DISCUTINDO EXERCÍCIOS DAS LISTAS IV E V

MAT 271 – Cálculo Numérico – PER3/2021/UFV

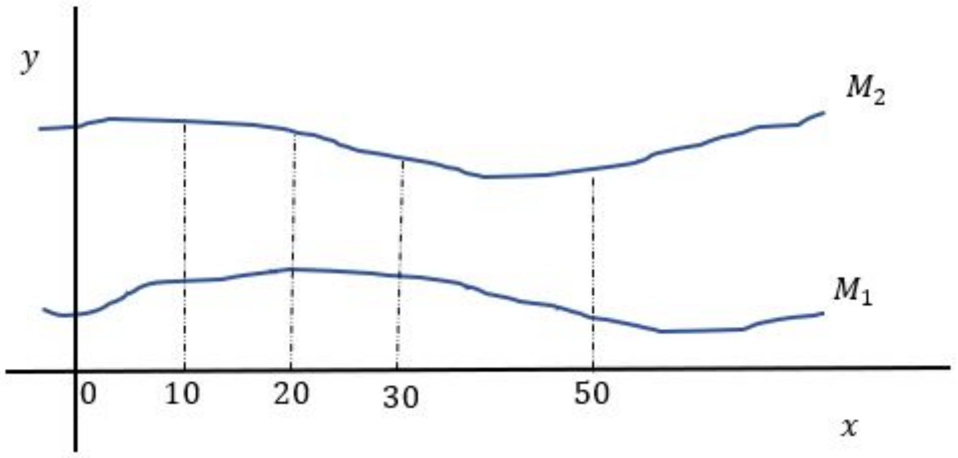
Professor Amarísio Araújo DMA/UFV

DISCUTINDO DOIS EXERCÍCIOS DA LISTA IV

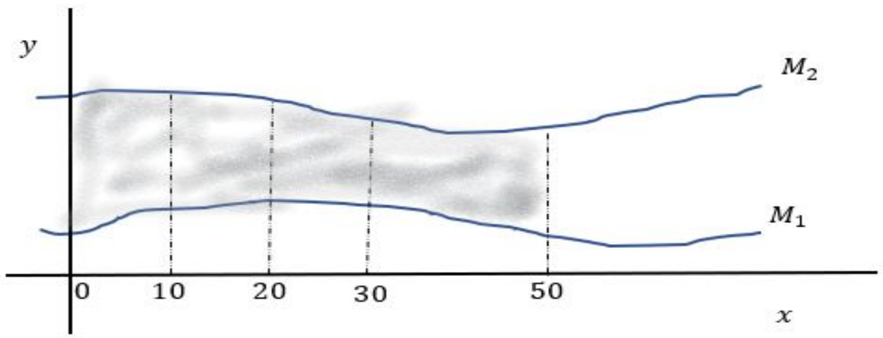
6) A partir de uma linha reta ao longo do terreno à beira de um rio, um agrimensor, considerando um ponto tomado como origem (0), determinou, de x em x metros, a distância de um ponto dessa linha até as duas margens M_1 e M_2 do rio. A tabela abaixo mostra os dados obtidos pelo agrimensor, onde $y(M_1)$ e $y(M_2)$ representam, respectivamente a distância de cada ponto x da linha reta até as margens M_1 e M_2.

x (m)	0	10	20	30	50
$y(M_1)$ (m)	50.8	86.2	136	72.8	51
$y(M_2)$ (m)	113.6	144.5	185	171.2	95.3

Usando integração numérica, determine de forma aproximada a área de superfície do rio no intervalo $[0, 50]$.
Sugestão: Use a *Regra 3/8 de Simpson* no intervalo $[0, 30]$ e a *Regra do Trapézio* no intervalo $[30, 50]$.



DISCUTINDO DOIS EXERCÍCIOS DA LISTA IV



$x\ (m)$	0	10	20	30	50
$y(M_1)\ (m)$	50.8	86.2	136	72.8	51
$y(M_2)\ (m)$	113.6	144.5	185	171.2	95.3

x	0	10	20	30	50
$y(M_2)-y(M_1)$	62.8	58.3	49	98.4	44.3

$$Área \cong \int_0^{50} [y(M_2)-y(M_1)]dx = \int_0^{30} [y(M_2)-y(M_1)]dx + \int_{30}^{50} [y(M_2)-y(M_1)]dx \quad \cong 3238.625$$

3/8 de Simpson $$\int_0^{30} [y(M_2)-y(M_1)]dx \cong \frac{3\times 10}{8}[62.8+3(58.3)+3(49)+98.4] = 1811.625$$

Trapézio $$\int_{30}^{50} [y(M_2)-y(M_1)]dx \cong \frac{20}{2}[98.4+44.3] = 1427$$

DISCUTINDO DOIS EXERCÍCIOS DA LISTA IV

5) Seja a função f dada pela seguinte tabela:

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	1	1.197	1.374	1.503	1.552	1.468

Usando *regras de Simpson*, calcule $\int_0^1 f(x)dx$.

