UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA – UFV
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – CCE
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA - DEL

Sistemas de Controle II

ELT331

AULA 24 – Implementação de Controlador PID Digital

Prof. Tarcísio Pizziolo

24. Controlador PID Discreto

$$e(t) \longrightarrow \boxed{\text{PID}} \longrightarrow m(t)$$

Propocional: $m(t) = Ke(t)$

Integral: $m(t) = \dfrac{K}{T_I}\displaystyle\int_0^t e(\eta)d\eta$ Onde : $\dfrac{K}{T_i} = K_i$

Derivativo: $m(t) = KT_D\dot{e}(t)$ Onde : $KT_D = K_D$

⇝ Aproximações

proporcional: $m(t) = Ke(k)$

integral: $\dfrac{m(k) - m(k-1)}{T} = \dfrac{K}{T_I}e(k) \Rightarrow m(k) = m(k-1) + \dfrac{KT}{T_I}e(k)$

derivativo: $m(k) = \dfrac{KT_D}{T}\left(e(k) - e(k-1)\right)$

24. Controlador PID Digital

Considerando-se a transformada-$\mathcal{Z}$, obtém-se para o controle integral

$$\boldsymbol{M}(z) = z^{-1}\boldsymbol{M}(z) + \frac{KT}{T_I}E(z) = \frac{z}{z-1}\frac{KT}{T_I}E(z)$$

para o controle derivativo

$$\boldsymbol{M}(z) = \frac{KT_D}{T}\left(E(z) - z^{-1}E(z)\right) = \frac{KT_D}{T}\frac{z-1}{z}E(z)$$

e para o proporcional $\boldsymbol{M}(z) = KE(z)$

Associando-se os três termos obtém-se a FT discreta do PID

$$D(z) = \frac{\boldsymbol{M}(z)}{E(z)} = K\left(1 + \frac{T}{T_I}\frac{z}{z-1} + \frac{T_D}{T}\frac{z-1}{z}\right)$$

24. Controlador PID Digital

$$D(z)_{PID}=\frac{M(z)}{E(z)}=K\left[1+\frac{T}{T_1}\frac{z}{(z-1)}+\frac{T_D}{T}\frac{(z-1)}{z}\right]\Rightarrow\frac{M(z)}{E(z)}=K\left[\frac{z(z-1)+\frac{T}{T_i}z^2+\frac{T_D}{T}(z-1)^2}{z(z-1)}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{M(z)}{E(z)}=K\left[\frac{(z^2-z)+\frac{T}{T_i}z^2+\frac{T_D}{T}(z^2-2z+1)}{z(z-1)}\right]\Rightarrow\frac{M(z)}{E(z)}=K\left[\frac{\left(1+\frac{T}{T_i}+\frac{T_D}{T}\right)z^2-\left(1+\frac{2T_D}{T}\right)z+\frac{T_D}{T}}{z(z-1)}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(z-1)\frac{M(z)}{E(z)}=K\left[\left(1+\frac{T}{T_i}+\frac{T_D}{T}\right)z^2-\left(1+\frac{2T_D}{T}\right)z+\frac{T_D}{T}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{z(z-1)z}{z}M(z)=K\left[\left(1+\frac{T}{T_i}+\frac{T_D}{T}\right)z^2-\left(1+\frac{2T_D}{T}\right)z+\frac{T_D}{T}\right]E(z)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^2(1-z^{-1})M(z)=K\left[\left(1+\frac{T}{T_i}+\frac{T_D}{T}\right)z^2-\left(1+\frac{2T_D}{T}\right)z+\frac{T_D}{T}\right]E(z)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(1-z^{-1})M(z)=\frac{K\left[\left(1+\frac{T}{T_i}+\frac{T_D}{T}\right)z^2-\left(1+\frac{2T_D}{T}\right)z+\frac{T_D}{T}\right]}{z^2}E(z)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(1-z^{-1})M(z)=K\left[\left(1+\frac{T}{T_i}+\frac{T_D}{T}\right)-\left(1+\frac{2T_D}{T}\right)z^{-1}+\frac{T_D}{T}z^{-2}\right]E(z)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(z)=z^{-1}M(z)+K\left[\left(1+\frac{T}{T_i}+\frac{T_D}{T}\right)-\left(1+\frac{2T_D}{T}\right)z^{-1}+\frac{T_D}{T}z^{-2}\right]E(z)$$

