ELT330 – Sistemas de Controle I
Prof. Tarcísio Pizziolo

Aula 24 – Controlador PID

1. Introdução

Uma forma de entender o controle PID é imaginarmos a situação de um carro que vai viajar a uma velocidade constante.

Se o carro estiver parado e ao sair quisermos atingir uma velocidade de 80 km/h, denominada *set-point*, podemos pressionar o pedal do acelerador de forma que a velocidade do veículo aumente a uma velocidade próxima do objetivo de 80 km/h que poderia ser de 75 km/h. Quando chegamos nos 75km/h, começamos a aliviar o pedal do acelerador para evitar que o veículo vá além dos 80km/h. Veja que se não olharmos para o velocímetro, certamente conduziremos o carro a uma velocidade que não é a nossa velocidade desejada e teremos um erro (para cima ou para baixo). Essa ação representa a ação proporcional conforme ilustra a figura 1a.

Se olharmos agora para o velocímetro e observarmos que estamos abaixo da nossa velocidade desejada, no caso a 75 km/h, podemos usar esse *feedback* visual para corrigir o erro, que no caso é de -5 km/h, e começar a pressionar lentamente o pedal do acelerador. Como resultado, nossa velocidade aumenta lentamente, diminuindo o erro e atingindo a velocidade desejada de 80 km/h. Essa ação representa a ação integral conforme ilustra a figura 1b.

Agora estamos exatamente em nosso *set-point* de 80 km/h e continuamos a manter essa velocidade através do *feedback* visual do velocímetro. Mas se nos deparamos com uma mudança repentina na inclinação da estrada, como uma colina íngreme, temos que corrigir a redução de velocidade por conta da subida pressionando o pedal do acelerador mais do que seria necessário em uma reta. Se após subir a colina e encontrarmos novamente uma reta, é necessário desacelerar um pouco para evitar que a velocidade ultrapasse os 80km/h e fique constante no *set-point* desejado. A quantidade de correção e o tempo para zerar o erro (diferença da velocidade em torno do *set-point*) pode ser comparada à ação derivativa no controle PID.

Essa ação representa a ação derivativa conforme ilustra a figura 1c. (https://www.citisystems.com.br/controle-pid/)

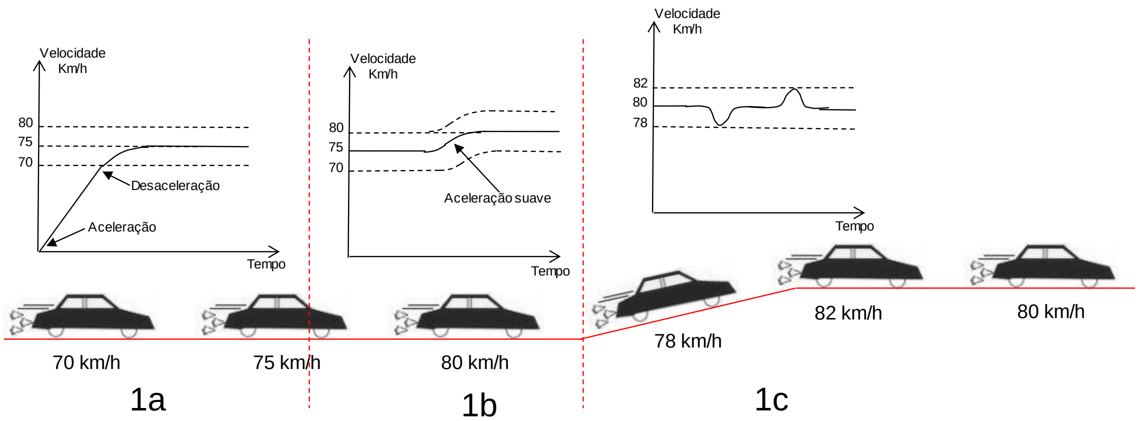
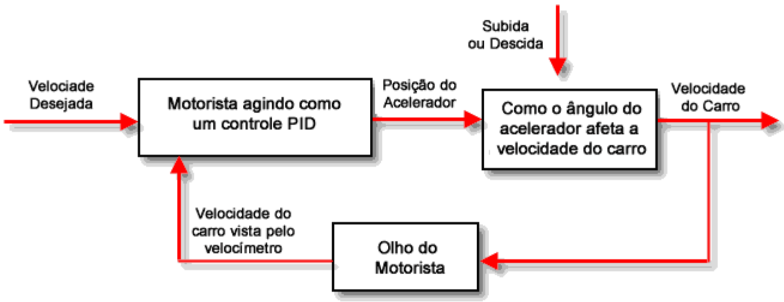
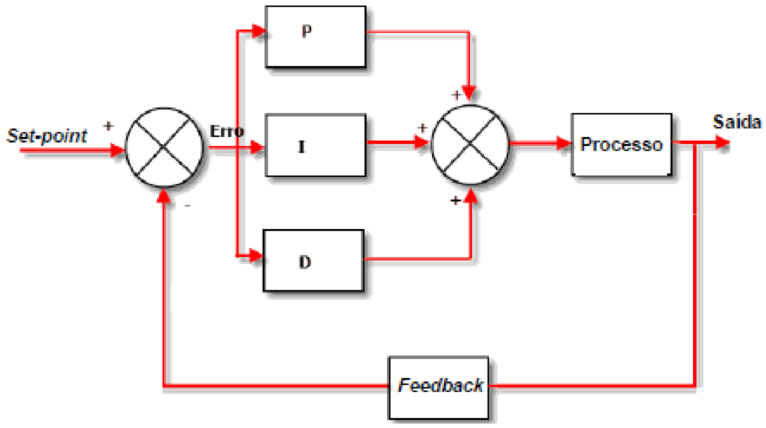


