em estado permanente de **D(Z)** tem que ser igual ao ganho de **G_c(s)**. Então, **C** é determinado pelo **Teorema do Valor Final**,quando **s** → **0 => z** → **1**.

$$ganho\ DC = \lim_{s\to 0} G_c(s) = \lim_{z\to 1} D(z)$$

$$\underbrace{\lim}_{s\to 0} G_c(s) = \underbrace{\lim}_{z\to 1} D(z) \Rightarrow \underbrace{\lim}_{s\to 0}\left\{K\frac{(s+a)}{(s+b)}\right\} = \underbrace{\lim}_{z\to 1}\left\{C\frac{(z-e^{-aT})}{(z-e^{-bT})}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K\frac{a}{b} = C\frac{(1-e^{-aT})}{(1-e^{-bT})} \Rightarrow \boxed{C = \frac{Ka(1-e^{-bT})}{b(1-e^{-aT})}}$$

Finalmente:

$$\boxed{D(z) = [\frac{Ka(1-e^{-bT})}{b(1-e^{-aT})}]\frac{(z-e^{-aT})}{(z-e^{-bT})}}$$

Período de Amostragem T: em geral escolhe-se **T** pequeno para manter a estabilidade no Plano-z. Não se deve utilizar um valor de **T** excessivamente pequeno, pois necessita de muito cálculo. Usa-se então **$T = 1/(10f_B)$**, onde **$f_B = w_B/(2\pi)$** (w_B é a banda passante do sistema contínuo a malha aberta).

Exemplo 1:

Dado um controlador $G_c(s) = 5{,}6\dfrac{(s+50)}{(s+312)}$ e **T = 10^{-3} s**, determinar **D(z)**.

$$A = e^{-aT} = e^{-50\times 0,001} \Rightarrow A = 0{,}95$$

$$B = e^{-bT} = e^{-312\times 0,001} \Rightarrow B = 0{,}73$$

$$C = \frac{Ka(1-B)}{b(1-A)} = \frac{5{,}6\times 50\times(1-0{,}73)}{312\times(1-0{,}95)} \Rightarrow C = 4{,}85$$

$$\text{Daí}: D(z) = 4{,}85.\frac{(z-0{,}95)}{(z-0{,}73)}$$

Exercício 1:

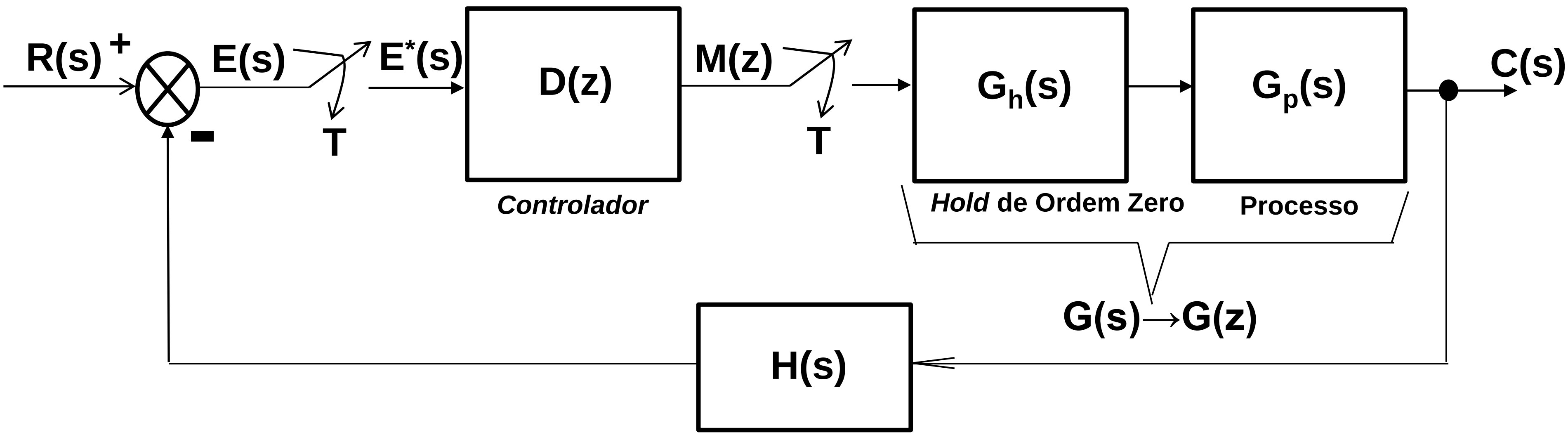
Dado um controlador $G_c(s) = 41{,}7.\dfrac{(s+4{,}41)}{(s+18{,}4)}$ e **T = 10^{-2} s**, determinar **D(z)**.

