27. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} [2(0{,}1)^n + (0{,}2)^n]$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$

30. $\sum_{k=1}^{\infty} (\cos 1)^k$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{3}{5^n} + \frac{2}{n}\right)$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n} + \frac{1}{n(n+1)}\right)$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$

35-40 Determine se a série é convergente ou divergente expressando s_n como uma soma telescópica (como no Exemplo 6). Se for convergente, encontre sua soma.

35. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+4n+3}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+3)}$

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$

39. $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/n} - e^{1/(n+1)})$

40. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n^2} - \cos \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

41-46 Expresse o número como uma razão de inteiros.

41. $0{,}\overline{2} = 0{,}2222\ldots$

42. $0{,}\overline{73} = 0{,}73737373\ldots$

43. $3{,}\overline{417} = 3{,}417417417\ldots$

44. $6{,}2\overline{54} = 6{,}2545454\ldots$

45. $0{,}\overline{123456}$

46. $7{,}\overline{12345}$

47-51 Encontre os valores de x para os quais a série converge. Calcule a soma da série para esses valores de x.

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$

48. $\sum_{n=1}^{\infty} (x-4)^n$

49. $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$

50. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n}$

51. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^n x}{2^n}$

52. Vimos que a série harmônica é uma série divergente cujos termos tendem a 0. Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

também tem essa propriedade.

SCA **53-54** Use o comando de frações parciais em seu SCA para encontrar uma expressão conveniente para a soma parcial; então utilize essa expressão para encontrar a soma da série. Verifique sua resposta usando o SCA para somar a série diretamente.

53. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{(n^2+n)^3}$

54. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-n}$

55. Se a n-ésima soma parcial de uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for

$$s_n = \frac{n-1}{n+1}$$

encontre a_n e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

56. Se a n-ésima soma parcial de uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for $s_n = 3 - n2^{-n}$, encontre a_n e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

57. Quando o dinheiro é gasto em produtos e serviços, aqueles que o recebem também gastam uma parte dele. As pessoas que recebem parte do dinheiro gasto duas vezes gastarão uma parte, e assim por diante. Os economistas chamam essa reação em cadeia de *efeito multiplicador*. Em uma comunidade hipotética isolada, o governo local começa o processo gastando \$ D. Suponha que cada pessoa que recebe o dinheiro gasto gaste $100c\%$ e economize $100s\%$ do dinheiro que recebeu. Os valores de c e s são denominados *propensão marginal a consumir* e *propensão marginal a economizar* e, é claro, $c + s = 1$.

(a) Seja S_n o gasto total que foi gerado depois de n transações. Encontre uma equação para S_n.

(b) Mostre que $\lim_{n\to\infty} S_n = kD$, onde $k = 1/s$. O número k é chamado *multiplicador*. Qual é o multiplicador se a propensão marginal para consumir for 80%?

Observação: O governo federal usa esse princípio para justificar o gasto deficitário. Os bancos usam esse princípio para justificar o empréstimo de uma grande porcentagem do dinheiro que recebem em depósitos.

58. Uma certa bola tem a seguinte propriedade: cada vez que cai a partir de uma altura h em uma superfície dura e nivelada, ela volta até uma altura rh, onde $0 < r < 1$. Suponha que a bola seja solta a partir de uma altura inicial de H metros.

(a) Supondo que a bola continua a pular indefinidamente, calcule a distância total que ela percorre. (Use o fato de que a bola cai $\frac{1}{2}gt^2$ metros em t segundos.)

(b) Calcule o tempo total que a bola pula.

(c) Suponha que, cada vez que a bola atingir a superfície com velocidade v, ela rebaterá com velocidade $-kv$, onde $0 < k < 1$. Quanto tempo levará para a bola parar?

59. Qual é o valor de c se

$$\sum_{n=2}^{\infty} (1+c)^{-n} = 2$$

60. Encontre o valor de c tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nc} = 10$$

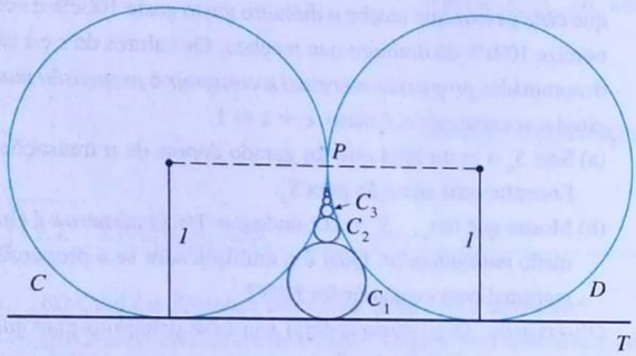
61. No Exemplo 7 mostramos que a série harmônica é divergente. Aqui, esboçamos outro método, que faz uso do fato que $e^x > 1 + x$ para qualquer $x > 0$. (Veja o Exercício 4.3.76, no Volume I.)

