Exercício 4 - INF 280

Werikson Alves - 96708

14/12/2021

Problema do Exercício 3

(Baseado em Hillier Lieberman, pág. 93)

Edmundo adora bifes e batatas. Assim, decidiu entrar em uma dieta regular usando somente esses alimentos (além de alguns líquidos e suplementos vitamínicos) em todas as suas refeições. Ele percebe que essa não é a dieta mais saudável e, portanto, quer certificar-se de que se alimenta das quantidades certas desses dois tipos de alimentos, a fim de atender a determinados requisitos nutricionais. Ele obteve as seguintes informações nutricionais e de custo:

Cada porção de bife custa R$ 4,00 e tem 5g de carboidrato, 20g de proteína e 15g de gordura. Cada porção de batatas custa R$ 2,00 e tem 15g de carboidrato, 5g de proteína e 2g de gordura. Essa refeição precisa conter pelo menos 50g de carboidrato e 40g de proteína, e no máximo 60g de gordura.

Determine TODAS as 10 Soluções Básicas do problema 1. Associe cada uma delas aos pontos (coordenadas) da solução gráfica do problema, e identifique quais delas são Viáveis (SBVs).

Solução:

Dados principais:

Com base na solução do exercício 3, temos que os seguintes dados:

i Minimizar: $C = 4 \cdot x1 + 2 \cdot x2$

ii Carboidratos: $5 \cdot x1 + 15 \cdot x2 \geq 50$

iii Proteínas: $20 \cdot x1 + 5 \cdot x2 \geq 40$

iv Gorduras: $15 \cdot x1 + 2 \cdot x2 \leq 60$

Forma padrão:

Transformando para a forma padrão, encontra-se:

$$\begin{array}{rrrrrl} 5x1 & +15x2 & -x3 & & & = 50 \\ 20x1 & +5x2 & & -x4 & & = 40 \\ 15x1 & +2x2 & & & +x5 & = 60 \end{array}$$

Passando para o formato **Ax = b**, temos:

$$\begin{pmatrix} 05 & 15 & -1 & 0 & 0 \\ 20 & 05 & 0 & -1 & 0 \\ 15 & 02 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Como temos 5 variáveis e 3 equações, o número máximo de possíveis solução básicas deste sistema é encontrado através da equação abaixo, e essas soluções são apresentadas logo em seguidas.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

1. Base: x1, x2, x3

$$\begin{pmatrix} 5 & 15 & -1 \\ 20 & 5 & 0 \\ 15 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}29 \\ -17{,}14 \\ -275{,}71 \end{pmatrix}$$

Figura 1: Base 1.

2. Base: x1, x2, x4

$$\begin{pmatrix} 5 & 15 & 0 \\ 20 & 5 & -1 \\ 15 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}72 \\ 2{,}09 \\ 44{,}88 \end{pmatrix}$$

Figura 2: Base 2.

3. Base: x1, x2, x5

$$\begin{pmatrix} 5 & 15 & 0 \\ 20 & 5 & 0 \\ 15 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}\overline{27} \\ 2{,}91 \\ 35{,}\overline{09} \end{pmatrix}$$

Figura 3: Base 3.

4. Base: x1, x3, x4

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 20 & 0 & -1 \\ 15 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -30 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Figura 4: Base 4.

5. Base: x1, x3, x5

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -40 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Figura 5: Base 5.

6. Base: x1, x4, x5

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 20 & -1 & 0 \\ 15 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 160 \\ -90 \end{pmatrix}$$

Figura 6: Base 6.

7. Base: x2, x3, x4

$$\begin{pmatrix} 15 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 400 \\ 110 \end{pmatrix}$$

Figura 7: Base 7.

8. Base: x2, x3, x5

$$\begin{pmatrix} 15 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 70 \\ 44 \end{pmatrix}$$

Figura 8: Base 8.

9. Base: x2, x4, x5

$$\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}\overline{33} \\ -23{,}\overline{33} \\ 53{,}\overline{33} \end{pmatrix}$$

Figura 9: Base 9.

10. Base: x3, x4, x5

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50 \\ -40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Figura 10: Base 10.

Agora, marcando as bases obtidas na solução gráfica, encontramos a figura abaixo,

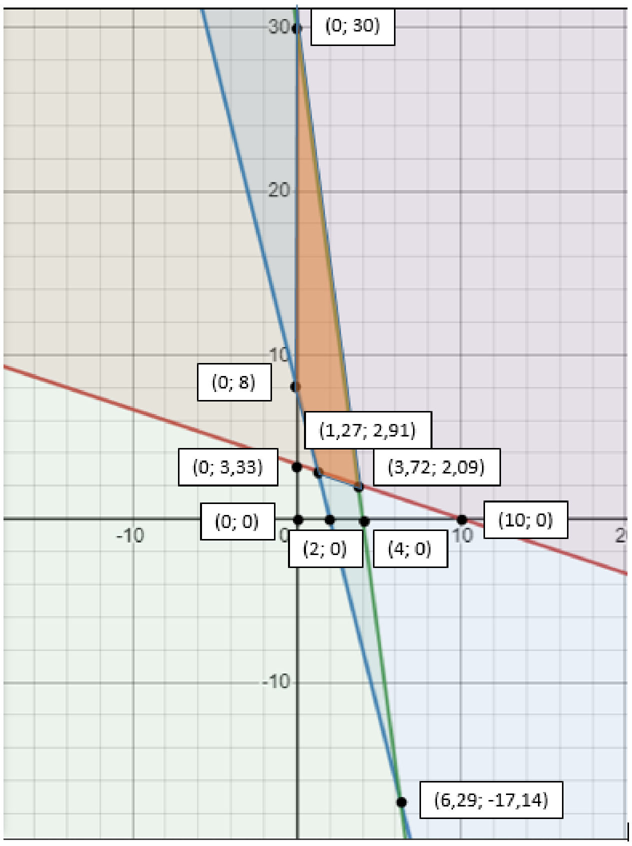

Figura 11: Solução gráfica com as bases e o espaço de soluções.

