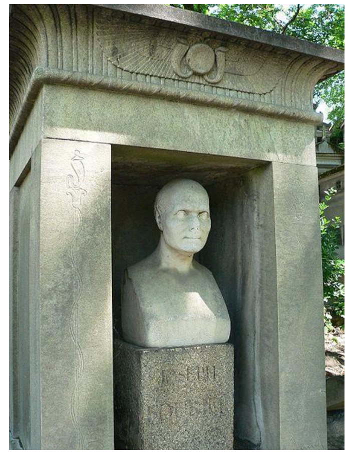
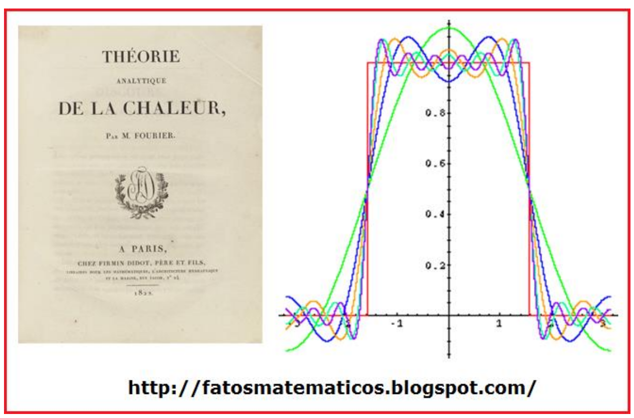
ELT221 - Circuitos Elétricos II

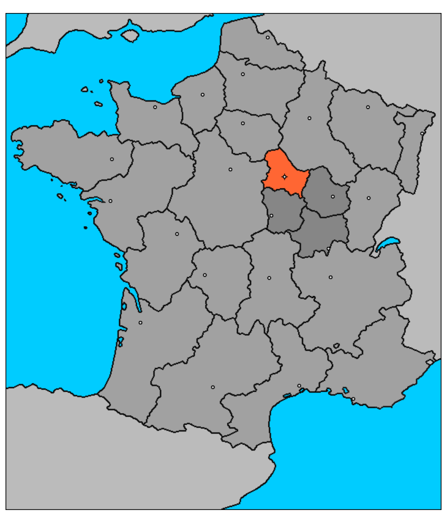
Prof. Tarcísio Pizziolo

12) Série de Fourier



Jean-Baptiste Joseph Fourier: Auxerre, 21/03/1768 - Paris, 16/05/1830).
Matemático e físico francês que investigou a decomposição de funções periódicas em séries trigonométricas convergentes chamadas ***Séries de Fourier*** e a sua aplicação aos problemas da condução do calor.





Auxerre

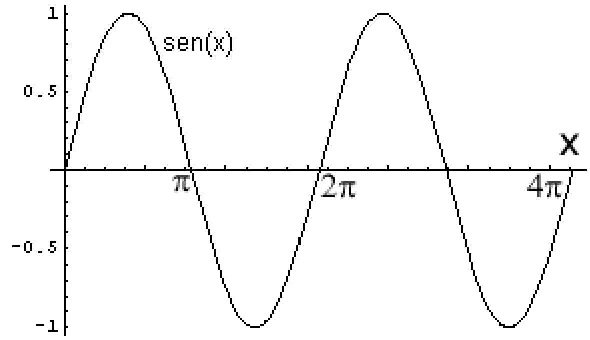
Aplicações da Análise de Fourier

Utilizada em **cálculo numérico** e constitui a base do **Processamento de Sinais** nas **Telecomunicações** e no **Processamento de Imagens Digitais**.

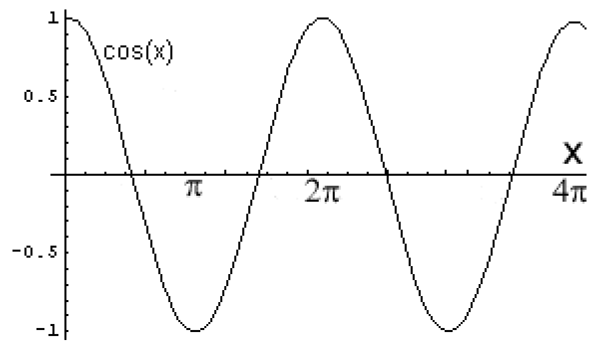
O que é uma Série de Fourier.

Seja a função **sen(x)**, onde **x** é um ângulo medido em **radianos**.

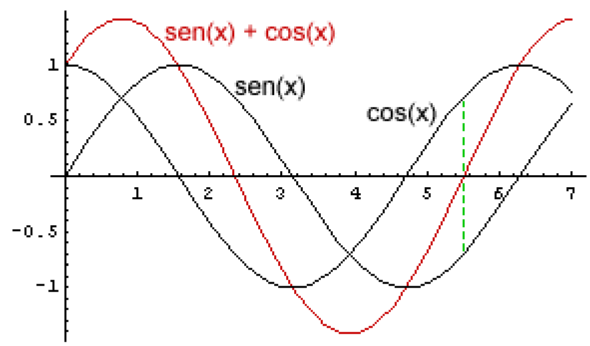
Período **T = 2**π e os valores máximo e mínimo da função é 1 e -1 respectivamente.