Figura 1

Um diagrama de blocos pode representar o controle de velocidade de um carro.



Generalizando,



2. Controlador PID

As ações de controle Proporcional, Integral e Derivativa, quando aplicadas conjuntamente formam uma ação de controle denominada PID. Esta ação de controle caracteriza um tipo de controlador.

O controlador com ação de controle PID é muito utilizado na indústria para controle de processos, pois sua aplicação é de fácil entendimento para os técnicos e sua sintonia não requer conhecimentos avançados na área.

O controlador PID possui as três ações básicas de controle a seguir:

- Proporcional (P)
- Integral (I)
- Deirivativa (D)

Para o tempo contínuo a ação de controle PID é caracterizada pelas seguintes equações,

$$\boxed{m_P(t) = K_P e(t)}$$

$$\boxed{m_I(t) = \frac{K_P}{T_i}\int_0^t e(t)dt}$$

$$\boxed{m_D(t) = K_P T_D \frac{de(t)}{dt}}$$

Onde as constantes K_P é o ganho proporcional**,** T_i e T_D são os tempos de integralização e o de derivação, respectivamente.

Como trabalhamos com sistemas lineares, pelo Teorema da Superposição, pode-se então somar os três termos obtendo-se a equação do PID no domínio do tempo. A é dada por:

$$\boxed{PID = K_P e(t) + \frac{K_P}{T_i}\int_0^t e(t)dt + K_P T_D \frac{de(t)}{dt}}$$

Aplicando a Transformada de Laplace nas equações do PID obtém-se a função de transferência PID no domínio da frequência. Assim,

$$PID = M(s) = \left[K_P + \frac{K_P}{T_i\,s} + K_P T_D\,s\right] E(s) \Rightarrow \boxed{\frac{M(s)}{E(s)} = K_P\left(1 + \frac{1}{T_i\,s} + T_D\,s\right)}$$

