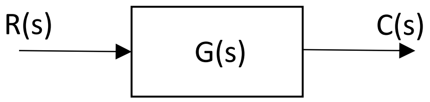
ELT330 – Sistemas de Controle I

Prof. Tarcísio Pizziolo

Aula 14 – Análise de Resposta Transitória

1. Análise em Regime Transitório

A teoria de controle clássico fundamenta-se na condição de que o sistema a ser controlado possua somente uma entrada e uma saída, podendo então ser modelado por função de transferência G(s).



Considerando que a entrada seja R(s) e a saída seja C(s), a função de transferência G(s) do sistema é dada por,

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

Para a análise de controle de sistemas utilizando a sua função de transferência, deve-se observar a ordem do sistema considerando seu número de polos de G(s).

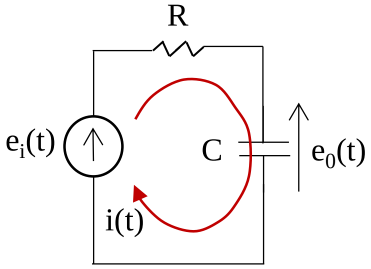
Como a função de transferência é originada da equação diferencial ordinária linear que modela a relação entrada e saída do sistema (considerando as condições iniciais nulas), pode-se obter, por simulações, as características dinâmicas das respostas (saídas) dos sistemas lineares dada a entrada aplicada. Estas simulações permitem que sejam levantadas as especificações dos sistemas para que sejam utilizadas no projeto do controlador o qual irá controlar a saída para se obter uma resposta desejada, ou perto desta.

Existem sistemas de ordem elevada, tais como sistemas de 3ª, 4ª ou 5ª ordem, mas no entanto, nas descrições de sistemas lineares que representam processos industriais, pode-se realizar uma redução destas ordens superiores para 1ª e 2ª ordens obtendo-se resultados satisfatórios quanto à simulação da dinâmica do processo. As análises de sistemas de 1ª e 2ª ordens são análises de circuitos elétricos lineares de 1ª e 2ª ordens, ou seja, circuitos os quais podem ser o análogo de um sistema linear descrevendo o processo a ser controlado dentro de uma faixa de linearidade.

Desta forma, neste conteúdo iremos analisar apenas os sistemas de 1ª e de 2ª ordens quanto às características de suas respostas (saídas) dada uma entrada padronizada.

2. Sistemas de 1ª Ordem

Considere-se um circuito RC o qual representa um sistema análogo.

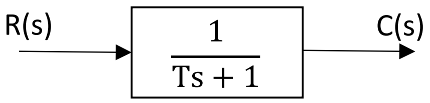


A função de transferência para este circuito é dada por

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1} \Rightarrow G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

Onde T = RC (segundos)

Generalizando, para $E_i(s)$ como uma entrada R(s) e $E_o(s)$ como uma saída C(s), na forma de Diagrama de Blocos tem-se,



Considerando a entrada R(s) como a Transformada de Laplace do Degrau Unitário, a saída C(s) poderá ser determinada como a seguir.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1} \Rightarrow C(s) = \frac{1}{Ts+1}.R(s) \Rightarrow C(s) = \frac{1}{(Ts+1)}.\frac{1}{s} \Rightarrow C(s) = \frac{1}{s(Ts+1)}$$

Aplicando a expansão em frações parciais,

$$C(s) = \frac{1}{s(Ts+1)} \Rightarrow C(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{Ts+1} = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s + \frac{1}{T})}$$

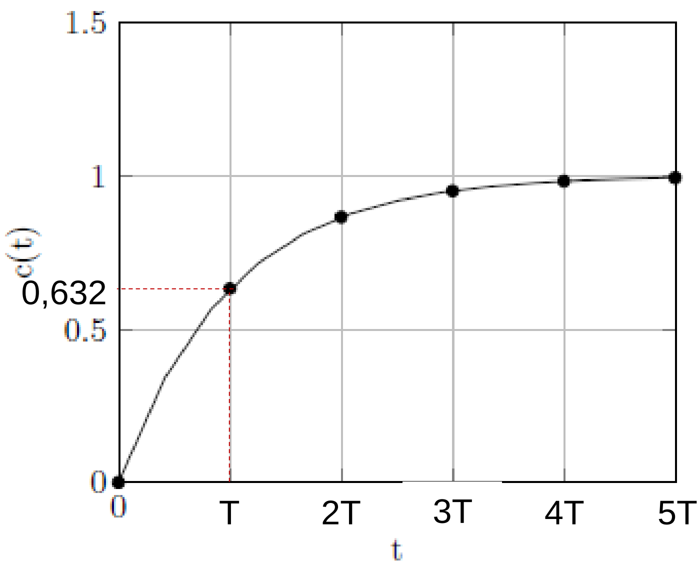
Aplicando a $£^{-1}\{.\}$ em C(s) obtém-se a resposta c(t) seguinte,

