ELT221 - Circuitos Elétricos II

Prof. Tarcísio Pizziolo

13) Entradas Periódicas Não Senoidais

Para uma entrada periódica representada pela **Série de Fourier**, a **resposta forçada** a cada um dos termos individuais pode ser determinada pela teoria de circuitos em estado permanente (**s = jw**) através da **Superposição**.

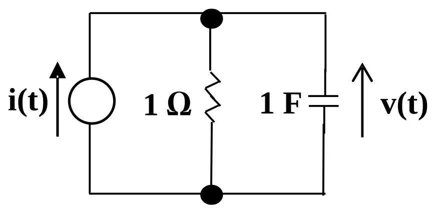
Seja a **Série Geométrica de Fourier**:

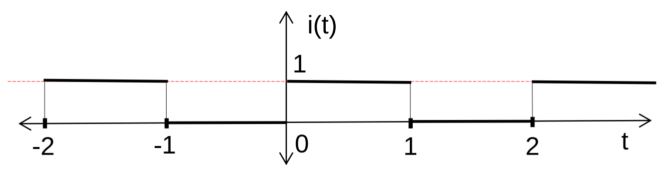
$$f(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \operatorname{sen}(n w_o t) + b_n \cos(n w_o t)\right)$$

$$w_o = \frac{2\pi}{T} \quad ; \quad a_o = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \quad ; \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\operatorname{sen}(n w_o t)dt \quad e \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n w_o t)dt$$

A resposta de circuitos a entradas periódicas consiste de um número infinito de termos de uma série.

Exemplo: Considere o circuito dado e a forma de onda para a entrada **i(t)**. Calcule a tensão de saída **v(t)** no estado permanente.





$$w_o = \pi \quad \left(rd/s\right)$$

$$i(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\operatorname{sen}\pi t + \frac{1}{3}\operatorname{sen}3\pi t + \frac{1}{5}\operatorname{sen}5\pi t + ...\right)$$

Para componente $\frac{1}{2}$ no estado permanente $\Rightarrow$ $v(t) = \frac{1}{2}V$

A função de transferência em corrente alternada é:

$$H(jw) = \frac{1}{(1+jw)} = \frac{1}{\sqrt{1+w^2}}\angle - tg^{-1}(w)$$

$$\text{Para } w = \pi \quad \Rightarrow \quad H(j\pi) = \frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}\angle - tg^{-1}(\pi)$$

$$\text{Para } w = 3\pi \quad \Rightarrow \quad H(j3\pi) = \frac{1}{\sqrt{1+9\pi^2}}\angle - tg^{-1}(3\pi)$$

$$\text{Para } w = 5\pi \quad \Rightarrow \quad H(j5\pi) = \frac{1}{\sqrt{1+25\pi^2}}\angle - tg^{-1}(5\pi)$$

A resposta forçada será: $H(s) = \dfrac{V(s)}{I(s)} \Rightarrow V(s) = H(s).I(s) \Rightarrow V(jw) = H(jw).I(jw)$

Substituindo cada valor de **w** em **H(jw).I(jw)** e voltando para o domínio do tempo **t**:

$$v(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}} \text{sen}(\pi t - tg^{-1}\pi) + \frac{1}{3\sqrt{1+9\pi^2}} \text{sen}(3\pi t - tg^{-1}3\pi) + ... \right)$$

Obs.: Para calcular **i_c (t)** $\Rightarrow$ $i_c(t) = C\dfrac{dv(t)}{dt}$

<u>Generalizando:</u> A **Série de Fourier** pode também ser representada por:

$$x(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nw_o t + \varphi_n)$$

$$\text{onde :} \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{e} \quad \varphi_n = -tg^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right).$$

Para uma entrada **x(t)** teremos então uma saída **y(t)** da seguinte forma:

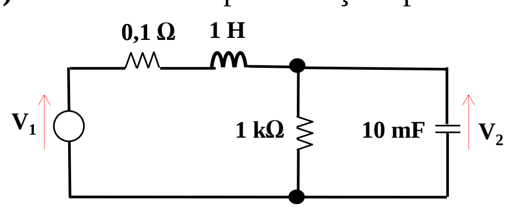
$$y(t) = a_o H(0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left| H(jnw_o \right| \cos\left[nw_o t + \varphi_n + \angle H(jnw_o) \right]$$

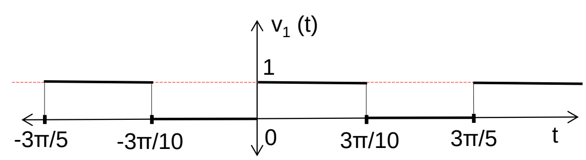
Onde: **H(jw)** é a **F.T.** no estado permanente de corrente alternada que será calculada para **w = 0**; **w = w_o**; **w = $2w_o$**;...

Exemplo de Aplicação: Traçar, usando MATLAB, a entrada **i(t)** e a saída **v(t)** do exemplo anterior. Variar o número de interações **n** e comparar as respostas.