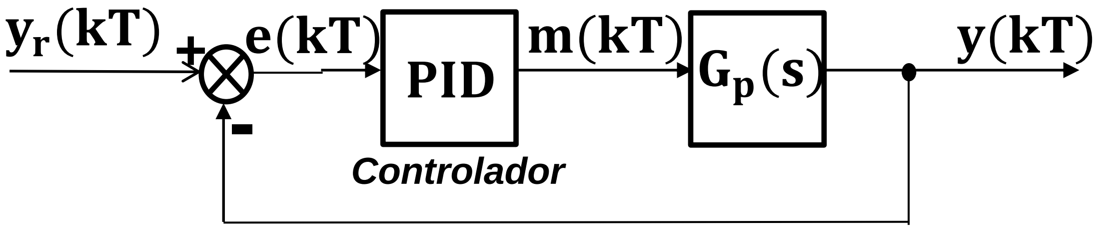
Apicando a $Z^{-1}\{.\}$ obtemos a Lei de Controle do PID Digital com sendo:

$$\boxed{m(kT)=m[(k-1)T]+\underbrace{K\left(1+\frac{T}{T_i}+\frac{T_D}{T}\right)}_{A}e(kT)-\underbrace{K\left(1+\frac{2T_D}{T}\right)}_{B}e[(k-1)T]+\underbrace{K\frac{T_D}{T}}_{C}e[(k-2)T]}$$

24 - Exemplo

Seja a Função de Transferência $G_p(s)$ a seguir:

$$G_p(s) = \frac{360.000}{(s+60)(s+600)}$$



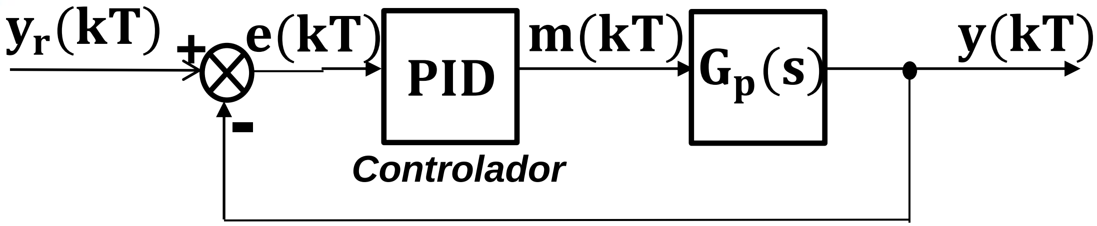
Um controlador PID no tempo contínuo com $K_p = 5$, $T_d = 0{,}8\ \mathrm{ms}$ e $T_i = 3\ \mathrm{ms}$ fornece um desempenho satisfatório.

Utilizando T = 116,4 μs, determine a Lei de Controle para esse controlador PID no tempo discreto.

$$m(k) = m(k-1) + K_p\left[\left(1 + \frac{T}{T_i} + \frac{T_d}{T}\right)e(k) - \left(1 + \frac{2T_d}{T}\right)e(k-1) + \frac{T_d}{T}e(k-2)\right]$$

ENGENHARIA ELÉTRICA Universidade Federal de Viçosa

24 - Exemplo



$$G_p(s) = \frac{360.000}{(s+60)(s+600)} \Longrightarrow G_p(z) = \frac{0,002377z + 0,002317}{z^2 - 1,926z + 0,926}$$

A partir de $G_p(z)$ determina-se a Equação de Diferenças y(k):

$$y(k) = 1,926y(k-1) - 0,9261y(k-2) + 0,002377m(k-1) + 0,002317m(k-2)$$

Considerando um yr como referência, determina-se o erro e(k) sendo e(k) = yr – y(k).

