INTERPOLAÇÃO INVERSA

MAT 271 – CÁLCULO NUMÉRICO – PER3/2021/UFV

Professor Amarísio Araújo – DMA/UFV

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL INVERSA

- Os valores $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2),\ldots, y_n = f(x_n)$ de uma função f são conhecidos em pontos distintos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ de um intervalo $[a, b]$.

- Problema: dado um valor y, encontrar, de forma aproximada, um valor x tal que: $f(x) = y$.

- Uma possível solução para este problema: encontrar um polinômio interpolador $p_n(y)$ para a função inversa $h = f^{-1}$ de f, caso ela exista.

- Sendo $y = f(x)$, a inversa $x = f^{-1}(y)$ existe e é única se f é contínua e crescente ou decrescente no intervalo de interpolação.

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL INVERSA

Considerando, então, que a inversa f^{-1} de f existista: $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

- Os valores $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2),\ldots, y_n = f(x_n)$ de uma função f são conhecidos em pontos distintos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ de um intervalo $[a, b]$.

- Os valores $x_0 = f^{-1}(y_0), x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2),\ldots, x_n = f^{-1}(y_n)$ da função f^{-1} são conhecidos em pontos distintos $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ de um intervalo $[c, d]$.

- Na tabela de dados, trocamos os valores de x e $y = f(x)$ e obtemos um polinômio interpolador $p(y)$ da inversa $f^{-1}(y)$.

EXEMPLO 1

Considere a função f dada pela tabela:

x	0	1	2
$f(x)$	1.31	3.51	3.78

Usando interpolação inversa, determine $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) = 3.63$

Resolvendo:

Pela tabela, podemos admitir que f é crescente. Além disso, $3.51 < 3.63 < 3.78$. Admitindo que ela seja contínua, vamos fazer a interpolação da inversa $h = f^{-1}$.

y	1.31	3.51	3.78
$h(y)$	0	1	2

Usando interpolação de Newton:

y	1.31	3.51	3.78
$h(y)$	0	1	2

		DIFERENÇAS DIVIDIDAS		
y	$h(y)$	ORDEM 0	ORDEM 1	ORDEM 2
1.31	0	0		
			0.4545	
3.51	1	1		1.3155
			3.7037	
3.78	2	2		

x	0	1	2
$f(x)$	1.31	3.51	3.78

$$p_2(y) = 0 + 0.4545(y - 1.31) + 1.3155(y - 1.31)(y - 3.51)$$

$p_2(3.63) = 1.4207$ $h(3.63) \cong 1.4207$ Ou seja: $f^{-1}(3.63) \cong 1.4207 \implies f(1.4207) \cong 3.63$

$\boxed{\text{Portanto: } \bar{x} \cong 1.4207}$

EXEMPLO 2: USANDO INTERPOLAÇÃO INVERSA PARA ENCONTRAR SOLUÇÃO APROXIMADA DE UMA EQUAÇÃO

A equação $lnx - x + 2 = 0$ possui uma solução única $\bar{x}$ no intervalo $[2,4]$. Vamos usar interpolação polinomial inversa para encontrar uma aproximação de $\bar{x}$, com um polinômio de Newton de grau 3.

Resolvendo:

Observe que temos a função $f(x) = lnx - x + 2$, que é contínua no intervalo $[2,4]$ (contínua para todo $x > 0$). Observe também que $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$. Como $2 \leq x \leq 4 \Longrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{1}{x} - 1 \leq -\frac{1}{2} < 0$. Logo $f'(x) < 0$ para todo $x \epsilon [2,4]$, e, portanto, f é decrescente em $[2,4]$. Assim, podemos fazer a interpolação inversa no intervalo.

Como usaremos um polinômio de grau 3, consideremos os pontos: x_0=2.0, x_1=2.8, x_2=3.6 e x_3=4.0.

$y = f(x)$

x	2.0	2.8	3.6	4.0
$f(x)$	0.6931	0.2296	-0.3191	-0.6137

$x = h(y) = f^{-1}(y)$

y	0.6931	0.2296	-0.3191	-0.6137
$h(y)$	2.0	2.8	3.6	4.0

y	0.6931	0.2296	-0.3191	-0.6137
$h(y)$	2.0	2.8	3.6	4.0

Encontrar uma aproximação para $h(0)$, usando um polinômio interpolador $p_3(y)$ de $h(y)$.

Usando interpolação de Newton para encontrar $p_3(y)$:

		DIFERENÇAS DIVIDIDAS			
y	$h(y)$	ORDEM 0	ORDEM 1	ORDEM 2	ORDEM 3
0.6931	2.0	2.0			
			-1.7260		
0.2296	2.8	2.8		-0.2648	
			-1.4580		-0.1117
-0.3191	3.6	3.6		-0.1188	
			-1.3578		
-0.6137	4.0	4.0			

$$p_3(y) = 2 - 1.7260(y - 0.6931) - 0.2648(y - 0.6931)(y - 0.2296) - 0.1117(y - 0.6931)(y - 0.2296)(y + 0.3191)$$

y	0.6931	0.2296	-0.3191	-0.6137
$h(y)$	2.0	2.8	3.6	4.0

$$p_3(y) = 2 - 1.7260(y - 0.6931) - 0.2648(y - 0.6931)(y - 0.2296) - 0.1117(y - 0.6931)(y - 0.2296)(y + 0.3191)$$

$p_3(0) = 3.1485$ $\quad$ $h(0) \cong 3.1485$ $\quad$ Ou seja: $f^{-1}(0) \cong 3.1485$ $\quad$ $\Longrightarrow f(3.1485) \cong 0.$

Portanto: $\bar{x} \cong 3.1485$, onde $\bar{x}$ é a raiz da equação $lnx - x + 2 = 0.$

Usando o método de Newton para solução de equação, encontramos $\bar{x} \cong 3.14619322$ (8 casas decimais), com erro absoluto menor que 0.0000022 (slides da aula do método de Newton)