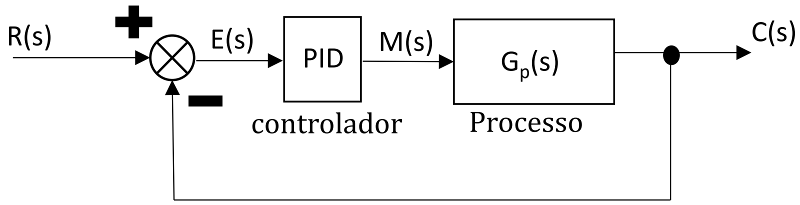
É comum utilizar a multiplicação do ganho proporcional K_p pelos coeficientes de “1/s” e de “s” na equação do PID no domínio da frequência e obter-se as seguintes constantes,

$$\boxed{K_i = \frac{K_P}{T_i}} \quad \text{e} \quad \boxed{K_D = K_P T_D}$$

Daí a equação do PID no domínio da frequência pode se escrita como,

$$\boxed{\mathrm{PID} = \left(K_P + \frac{K_i}{s} + K_D\, s\right)}$$

Um diagrama de blocos em malha fechada é apresentado com o controlador PID em série com o processo a ser controlado.

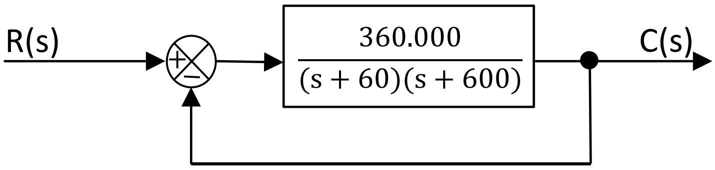


Esses parâmetros (K_P, K_i e K_D) devem ser sintonizadas para que o controlador tenha um desempenho considerado satisfatório no controle do processo.

Exemplo: Um servomecanismo possui a seguinte função de transferência da tensão aplicada na entrada para a sua velocidade na saída em rad/s,

$$G(s) = \frac{3{,}6x10^5}{(s+60)(s+600)}$$

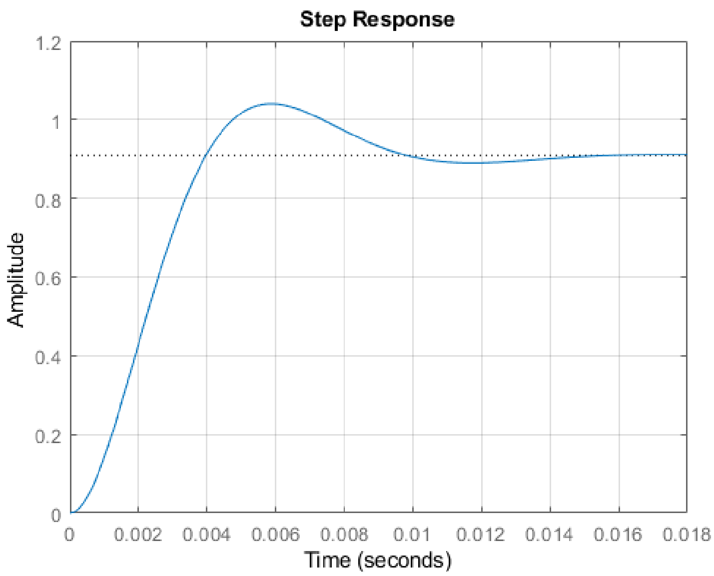
Um controlador PID com K_P = 5, T_I = 3 ms e T_D = 0,8 ms fornece um desempenho satisfatório para o caso contínuo e é conectado em série com G(s) formando uma malha fechada com realimentação unitária negativa.
a) Construa o gráfico de saída c(t) para a velocidade deste servomecanismo quando uma entrada degrau unitária for aplicada sem o controlador PID.
O diagrama de blocos sem o controlador PID é dada a seguir.



A função de transferência para o sistema de controle em malha fechada sem o controlador PID será:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{360.000}{(s+60)(s+600)}}{1 + \dfrac{360.000}{(s+60)(s+600)}} \Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{360.000}{s^2 + 660s + 396.000}$$

O gráfico de saída c(t) para a velocidade deste servomecanismo quando uma entrada degrau unitária for aplicada sem o controlador PID é dada pelo gráfico a seguir.