3/8 SIMPSON

$$\int_0^{0.6} f(x)dx \cong \frac{3\times 0.2}{8}[1+3(1.197)+3(1.374)+1.503] = 0.7662$$

1/3 SIMPSON

$$\int_{0.6}^{1} f(x)dx \cong \frac{0.2}{3}[1.503+4(1.552)+1.468] = 0.6119$$

$$\boxed{\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{0.6} f(x)dx + \int_{0.6}^{1} f(x)dx \cong 0.7662 + 0.6119 = 1.3781}$$

DISCUTINDO DOIS EXERCÍCIOS DA LISTA V

6) A massa y de uma dada substância decresce com o passar do tempo t (em anos) de acordo com a equação:

$$\frac{dy}{dt} = -0.1y$$

Considerando que a massa inicial da substância é $y(0) = y_0 = 1000$, use o *Método de Euler*, com $h = 0.5$, para estimar o tempo necessário para que a massa da substância caia pela metade.

$h = 0.5,\ t_0 = 0,\ y_0 = 1000 \qquad f(t, y) = -0.1y$

Método de Euler: $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$ Encontrar k tal que $y_k = 500$

$y_{n+1} = y_n + 0.5(-0.1)y_n = (1 - 0.05)y_n = 0.95y_n$ $\boxed{y_{n+1} = 0.95y_n}$

$\boxed{y_1 = 0.95y_0}$ $y_2 = 0.95y_1 = 0.95(0.95y_0) = (0.95)^2\ y_0$ $\boxed{y_2 = (0.95)^2 y_0}$

$y_3 = 0.95y_2 = 0.95(0.95)^2\ y_0 = (0.95)^3\ y_0$ $\boxed{y_3 = (0.95)^3 y_0}$

Assim, sucessivamente, para $k = 1, 2, \ldots$, obtemos: $\boxed{y_k = (0.95)^k y_0}$

$$\boxed{y_k = 1000(0.95)^k}$$

DISCUTINDO DOIS EXERCÍCIOS DA LISTA V

$$\boxed{y_k = 1000(0.95)^k}$$

Encontrar k tal que $y_k = 500$.

$$y_k = 1000(0.95)^k \quad \Longrightarrow \quad 500 = 1000(0.95)^k \quad \Longrightarrow \quad 0.5 = (0.95)^k$$

$$\Longrightarrow \quad \ln(0.5) = \ln[(0.95)^k] \quad \Longrightarrow \quad \ln(0.5) = k\ln(0.95) \quad \Longrightarrow \quad k \cong \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.95)} = 13.5134$$

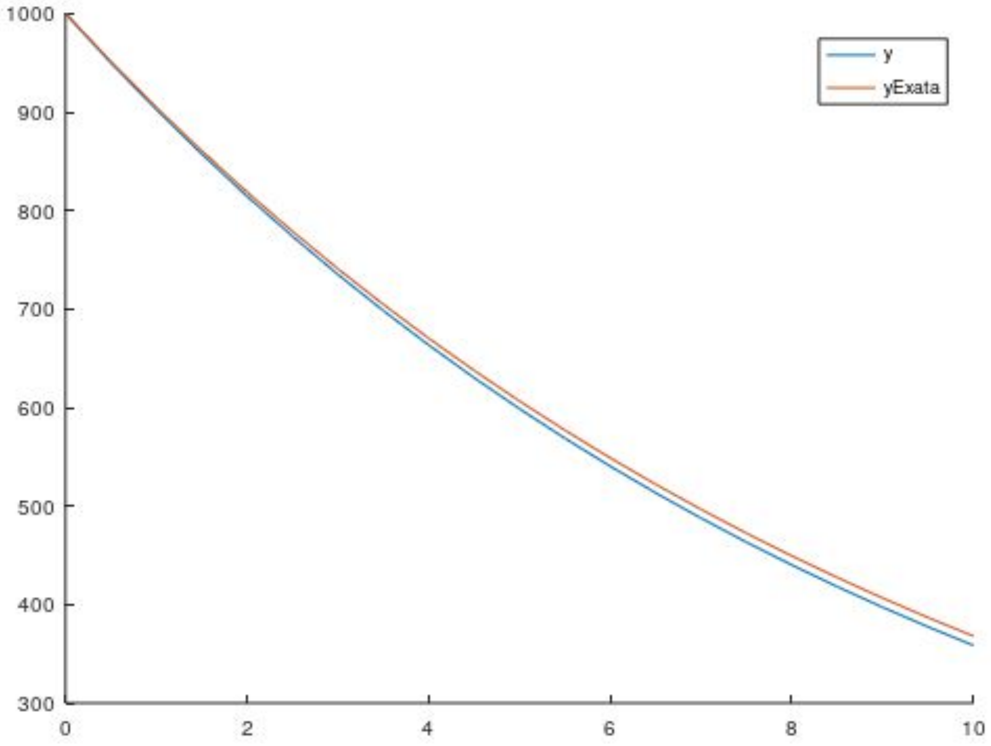
Portanto, a massa da substância será a metade da massa inicial, quando o método atingir, aproximadamente 13.5 passos.

