FIS 224 – FÍSICA EXPERIMENTAL A

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

CONSTRUÇÃO E LINEARIZAÇÃO DE GRÁFICOS

1. INTRODUÇÃO

Frequentemente, em experiências de física, medimos os valores de uma dada grandeza em função da variação nos valores de outra grandeza. Como resultado, temos uma coleção de medidas relacionando ambas as grandezas, o que gera uma tabela de dados. Entretanto, suponha que também desejamos conhecer o comportamento de outros valores, os quais não aparecem na tabela de dados. Nesse caso um procedimento científico consiste em apresentar os dados da tabela na forma de um gráfico (***método gráfico***). Um gráfico tem a grande vantagem de tornar visível como a variação de uma grandeza afeta a outra. Assim sendo, um gráfico, frequentemente, nos permite determinar a dependência funcional entre as variáveis envolvidas e assim poder estimar por interpolação ou extrapolação outros valores que não tenham sido dados pela tabela. Para tal fim, ligamos os pontos experimentais por uma curva suave e ***através da análise gráfica*** (análise do gráfico) obtemos a relação matemática entre as variáveis. Trata-se de uma poderosa ferramenta de análise de dados experimentais, a qual tem levado à formulação de novas leis físicas. Além disso, o método gráfico é extremamente útil na comparação de dados teóricos e experimentais, pois qualquer discrepância entre a teoria e o experimento é facilmente observada.

2. CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS

Etapas na construção de um gráfico:

a) Em geral, em um gráfico, a grandeza representada em cada eixo recebe o nome de variável. O primeiro passo, a seguir, é identificar as variáveis (grandezas) cujos valores serão lançados em cada eixo do gráfico. ***Assim os eixos devem ser identificados com a grandeza e sua unidade (indicada por vírgula ou parênteses)***. O eixo horizontal é chamado de abscissa e nele lança-se os valores numéricos da variável independente. No eixo vertical, ou ordenada, lança-se os valores numéricos da variável dependente.

b) ***A seguir devemos escolher escalas apropriadas para cada eixo, de acordo com o número de algarismos significativos dos dados.*** Como a escolha da escala para cada eixo vai depender dos algarismos significativos dos valores numéricos da variável correspondente, as escalas adotadas para cada eixo, em geral, serão diferentes. No entanto, uma boa escolha das escalas deve permitir que todos os pontos experimentais fiquem contidos na região do papel delimitada pelos dois eixos de forma que o gráfico não fique comprimido em um canto. ***As escalas devem ser marcadas nos eixos a intervalos iguais e com o número correto de algarismos significativos.*** Não se deve marcar nada entre os intervalos, nem mesmo os valores dos pontos experimentais, pois são os intervalos que irão nos auxiliar na visualização da ordem de grandeza de ditos valores, como ilustrado na Figura 2.1.

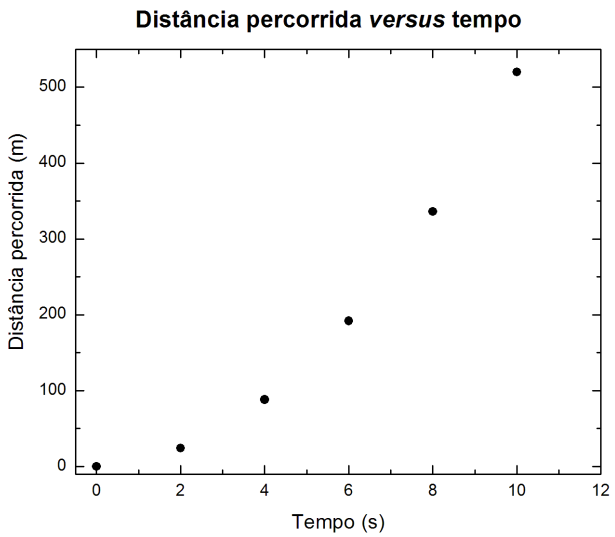


Figura 2.1- Modo de se indicar os intervalos e os pontos experimentais em um gráfico.

c) ***Lançar os valores numéricos dos pares de valores contidos na tabela de dados***. Cada par de valores da tabela gera um ponto no gráfico (ponto experimental), é costume indicá-los por uma pequena cruz ou um pequeno círculo. Para tal fim devemos determinar o ponto de interseção entre as retas paralelas aos eixos traçadas a partir dos valores numéricos nos eixos correspondentes.

d) A última etapa compreende a ***análise gráfica*** da seqüência dos pontos experimentais, a parte mais importante do trabalho experimental.

2.1 CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS EM UMA ESCALA LINEAR (PAPEL MILIMETRADO)

Uma escala linear é construída de tal modo que a distância entre marcas sucessivas das escalas, ao longo de cada eixo, é constante. O papel milimetrado é um exemplo de escala linear.

2.1.1 ESCALA

Ao construir um gráfico numa escala linear, devemos escolher escalas apropriadas para cada eixo, isto é, devemos escolher um determinado comprimento, sobre o eixo, para representar um dado valor da grandeza. Assim, por exemplo, numa folha de papel quadriculado ou milimetrado, como ilustrado na Figura 2.2, que são exemplos de escalas lineares, cada unidade de comprimento passará a corresponder a um dado valor da grandeza. O parâmetro de correspondência chama-se de ***fator de escala*** *e*. As dimensões típicas de um papel milimetrado são 180 mm x 280mm.

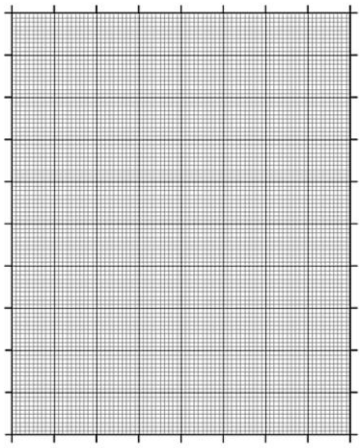


Figura 2.2- Exemplo de um papel com escala linear (papel milimetrado).