$$c(t) = 1 - e^{-t/T} \text{ , para } t \geq 0.$$

Substituindo t por valores múltiplos de T, tem-se:

- para t = 0, c(t) = 0
- para t = T, c(t) = 0,632
- para t = 2T, c(t) = 0,865
- para t = 3T, c(t) = 0,95 (resposta dentro da faixa de 5% do valor final)
- para t = 4T, c(t) = 0,982, (resposta dentro da faixa de 2% do valor final)
- para t = 5T, c(t) = 0,993, (resposta dentro da faixa de 1% do valor final)

O gráfico da resposta ao Degrau Unitário possui a seguinte forma,



2.1. Constante de Tempo T

O coeficiente **T** é definido como **Constante de Tempo** do sistema.

Para o valor de **t = T**, o expoente de ***e*** é igual a **-1,** e a resposta **c(t) = 1 – $e^{-t/T}$**, para $t \geq 0$, é igual a $c(t = T) = 1 - e^{-1} = 0{,}632$.

Na função de transferência, observa-se que quando se isola o termo em **s** no denominador, obtém-se o pólo em 1/T, concluindo que o polo é o inverso da constante de tempo do sistema.

Exemplo: Considere a função de transferência $G(s) = \dfrac{100}{s+20}$.

a) Calcule o valor do pólo.

$$s + 20 = 0 \text{ então o pólo } p = -20$$

b) Calcule a constante de tempo T.

$$.T = 1/p \text{ então } T = 1/20 = 0{,}05 \text{ s}$$

c) Calcule a saída c(t) para uma entrada r(t) igual à função degrau unitário.

$$\underbrace{\frac{C(s)}{R(s)}}_{G(s)} = \frac{100}{s+20} \Rightarrow C(s) = \frac{100}{s+20}R(s) \Rightarrow C(s) = \frac{100}{(s+20)}.\frac{1}{s} \Rightarrow C(s) = \frac{100}{s(s+20)}$$

Expandindo em frações parciais tem-se,

$$C(s) = \frac{100}{s(s+20)} \Rightarrow C(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+20} = \frac{5}{s} - \frac{5}{s+20}$$

Aplicando a $L^{-1}\{.\}$ obtém-se

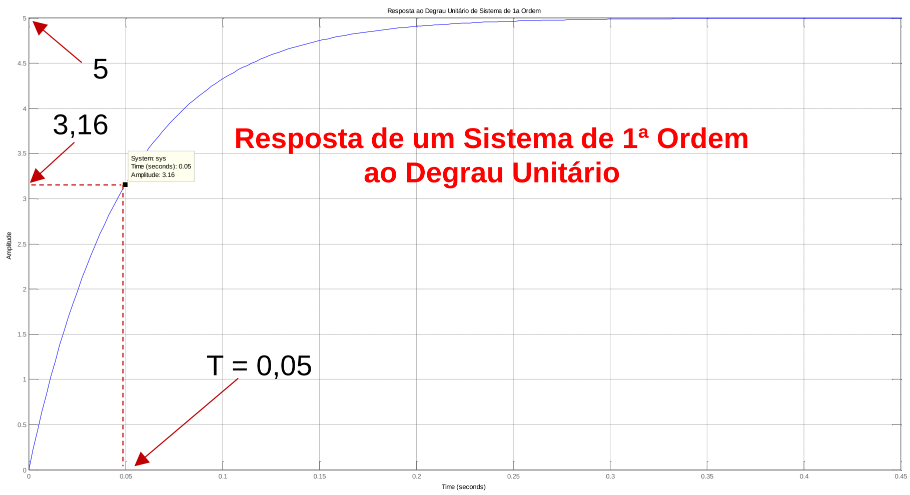
$$c(t) = 5 - 5e^{-20t}$$

d) Calcule a saída $c(t \rightarrow \infty)$ para o item anterior.

