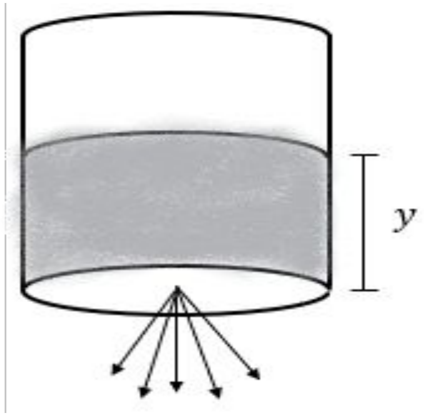
MÉTODO DE EULER: EXEMPLO EM UMA APLICAÇÃO

MAT 271 – Cálculo Numérico – PER3/2021/UFV

Professor Amarísio Araújo DMA/UFV

PROBLEMA DE VALOR INICIAL NUMA APLICAÇÃO

Considere a água sendo drenada de um tanque cilíndrico vertical, abrindo-se uma válvula na base do cilindro, conforme ilustrado na figura abaixo, onde y indica o nível da água no tanque (em metros) em cada instante t (em minutos).

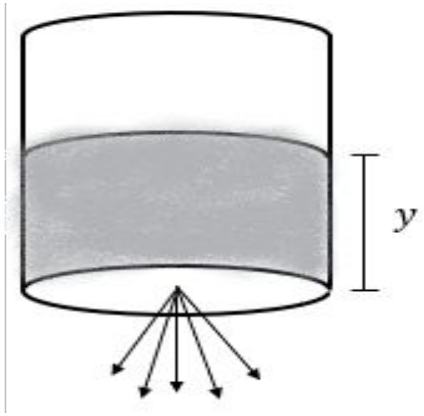


A água escoará mais rapidamente no início (quando o tanque estiver cheio) e mais lentamente à medida em que o tanque vai se esvaziando.

Mostra-se que a variação do nível com o passar do tempo, $\frac{dy}{dt}$, é dada por: $\frac{dy}{dt} = -ky^{1/2}$, onde k é uma constante positiva que depende da forma do orifício de drenagem, da área da seção transversal do tanque, da viscosidade do líquido etc.

Problema 1: Considerando $k = 0.06$, e que o nível inicial do tanque é de $3\ m$, determinar o nível do tanque 2 minutos após a abertura da válvula.

PROBLEMA DE VALOR INICIAL



$$\frac{dy}{dt} = -0.06y^{1/2} \qquad y(0) = 3$$

Problema 1: Encontrar $y(2)$

UMA APLICAÇÃO

Temos o seguinte PVI: $y' = -0.06y^{1/2}$, $y(0) = 3$, onde $y' = \frac{dy}{dt}$ e $f(t, y) = -0.06y^{1/2}$

Assim, sendo y a solução do PVI, vamos aplicar o Método de Euler para encontrar uma aproximação de $y(2)$, e, consequentemente, uma aproximação da solução do PVI no intervalo $[0,2]$.

Vamos usar 8 passos: $N = 8$.

Então o tamanho do passo é $h = \frac{2-0}{8} = 0.25$.

Daí: $t_0 = 0$, $t_1 = 0.25$, $t_2 = 0.5$. $t_3 = 0.75$, $t_4 = 1$, $t_5 = 1.25$, $t_6 = 1.5$, $t_7 = 1.75$ e $t_8 = 2$

$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$, para $n = 0,1,2,3,4,5,6,7$ $\qquad$ $t_0 = 0, y_0 = 3$, $f(t_n, y_n) = -0.06{y_n}^{1/2}$

$$y_{n+1} = y_n + 0.25(-0.06{y_n}^{1/2}), \text{ para } n = 0,1,2,3,4,5,6,7$$

$$y_{n+1} = y_n - 0.015{y_n}^{1/2}, \text{ para } n = 0,1,2,3,4,5,6,7$$

UMA APLICAÇÃO

$t_0 = 0$, $t_1 = 0.25$, $t_2 = 0.5$. $t_3 = 0.75$, $t_4 = 1$, $t_5 = 1.25$, $t_6 = 1.5$, $t_7 = 1.75$ e $t_8 = 2$