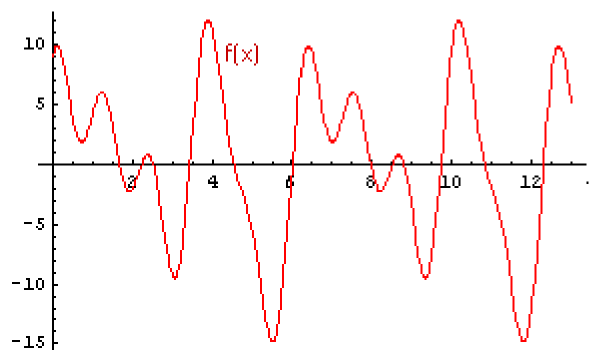
A função **cos(x)** também é periódica, com o mesmo período e amplitude que o seno, deslocada de π/2 em relação ao **sen(x)**.



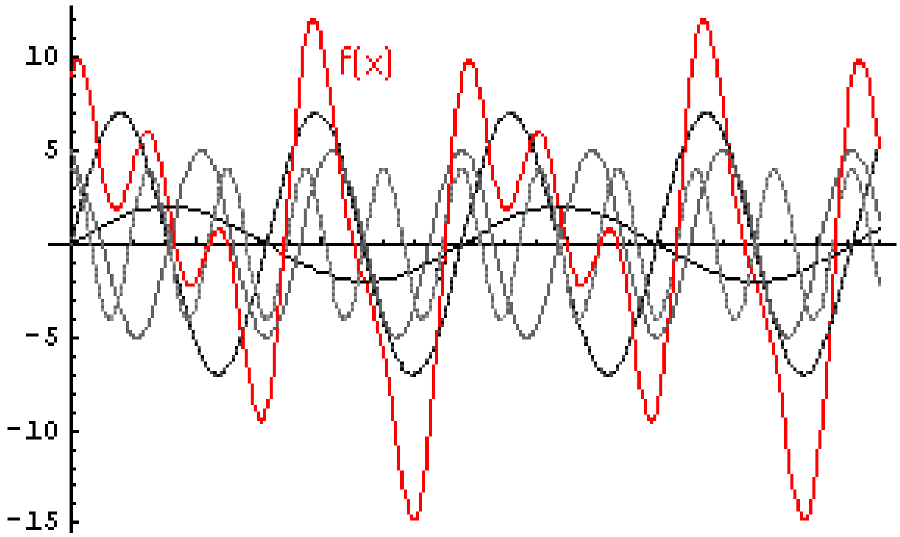
Seja agora a soma (curva em vermelho) das funções **sen(x)** e **cos(x)**.



Seja agora a função **f(x)** dada ao lado. Essa curva também é periódica, mas não é apenas um **seno** ou um **cosseno**.
Problema:
Como achar uma função matemática que descreva uma curva como essa?



A figura abaixo mostra a mesma curva da figura acima juntamente com **duas funções seno** e **duas funções cosseno**. A curva original é a soma dessas 4 funções. Note que as **amplitudes** e **períodos** das ondas componentes são diferentes entre si.



A decomposição da função **f(x)** na curva acima é a seguinte:

$$f(x) = 2\,\mathrm{sen}(x) + 7\,\mathrm{sen}(2x) + 5\cos(3x) + 4\cos(5x)$$

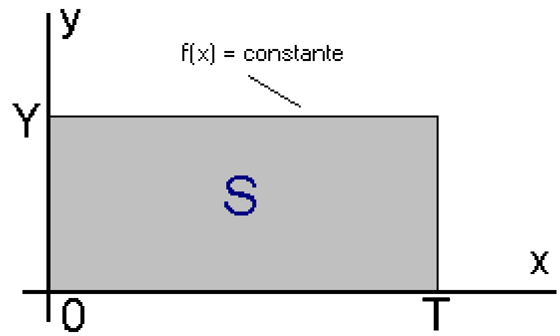
Segundo Fourier qualquer função f(x) pode ser escrita na forma da soma de uma série de funções seno e cosseno da seguinte forma geral:

$$f(x) = a_0 + a_1\cos(x) + a_2\cos(2x) + \ldots + b_1\mathrm{sen}(x) + b_2\mathrm{sen}(2x) + \ldots$$

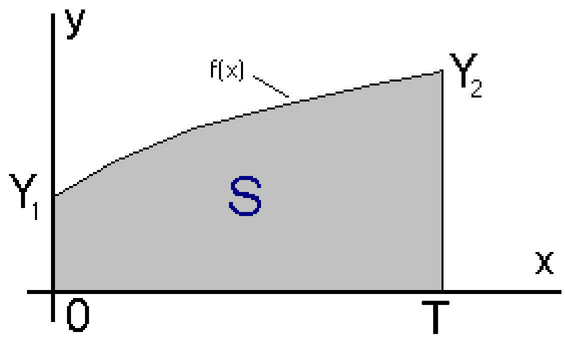
Resta achar uma forma de calcular os coeficientes a_0, a_n e b_n, de cada termo da série. Esses coeficientes são as amplitudes de cada onda componente do desenvolvimento em série.

Apresentamos os cálculos dos coeficientes de Fourier pelas **MÉDIAS** de funções periódicas. No final deste conteúdo apresentamos um Anexo com os cálculos dos coeficientes de Fourier aplicando a integração em funções periódicas.

Valores Médios de Funções.



A área **S** é dada por **S = TxY**.