Se s_n for a n-ésima soma parcial da série harmônica, mostre que $e^{s_n} > n + 1$. Por que isto implica que a série harmônica é divergente?

62. Trace as curvas $y = x^n$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ na mesma tela. Encontrando as áreas entre as curvas sucessivas, dê uma demonstração geométrica do fato, mostrado no Exemplo 6, de que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

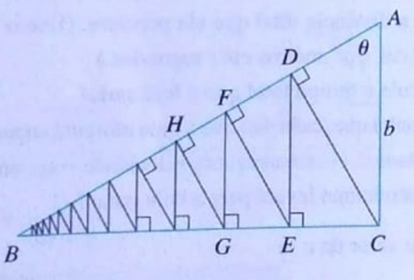
63. A figura exibe dois círculos C e D de raio 1 que se tocam em P. T é uma reta tangente comum; C_1 é o círculo que toca C, D e T; C_2 é o círculo que toca C, D e C_1; C_3 é o círculo que toca C, D e C_2. Esse procedimento pode continuar indefinidamente e produzir uma sequência infinita de círculos $\{C_n\}$. Encontre uma expressão para o diâmetro de C_n e então forneça outra demonstração geométrica do Exemplo 6.



64. É dado um triângulo ABC com $\angle A = \theta$ e $|AC| = b$. CD é desenhado perpendicularmente a AB, DE é desenhado perpendicularmente a BC, $EF \perp AB$, e esse processo continua indefinidamente, como mostrado na figura. Calcule o comprimento total de todas as perpendiculares

$$|CD| + |DE| + |EF| + |FG| + \cdots$$

em termos de b e θ.



65. O que está errado com o seguinte cálculo?

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 + 0 + \cdots \\ &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \\ &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1 \end{aligned}$$

(Guido Ubaldo pensou que isso provava a existência de Deus, porque "alguma coisa tinha sido criada do nada".)

66. Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \neq 0$) seja uma série convergente. Demonstre que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ é uma série divergente.

67. Demonstre a parte (i) do Teorema 8.

68. Se $\sum a_n$ for divergente e $c \neq 0$, mostre que $\sum ca_n$ é divergente.

69. Se $\sum a_n$ for convergente e $\sum b_n$, divergente, mostre que a série $\sum (a_n + b_n)$ é divergente. [*Sugestão:* Argumente por contradição.]

70. Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ forem ambas divergentes, $\sum (a_n + b_n)$ é necessariamente divergente?

71. Suponha que uma série $\sum a_n$ tenha termos positivos e suas somas parciais s_n satisfaçam a desigualdade $s_n \leqslant 1\,000$ para todo n. Explique por que $\sum a_n$ deve ser convergente.

72. A sequência de Fibonacci foi definida na Seção 11.1 pelas equações

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad n \geqslant 3$$

Mostre que cada uma das afirmações a seguir é verdadeira.

(a) $\dfrac{1}{f_{n-1} f_{n+1}} = \dfrac{1}{f_{n-1} f_n} - \dfrac{1}{f_n f_{n+1}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_{n-1} f_{n+1}} = 1$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n}{f_{n-1} f_{n+1}} = 2$

73. O **conjunto de Cantor**, cujo nome é uma homenagem ao matemático alemão Georg Cantor (1845-1918), é construído como a seguir. Começamos com o intervalo fechado $[0, 1]$ e removemos o intervalo aberto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Isso nos leva a dois intervalos, $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Dividimos novamente cada intervalo em três e removemos cada terço intermediário aberto. Quatro intervalos permanecem, e novamente repetimos o processo. Continuamos esse procedimento indefinidamente, em cada passo removendo o terço do meio aberto de cada intervalo que permanece do passo anterior. O conjunto de Cantor consiste nos números em $[0, 1]$ que permanecem depois de todos estes intervalos terem sido removidos.

