UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA – UFV
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – CCE
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA - DEL

Sistemas de Controle II

ELT331

AULA 10 – Diagrama Polar (Diagrama de Nyquist)

Prof. Tarcísio Pizziolo

10. Introdução

Diagrama Polar ou Diagrama de Nyquist

- É um gráfico do **Módulo** de **G(jw)** versus o **Ângulo de Fase** de **G(jw)**.

- É o lugar dos vetores $|G(j\omega)| \angle G(j\omega)$ com **w** variando de **0 a ∞**.

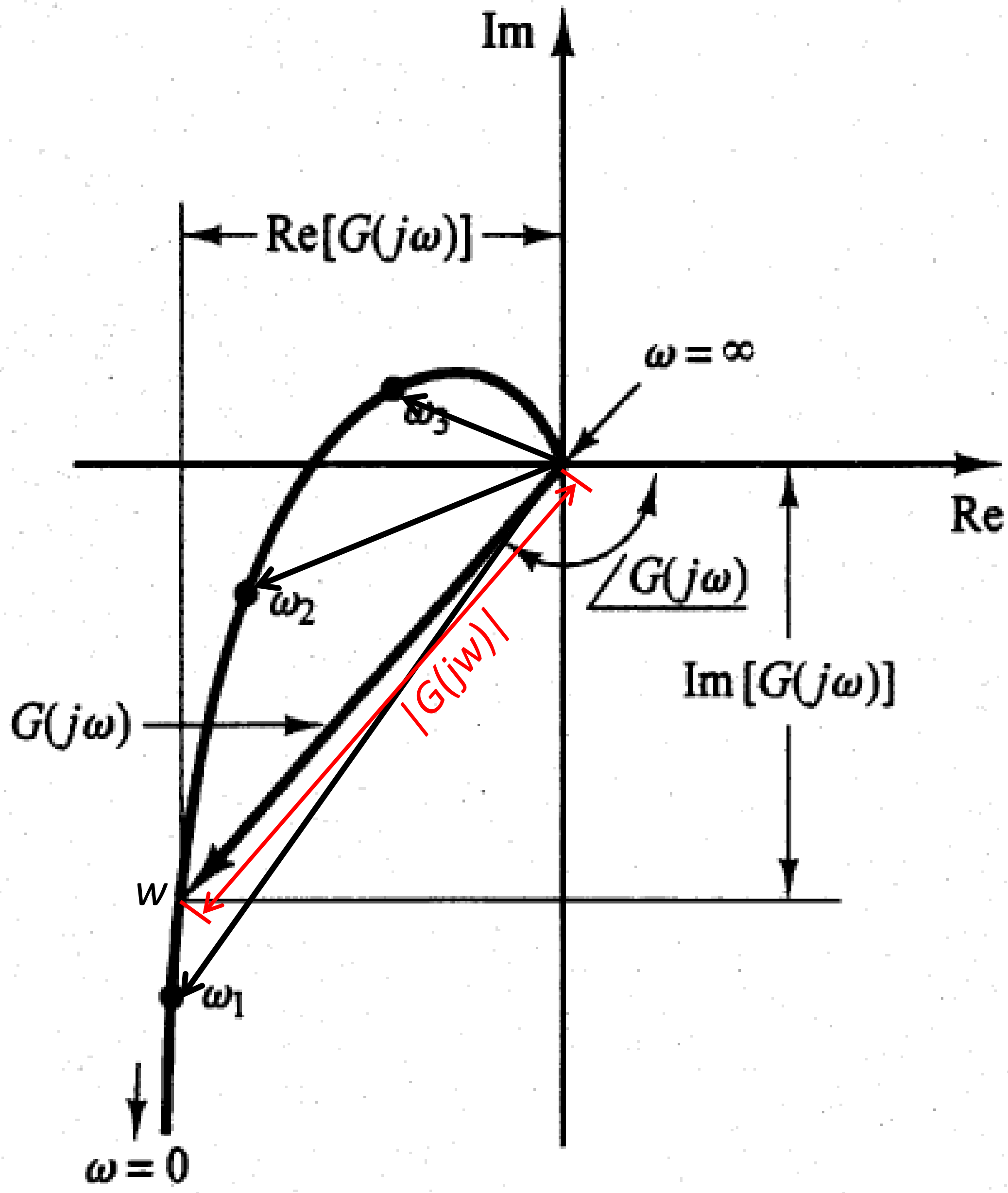
- Medição do Ângulo de Fase:

Positivo: é medido no **sentido anti-horário** a partir do eixo real positivo.

