ELT330 – Sistemas de Controle I
Prof. Tarcísio Pizziolo

Aula 18 – Análise de Coeficientes de Erros

1. Coeficiente de Erro Estático de Posição

Se a entrada R(s) for um degrau unitário,

$$e_{ss}(t) = \lim_{s\to 0}\left\{s\left[\frac{1}{[1+G(s)H(s)]}\left(\frac{1}{s}\right)\right]\right\} \Rightarrow e_{ss}(t) = \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{1+G(s)H(s)}\right]$$

Ao resolver o limite podemos escrever,

$$e_{ss}(t) = \frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0}[G(s)H(s)]}$$

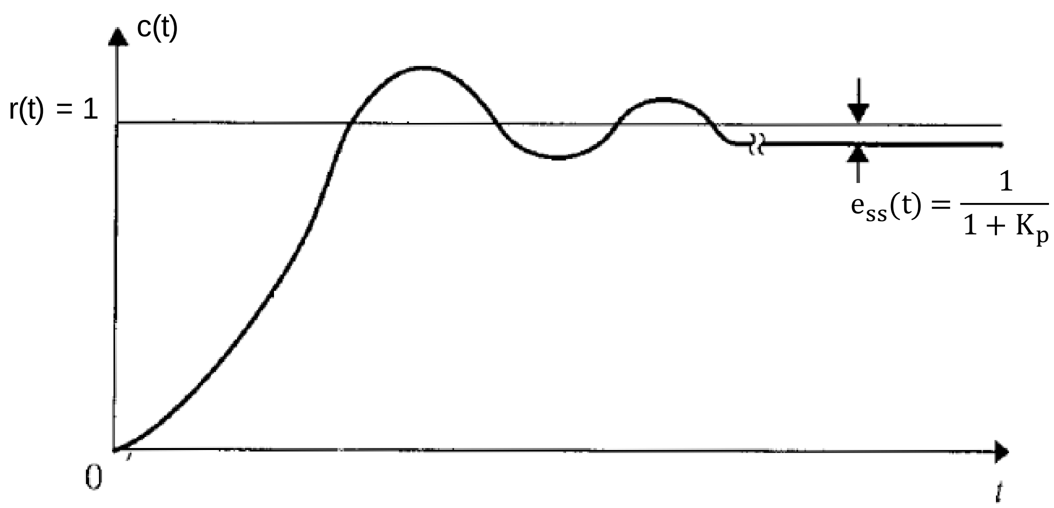
O limite no denominador de $e_{ss}(t)$ é definido como sendo o **Coeficiente de Erro de Posição** do sistema, o qual denotamos por $\mathbf{K_p}$.

$$\boxed{K_p = \lim_{s\to 0}[G(s)H(s)]}$$

Assim, para uma entrada degrau unitário, tem-se que o erro em regime permanente pode ser calculado por,

$$\boxed{e_{ss}(t) = \frac{1}{1+K_p}}$$

O gráfico a seguir ilustra o erro em estado permanente de um sistema em malha fechada para uma entrada degrau unitário.



2. Coeficiente de Erro de Velocidade

Se a entrada R(s) for uma rampa unitária,

$$e_{ss}(t) = \lim_{s \to 0}\left\{ s\left[\frac{1}{[1+G(s)H(s)]}\left(\frac{1}{s^2}\right)\right]\right\} \Longrightarrow e_{ss}(t) = \lim_{s \to 0}\left[\frac{1}{s+sG(s)H(s)}\right]$$

