UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA – UFV
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – CCE
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA - DEL

Sistemas de Controle II

ELT331

AULA 18 – Equações de Diferenças

Prof. Tarcísio Pizziolo

18. Equações de Diferenças

.

Equações de Diferenças

Utilizando o método da Transformada-Z, podemos transformar equações de diferenças em equações algébricas em "**Z**".

Exemplo de Equação de Diferença:

$$\mathbf{x[(k+2)T]+3x[(k+1)T]+2x(kT)=0 \quad x(0)=0\ e\ x(T)=1}$$

Para: $\mathbf{k=0: x(2T)+3x(T)+2x(0)=0 \therefore x(2T)=-3}$

Para: $\mathbf{k=1: x(3T)+3x(2T)+2x(T)=0 \therefore}$

$$\mathbf{\therefore x(3T)=-3\times(-3)-2\times 1 \Rightarrow x(3T)=7}$$

Para: $\mathbf{k=2: x(4T)+3x(3T)+2x(2T)=0 \therefore}$

$$\mathbf{\therefore x(4T)=-3\times 7-2\times(-3) \Rightarrow x(4T)=-15}$$

Para: **k = 3 ....e para k = 500 ?**

18. Equações de Diferenças

A resolução da equação de diferença consiste em determinar **x(kT)** para **k = 0, 1, 2, ...**$\rightarrow\infty$.

Como **x(kT)** sempre terá um valor subsequente devemos obter:

$$Z\{x(k+1)T\}$$

Então: $Z\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT).z^{-k}$

Substituindo: $Z\{x[(k+1)T]\} = \sum_{k=0}^{\infty} x[(k+1)T]z^{-k} \Rightarrow$

$$\Rightarrow Z\{x[(k+1)T]\} = \sum_{k=1}^{\infty} x(kT)z^{-k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} x(kT)z^{-k}z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z\{x[(k+1)T]\} = z\left(\overbrace{\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}}^{Z\{x(kT)\}} - x(0)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{Z\{x[(k+1)T]\} = zX(z) - zx(0)}$$

se: $x(0) = 0 \Rightarrow Z\{x[(k+1)T]\} = zX(z)$

18. Equações de Diferenças

<u>Conclusão</u>: Se **x(0) = 0**, a multiplicação de **Z{.}** de uma função **x(kT)** por **z** corresponde a um deslocamento "para diante" no tempo de um período de amostragem T.

Por recorrência teremos:

$$Z\{x[(k+2)T]\} = z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1)$$

Generalizando:

$$\boxed{Z\{x[(k+m)T]\} = z^m X(z) - z^m x(0) - z^{(m-1)} x(1) - z^{(m-2)} x(2) - \ldots z.x(m-1)}$$

Onde **m** é um inteiro positivo.

Exemplo 1:

Resolver a equação de diferenças a seguir.

$$x[(k+2)T]+3x[(k+1)T]+2x(kT)=0; \quad x(0)=0 \quad e \quad x(1)=1$$

Tomando a Z{.} em ambos os lados da equação:

$$\overbrace{z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)}+\overbrace{3zX(z)-3zx(0)}+\overbrace{2X(z)}=0$$

Substituindo as condições iniciais e explicitando **X(Z)**:

$$X(z)=\frac{z}{(z^2+3z+2)}=\frac{z}{(z+1)}-\frac{z}{(z+2)}=\frac{z}{z-(-1)}-\frac{z}{z-(-2)}$$

Pela:

$$Z^{-1}\{X(z)\}\Rightarrow x(kT)=(-1)^k-(-2)^k;(k=0,1,2,\ldots)$$

Substituindo valores na solução geral tem-se:

$$Z^{-1}\{X(z)\} \Rightarrow x(kT) = (-1)^k - (-2)^k; (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\begin{cases} x(0) = 1 - 1 = 0;\ x(T) = (-1)^1 - (-2)^1 = -1 + 2 = 1; \\ x(2T) = (-1)^2 - (-2)^2 = 1 - (4) = -3; \\ x(3T) = (-1)^3 - (-2)^3 = -1 - (-8) = 7; \\ x(4T) = (-1)^4 - (-2)^4 = 1 - 16 = -15; \\ \vdots \\ x(500T) = (-1)^{500} - (-2)^{500} = \ldots = \end{cases}$$

Exemplo 2:

Resolver a equação de diferenças a seguir.

