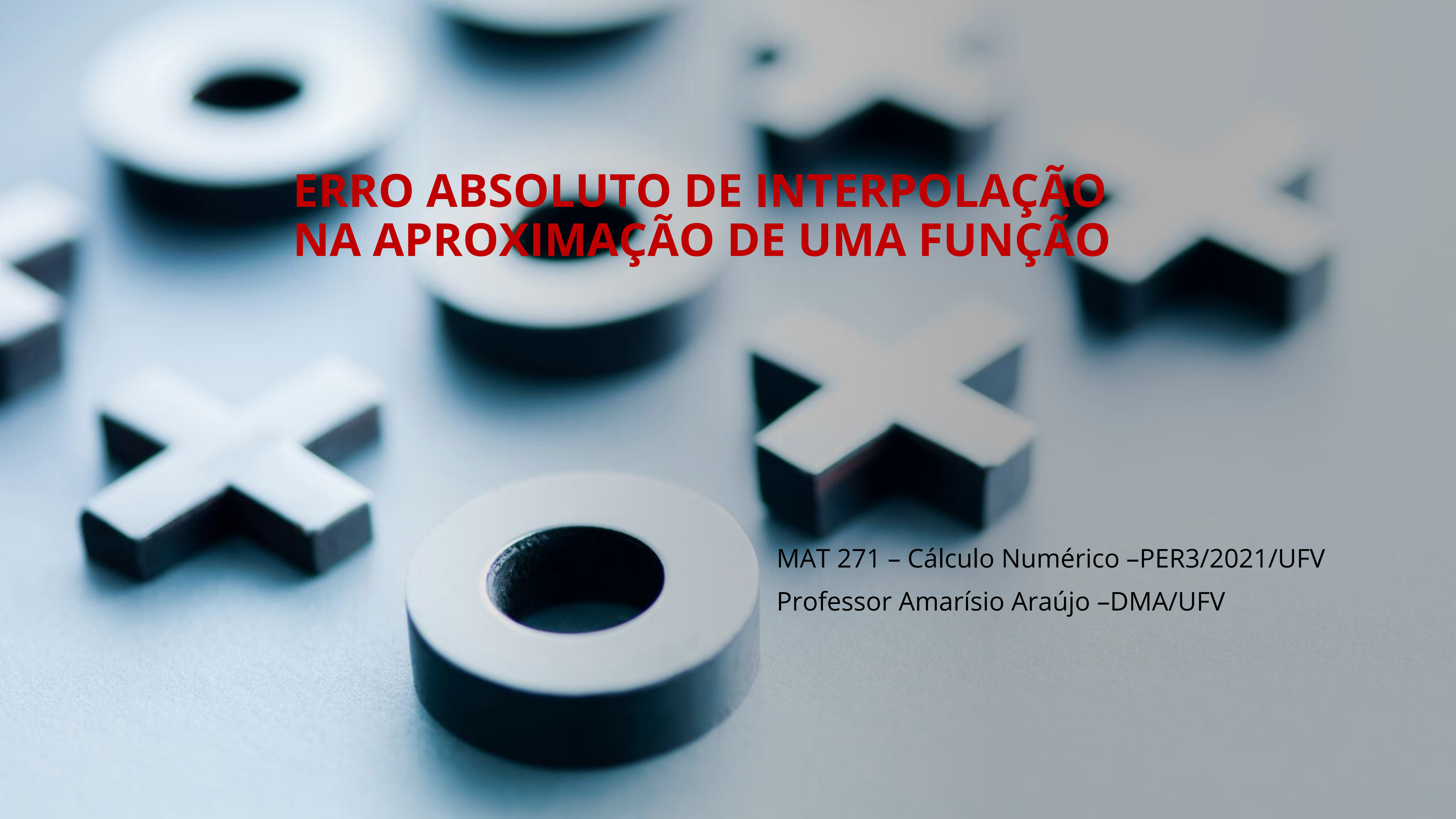


ERRO ABSOLUTO DE INTERPOLAÇÃO NA APROXIMAÇÃO DE UMA FUNÇÃO

MAT 271 – Cálculo Numérico –PER3/2021/UFV

Professor Amarísio Araújo –DMA/UFV

TEOREMA

Sejam $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ pontos distintos do intervalo $[x_0, x_n]$ no qual as $n+1$ derivadas da função f existem e são contínuas. Seja $p(x)$ o polinômio interpolador de $f(x)$ em $[x_0, x_n]$. Então, para cada $x \in [x_0, x_n]$:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)|,$$

onde $M = max\{|f^{(n+1)}(x)|; x \in [x_0, x_n]\}$ (máximo de $|f^{(n+1)}|$ em $[x_0, x_n]$), sendo $f^{(n+1)}$ a derivada de ordem $n+1$ de f.