Ao resolver o limite podemos escrever,

$$e_{ss}(t) = \frac{1}{\lim\limits_{s \to 0}[sG(s)H(s)]}$$

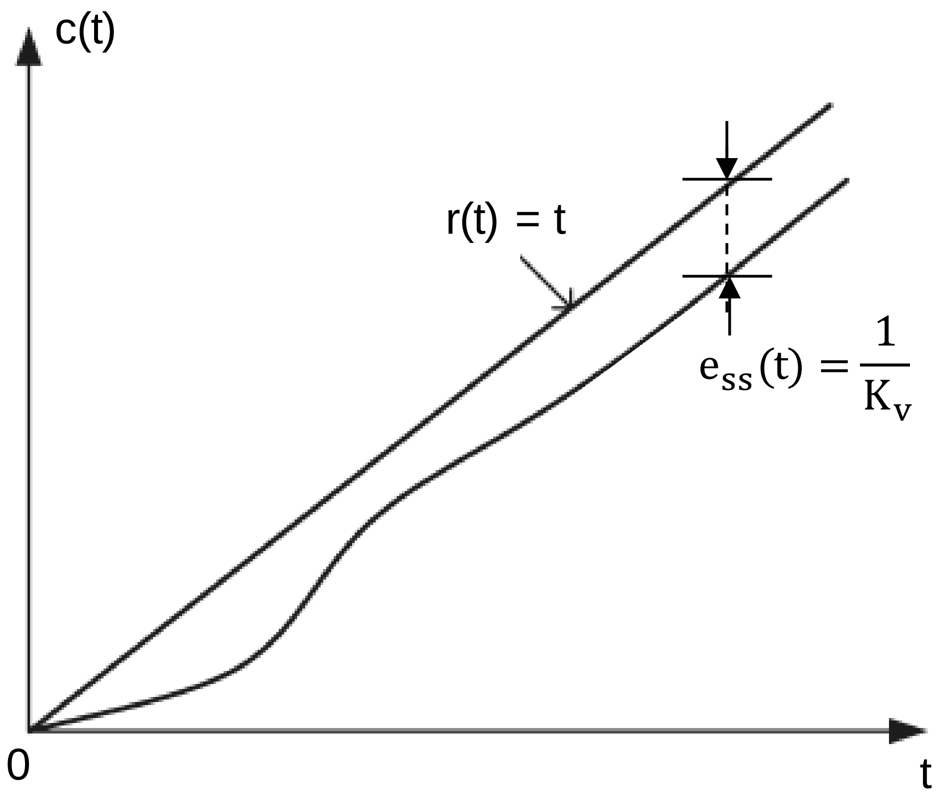
O limite no denominador de $e_{ss}(t)$ é definido como sendo o **Coeficiente de Erro de Velocidade** do sistema, o qual denotamos por $\mathbf{K_V}$.

$$\boxed{K_V = \lim_{s \to 0}[sG(s)H(s)]}$$

Assim, para uma entrada rampa unitária, tem-se que o erro em regime permanente pode ser calculado por,

$$\boxed{e_{ss}(t) = \frac{1}{K_V}}$$

O gráfico a seguir ilustra o erro em estado permanente de um sistema em malha fechada para uma entrada rampa unitária.



3. Coeficiente de Erro de Aceleração

Se a entrada R(s) for uma parábola com $R(s) = s^{-3}$,

$$e_{ss}(t) = \lim_{s\to 0}\left\{s\left[\frac{1}{[1+G(s)H(s)]}\left(\frac{1}{s^3}\right)\right]\right\} \Rightarrow e_{ss}(t) = \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{s^2+s^2G(s)H(s)}\right]$$