Segue abaixo um procedimento padrão para se determinar o fator de escala:

Seja x a grandeza cujos valores numéricos serão lançados num dos eixos do gráfico, vamos supor, por exemplo, no eixo de 180 mm do papel milimetrado. Primeiro identificamos, na tabela de dados, o menor valor de x, denotando-o x_0, o qual é tomado como o referencial no eixo (em alguns casos é conveniente considerar x_0 igual a zero). Neste caso, o fator de escala pode ser obtido pela seguinte regra de três:

$$180 \text{ mm corresponde a } (x_{max} - x_0)$$
$$1 \text{ mm corresponde a } (x_{max} - x_0)/180 \text{ mm}$$

Note: Como mencionado anteriormente, em muito casos é mais conveniente considerar x_0 igual a zero

Exemplo :

Construa uma escala linear em um segmento de reta de 150 mm, para representar os tempos x listados na tabela abaixo. Considere intervalos de 10 segundos. x (s)

x (s)	2	4	8	14	22	30

a) Cálculo do fator de escala:

1. Partindo do zero: x_{max}= 30 s e façamos x_0 = 0 (escolha arbitrária).

150 mm corresponde a 30 unidades de segundos

1 mm corresponde a 30 unidades de segundos /150 mm

e = 30 unidades de segundos /150 mm = 0,2 unidades de segundos/mm

Esse fator de escala nos informa que cada 10 mm do papel milimetrado corresponderá a 2 s.

2. Não partindo do zero: x_{max}= 30 s e x_0 = 2 s (escolha arbitrária).

150 mm corresponde a 28 unidades de segundos

1 mm corresponde a 28 unidades de segundos /150 mm

e = 28 unidades de segundos /150 mm = 0,1867 unidades de segundos/mm

b) Neste exemplo teremos, portanto, a seguinte escala linear:

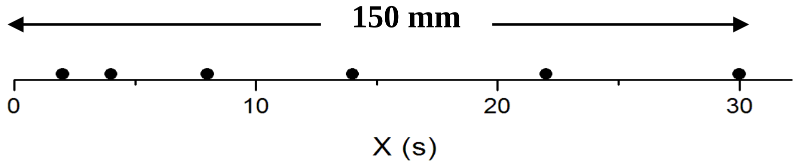


Figura 2.3- Exemplo de uma escala linear.

Algumas informações úteis que devem ser seguidas ao se escolher a melhor escala de um gráfico:

a) Procurar sempre utilizar uma escala limpa e fácil de ser lida, ou seja, escolha uma escala que não sejam necessários muitos cálculos para se encontrar a localização dos pontos no gráfico. Uma boa escala é aquela que além de ocupar bem o papel, permite encontrar facilmente a localização dos pontos no gráfico. Logo, para facilitar, tanto para quem faz o gráfico, quanto para quem vai lê-lo, utilize uma escala que seja bem clara para todo mundo. Mesmo que isso signifique não usar todo o papel milimetrado.

b) A escala utilizada em um eixo é totalmente independente da escala usada no outro.

c) Sempre escreva no eixo, a escala que está sendo utilizada.

3. ANÁLISE GRÁFICA

A análise gráfica consiste em descobrir a dependência funcional entre as variáveis plotadas nos eixos; isto é, achar a fórmula matemática que descreva a sua inter-relação. A análise gráfica permite, em muitos casos, descobrir a lei que rege um fenômeno físico. O conhecimento dessas leis é muito importante para a elaboração de modelos teóricos que expliquem o fenômeno estudado. A seguir, considerando a dependência funcional mais simples entre duas variáveis que é a relação linear, este será o primeiro caso a ser discutido.

3.1 RELAÇÃO LINEAR

Uma relação linear entre as variáveis x e y obedece à seguinte equação:

$$y = a\,x + b,$$

onde a e b são constantes. *O gráfico resultante é uma reta*. A interseção da reta com o eixo *y* fornece o valor do coeficiente linear da reta, b, pois quando $x = 0$, $y = b$. Já o coeficiente angular, a, exprime a taxa de variação da variável dependente em relação à variável independente, $a=\Delta y/\Delta x$. ***O coeficiente angular não deve ser confundido com a tangente do ângulo formado pela reta com o eixo horizontal.*** Observe que se você mudar as escalas, muda o ângulo também, entretanto o coeficiente angular não muda. No exemplo ilustrado na Figura 2.4 a escala no eixo Y foi mudada do caso (a) para (b). Compare o valor do coeficiente angular com a tangente dos ângulos em cada situação. São iguais?

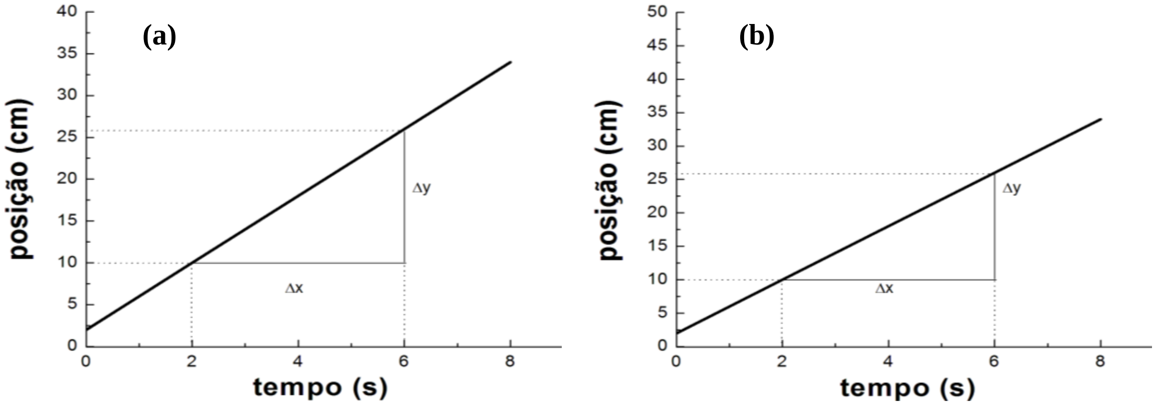


Figura 2.4 - Gráficos da posição x em função do tempo transcorrido, num movimento com velocidade constante. Ambas as figuras têm o mesmo coeficiente angular, $a=\Delta y/\Delta x$, que neste caso corresponde ao valor da velocidade do móvel. Entretanto, note que as tangentes são diferentes.

