ELT330 – Sistemas de Controle I
Prof. Tarcísio Pizziolo

Aula 4 – Modelagem de Sistemas Físicos

1. Introdução

Em se tratando da modelagem de um sistema real ou do projeto de um novo sistema, uma das primeiras tarefas é a elaboração do modelo físico esquemático, contendo quando possível as equações do modelo. Nessa construção, as hipóteses representam o alicerce e são declaradas pelo analista com base nos seus conhecimentos científicos, informações de modelagem anteriores e de dados medidos, sua experiência técnica e seu bom senso e intuição. Muitas vezes, essas hipóteses simplificam o problema da modelagem, sem perder a precisão necessária. Por exemplo, num sistema massa-mola, todas as massas são consideradas rígidas e de valores constantes, como iremos definir a seguir.

2. Sistemas Mecânicos

Um sistema mecânico é composto por massas, molas e amortecedores, conectados entre si, ou a uma estrutura fixa. O sistema mecânico de translação mais simples, com apenas um grau de liberdade, também denominado sistema padrão, é composto de apenas uma massa, uma mola e um amortecedor. Tal sistema servirá de modelo, para a dedução da equação diferencial do movimento de sistemas com apenas um grau de liberdade. Normalmente suas entradas são forças, torques ou deslocamentos. Também podem ser colocados em movimento através da imposição de condições iniciais, tais como deslocamentos iniciais e/ou velocidades iniciais.

Nesta seção, iremos apresentar as relações entre a excitação e a resposta para os elementos do sistema mecânico.

2.1 Sistemas Mecânicos de Translação

Nos sistemas mecânicos de translação apresentaremos três principais elementos os quais nos proporcionarão o entendimento da analogia destes sistemas com os circuitos elétricos através de suas equações de entrada e saída.

Força

Força é a grandeza física que pode ser definida como a causa que tende a modificar o movimento de um corpo sobre o qual ela age. Para se movimentar um corpo é necessário aplicar-lhe uma força.

Massa

A massa é um elemento de um sistema elástico a qual é considerada como um corpo rígido (não sofre deformação), podendo ganhar ou perder energia cinética conforme sua velocidade aumente ou diminua (aceleração).
Deve-se sempre levar em conta que a massa (ou inércia equivalente) deverá desenvolver a mesma energia cinética do sistema original, ou, em outras palavras, deve-se aplicar o Princípio da Conservação da Energia.

Fórmula a ser aplicada, de acordo com s 2ª Lei de Newton

$$F_{Massa} = M\frac{dv}{dt} = M\frac{d^2x}{dt^2}$$

Onde $\mathbf{F_{massa}}$ é a força aplicada sobre a massa **M**, **M** é a massa e **a** é a aceleração da massa, sendo **v** a velocidade e **x** o deslocamento da massa.

Mola

Entende-se por mola uma peça que possui flexibilidade elástica relativamente alta, isto é, que apresenta grandes deformações quando solicitada. A rigor, no entanto, todas as peças possuem alguma flexibilidade, já que não existe o corpo totalmente rígido. A mola opõe-se à força que a ela está aplicada, armazenando energia potencial elástica.

As molas podem ser classificadas, segundo o comportamento apresentado sob carregamento, em lineares e não-lineares. Uma mola é dita linear quando as deformações que apresenta são diretamente proporcionais às cargas a que ela é submetida, ou seja, quando ela obedece à Lei de Hooke (o que equivale a dizer que ela obedece ao Princípio da Superposição dos Efeitos). É não-linear em caso contrário.

Neste trabalho serão consideradas apenas as molas lineares e na modelagem consideramos que a mola não tem nem massa e nem rigidez.

Fórmula a ser aplicada:

$$\mathrm{F_{Mola} = K.\,x}$$

Onde $\mathbf{F_{mola}}$ é a força aplicada sobre a mola, **K** é a constante de elasticidade da mola e **x** é a deformação linear da mola.

Amortecedor

Denomina-se amortecedor o elemento pelo qual a energia é retirada do sistema elástico. A energia é consumida por atrito entre as peças móveis do sistema e/ou pelo atrito interno entre as moléculas das peças do sistema, havendo uma dissipação de energia mecânica sob forma de calor e/ou som. Um amortecedor, pois, é o componente do sistema mecânico que dissipa energia mecânica do mesmo, assim como o resistor é o componente do sistema elétrico que dissipa energia elétrica do mesmo. Na modelagem consideramos que o amortecedor não tem nem massa nem rigidez e provoca amortecimento.

O amortecimento pode ser classificado em três tipos:

- Amortecimento estrutural (ou histerético) é o que ocorre pelo atrito interno entre moléculas quando o sólido é deformado, fazendo com que a energia seja dissipada pelo material.

- Amortecimento seco sem lubrificação entre as partes do sólido.

$$\mathrm{F_{Amortecedor} = \mu.\,N}$$

Onde $\mathbf{F_{amortecedor}}$ é a força aplicada sobre o sólido, **μ** (adimensional) é o coeficiente de atrito dinâmico entre as superfícies em contato e **N** é a força normal entre as superfícies.

- Amortecimento viscoso (é o que mais ocorre na prática da Engenharia) resulta do atrito viscoso, isto é, aquele que acontece entre um sólido (uma peça) e um fluido viscoso (um óleo lubrificante, por exemplo) interposto entre as peças móveis do sistema mecânico. Assim, o atrito que ocorre entre um eixo e o seu mancal de deslizamento, quando há lubrificação, é um atrito viscoso.

A força de atrito viscoso (ou resistência viscosa) é diretamente proporcional à velocidade relativa entre o sólido e o fluido.

Fórmula a ser aplicada:

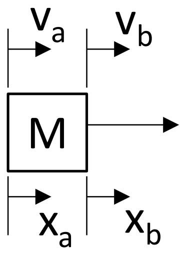
$$\mathrm{F_{Amortecedor} = B.\,v = B\frac{dx}{dt}}$$

Onde $\mathbf{F_{amortecedor}}$ é a força aplicada sobre o sólido, **B** é a constante de atrito viscoso do fluido viscoso e **v** é a velocidade relativa entre o sólido e o fluido.

Características dos Elementos de Sistemas Mecânico de Translação

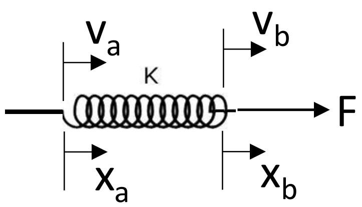
As características apresentadas a seguir auxiliam na modelagem dos sistemas mecânicos de translação.

- A **Massa M** nos sistemas mecânicos é indeformável, ou seja, em todos os pontos da massa **M** os deslocamentos e as velocidades são as mesmas.



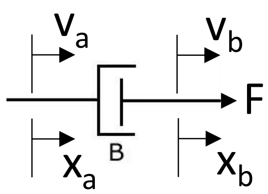
$$\mathbf{v_a = v_b = v \text{ e } x_a = x_b = x}$$

- A **Mola K** nos sistemas mecânicos é deformável, ou seja, os deslocamentos e as velocidades em pontos distintos da mola são diferentes (variáveis).



$$\mathbf{v_a \neq v_b \text{ e } x_a \neq x_b}$$

- O **Amortecedor B** nos sistemas mecânicos é deformável, ou seja, os deslocamentos e as velocidades em pontos distintos do amortecedor são diferentes (variáveis).



$$\mathbf{v_a \neq v_b \text{ e } x_a \neq x_b}$$

Modelagem Matemática de Sistemas Mecânicos Translacionais

Vamos ilustrar a técnica de modelagem através de exemplos. Antes disso, é importante descrever o Princípio de D'Lambert.

Princípio de D'Lambert

Utiliza as condições de equilíbrio estático para resolver problemas dinâmicos, considerando as forças externas aplicadas ao sistema e as forças de reação dos elementos do mesmo. Este princípio é uma modificação da segunda lei de Newton, sendo o seu enunciado:

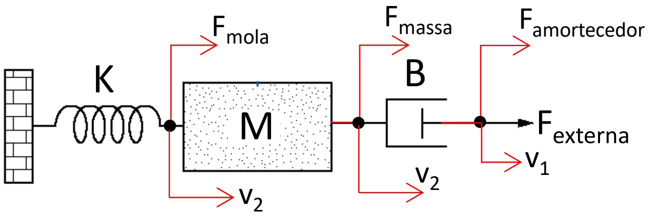
"**Para qualquer corpo, a soma algébrica das forças externas aplicadas e das forças de reação ao movimento, em qualquer direção, é igual a zero**".

$$\sum \mathrm{F}_{\mathrm{Externa}} - \sum \mathrm{F}_{\mathrm{Reações}} = 0$$

Este princípio é aplicável a todos os instantes de tempo. Para aplicá-lo, é necessário fixar uma direção e um sentido positivo de referência, de acordo com o qual, as forças serão positivas ou negativas.

Sistema Massa-Mola-Amortecedor

As forças e as velocidades são descritas no esquema a seguir.