Ao resolver o limite podemos escrever,

$$e_{ss}(t) = \frac{1}{\lim_{s\to 0}[s^2G(s)H(s)]}$$

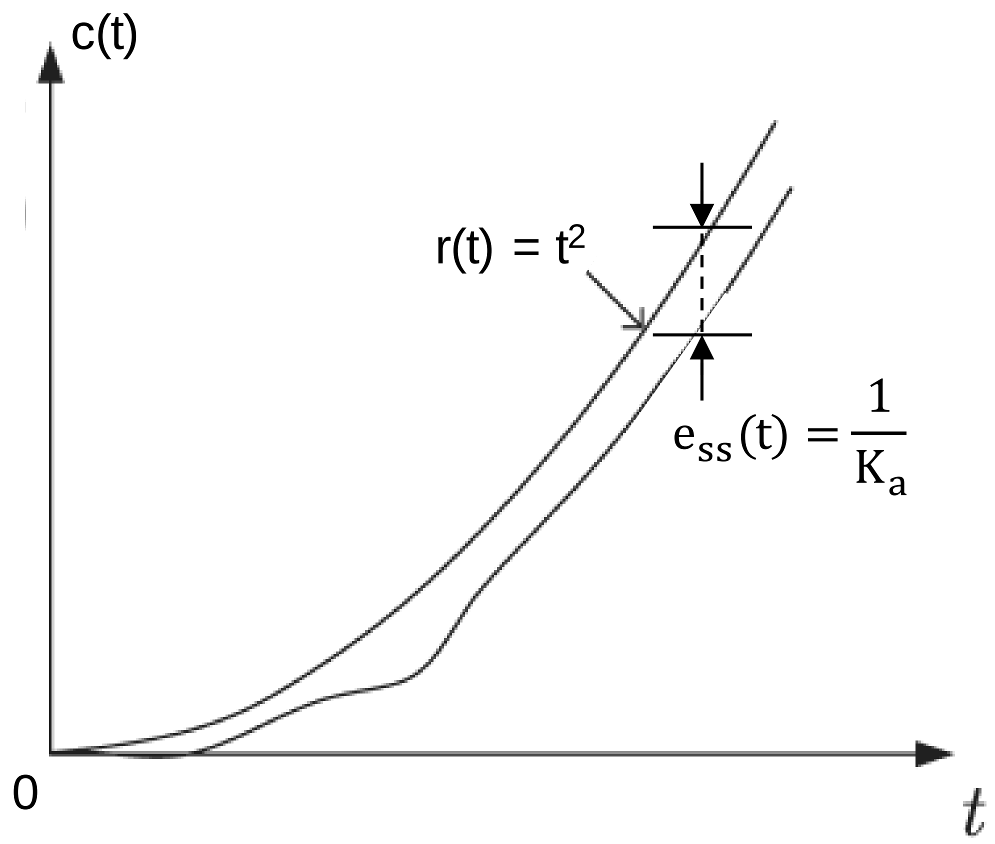
O limite no denominador de $e_{ss}(t)$ é definido como sendo o **Coeficiente de Erro de Aceleração** do sistema, o qual denotamos por $\mathbf{K_a}$.

$$\boxed{K_a = \lim_{s\to 0}[s^2G(s)H(s)]}$$

Assim, para uma entrada parabólica, tem-se que o erro em regime permanente pode ser calculado por,

$$\boxed{e_{ss}(t) = \frac{1}{K_a}}$$

O gráfico a seguir ilustra o erro em estado permanente de um sistema em malha fechada para uma entrada parabólica.



4. Tipos de Sistemas

Consideremos uma função de transferência de malha aberta dada por,

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \ldots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \ldots (T_p s + 1)}$$

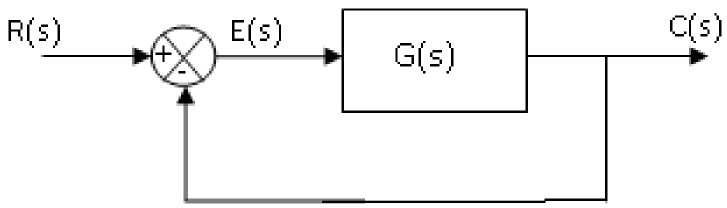
Esse sistema tem um polo de multiplicidade N na origem.

Daí, para N = 0, 1, 2,..., N, o sistema é denominado do Tipo 0, 1, 2,..., N.

A tabela a seguir apresenta a relação entre o **Coeficiente de Erro de Posição K_p**, o **Coeficiente de Erro de Velocidade K_v** e o **Coeficiente de Erro de Aceleração K_a**, com o **Erro em Regime Permanente** para sistemas em malha fechada em função do **Tipo** do sistema.

Erro (Entrada)	Tipo N = 0	Tipo N = 1	Tipo N = 2
$e_{ss}(t)$ (Degrau Unitário)	$\frac{1}{1+K_p}$	0	0
$e_{ss}(t)$ (Rampa Unitária)	∞	$\frac{1}{K_v}$	0
$e_{ss}(t)$ (Parabólica)	∞	∞	$\frac{1}{K_a}$

Exemplo: Seja o diagrama de blocos a seguir.