Negativo: é medido no **sentido horário** a partir do eixo real positivo.

É importante indicar os valores da frequência ao longo da curva.

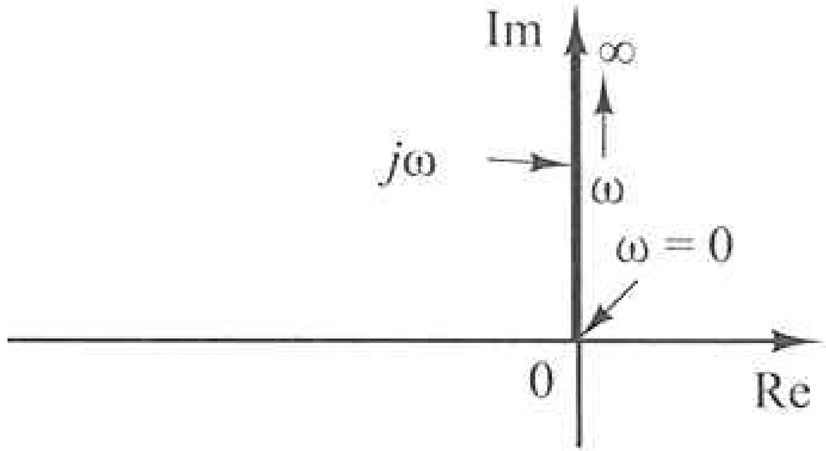
Diagrama Polar ou Diagrama de Nyquist



Construção do Diagrama de Nyquist

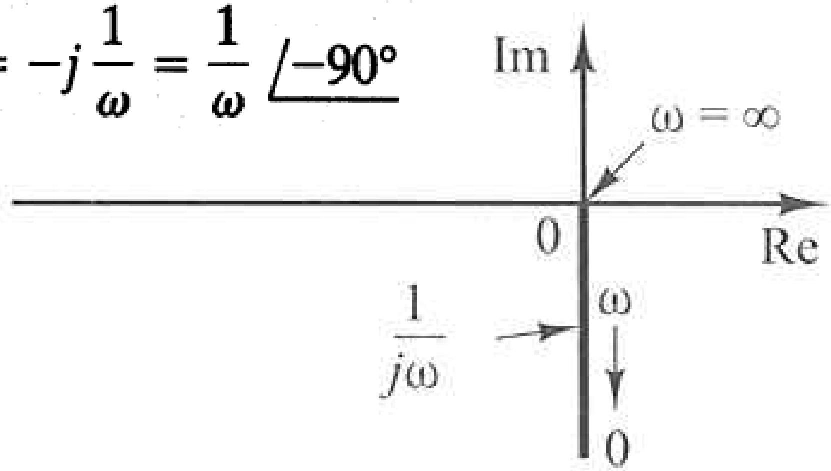
1. Fatores Derivativo e Integral: $(j\omega)^{\mp 1}$

O diagrama polar de $G(j\omega) = j\omega$ é o eixo imaginário positivo.



