UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MAT 340 - EDO - 2017/II

Segunda Lista Exercícios

1. Neste problema, indicamos um outro procedimento para resolver a equação diferencial
$$y'' + by' + cy = (D^2 + bD + c)y = g(t) \quad (1)$$
onde b e c são constantes e D simboliza a derivação em relação a t. Sejam r_1 e r_2 os zeros do polinômio característico correspondente à equação homogênea. estes zeros podem ser reais e diferentes, reais e iguais ou complexos conjugados.
   (a) Verificar que a eq.(1) pode ser escrita na forma fatorada
   $$(D - r_1)(D - r_2)y = g(t),$$
   onde $r_1 + r_2 = -b$ e $r_1 r_2 = c$.
   (b) Seja $u = (D - r_2)y$. Então, mostrar que a solução da eq.(1) pode ser encontrada pela resolução das duas seguintes equações de primeira ordem:
   $$(D - r_1)u = g(t), \quad (D - r_2)y = u(t).$$
2. Utilize o exercício anterior para resolver a seguinte equação diferencial
$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}.$$
3. Em cada item abaixo, determine a solução da equação diferencial dada.
   (a) $y'' + y' = \tan(t), \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$
   (b) $y'' + 9y' = 9\sec^2(3t), \quad 0 < t < \frac{\pi}{6}$
   (c) $y'' + 4y' + 4y = t^{-2}e^{-2t}, \quad t > 0$
   (d) $y'' - 5y' + 6y = g(t)$, onde $g(t)$ é uma função contínua arbitrária.
4. Dadas as equações diferenciais abaixo mostre que y_1 e y_2 satisfazem a equação homogênea correspondente. Depois determine uma solução particular da equação particular da equação não-homogênea dada.
   (a) $t^2y'' - 2y' = 3t^2 - 1 \;\; t > 0; \;\; y_1(t) = t^2, y_2(t) = t^{-1}$
   (b) $(1 - t)y'' - ty' - y = g(t) \;\; 0 < t < 1; \;\; y_1(t) = e^t, y_2(t) = t$ onde $g(t)$ é uma função contínua arbitrária.

5. Pela escolha do ponto inicial t_0, como o limite inferior de integração na equação

$$Y(t) = -y_1(t)\int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt + y_2(t)\int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt,$$

mostre que $Y(t)$ fica

$$Y(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s)y_2(t) - y_1(t)y_2(s)}{y_1(s)y_2'(s) - y_1'(s)y_2(s)} g(s)ds.$$

Mostre também que $Y(t)$ é uma solução do problema de valor inicial

$$L[y] = g(t),\ y(t_0) = 0, y'(t_0) = 0$$

.

6. (a) Usar o resultado do exercício 5 para mostrar que a solução do problema de valor inicial

$$y'' + y = g(t),\ y(t_0) = 0,\ y'(t_0) = 0$$

é

$$y = \int_{t_0}^{t} sen(t-s)g(s)ds$$

(b) Achar a solução do problema de valor inicial

$$y'' + y = g(t),\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_0$$

7. Usar o resultado do exercício 5 para determinar a solução do problema de valor inicial

$$L[y] = [D^2 - 2\lambda D + (\lambda^2 + \mu^2)]y = g(t)$$

com $y(t_0) = 0,\ y'(t_0) = 0$. Observar que as raízes da equação característica são $\lambda \pm i\mu$.

8. Usar o resultado do exercício 5 para achar a solução do problema de valor inicial

$$L[y] = (D-a)^2 y = g(t)$$

com $y(t_0) = 0,\ y'(t_0) = 0$, onde a é um número real qualquer.

9. Usar o resultado do exercício 5 para determinar a solução do problema de valor inicial

$$L[y] = [(D-a)(D-b)]y = g(t),$$

onde $a \neq b$.

10. Pela combinação dos resultados dos exercícios 7, 8 e 9, mostrar que a solução do problema de valor inicial

$$L[y] = (aD^2 + bD + c)y = g(t)$$

com $y(t_0) = 0,\ y'(t_0) = 0$, onde a, b e c são constantes, tem a forma

$$y = \phi(t) = \int_{t_0}^{t} K(t-s)g(s)ds. \tag{1}$$

A função K depende somente das soluções y_1 e y_2 da equação homogênea correspondente e é independente do termo não-homogêneo. Uma vez determinada K, todos os problemas não-homogêneos que envolvem o mesmo operador diferencial L estão reduzidos ao cálculo de uma integral. Observar que embora K dependa de t e de s, somente a combinação $t-s$ aparece no integrando de modo que K, na realidade, é uma função de uma só variável. Pensando em $g(t)$ como uma função entrada do problema e em $\phi(t)$ como a função saída, a equação (1) mostra que a saída depende da entrada sobre todo o intervalo no ponto inicial t_0 até um valor corrente t. A integral na equação (1) é a convolução de K e g e K é o núcleo da convolução.