A Função de Transferência G(s) é dada por,

$$G(s) = \frac{16(s+1)}{s^2(s+2)(s+4)}$$

Calcular:

a) o erro em regime permanente quando a entrada for um degrau unitário.
b) o erro em regime permanente quando a entrada for uma rampa unitária.
c) o erro em regime permanente quando a entrada for parabólica unitária.

Primeiramente deve-se determinar o tipo de sistema que a função de transferência representa.

$$G(s) = \frac{16(s+1)}{2 \times 4 \times \left[s^2\left(\frac{1}{2}s+1\right)\left(\frac{1}{4}s+1\right)\right]} \Longrightarrow G(s) = \frac{2(s+1)}{\left[s^2\left(\frac{1}{2}s+1\right)\left(\frac{1}{4}s+1\right)\right]}$$

O sistema possui 2 polos na origem, daí é do **tipo N = 2** e ganho **K = 2**.

a) o erro em regime permanente quando a entrada for um degrau unitário será:

$$K_p = \lim_{s \to 0} [G(s)H(s)] \Rightarrow K_p = \lim_{s \to 0} \left[\frac{16(s+1)}{s^2(s+2)(s+4)} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_p = \lim_{s \to 0} \left[\frac{16(0+1)}{0(0+2)(0+4)} \right] \Rightarrow K_p \to \infty$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{1+\infty} \Rightarrow \boxed{e_{ss} = 0}$$

Confere com a tabela!

b) o erro em regime permanente quando a entrada for uma rampa unitária.

$$K_v = \lim_{s \to 0} [sG(s)H(s)] \Rightarrow K_v = \lim_{s \to 0} \left[s \frac{16(s+1)}{s^2(s+2)(s+4)} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_v = \lim_{s \to 0} \left[\frac{16(0+1)}{0(0+2)(0+4)} \right] \Rightarrow K_v \to \infty$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{\infty} \Rightarrow \boxed{e_{ss} = 0}$$

Confere com a tabela!

c) o erro em regime permanente quando a entrada for parabólica.

$$K_a = \lim_{s \to 0} [s^2 G(s)H(s)] \Rightarrow K_a = \lim_{s \to 0} \left[s^2 \frac{16(s+1)}{s^2(s+2)(s+4)} \right] \Rightarrow$$

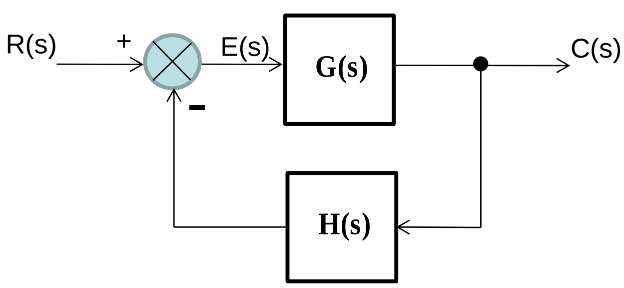
$$\Rightarrow K_a = \lim_{s \to 0} \left[\frac{16(0+1)}{(0+2)(0+4)} \right] \Rightarrow K_a = 2$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{e_{ss} = 0{,}5}$$

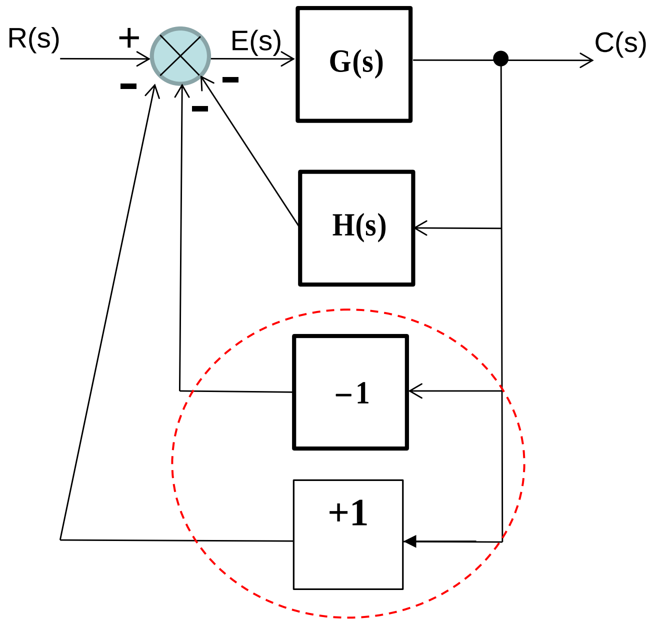
Confere com a tabela!