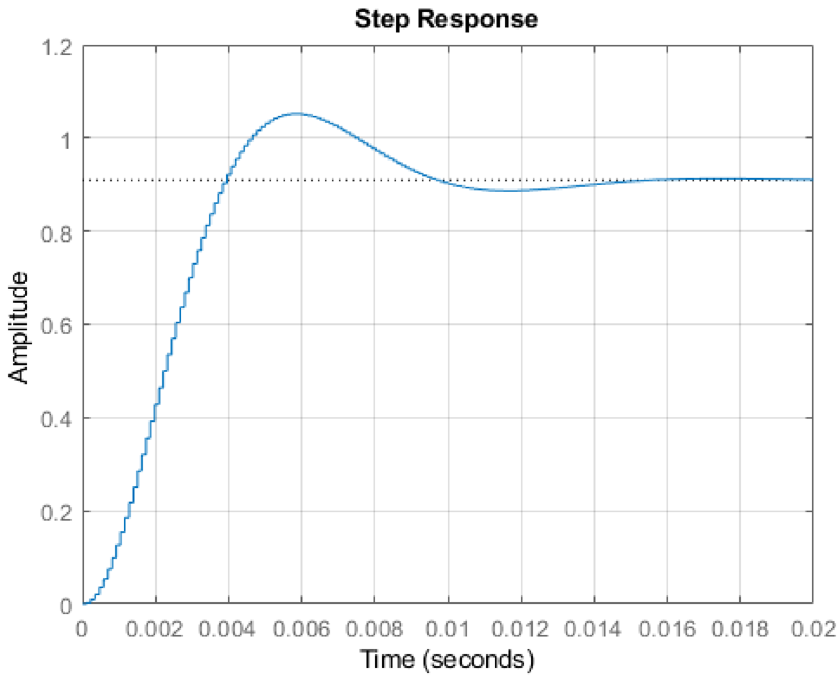
Em seguida calcula-se m(k) com o e(k):

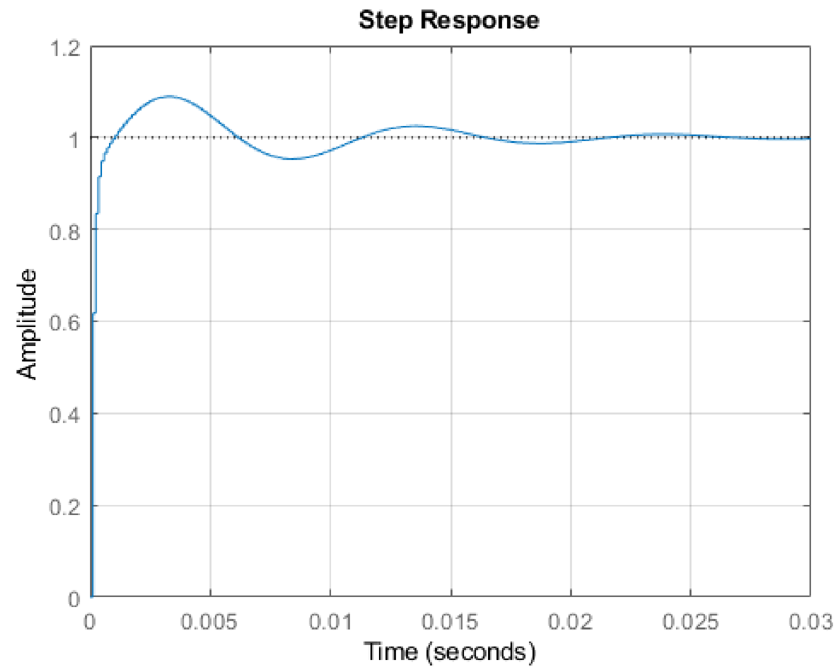
$$m(k) = m(k-1) + 39,56e(k) - 73,73e(k-1) + 34,36e(k-2)$$

Aplica-se m(k) em y(k) determinando os valores da saída do sistema controlado pelo PID Digital.

24 - Exemplo

Resposta ao Degrau Unitário do sistema discreto com o controlador **PID(z)** em série com **G(z).**