No gráfico, a seqüência dos pontos experimentais irá sugerir uma reta. Por se tratar de dados experimentais podemos esperar uma pequena dispersão em torno de uma reta representativa (reta média). Estas dispersões refletem o grau de incerteza associado a cada ponto e é costume indicá-las através de barras de incertezas. *Portanto, neste caso, o objetivo da análise gráfica é determinar a equação da reta média (relação analítica ente as grandezas y=ax+b). Os parâmetros a e b devem ser calculados através da* ***melhor reta visual*** *ou do método de mínimos quadrados (**método da regressão linear**).*

3.2 MELHOR RETA VISUAL

Uma maneira direta de analisar os dados em um gráfico linear é traçar manualmente uma reta que visualmente melhor se ajuste aos pontos do gráfico, obter o ponto que a reta intercepta o eixo vertical, b, e calcular a inclinação desta reta utilizando a expressão $a=\Delta y/\Delta x$, onde os valores de Δx e Δy **são sempre calculados utilizando pontos da reta traçada, e nunca pontos da tabela de dados.** É importante observar que não é necessário que qualquer um dos pontos experimentais esteja sobre a reta traçada.

Exemplo: Análise gráfica através da melhor reta visual

A tabela a segir mostra resultados experimentais (fictícios) obtidos em uma aula de laboratório, da posição de um determinado objeto(x) em função do tempo (t).

t (s)	**x (m)**
1,6	4,4
5,8	17,5
9,9	33,7
16,1	42,0
20,1	53,3

Com esses dados foi possível obter o seguinte gráfico:

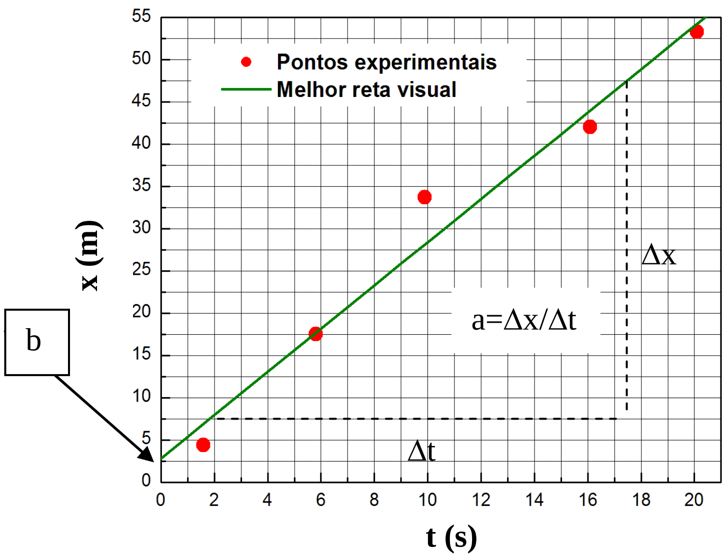


Figura 2.5 - Gráficos da posição x em função do tempo transcorrido, num movimento com velocidade constante.

Análise gráfica:

1) Para obter a inclinação da reta, deve-se usar pontos da reta e não os pontos experimentais. (Para essa reta a= 2,6 m/s).
2) O ponto que a reta intercepta o eixo posição quando o tempo é igual a zero, nos fornece o valor de b. (Para essa reta b= 2,7 m).
3) Sempre coloque unidades em a e b.
4) A relação analítica obtida ente x e t, será portanto: x=(2,6 m/s)t+2,7 m
5) A inclinação da reta ***sempre*** nos traz um resultado físico. Neste caso, a inclinação representa a velocidade do que foi medido. Portanto, a = velocidade = 2,6 m/s.

6) O coeficiente b nem sempre possui um significado físico, pois em alguns casos ele pode estar relacionado a erros experimentais. Nesse exemplo, b possui um significado físico. O gráfico nos diz que no tempo zero segundos, o objeto em estudo se encontrava a 2,7 m da origem.

3.3 MÉTODO DA REGRAÇÃO LINEAR

Aplicaremos o método de regressão linear para obter a expressão analítica de uma relação linear entre as variáveis x e y. Sendo assim, procuramos uma equação da forma:

$$y = a\,x + b. \qquad (1)$$

que é a equação da reta média. O método consiste em minimizar os desvios (dispersões) em torno da reta média. Portanto, devemos minimizar a seguinte quantidade:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a x_i + b) \right]^2 , \qquad (2)$$

onde n é o número de medidas (número de pares de valores na tabela de dados). Minimizar S corresponde a fazer $\partial S/\partial a = 0$ e $\partial S/\partial b = 0$, o que gera as duas equações:

$$b\sum x_i + a\sum x_i^2 = \sum x_i y_i \quad \text{e} \qquad (3)$$

$$nb + a\sum x_i = \sum y_i \ . \qquad (4)$$

Resolvendo simultaneamente (3) e (4), obtemos o valor dos coeficientes da reta (1):

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \quad \text{e} \qquad (5)$$

$$b = \frac{\left(\sum y_i\right)\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i y_i\right)\left(\sum x_i\right)}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} . \qquad (6)$$