$$c(t \rightarrow \infty) = 5$$

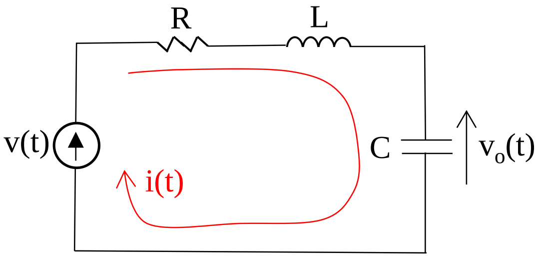
e) Calcule o valor de c(t = T)

$$c(t = T) = 5 - 5e^{-20t} \Rightarrow c(t = 0{,}05) = 5 - 5e^{-1} \Rightarrow c(t = T) = 3{,}16$$



3. Sistemas de 2ª Ordem

Considere-se um circuito RLC o qual representa um sistema de 2ª ordem.



A função de transferência que relaciona a corrente i(t) como saída em função da entrada v(t) para este circuito é dada por,

$$G(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Considerando $b_2 = LC$, $b_1 = RC$ e $b_o = 1$, pode-se escrever

$$G(s) = \frac{b_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}$$

O polinômio do denominador de G(s) quando igualado a zero representa a equação característica do sistema a qual depende dos parâmetros RLC.

A equação característica generalizada será então;

$$b_2 s^2 + b_1 s + b_0 = 0$$

Quando a equação característica apresenta raízes reais, iguais ou distintas, temos uma resposta dada por soma de exponenciais.

Quando a equação característica apresenta raízes complexas conjugadas, temos respostas senoidais exponencialmente crescentes ou decrescentes. Para o caso de respostas senoidais exponencialmente decrescentes definiremos um coeficiente o qual será responsável pelo amortecimento da senoide. Este coeficiente será denominado **Coeficiente de Amortecimento**. A senoide terá uma frequência a qual, sem a atuação do coeficiente de amortecimento, será denominada **Frequência Natural não Amortecida**.

3.1 Coeficiente de Amortecimento ξ

Seja uma equação característica dada por;

$$b_2 s^2 + b_1 s + b_0 = 0$$

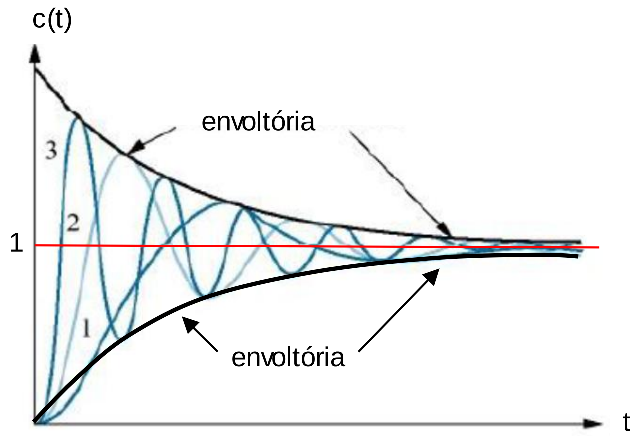
Consideremos que $(b_1^2 - 4b_2b_0) < 0$, então esta equação característica apresenta um par de raízes complexas conjugadas. Estas raízes serão;

$$s_1 = -\frac{b_1 \pm j\sqrt{b_1^2 - 4b_2b_o}}{2b_2} = \underbrace{-\frac{b_1}{2b_2}}_{\sigma} \pm j\underbrace{\frac{\sqrt{b_1^2 - 4b_2b_o}}{2b_2}}_{w_d}$$

Onde $\mathbf{s = \sigma \pm jw_d}$; sendo $s_1 = \sigma + jw_d$ e $s_2 = \sigma - jw_d$

A parte real **σ** é identificada como o expoente de ***e***, e ω_d é a freqüência natural amortecida da parte oscilatória proveniente deste par de raízes.

O gráfico a seguir ilustra uma função $c(t) = Ae^{\sigma t}sen(w_d t + \varphi)$ a qual representa uma senóide amortecida exponencialmente onde $\sigma < 0$ é o coeficiente de amortecimento e w_d é a freqüência natural amortecida.