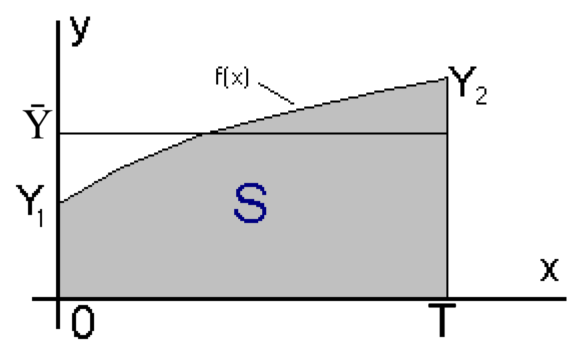
A área **S** sob a função **f(x)** no intervalo de **0** a **T** é dada pela integral:

$$S = \int_0^T f(x)dx$$

Uma vez conhecido o valor da área **S** é sempre possível achar um retângulo de base **0T com a mesma área S**.
O valor **Ȳ** desse retângulo tal que **S = TxȲ** é o **VALOR MÉDIO** da função **f(x)** no trecho entre **0** e **T**.

Então:

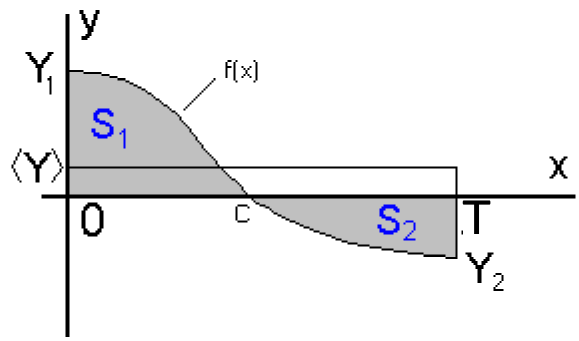
$$\bar{Y} = \frac{S}{T}$$



Portanto, o **VALOR MÉDIO** de **f(x)** entre os pontos **0** e **T** é dado por:

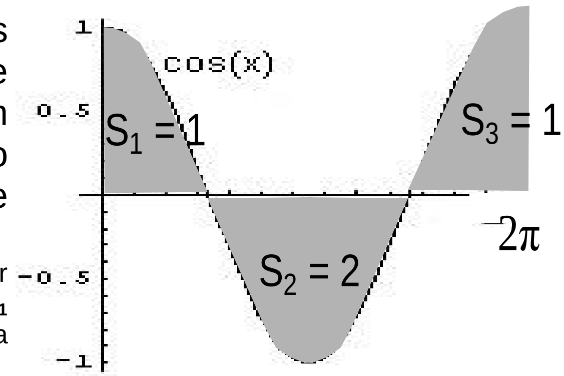
$$\bar{Y} = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$$

Se a função **f(x)** possuir valores **positivos** e **negativos** entre **0** e **T**, a área **S** é dada por **S = (S_1 - S_2)** e o **VALOR MÉDIO** de **f(x)** será **$\bar{Y}$ = (S_1 - S_2)/T**.



Para função **cos(x)** a soma das áreas das partes positivas é igual à área da parte negativa no trecho correspondente a um período. Portanto, o **VALOR MÉDIO** da função **cos(x)** em um período é **zero**. O mesmo ocorre com a função **sen(x)**.

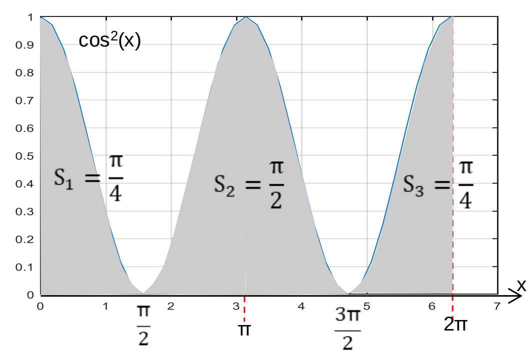
* O valor da soma das áreas **S_1 e S_2** é igual a **2**. Isso pode ser verificado com o uso da integral de **cos(x)** entre **0** e **π/2** para **S_1** e o uso da integral de **cos(x)** entre **3π/2** e **2π** para **S_2**. A área **S_3 = 2** entre **π/2** e 3**π/2**.



$$\overline{\text{sen}(x)} = \overline{\cos(x)} = 0$$

No caso da função **f(x) = cos²(x)** tem-se **S_1 = π/4, S_2 = π/2 e S_3 = π/4**, os quais são positivos. Para esta função tem-se:

$$\overline{\cos^2(x)} \neq 0$$



Daí:

$$\overline{\cos^2(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

O mesmo ocorre com a função **sen²(x)**. Daí:

$$\overline{\text{sen}^2(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

Esses resultados serão usados a seguir no cálculo dos Coeficientes da Série de Fourier.

Cálculo dos Coeficientes da Série de Fourier

A **Série de Fourier** que aproxima uma função **f(x) periódica** em **soma de senos e cossenos** é dada por:

$$\mathbf{f(x) = a_0 + a_1 cos(x) + a_2 cos(2x) + ... + b_1 sen(x) + b_2 sen(2x) + ...}$$

A **Série de Fourier** pode ser escrita na forma de um somatório:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$

<u>Determinação do coeficiente **a_0**</u>

Utilizando a média dos termos da equação:

$$\overline{f(x)} = \overline{a_0} + \overline{a_1 \cos(x)} + \overline{a_2 \cos(2x)} + \overline{a_3 \cos(3x)} + \cdots + \\ + \overline{b_1 \operatorname{sen}(x)} + \overline{b_2 \operatorname{sen}(2x)} + \overline{b_3 \operatorname{sen}(3x)} + \cdots$$

Todas as médias do lado direito da equação são nulas, menos a média do termo correspondente a a_0!

Isso acontece porque cada termo da direita (menos o termo de a_0) contém **a média de um seno ou um cosseno em um período, que é zero**.

