4ª Prova de MAT 143 Turma ___

Prof. Enoch Apaza

MATRÍCULA________________

Respostas sem justificativa NÃO serão consideradas!!!!
Use se necessário o verso da folha

1. Dada a função $f(x) = 2x^4 - 2x^2 - x$.

   (a) **(15pts)** Encontre a serie de Taylor de f em $a = -2$,

   (b) **(5pts)** o intervalo de convergência da serie de Taylor no item (a).

   (c) **(5pts)** Mostre que a serie de Taylor no item (a) representa f no seu intervalo de convergência.

Solução

a) $f(-2) = 2(-2)^4 - 2(-2)^2 + 2 = 2(16) - 2(4) - 2 = 32 - 8 + 2 = 26$

$f'(x) = 8x^3 - 4x - 1 \quad \rightarrow f'(-2) = 8(-2)^3 - 4(-2) - 1 = -64 + 8 - 1 = -56 - 1 = -57$

$f''(x) = 24x^2 - 4 \quad \rightarrow f'(-2) = 24(-2)^2 - 4 = 96 - 4 = 92$

$f'''(x) = 48x \quad \rightarrow f'''(-2) = 48(-2) = -96$

$f^{IV}(x) = 48 \quad \rightarrow f^{IV}(-2) = 48$

$f^{V}(x) = 0 \quad \rightarrow f^{V}(-2) = 0$

$f^{(n)}(x) = 0 \quad \forall\, n \geq 5 \;\; \forall x \in \mathbb{R}.$

Logo a serie de Taylor de f é

$$\underbrace{26 - 57(x+2) + \frac{92}{2!}(x+2)^2 - \frac{96(x+2)^3}{3!} + \frac{48(x+2)^4}{4!}}_{(*)} + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{0 \cdot (x+2)^n}{n!}$$

b) Como para $x \in \mathbb{R}$ (*) é uma soma finita resta provar que $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{0(x+2)^n}{n!} = \sum_{n=5}^{\infty} 0$

Como $\sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge e $0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ então $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{0(x+2)^n}{n!}$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$. Pode usar também o teste da raiz.

Logo o intervalo de convergência é $(-\infty, \infty)$.

c) Devemos provar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x+2)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Mas quando n tende a $+\infty$ e

para $n \geq 5$ $f^{(n+1)}(\xi) = 0$ assim $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{0 \cdot (x+2)^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$

A

2. Dada a função $f(x) = 4^x$

(a) **(15pts)** Encontre a serie de Maclaurin de f e

(b) **(10pts)**seu raio de convergência.

Solução

a) Como $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ para $x \in \mathbb{R}$ e $4^x = e^{x\ln 4}$ entao

$$4^x = e^{x\ln 4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\ln 4)^n}{n!} = \sum \frac{(\ln 4)^n x^n}{n!} \quad \text{para } x\ln 4 \in \mathbb{R}$$

Logo a serie de Maclaurin de $f(x) = 4^x$ é

$$\sum \frac{(\ln 4)^n x^n}{n!}$$

b) como $4^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 4)^n x^n}{n!}$ vale para $x\ln 4 \in \mathbb{R}$

então vale para $x \in \mathbb{R}$.

Assim, o intervalo de convergencia é $(-\infty, \infty)$

e o raio $R = +\infty$.

3. Dada a função $f(x) = \sqrt{1+3x}$

(a) **(10pts)** Encontre uma serie de potencias de f,

(b) **(5pts)** seu raio de convergência

(c) **(10pts)** seu intervalo de convergência.