Na equação característica generalizada $b_2s^2 + b_1s + b_0 = 0$, a grandeza b_1 representa a constante de amortecimento efetiva do sistema.

Então, se $b_1 = 2\sqrt{b_2b_0}$, as duas raízes s_1 e s_2 serão iguais, o que representa o valor crítico para a constante de amortecimento. Desta forma, podemos caracterizar $b_1' = 2\sqrt{b_2b_0}$ como um valor crítico para o amortecimento.

Define- se então o **Coeficiente de Amortecimento "ξ"** como sendo a razão entre o valor da constante de Amortecimento Real e o Amortecimento Crítico desta constante.

$$\xi = \frac{\text{Valor do Amortecimento Real}}{\text{Valor do Amortecimento Crítico}} \Rightarrow \xi = \frac{b_1}{b_1'} \Rightarrow \xi = \frac{b_1}{2\sqrt{b_2b_0}}$$

3.2 Frequência Natural não Amortecida w_n

A Frequência Natural não Amortecida é definida como a frequência de oscilação do transitório para **Amortecimento Nulo**, ou seja, $\boldsymbol{\xi = 0}$. Para $\boldsymbol{\xi = 0}$ tem-se que $b_1 = 0$, e assim;

$$w_n = \sqrt{\frac{b_o}{b_2}}$$

Quando a constante de amortecimento b_1 for igual a zero ($b_1 = 0$), a resposta transitória não desaparece. A resposta é um sinal senoidal de amplitude constante. Assim tem-se uma Frequência Natural não Amortecida.

3.3 Parametrização da Função de Transferência

Devemos então expressar G(s) em função de ξ e de $\mathbf{w_n}$ para facilitar as análises. Assim:

$$G(s) = \frac{b_0}{b_2s^2 + b_1s + b_0} \Rightarrow G(s) = \frac{\frac{b_0}{b_2}}{\frac{b_2}{b_2}s^2 + \frac{b_1}{b_2}s + \frac{b_0}{b_2}} \Rightarrow G(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + \left(\underbrace{\frac{b_1}{b_2}}_{?}\right)s + w_n^2}$$

O coeficiente (b_1/b_2) será:

$$\underbrace{\left(\frac{b_1}{2\sqrt{b_2 b_0}}\right)}_{\xi}\underbrace{\left(\sqrt{\frac{b_o}{b_2}}\right)}_{w_n} = \xi w_n \Rightarrow \frac{b_1}{2b_2} = \xi w_n \Rightarrow \boxed{\frac{b_1}{b_2} = 2\xi w_n}$$

Finalmente:

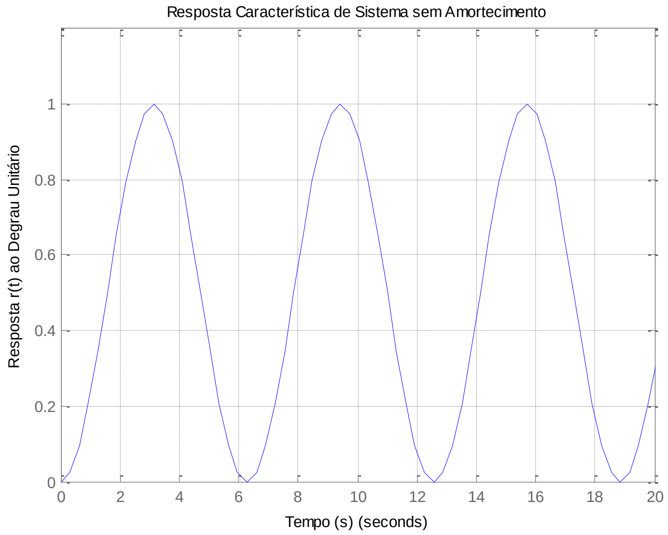
$$G(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

O comportamento dinâmico de sistemas de **2ª ordem** pode então ser descrito em termos dos parâmetros ξ e $\mathbf{w_n}$.