$$D(z) = 42{,}356.\frac{(z-0{,}96)}{(z-0{,}83)}$$

21.2. Sistema de Controle em Malha Fechada com Controlador D(z)

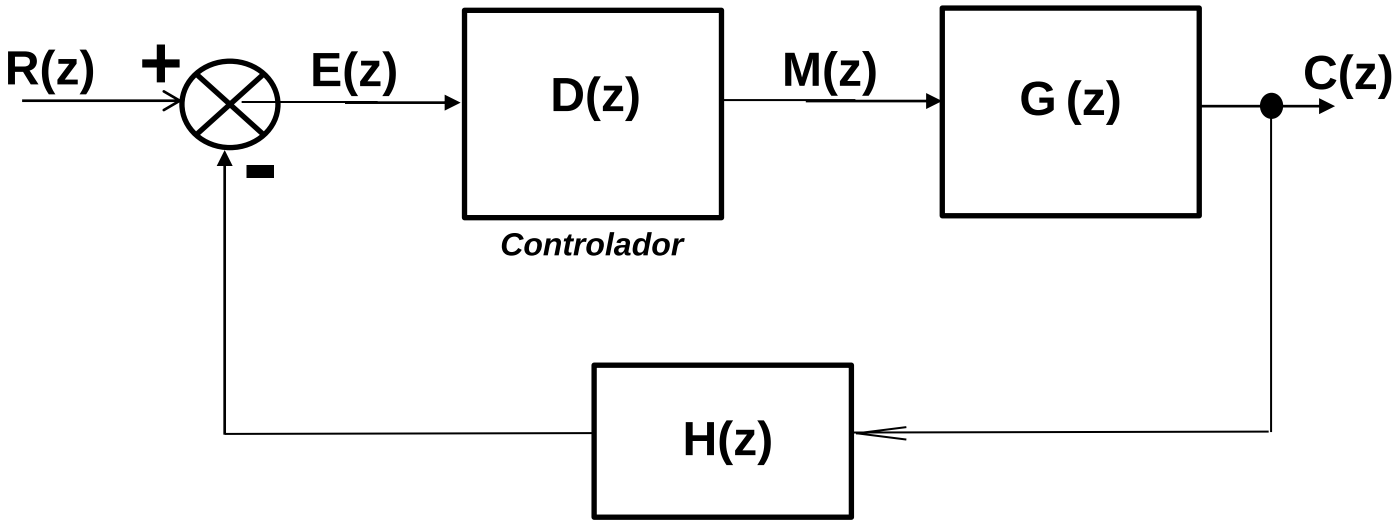
Aplica-se o Controlador Digital **D(z)** para melhorar o desempenho de Sistemas de Controle em Malha Fechada.

Seja o Sistema de Controle dada a seguir.



