MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS: UM EXERCÍCIO DA LISTA II

MAT 271 – CÁLCULO NUMÉRICO –PER3/2021/UFV

Professor Amarísio Araújo – DMA/UFV

EXERCÍCIO 2 DA LISTA II

A equação $e^{-x^2} - x = 0$ é equivalente à equação $x = \varphi(x)$, onde $\varphi(x) = e^{-x^2}$, e possui uma solução única $\bar{x} \in [0.5, 1]$.

Usando o Método das Aproximações Sucessivas, com a função φ e aproximação inicial $x_0 = 0.5$, calcule os seis termos seguintes da sequência de aproximações de $\bar{x}$.

É possível concluir que a sequência está convergindo para $\bar{x}$?

RESOLVENDO O EXERCÍCIO

PRIMEIRA PARTE

Equação iterativa $x_{n+1} = \varphi(x_n), n = 0,1,2,3, \ldots$, com $x_0 = 0.5$ e $\varphi(x) = e^{-x^2}$.

$$x_{n+1} = e^{-{x_n}^2}, n = 0,1,2,3, \ldots, \text{ com } x_0 = 0.5.$$

$x_1 = 0.77880$ $\quad$ $x_2 = 0.54524$ $\quad$ $x_3 = 0.74283$

$x_4 = 0.57591$ $\quad$ $x_5 = 0.71772$ $\quad$ $x_6 = 0.59743$

RESOLVENDO O EXERCÍCIO

SEGUNDA PARTE

Verificar se a sequência $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ é convergente:

Verificar as condições suficientes de convergência do método:

- φ derivável em $[a, b]$
- $|\varphi'(x)| < 1$ em $[a, b]$

A função $\varphi(x) = e^{-x^2}$ é derivável em $[\,0.5\,,1]$, sendo $\varphi'(x) = -2xe^{-x^2}$.

$|\varphi'(x)| = \left|-2xe^{-x^2}\right| = 2xe^{-x^2}, \forall x \epsilon [0.5\,,1].$

Vejamos se $|\varphi'(x)| < 1$ no intervalo $[\,0.5\,,1]$.

Ou seja: vejamos se $2xe^{-x^2} < 1$ no intervalo $[\,0.5\,,1]$.

RESOLVENDO O EXERCÍCIO

SEGUNDA PARTE   Vejamos se $2xe^{-x^2} < 1$ no intervalo $[\,0.5\,,1]$.

Seja $h(x) = 2xe^{-x^2}$.   Então: $h'(x) = 2e^{-x^2} + 2x(-2x)e^{-x^2} \quad = 2(1-2x^2)e^{-x^2}$

O sinal de $h'(x)$ só depende do sinal de $2(1-2x^2)$

$h'(x)$	$-----$		$+++++++++$		$-----$
		$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	1

No intervalo $[\,0.5\,,1]$, vemos, então, que $h(x) = 2xe^{-x^2}$ cresce entre 0.5 e $\sqrt{2}/2$ e decresce entre $\sqrt{2}/2$ e 1, atingindo máximo em $x = \sqrt{2}/2$.

Assim, para todo $x \epsilon [0.5\,,1]$, $h(x) \le h\left(\sqrt{2}/2\right) = 0.85776 < 1$.

Logo $|\varphi'(x)| = 2xe^{-x^2} < 1$ no intervalo $[\,0.5\,,1]$.

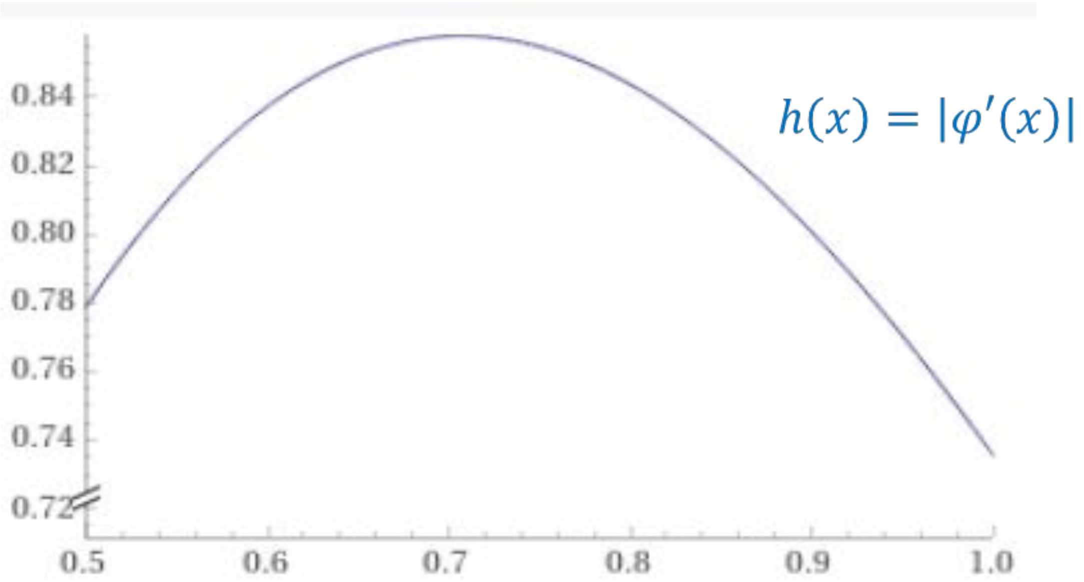
Portanto a sequência $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ é convergente.

$\bar{x} \cong x_{30} = 0.65394$ com erro absoluto $|x_{30} - x_{29}| < 0.001$

VERIFICANDO GRAFICAMENTE $|\varphi'(x)| < 1$

Verificar graficamente se $|\varphi'(x)| = 2xe^{-x^2} < 1$ no intervalo $[\,0.5\,, 1]$.

Esboçando o gráfico de $h(x) = 2xe^{-x^2}$ no intervalo $[\,0.5\,, 1]$.



UMA OBSERVAÇÃO SOBRE A CONDIÇÃO $|\varphi'(x)| < 1$

A condição $|\varphi'(x)| < 1$ pode não ser satisfeita no intervalo de busca inicial $[a, b]$, mas ser satisfeita em um intervalo $I \subset [a, b]$, contendo a solução da equação.

Neste caso, a sequência $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ será convergente:

Exemplo: a equação $e^{-x} - x = 0$ tem solução única no intervalo $[\,0\,,1]$.

Consideremos a função $\varphi(x) = e^{-x}$ $(e^{-x} - x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-x}$).

$|\varphi'(x)| = |-e^{-x}| = e^{-x}$, $\forall x \epsilon [0\,,1]$.

É fácil ver que $|\varphi'(x)| < 1$ para todo$x\epsilon[\,0{,}1]$, $x \neq 0$, com $|\varphi'(0)| = 1$.

Portanto $|\varphi'(x)| \leq 1$ para todo$x\epsilon[\,0{,}1]$.

Ou seja, a condição $|\varphi'(x)| < 1$ não é satisfeita no intervalo considerado inicialmente.

Mas a condição não é satisfeita só por causa do extremo inferior do intervalo ($x = 0$).

Portanto, basta considerar que a solução da equação está no intervalo $I = (0{,}1]$, e, neste intervalo, $|\varphi'(x)| < 1$ para todo x, o que nos dá a garantida a convergência.