As incertezas em *a* e *b*, Δa e Δb, respectivamente, são dadas por

$$\Delta a = \sqrt{\frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}} \qquad \Delta b = \sqrt{\frac{n\sigma^2}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}} , \qquad (7)$$

onde

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (\Delta y_i)^2}{n-2}} \qquad \Delta y_i = y_i - b - a x_i . \qquad (8)$$

Uma outra constante, denominada de **coeficiente de correlação linear** (r), mede o grau do relacionamento linear entre as duas variáveis y e x cuja relação analitica é dada por (1). O valor de r pode ser obtido por meio da equação:

$$r = \frac{n\sum (x_i y_i) - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{\sqrt{\left[n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right]\left[n\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2\right]}} . \qquad (9)$$

- r = 1 $\rightarrow$ Significa uma correlação perfeita positiva entre as duas variáveis, neste caso, y e x. Isto significa que se uma variável aumenta, a outra sempre aumenta. (y e x são diretamente proporcionais).
- r = − 1 $\rightarrow$ Significa uma correlação negativa perfeita entre as duas variáveis. Isto é, se uma aumenta, a outra sempre diminui. (y e x são inversamente proporcionais).
- r = 0 $\rightarrow$ Significa que as duas variáveis não dependem linearmente uma da outra. No entanto, pode existir uma dependência não linear.

Exemplo: Método da regressão linear.

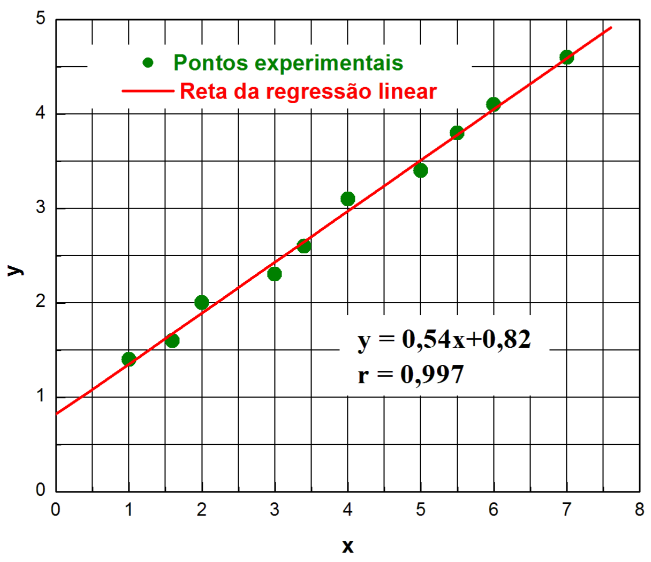
A partir da seguinte tabela de dados, obter y como uma função linear de x usando o método de regressão linear.

x_i	1,0	1,6	2,0	3,0	3,4	4,0	5,0	5,5	6,0	7,0	$\sum x_i = 38{,}5$
y_i	1,4	1,6	2,0	2,3	2,6	3,1	3,4	3,8	4,1	4,6	$\sum y_i = 28{,}9$

Procuramos uma equação da forma y = a x + b. Para isso calcularemos as quantidades indicadas na tabela abaixo.

$x_i\, y_i$	1,40	2,56	4,00	6,90	8,84	12,4	17,0	20,9	24,6	32,2	$\sum x_i y_i = 130{,}8$
x_i^2	1,00	2,56	4,00	9,00	11,6	16,0	25,0	30,3	36,0	49,0	$\sum x_i^2 = 184{,}5$

A seguir determinamos o valor dos coeficientes angular e linear da reta através das equações (5) e (6), com n = 10:



$$a = \frac{(10)(130{,}8)-(38{,}5)(28{,}9)}{(10)(184{,}5)-(38{,}5)^2} = 0{,}54 \quad \text{e}$$

$$b = \frac{(28{,}9)(184{,}5)-(130{,}8)(38{,}5)}{(10)(184{,}5)-(38{,}5)^2} = 0{,}82\,.$$

Obs: Neste caso a e b não possuem unidades pelo fato de x e y também não possuírem.

Logo, a relação procurada é: ***y = 0,54x + 0,82*** .

Figura 2.6 - Gráficos de y em função de x, com a respectiva reta da regressão linear.

Como pode ser observado no gráfico da Figura 2.6 a reta média, reta da regressão linear, não passa necessariamente sobre os pontos no gráfico. Para traçar esta reta, basta substituir alguns valores de x (pelo menos 3) na relação analítica obtida, encontrar os correspondentes valores de y, marcar esses pontos no gráfico e traçar a reta correspondente. O coeficiente de correlação linear obtido foi muito próximo de +1 o que implica em uma correlação linear positiva muito boa entre as duas variáveis y e x. Isto significa que se x aumenta, y também aumenta. Ou seja, y e x são diretamente proporcionais

4. LINEARIZAÇÃO DE GRÁFICOS

Em geral, a relação entre duas grandezas físicas não é linear, e é fundamental descobrir de que tipo é e quais são os parâmetros que a caracterizam. Sabe-se que na relação linear é muito simples o processo de se determinar e associar os parâmetros envolvidos (neste caso o coeficiente linear e angular) a grandezas físicas. Portanto, quando se observa que o gráfico obtido não é uma reta, pode-se linearizá-lo através de uma mudança de variáveis, transformando em retas mesmo curvas aparentemente complexas. ***Este processo de transformar um gráfico curvo em uma reta denomina-se linearização***. Para isso, um certo grau de familiaridade com as representações gráficas das principais funções matemáticas é recomendável, pois deve-se ter uma noção sobre que tipo de função matemática poderia gerar uma curva igual a indicada pela sequência de pontos experimentais no gráfico. Existem duas funções matemáticas especiais que aparecem com bastante frequência em alguns fenômenos físicos, as chamadas funções logarítmicas. Para essas funções foi desenvolvido um tipo de papel que, em vez da escala linear milimetrada, tem-se uma escala logarítmica. Nesse tipo de papel, essas funções resultam diretamente em um gráfico linearizado, o que facilita a determinação das constantes desconhecidas. Vamos discutir aqui como linearizar um gráfico utilizando papel milimetrado e papel com escala logarítmica. Para isso vamos estudar dois tipos de funções que serão bastante vistas em nossos experimentos: função tipo potência ($y = kx^n$) e função do tipo exponencial ($y = k.e^{nx}$), onde k e n são constantes.