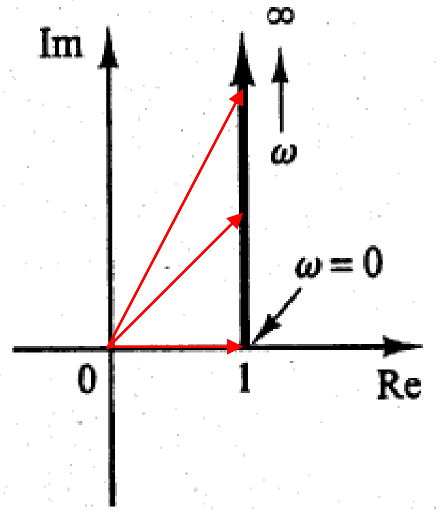
O diagrama polar de $G(j\omega) = 1/j\omega$ é o eixo imaginário negativo, visto que

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega}\,\underline{/-90^\circ}$$



2. Fatores de Primeira Ordem: $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$

O Diagrama Polar da Função de Transferência **(1 + jwT)** é a metade da reta que passa pelo ponto **(1,0)** no plano ***s*** e é paralela ao **eixo-jw**.



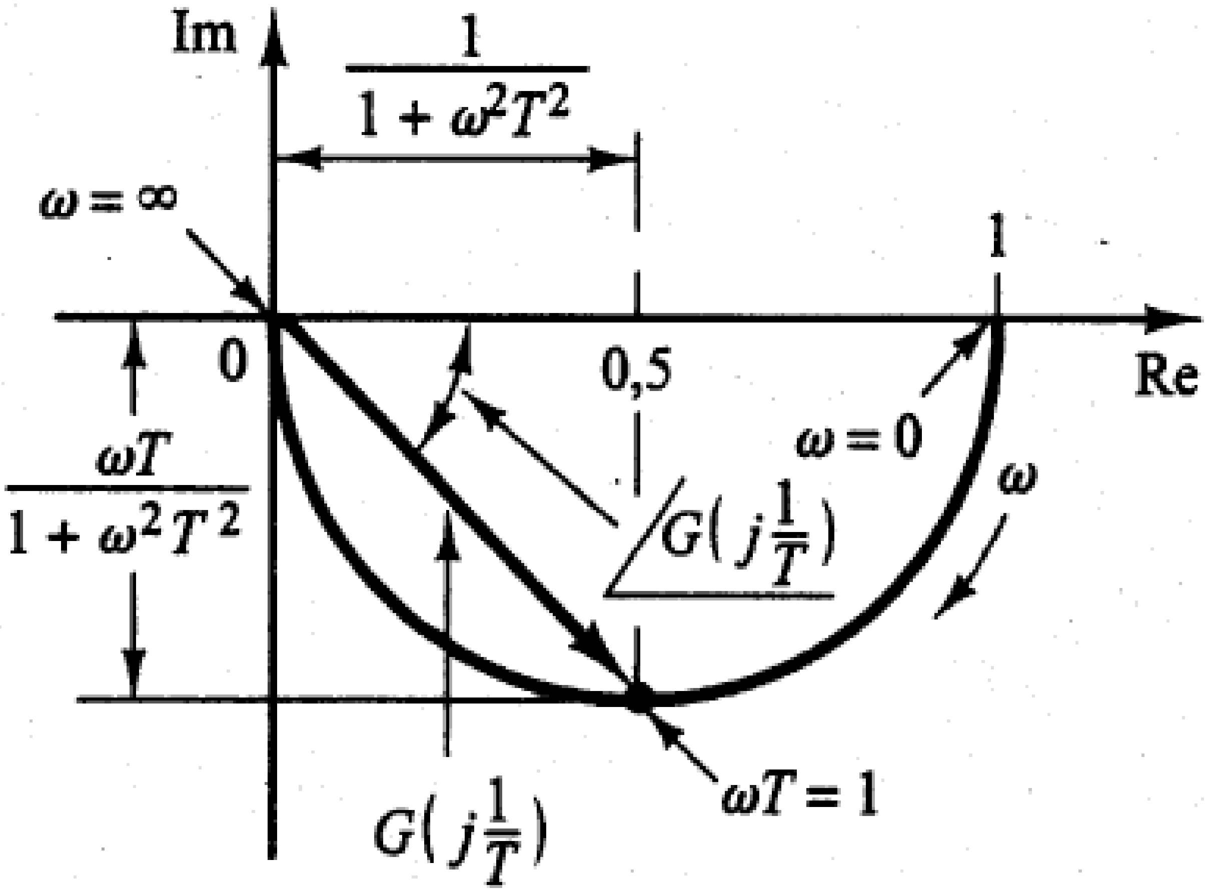
O Diagrama Polar da Função de Transferência **(1 + jwT)$^{-1}$** é uma semicircunferência negativa com centro em **(0,5;0)** com raio **0,5**.