O teorema acima nos garante que, para cada $x \in [x_0, x_n]$, o erro absoluto na interpolação de $f(x)$ pelo polinômio $p(x)$ é majorado por:

$$\frac{M}{(n+1)!} |(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)|.$$

EXEMPLO

Seja $f(x) = lnx$. Vamos determinar o polinômio interpolador desta função no intervalo $[1,4]$, usando os três pontos $x_0 = 1$, $x_1 = 3$ e $x_2 = 4$.

x	1	3	4
$f(x) = lnx$	0	1.0986	1.3863

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)\ (x - x_2)}{(x_0 - x_1)\ (x_0 - x_2)} = \frac{(x - 3)\ (x - 4)}{(1 - 3)\ (1 - 4)} = \frac{1}{6}(x - 3)(x - 4)$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)\ (x - x_2)}{(x_1 - x_0)\ (x_1 - x_2)} = \frac{(x - 1)\ (x - 4)}{(3 - 1)\ (3 - 4)} = -\frac{1}{2}(x - 1)(x - 4)$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)\ (x - x_1)}{(x_2 - x_0)\ (x_2 - x_1)} = \frac{(x - 1)\ (x - 3)}{(4 - 1)\ (4 - 3)} = \frac{1}{3}(x - 1)(x - 3)$$

$$p_2(x) = f(x_0)\frac{1}{6}(x - 3)(x - 4) - f(x_1)\frac{1}{2}(x - 1)(x - 4) + f(x_2)\frac{1}{3}(x - 1)(x - 3)$$

$$p_2(x) = -0.5493(x - 1)(x - 4) + 0.4621\ (x - 1)(x - 3)$$

AVALIANDO O ERRO ABSOLUTO

x	1	3	4
$f(x) = lnx$	0	1.0986	1.3863

$$p_2(x) = -0.5493(x-1)(x-4) + 0.4621\,(x-1)(x-3) \qquad \boxed{n=2}$$

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)| \quad M = max\{|f^{(n+1)}(x)|; x \in [x_0, x_n]\}$$

$$f(x) = lnx, f'(x) = \frac{1}{x}, f''(x) = -\frac{1}{x^2}, f'''(x) = \frac{2}{x^3} \qquad |f^{(3)}(x)| = \left|\frac{2}{x^3}\right| = \frac{2}{x^3}\ (x > 0)$$

$$M = max\{|f^{(3)}(x)|; x \in [1,4]\} = max\left\{\frac{2}{x^3}; x \in [1,4]\right\} = 2$$

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{M}{(2+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$$

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{1}{3}|(x-1)(x-3)(x-4)|$$

AVALIANDO O ERRO ABSOLUTO

x	1	3	4
$f(x) = lnx$	0	1.0986	1.3863

$$p_2(x) = -0.5493(x-1)(x-4) + 0.4621\,(x-1)(x-3)$$

Seja $x = 1.6$.