4.1 LINEARIZAÇÃO DE GRÁFICOS EM PAPEL MILIMETRADO

Seja um gráfico que sugere uma curva do tipo $y = kx^n$. Suponha que fazendo uma medida de duas grandezas, observamos que a relação entre as duas é dada pela equação:

$$y=3x^2 \qquad (10).$$

Se em um papel milimetrado fizermos o gráfico não de y *versus* x nós não teremos uma reta, como ilustrado na Figura 2.7 (a). Para linearizarmos o gráfico, temos que ter uma função do tipo $y = a\,x + b$ que é a equação de uma reta. Logo, basta fazermos um gráfico com uma nova função:

$$y' = a\,x' + b \qquad (11),$$

onde $x' = x^2$. Esse novo gráfico de y *versus* x^2, como ilustrado na Figura 2.7 (b), estará linearizado e neste gráfico os valores dos coeficientes linear e angular da reta podem ser calculados pelo método da regressão linear ou pela melhor reta visual (como se trata de uma função exata, em ambos os métodos obteremos a=3 e b=0, como era de se esperar). Note que no caso do uso do método da regressão linear deve-se usar o novo $x' = x^2$, ou seja, os coeficientes a e b, devem ser obtidos com as variáveis y e x'.

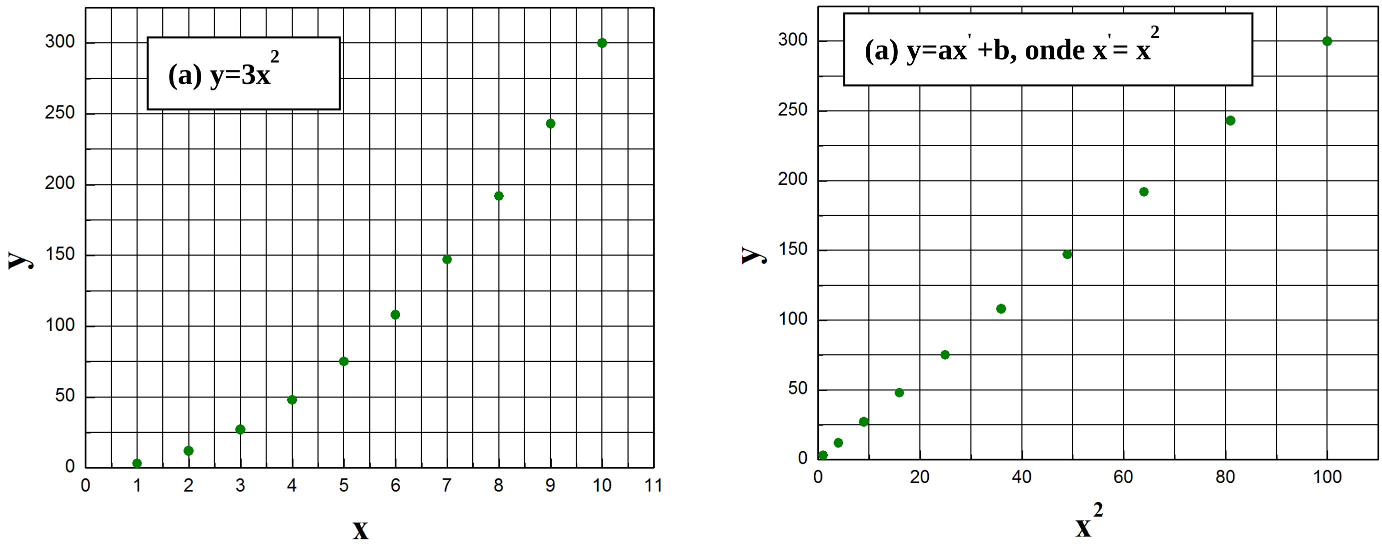


Figura 2.7 - Representação gráfica de **(a)** uma relação tipo potência $y=3x^2$ e **(b)** exemplo de mudança de variável para a linearização do gráfico. Em **(b)**, os coeficientes a e b podem ser obtidos pela melhor reta visual ou regressão linear.

4.2 LINEARIZAÇÃO DE GRÁFICOS EM PAPEL COM ESCALA LOGARÍTMICA

Novamente, seja um gráfico que sugere uma curva do tipo:

$$y = kx^n \;. \qquad (12)$$

Nesse caso, aplicando logaritmo à relação acima, teremos:

$$\log(y) = \log(k) + n\log(x). \qquad (13)$$

Fazendo: $\log(y) = y'$, $\log(k) = b$, $a=n$ e $\log(x) = x'$, obteremos:

$$y' = a\,x' + b, \qquad (14)$$

que é a equação de uma reta. Ou seja, podemos transformar uma relação tipo potência (equação 12) em uma relação linear (equação 14) aplicando o logaritmo. Além do mais, se em um papel milimetrado fizermos o gráfico não de y *versus* x, mas o gráfico de log (y) *versus* log (x) nós teremos uma reta. Essa linearização seria trabalhosa de ser feita utilizando um papel milimetrado, pois necessitaríamos de uma nova tabela com log (y) e log (x), e a partir dessa nova tabela é que teríamos que construir o gráfico linearizado. Para facilitar o nosso trabalho existem papéis que já possuem escala logarítmica na base 10, os papeis mono-log e di-log. No papel **di-log (log-log)** ambos os eixos do papel possuem uma escala logarítmica de base 10, dividida em décadas (cada década multiplica por 10 os valores da década anterior). A Figura 2.8 ilustra um modelo de papel di-log. Em geral o papel di-log tem duas décadas em um dos eixos e três décadas no outro eixo. Note que o papel di-log não começa do ponto (0,0), pois como o papel possui escala logarítmica, ele começa do ponto (1,1) , uma vez que log 1= 0. Numa escala logarítmica as distâncias entre marcas sucessivas não é constante (como numa escala linear) aqui elas são proporcionais às diferenças entre os logaritmos das variáveis. Isto é, a escala logarítmica é feita de tal maneira que a distância entre 1 e 2 é proporcional a (log 2 - log 1); a distância entre 2 e 3 é proporcional a (log 3 - log 2); e assim por diante (*como tarefa observe as escalas numa folha impressa de papel mono-log ou log-log)*. Sendo assim fica evidente que tanto no gráfico mono-log como no log-log o aspecto do gráfico será diferente de quando você usa escalas lineares. Nessa escala, ao colocarmos diretamente os valores de x e y no papel, estamos fazendo com que as distâncias entre sucessivos valores de x e y sejam proporcionais a log (x) e log (y), porque as escalas foram construídas assim.

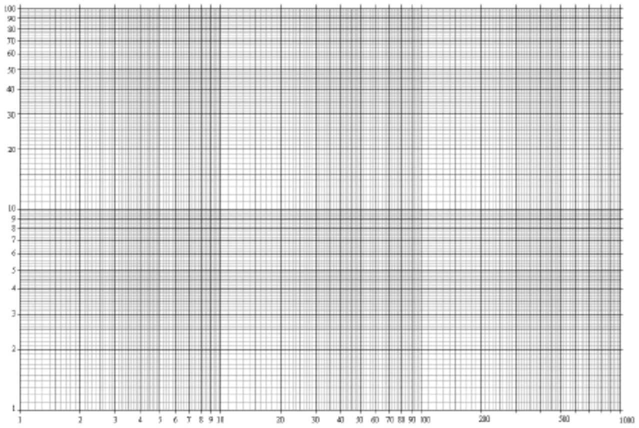


Figura 2.8 - Modelo de papel di-log (log-log).

Após a linearização utilizando o papel di-log ou o papel mono-log, os valores dos coeficientes linear e angular da reta devem ser calculados utilizando a melhor reta visual ou o método de regressão linear, nesse caso considerando-se as novas variáveis log(y) e log(x), como ilustrado na Figura 2.9. (Lembre-se, os coeficientes só podem ser calculados em gráficos já linearizados).

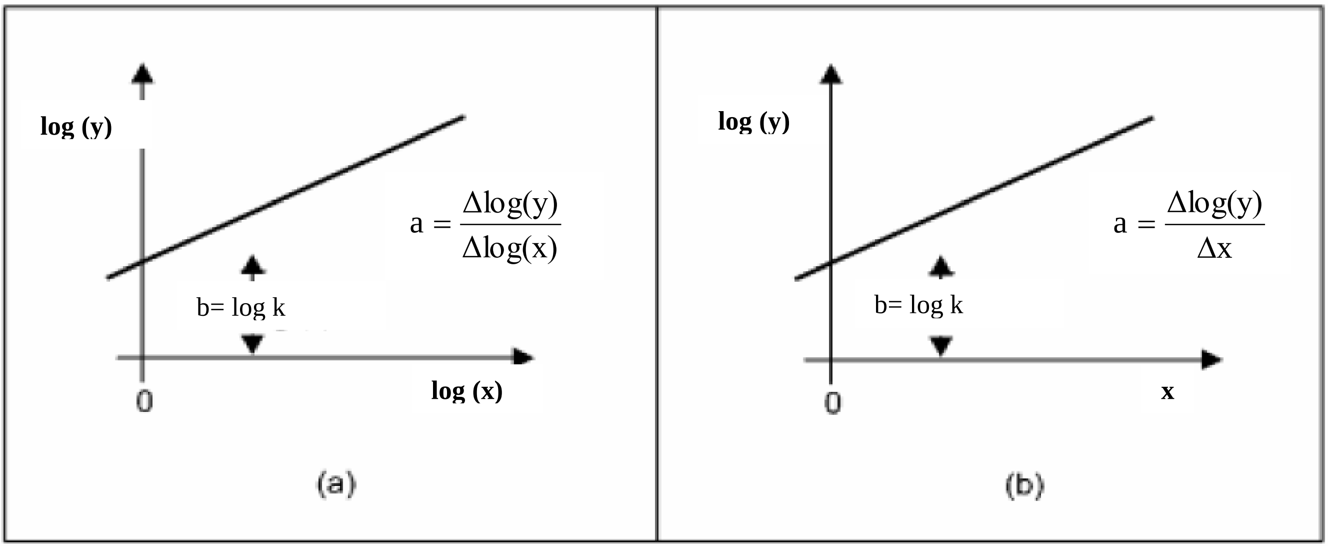


Figura 2.9 - Exemplos de mudança de variáveis na linearização de **(a)** uma relação tipo potência: $y=kx^n$, e **(b)** tipo exponencial: $y = ke^{nx}$.

Como indicado na Figra 2.9 (a) o coeficiente angular da reta exprime a taxa de variação de log(y) em relação a log(x), e o coeficiente linear b = log(k) corresponde à interseção da reta com o eixo que passa pela origem de log(x) (pois quando log(x) = 0, log(y) = log(k)). Finalmente, achado log(k) segue que $k = 10^b$.

Exemplo:

Em uma experiência sobre o movimento de um projétil, no plano (x,y), o gráfico em escala linear dos dados correspondentes gerou a curva indicada na Figura 2.10.

