UM EXERCÍCIO DO MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS QUESTÃO DE CONVERGÊNCIA

- MAT 271 – Cálculo Numérico – PER3/2021/UFV
- Professor Amarísio Araújo – DMA/UFV

EXERCÍCIO

Temos abaixo: uma equação com uma solução única no intervalo $[1,2]$; uma aproximação inicial dessa solução e duas possíveis funções de iteração para o Método das Aproximações Sucessivas:

$$xe^{x} - 10 = 0\,;\; x_0 = 1\,;\; \varphi_1(x) = 10e^{-x};\; \varphi_2(x) = x - \frac{xe^{x} - 10}{15}\,.$$

Vamos verificar se as duas funções, $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$, podem ser usadas no Método das Aproximações Sucessivas, com garantia de convergência.

RESOLVENDO O EXERCÍCIO

$$xe^{x} - 10 = 0 \Longrightarrow xe^{x} = 10 \Longrightarrow x = \frac{10}{e^{x}} \Longrightarrow x = 10e^{-x}, x\epsilon\mathbb{R}$$

$$xe^{x} - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 10e^{-x}, x\epsilon[1,2] \qquad f(x) = 0 \ \Leftrightarrow x = \varphi_1(x),, x\epsilon[1,2]$$

$$xe^{x} - 10 = 0 \Longrightarrow -\frac{xe^{x} - 10}{15} = 0 \Longrightarrow x - \frac{xe^{x} - 10}{15} = x \Longrightarrow x = x - \frac{(xe^{x} - 10)}{15}\ , x\epsilon\mathbb{R}$$

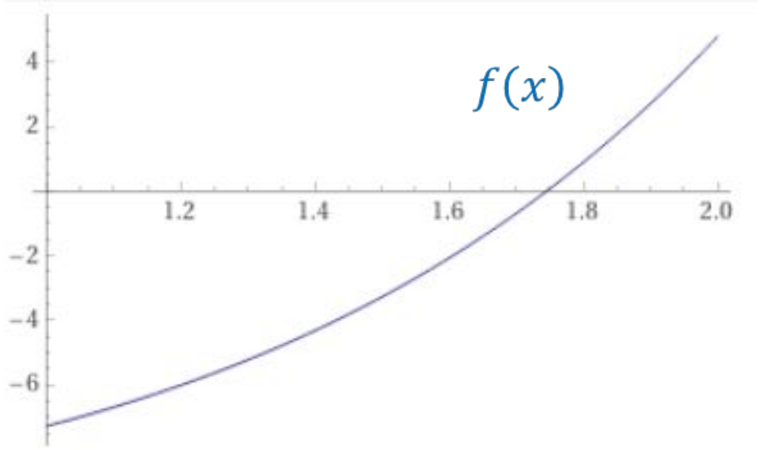
$$xe^{x} - 10 = 0 \Leftrightarrow x = x - \frac{(xe^{x} - 10)}{15}, x\epsilon[1,2] \qquad f(x) = 0 \ \Leftrightarrow x = \varphi_2(x)\ , x\epsilon[1,2]$$

RESOLVENDO O EXERCÍCIO

Verificação da garantia de convergência das funções de iteração dadas:

Antes, vamos ter uma ideia da localização da solução da equação $xe^x - 10 = 0$ em $[1,2]$:

Esboçando o gráfico de $f(x) = xe^x - 10$ em $[1,2]$:



Pelo esboço acima, vemos que a solução está no intervalo $[1.6,1.8] \subset [1,2]$.