M= Massa do corpo
B = Coeficiente de Atrito viscoso do amortecedor
K = Constante de Elasticidade da mola
x = deslocamento do corpo na horizontal
$F_{externa}$ = Força externa aplicada ao sistema

Sabemos que:

$$F_{Massa} = M\frac{dv}{dt} = M\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F_{Amortecedor} = B.v = B\frac{dx}{dt}$$

$$F_{Mola} = K.x$$

$$F_{Externa} = F_{Amortecedor} + F_{Massa} + F_{Mola}$$

A equação íntegro-diferencial será

$$F_{Externa} = B(v_1 - v_2) + M\frac{dv_2}{dt} + K\int_0^t v_2 dt$$

A equação diferencial que modela o sistema será:

$$\boxed{M\frac{d^2v_2}{dt^2} + B\frac{d(v_1 - v_2)}{dt} + Kv_2 = \frac{d(F_{Externa})}{dt}}$$

2.2 Sistemas Mecânicos de Rotação

Com o conhecimento adquirido nos sistemas mecânicos de translação, torna-se agora mais simples estabelecer as regras para obtenção de sistemas de rotação. É necessário apenas definir os elementos, parâmetros e variáveis deste tipo de sistema.

A variável fundamental será o **Torque**, a qual corresponde à força no sistema de translação. A variável velocidade angular, por sua vez, corresponde à velocidade do sistema de translação.

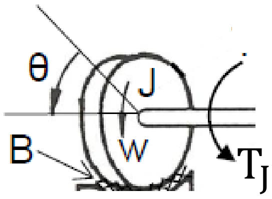
Além disso, para a modelagem de sistemas rotacionais, utilizaremos também a 2ª Lei de Newton, mas para o movimento de rotação, onde substituímos a massa pelo momento de inércia e a aceleração linear pela aceleração angular.

Torque de Inércia

O **Momento de Inércia J** nos sistemas mecânicos de rotação é o grau de dificuldade em se alterar o estado de movimento de um corpo em rotação.

O torque de inércia é originado pela forma do sólido (e não pela massa em si), ou seja, pelo momento de inércia do elemento de rotação.

O torque de inércia da massa **T_J** é proporcional à aceleração angular tal que:



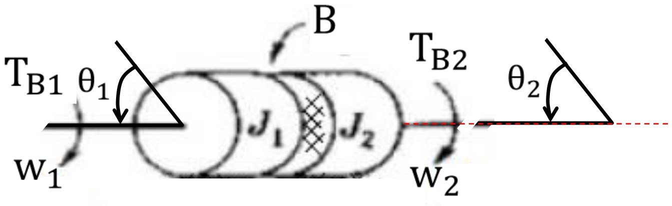
$$T_J = J\frac{dw}{dt} = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Onde **T_J** é o torque de inércia aplicado sobre a massa a qual possui momento de inércia **J**, **w** a velocidade angular e **θ** o deslocamento angular da massa.

Torque de Atrito

É análogo ao atrito do sistema de translação, sendo proporcional à velocidade angular da massa.

O torque de atrito **T_B** é dado por:



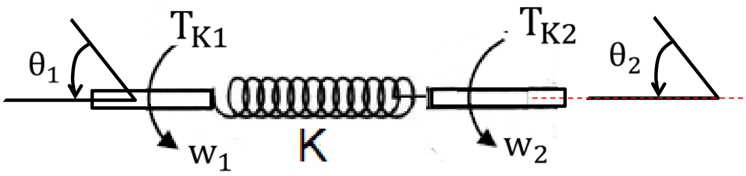
$$T_B = B(w_1 - w_2)$$

$$T_B = B(\frac{d\theta_1}{dt} - \frac{d\theta_2}{dt})$$

Onde **T_B** é o torque de atrito viscoso aplicado sobre a massa, **B** é o coeficiente de atrito viscoso, **w** é a velocidade angular e **θ** é o deslocamento angular da massa.

Torque de Torção

É análogo ao comportamento da mola do sistema de translação, sendo proporcional ao ângulo de deslocamento do eixo. O torque de torção é dado por:



$$T_K = K(\theta_1 - \theta_2)$$

$$T_K = K\int_0^t (w_1 - w_2)dt$$

Onde **T_K** é o torque de torção aplicado sobre o eixo, **K** é o coeficiente de torção e **θ** é o deslocamento angular do eixo.

Analogia entre Sistema Mecânico de Translação e o de Rotação

Sistema de Translação	Sistema de Rotação
Força, F	Torque, T
Aceleração Linear, a	Aceleração Angular, α
Velocidade Linear, v	Velocidade Angular, w
Deslocamento Linear, x	Deslocamento Angular, θ
Massa, M	Momento de Inércia, J
Coeficiente de Atrito Viscoso, B	Atrito de Rotação, B
Coeficiente de Elasticidade, K	Coeficiente de Torção, K

Modelagem Matemática de Sistemas Mecânicos Rotacionais

Vamos ilustrar a técnica de modelagem através de exemplos. Antes disso, é importante descrever o Princípio de D'Lambert.

Princípio de D'Lambert

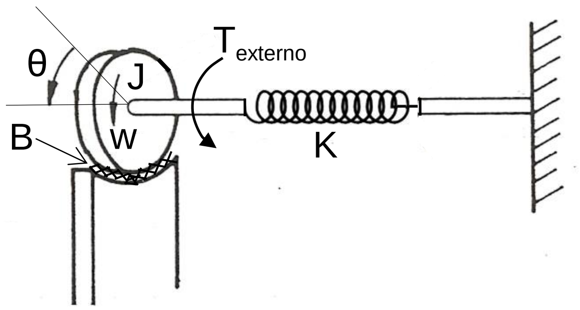
Nos sistemas de rotação, é necessário referir todas as quantidades a um certo eixo de rotação. Aplica-se também o Princípio e D'Lambert modificado: "**Para qualquer corpo, a soma algébrica dos torques externos aplicados e dos torques de reação, em relação a qualquer eixo, é igual a zero**".

$$\sum T_{\text{Externo}} - \sum T_{\text{Reações}} = 0$$

Este princípio é aplicável a todos os instantes de tempo.

Sistema Torque-Atrito-Torção

Seja o sistema abaixo:



Onde:

J = Momento de Inércia da Massa
B = Coeficiente de Atrito Viscoso
K = Coeficiente de Torção do eixo
θ = Deslocamento Angular da Massa
w = Velocidade Angular
$T_{externo}$ = Torque externo aplicado ao Sistema

Sabemos que:

$$T_J = J\frac{dw}{dt} = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$T_B = B.w = B\frac{d\theta}{dt}$$

$$T_K = K.\theta$$

Desta forma, para o sistema torque-atrito-torção pode-se escrever que:

$$T_{Externo} = T_J + T_B + T_K$$

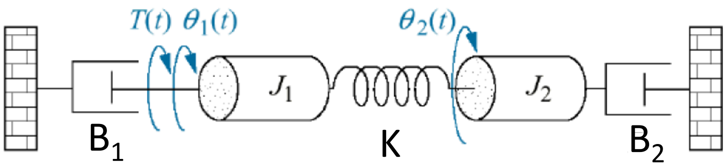
A equação íntegro-diferencial será:

$$T_{Externo} = J\frac{dw}{dt} + Bw + K\int_0^t wdt$$

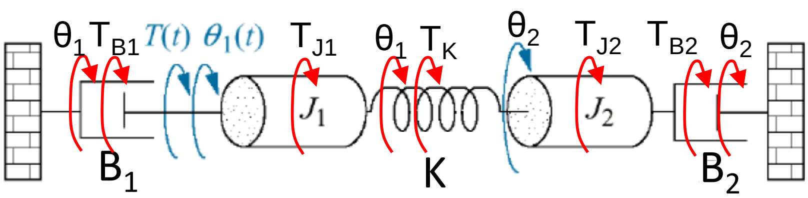
A equação diferencial que modela o sistema será:

$$\boxed{J\frac{d^2w}{dt^2} + B\frac{dw}{dt} + Kw = \frac{d(T_{Externo})}{dt}}$$

Exemplo: Determinar as equações diferenciais para o sistema mecânico dado a seguir, sendo T(t) a entrada e $\theta_1(t)$ a saída.



Os torques e as velocidades angulares são descritos no esquema a seguir.



As equações diferenciais serão:

$$T = T_{B1} + T_{J1} + T_K \Rightarrow T = B_1\frac{d\theta_1}{dt} + J_1\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + K(\theta_1 - \theta_2)$$

$$T_K = T_{J2} + T_{B2} \Rightarrow \overbrace{K(\theta_1 - \theta_2)}^{=T_K} = J_2\frac{d^2\theta_2}{dt^2} + B_2\frac{d\theta_2}{dt}$$

3. Sistemas Hidráulicos

Os fluidos, estejam na forma líquida ou gasosa, constituem os meios mais versáteis para a transmissão de sinais e de potência, sendo largamente empregados na indústria, principalmente em processos químicos, sistemas automáticos de controle, atuadores, automação de máquinas, etc. Os sistemas fluidos são normalmente interconectados a sistemas mecânicos através de bombas, compressores, válvulas e cilindros.

Na análise de sistemas hidráulicos envolvendo o fluxo de fluidos, tem-se a necessidade de distinguir os regimes de escoamento em fluxo laminar e fluxo turbulento, de acordo com o valor do número de Reynolds. Se o número de Reynolds for maior do que aproximadamente 3.000 - 4.000, então o fluxo é turbulento. O fluxo é laminar se o número de Reynolds for menor do que aproximadamente 2.000. No caso laminar, o fluxo se dá segundo linhas de escoamento, sem turbulência. Sistemas envolvendo escoamento turbulento, na maioria das vezes, têm de ser representados por equações diferenciais não-lineares, enquanto sistemas envolvendo escoamento laminar podem ser representados por equações diferenciais lineares.