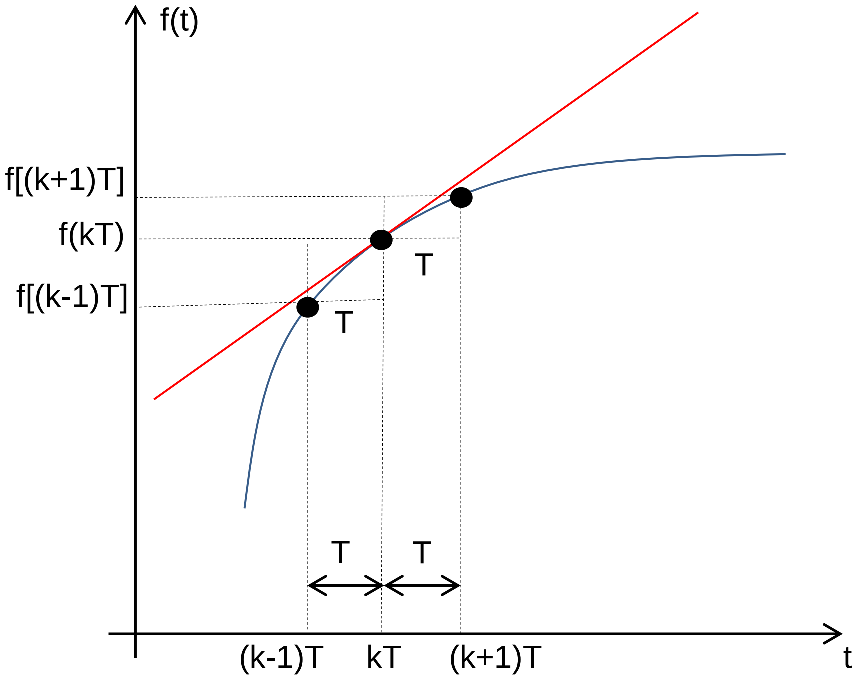




O sistema controlado tem erro praticamente zero enquanto sem o controlador o erro é de 10%.

24.1. Métodos de Integração para o Controlador PID

O termo integrativo pode ser aproximado segundo métodos de integração numérica já conhecidos: integração trapezoidal, integração forward e integração backward, representadas pela figura.



$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{T \to 0} \left[\frac{f(t+T) - f(t)}{T} \right]$$

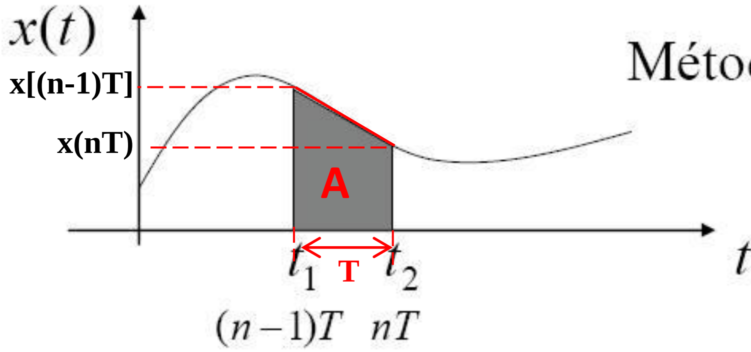
Backward:

$$\frac{df(t)}{dt} \approx \left[\frac{f(kT) - f[(k-1)T)}{T} \right]$$

Forward:

$$\frac{df(t)}{dt} \approx \left[\frac{f[(k+1)T] - f(kT)}{T} \right]$$

24.1.1. Métodos de Integração Trapezoidal para o Controlador PID



Método dos trapézios

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)dt = y(t_2) - y(t_1)$$

$$A_{\text{sob a curva}} = \int_{(n-1)T}^{nT} x(t)dt = y(nT) - y[(n-1)T]\,; \quad A_{\text{Trapézio}} = \left\{\frac{[x(n-1)T] + x(nT)}{2}\right\} \times T$$

Para um valor muito pequeno de **T** pode-se igualar as áreas.

$$y(nT) - y[(n-1)T] = \left\{\frac{[x(n-1)T] + x(nT)}{2}\right\} \times T \Rightarrow Y(z) - z^{-1}Y(z) = \frac{T}{2}[z^{-1}X(z) + X(z)\,]$$

Considerando M(z) a saída da integração e E(z) a entrada:

$$M(z) - z^{-1}M(z) = \frac{T}{2}[z^{-1}E(z) + E(z)\,] \Rightarrow \quad \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{T}{2}\frac{(z+1)}{(z-1)}$$

Aplicando uma constante K_i na ação de controle Integral:

$$\boxed{G_i(z) = K_i \frac{T}{2}\frac{(z+1)}{(z-1)}}$$

24.1.2. Métodos de Integração Backward para o Controlador PID

$$\mathrm{e(t)} \longrightarrow \boxed{\int_{o}^{t} \mathrm{e(t)dt}} \longrightarrow \mathrm{m(t)}$$

$$m(t) = \int e(t)dt \Rightarrow \frac{dm(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\int e(t)dt\right] \Rightarrow \boxed{\frac{dm(t)}{dt} = e(t)}$$