Solução

Primeiro formo para $(1+x)^{1/2}$

$$(1+x)^{1/2} = 1+\left(\tfrac{1}{2}\right)x + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)x^3}{3!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)x^4}{4!} + \cdots$$

$$= 1+\tfrac{1}{2}x - \frac{1}{2^2}\frac{x^2}{2!} + \frac{3}{2^3}\frac{x^3}{3!} - \frac{3\cdot 5}{2^4}\frac{x^4}{4!} + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2^5}\frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$= 1+\tfrac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1.3.5\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n \quad \text{para } |x|<1 \quad (*)$$

Assim a serie de potencias de $f(x)=\sqrt{1+3x}$ é

$$1+\tfrac{3}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1.3.5\cdots(2n-3)}{2^n n!}3^n x^n \quad (**)$$

b) Como a serie em $(*)$ converge para $|x|<1$ então a serie para ~~(**)~~ converge para $|3x|<1$ ou $|x|<\frac{1}{3}$

Logo o raio de convergencia é $R=\frac{1}{3}$

c) A serie em $(**)$ converge em $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, Verifiquemos se converge nos extremos $x=\frac{1}{3}$ e $x=-\frac{1}{3}$

Se $x=1/3$ a serie ~~(**)~~ toma a forma

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1.3.5\cdots(2n-3)\,\cancel{3^n}\cancel{\left(\frac{1}{3}\right)^n}}{2^n n!} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1.3\cdots(2n-3)}{4.6\cdots(2n)} \quad (***)$$

que é uma serie alternada.

Primeiro mostremo alguns fatos,

$$a_n = \frac{1\cdot 3\,5\,7\cdots(2n-1)}{2\,4\,6\,8\cdots(2n)} = \left(1-\tfrac{1}{2}\right)\left(1-\tfrac{1}{4}\right)\left(1-\tfrac{1}{6}\right)\left(1-\tfrac{1}{8}\right)\left(1-\tfrac{1}{10}\right)\cdots\left(1-\tfrac{1}{2n}\right)$$

Usando o fato $\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_n} \le \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ (media geometrica é menor igual a media aritmetica)

$$\iff x_1\cdot x_2 x_3\cdots x_n \le \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n$$

temo $a_n \le \left(\frac{1-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{4}+1-\frac{1}{6}+\cdots+1-\frac{1}{2n}}{n}\right)^n = \left(\frac{n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}}{n}\right)^n = \left(1-\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}}{n}\right)^n$

Como $\ln n \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ (veja Exercicio 26 pág 727 Leithold)

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \le \ln n$$

$\Longrightarrow$

$$a_n \leq \left(1 - \frac{\frac{1}{2}\ln n}{n}\right)^n \leq \left(1 - \frac{\frac{1}{2}\ln n}{m}\right)^m \quad \text{para } m \geq n$$

Como $\left(1 - \frac{\frac{1}{2}\ln n}{m}\right)^m$ é crescente e converge a $e^{-\frac{1}{2}\ln n}$

temos

$$a_n \leq e^{-\frac{1}{2}\ln n} = e^{\ln (n)^{-1/2}} = n^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ou $\boxed{a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}}$ Em particular $\boxed{\frac{1 3 \cdots 2n-3}{2 4 \cdots (2n-2)} \leq \frac{1}{\sqrt{n-1}}}$

tomando a serie $\sum_{n=3}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 5 \cdots (2n-3)}{4 6 \cdots (2n-2)(2n)}\right|$

$$\text{e } b_n = \frac{1 3 5 \cdots (2n-3)}{4 6 \cdots (2n-2) 2n} = \frac{1 3 5 \cdots (2n-3)}{2 4 6 \cdots (2n-2) n} \leq \frac{1}{\sqrt{n-1}} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\text{Como } \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n-1} \cdot n}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n}\, n^{1/2}}{(n-1)^{1/2}\cancel{n}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{1/2} = 1^{1/2} = 1 > 0$$

Então a serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}\, n}$ converge.

Portanto a serie $\sum \frac{1 3 5 \cdots (2n-3)}{4 6 \cdots (2n-2) 2n}$ é convergente

Logo a serie $\sum (-1)^{n+1} \frac{1 3 \cdots (2n-3)}{4 6 \cdots (2n-2)(2n)}$ converge.