Como foi considerado o tamanho de passo $h = 0.5$ (meio ano), a massa será metade da massa inicial em $13.5134/2 \cong 6.7567$, ou seja, aproximadamente 7 anos (entre 6.5 e 7 anos)

DISCUTINDO DOIS EXERCÍCIOS DA LISTA V

SOLUÇÃO EXATA: $y = 1000e^{-(0.1)t}$

$y(6.7567) = 1000e^{-(0.1)6.7567} = 508.5184$



DECAIMENTO RADIOATIVO

$$\frac{dm}{dt} = -\lambda m\,; \;\; m(0) = m_0$$

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$$

$m(t)$: massa da substância em qualquer tempo t

m_0: massa inicial da substância

λ: constante de decaimento

$t_{1/2}$: meia vida de uma substância: tempo necessário para que a massa da substância se reduza à metade: $t_{1/2} = -\frac{\ln(0.5)}{\lambda}$

DISCUTINDO DOIS EXERCÍCIOS DA LISTA V

7) Uma equação do tipo

$$\frac{dy}{dx} = r(x)y^2 + a(x)y + b(x)$$

é chamada de equação de Riccati. A seguinte tabela apresenta os valores das funções $r(x)$, $a(x)$ e $b(x)$:

	$0 \leq x < 0.05$	$0.05 \leq x < 0.1$	$0.1 \leq x \leq 1$
$r(x)$	1	0	0
$a(x)$	0	1	0
$b(x)$	0	0	1

Considerando a equação de Riccati com a condição inicial $y(0) = 3$, use o *Método Runge-Kutta de ordem 4*, com $h = 0.1$, para obter uma aproximação de y em $x = 0.2$.

$h = 0.1 \quad x_0 = 0, x_1 = 0.1, x_2 = 0.2$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), n = 0,1$$

$$k_1 = f(x_n, y_n), \qquad k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$f(x,y) = r(x)y^2 + a(x)y + b(x)$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \qquad k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

$y_0 = y(0) = 3 \qquad y(0.2) \cong y_2 = ?$

DISCUTINDO DOIS EXERCÍCIOS DA LISTA V

$$f(x,y) = r(x)y^2 + a(x)y + b(x)$$

	$0 \leq x < 0.05$	$0.05 \leq x < 0.1$	$0.1 \leq x \leq 1$
$r(x)$	1	0	0
$a(x)$	0	1	0
$b(x)$	0	0	1

$h = 0.1$ $\quad x_0 = 0, x_1 = 0.1, x_2 = 0.2.$ $\quad y_0 = 3.$

$\boxed{n = 0}$

$\boxed{0 \leq x < 0.05}$

$$k_1 = f(x_0, y_0) = f(0{,}3) = 3^2 = 9$$

$\boxed{0.05 \leq x < 0.1}$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) = f\left(0 + \frac{0.1}{2}, 3 + \frac{0.1}{2}(9)\right) = f(0.05{,}3.45) = 3.45$$

$\boxed{0.05 \leq x < 0.1}$

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_2\right) = f\left(0 + \frac{0.1}{2}, 3 + \frac{0.1}{2}(3.45)\right) = f(0.05{,}3.1725) = 3.1725$$

$\boxed{0.1 \leq x \leq 1}$

$$k_4 = f(x_0 + h, y_0 + hk_3) = f(0 + 0.1, 3 + 0.1k_3) = f(0.1{,}3.31725) = 1$$

$$\boxed{y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 3 + \frac{0.1}{6}(9 + 2(3.45) + 2(3.1725) + 1) = 3.3874}$$

DISCUTINDO DOIS EXERCÍCIOS DA LISTA V

$$f(x,y) = r(x)y^2 + a(x)y + b(x)$$

	$0 \le x < 0.05$	$0.05 \le x < 0.1$	$0.1 \le x \le 1$
$r(x)$	1	0	0
$a(x)$	0	1	0
$b(x)$	0	0	1