Portanto:

$$\boxed{\overline{f(x)} = \overline{a_0} \Longrightarrow a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx}$$

<u>Determinação do coeficiente **a_1**</u>

Multiplicando ambos os lados da equação por **cos(x)** e utilizando a média dos termos da equação:

$$\overline{f(x)\cos(x)} = \overline{a_0 \cos(x)} + \overline{a_1 \cos^2(x)} + \overline{a_2 \cos(2x) \cos(x)} + \cdots + \\ + \overline{b_1 \operatorname{sen}(x) \cos(x)} + \overline{b_2 \operatorname{sen}(2x) \cos(x)} + \cdots$$

Todas as médias do lado direito da equação são nulas, menos a média do termo correspondente a a_1!

Isso acontece porque cada termo da direita (menos o termo de a_1) contém a **média de um seno ou um cosseno em um período**, **que é zero**. Mas, o termo de **a_1** contém a média de **$cos^2(2x)$**, que vale **1/2**, como também vimos. Portanto:

$$\overline{f(x)\cos(x)} = \overline{a_1 \cos^2(x)} \Longrightarrow a_1 \frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(x)\, dx \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{a_1 = 2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(x)\, dx \right)}$$

Portanto, o coeficiente **a_1** é **2 vezes a média do produto** de **f(x)** por **cos(x)**.

Fazendo o mesmo para todos os valores de **n** em **sen(nx)** e **cos(nx)**, verificamos, portanto, que:

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(nx)dx \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{sen}(nx)dx \end{aligned}}$$

GENERALIZANDO

A **Série Trigonométrica de Fourier** em sua **fórmula compacta** é dada por:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{a_0} &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{T}} \mathbf{f(t)dt} \quad ; \quad \mathbf{w_o} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{T}} \\ \mathbf{a_n} &= \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{T}}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{T}} \mathbf{f(t)cos(nw_o t)dt} \\ \mathbf{b_n} &= \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{T}}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{T}} \mathbf{f(t)sen(nw_o t)dt} \end{aligned}}$$

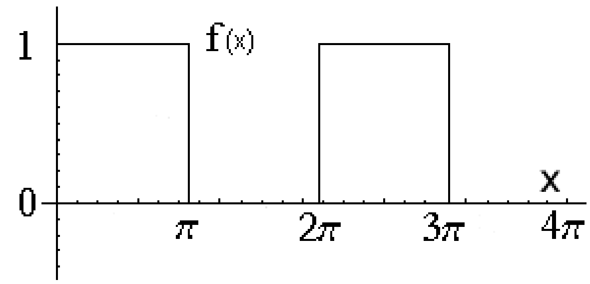
$$\boxed{\mathbf{f(t)} = \mathbf{a_0} + \sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty}[\mathbf{a_n cos(nw_o t)} + \mathbf{b_n sen(nw_o t)}]}$$

Os termos **a_1.cos(w_ot)** e **b_1.sen(w_ot)** juntamente constituem a **Componente Fundamental** ou **Primeiro Harmônico**, enquanto que a_n.cos(nw_ot) e b_n.sen(nw_ot) são o **n-ésimo Harmônico**.

Série de Fourier para a Onda Quadrada

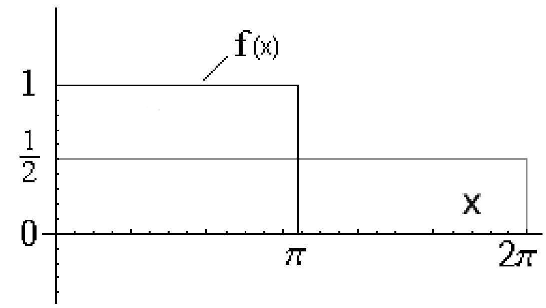
Seja a função **"Onda Quadrada"** ao lado dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{para } 0 < x < \pi \\ 0, \text{para } \pi < x < 2\pi \\ f(x+T) \end{cases}$$



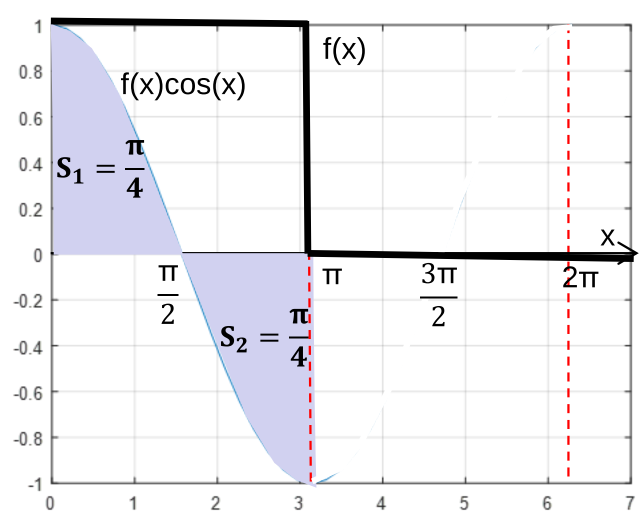
O primeiro coeficiente, a_0, é simplesmente a média de **f(x)** no período. Pelo gráfico esse valor médio é **1/2**.

$$a_0 = \frac{1}{2}$$



Para obter o coeficiente $\mathbf{a_1}$ multiplicamos **f(x)** por **cos(x)** e obtemos a curva vista ao lado com valor médio igual a **0**. Portanto:

$$a_1 = 2\underbrace{\left[\overline{f(x)\cos(x)}\right]}_{=0} \Rightarrow a_1 = 0$$