21.2. Sistema de Controle em Malha Fechada com Controlador D(z)

Após a discretização do sistema obtém-se:

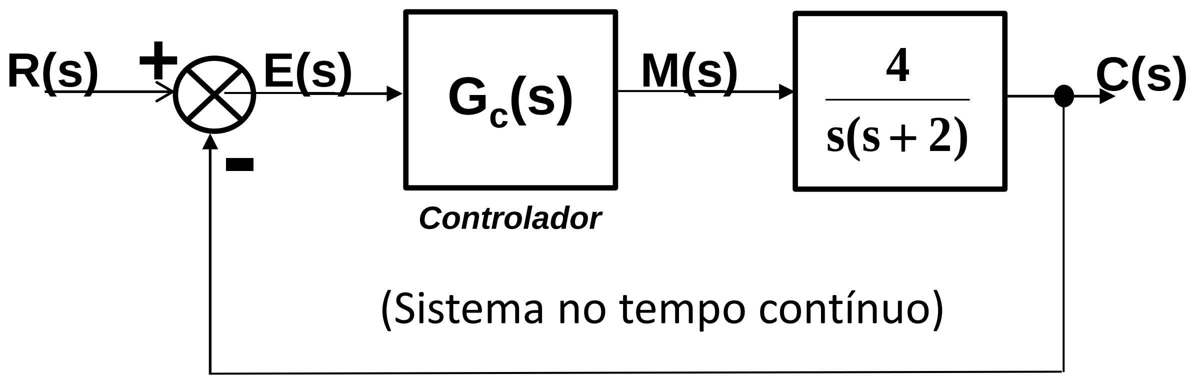


$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z).D(z)}{1 + G(z).H(z).D(z)}$$

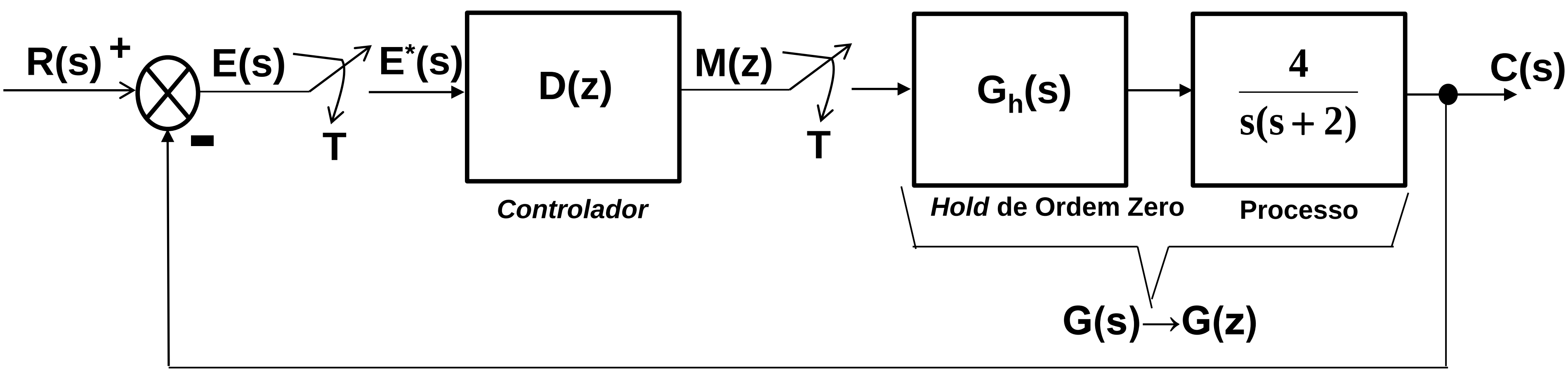
Exemplo 2:

Considerando **T = 10^{-2} s** e $G_c(s) = 41{,}7\dfrac{(s+4{,}41)}{(s+18{,}4)}$; determinar **D(z)**.

Esboçar o gráfico de saída **c(kT)** para o sistema dado a seguir com e sem o controlador D(z) para uma entrada **Degrau Unitário**.