Uma análise exata de um sistema hidráulico usualmente não é viável, por causa da sua natureza distribuída (propriedades distribuídas ao longo da massa) e não linear (resultando em modelos matemáticos não lineares).

Contudo, na maioria dos casos, a operação de um sistema hidráulico se dá nas proximidades de um ponto de operação, de modo que ele pode ser linearizado em torno desse ponto, o que faz com que obtenhamos modelos lineares em termos de variáveis incrementais. Desta forma estudaremos os sistemas envolvendo escoamento laminar.

Tendo em vista que os sistemas hidráulicos envolvem o escoamento e a acumulação de líquidos, as variáveis usadas para descrever o seu comportamento dinâmico são a vazão volumétrica [m^3/s], o volume [m^3], a altura de líquido [m] e a pressão [N/m^2] (ou [Pa]). Além disso, os sistemas hidráulicos exibem três tipos de propriedades que podem ser aproximadas por parâmetros concentrados: **resistência, capacitância e inertância**. Apresentaremos apenas as duas primeiras propriedades, já que a inertância, que leva em conta a energia cinética do líquido, normalmente é desprezível para as baixas velocidades encontradas industrialmente.

3.1. Resistência Hidráulica R_h

Considere o fluxo através de uma pequena tubulação na saída de um reservatório. A resistência hidráulica R_h ao fluxo de líquido nesta restrição é definida como a variação na diferença de nível necessária para causar uma variação unitária na vazão, isto é,

$$R_h = \frac{\text{Variação na diferença de nível (m)}}{\text{Variação na vazão (m}^3\text{/s)}}$$

Se o escoamento através da resistência hidráulica R_h for laminar, a relação entre o valor de regime permanente da vazão e o valor de regime permanente da altura de líquido no reservatório, em relação à resistência hidráulica, é dada por:

$$q(t) = K.h(t) \Rightarrow h(t) = \frac{q(t)}{K}$$

Onde:

q(t) = valor de regime permanente da vazão de líquido, m^3/s

K = coeficiente hidráulico, m^2/s

h(t) = valor de regime permanente do nível de líquido, m

Para escoamento laminar, a resistência hidráulica R_h é obtida a partir de,

$$R_h = \frac{dh(t)}{dq} = \frac{d}{dq}\left(\frac{q}{K}\right) \Rightarrow R_h = \frac{1}{K}$$

A resistência hidráulica no escoamento laminar é constante e é análoga à resistência elétrica.

Se o escoamento através da resistência hidráulica R_h for turbulento, o valor em regime permanente da vazão é dado por,

$$q(t) = K\sqrt{h(t)} \Rightarrow \sqrt{h(t)} = \frac{q(t)}{K}$$

Onde:

q(t) = valor de regime permanente da vazão de líquido, m^3/s

K = coeficiente, $m^{2,5}$/s

h(t) = valor de regime permanente do nível de líquido, **m**

A resistência hidráulica R_h para o escoamento turbulento é obtida a partir de,

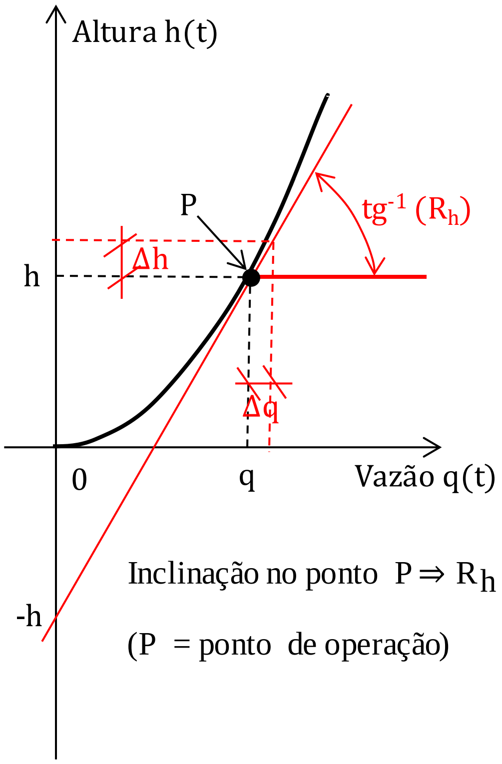
$$q = K\sqrt{h} \Rightarrow \sqrt{h} = \frac{q}{K} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{h}}\frac{dh}{dq} = \frac{1}{K} \Rightarrow \frac{dh}{dq} = \frac{2\sqrt{h}}{K}$$

Então,

$$R_h = \frac{dh(t)}{dq} \Rightarrow R_h = \frac{2\sqrt{h(t)}}{q}$$

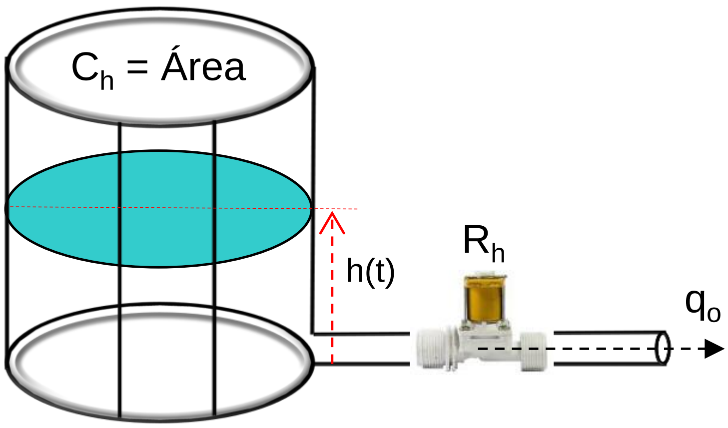
O valor da resistência hidráulica R_h em regime turbulento depende da vazão e da altura do nível de líquido. O valor de R_h, no entanto, pode ser considerado constante se as variações na altura do nível e na vazão forem pequenas.

Em muitos casos práticos, o valor do coeficiente K, que depende tanto do coeficiente de escoamento como da área da restrição (resistência), não é conhecido. A resistência pode ser então determinada construindo-se o gráfico da curva de altura de coluna *versus* vazão, com base em dados experimentais, e calculando-se posteriormente a inclinação da curva na condição de operação.



Inclinação no ponto $P \Rightarrow R_h = \frac{\Delta h}{\Delta q}$

(P = ponto de operação)



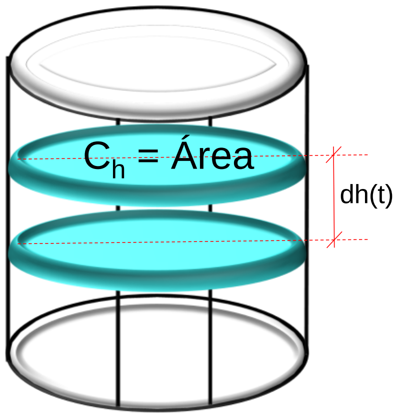
$$R_h = \frac{h(t)}{q_o(t)} \Rightarrow \boxed{q_o = \frac{h(t)}{R_h(t)}}$$

3.2. Capacitância Hidráulica C_h

A capacitância hidráulica C_h de um reservatório é definida como sendo a variação na quantidade de líquido armazenado necessária para causar uma variação unitária da altura do nível de líquido.

$$C_h = \frac{\text{Variação no volume de líquido armazenado } (m^3)}{\text{Variação no potencial } (m)}$$

Deve-se notar que a capacidade (m^3) e a capacitância hidráulica (m^2) são grandezas diferentes. A capacitância hidráulica C_h do reservatório é igual à área de sua seção reta. Se a área de seção reta do reservatório for constante, a capacitância hidráulica também será constante para qualquer altura do nível de líquido.

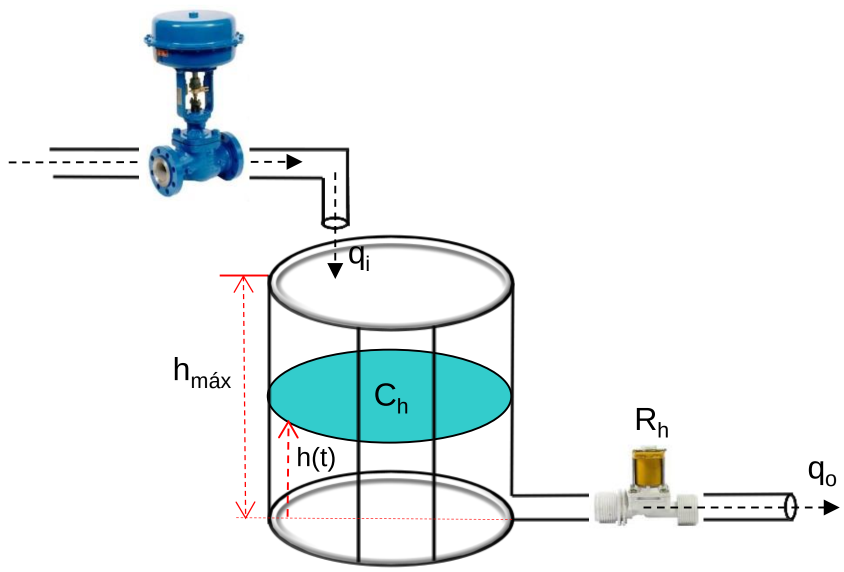


A quantidade adicional (volume) de líquido armazenada no reservatório considerando a capacitância hidráulica C_h e a altura h(t) é dada por,

$$V_{adicional} = C_h \frac{dh(t)}{dt}$$

3.3 Nível de Líquido

Seja o reservatório dado a seguir no qual pretende-se controlar o nível h(t) de um líquido em função da vazão de entrada q_i controlada por uma válvula de controle V_c e da vazão de saída q_o controlada por uma válvula solenóide V_s. O reservatório tem um limite máximo $h_{máx}$ para o nível do líquido.