Backward:

$$\frac{\mathrm{dm(t)}}{\mathrm{dt}} \approx \frac{\mathrm{m(kT)} - \mathrm{m[(k-1)T]}}{\mathrm{T}} = \mathrm{e(t)} \Rightarrow \mathrm{m(kT)} - \mathrm{m[(k-1)T]} = \mathrm{Te(t)}$$

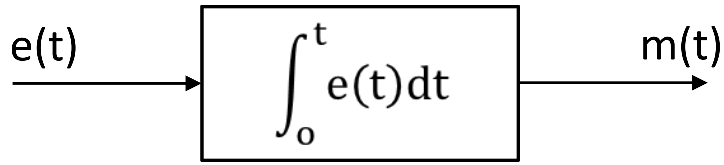
Aplicando a Z{.}:

$$\mathrm{M(z)} - \mathrm{z}^{-1}\mathrm{M(z)} = \mathrm{TE(z)} \Rightarrow \mathrm{M(z)}(1 - \mathrm{z}^{-1}) = \mathrm{TE(z)} \Rightarrow$$
$$\frac{\mathrm{M(z)}}{\mathrm{E(z)}} = \frac{\mathrm{T}}{(1 - \mathrm{z}^{-1})} \Rightarrow \frac{\mathrm{M(z)}}{\mathrm{E(z)}} = \frac{\mathrm{Tz}}{(\mathrm{z} - 1)}$$

Aplicando uma constante K_i na ação de controle Integral:

$$\boxed{\mathrm{G_i(z)} = \mathrm{K_i}\frac{\mathrm{Tz}}{(\mathrm{z} - 1)}}$$

24.1.3. Métodos de Integração Forward para o Controlador PID



$$m(t) = \int e(t)dt \Longrightarrow \frac{dm(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\int e(t)dt\right] \Longrightarrow \boxed{\frac{dm(t)}{dt} = e(t)}$$

Forward:

$$\frac{\mathrm{dm(t)}}{\mathrm{dt}} \approx \frac{\mathrm{m[(k+1)T] - m(kT)}}{\mathrm{T}} = \mathrm{e(t)} \Longrightarrow \mathrm{m[(k+1)T] - m(kT) = Te(t)}$$

Aplicando a Z{.}:

$$\mathrm{zM(z) - M(z) = TE(z) \Longrightarrow M(z)(z-1) = TE(z) \Longrightarrow}$$
$$\frac{\mathrm{M(z)}}{\mathrm{E(z)}} = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{(z-1)}}$$

Aplicando uma constante K_i na ação de controle Integral:

$$\boxed{\mathrm{G_i(z) = K_i \frac{T}{(z-1)}}}$$

24.1.4. Métodos de Integração para o Controlador PID

No caso da integração trapezoidal a representação do controlador digital integrativo é:

$$G_i(z) = K_i \frac{T}{2}\left[\frac{z+1}{z-1}\right]$$

No caso da integração backward a representação do controlador digital integrativo é:

$$G_i(z) = K_i\left[\frac{Tz}{z-1}\right]$$

No caso da integração forward a representação do controlador digital integrativo é:

$$G_i(z) = K_i\left[\frac{T}{z-1}\right]$$

24.1.5. Métodos de Integração para o Controlador PID

Usando-se as aproximações propostas pode-se apresentar três PID discretos possíveis para implementação na forma de equação a diferenças:

Integração trapezoidal:

$$G_c(z) = \frac{\left(K_P + \frac{TK_I}{2} + \frac{K_D}{T}\right)z^2 + \left(\frac{TK_I}{2} - K_P - \frac{2K_D}{T}\right)z + \frac{K_D}{T}}{z(z-1)}$$

Integração forward:

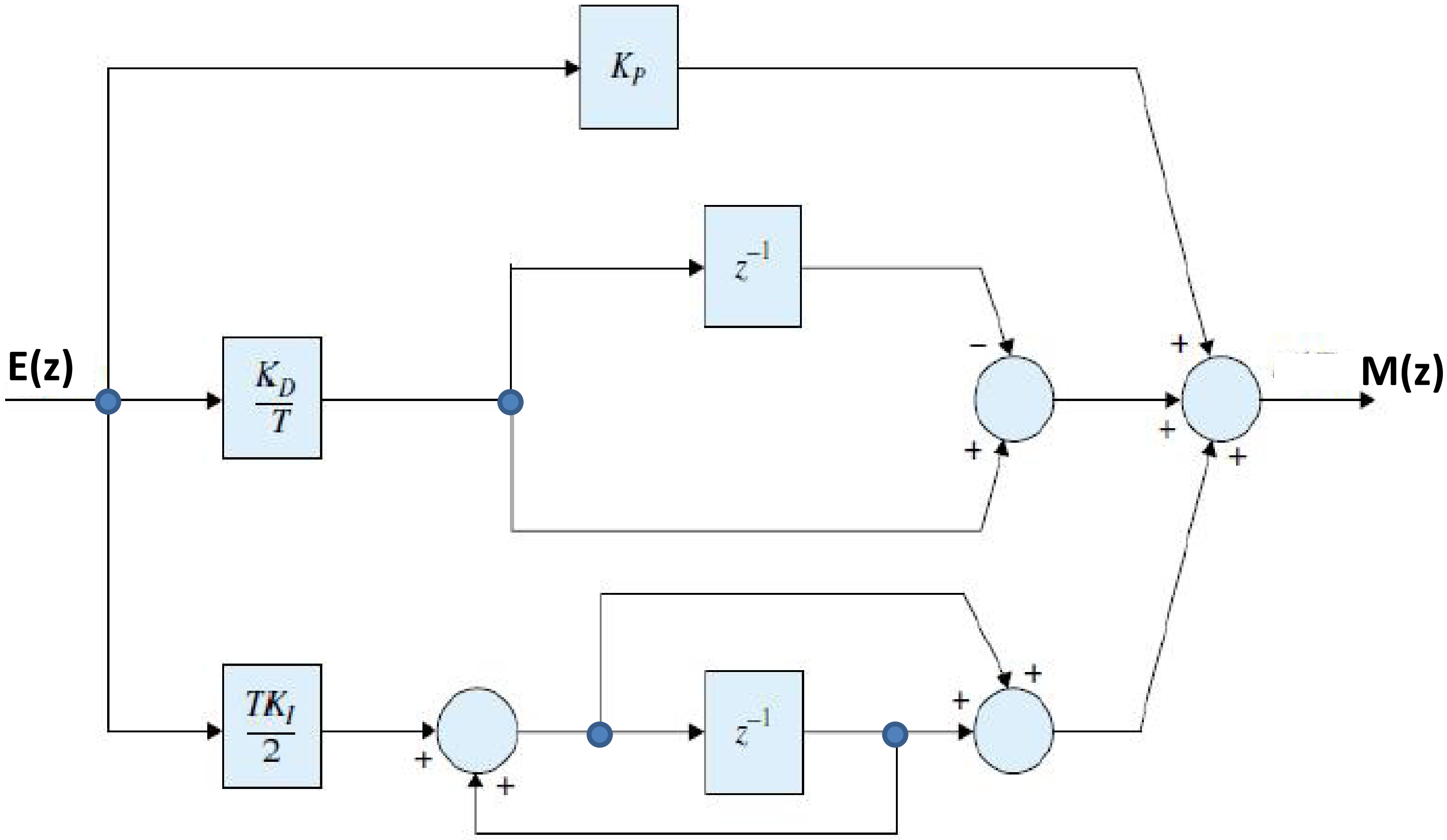
$$G_c(z) = \frac{\left(K_P + \frac{K_D}{T} + TK_I\right)z^2 - \left(K_P + \frac{2K_D}{T}\right)z + \frac{K_D}{T}}{z(z-1)}$$

Integração backward:

$$G_c(z) = \frac{\left(K_P + \frac{K_D}{T}\right)z^2 + \left(TK_I - K_P - \frac{2K_D}{T}\right)z + \frac{K_D}{T}}{z(z-1)}$$