<u>Exercícios:</u>

1) Determine a resposta forçada para o circuito dado o gráfico da entrada.





$$w_o = \frac{2\pi}{\left(3\pi/5\right)} \Rightarrow w_o = \frac{10}{3} \left(rd/s\right)$$

Então :

$$v_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\text{sen}\frac{10}{3}t + \frac{1}{3}\text{sen}\,10t + \frac{1}{5}\text{sen}\frac{50}{3}t + ... \right)$$

$$\text{A F.T. é dada por :} \quad H(s) = \frac{100}{\left(s^2 + 0{,}2s + 100\right)}$$

Daí :

$$v_2(t) = a_o H(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \left| H(jnw_o) \right| \cos\left[nw_o t + \varphi_n + \angle H(jnw_o) \right]$$

Onde :

$$a_o = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \quad ; \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}(nw_o t)dt \quad (n \neq 0) \quad \text{e}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(nw_o t)dt \quad ; \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{e} \quad \varphi_n = -tg^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right).$$

$$\text{Análise de } H(jw) = \frac{100}{\left[j0{,}2w + (100 - w^2)\right]} = \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{w^2}{100}\right) + j0{,}002w\right]}$$

$$|H(w)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{w^2}{10^2}\right)^2 + \left(\frac{2w}{10^3}\right)^2}}$$

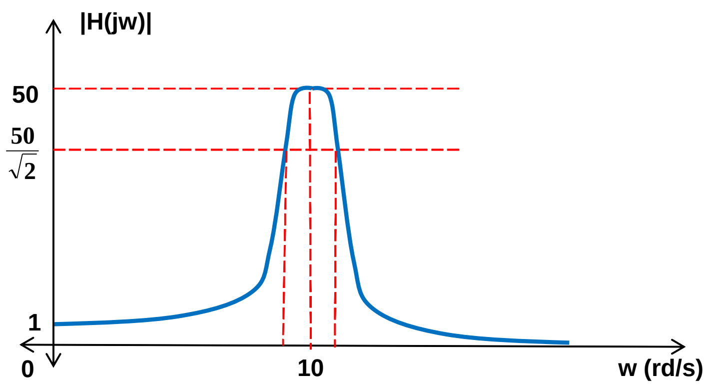
$$|H(jw)|_{máx} \quad \Rightarrow \quad w = 10 \left(rd/s\right)$$

Quando :

$$\left.\begin{array}{l} w \to 0 \quad \Rightarrow \quad |H(jw)| \to 1 \\ w \to \infty \quad \Rightarrow \quad |H(jw)| \to 0 \end{array}\right\} \quad \text{Passa} - \text{Faixa}$$

$$w \to 10 \quad \Rightarrow \quad |H(jw)| \to 50\,(\text{máximo})$$

A **amplitude mínima** para o circuito (filtro) transferir potência significativa de $\mathbf{v_1(t)}$ para $\mathbf{v_2(t)}$ é $\frac{|H(jw)|_{máx}}{\sqrt{2}} = \frac{|H(j10)|}{\sqrt{2}} = \frac{50}{\sqrt{2}} = 35{,}35$.



(*) Filtro muito seletivo!

Calculando os módulos de **|H(jw)|** para as frequências da **fundamental** e das **1ª**, **2ª** e **3ª harmônicas**, temos que:

$$|H(j0)| = 1 \quad ; \quad \left|H\left(j\frac{10}{3}\right)\right| = 1{,}125 \quad ; \quad \left|H\left(j\frac{50}{3}\right)\right| = 0{,}563$$

$$H(j10) = -j50 = 50\angle -90^o$$

Somente para a frequência da **2ª** harmônica o **|H(jw)|** poderá transferir potência significativa de $\mathbf{v_1(t)}$ para $\mathbf{v_2(t)}$.
Para as frequências **fora da Banda Passante do filtro** não haverá transferência de potência significativa de $\mathbf{v_1(t)}$ para $\mathbf{v_2(t)}$.
Desta forma, a saída poderá ser representada aproximadamente por apenas as respostas à **segunda harmônica**.

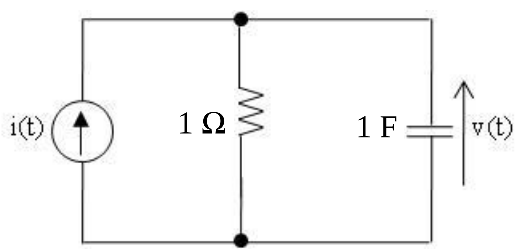
Assim:

$$v_2(t) = \left(\frac{2}{3\pi}\right)(50)\,\mathrm{sen}\left(10t - 90^o\right) \quad \Rightarrow \quad v_2(t) = \left(\frac{100}{3\pi}\right)\cos\left(10t\right) \quad \text{volts}$$

2) Dado o circuito RC paralelo a seguir calcular a potência fornecida ao mesmo no estado permanente considerando que:

$$i(t) = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\mathrm{sen}(\pi t) + \left(\frac{1}{3}\right)\mathrm{sen}(3\pi t) + \ldots\ldots\right)(A) \quad \text{e}$$

$$e(t) = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{\pi}\right)\left[0{,}304\,\mathrm{sen}(\pi t - 72{,}3^o) + \left(\frac{1}{3}\right)(0{,}106)\,\mathrm{sen}(3\pi t - 83{,}9^o) + \ldots\ldots\right](V)$$



Para a componente contínua: $P_{cc} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(W) = 0{,}25 \quad (W)$

Para a primeira harmônica:

$$P_1 = \left(\left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\left(\left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(0{,}304)\right)\cos(72{,}3^o) \quad \Rightarrow \quad P_1 \cong 0{,}0186\,(W)$$

Para a terceira harmônica:

$$P_3 = \left(\left(\frac{2}{3\pi}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\left(\left(\frac{2}{3\pi}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(0{,}106)\right)\cos(83{,}9^o) \quad \Rightarrow \quad P_3 \cong 0{,}0003\,(W)$$

Calculam-se as potências para as demais componentes harmônicas e soma-se.

A Potência total fornecida no estado permanente é dada por:

$$P_T = P_{cc} + P_1 + P_3 + P_5 + \ldots\ldots \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P_T = 0{,}25 + 0{,}0186 + 0{,}0003 + \ldots \Rightarrow P_T \cong 0{,}2689 \quad (W)$$