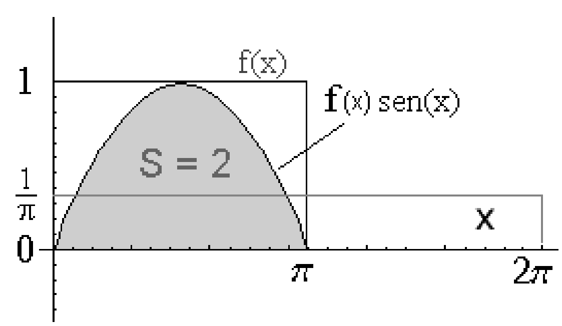
Pode-se concluir que pelo fato dos coeficientes $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$, $\mathbf{a_4}$, **...**, $\mathbf{a_n}$ serem formados pelos **múltiplos inteiros da frequência** de seno e cosseno, teremos valor médio também igual a **0**. Assim:

$$a_n = 0$$

Para obter o coeficiente $\mathbf{b_1}$ multiplicamos **f(x)** por **sen(x)** e obtemos a curva vista ao lado com valor médio igual a **1/π**. Portanto:

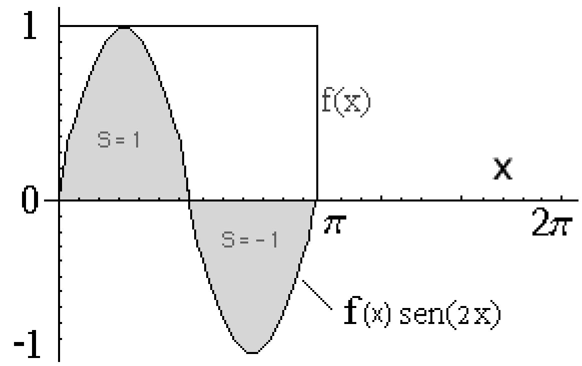
$$b_1 = 2\left[\overline{f(x)\operatorname{sen}(x)}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_1 = \frac{2}{\pi}$$



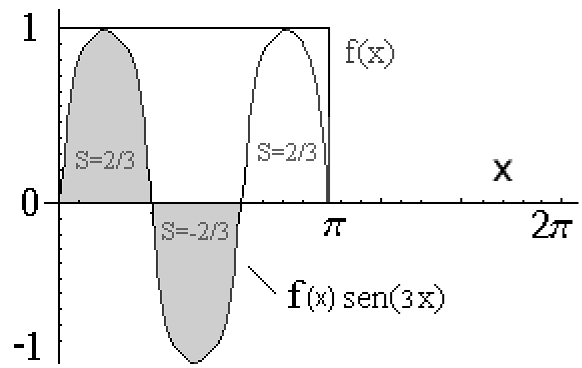
O coeficiente $\mathbf{b_2}$ é duas vezes a média de **f(x).sen(2x)** no período e será:

$$b_2 = 2\left[\overline{f(x)\,\text{sen}(2x)}\right] \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow b_2 = 0$$



O coeficiente $\mathbf{b_3}$ é duas vezes a média de **f(x).sen(3x)**. No gráfico as partes sombreadas desse produto se anulam e sobra apenas uma onda cuja área é **2/3**. Logo, o valor médio do produto **f(x).sen(3x)** vale **1/3**π. E o coeficiente será:

$$b_3 = 2\left[\overline{f(x)\,\text{sen}(3x)}\right] \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow b_3 = \frac{2}{3\pi}$$



Continuando com esse processo para os demais coeficientes $\mathbf{b_n}$ o resultado total é:

$$b_n = \begin{cases} 0;\ \text{para todo n PAR} \\ \dfrac{2}{n\pi};\ \text{para todo n ÍMPAR} \end{cases}$$

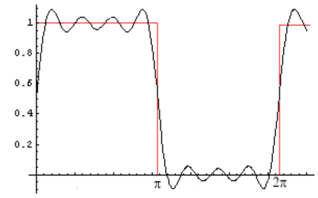
Assim, os coeficientes de Fourier para a Onda Quadrada serão dados por:

$$a_0 = \frac{1}{2}$$
$$a_n = 0;\ \text{para todo n}$$
$$b_n = \begin{cases} 0;\ \text{para todo n PAR} \\ \dfrac{2}{n\pi};\ \text{para todo n ÍMPAR} \end{cases}$$

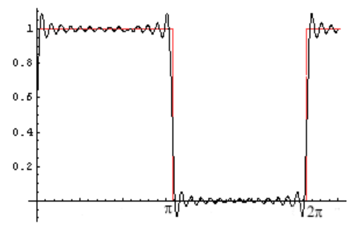
Portanto, a **Série de Fourier** para a **Onda Quadrada** é:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(nw_o x) + b_n \text{sen}(nw_o x)\right] \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\text{sen}(nx)\ (\textbf{para n ÍMPAR})}$$
$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\text{sen}(x) + \frac{2}{3\pi}\text{sen}(3x) + + \frac{2}{5\pi}\text{sen}(5x) + \cdots$$

O gráfico ao lado apresenta a aproximação de uma "**Onda Quadrada**" pela **Série de Fourier** com os **5 1$^{\underline{os}}$ termos**.



O gráfico ao lado apresenta a aproximação de uma "**Onda Quadrada**" pela **Série de Fourier** com os **15 1$^{\underline{os}}$ termos**.