$$x[(k+2)T]-3x[(k+1)T]+2x[kT]=u(k)\ \text{onde}: \begin{cases} x(kT)=0 \quad p/\ \ k\leq 0.\ (x(0)=0) \\ u(0)=1. \\ u(kT)=0\ p/\ k\neq 0 \end{cases}$$

$$z^2X(z)-z^2\underbrace{x(0)}_{0}-z\underbrace{x(1)}_{?}-3zX(Z)-3z\underbrace{x(0)}_{0}+2X(z)=U(z)$$

Determinação de **x(1)**:

$$\underbrace{x[(k+2)T]}_{x(1)\ \text{para}\ k=-1;\ \text{então}:\ x(1)=0}\ -3x[(k+1)T]+2x(kT)=u(kT)$$

Daí:

$$z^2X(z)-0-0-3zX(z)-0+2X(z)=U(z)\ \therefore\ X(z)=\frac{U(z)}{(z^2-3z+2)}$$

$$U(z)=\sum_{k=0}^{\infty}u(kT)z^{-k}=1$$

Exemplo 2: continuação

Assim: $$\mathbf{X(z)=\frac{1}{(Z^2-3z+2)}=-\frac{1}{(z-1)}+\frac{1}{(z-2)}}$$

Multiplicando por z:

$$\mathbf{zX(z)=-\frac{z}{(z-1)}+\frac{z}{(z-2)}\Rightarrow x\left[\left(k+1\right)T\right]=-(1^k)+2^k\Rightarrow}$$

$$\mathbf{\Rightarrow x(kT)=-(1^{(k-1)})+2^{(k-1)};\quad (k=1,\,2,\,3,\,...;\;pois\,x(0)=0!)}$$

<u>Exemplo 3</u>: Determine **f(k)** dado:

$$\mathbf{F(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}}$$

<u>Solução:</u> $F(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$

- $\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z-2}$
- $c_1 = \left.\frac{1}{z-2}\right|_{z=1} = -1$
- $c_2 = \left.\frac{1}{z-1}\right|_{z=2} = 1$
- $\frac{F(z)}{z} == \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2} \Rightarrow F(z) = -\frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-2}$
- $Z^{-1}[F(z)] = f(k) = -1 + 2^k,\ k=0,1,2,\ldots$

<u>Exemplo 4</u>: Resolva a equação de diferenças a seguir.

$$x[(k+2)T] - 3x[(k+1)T] - 4x(kT) = u(kT)$$

$$\begin{cases} x(kT) = 0 \text{ p/ } k \le 0 \\ u(kT) = 0 \text{ p/ } k \ge 0 \\ u(kT) = 3 \text{ p/ } k < 0 \end{cases}$$

$$z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1) - 3\{zX(z) - zx(0)\} - 4X(z) = U(z) \therefore$$

$$\therefore z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1) - 3zX(z) + 3zx(0) - 4X(z) = U(z) \therefore$$

$$\therefore z^2X(z) - 0 - zx(1) - 3zX(z) + 0 - 4X(z) = U(z) \therefore$$

$$\therefore (z^2 - 3z - 4)X(z) - \underbrace{zx(1)}_{?} = U(z)$$

Para:

$$k = -1 \Rightarrow x(T) - 3x(0) - 4x(-1) = u(-1) \therefore x(1) = 3$$

Daí:

$$\left(z^2 - 3z - 4\right)X(z) - 3z = 0 \therefore X(z) = \frac{3z}{(z^2 - 3z - 4)} \Rightarrow X(z) = \frac{3z}{(z+1)(z-4)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{3}{5(z+1)} + \frac{12}{5(z-4)}$$

Multiplicando por z:

$$zX(z) = \frac{3z}{5(z+1)} + \frac{12z}{5(z-4)} \Rightarrow x[(k+1)T] = \frac{3}{5}(-1)^k + \frac{12}{5}(4)^k$$

Finalmente:

$$x\left[\left(k+1\right)T\right] = \frac{3}{5}\left[4^{(k+1)} + (-1)^k\right] \Rightarrow x(kT) = \frac{3}{5}\left[4^k + (-1)^{(k-1)}\right]$$

Exemplo 5: Resolva a equação de diferenças a seguir.

$$y(k+2)+0.5*y(k+1)+0.2*y(k)=u(k), \text{ com } y(0)=0 \text{ e } y(1)=0.$$

Considere $u(k)=1$ para k=0, 1, 2, ...