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \angle -\mathrm{tg}^{-1}\,\omega T$$

Os valores de **G(jw)** em **w = 0** e **w = 1/T** são, respectivamente:

$$G(j0) = 1\angle 0^\circ \quad \text{e} \quad G\left(j\frac{1}{T}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\angle -45^\circ$$

Quando **w → ∞**, **|G(jw)| → 0** e o ângulo de fase → **-90°**.

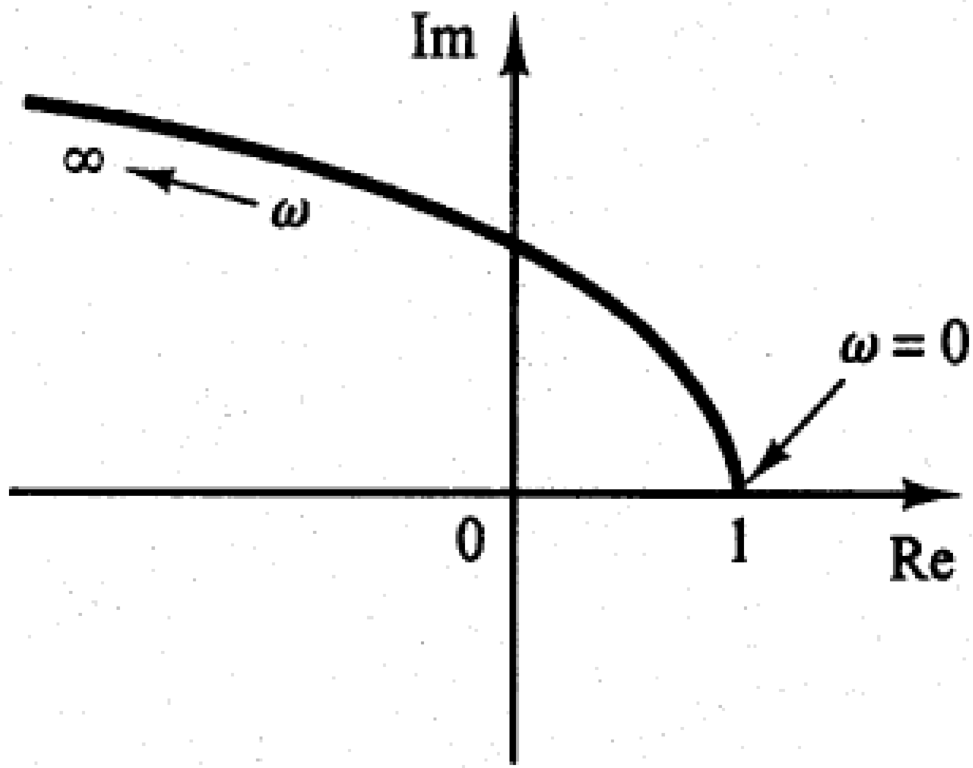


3. Fatores Quadráticos: $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{\mp 1}$

Seja **G(jw)**: $$G(j\omega) = 1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)$$

baixas freqüências $\lim_{\omega \to 0} G(j\omega) = 1\angle 0^\circ$

altas freqüências $\lim_{\omega \to \infty} G(j\omega) = \infty \angle 180^\circ$



Seja **G(jw)**:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}, \qquad \text{para } \zeta > 0$$