Considerando que o sistema seja linear, ou linearizado, pode-se obter a equação diferencial que descreve o sistema. A vazão de entrada $q_i(t)$ é igual à quantidade adicional armazenada no reservatório mais a vazão de saída $q_o(t)$ durante um pequeno intervalo de tempo dt.

Daí,

$$\underbrace{q_i}_{\substack{\text{vazão} \\ \text{de entrada}}} = \underbrace{C_h \frac{dh}{dt}}_{\substack{\text{quantidade adicional} \\ \text{armazenada no} \\ \text{reservatório}}} + \underbrace{q_o}_{\substack{\text{vazão de} \\ \text{saída}}}$$

A relação entre q_o e h(t) é dada por,

$$R_h = \frac{h(t)}{q_o(t)} \Rightarrow q_o = \frac{h(t)}{R_h(t)}$$

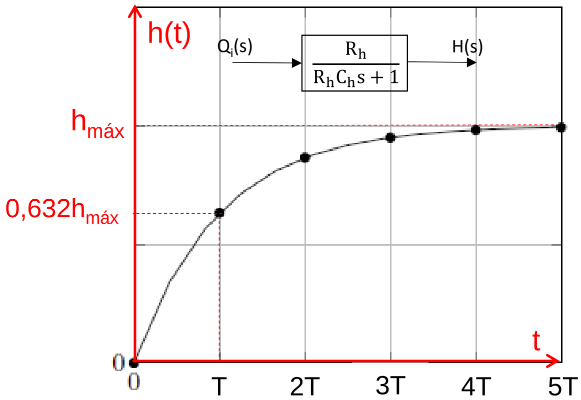
A equação diferencial para o sistema para um valor constante de R_h é,

$$q_i = C_h \frac{dh}{dt} + q_o \Longrightarrow C_h \frac{dh}{dt} + \frac{h}{R_h} = q_i \Longrightarrow \boxed{\frac{dh}{dt} + \frac{1}{R_h C_h} h = \frac{1}{C_h} q_i}$$

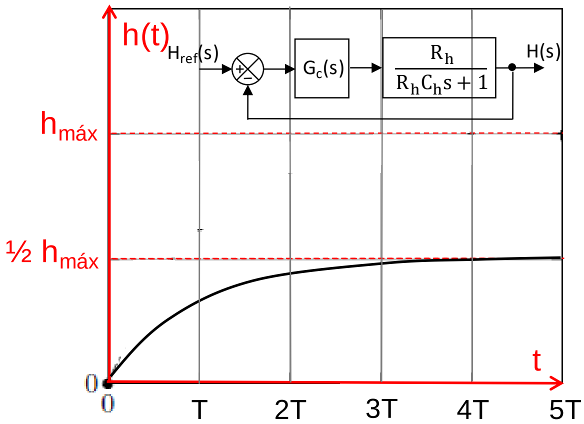
Admitindo-se $q_i(t)$ como grandeza de entrada e h(t) como grandeza de saída, a função de transferência do sistema é,

$$\boxed{\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R_h}{R_h C_h s + 1}}$$

Assim, dado o valor da entrada $q_i(t)$, aplicando essa função de transferência pode-se determinar o valor da saída h(t). Em malha aberta o nível h(t) irá tender ao valor máximo ($h_{máx}$) no estado permanente.

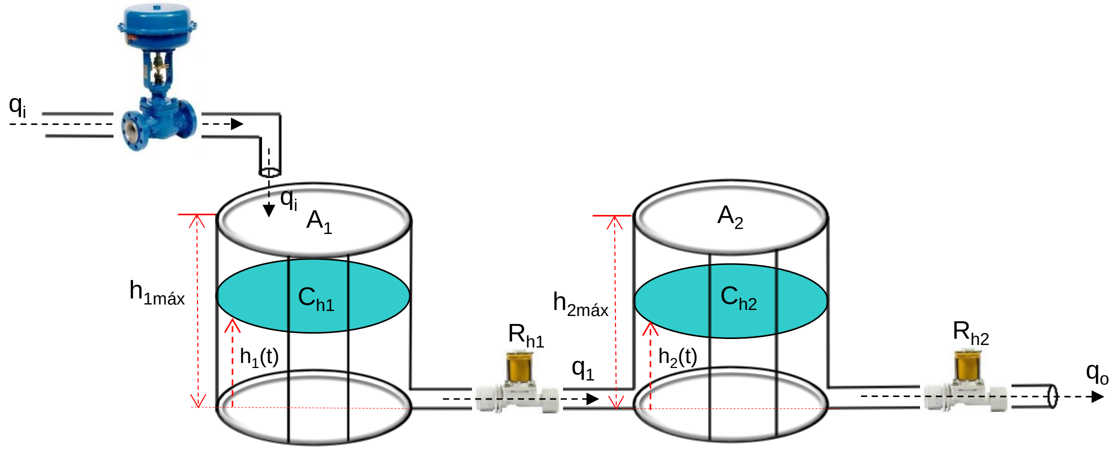


No entanto, em malha fechada pode-se controlar o valor de h(t) aplicando um controlador. Esta etapa será vista com mais profundidade no decorrer da disciplina.



3.4 Nível de Líquido com Interação

Seja o sistema de controle de níveis de líquido dado pela figura a seguir.



Nesse sistema as variáveis a serem controladas são $h_1(t)$ e $h_2(t)$, as quais são os níveis do líquido nos reservatórios 1 e 2 respectivamente.
Para que se mantenha o controle dos níveis $h_1(t)$ e $h_2(t)$ deve-se considerar que,

$$\underbrace{q_i}_{\substack{\text{vazão}\\ \text{de entrada}}} = \underbrace{C_{h1}\frac{dh_1}{dt}}_{\substack{\text{quantidade adicional}\\ \text{armazenada no}\\ \text{reservatório 1}}} + \underbrace{q_1}_{\substack{\text{vazão de}\\ \text{saída no}\\ \text{reservatório 1}}}$$

e

$$\underbrace{q_1}_{\substack{\text{vazão de}\\ \text{entrada no}\\ \text{reservatório 2}}} = \underbrace{C_{h2}\frac{dh_2}{dt}}_{\substack{\text{quantidade adicional}\\ \text{armazenada no}\\ \text{reservatório 2}}} + \underbrace{q_o}_{\substack{\text{vazão de}\\ \text{saída no}\\ \text{reservatório 2}}}$$

Substituindo $q_1(t)$ e $q_o(t)$ em função de $h_1(t)$ e de $h_2(t)$ tem-se,

$$\begin{cases} q_i = C_{h1}\dfrac{dh_1}{dt} + q_1 \Rightarrow q_i = C_{h1}\dfrac{dh_1}{dt} + \dfrac{h_1 - h_2}{R_{h1}} \\ q_1 = C_{h2}\dfrac{dh_2}{dt} + q_o \Rightarrow \dfrac{h_1 - h_2}{R_{h1}} = C_{h2}\dfrac{dh_2}{dt} + \dfrac{h_2}{R_{h2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_i = C_{h1}\dfrac{dh_1}{dt} + q_1 \Rightarrow \boxed{C_{h1}\dfrac{dh_1}{dt} + \dfrac{h_1 - h_2}{R_{h1}} = q_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)} \\ q_1 = C_{h2}\dfrac{dh_2}{dt} + q_o \Rightarrow \boxed{C_{h2}\dfrac{dh_2}{dt} + \left(\dfrac{1}{R_{h2}} + \dfrac{1}{R_{h1}}\right)h_2 = \dfrac{h_1}{R_{h1}} \ldots\ldots (2)} \end{cases}$$

Aplicando a Transformada de Laplace nas equações (1) e (2) obtém-se,

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left\{C_{h1}\dfrac{dh_1}{dt} + \dfrac{h_1 - h_2}{R_{h1}}\right\} = \mathcal{L}\{q_i\} \\ \mathcal{L}\left\{C_{h2}\dfrac{dh_2}{dt} + \left(\dfrac{1}{R_{h2}} + \dfrac{1}{R_{h1}}\right)h_2\right\} = \mathcal{L}\left\{\dfrac{h_1}{R_{h1}}\right\} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} sC_{h1}H_1(s) + \dfrac{H_1(s) - H_2(s)}{R_{h1}} = Q_i(s) \ldots\ldots\ldots (3) \\ sC_{h2}H_2(s) + \left(\dfrac{1}{R_{h2}} + \dfrac{1}{R_{h1}}\right)H_2(s) = \dfrac{H_1(s)}{R_{h1}} \ldots (4) \end{cases}$$