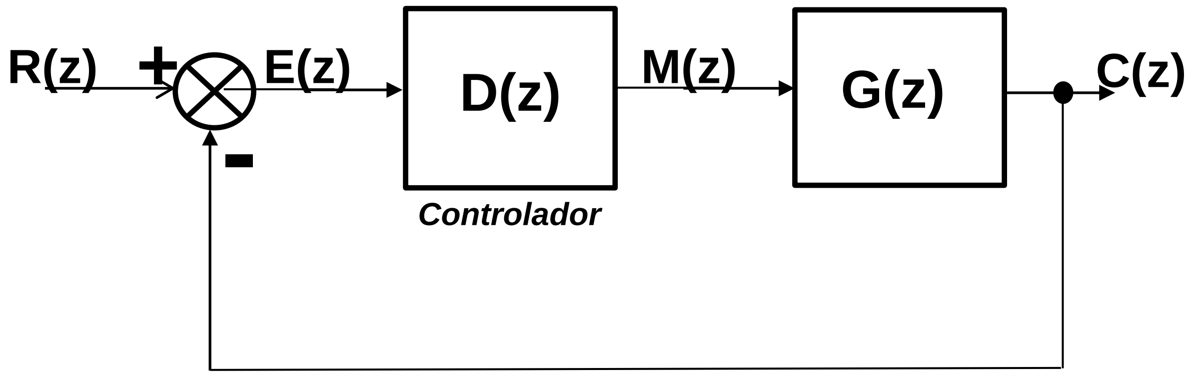


(Sistema no tempo contínuo)



(Sistema no tempo discreto)

Solução



$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{D(z)G(z)}{[1+D(z)G(z)]} \Rightarrow C(z) = \frac{D(z)G(z)R(z)}{[1+D(z)G(z)]}$$

Entrada e o Controlador D(z):

$$R(z) = \frac{z}{(z-1)}; \quad D(z) = 42{,}356\frac{(z-0{,}96)}{(z-0{,}83)}$$

Determinação de G(z):

$$G(s) = \frac{4(1-e^{-sT})}{s^2(s+2)} = (1-e^{-sT})[\frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{(s+2)}]$$

G(z) = Z{G(s)}

Como **G(z) = Z{G(s)}**; temos que:

$$G(z)=Z\{G(s)\}=Z\{\frac{4(1-e^{-sT})}{s^2(s+2)}\}=(1-z^{-1}).Z\{\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{(s+2)}\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(z)=(\frac{z-1}{z}).[\frac{0{,}02.z}{(z-1)^2}-\frac{z}{(z-1)}+\frac{z}{(z-0{,}9801986)}]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(z)=[\frac{0{,}02.z}{(z-1)}-1+\frac{(z-1)}{(z-0{,}9801986)}]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(z)=[\frac{0{,}02(z-0{,}9801986-(z-1)(z-0{,}9801986)+(z-1)(z-1)}{(z-1)(z-0{,}9801986)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(z)=[\frac{0{,}02z-0{,}0196039-z^2+1{,}9801986z-0{,}9801986+z^2-2z+1}{(z^2-1{,}9801986z+0{,}9801986)}]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{G(z)=\frac{(0{,}0001986z+0{,}0001975)}{(z^2-1{,}9801986z+0{,}9801986)}}$$

A saída **C(z)** será dada por:

$$C(z) = \frac{[\frac{42,356(z-0,96)}{(z-0,83)} \cdot \frac{(0,0001986z + 0,0001975)}{(z^2 - 1,9801986z + 0,9801986)} \cdot \frac{z}{(z-1)}]}{[1 + \frac{42,356(z-0,96)}{(z-0,83)} \cdot \frac{(0,0001986z + 0,0001975)}{(z^2 - 1,9801986z + 0,9801986)}]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C(z) = \frac{(0,0084z^2 + 0,0003z - 0,008)}{(z^3 - 2,8018z^2 + 2,624z - 0,8216)}}$$