Solução:

- tome a Transformada Z de ambos os lados da equação a diferenças:

$$\left[z^2Y(z)-z^2y(0)-zy(1)\right]+0.5*\left[zY(z)-zy(0)\right]+0.2*Y(z)=U(z)$$

- substituindo as condições iniciais e também empregando a Transformada Z de $u(k)$, que é dada por $U(z)=\dfrac{z}{z-1}$, obtém-se:

$$Y(z)=\frac{z}{(z-1)(z^2+0.5*z+0.2)}$$

- a expansão em frações parciais de $\dfrac{Y(z)}{z}$ produz (expoentes estão em radianos):

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{0.588}{z-1}-\frac{1.036e^{j1.283}}{z+0.25+j0.37}-\frac{1.036e^{-j1.283}}{z+0.25-j0.37}$$

- tomando a Anti-Transformada Z, obtém-se:

$$y(k)=0.588-1.036*(0.447)^k\left(e^{-j(2.165k-1.283)}+e^{j(2.165k-1.283)}\right)$$

$$y(k)=0.588-2.072*(0.447)^k\cos(2.165k-1.283)$$

Exemplo 6: Resolva a equação de diferenças a seguir.

$$x(k+2)+0.1*x(k+1)-0.06*x(k)=0.2^k,\ \text{com}\ x(0)=5\ \text{e}\ x(1)=2.$$

- $(E+0.3)(E-0.2)x(k)=(0.2)^k,\ x(0)=5\ \text{e}\ x(1)=2$
- $x(k+2)+0.1x(k+1)-0.06x(k)=(0.2)^k$
- $\left[z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)\right]+0.1[zX(z)-zx(0)]-0.06X(z)=\dfrac{z}{z-0.2}$
- $\left[z^2+0.1z-0.06\right]X(z)=\dfrac{z}{z-0.2}+5z^2+2.5z=\dfrac{z}{z-0.2}\left[5z^2+1.5z+0.5\right]$
- $[(z+0.3)(z-0.2)]X(z)=\dfrac{z}{z-0.2}\left[5z^2+1.5z+0.5\right]$
- $[(z+0.3)(z-0.2)]X(z)=\dfrac{z}{z-0.2}\left[5z^2+1.5z+0.5\right]$
- $\dfrac{X(z)}{z}=\dfrac{5z^2+1.5z+0.5}{(z-0.2)^2(z+0.3)}$

- $$\frac{5z^2+1.5z+0.5}{(z-0.2)^2(z+0.3)} = \frac{c_1}{(z-0.2)^2} + \frac{c_2}{(z-0.2)} + \frac{c_3}{(z+0.3)}$$
- pelo método dos coeficientes a determinar, resulta:
- $$c_1 = \left.\frac{5z^2+1.5z+0.5}{(z+0.3)}\right|_{z=0.2} = 2$$
- $$c_2 = \left.\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{5z^2+1.5z+0.5}{(z+0.3)}\right)\right]\right|_{z=0.2} = \left.\left(\frac{5z^2+3z-0.05}{(z+0.3)^2}\right)\right|_{z=0.2} = 3$$
- $$c_3 = \left.\frac{5z^2+1.5z+0.5}{(z-0.2)^2}\right|_{z=-0.3} = 2$$
- $$\frac{X(z)}{z} = \frac{2}{(z-0.2)^2} + \frac{3}{(z-0.2)} + \frac{2}{(z+0.3)}$$
- $$X(z) = 2\frac{z}{(z-0.2)^2} + 3\frac{z}{(z-0.2)} + 2\frac{z}{(z+0.3)}$$

- Da Tabela de Anti-Transformada Z:

  - ✓ $Z^{-1}\left[\dfrac{z}{(z-0.2)}\right]=(0.2)^k$
  - ✓ $Z^{-1}\left[\dfrac{z}{(z+0.3)}\right]=Z^{-1}\left[\dfrac{z}{(z-(-0.3))}\right]=(-0.3)^k$
  - ✓ $Z^{-1}\left[\dfrac{0.2z}{(z-0.2)^2}\right]=k(0.2)^k \Rightarrow Z^{-1}\left[\dfrac{z}{(z-0.2)^2}\right]=k(0.2)^{k-1}$

Solução:

$$x(k)=2k(0.2)^{k-1}+3(0.2)^k+2(-0.3)^k$$