Pode-se então, por manipulações algébricas das equações (3) e (4), determinar as funções de transferências considerando $q_i(t)$ como a entrada e $h_1(t)$ e $h_2(t)$ como saídas. Assim, de (4) tem-se que,

$$sC_{h2}H_2(s) + \left(\frac{1}{R_{h2}} + \frac{1}{R_{h1}}\right)H_2(s) = \frac{1}{R_{h1}}H_1(s) \Longrightarrow \boxed{H_1(s) = \left[sR_{h1}C_{h2} + \left(\frac{R_{h1}+R_{h2}}{R_{h2}}\right)\right]H_2(s)}$$

Substituindo $H_1(s)$ na equação (4),

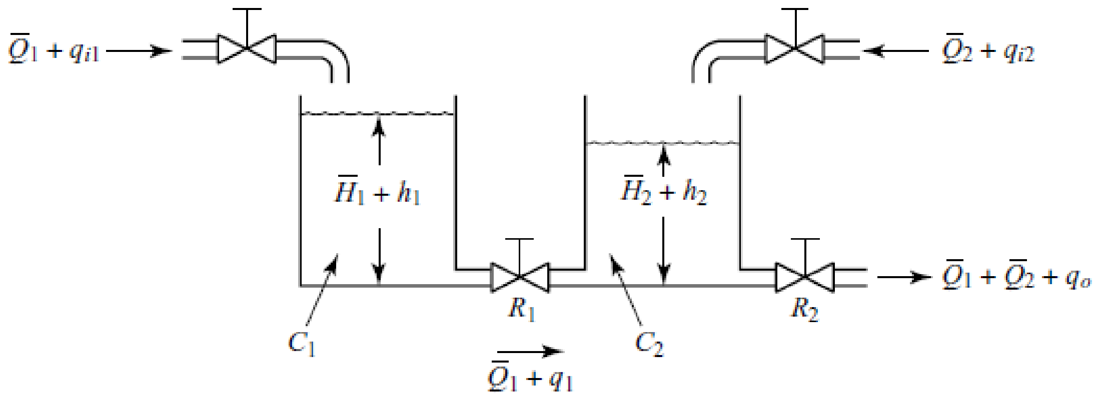
$$\boxed{\frac{H_2(s)}{Q_i(s)} = \frac{R_{h2}}{[R_{h1}R_{h2}C_{h1}C_{h2}s^2 + (R_{h1}C_{h1} + R_{h2}C_{h1} + R_{h2}C_{h2})s + 1]}}$$

Substituindo $H_2(s)$ na equação anterior,

$$\boxed{\frac{H_1(s)}{Q_i(s)} = \frac{R_{h1}R_{h2}C_{h2}s + R_{h1} + R_{h2}}{[R_{h1}R_{h2}C_{h1}C_{h2}s^2 + (R_{h1}C_{h1} + R_{h2}C_{h1} + R_{h2}C_{h2})s + 1]}}$$

Com as duas funções de transferência acima, é possível fazer a análise do sistema de nível de líquidos.

Exemplo: Considere o sistema de nível de líquido mostrado na figura a seguir. Nesse sistema $\bar{Q}_1$ e $\bar{Q}_2$ são as taxas de regime permanente das vazões de entrada. $\bar{H}_1$ e $\bar{H}_2$ são as alturas dos níveis em regime permanente. As grandezas $q_{i1}, q_{i2}, h_1, h_2, q_1$ e q_0 são consideradas pequenas variações. Obtenha as equações diferenciais para o sistema quando h_1 e h_2 são as saídas e q_{i1} e q_{i2} são as entradas.



Solução:

Para que se mantenha o controle dos níveis $h_1(t)$ e $h_2(t)$ deve-se considerar que,

$$q_{i1} = C_1\frac{dh_1}{dt} + q_1$$

$$q_1 + q_{i2} = C_2\frac{dh_2}{dt} + q_0$$

Mas as equações das resistências hidráulicas podem ser escritas em função das vazões e alturas:

$$R_1 = \frac{h_1 - h_2}{q_1} \Rightarrow q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1}$$

$$R_2 = \frac{h_2}{q_0} \Rightarrow q_0 = \frac{h_2}{R_2}$$

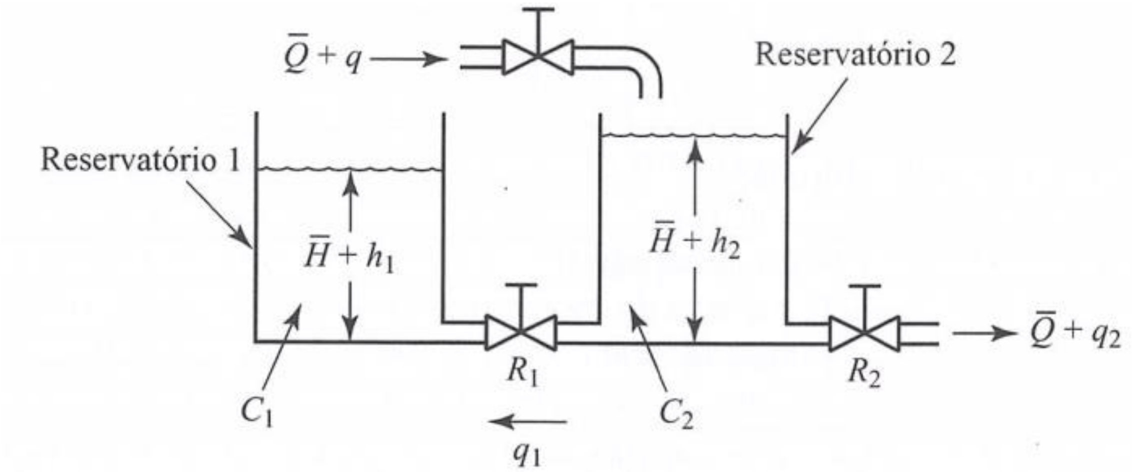
Dessa forma, encontramos as seguintes equações diferenciais do sistema:

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{C_1}\left(q_{i1} - \frac{h_1 - h_2}{R_1}\right)$$

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{C_2}\left(\frac{h_1 - h_2}{R_1} + q_{i2} - \frac{h_2}{R_2}\right)$$

Exercício: Considere o sistema de nível de dois tanques mostrados na figura a seguir. As variáveis em letras minúsculas são as pequenas variações sofridas no sistema a partir da variação do fluxo de entrada de $\bar{Q}$ para $\bar{Q}+q$. Isso provoca uma pequena variação nos níveis h_1 e h_2 dos dois reservatórios e nos fluxos q_1 e q_2. Faça a modelagem matemática desse sistema, encontrando as funções de transferência quando:

- **a)** q é a entrada e h_2, a saída;
- **b)** q é a entrada e q_2, a saída; e
- **c)** q é a entrada e h_1, a saída.



A solução deste exercício fica como uma tarefa de fixação do conteúdo.

4. Sistemas Térmicos

Sistemas térmicos são aqueles que envolvem transferência de calor de uma substância para outra.

Os sistemas térmicos podem ser analisados em termos de resistência e de capacitância térmicos, embora a capacitância térmica e a resistência térmica não possam ser representadas precisamente como parâmetros concentrados. por equações diferenciais ordinárias, com as suas já conhecidas vantagens.

Admite-se, como hipótese simplificadora, que as substâncias que são caracterizadas pela resistência ao fluxo de calor têm capacitância térmica desprezível, e que aquelas que são caracterizadas pela capacitância térmica têm resistência desprezível ao fluxo de calor.

Há três diferentes maneiras pelas quais o calor pode fluir de uma substância para outra: condução, convecção e radiação.

Consideram-se aqui somente os processos de condução e convecção.

A maioria dos fenômenos térmicos presentes nos sistemas de controle de processos não envolve transmissão de calor por radiação.

Para transferência de calor por condução ou convecção tem-se que,

$$q = K\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{q}{K}$$

Onde:

q = taxa de fluxo de calor, kcal/s

$\Delta\theta$ = diferença de temperatura, °C

K = coeficiente térmico, kcal/s °C

O coeficiente térmico K é dado por,

$$K = \frac{kA}{\Delta x}$$ para condução, e

$K = H.A$ para a convecção.

Onde

k = condutividade térmica, kcal/m.s.°C

A = área normal ao fluxo de calor, m^2

Δx = espessura do condutor, m

H = coeficiente de convecção, kcal/m^2.s.°C

4.1. Resistência Térmica R_T

A resistência térmica R_T para transferência de calor entre duas substâncias pode ser definida como,

$$R_T = \frac{\text{variação na diferença de temperatura, °C}}{\text{variação na taxa de fluxo de calor, kcal/s}}$$

Então, a resistência térmica para transferência de calor por condução ou por convecção é dada por,

$$R_T = \frac{d(\Delta\theta)}{dq} \Rightarrow R_T = \frac{d(\frac{q}{K})}{dq} \Rightarrow R_T = \frac{1}{K}$$

Uma vez que os coeficientes de condutividade e de convecção térmica são aproximadamente constantes, a resistência térmica tanto para condução quanto para convecção será constante.