(a) Mostre que o comprimento total de todos os intervalos que foram removidos é 1. Apesar disso, o conjunto de Cantor contém infinitos números. Dê exemplos de alguns números no conjunto de Cantor.

(b) O **tapete de Sierpinski** é o correspondente bidimensional do conjunto de Cantor. Ele é construído pela remoção do subquadrado central de um quadrado de lado 1 dividido em nove subquadrados. A etapa seguinte consiste em remover os subquadrados centrais dos oito quadrados menores que permaneceram, e assim por diante. (A figura apresenta as três primeiras etapas da construção.) Mostre que a soma das áreas dos quadrados removidos é 1. Isso implica que o tapete de Sierpinski tem área 0.

Como $s_n \leqslant M$ para todo n, a sequência $\{s_n\}$ é limitada superiormente. Além disso,

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqslant s_n$$

já que $a_{n+1} = f(n+1) \geqslant 0$. Então, $\{s_n\}$ é uma sequência crescente limitada, e assim, ela é convergente pelo Teorema da Sequência Monótona (11.1.12). Isso significa que $\sum a_n$ é convergente.

(ii) Se $\int_1^\infty f(x)\,dx$ for divergente, então $\int_1^n f(x)\,dx \to \infty$ quando $n \to \infty$ porque $f(x) \geqslant 0$. Mas (5) nos dá

$$\int_1^n f(x)\,dx \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} a_i = s_{n-1}$$

e, dessa forma, $s_{n-1} \to \infty$. Isso implica que $s_n \to \infty$ e assim $\sum a_n$ diverge. □

11.3 EXERCÍCIOS

1. Faça um desenho para mostrar que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1.3}} < \int_1^\infty \frac{1}{x^{1.3}}\,dx$$

O que você pode concluir sobre a série?

2. Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente para $x \geqslant 1$ e $a_n = f(n)$. Desenhando uma figura, coloque em ordem crescente as três quantidades

$$\int_1^6 f(x)dx \qquad \sum_{i=1}^{5} a_i \qquad \sum_{i=2}^{6} a_i$$

3-8 Use o Teste da Integral para determinar se a série é convergente ou divergente.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+4}}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1}$

9-26 Determine se a série é convergente ou divergente.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{0.85}}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^{-1.4} + 3n^{-1.2})$

11. $1 + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{64} + \dfrac{1}{125} + \cdots$

12. $1 + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{3}} + \dfrac{1}{4\sqrt{4}} + \dfrac{1}{5\sqrt{5}} + \cdots$

13. $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9} + \cdots$

14. $\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{11} + \dfrac{1}{14} + \dfrac{1}{17} + \cdots$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 - 2\sqrt{n}}{n^3}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n(n+1)}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 5}$

21. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

22. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$

24. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+1}$

27-30 Encontre os valores de p para os quais a série é convergente.

27. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$

28. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n[\ln(\ln n)]^p}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$

31. A função zeta de Riemann ζ é definida por

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

e é usada em teoria de números para estudar a distribuição de números primos. Qual é o domínio de ζ?

33-36 Use a soma dos dez primeiros termos para aproximar a soma da série. Estime o erro.

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^3}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n}$

37. O significado da representação decimal de um número $0.d_1d_2d_3\ldots$ (onde o algarismo d_i é um dos números $0, 1, 2, \ldots, 9$) é que

$$0.d_1d_2d_3d_4\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_4}{10^4} + \cdots$$

Mostre que essa série sempre converge.

38. Para quais valores de p a série $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n^p \ln n)$ converge?

39. Demonstre que, se $a_n \geqslant 0$ e $\sum a_n$ convergir, então $\sum a_n^2$ também converge.

40. (a) Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos e $\sum b_n$ seja convergente. Demonstre que se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

então, $\sum a_n$ também é convergente.

(b) Use a parte (a) para mostrar que as séries convergem.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}\, e^n}$

41. (a) Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos e que $\sum b_n$ seja divergente. Demonstre que se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

então, $\sum a_n$ também é divergente.

(b) Use a parte (a) para mostrar que as séries divergem.

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

42. Dê um exemplo de um par de séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ com termos positivos para as quais $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = 0$ e $\sum b_n$ diverge, mas $\sum a_n$ converge. (Compare com o Exercício 40.)