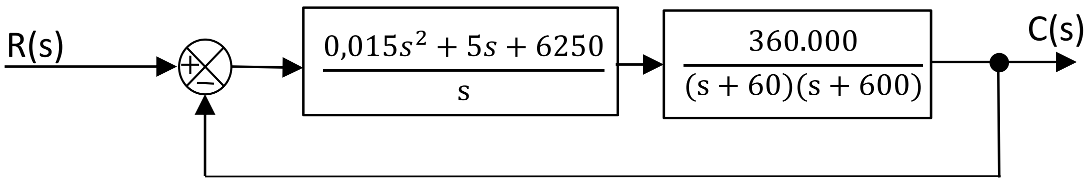
b) Construa o gráfico de saída c(t) para a velocidade deste servomecanismo quando uma entrada degrau unitária for aplicada com o controlador PID.
A função de transferência para o controlador PID no domínio do tempo é dado por,

$$\frac{\mathrm{M(s)}}{\mathrm{E(s)}} = \mathrm{K_P}\left[1 + \frac{1}{\mathrm{sT_I}} + \mathrm{sT_D}\right]$$

Substituindo os valores dos parâmetros PID tem-se:

$$\frac{\mathrm{M(s)}}{\mathrm{E(s)}} = 5\left[1 + \frac{1}{0{,}8 \times 10^{-3}\mathrm{s}} + 3 \times 10^{-3}\mathrm{s}\right] \Rightarrow \mathrm{PID(s)} = \left[\frac{0{,}015\mathrm{s}^2 + 5\mathrm{s} + 6250}{\mathrm{s}}\right]$$

O diagrama de blocos com o controlador PID é dada a seguir.



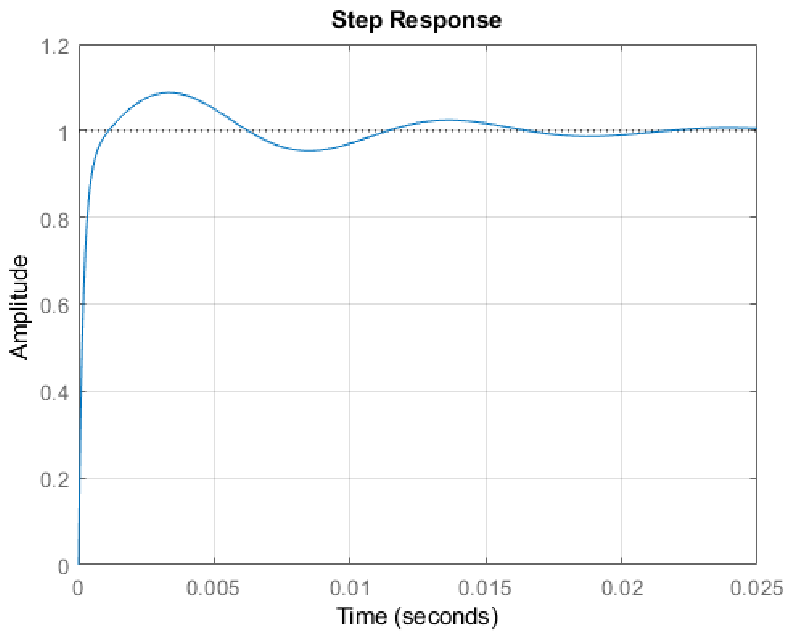
A função de transferência para o sistema de controle em malha fechada com o controlador PID será:

$$\frac{\mathrm{C(s)}}{\mathrm{R(s)}} = \frac{\left[\frac{0{,}015\mathrm{s}^2 + 5\mathrm{s} + 6250}{\mathrm{s}}\right]\left[\frac{360.000}{(\mathrm{s}+60)(\mathrm{s}+600)}\right]}{1 + \left[\frac{0{,}015\mathrm{s}^2 + 5\mathrm{s} + 6250}{\mathrm{s}}\right]\left[\frac{360.000}{(\mathrm{s}+60)(\mathrm{s}+600)}\right]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{C(s)}}{\mathrm{R(s)}} = \frac{360.000(0{,}015\mathrm{s}^2 + 5\mathrm{s} + 6250)}{(s^3 + 660s^2 + 36000\mathrm{s}) + (5400\mathrm{s}^2 + 1{,}8 \times 10^6 s + 2{,}25 \times 10^9)} \Rightarrow$$