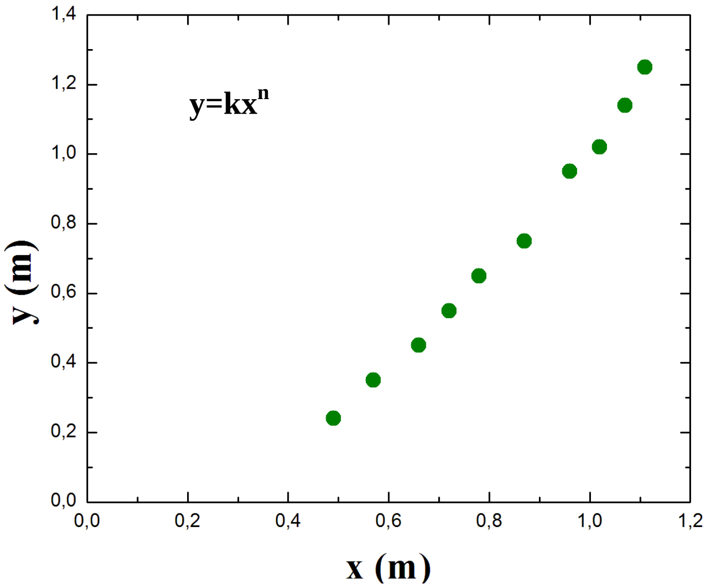


Figura 2.10 - Movimento de um projétil, no plano (x,y),

Observando o gráfico acima, podemos inferir que a relação matemática entre as variáveis, altura percorrida (y) e deslocamento na horizontal (x), é do tipo potência: $y = kx^n$. Portanto, para podermos determinar os parâmetros k e n é preciso linearizar o gráfico acima. Neste caso, a expressão linearizada é log (y) = log (k) + *a* log (x), que corresponde a uma relação linear entre as novas variáveis log(x) e log(y). Para determinar a reta média calcularemos o coeficientes linear, b = log(k), e o coeficiente angular, a=n, pelo método de regressão linear, a partir dos dados listados na tabela a seguir.

x_i (m)	y_i (m)	Log (x_i)	log (y_i)	log(x_i).log(y_i)	$(\log(x_i))^2$
0,49	0,24	-0,310	-0,620	0,1922	0,0961
0,57	0,35	-0,244	-0,456	0,1113	0,0595
0,66	0,45	-0,180	-0,347	0,0625	0,0324
0,72	0,55	-0,143	-0,260	0,0372	0,0204
0,78	0,65	-0,108	-0,187	0,0202	0,0117
0,87	0,75	-0,071	-0,125	0,0089	0,0050
0,96	0,95	-0,018	-0,022	0,0004	0,0003
1,02	1,02	+0,009	+0,009	0,0001	0,0001
1,07	1,14	+0,029	+0,057	0,0017	0,0008
1,11	1,25	+0,045	+0,097	0,0044	0,0020
		$\sum \log(x_i) = -0{,}991$	$\sum \log(y_i) = -1{,}854$	$\sum \log(x_i)\log(y_i) = 0{,}4389$	$\sum (\log(x_i))^2 = 0{,}2283$

Logo, obtemos:

$$a = \frac{(10)(0{,}4389) - (-0{,}991)(-1{,}854)}{(10)(0{,}2283) - (0{,}991)^2} = 1{,}9615 \approx 2$$

$$b = \frac{(-1,854)(0,2283) - (-0,4389)(-0,991)}{(10)(0,2283) - (0,991)^2} = 0,009$$

Finalmente, achado b = log(k) = 0,009 teremos $k = 10^{0,009} = 1,02$. Portanto, a relação analítica procurada, a qual descreve o movimento de um projétil, é dada por: $y = 1,02\ x^2$ (m). Observe que se trata de uma trajetória parabólica.

Agora, seja um gráfico que sugere uma curva do tipo:

$$y = ke^{nx}\ . \tag{15}$$

Nesse caso, aplicando logaritmo à relação acima, teremos:

$$\log(y) = (n \log e)\, x + \log(k) \tag{16}$$

Fazendo: $\log(y) = y'$, $\log(k) = b$, $a = n \log e$ (é uma constante), obteremos:

$$y' = a\,x + b, \tag{17}$$

que é a equação de uma reta. Em consequência, como indicado na Figura 2.9 (b), o gráfico log (y) *versus* x gerará uma reta. Novamente, fazer essa linearização utilizando o papel milimetrado seria um tanto trabalhoso, pois seria preciso calcular uma nova tabela para, a partir dela, construir o gráfico que fornece uma reta. Para evitar este trabalho existe o **papel mono-log** que consiste em um papel com uma das escalas sendo linear e a outra logarítmica. A Figura 2.11 ilustra um modelo de papel mono-log.

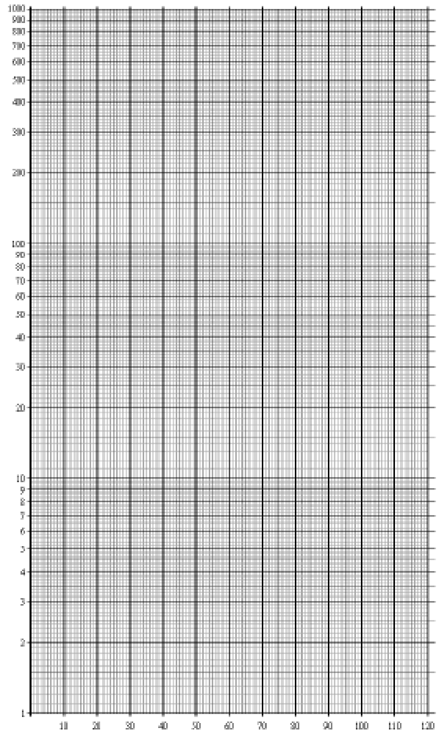


Figura 2.11 - Modelo de papel mono-log.