43. Mostre que, se $a_n > 0$ e $\lim_{n\to\infty} na_n \neq 0$, então $\sum a_n$ é divergente.

44. Mostre que, se $a_n > 0$ e $\sum a_n$ for convergente, então $\sum \ln(1 + a_n)$ é convergente.

45. Se $\sum a_n$ for uma série convergente com termos positivos, é verdade que $\sum \operatorname{sen}(a_n)$ também será convergente?

46. Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ forem ambas séries convergentes com termos positivos, é verdade que $\sum a_n b_n$ também será convergente?

11.5 SÉRIES ALTERNADAS

Os testes de convergência que estudamos até aqui se aplicam apenas a séries com termos positivos. Nesta seção e na próxima aprenderemos como lidar com séries cujos termos não são necessariamente positivos. De particular importância são as *séries alternadas*, cujos termos se alternam no sinal.

Uma **série alternada** é aquela cujos termos são alternadamente positivos e negativos. Aqui estão dois exemplos:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

Vemos desses exemplos que o n-ésimo termo de uma série alternada é da forma

$$a_n = (-1)^{n-1} b_n \qquad \text{ou} \qquad a_n = (-1)^n b_n$$

onde b_n é um número positivo. (De fato, $b_n = |a_n|$.)

O teste a seguir diz que, se os termos de uma série alternada decrescem para 0 em valor absoluto, então a série converge.

segue, do Teorema 12.4.3(ii), que $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente e que sua soma é $S - R$. Mas isso contradiz a hipótese de que $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente. Logo, $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ é divergente. ∎

EXEMPLO 4 Determine se a série infinita é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{4^n}\right)$$

Solução No Exemplo 3 ficou provado que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n}$ é divergente. Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n}$ é uma série geométrica com $|r| = \frac{1}{4} < 1$, ela é convergente. Assim, pelo Teorema 12.4.4, a série dada é divergente.

Se ambas as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ forem divergentes, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ poderá ou não ser convergente. Por exemplo, se $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n}$, então $a_n + b_n = \frac{2}{n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}$ será divergente. Mas, se $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = -\frac{1}{n}$, então $a_n + b_n = 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} 0$ será convergente.

EXERCÍCIOS 12.4

Nos Exercícios de 1 a 22, determine se a série é convergente ou divergente. Se for convergente, ache a sua soma.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2}$
2. $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n-1}$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2n}$
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3n}$
5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2^n}$
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n}$
7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3}\left(\frac{5}{7}\right)^n$
8. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n$
9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left[\operatorname{sen}\frac{4}{n}\pi + 3\right]}{4^n}$
10. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left[\cos\frac{1}{n}\pi + 1\right]}{2^n}$
11. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2^n}\right)$
12. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{3n}\right)$
13. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$
14. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n}\right)$
15. $\sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-n} + e^n)$
16. $\sum_{n=1}^{+\infty} (2^{-n} + 3^n)$
17. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n}\right)$
18. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2n} - \frac{2}{3n}\right)$
19. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2^n} - \frac{2}{3^n}\right)$
20. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{4^n} + \frac{4}{5^n}\right)$
21. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} + 2\right)$
22. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{5^n}$
23. Dê um exemplo para mostrar que mesmo sendo $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergentes, é possível que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ seja convergente.
24. Prove o Teorema 12.4.3.

12.5 SÉRIES INFINITAS DE TERMOS POSITIVOS

Se todos os termos de uma série infinita forem positivos, a seqüência das somas parciais será crescente. Assim sendo, dos Teoremas 12.2.6 e 12.2.9, segue imediatamente o teorema a seguir.

12.5.1 TEOREMA Uma série infinita de termos positivos será convergente se e somente se sua seqüência de somas parciais tiver um limitante superior.

Solução Como para valores elevados de n, o número $n^2 + 2$ está próximo do número n^2, então o número $1/(n^2+2)^{1/3}$ está próximo do número $1/n^{2/3}$. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$ é divergente, pois é uma série p com $p = \frac{2}{3} < 1$. Aplicando o teste de comparação com limite a $u_n = \frac{1}{(n^2+2)^{1/3}}$ e $v_n = \frac{1}{n^{2/3}}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{(n^2+2)^{1/3}}}{\dfrac{1}{n^{2/3}}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2/3}}{(n^2+2)^{1/3}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2}{n^2+2}\right)^{1/3}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1+\dfrac{2}{n^2}}\right)^{1/3}$$

$$= 1$$

Logo, a série dada é divergente.