11. Determinar ω_0, R e δ de modo a escrever a expressão dada na forma $u = R\cos(\omega_0 t - \delta)$

    (a) $u = 3\cos(2t) + 4\sin(2t)$

    (b) $u = -\cos(t) + \sqrt{3}\sin(t)$

    (c) $u = 4\cos(3t) - 2\sin(3t)$

    (d) $u = -2\cos(\pi t) - 3\sin(\pi t)$

12. Um corpo, com peso de 3 lb, estica de 3 in uma mola. Se o corpo for empurrado para cima, contraindo de 1 in a mola, e depois for impulsionado para baixo, com uma velocidade de 2 ft/s, e se não houver resistência do ar, achar a sua posição em qualquer instante t. Determinar a frequência, o período, a amplitude e a fase do movimento.

13. Um circuito LC em série tem um capacitor de $0,25\text{x}10^{-6}F$ e um indutor de 1 H. Se a carga inicial do capacitor for de $10^{-6}C$, e se a corrente inicial for nula, achar a carga no capacitor em qualquer instante t.

14. Resolva a equação diferencial dada mediante uma série de potências em torno de um dado ponto x_0. Ache a relação de recorrência, e os quatro primeiros termos de cada uma das duas soluções linearmente independentes (a menos que a série termine num termo de ordem mais baixa). Se for possível, ache o termo geral de cada solução.

    (a) $y'' - y = 0,\ \ x_0 = 0$

    (b) $y'' - xy' - y = 0,\ \ x_0 = 0$

    (c) $y'' - xy' - y = 0,\ \ x_0 = 1$

    (d) $y'' + k^2x^2y = 0,\ \ x_0 = 0,\ \ k$ constante.

    (e) $(1-x)y'' + y = 0,\ \ x_0 = 0$

    (f) $xy'' + y' + xy = 0,\ \ x_0 = 1$

15. Consideremos o problema de valor inicial $y' = \sqrt{1-y^2},\ \ y(0) = 0$.

    (a) Mostrar que $y = \sin(x)$ é solução deste problema de valor inicial.

    (b) Procurar uma solução do problema de valor inicial na forma de uma série de potências em torno do ponto $x = 0$. Achar os coeficientes até o termo em x^3 na série.

16. Em cada item abaixo, transforme a equação difrencial dada em um sistema de equações diferencias de primeira ordem.

    (a) $v'' + \frac{1}{2}v' + 2v = 0$

(b) $v'' + \frac{1}{2}v' + 2v = 3sen(t)$

(c) $v^{(4)} - v = 0$

17. Sistemas de equações diferenciais de primeira ordem, podem, às vezes, ser transformados em uma única equaçõa de ordem mais alta. Considere o sistema

$$x_1' = -2x_1 + x_2, \quad x_2' = x_1 - 2x_2$$

(a) Resolva a primeira equação para x_2 e substitua na segunda equação, obtendo assim, uma equação de segunda ordem para x_1. Resolva a equação obtida e determine x_2.

(b) Encontre a solução do sistema dado que também satisfaz as condições $x_1(0) = 2$ e $x_2(0) = 3$.

(c) Faça os itens (a) e (b) para os sistemas

(i) $x_1' = 3x_1 - 2x_2, \quad x?_2 = 2x_1 - 2x_2$, com $x_1(0) = 3$ e $x_2(0) = \frac{1}{2}$.

(ii) $x_1' = 2x_2, \quad x_2' = -2x_1$, com $x_1(0) = 3$ e $x_2(0) = 4$.

18. Use o método de variação de parâmetros para mostrar que

$$y(t) = c_1cos(t) + c_2sen(t) + \int_0^t f(s)sen(s-t)ds$$

é uma solução geral da equação diferencial

$$y'' + y = f(t),$$

onde f é uma função contínua sopbre $\mathbb{R}$.

19. Resolva as seguintes equações de Cauchy-Euler:

(a) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$

(b) $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$

(c) $(x+1)^2y'' + 3(x+1)y' + \frac{3}{4}y = 0$

20. Em cada item abaixo, transforme a equação dada em um sistema de equações de primeira ordem.

(a) $t^2u'' + tu' + (t^2 - \frac{1}{4})u = 0$

(b) $u'' + \frac{1}{2}u' + 2u = 3sen(t)$

(c) $u^{(4)} - u = 0$

(d) $u'' + p(t)u' + q(t)u = g(t), \quad u(0) = u_o, \quad u'(0) = u_0'$.

21. Em cada item abaixo, encontre a solução do sistema de equações dado e descreva o comportamento destas soluções quando $t \to \infty$.

(a)

$$X' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} X$$

(b)

$$X' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X$$

(c)

$$X' = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} X$$

(d)

$$X' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} X$$

22. Em cada item abaixo, encontre a solução do PVI dado e descreva o comportamento da solução quando $t \to \infty$.

(a)

$$X' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$