Se $x = -\frac{1}{3}$ a serie (2ª) fica na forma $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)\cancel{3^n}}{4 6 \cdots (2n)} (-1)^n \left(\frac{1}{\cancel{3}}\right)^{\cancel{n}}$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{1 3 \cdots (2n-3)}{4 6 \cdots (2n)}$$ que é absolutamente convergente pois

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left|(-1)^{2n+1} \frac{1 3 \cdots (2n-3)}{4 6 \cdots (2n)}\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 3 \cdots (2n-3)}{4 6 \cdots (2n)}$$ converge.

Logo o intervalo de convergencia é $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

4. Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 < x < 1 \\ 0 & x = 2n+1, \ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$f(x+2) = f(x), \ x \in \mathbb{R}$$

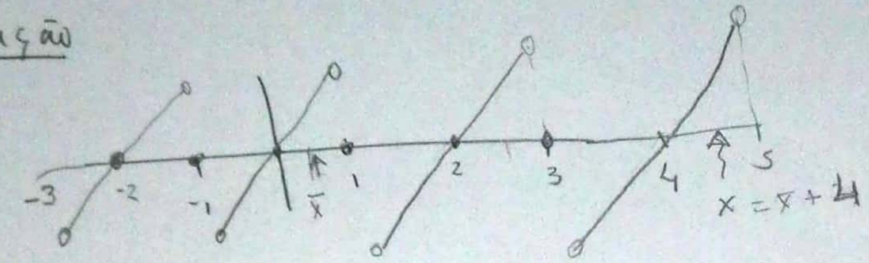
(a) **(5pts)** Faça um gráfico de f,

(b) **(5pts)** verifique se f par ou impar e

(c) **(15pts)** encontre a serie de Fourier de f.

Solução

a)



b) Se $x \in (-1,1)$ $\left.\begin{array}{l} f(-x) = -x \\ e \ -f(x) = -x \end{array}\right\} \Rightarrow f(-x) = -f(x)$

Se $x = 2n+1$, $\left.\begin{array}{l} f(-x) = 0 \\ e \ -f(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-x) = -f(x)$

$\Bigg\}$ Logo f é impar em $[-1,1]$ $(*)$

Se x é arbitrario então existe $\bar{x} \in [-1,1]$ e $x = \bar{x} + 2K$ para algum $K \in \mathbb{Z}$

$f(-x) = f(-\bar{x} + 2K) = f(-\bar{x}) \overset{(*)}{=} -f(\bar{x})$ $\Big\}$ $f(-x) = -f(x)$

2K é um periodo

Por outro lado $-f(x) = -f(\bar{x} + 2K) = -f(\bar{x})$

Assim, f é impar.

c) Como f é impar $a_0 = 0$ e $a_n = 0$. Como o periodo é $2L = 2 \Rightarrow L = 1$

$$b_m = \int_{-1}^{1} \underbrace{x}_{impar} \underbrace{\operatorname{sen} m\pi x}_{impar} \, dx = 2\int_0^1 \underbrace{x}_{u} \underbrace{\operatorname{sen} \pi x}_{v'} = 2\left[-\frac{x}{m\pi} \cos m\pi x \Big|_0^1 - \frac{1}{m\pi} \int_0^1 \cos m\pi x \, dx \right]$$

$$= 2\left[-\frac{1}{m\pi}(\cos m\pi - 0) - \frac{1}{m\pi} \left[\frac{1}{m\pi} (\operatorname{sen} m\pi x) \right]_0^1 \right]$$

$$= 2\left[-\frac{\cos m\pi}{m\pi} - \frac{1}{m\pi} \left[\frac{1}{m\pi} (0 - 0) \right] \right]$$

$$= -\frac{2}{m\pi} \cos m\pi = \begin{cases} -\frac{2}{m\pi} & m = par \\ \frac{2}{m\pi} & m = impar \end{cases}$$

Logo a serie de Fourier de f é

$$\boxed{\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{2}{m\pi} \operatorname{Sen} m\pi x}$$

Scanned by CamScanner