Assim como no papel di-log não é preciso calcular os logaritmos dos valores tabelados obtidos no experimento, como seria feito se fosse utilizado o papel milimetrado para linearizar o gráfico. Neste caso é necessária somente a indicação dos pontos tabelados diretamente no gráfico e o gráfico assim obtido no papel mono-log, será equivalente ao gráfico log (y) *versus* x obtido no papel milimetrado.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO:

1) Durante uma aula de laboratório o objetivo dos estudantes era descobrir a dependência entre duas grandezas X e Y. Durante o experimento verificou-se que um aumento na grandeza X implicava em um aumento na grandeza Y. A tabela abaixo mostra os valores medidos para X e Y:

Y (cm)	78,2	54,9	42,7	28,7	21,4	17,2	11,7
X (cm)	1,6	5,2	12,0	45,0	120,0	250,0	900,0

a) Faça o gráfico de **Y *versus* X** no papel di-log (log-log) em anexo.

b) Partindo do pressuposto de que $Y = kX^n$ e utilizando o **método da regressão linear**, encontre o relacionamento analítico entre Y e X**.** (A calculadora pode ser usada no cálculo da regressão linear).

c) Após a linearização do gráfico os estudantes calcularam o coeficiente de correlação linear e obtiveram um valor muito próximo de **-**1. O que significa este resultado?

2) Em um laboratório de pesquisa avançada na área de novos materiais, e utilizando-se os equipamentos adequados, os cientistas verificaram como o comprimento (L) de uma barra cilíndrica, feita de uma super liga metálica recentemente descoberta, variava de uma forma inesperada em função da temperatura (T). Foi obtida a seguinte tabela após as medidas.

L(cm)	50,50	79,20	147,10	248,00	495,50
T (^{0}C)	2,0	23,0	42,0	60,0	90,0

Após vários teses e estudos foi obtida a seguinte relação teórica entre o comprimento L da barra e a temperatura T.

$$L= \mu RT^2+ L_{0,}$$

onde μ é um coeficiente característico da liga metálica e R é o raio da barra.

a) Utilizando o papel milimetrado e o conhecimento da relação teórica entre L e T construa um gráfico já linearizado. Esboce a **melhor reta visual** que se ajuste, segundo a sua avaliação, aos pontos experimentais.

b) Utilizando o esboço da curva de ajuste **(melhor reta visual)**, encontre o relacionamento analítico entre as grandezas L e T.

c) Quais são os significados físicos da inclinação da reta e da interseção desta com o eixo vertical?

d) Calcule o valor de μ sabendo que R=5,00 cm . (Lembre-se, jamais use pontos experimentais para esse cálculo).

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
FIS 224 – Física Experimental A

PRÁTICA: LINEARIZAÇÃO DE CURVAS (COLETA DE DADOS)

1. OBJETIVOS:

- Coleta de dados para serem utilizados como material para:
- Construção de gráficos em papéis milimetrado e di-log (log-log).
- Linearização de curvas.

2. PRIMEIRA PARTE:

2.1 PROCEDIMENTOS:

a) Disponha verticalmente uma mola, estabelecendo, com segurança, a posição de equilíbrio de sua extremidade inferior sobre uma régua centimetrada. Suspenda, na extremidade livre da mola, um peso conhecido e meça o respectivo deslocamento vertical em relação à posição de equilíbrio.

b) Repita o procedimento anterior para diferentes pesos, completando a tabela a seguir:

F (gf)	10	20	30	40	50	60	70
x (cm)							

2.2 ATIVIDADES:

1) Construa, em um papel milimetrado, o gráfico F *versus* x correspondente, sendo F a ordenada e x a abscissa.

2) Esboce a curva que, a seu juízo, melhor caracteriza o relacionamento entre essa grandezas físicas (Melhor reta visual). O relacionamento analítico entre as grandezas é linear?

3) Utilizando a melhor reta visual feita em 2, determine o relacionamento analítico entre F e x. Para isso, encontre o valor das constantes a e b, lembrando que como a relação entre F e x é linear, F= ax+b. Qual o significado físico das constantes a e b?

4) Faça a análise de regressão linear e determine o relacionamento analítico entre F e x. As grandezas F e x são diretamente proporcionais? (Faça essa análise através do cálculo do coeficiente de correlação linear r).

3. SEGUNDA PARTE:

3.1 PROCEDIMENTOS:

a) Disponha, sobre um disco graduado em graus, dois espelhos planos formando um ângulo θ.

b) Coloque à frente dos dois espelhos um objeto qualquer e conte o corresponde número de objetos N vistos nessa situação (N=Número de imagens mais 1, correspondente ao objeto real).

c) Complete a tabela a seguir, repetindo o procedimento para os diferentes ângulos apresentados.

θ (grau)	45,0	60,0	72,0	90,0	120,0	180,0
N(unidades)						

3.2 ATIVIDADES:

1) Construa, em um papel milimetrado, o gráfico N *versus* θ. A relação entre essas grandezas é linear?

2) Utilizando um papel milimetrado, linearize a curva. Através da melhor reta visual e da regressão linear, determine o relacionamento analítico entre N e θ. (Para isso, encontre os valores de a e b, sendo que a relação analítica entre as grandezas é dada por $N=a(1/\theta)+b$). Qual o significado físico de a e b? Calcule o coeficiente de correlação linear (r) entre N e $1/\theta$ e discuta o significado do resultado obtido?

3) Linearize a curva, utilizando um papel di-log. Através da melhor reta visual e da regressão linear, determine o relacionamento analítico entre N e θ. (Para isso, encontre os valores de k e n, sendo que a relação analítica entre as grandezas é dada por $N=k\theta^n$). Calcule o coeficiente de correlação linear (r) entre log N e log θ e discuta o significado do resultado obtido?

<u>OBSERVAÇÒES:</u>

1) As análises pela melhor reta visual e regressão linear **<u>SÓ PODEM</u>** ser feitas em gráficos já linearizados.
2) Pode-se usar diretamente as funcionalidades da calculadora científica no cálculo de a, b e r pelo método da regressão linear.