4.2. Capacitância Térmica C_T

A capacitância térmica C_T é definida por,

$$C_T = \frac{\text{variação no calor armazenado, kcal}}{\text{variação na temperatura, °C}}$$

Ou

$$C_T = M.c$$

Onde

M = massa da substância considerada, kg

c = calor específico da substância, kcal/kg °C

Uma equação que é muito utilizada quando o sistema é modelado no espaço de estados é:

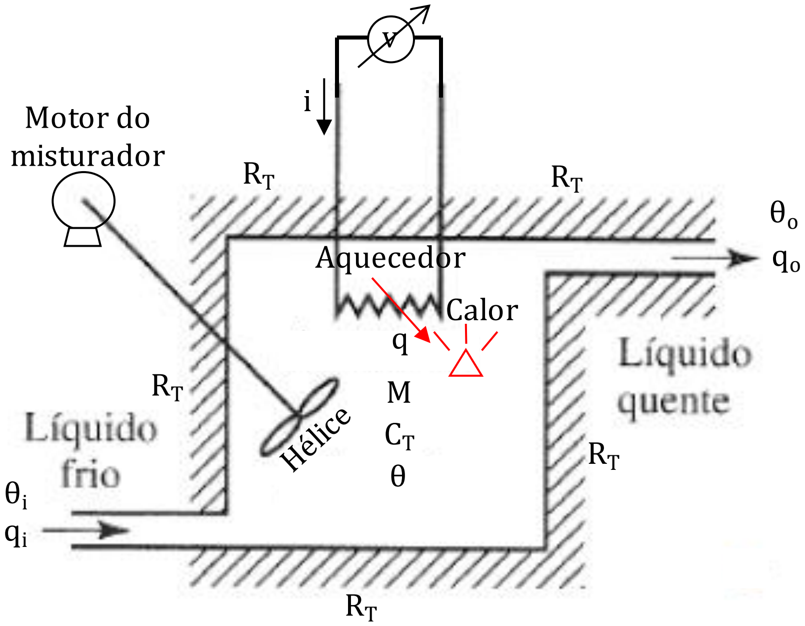
$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{1}{C_T}[q_i(t) - q_o(t)]$$

onde:

$\frac{d\theta(t)}{dt}$ é a variação na temperatura, $q_i(t)$ é o fluxo de calor que entra em um corpo e $q_o(t)$ o fluxo de calor que sai do mesmo corpo.

4.3 Sistema Térmico de Aquecimento

Seja um sistema térmico utilizado para aquecer um líquido dentro de um reservatório dado pelo esquema a seguir.



Definindo-se:
θ_i = temperatura do líquido de entrada, ºC
θ_o = temperatura do líquido de saída, ºC
$\theta = (\theta_o - \theta_i)$ = diferença de temperatura, ºC
M = massa do líquido no reservatório, kg
c = calor específico do líquido, kcal/kg ºC
R_T = resistência térmica, °C.s/kcal
C_T = capacitância térmica, kcal/ºC
q = taxa de entrada de calor fornecido pelo aquecedor, kcal/s
q_i = taxa de entrada de calor, kcal/s
q_o = taxa de saída de calor, kcal/s

Supondo que a temperatura de entrada do líquido seja mantida constante e que a taxa de entrada de calor no aquecedor seja q_i. A temperatura do líquido que sai irá variar de $\theta = (\theta_i - \theta_o)$.

Os parâmetros R_T e C_T são obtidos, respectivamente, por:

$$R_T = \frac{\theta}{q_o}$$

$$C_T = M.c$$

Considerando que a diferença entre a taxa de calor de entrada q_i e a taxa de calor saída q_o e igual taxa de calor fornecida pelo aquecedor q,

$$q = q_i - q_o$$

Sabe-se que a taxa de calor q fornecida pelo aquecedor à massa M do líquido contida no reservatório é igual à sua capacitância térmica C_T vezes a taxa de variação da temperatura dentro do reservatório. Assim a equação diferencial para este sistema é dada por,

$$C_T \frac{d\theta}{dt} = q_i - q_o$$

Substituindo

$$q_o = \frac{\theta}{R_T}$$

a equação diferencial pode ser reescrita como,

$$C_T \frac{d\theta}{dt} = q_i - \frac{\theta}{R_T} \Rightarrow \boxed{\frac{d\theta}{dt} + \left(\frac{1}{R_T C_T}\right)\theta = q_i}$$

A função de transferência relacionando θ e q_i é dada por,

$$\boxed{\frac{\theta(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{R_T C_T s + 1}}$$

Se o sistema térmico apresentado for sujeito tanto a variações na temperatura do líquido que flui na entrada como na taxa de entrada de calor, enquanto a taxa do fluxo de líquido é mantida constante, a variação θ na temperatura do líquido que flui na saída pode ser dada pela seguinte equação,

$$\boxed{C_T \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{R_T} = \theta_i + R_T q_i}$$

5. Sistemas Eletromecânicos

Veremos, a seguir, a modelagem matemática de sistemas eletromecânicos, ou seja, sistemas que combinam a modelagem elétrica com a modelagem mecânica. Tais sistemas tratam da conversão de energia eletromagnética em energia mecânica com o objetivo de acionar um sistema mecânico, como os já estudados até aqui.

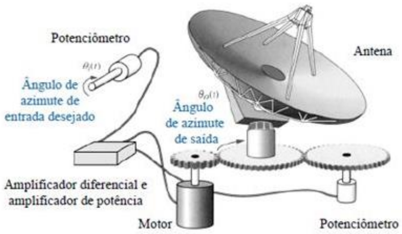
5.1 Generalidades

Um componente eletromecânico muito utilizado é o motor de corrente contínua, o qual converte energia elétrica em corrente contínua em energia mecânica rotativa.

Devido a recursos tais como torque elevado, possibilidade de controle de velocidade sobre uma ampla faixa de valores, portabilidade, característica velocidade-torque bem comportada e adaptabilidade a vários tipos de métodos de controle, os motores de corrente contínua ainda são usados largamente em numerosas aplicações de controle, incluindo manipuladores robóticos, mecanismos de transporte de fitas, acionadores de disco, máquinas-ferramentas e atuadores de servoválvulas.

Para aplicação em sistemas de automação de posição, um motor de corrente contínua fornece um deslocamento angular como saída para uma tensão de entrada. Esta tensão pode ser aplicada no campo estatórico (estator) ou na armadura rotórica (rotor).

O esquema da figura a seguir ilustra um sistema automático de posicionamento de antena parabólica aplicando um motor de corrente contínua.



O ângulo de posicionamento de entrada é determinado pelo ajuste de tensão em um potenciômetro através do ângulo de entrada θ_i desejado. Pelo sistema de engrenagens o motor de corrente contínua atua posicionando a antena parabólica em um ângulo de saída θ_o.

A função de transferência do motor de corrente contínua será deduzida por meio de uma aproximação linear do motor real, e os efeitos de segunda ordem, como histerese e queda de tensão nas escovas, serão desprezados.

5.1 Motor de Corrente Contínua

Um motor de corrente contínua possui basicamente dois elementos importantes na sua constituição física, a armadura (rotor) e o campo magnético do imã permanente (estator).

As figuras a seguir apresentam a armadura (rotor) e o circuito de campo magnético (estator) de um motor de corrente contínua.

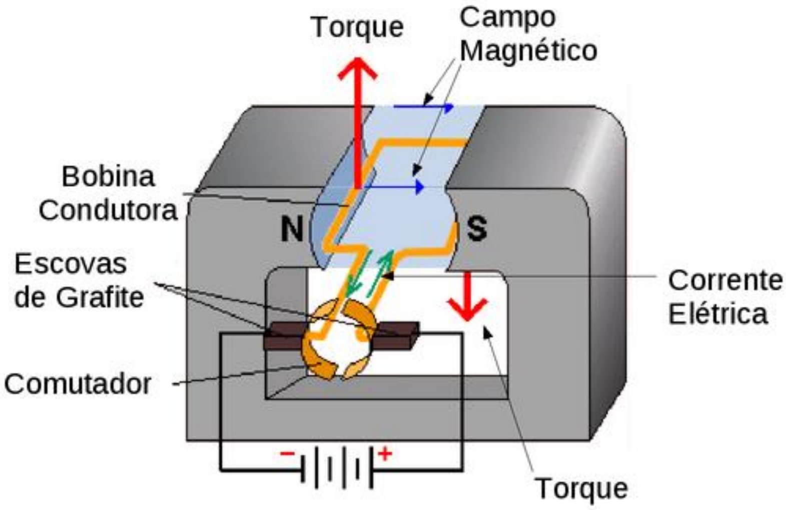
Rotor

Circuito de Campo

O campo magnético pode ser gerado por um imã permanente ou por meio de bobinas que serão alimentadas por corrente, as quais são enroladas nos polos do motor CC para assim criar as linhas de campo magnético.

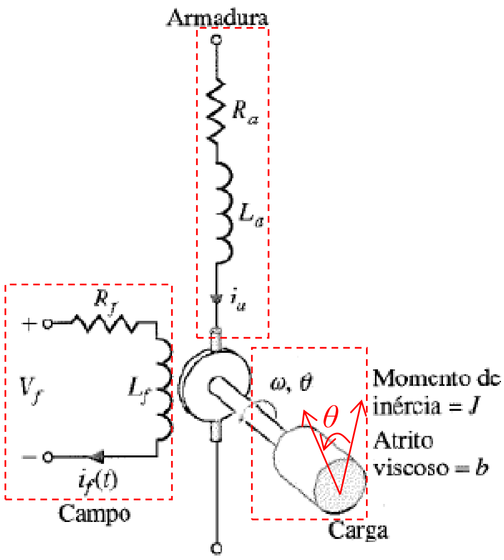
Por meio de escovas de grafite pressionadas a realizar contatos com um comutador, a armadura (rotor) é energizada proporcionando a passagem de corrente em suas bobinas. A interação entre a corrente que circula nas bobinas da armadura (rotor) e o campo magnético (estator) produz um torque que faz com que o rotor gire em torno de seu eixo de um ângulo θ ou a uma velocidade angular ω.