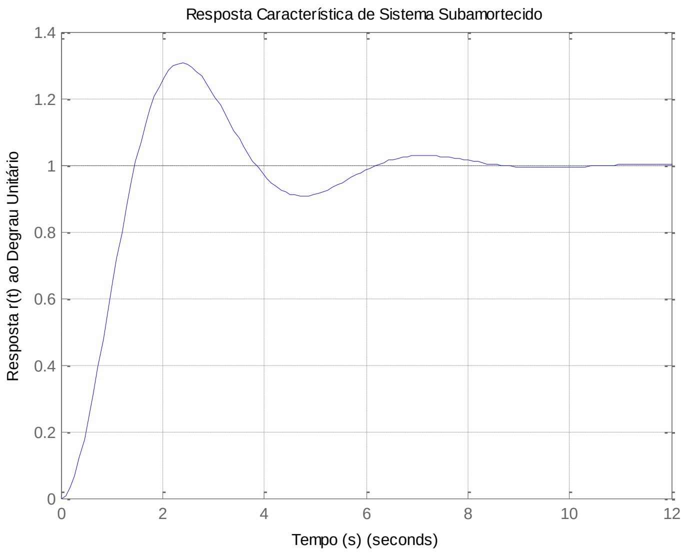
3.4 Comportamento da Reposta dos Sistemas de 2ª ordem

O comportamento da reposta de um sistema de 2ª ordem pode ser analisado em função dos valores do coeficiente de amortecimento ξ**.** Vejamos:

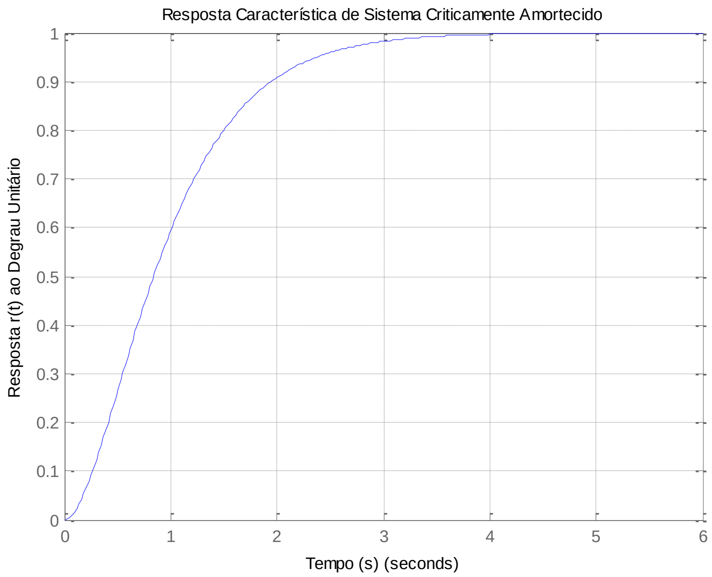
- Se ξ **= 0,** o sistema comporta com resposta <u>sem amortecimento</u>.



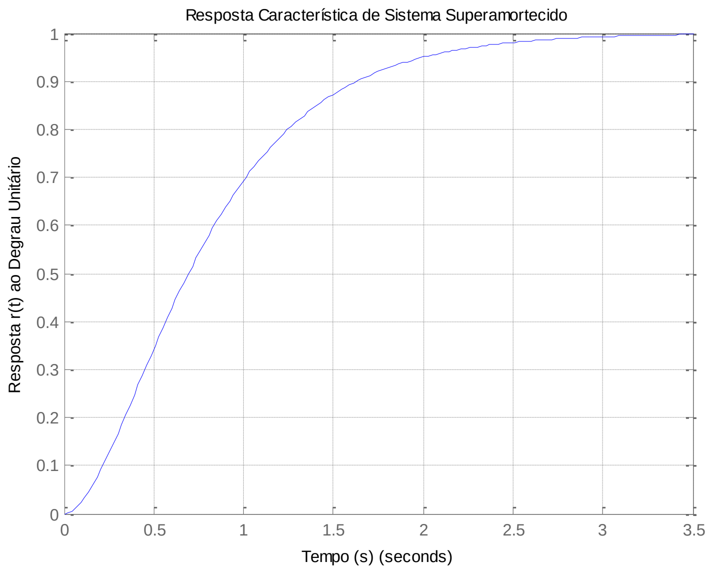
- Se **0 < ξ < 1,** (polos complexos conjugados) o sistema comporta com resposta oscilatória e é dito <u>subamortecido</u>.