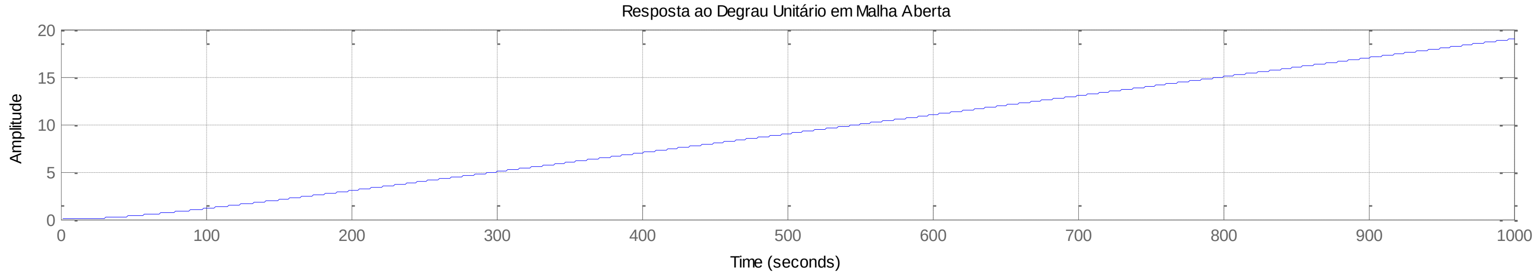
Finalmente, **c(kT) = Z^{-1}{C(z)}**, mas pode-se determinar cada coeficiente de **c(kT)** os quais são os valores amostrados. Daí:

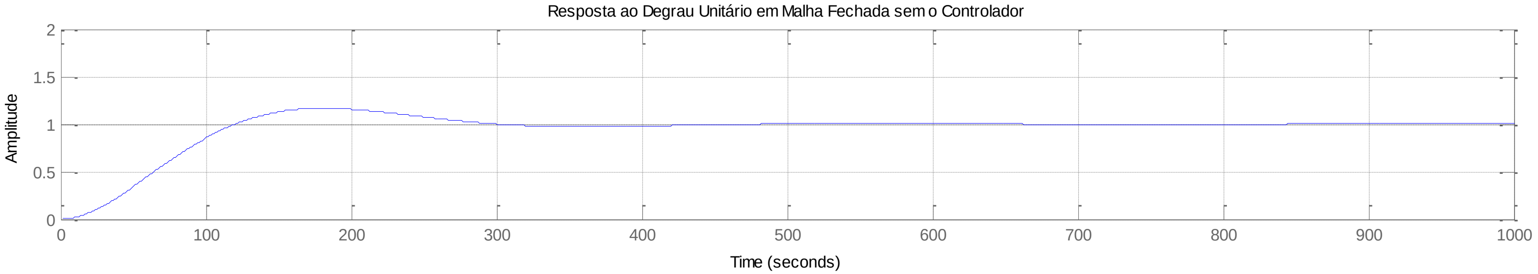
$$C(z) = 0,0084z^2 + 0,0003z - 0,008 \angle z^3 - 2,8018z^2 + 2,624z - 0,8216 \Rightarrow$$