Função PAR e Função ÍMPAR

Simplificação para formas de Ondas Simétricas:

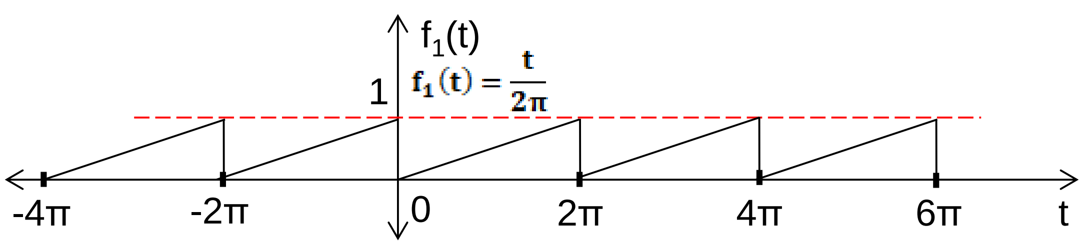
-Função par: **f(t) = f(-t)** $\Rightarrow \quad \displaystyle\int_{-a}^{a} \mathbf{f(t)dt} = 2\int_{0}^{a} \mathbf{f(t)dt}$ (Ex.: f(t) = cos(t))

-Função ímpar: **f(t) = - f(-t)** $\Rightarrow \quad \displaystyle\int_{-a}^{a} \mathbf{f(t)dt} = \mathbf{0}$ (Ex.: f(t) = sen(t))

(Função Par) x **(Função Par) = (Função Par)**
(Função Par) x **(Função Ímpar) = (Função Ímpar)**
(Função Ímpar) x **(Função Ímpar) = (Função Par)**

Exemplo: Determinar a série de Fourier para as funções dadas.

a)



$$f(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nw_o t) + b_n \operatorname{sen}(nw_o t)]$$

$$w_o = \frac{2\pi}{T} \quad ; \quad a_o = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \quad ;$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(nw_o t)dt; \quad e \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\operatorname{sen}(nw_o t)dt$$

Solução:

$$T = 2\pi \Rightarrow w_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} \Rightarrow w_0 = 1\ \mathrm{rds}^{-1}$$

$$a_o = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\int_0^{2\pi} \frac{t}{2\pi}\,dt \Rightarrow a_o = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \left(\frac{1}{\pi}\right)\int_0^{2\pi}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\cos(nt)\,dt = -\frac{1}{n\pi}\ ;\quad b_n = \left(\frac{1}{\pi}\right)\int_0^{2\pi}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\mathrm{sen}(nt)\,dt = 0\ ;$$

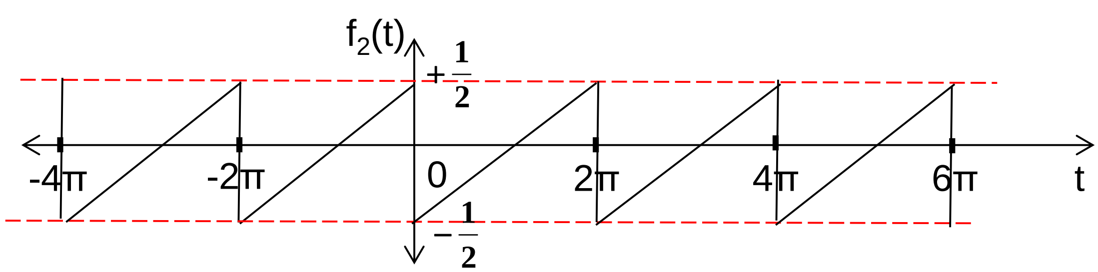
Portanto:

$$f_1(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nw_o t) + b_n\,\mathrm{sen}(nw_o t)]$$

$$f_1(t) = \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{\pi}\right)\mathrm{sen}(t) - \left(\frac{1}{2\pi}\right)\mathrm{sen}(2t) - \left(\frac{1}{3\pi}\right)\mathrm{sen}(3t) + \cdots;$$

$$\text{ou}\quad \boxed{f_1(t) = \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{\pi}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathrm{sen}(nt)}$$

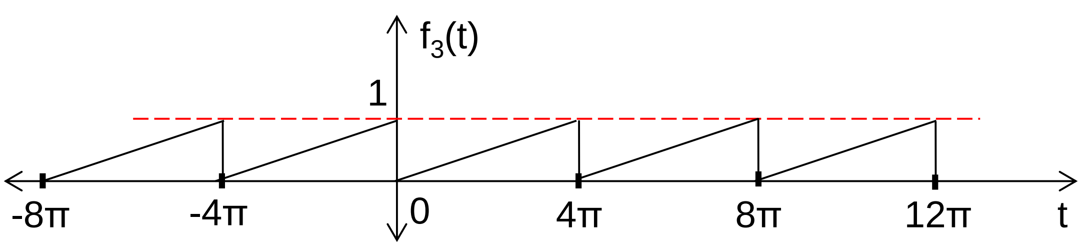
b)



A função $f_2(t)$ é a função $f_1(t)$ deslocada de um valor na amplitude igual a ½ para baixo, então:

$$f_2(t) = f_1(t) - \left(\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{\pi}\right)\mathrm{sen}(t) - \left(\frac{1}{2\pi}\right)\mathrm{sen}(2t) - \ldots\ldots$$