- Se **ξ = 1** (polos reais e iguais) o sistema comporta com resposta exponencial e é dito <u>criticamente amortecido</u>.



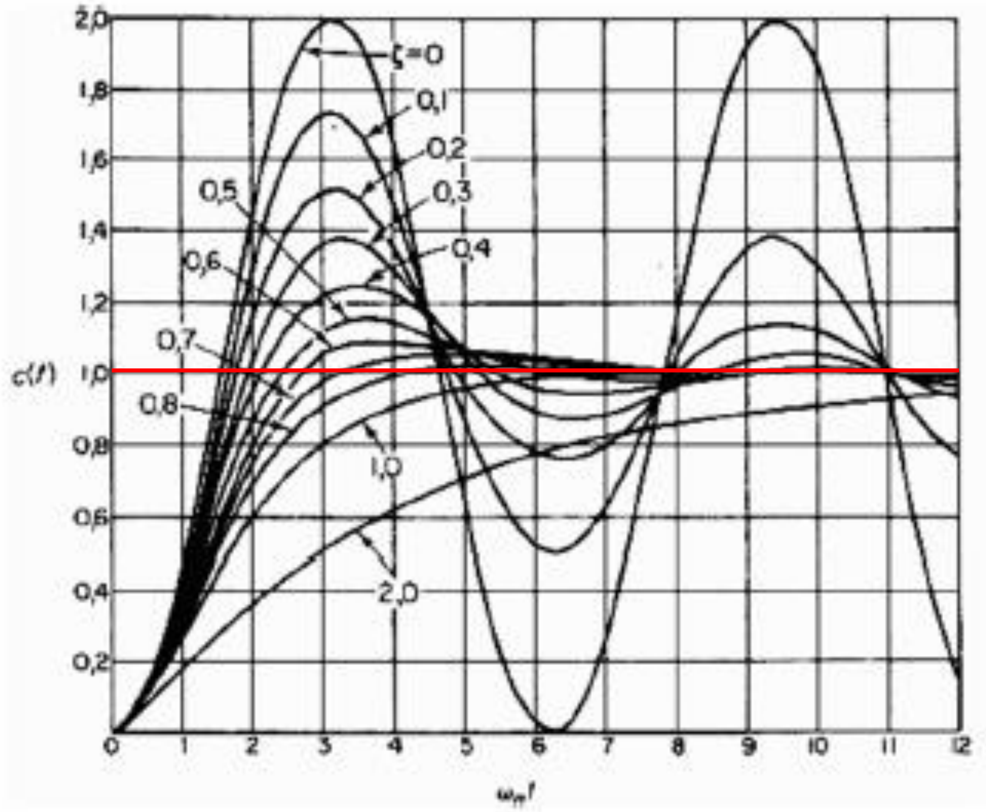
- Se **ξ > 1**, (polos reais distintos) o sistema comporta com resposta formada por duas exponenciais e é dito <u>sobreamortecido</u>.



3.5 Resposta Transitória para Sistemas de 2ª Ordem para Entrada Degrau Unitário

Dependendo do valor do Coeficiente de Amortecimento ξ o sistema de 2ª ordem apresenta um tipo de resposta conforme foi analisado anteriormente.

Para elucidar esta variação no tipo de resposta transitória desses sistemas, o gráfico abaixo mostra as respostas padronizadas para um sistema de segunda ordem para uma entrada degrau unitário.



Deve-se notar que quanto menor for o valor de ξ mais oscilatória será a resposta transitória para uma entrada degrau unitário.

- Mas por que a resposta ao degrau unitário?

Apresentaremos 3 motivos importantes para a escolha da resposta de entrada degrau unitário.

1º) A entrada degrau unitário é uma entrada bastante comum para os sistemas, muitas vezes, queremos que a saída passe de um valor constante, que pode ser zero, para outro valor constante. Exemplos: alterar a velocidade de veículo, a altura de uma aeronave, a direção de um avião, mudar o ângulo de braço robótico ou a direção de uma antena.

2º) As entradas rampa unitária e parábola podem ser convertidas em entradas degrau para as derivadas da saída. Por exemplo, uma entrada rampa para a posição angular de uma antena pode ser convertida em uma entrada degrau para a velocidade de rotação da antena. Uma entrada parábola para a altura de um foguete pode ser convertida uma entrada rampa para a sua velocidade e uma entrada degrau para sua aceleração.