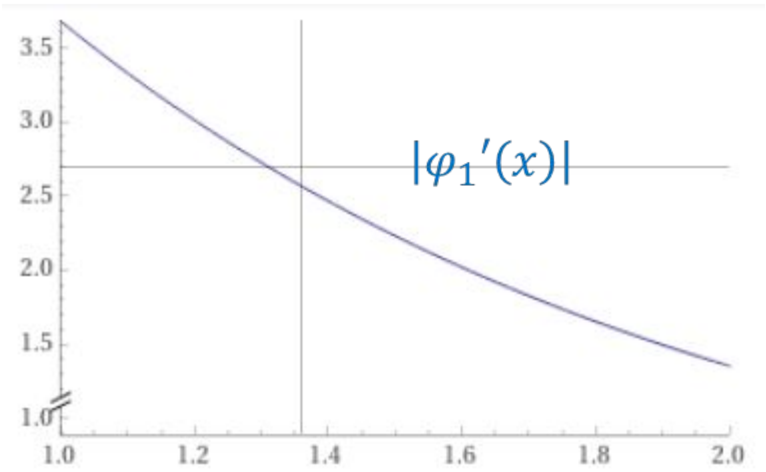
RESOLVENDO O EXERCÍCIO

Verificando a garantia de convergência para a função $\varphi_1(x) = 10e^{-x}$:

φ_1 é derivável no intervalo $[1,2]$

$\varphi_1'(x) = -10e^{-x}$ $\quad\quad |\varphi_1{}'(x)| = 10e^{-x}$

Esboçando o gráfico de $|\varphi_1{}'(x)| = 10e^{-x}$ em $[1,2]$:



Pelo esboço de $|\varphi_1{}'(x)|$, vemos que $|\varphi_1{}'(x)| > 1$ para todo x no intervalo $[1,2]$.

Portanto a função $\varphi_1(x) = 10e^{-x}$ não pode ser usada no método das aproximações sucessivas, com garantia de convergência, para encontrar uma aproximação da solução da equação $xe^x - 10 = 0$.

ANALITICAMENTE: Mostra-se que $|\varphi_1{}'(x)|$ é decrescente em $[1,2]$ e que $|\varphi_1{}'(2)| > 1$.

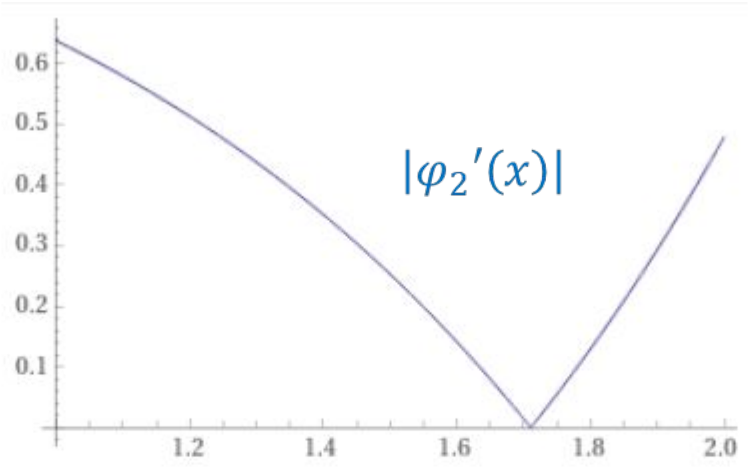
RESOLVENDO O EXERCÍCIO

Verificando a garantia de convergência para a função $\varphi_2(x) = x - \frac{xe^x - 10}{15}$:

φ_2 é derivável no intervalo $[1,2]$

$\varphi_2'(x) = 1 - (\frac{1+x}{15})e^x$ $\qquad$ $|\varphi_2'(x)| = \left|1 - (\frac{1+x}{15})e^x\right|$

Esboçando o gráfico de $|\varphi_2'(x)|$ em $[1,2]$:



Pelo esboço de $|\varphi_2'(x)|$, vemos que $|\varphi_2'(x)| < 1$ para todo x no intervalo $[1,2]$.

Portanto a função $\varphi_2(x) = x - \frac{xe^x - 10}{15}$ pode ser usada no método das aproximações sucessivas, com garantia de convergência, para encontrar uma aproximação da solução da equação $xe^x - 10 = 0$.

ANALITICAMENTE: Mostra-se que, em $[1,2]$, $|\varphi_2'(x)|$ atinge valor máximo em $x = 1$, sendo esse valor máximo $|\varphi_2'(1)| < 1$.