Pelo gráfico podemos verificar quais as bases que estão dentro e fora do espaço de soluções, com isso podemos determinar se a solução é viável ou não, conforme pode ser visto na Tabela abaixo.

Tabela 1: Tabela com a solução para as bases combinadas.

Base	**Variáveis da base**	**Solução para as variáveis da base**	**Característica da solução**	**Variáveis de decisão**
1	x1,x2,x3	(6,29; -17,14; -275,71)	Inviável	(6,29; -17,14)
2	**x1,x2,x4**	**(3,72; 2,09; 44,88)**	**Viável**	**(3,72; 2,09)**
3	**x1,x2,x5**	**(1,27; 2,91; 35,09)**	**Viável**	**(1,27; 2,91)**
4	x1,x3,x4	(4; -30; 40)	Inviável	(4; 0)
5	x1,x3,x5	(2; -40; 30)	Inviável	(2; 0)
6	x1,x4,x5	(10; 160; -90)	Inviável	(10; 0)
7	**x2,x3,x4**	**(30; 400; 110)**	**Viável**	**(0; 30)**
8	**x2,x3,x5**	**(8; 70; 44)**	**Viável**	**(0; 8)**
9	x2,x4,x5	(3,33; -23,33; 53,33)	Inviável	(0; 3,33)
10	x3,x4,x5	(-50; -40; 60)	Inviável	(0; 0)

Problema 2: Exercício 1 - Questão 2

A Wild West produz dois tipos de chapéus de vaqueiro. O do tipo 1 requer duas vezes mais mão de obra do que a do tipo 2. Se todas as horas de trabalho forem dedicadas só ao do tipo 2, a empresa pode produzir 400 chapéus por dia. Os limites (máximos) de mercado respectivos para os dois tipos são 150 e 200 chapéus dia. O lucro é R$ 8 por chapéu do tipo 1 e R$ 5 por chapéu do tipo 2. Determine um modelo de PL que permita determinar o lucro da empresa.

Resolva o problema 2 pelo método Simplex. Em cada tableau, mostre qual variável entra e qual delas sai da Base, bem como as equações seguidas em cada pivoteamento.

Solução:

Problema 2: Weriksom Alves - 96708 - INF 280

Max: $f = 8x_1 + 5x_2$

$x_1 \leq 150$

$x_2 \leq 200$

$2x_1 + x_2 \leq 400$

$$
\begin{aligned}
f - 8x_1 - 5x_2 &= 0 \\
x_1 + x_3 &= 150 \\
x_2 + x_4 &= 200 \\
2x_1 + x_2 + x_5 &= 400
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 8 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = f
$$

Solução Básica inicial: $x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 200 \\ 400 \end{bmatrix}$; $x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $f = 0$

Iteração 1:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
L_1	f	-8	-5	0	0	0	0
L_2	x_3	1	0	1	0	0	150
L_3	x_4	0	1	0	1	0	200
L_4	x_5	2	1	0	0	+1	400

x_1 entra na base pois possui coeficiente menor

$\begin{cases} 150/1 = 150 \\ 200/0 = \text{ind.} \\ 400/2 = 200 \end{cases}$ x_3 sai da base

pivô $1 \Rightarrow \frac{L_3}{1} = 3$

$L_1 \leftarrow L_1 + 8L_2$

$L_2 \leftarrow L_2$

$L_3 \leftarrow L_3 + 0L_2$

$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$

$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $f = 0$

Iteração 2:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
L_1	f	0	-5	8	0	0	1200
L_2	x_1	1	0	1	0	0	150
L_3	x_4	0	1	0	1	0	200
L_4	x_5	0	1	-2	0	+1	100

x_2 entra na base pois possui coeficiente menor

$\begin{cases} 150/0 = \text{ind} \\ 200/1 = 200 \\ 100/1 = 100 \end{cases}$ x_5 sai da base

pivô $1 \Rightarrow \frac{L_4}{1} = L_4$

$L_1 \leftarrow L_1 + 5L_4$

$L_2 \leftarrow L_2 + 0L_4$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_4$

$L_4 \leftarrow L_4$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $f = 1200$

Iteração 3:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
L_1	f	0	0	-2	0	+5	1200
L_2	x_1	1	0	1	0	0	150
L_3	x_4	0	0	2	1	-1	100
L_4	x_2	0	1	-2	0	+1	100

x_3 entra na base pois possui coeficiente menor

$\begin{cases} 150/1 = 150 \\ 100/2 = 50 \\ 100/-2 = \text{ind} \end{cases}$ x_4 sai da base

pivô $= 1 \Rightarrow \frac{L_3}{2} =$

$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$

$L_3 \leftarrow L_3$

$L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3$

$L_3 = [x_4 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0.5 \ -0.5 \ 50]$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $f = 1700$

Iteração 4:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
f	0	0	0	1	4	1800
x_1	0	0	0	-0.5	0.5	100
x_3	0	0	1	0.5	-0.5	50
x_2	0	1	0	1	0	200

Como os coeficientes de f são todos positivos, isto mostra que alcançamos a solução ótima, logo, podemos parar nesta iteração. Sendo assim, temos que $(x_1; x_2) = (100; 200)$ e $f = 1800$ como solução ótima.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 200 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f = 1800$$