A figura a seguir apresenta o esquema das partes construtivas de um motor de corrente contínua.



Pode-se controlar o posicionamento de um ângulo θ ou a produção uma velocidade ω no eixo no motor de corrente contínua pela variação da tensão aplicada aos terminais das bobinas da armadura (rotor) ou pela variação da tensão aplicada aos terminais das bobinas de campo, as quais são enroladas nos polos do imã permanente para fortalecer suas linhas de campo magnético natural (estator).

O esquema a seguir apresenta um circuito da armadura (rotor), o circuito do campo magnético (estator) e o eixo, denominado carga, de um motor de corrente contínua. Considera-se que o eixo, ou carga, possui um momento inércia J e um atrito viscoso b com as partes fixas da estrutura do motor que o sustentam.



Os parâmetros de um motor de corrente contínua são:

R_a = resistência da armadura
R_f = resistência do campo
L_a = autoindutância da armadura
L_f = autoindutância do campo
i_a = corrente de armadura
i_f = corrente de campo
V_a = tensão de armadura
V_f = tensão do campo
ω = velocidade angular do eixo do motor
θ = deslocamento angular do eixo do motor
J = momento de inércia da carga
b = atrito viscoso da carga

As equações a seguir determinam as relações eletromecânicas do motor de corrente contínua.

O fluxo ϕ no entreferro do motor é proporcional à corrente de campo, desde que o campo não esteja saturado, ou seja

$$\phi = K_f i_f \quad \text{...(1)}$$

O torque $\mathbf{T_m}$ desenvolvido pelo motor é admitido como sendo relacionado linearmente a **ϕ** e à corrente de armadura, como

$$T_m = K_1 \phi i_a(t) \quad \text{..(2)}$$

Substituindo $\phi = K_f i_f$ em T_m

$$T_m = K_1 K_f i_f(t) i_a(t) \quad \text{……………………….(3)}$$

Para ter um elemento linear, uma das correntes deve ser mantida constante enquanto a outra se torna a corrente de entrada.

Se o T_m for controlado pela tensão aplicada aos terminais de campo mantem-se $i_a(t)$ constante e $i_f(t)$ se torna a corrente variável de entrada, assim,

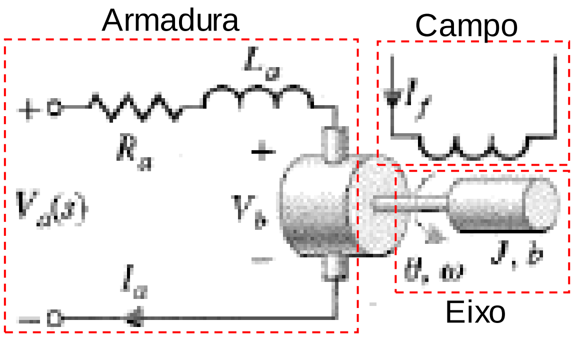
$T_m = K_m i_f(t)$……………………..........……..(4)

Se o T_m for controlado pela tensão aplicada aos terminais da armadura mantem-se $i_f(t)$ constante e $i_a(t)$ se torna a corrente variável de entrada.

$T_m = K_m i_a(t)$……………………..........……..(5)

5.2 Motor de Corrente Contínua Controlado pela Tensão de Armadura

Para o posicionamento de um ângulo θ ou para a produção uma velocidade ω no eixo do motor de corrente contínua, pode-se controlar pela tensão aplicada aos terminais da armadura mantendo-se $i_f(t)$ constante e $i_a(t)$ se torna a corrente variável de entrada.



<u>Equação mecânica</u>

O torque $\mathbf{T_m}$ motor é igual ao torque entregue à carga, então

$$T_m = T_{massa} + T_{atrito} = bw + J\frac{dw}{dt} \Rightarrow T_m = J\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} \text{......................(6)}$$

<u>Equações Elétricas</u>

O torque $\mathbf{T_m}$ do motor para $i_f = I_f$ constante e $i_a(t)$ variável é proporcional à variação de $i_a(t)$, então

$T_m = (K_1 K_f I_f) i_a(t) \Rightarrow T_m(t) = K_m i_a(t)$ ………………..........…………..(7)

Onde $\mathbf{I_f}$ é a corrente de campo constante, $\mathbf{i_a(t)}$ é a corrente de armadura variável e $\mathbf{K_m}$ é definida como a constante de torque do motor.

A tensão $v_b(t)$ gerada pela força contra eletromotriz é

$$v_b(t) = K_b\frac{d\theta}{dt} \text{...(8)}$$

Onde $\mathbf{K_b}$ é a definida como a constante de força contra eletromotriz.

A tensão $v_a(t)$ de armadura é dada aplicando a Lei de Kirchhoff de Tensão na malha da armadura obtendo-se,

$$v_a(t) = R_a i_a(t) + L_a\frac{di_a(t)}{dt} + v_b(t) \text{.............(9)}$$

Onde $\mathbf{v_b(t)}$ é a tensão da força contra eletromotriz.

Supondo todas as condições inicias nulas e aplicando a Transformada de Laplace nas equações mecânica e elétricas, tem-se

$$T_m(s) = Js^2\theta(s) + bs\theta(s) \text{............................(10)}$$

$$T_m(s) = K_m I_a(s) \text{...(11)}$$

$$V_b(s) = K_b s\theta(s) \text{..(12)}$$

$$V_a(s) = R_a I_a(s) + sL_a I_a(s) + V_b(s) \text{..................(13)}$$

Assim, manipulando algebricamente as equações de 10 a 13 pode-se determinar a Função de Transferência de um Motor CC controlado pela tensão de armadura com sendo

$$\frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s[L_a J s^2 + (L_a b + R_a J)s + (R_a b + K_m K_b)]} \text{........................(14)}$$

A auto indutância L_a no circuito da armadura normalmente é muito pequena e pode ser desprezada considerando $L_a = 0$.

Simplificando a Função de Transferência tem-se,

$$\frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s[R_a Js + (R_a b + K_m K_b)]} \quad \text{.........................(15)}$$

Fazendo;

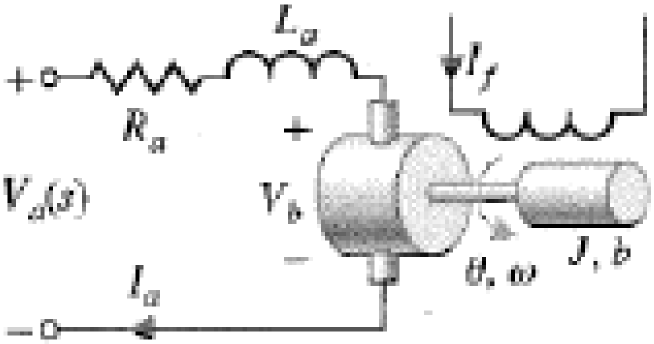
$$K = \frac{K_m}{(R_a b + K_m K_b)} \text{ denominada constante de ganho do motor}$$

$$T = \frac{R_a J}{(R_a b + K_m K_b)} \text{ denominada constante de tempo do motor}$$

Pode-se escrever;

$$\frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K}{s(Ts + 1)} \quad \text{..(16)}$$

Exemplo: Seja um motor CC controlado pela aplicação de tensão em sua armadura dado pelo esquema a seguir.



Os parâmetros deste motor CC são:
- $R_a = 0,2\ \Omega$
- $L_a = 0$ (desprezível)
- $K_m = 6 \times 10^{-3}$ Nm/A (constante de torque do motor)
- $J = 4,4 \times 10^{-3}$ kg.m^2 (momento de inércia da carga)
- $b = 4 \times 10^{-2}$ N.m/rd/s (atrito viscoso da carga)
- $K_b = 5,5 \times 10^{-2}$ V.s/rad (constante de força contra eletromotriz)

a) Determine a Função de Transferência $\frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K}{s(Ts+1)}$ para o controle do ângulo θ(t) em graus com a aplicação da tensão de armadura $v_a(t)$.

$$K = \frac{K_m}{(R_a b + K_m K_b)} \Rightarrow K = \frac{6\times10^{-3}}{(0,2\times4\times10^{-2}+6\times10^{-3}\times5,5\times10^{-2})} \Rightarrow K = 0,72$$

$$T = \frac{R_a J}{(R_a b + K_m K_b)} \Rightarrow T = \frac{0,2\times4,4\times10^{-3}}{(0,2\times4\times10^{-2}+6\times10^{-3}\times5,5\times10^{-2})} \Rightarrow T = 0,10\ s$$