5) Transformação de Realimentação não Unitária em Unitária

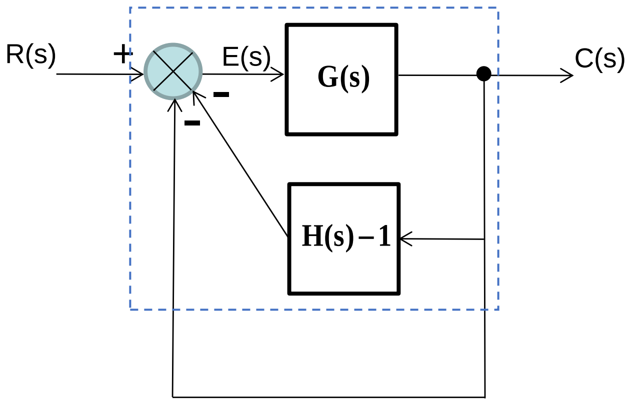
Seja o sistema de controle em Malha Fechada com realimentação não unitária H(s).



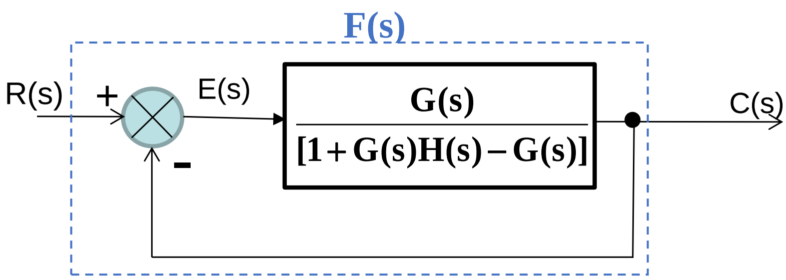
Rearranjando o diagrama de blocos inserindo a soma de “zero” na realimentação tem-se:



Reduzindo o diagrama de blocos englobando H(s) e -1 tem-se:



Reduzindo o diagrama de blocos englobando G(s) e [H(s) – 1] tem-se:



$$E(s) = R(s) - C(s) \Rightarrow \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{R(s)}{R(s)} - \frac{C(s)}{R(s)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow E(s) = [1 - F(s)]R(s)$$

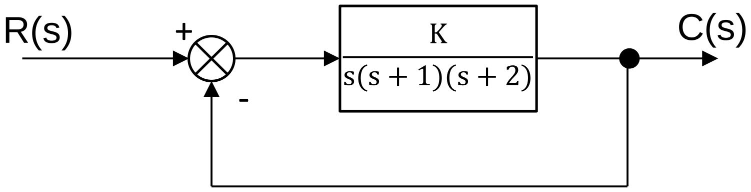
Daí o erro será dado por:

$$\boxed{e_{ss}(t) = \lim_{s \to 0} [sE(s)] = \lim_{s \to 0} \{s[1 - F(s)]R(s)\}}$$

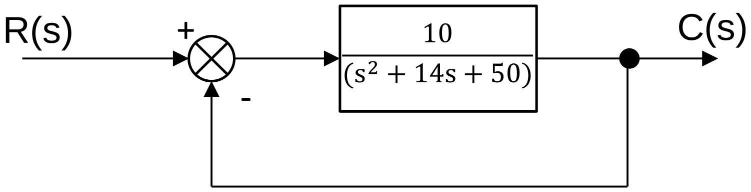
Exercícios

1) Sejam os sistemas de controle dados pelos diagramas de blocos a seguir.

a)



b)



Determinar o erro em estado permanente para:
I) uma entrada degrau unitária
II) uma entrada rampa unitária.

2) Determine o erro em regime permanente para uma entrada degrau unitário dado o sistema com realimentação não unitária da figura abaixo.