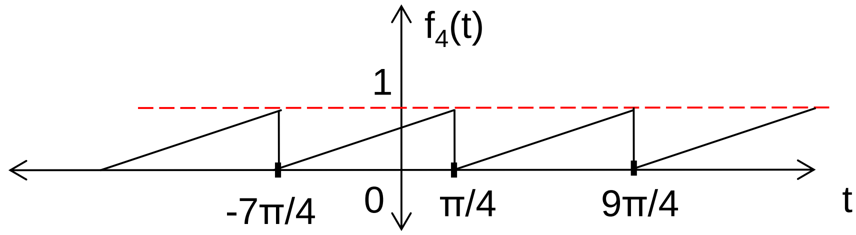
c)



A função $f_3(t)$ é a função $f_1(t)$ deslocada na escala do tempo alterando o período para o dobro. Daí a frequência deverá ser alterada para a metade.

$$f_3(t) = f_1\left(\frac{t}{2}\right) \Rightarrow f_3(t) = \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{\pi}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right) - \left(\frac{1}{2\pi}\right)\mathrm{sen}(t) - \ldots.$$

d)



A função $f_4(t)$ é a função $f_1(t)$ deslocada de $\pi/4$ na direção positiva na escala do tempo. Daí:

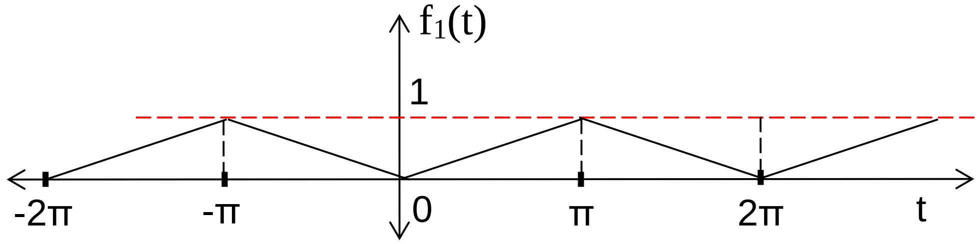
$$f_4(t) = f_1\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\mathrm{sen}\left(t - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2\pi}\mathrm{sen}\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) - \cdots \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f_4(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\mathrm{sen}(t) + \frac{1}{2\pi}\cos(2t) + \frac{1}{3\sqrt{2}\pi}\cos(3t) + \frac{1}{3\sqrt{2}\pi}\mathrm{sen}(3t) + \cdots$$

Exercícios

1) a) Determinar **f(t)** para as funções dadas pela série de Fourier.
b) Traçar no MatLab os gráficos destas funções com 3, 10, 100 e 1000 termos da Série de Fourier.

1a)



Solução. Por inspeção, o componente de corrente contínua de $f_1(t)$ é $a_0 = \frac{1}{2}$. Como $f_1(t)$ é uma função par, $a_n = 0$ e

$$b_n = 2\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{t}{\pi}\cos nt\,dt\right) = \frac{-4}{n^2\pi^2} \qquad \text{para } n \text{ ímpar}$$

$$= 0 \qquad \text{para } n \text{ par}$$

Portanto,

$$f_1(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos t + \frac{1}{9}\cos 3t + \frac{1}{25}\cos 5t + \cdots\right)$$

Se os coeficientes fossem determinados diretamente das equações, sem fazer uso da simetria, seria necessário observar que $f_1(t) = t/\pi$ para $0 < t < \pi$ e é $= 2 - t/\pi$ para $\pi < t < 2\pi$. Então

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^\pi \frac{t}{\pi}\cos nt\,dt + \int_\pi^{2\pi}\left(2 - \frac{t}{\pi}\right)\cos nt\,dt\right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^\pi \frac{t}{\pi}\,\text{sen}\,nt\,dt + \int_\pi^{2\pi}\left(2 - \frac{t}{\pi}\right)\text{sen}\,nt\,dt\right]$$

O que leva ao mesmo resultado, mas com um trabalho computacional consideravelmente maior.

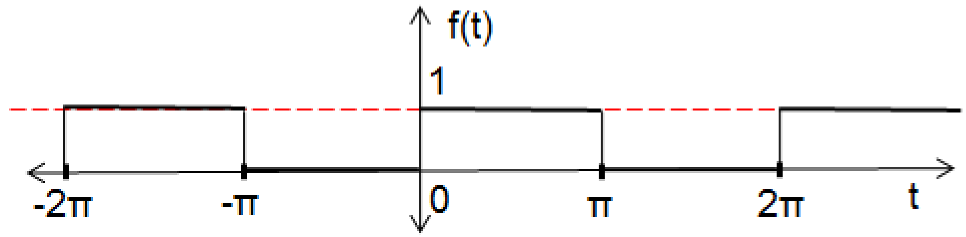
Resposta:

$$f_1(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos[(2n+1)t]$$

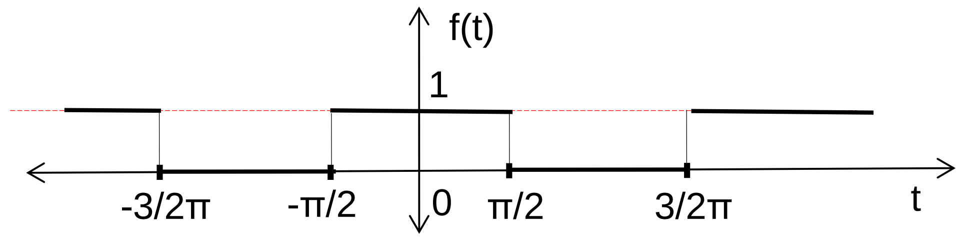
ou

$$f_1(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left[\cos(t) + \frac{1}{9}\cos(3t) + \frac{1}{25}\cos(5t) + \cdots\right]$$