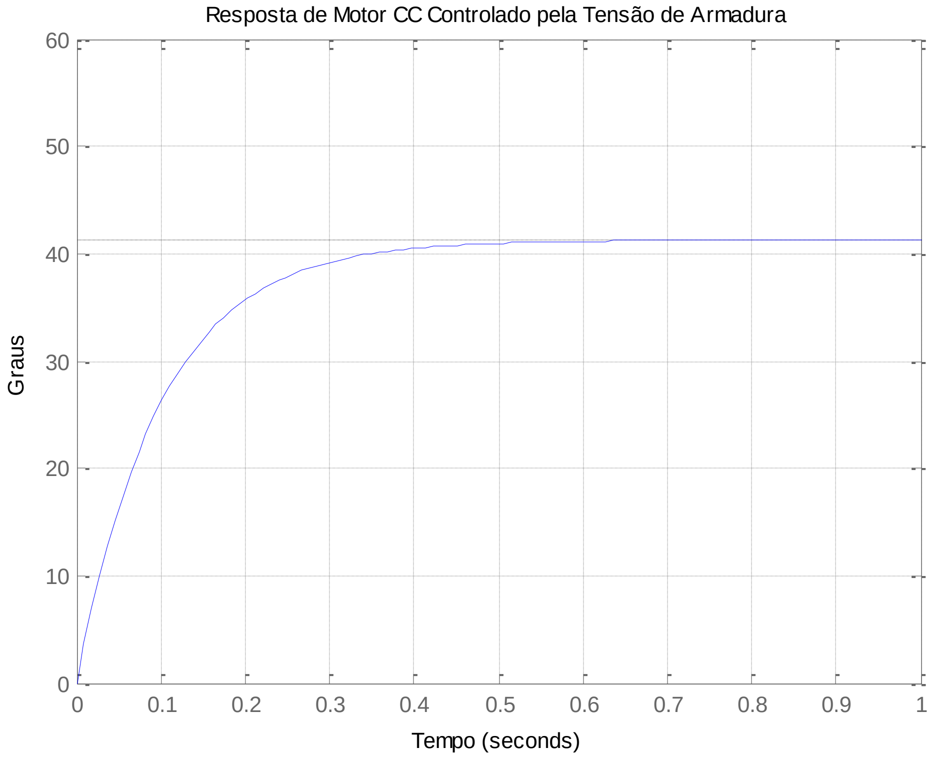
A Função de Transferência será:

$$\frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K}{s(Ts+1)} \Rightarrow \frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{0,72}{s(0,10s+1)}$$

Para a saída θ(t) equivalente ao posicionamento do eixo do motor cc ser em graus temos;

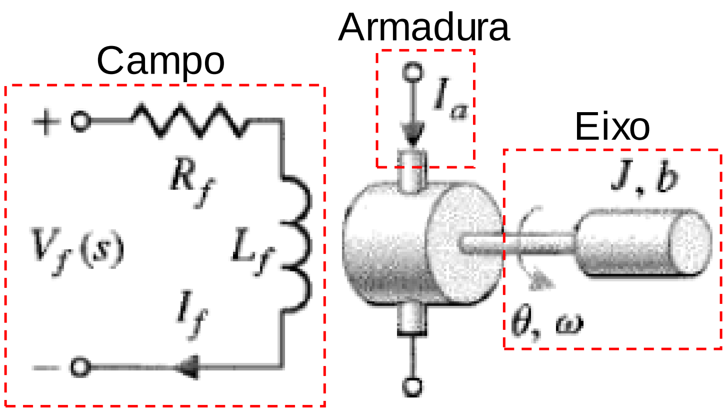
$$\frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K}{s(Ts+1)} \Rightarrow \theta(s) = \frac{0,72\times(\frac{180}{\pi})}{s(0,10s+1)} \times V_a(s) \quad \text{(Graus)}$$

b) Construa o gráfico da resposta θ(t) em graus para a aplicação de um pulso de tensão $v_a(t)$ = 1 volt em um período de tempo igual a 1 segundo nos terminais da armadura do motor CC.



5.3 Motor de Corrente Contínua Controlado pela Tensão de Campo

Para o T_m controlado pela tensão aplicada aos terminais de campo mantem-se $i_a(t)$ constante e $i_f(t)$ se torna a corrente variável de entrada.



<u>Equação mecânica</u>

O torque $\mathbf{T_m}$ motor é igual ao torque entregue à carga, então

$$T_m = T_{massa} + T_{atrito} = bw + J\frac{dw}{dt} \Rightarrow T_m = J\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} \text{..........(17)}$$

<u>Equações Elétricas</u>

O torque $\mathbf{T_m}$ motor para $i_a = I_a$ constante e $i_f(t)$ variável é proporcional à variação de $i_f(t)$, então

$T_m = (K_1K_fI_a)i_f(t) \Rightarrow T_m(t) = K_m i_f(t)$ ……………......................……...(18)

Onde $\mathbf{I_a}$ é a corrente de armadura constante, $\mathbf{i_f(t)}$ é a corrente de campo variável e $\mathbf{K_m}$ é definida como a constante de torque do motor.

A tensão $v_f(t)$ de campo é dada aplicando a Lei de Kirchhoff de Tensão na malha de campo obtendo-se,

$$v_f(t) = R_f i_f(t) + L_f \frac{di_f(t)}{dt} \quad \text{..(19)}$$

Supondo todas as condições inicias nulas e aplicando a Transformada de Laplace nas equações mecânica e elétricas, tem-se

$$T_m(s) = Js^2\theta(s) + bs\theta(s) \quad \text{.............................(20)}$$

$$T_m(s) = K_m I_f(s) \quad \text{...(21)}$$

$$V_f(s) = R_f I_f(s) + sL_f I_f(s) \quad \text{......................................(22)}$$

Assim, manipulando algebricamente as equações de 20 a 22 pode-se determinar a Função de Transferência de um Motor CC controlado pela tensão de campo com sendo,

$$\frac{\theta(s)}{V_f(s)} = \frac{K_m}{s[L_f Js^2 + (R_f J + bL_f)s + R_f b]} \quad \text{.............................(23)}$$

A auto indutância L_f no circuito de campo normalmente é muito pequena e pode ser desprezada considerando $L_f = 0$. Simplificando a Função de Transferência tem-se,

$$\frac{\theta(s)}{V_f(s)} = \frac{K_m}{s(R_f Js + R_f b)} \quad \text{..(24)}$$

Fazendo;

$$K = \frac{K_m}{R_f b} \quad \text{denominada constante de ganho do motor}$$

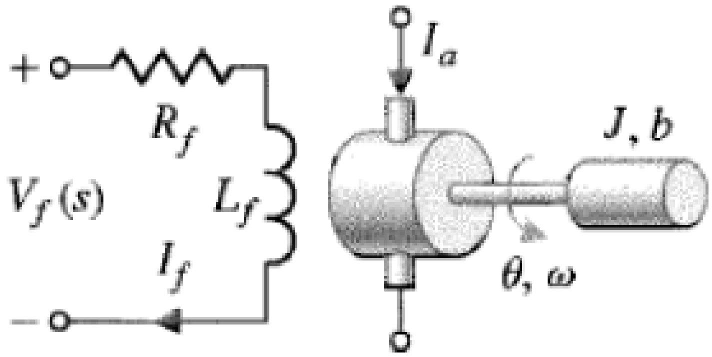
$$T = \frac{J}{b} \quad \text{denominada constante de tempo do motor}$$

Pode-se escrever;

$$\frac{\theta(s)}{V_f(s)} = \frac{K}{s(Ts+1)} \quad \text{...(25)}$$

Observe que a equação da Função de Transferência é a mesma encontrada para o controle por meio da tensão da armadura, sendo diferente somente os valores dos parâmetros T e K.

Exemplo: Seja o mesmo motor CC do exemplo da aula anterior, mas agora controlado pela aplicação de <u>tensão em seu campo</u> dado pelo esquema a seguir.



Os parâmetros deste motor CC são:
- $R_f = 0{,}2\ \Omega$
- $L_f = 0$ (desprezível)
- $K_m = 6 \times 10^{-3}$ Nm/A (constante de torque do motor)
- $J = 4{,}4 \times 10^{-3}$ kg.m^2 (momento de inércia da carga)
- $b = 4 \times 10^{-2}$ N.m/rd/s (atrito viscoso da carga)

a) Determine a Função de Transferência $\frac{\theta(s)}{V_f(s)} = \frac{K}{s(Ts+1)}$ para o controle do ângulo θ(t) em graus com a aplicação da tensão de campo $v_f(t)$.

$$K = \frac{K_m}{R_f b} \Rightarrow K = \frac{6\times10^{-3}}{0{,}2\times4\times10^{-2}} \Rightarrow K = 0{,}75$$

$$T = \frac{J}{b} \Rightarrow T = \frac{4{,}4\times10^{-3}}{4\times10^{-2}} \Rightarrow T = 0{,}11$$

$$\frac{\theta(s)}{V_f(s)} = \frac{0{,}75}{s(0{,}11s+1)}$$

Para a saída θ(t) equivalente ao posicionamento do eixo do motor cc ser em graus temos;

$$\frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K}{s(Ts+1)} \Rightarrow \theta(s) = \frac{0{,}75\times(\frac{180}{\pi})}{s(0{,}11s+1)} \times V_a(s) \quad \text{(Graus)}$$

b) Construa o gráfico da resposta θ(t) em graus para a aplicação de um pulso de tensão $v_a(t)$ = 1 volt em um período de tempo igual a 1 segundo nos terminais da armadura do motor CC.