$$y_{n+1} = y_n - 0.015{y_n}^{1/2}, \text{ para } n = 0,1,2,3,4,5,6,7$$

$$y_1 = y_0 - 0.015{y_0}^{1/2} = 3 - (0.015)(3)^{\frac{1}{2}} = 2.974019$$

$$y_2 = y_1 - 0.015{y_1}^{1/2} = 2.974019 - (0.015)(2.974019)^{\frac{1}{2}} = 2.948151$$

$$y_3 = y_2 - 0.015{y_2}^{1/2} = 2.948151 - (0.015)(2.948151)^{\frac{1}{2}} = 2.922396$$

$$y_4 = y_3 - 0.015{y_3}^{1/2} = 2.922396 - (0.015)(2.922396)^{\frac{1}{2}} = 2.896753$$

UMA APLICAÇÃO

$y_1 = 2.974019 \qquad y_2 = 2.948151 \qquad y_3 = 2.922396 \qquad y_4 = 2.896753$

$$y_5 = y_4 - 0.015{y_4}^{1/2} = 2.896753 - (0.015)(2.896753)^{\frac{1}{2}} = 2.871223$$

$$y_6 = y_5 - 0.015{y_5}^{1/2} = 2.871223 - (0.015)(2.871223)^{\frac{1}{2}} = 2.845806$$

$$y_7 = y_6 - 0.015{y_6}^{1/2} = 2.845806 - (0.015)(2.845806)^{\frac{1}{2}} = 2.820502$$

$$y_8 = y_7 - 0.015{y_7}^{1/2} = 2.820502 - (0.015)(2.820502)^{\frac{1}{2}} = 2.795310$$

$$\boxed{y(2) \cong y_8 = 2.795310}$$

Portanto, 2 minutos após a abertura da válvula, o nível da água no tanque será de aproximadamente 2.8 metros.

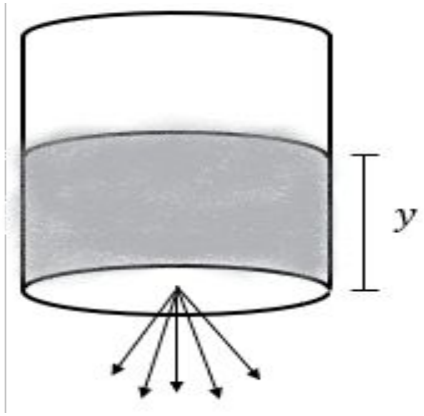
COMPARANDO COM A SOLUÇÃO ANALÍTICA

A solução exata deste pvi é $y = \left(\sqrt{3} - 0.03t\right)^2$ (determinada analiticamente).

Assim, o valor exato de $y(2)$ é $y(2) = \left(\sqrt{3} - 0.06\right)^2 = 2.795753.$

y	APROXIMADO	EXATO
$y(0)$	3	3
$y(0.25)$	2.9740	2.9741
$y(0.5)$	2.9482	2.9483
$y(0.75)$	2.9224	2.9226
$y(1)$	2.8968	2.8970
$y(1.25)$	2.8712	2.8715
$y(1.5)$	2.8458	2.8461
$y(1.75)$	2.8205	2.8209
$y(2)$	2.7953	2.7958

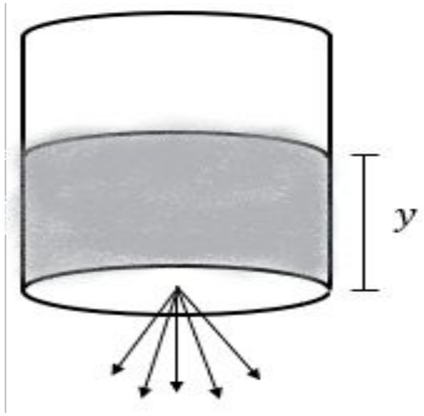
MUDANDO O PROBLEMA



$$\frac{dy}{dt} = -ky^{1/2}$$

Problema 2: Considerando $k = 0.06$ e que o nível inicial da água é de $3\ m$, determinar quanto tempo levará para o tanque ficar vazio.