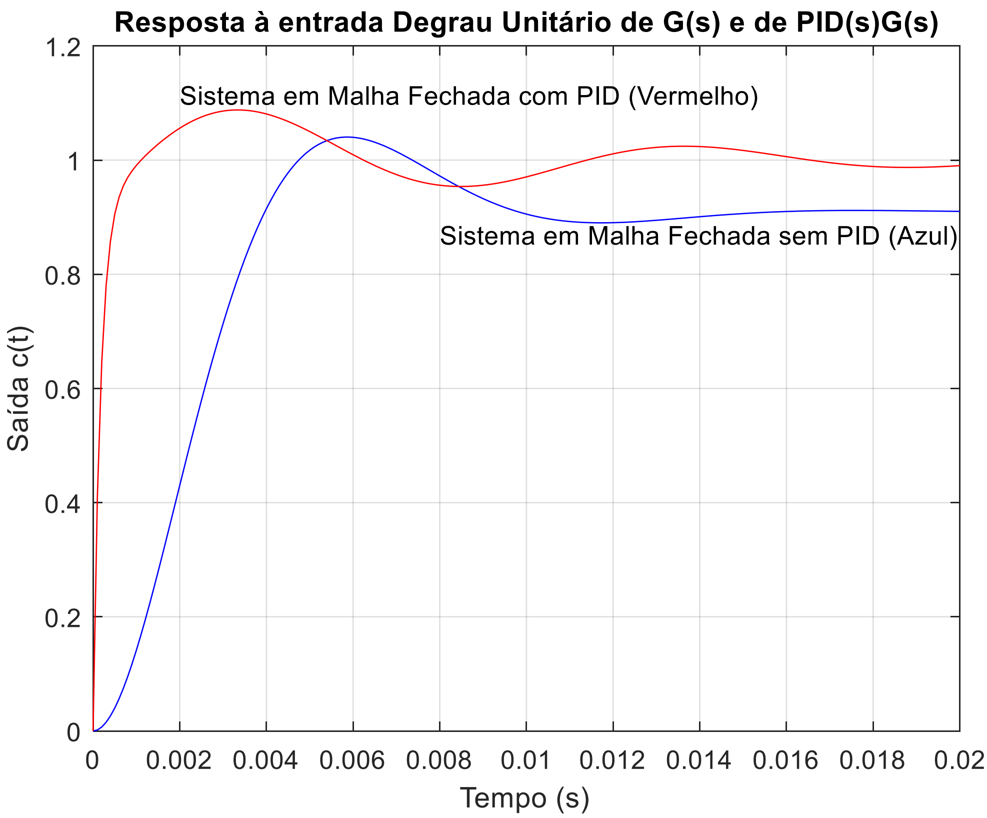
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{C(s)}}{\mathrm{R(s)}} = \frac{(5400\mathrm{s}^2 + 1{,}8 \times 10^6 s + 2{,}25 \times 10^9)}{(s^3 + 6060s^2 + 1{,}836 \times 10^6\mathrm{s} + 2{,}25 \times 10^9)}$$

O gráfico de saída c(t) para a velocidade deste servomecanismo quando uma entrada degrau unitária for aplicada com o controlador PID é dada pelo gráfico a seguir.