$$\ln(1.6) = f(1.6) \cong p_2(1.6) = 0.4028$$

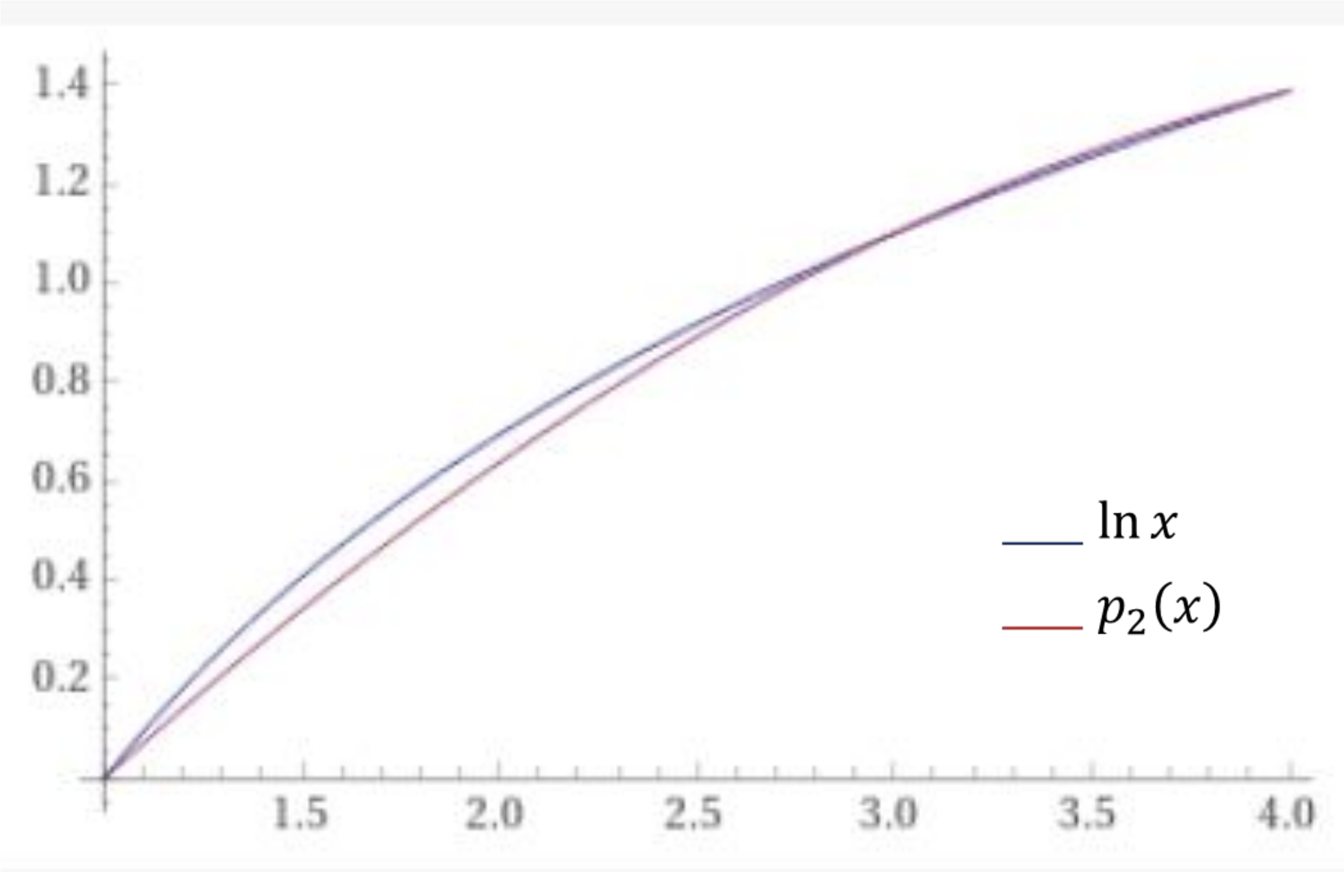
$$|f(1.6) - p_2(1.6)| \leq \frac{1}{3}|(1.6-1)(1.6-3)(1.6-4)| = 0.672$$

$$|ln(1.6) - p_2(1.6)| \leq 0.672$$

EXERCÍCIO: Repita o feito acima com $x = 3.7$.

GRAFICAMENTE

USANDO wolframalpha.com



O MESMO EXEMPLO COM MAIS PONTOS

Seja $f(x) = lnx$. Vamos determinar, agora, o polinômio interpolador desta função no intervalo $[1,4]$, usando os quatro pontos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 4$.

x	1	2	3	4
$f(x) = lnx$	0	0.6931	1.0986	1.3863

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)\ (x-4)}{(1-2)(1-3)\ (1-4)} = -\frac{1}{6}(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)\ (x-4)}{(2-1)(2-3)\ (2-4)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-3(x-4)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)\ (x-4)}{(3-1)(3-2)\ (3-4)} = -\frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-4)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)\ (x-3)}{(4-1)(4-2)\ (4-3)} = \frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$p_3(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + +f(x_3)L_3(x)$$

AVALIANDO O ERRO ABSOLUTO

x	1	2	3	4
$f(x) = lnx$	0	0.6931	1.0986	1.3863

$$p_3(x) = 0.0283x^3 - 0.3136x^2 + 1.4358x - 1.1505 \qquad \boxed{n = 3}$$

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)| \quad M = max\{|f^{(n+1)}(x)|; x \in [x_0, x_n]\}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}, f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4} \qquad |f^{(4)}(x)| = \left|-\frac{6}{x^4}\right| = \frac{6}{x^4}$$

$$M = max\{|f^{(4)}(x)|; x \in [1,4]\} = max\left\{\frac{6}{x^4}; x \in [1,4]\right\} = 6$$

$$|f(x) - p_3(x)| \leq \frac{M}{(3+1)!}|(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)|$$

$$|f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{4}|(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)|$$

AVALIANDO O ERRO ABSOLUTO

x	1	2	3	4
$f(x) = lnx$	0	0.6931	1.0986	1.3863

$$p_3(x) = 0.0283x^3 - 0.3136x^2 + 1.4358x - 1.1505$$

Seja $x = 1.6$.

$$\ln(1.6) = f(1.6) \cong p_3(1.6) = 0.4599$$

$$|f(1.6) - p_3(1.6)| \leq \frac{1}{4}|(1.6-1)(1.6-2)(1.6-3)(1.6-4)| = 0.2016$$

$$|ln(1.6) - p_3(1.6)| \leq 0.2016$$

EXERCÍCIO: Repita o feito acima com $x = 3.7$.

GRAFICAMENTE

USANDO wolframalpha.com