3º) Se o sistema não for capaz de responder adequadamente a uma entrada degrau, que é simplesmente um valor de referência constante, ele não vai ser capaz de responder adequadamente a entradas mais complexas.

- Mas por que a resposta de sistemas de 2ª ordem?

Apresentaremos 2 motivos importantes para a escolha de sistemas de 2ª ordem.

1º) A resposta ao degrau de sistemas de primeira ordem, sendo este estável, será uma constante menos uma exponencial decrescente. Se o sistema de primeira ordem for instável, sua resposta divergirá como uma rampa ou segundo uma exponencial crescente.

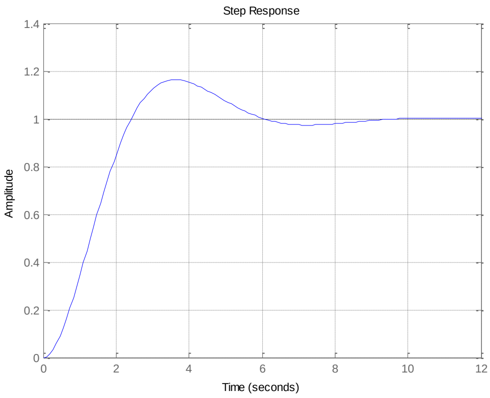
2º) A entrada ao degrau de muitos sistemas pode ser aproximada para uma resposta ao degrau de sistema de segunda ordem.

Exemplos: comparando visualmente a resposta ao degrau de sistema de 2ª ordem com a resposta ao degrau de sistemas de 3ª e 4ª ordem.

Seja a função de transferência $F_1(s)$ de um sistema de 2ª ordem dada por,

$$F_1(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

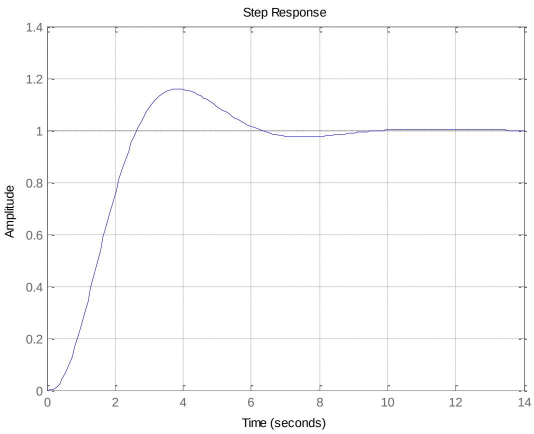
A resposta ao degrau unitário para $F_1(s)$ será,



Seja a função de transferência $F_2(s)$ de um sistema de 3ª ordem dada por,

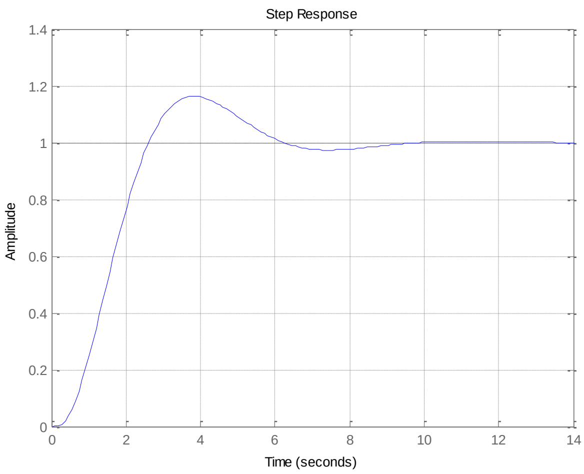
$$F(s) = \frac{5}{(s^2 + s + 1)(s + 5)}$$

A resposta ao degrau unitário para $F_2(s)$ será,



Seja a função de transferência $F_3(s)$ de um sistema de 4ª ordem dada por,

$$F(s) = \frac{64}{(s^2 + s + 1)(s^2 + 12s + 64)}$$



Verifica-se que a aproximação da resposta de 2ª ordem é uma boa aproximação nos três casos. Mas é importante saber que fazemos essa aproximação apenas para análise das características da resposta ao degrau do sistema, e não necessariamente para o projeto de controlador. E nem sempre, essa aproximação será válida.