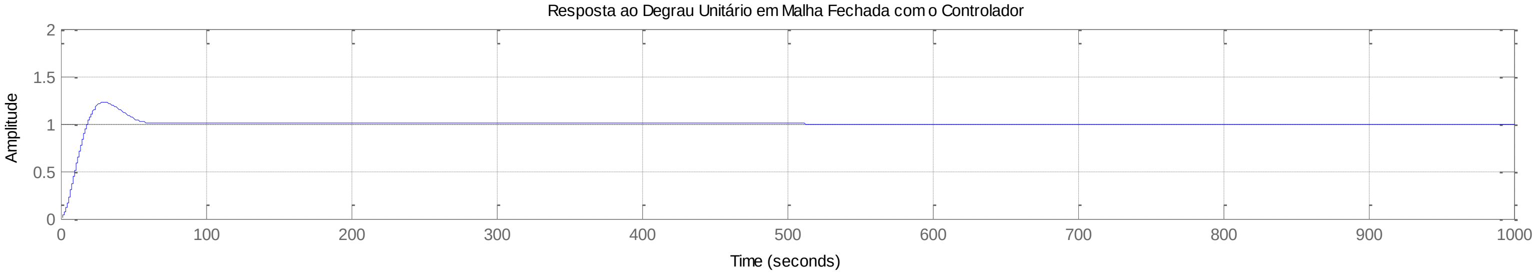
$$\Rightarrow c(kT) = 0.z^0 + 0,0084.z^{-1} + 0,02383.z^{-2} + \ldots$$

```
Simulação de Sistema em Tempo Discreto
                         Sistema de Controle
Modelo Contínuo do Processo a ser Controlado
Entre com o valor de K, K = 4
Entre com o valor de a, a = 1
Entre com o valor de b, b = 2
Entre com o valor de c, c = 0
A FT G(s) em Malha Aberta é dada por:
 num/den =
       4
   ---------
   s^2 + 2 s
Entre com o valor do Tempo de Amostragem T = 0.01
Conversão de G(s) para G(z)
Modelo do Segurador de Ordem Zero
ZOH(s) = __(1 - e^-sT)__
                s
A FT G(z) em Malha Aberta é dada por:
 num/den =
    0.00019867 z + 0.00019735
   -------------------------
    z^2 - 1.9802 z + 0.9802
 A FT T(z) em Malha Fechada sem o Controlador D(z) é dada por:
num/den =
    0.00019867 z + 0.00019735
   -------------------------
     z^2 - 1.98 z + 0.9804
Modelo do Controlador Digital
   D(z) = C.__(Z - A)__
            (Z - B)
Entre com o valor do Ganho C, C = 42.356
Entre com o valor do Zero A, A = 0.96
Entre com o valor do Pólo B, B = 0.83
A FT D(z) do Controlador é dada por:
num/den =
    42.356 z - 40.6618
   ------------------
       z - 0.83
A Função Resposta C(z) ao Degrau Unitário em Malha Fechada com o Controlador D(Z) é dada por:
 um/den =
    0.008415 z^2 + 0.00028069 z - 0.0080247
   ---------------------------------------
     z^3 - 2.8018 z^2 + 2.624 z - 0.82159
Respostas à Entrada Degrau Unitário
 Tempo de Simulação = 1000
```

Gráficos de Respostas ao Degrau Unitário



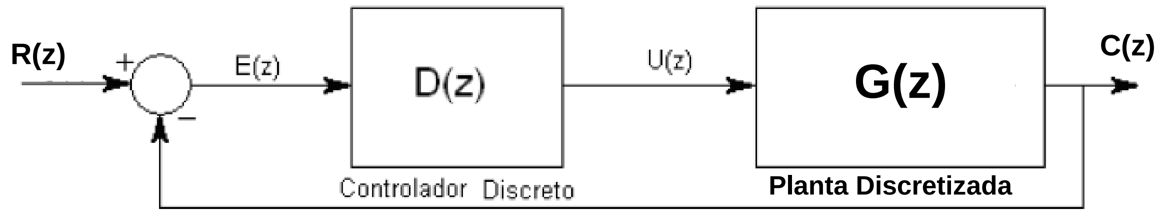




Exemplo 3:

Considerando **T = 0,2 s** e $G_c(s) = 8\dfrac{(s+0{,}1)}{(s+2)}$; determinar **D(z)**.