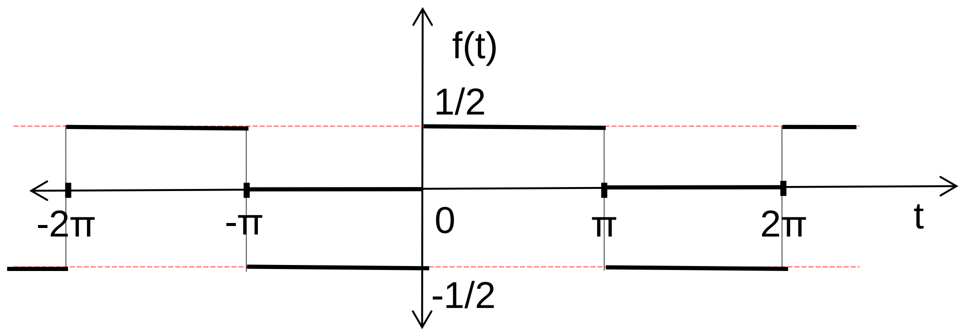
1b)



1c)



1d)



ANEXO

2. Série de Fourier

Coeficientes de Fourier

- Determinação do coeficiente $\mathbf{a_0}$:

$$\int_0^T f(t)dt = \int_0^T \left\{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nw_o t) + b_n \mathrm{sen}(nw_o t)\right]\right\}dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^T f(t)dt = \int_0^T a_0 dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T a_n\cos(nw_o t)dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T b_n \mathrm{sen}(nw_o t)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^T f(t)dt = \int_0^T a_0 dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T a_n \cos\left[\left(\frac{2\pi n}{T}\right)t\right]dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T b_n \mathrm{sen}\left[\left(\frac{2\pi n}{T}\right)t\right]dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^T f(t)dt = a_0 T + \left(\frac{a_n T}{2\pi n}\right)\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{sen}\left[\left(\frac{2\pi n}{T}\right)t\right]\Bigg|_0^T - \left(\frac{b_n T}{2\pi n}\right)\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left[\left(\frac{2\pi n}{T}\right)t\right]\Bigg|_0^T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^T f(t)dt = a_0 T + \left(\frac{a_n T}{2\pi n}\right)\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{[\mathrm{sen}(2\pi n) - 0]}_{=0} - \left(\frac{b_n T}{2\pi n}\right)\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{[\cos(2\pi n) - 1]}_{=0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^T f(t)dt = a_0 T \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt}$$

2. Série de Fourier

Coeficientes de Fourier

- Cálculo de $\mathbf{a_n}$:

$$\int_0^T f(t)\cos(nw_o t)dt = \int_0^T a_0\cos(nw_o t)dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T a_n\cos(nw_o t)\cos(nw_o t)dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T b_n \mathrm{sen}(nw_o t)\cos(nw_o t)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^T f(t)\cos(nw_o t)dt = a_0 \underbrace{\int_0^T \cos(nw_o t)dt}_{=0} + a_n \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^T \cos^2(nw_o t)dt}_{=\frac{T}{2}} + b_n \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^T \mathrm{sen}(nw_o t)\cos(nw_o t)dt}_{=0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^T f(t)\cos(nw_o t)dt = a_n \frac{T}{2} \Rightarrow \boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(nw_o t)dt}$$

- Cálculo de $\mathbf{b_n}$:

$$\int_0^T f(t)\mathrm{sen}(nw_o t)dt = \int_0^T a_0 \mathrm{sen}(nw_o t)dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T a_n \mathrm{sen}(nw_o t)\cos(nw_o t)dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T b_n \mathrm{sen}(nw_o t)\mathrm{sen}(nw_o t)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^T f(t)\mathrm{sen}(nw_o t)dt = a_0 \underbrace{\int_0^T \mathrm{sen}(nw_o t)dt}_{=0} + a_n \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^T \mathrm{sen}(nw_o t)\cos(nw_o t)dt}_{=0} + b_n \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^T \mathrm{sen}^2(nw_o t)dt}_{=\frac{T}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^T f(t)\mathrm{sen}(nw_o t)dt = b_n \frac{T}{2} \Rightarrow \boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{sen}(nw_o t)dt}$$

2. Série de Fourier

Generalizando

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \quad ; \quad w_o = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(nw_o t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\text{sen}(nw_o t)dt$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nw_o t) + b_n\text{sen}(nw_o t)]$$

- Os termos $a_1\cos(w_o t)$ e $b_1\text{sen}(w_o t)$ **(n = 1)** constituem a **Componente Fundamental** ou **Primeiro Harmônico**.
- Os termos $a_n\cos(nw_o t)$ e $b_n\text{sen}(nw_o t)$ **(n > 1)** são os **n-ésimos Harmônicos**.

Integrais para Funções Senoidais e seus Produtos

$f(t)$	$\int_0^{2\pi/\omega} f(t)\,dt,\ \omega \neq 0$
1. $\text{sen}(\omega t + \alpha)$, $\cos(\omega t + \alpha)$	0
2. $\text{sen}(n\omega t + \alpha)$, $\cos(n\omega t + \alpha)$*	0
3. $\text{sen}^2(\omega t + \alpha)$, $\cos^2(\omega t + \alpha)$	π/ω
4. $\text{sen}(m\omega t + \alpha)\cos(n\omega t + \alpha)$*	0
5. $\cos(m\omega t + \alpha)\cos(n\omega t + \beta)$*	$0,\ m \neq n$ $\pi\cos(\alpha - \beta)/\omega,\ m = n$

*m e n são inteiros.