24.1.6. Diagrama de Blocos de Controlador PID

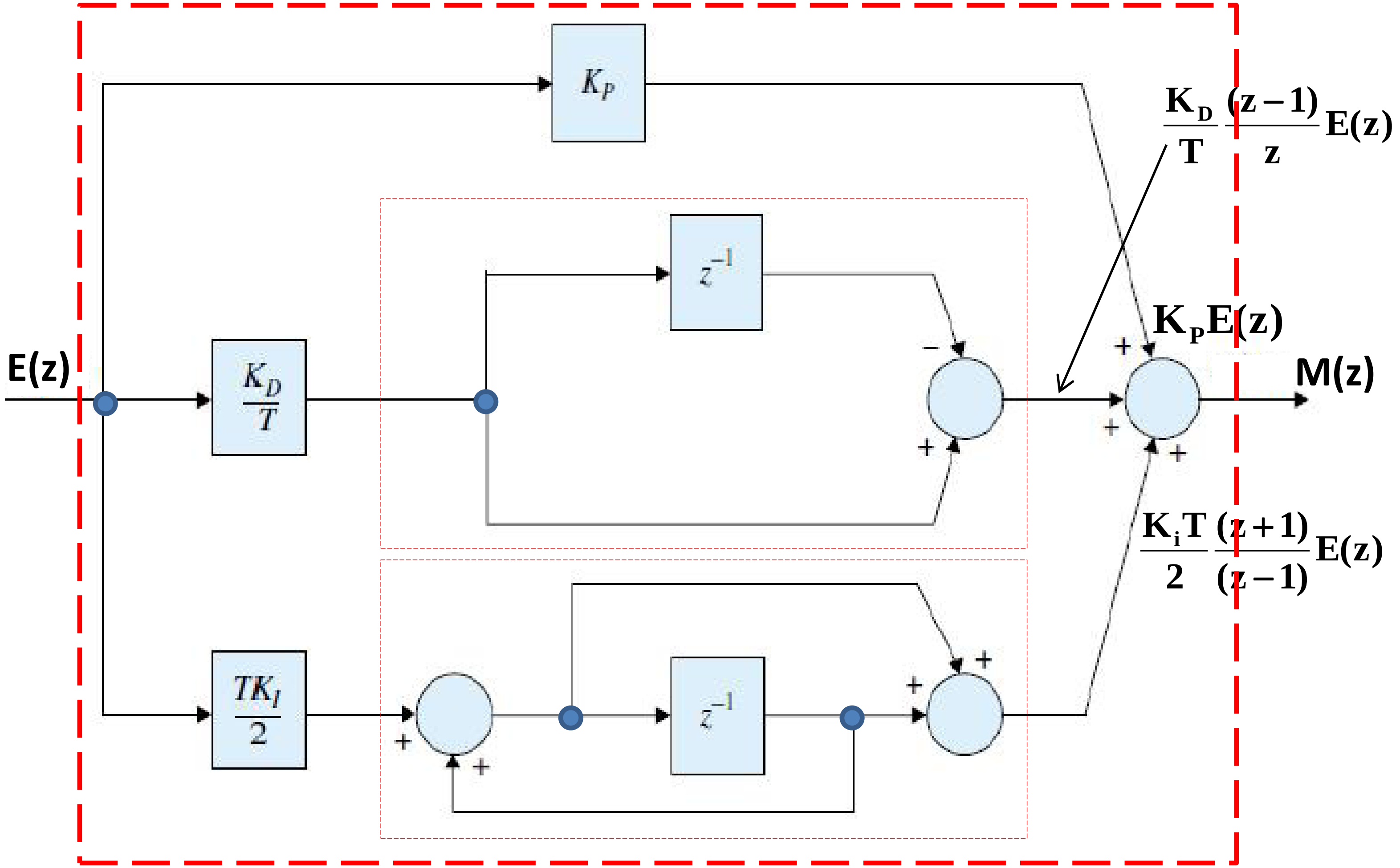
O Diagrama de Blocos a seguir é aplicado para a implementação de um Controlador **PID** discreto usando integração **trapezoidal (mais precisa!)**.



O operador $\mathbf{z^{-1}}$ é interpretado como um atraso de **T segundos**. Na prática este atraso é implementado pelo armazenamento sucessivo de valores calculados e posteriormente utilizados quando a equação demandar.

24.1.7. Diagrama de Blocos de Controlador PID

Determinação da **FT** do **PID** pelo **Diagrama de Blocos** com integração **trapezoidal**.



$$\frac{M(z)}{E(z)} = [K_P + \frac{K_iT}{2}\frac{(z+1)}{(z-1)} + \frac{K_D}{T}\frac{(z-1)}{z}]$$

<u>Exercício 1:</u> Dados K_P **= 5**, T_D **= 0,8x10^{-3} s**, T_I **= 3x10^{-3}** s e **T = 116,4x10^{-6} s**, utilizando integração **trapezoidal**, construa o **Diagrama de Blocos** para o controlador **PID** com estes parâmetros de sintonia.