Esboçar o gráfico de saída **c(kT)** para o sistema dado a seguir com e sem o controlador **D(z)** para uma entrada **Degrau Unitário**.



$$G_c(s) = 8\frac{(s+0{,}1)}{(s+2)} \Bigg\} \Rightarrow \begin{cases} \text{zero}: e^{-(0{,}1)(0{,}2)} = 0{,}9802 \\ \text{polo}: e^{-(2)(0{,}2)} = 0{,}6703 \end{cases} \Rightarrow D(z) = C\frac{(z-0{,}9802)}{(z-0{,}6703)}$$

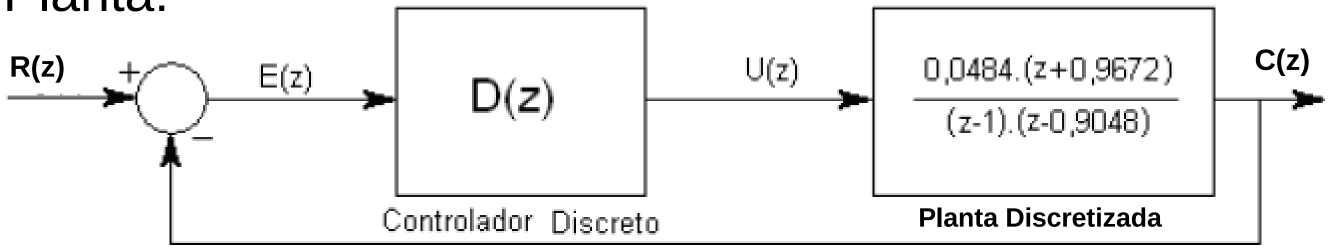
Cálculo do ganho **C** de **D(z)**:

$$\lim_{z\to 1} \mathbf{C}\frac{(z-0{,}9802)}{(z-0{,}6703)} = \lim_{s\to 0}\frac{8s+0{,}8}{s+2} \quad \Rightarrow \mathbf{C}\frac{(1-0{,}9802)}{(1-0{,}6703)} = 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C} = 6{,}6616$$

O Controlador **D(z)** será dado por:

$$\boxed{D(z) = 6{,}66\frac{(z-0{,}9802)}{(z-0{,}6703)}}$$

Discretização da Planta:



$$G_p(s)=\frac{1}{s(10s+1)}\Rightarrow G(z)=\left(1-z^{-1}\right)\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2.(10s+1)}\right]\right\}\Bigg|_{T=1s}\Rightarrow \boxed{G(z)=\frac{0,0484.(z+0,9672)}{(z-1).(z-0,9048)}}$$

FTMF com **D(z)**:

$$\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{\left[\frac{0,0484(z+0,9672)}{(z-1)(z-0,9048)}\right]\left[6,66\frac{(z-0,9802)}{(z-0,6703)}\right]}{1+\left[\frac{0,0484(z+0,9672)}{(z-1)(z-0,9048)}\right]\left[6,66\frac{(z-0,9802)}{(z-0,6703)}\right]}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{0,0484(z+0,9672)6,66(z-0,9802)}{(z-1)(z-0,9048)(z-0,6703)+6,66\times 0,0484(z+0,9672)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{(0,3223z^2-0,0042z-0,3056)}{(z^3-2,5751z^2+2,1816z-0,6065)+6,66\times 0,0484(z+0,9672)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{(0,3223z^2-0,0042z-0,3056)}{(0,3223z^4-0,5183z^3-0,0996z^2+0,4847z-0,1891)}}$$

Aplicação do Degrau Unitário:

$$\mathbf{C(z) = \frac{(0{,}3223z^2 - 0{,}0042z - 0{,}3056)}{(0{,}3223z^4 - 0{,}5183z^3 - 0{,}0996z^2 + 0{,}4847z - 0{,}1891)}\left[\frac{z}{(z-1)}\right]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{C(z) = \frac{(0{,}3223z^3 - 0{,}0042z^2 - 0{,}3056z)}{(z-1)(0{,}3223z^4 - 0{,}5183z^3 - 0{,}0996z^2 + 0{,}4847z - 0{,}1891)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{C(z) = \frac{(0{,}3223z^3 - 0{,}0042z^2 - 0{,}3056z)}{(0{,}3223z^5 - 0{,}8406z^4 + 0{,}4187z^3 + 0{,}5843z^2 - 0{,}6763z + 0{,}1891)}}}$$