$h = 0.1$ $\quad x_0 = 0, x_1 = 0.1, x_2 = 0.2.$ $\quad y_0 = 3.$

$\boxed{y_1 = 3.3874}$

$\boxed{n = 1}$

$\boxed{0.1 \le x \le 1}$

$$k_1 = f(x_1, y_1) = f(0.1, 3.3874) = 1$$

$\boxed{0.1 \le x \le 1}$

$$k_2 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_1\right) = f\left(0.15, 3.3874 + \frac{0.1}{2}(1)\right) = 1$$

$\boxed{0.1 \le x \le 1}$

$$k_3 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_2\right) = f\left(0.15, 3.3874 + \frac{0.1}{2}(1)\right) = 1$$

$\boxed{0.1 \le x \le 1}$

$$k_4 = f(x_1 + h, y_1 + hk_3) = f(0.2, 3.3874 + 0.1(1)) = \quad 1$$

$$\boxed{y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 3.3874 + \frac{0.1}{6}(1 + 2(1) + 2(1) + 1) = 3.4874}$$

$\boxed{y(0.2) \cong y_2 = 3.4874}$

E SE CONTINUARMOS?

DISCUTINDO DOIS EXERCÍCIOS DA LISTA V

$$f(x,y) = r(x)y^2 + a(x)y + b(x)$$

	$0 \le x < 0.05$	$0.05 \le x < 0.1$	$0.1 \le x \le 1$
$r(x)$	1	0	0
$a(x)$	0	1	0
$b(x)$	0	0	1

$h = 0.1$ $\quad x_0 = 0,\ x_1 = 0.1,\ x_2 = 0.2.\quad y_0 = 3.$

$\boxed{y_1 = 3.3874}$ $\quad \boxed{y_2 = 3.4874}$

$\boxed{n = 3}$

$$k_1 = f(x_2, y_2) = 1 \qquad k_2 = f\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{h}{2}k_1\right) = 1$$

$$k_3 = f\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{h}{2}k_2\right) = 1 \qquad k_4 = f(x_2 + h, y_2 + hk_3) = 1$$

$$\boxed{y_3 = y_2 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 3.4874 + \frac{0.1}{6}(1 + 2(1) + 2(1) + 1) = 3.5874}$$

Ou seja: a partir do y_2, todos os y_k são obtidos somando-se 0.1 ao y_{k-1}: $y_k = y_{k-1} + 0.1, k = 2,3, \ldots$

Com o tamanho de passo considerado, $h = 0.1$, só podemos chegar ao y_{10} (uma aproximação de $y(1)$).

EXERCÍCIO DA LISTA V COM PVI DE SEGUNDA ORDEM

Exercício 8: Seja o PVI de segunda ordem:

$$\begin{cases} y'' = -3y' - 2y + e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Use o Método de Euler, com $h = 0.2$, para encontrar uma aproximação de $y(0.4)$.

Fazendo $z = y'$, obtemos:

$$\begin{cases} y' = \mathrm{z} \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} z' = -3z - 2y + e^x \\ z(0) = 2 \end{cases}$$

EXERCÍCIO DA LISTA V COM PVI DE SEGUNDA ORDEM

$$\begin{cases} y' = z = f(x, y, z) \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} z' = -3z - 2y + e^x = g(x, y, z) \\ z(0) = 2 \end{cases}$$

MÉTODO DE EULER

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n, z_n)} \qquad \boxed{z_{n+1} = z_n + hg(x_n, y_n, z_n)}$$

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h\, z_n} \qquad \boxed{z_{n+1} = z_n + h(-3z_n - 2y_n + e^{x_n})}$$

$h = 0.2;\;\; x_0 = 0, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4.$

$y_0 = y(0) = 1, z_0 = z(0) = 2;\; y(0.4) \cong y_2 = ?$

EXERCÍCIO DA LISTA V COM PVI DE SEGUNDA ORDEM

$h = 0.2;\ \ x_0 = 0, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4.$ $\quad y_0 = y(0) = 1, z_0 = z(0) = 2;\ y(0.4) \cong y_2 = ?$

$$y_{n+1} = y_n + 0.2\, z_n \qquad z_{n+1} = z_n + 0.2(-3z_n - 2y_n + e^{x_n})$$

$$y_1 = y_0 + 0.2\, z_0 = 1 + 0.2(2) = 1.4$$

$$z_1 = z_0 + 0.2(-3z_0 - 2y_0 + e^{x_0}) = 2 + 0.2(-3(2) - 2(1) + e^0) = 0.6$$

$$y_2 = y_1 + 0.2\, z_1 = 1.4 + 0.2(0.6) = 1.52$$

Aqui, já se tem a resposta do exercício: $y(0.4) \cong y_2 = 1.52$

$$z_2 = z_1 + 0.2(-3z_1 - 2y_1 + e^{x_1}) = 0.6 + 0.2(-3(0.6) - 2(1.4) + e^{0.2}) = -0.0757$$

Aqui, tem-se que: $y'(0.4) \cong z_2 = -0.0757$