PROBLEMAS Em cada um dos Problemas de 1 a 8, determine se a função dada é periódica. Se for, encontre seu período fundamental.

1. $\operatorname{sen} 5x$ 2. $\cos 2\pi x$ 3. $\operatorname{senh} 2x$ 4. $\operatorname{sen} \pi x/L$ 5. $\tan \pi x$ 6. x^2

7. $f(x) = \begin{cases} 0, & 2n-1 \le x < 2n, \\ 1, & 2n \le x < 2n+1; \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

8. $f(x) = \begin{cases} (-1)^n, & 2n-1 \le x < 2n, \\ 1, & 2n \le x < 2n+1; \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

9. Se $f(x) = -x$ para $-L < x < L$ e se $f(x + 2L) = f(x)$, encontre uma fórmula para $f(x)$ no intervalo $L < x < 2L$ e no intervalo $-3L < x < -2L$.

10. Se $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 < x < 0, \\ x, & 0 < x < 1, \end{cases}$ e se $f(x + 2) = f(x)$, encontre uma fórmula para $f(x)$ no intervalo $1 < x < 2$ e no intervalo $8 < x < 9$.

11. Se $f(x) = L - x$ para $0 < x < 2L$ e se $f(x + 2L) = f(x)$, encontre uma fórmula para $f(x)$ no intervalo $-L < x < 0$.

12. Verifique as Eqs. (6) e (7) nesta seção integrando diretamente.

Em cada um dos Problemas de 13 a 18:

(a) Esboce o gráfico da função dada por três períodos.

(b) Encontre a série de Fourier da função dada.

13. $f(x) = -x, \quad -L \le x < L; \qquad f(x + 2L) = f(x)$

14. $f(x) = \begin{cases} 1, & -L \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < L; \end{cases} \qquad f(x + 2L) = f(x)$

15. $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \pi; \end{cases} \qquad f(x + 2\pi) = f(x)$

16. $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x < 0, \\ 1-x, & 0 \le x < 1; \end{cases} \qquad f(x + 2) = f(x)$

17. $f(x) = \begin{cases} x+L, & -L \le x \le 0, \\ L, & 0 < x < L; \end{cases} \qquad f(x + 2L) = f(x)$

18. $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \le x \le -1, \\ x, & -1 < x < 1, \\ 0, & 1 \le x < 2; \end{cases} \qquad f(x + 4) = f(x)$

27. Suponha que g é uma função integrável e periódica com período T.

(a) Se $0 \le a \le T$, mostre que

$$\int_0^T g(x)\,dx = \int_a^{a+T} g(x)\,dx.$$

Sugestão: mostre primeiro que $\int_0^a g(x)\,dx = \int_T^{a+T} g(x)\,dx$. Considere a mudança de variável $s = x - T$ na segunda integral.

(b) Mostre que, para qualquer valor de a, não necessariamente em $0 \le a \le T$,

$$\int_0^T g(x)\,dx = \int_a^{a+T} g(x)\,dx.$$

(c) Mostre que, para quaisquer valores de a e b,

$$\int_a^{a+T} g(x)\,dx = \int_b^{b+T} g(x)\,dx.$$

28. Se f for diferenciável e periódica com período T, mostre que f' também é periódica com período T. Determine se

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

é sempre periódica.

PROBLEMAS Em cada um dos Problemas de 1 a 6, suponha que a função dada é estendida, periodicamente, para fora do intervalo original.

(a) Encontre a série de Fourier da função estendida.

(b) Esboce o gráfico da função para a qual a série converge por três períodos.

1. $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x < 1 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} L + x, & -L \le x < 0, \\ L - x, & 0 \le x < L \end{cases}$

4. $f(x) = 1 - x^2, \quad -1 \le x < 1$

5. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < -\pi/2, \\ 1, & -\pi/2 \le x < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 \le x < \pi \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0, \\ x^2, & 0 \le x < 1 \end{cases}$

PROBLEMAS Em cada um dos Problemas de 1 a 6, determine se a função dada é par, ímpar ou nenhuma das duas.

1. $x^3 - 2x$
2. $x^3 - 2x + 1$
3. $\tan 2x$
4. $\sec x$
5. $|x|^3$
6. e^{-x}

Em cada um dos Problemas de 7 a 12 é dada uma função f em um intervalo de comprimento L. Em cada caso, esboce os gráficos das extensões par e ímpar de f de período $2L$.

7. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 2, \\ 1, & 2 \le x < 3 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ x - 1, & 1 \le x < 2 \end{cases}$

9. $f(x) = 2 - x, \quad 0 < x < 2$

10. $f(x) = x - 3, \quad 0 < x < 4$

11. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & 1 \le x < 2 \end{cases}$

12. $f(x) = 4 - x^2, \quad 0 < x < 1$

13. Prove que qualquer função pode ser expressa como a soma de uma função par com uma função ímpar. Ou seja, para qualquer função f cujo domínio contém $-x$ sempre que contiver x, mostre que existe uma função par g e uma função ímpar h tal que $f(x) = g(x) + h(x)$.
Sugestão: o que você pode dizer sobre $f(x) + f(-x)$?

14. Encontre os coeficientes para as séries em cossenos e em senos descritas no Exemplo 2.

31. Prove que, se f for uma função ímpar, então

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0.$$

32. Prove as propriedades 2 e 3 de funções pares e ímpares, como enunciadas no texto.

33. Prove que a derivada de uma função par é ímpar e que a derivada de uma função ímpar é par.

34. Seja $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Mostre que, se f for par, então F será ímpar e que, se f for ímpar, F será par.

35. A partir da série de Fourier da onda quadrada no Exemplo 1 da Seção 10.3, mostre que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Esta relação entre π e os inteiros positivos ímpares foi descoberta por Leibniz em 1674.

36. A partir da série de Fourier da onda triangular (Exemplo 1 da Seção 10.2), mostre que

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

37. Suponha que f tem uma série de Fourier em senos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x/L), \qquad 0 \le x \le L.$$

(a) Mostre, formalmente, que

$$\frac{2}{L}\int_0^L [f(x)]^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

Compare este resultado (equação de Parseval) com o do Problema 17 na Seção 10.3. Qual o resultado correspondente se f tiver uma série em cossenos?

(b) Aplique o resultado do item (a) à série da função dente de serra dada pela Eq. (9), mostrando, assim, que

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Esta relação foi descoberta por Euler em torno de 1735.