EXERCÍCIOS 12.5

Nos Exercícios de 1 a 26, determine se a série dada é convergente ou divergente.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{4n^3+1}$
5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+1}{2n^2+5}$
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt{n^3+n}}$
7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 n}{3^n}$
8. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$
9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4n}}$
10. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^2}$
11. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$
12. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}+1}$
13. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{5n^2+3}$
14. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)!}$
15. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n)!}$
16. $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{n}$
17. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\operatorname{cosec} n|}{n}$
18. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$
19. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$
20. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$
21. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2n-\sqrt{n}}$
22. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$
23. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2+2}$
24. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n - \cos n}$
25. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)!}$
26. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+4)}$

27. Use a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}$ para mostrar que o Teorema 12.5.1 não se aplica a uma série infinita de termos positivos e negativos; isto é, mostre que a seqüência das somas parciais tem um limitante superior, mas a série não é convergente.

28. Suponha que f seja uma função tal que $f(n) > 0$, para todo n inteiro positivo. Além disso, suponha que se p for um número positivo qualquer, $\lim_{n\to+\infty} n^p f(n)$ existirá e será positivo. Prove que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ é convergente se $p > 1$, e divergente se $0 < p \leqslant 1$.

29. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são duas séries convergentes de termos positivos, use o teste de comparação com limite para provar que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ também é convergente.

30. Prove o Teorema 12.5.3(ii).

31. Prove o Teorema 12.5.3(iii).

Solução A função f definida por

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$$

é contínua e tem valores positivos para todo $x \geqslant 2$. Além disso, se $2 \leqslant x_1 < x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$; assim, f é decrescente para todo $x \geqslant 2$. Portanto, o teste da integral pode ser aplicado.

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} &= \lim_{b \to +\infty} \int_2^b (\ln x)^{-1/2} \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{b \to +\infty} \left[2\sqrt{\ln x}\right]_2^b \\ &= \lim_{b \to +\infty} \left[2\sqrt{\ln b} - 2\sqrt{\ln 2}\right] \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Assim sendo, a série dada é divergente.

EXERCÍCIOS 12.6

Nos Exercícios de 1 a 8, use o teste da integral para determinar se a série dada é convergente ou divergente.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}$ **2.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(3n+5)^2}$ **3.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^{3/2}}$

4. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^2-2}$ **5.** $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{4}{n^2-4}$ **6.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+3}{(n^2+3n)^2}$

7. $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-5n}$ **8.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{n^4+1}$

Nos Exercícios de 9 a 22, determine se a série dada é convergente ou divergente.

9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$ **10.** $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ **11.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{tg}^{-1} n}{n^2+1}$

12. $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n^2}$ **13.** $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2e^{-n}$ **14.** $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n}$

15. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ **16.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{cotg}^{-1} n$ **17.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{cosech} n$

18. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\operatorname{tg}^{-1} n}}{n^2+1}$ **19.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$ **20.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sech}^2 n$

21. $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+3}{n}\right)$ **22.** $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$

23. Prove que a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ é convergente se e somente se $p > 1$.

24. Prove que a série $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)[\ln(\ln n)]^p}$ é convergente se e somente se $p > 1$.

25. Prove que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ é convergente se e somente se $p > 1$.

26. Se s_k for a k-ésima soma parcial da série harmônica, prove que $\ln(k+1) < s_k < 1 + \ln k$.
(*Sugestão:* $\frac{1}{m+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{m}$ se $0 < m \leqslant x \leqslant m+1$. Integre cada membro da desigualdade de m a $m+1$; faça m assumir sucessivamente os valores $1, 2, \ldots, n-1$, e some os resultados).

27. Use o resultado do Exercício 26 para estimar a soma

$$\sum_{m=50}^{100} \frac{1}{m} = \frac{1}{50} + \frac{1}{51} + \ldots + \frac{1}{100}$$

12.7 SÉRIES ALTERNADAS

Nesta secção e na seguinte consideraremos séries infinitas constando tanto de termos negativos como positivos. Discutiremos primeiramente um tipo de série cujos termos são alternadamente positivos e negativos — as chamadas *séries alternadas*.