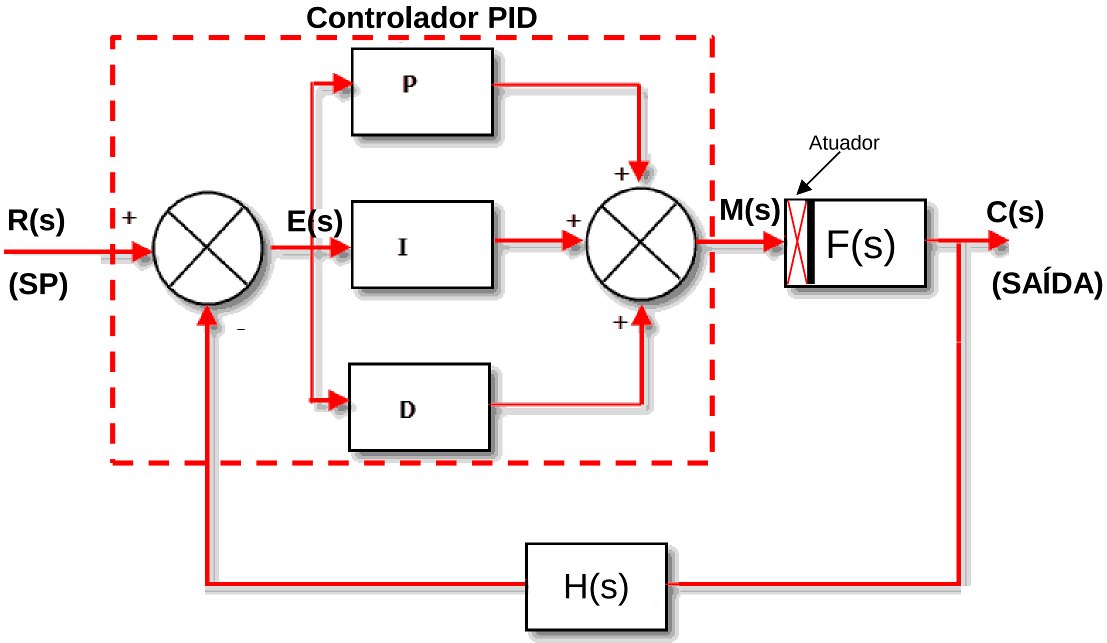
Comparando os dois gráficos de resposta c(t) pode-se ver que quando é aplicado o controlador PID a resposta é mais rápida para atingir o valor final desejado com menos oscilações. Deve-se observar também que sem o controlador PID o servomecanismo não atinge o valor final unitário, estabilizando-se em 0,9, enquanto com a utilização do PID o valor final da resposta estabiliza no valor unitário.

Os dois gráficos de respostas são mostrados conjuntamente a seguir para estas conclusões.



ALGORITMO DE CONTROLADOR PID

Um controlador PID possui o seguinte diagrama de blocos.



Um algoritmo para a Ação de Controle PID no MatLab pode ser dado por:

% Entradas
xk = valor inicial da variável controlada
xk_ref = valor do Set-Point (SP)
uk = valor da entrada
K_transdutor = valor de H(s)

% Parâmetros PID
Kp = valor da constante Kp
Ki = valor da constante Ki
Kd = valor da constante Kd

% Intervalo de Amostragem
T = valor do intervalo de amostragem

% Tempo de simulação em segundos
Ts = valor do tempo de simulação

% Condições iniciais.
i = 0
time = 0
I_área = 0
Erro_anterior = 0

% Matrizes do Sistema
A = [matriz A]
B = [matriz B]

```
% Conversão de Sistema Contínuo para Sistema Discreto
 [Fi Gama] = c2d(A,B,h)

while time < Ts

   i = i + 1
   Erro = xk_ref - K_transdutor * xk
   Erro(i) = Erro

   P = Kp * Erro(i)
   I = I + Ki * (Erro(i) * T)
   D = Kd * (Erro(i) - Erro_anterior) / T

   u = ( P + I + D ) * uk

   dxk = Fi * xk + Gama * u

   xk = dxk
   nxk(i) = xk

   tempo(i) = time;
   time = time + T;

   Erro_anterior = Erro(i)

end

% Plotagem do gráfico de Saída do Sistema
subplot(2,1,1)
plot(tempo,nxk)
title('Saída do Sistema')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Variação da Saída do Sistema')
grid

% Plotagem do gráfico de Erro do Sistema
subplot(2,1,2)
plot(tempo,erro_xk)
title('Erro do Sistema')
xlabel('tempo (s)')
ylabel('Variação do Erro do Sistema')
grid
```