PROBLEMA DE VALOR INICIAL



$$\frac{dy}{dt} = -0.06y^{1/2} \qquad y(0) = 3$$

Problema 2: Encontrar $t > 0$ tal que $y(t) = 0$

RESOLVENDO O PROBLEMA 2 A PARTIR DA SOLUÇÃO ANALÍTICA

Temos O PVI: $y' = -0.06y^{1/2}$, $y(0) = 3$; onde $y' = \frac{dy}{dt}$.

A solução exata do PVI é $y = \left(\sqrt{3} - 0.03t\right)^2$ (determinada analiticamente).

Tal solução $y = \left(\sqrt{3} - 0.03t\right)^2$ nos dá o nível y da água no tanque em qualquer tempo $t \geq 0$.

O problema proposto é: determinar em que momento, a partir da abertura da válvula, o tanque estará vazio, isto é qual o valor de $t > 0$ para o qual $y = 0$.

Isto equivale a descobrir a solução da equação $\left(\sqrt{3} - 0.03t\right)^2 = 0$

A solução da equação $\left(\sqrt{3} - 0.03t\right)^2 = 0$ é $t = \frac{\sqrt{3}}{0.03} \cong 57.735$

Portanto, o tanque ficará vazio após aproximadamente 57.7 minutos da abertura da válvula.

OBSERVAÇÕES A PARTIR DO USO DO MÉTODO DE EULER PARA O PROBLEMA 1

Como vimos na discussão do Problema 1, tínhamos o seguinte PVI:

$$y' = -0.06y^{1/2}, \quad y(0) = 3; \text{ onde } y' = \frac{dy}{dt}$$

e aplicamos o Método de Euler para encontrar um valor aproximado de $y(2)$.

Considerando $N = 8$ (8 passos), ou seja, $h = \frac{1}{4} = 0.25$, obtivemos $y(2) \cong y_8 = 2.795310$,

usando:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \text{ para } n = 0,1,2,3,4,5,6,7 \qquad t_0 = 0, y_0 = 3, f(t_n, y_n) = -0.06{y_n}^{1/2}$$

OBSERVAÇÕES A PARTIR DO USO DO MÉTODO DE EULER PARA O PROBLEMA 1

Se continuarmos aplicando o método de Euler, com o mesmo tamanho de passo $h = 0.25$, podemos calcular, de forma aproximada, o nível y da água no tanque em um tempo $t > 2$.

Por exemplo, para tempo $t = 20$, com $h = 0.25$ ($\Rightarrow N = \frac{20-0}{0.25} = 80$), podemos continuar os cálculos anteriores (interrompidos depois do oitavo passo) e dar mais 72 passos (de mesmo comprimento $h = 0.25$), de modo que chegaremos na aproximação $y(20) \cong y_{80} = 1.2779$.

Portanto, o nível da água, 20 minutos após a abertura da válvula será de aproximadamente $1.28\ m$.

O valor exato, usando a solução analítica, é: $y = \left(\sqrt{3} - 0.6\right)^2 = 1.2815$.

OBSERVAÇÕES FINAIS

Como vimos na solução do Problema 2, o tanque fica vazio, aproximadamente, após 57.735 minutos da abertura da válvula

Isto significa que o intervalo para a solução y do PVI é aproximadamente $[0\,,57.735]$.

Ao aplicar o método de Euler para calcular o valor aproximado de $y(57.3)$, com passo de tamanho $h = 0.1$, serão dados $N = \frac{57.3-0}{0.1} = 573$ passos, obtendo: $y(57.3) \cong y_{573} = 0.0000159442 \cong 0$.

Dando mais um passo de tamanho $h = 0.1$, obtemos $y(57.4) \cong y_{574} = -0.0000080139 < 0$.