Porção relativa à baixa freqüência

$$\lim_{\omega \to 0} G(j\omega) = 1\angle 0^\circ$$

Início do Diagrama Polar

Porção relativa à alta freqüência

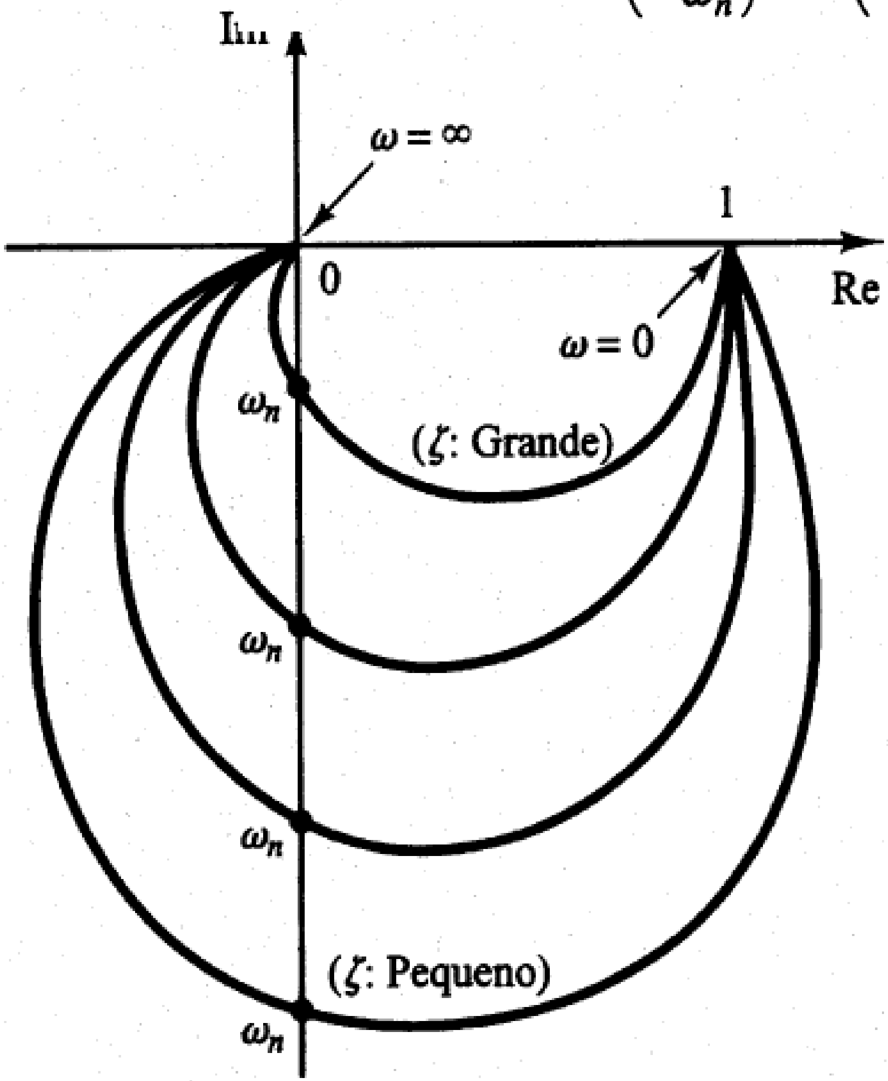
$$\lim_{\omega \to \infty} G(j\omega) = 0\angle -180^\circ$$

Final do Diagrama Polar

A forma exata do diagrama polar depende do valor do coeficiente de amortecimento ζ, mas a forma geral do diagrama é a mesma tanto para o caso subamortecido $(1 > \zeta > 0)$ como para o superamortecido $(\zeta > 1)$.

Diagrama Polar para **G(jw)**:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}, \qquad \text{para } \zeta > 0$$



caso subamortecido

Para $\omega = \omega_n$

$G(j\omega_n) = 1/(j2\zeta)$,

ângulo de fase $= -90°$

a freqüência na qual o lugar geométrico de $G(j\omega)$ cruza o eixo imaginário é a freqüência natural não amortecida ω_n.

Observações sobre o Diagrama Polar de G(jw):

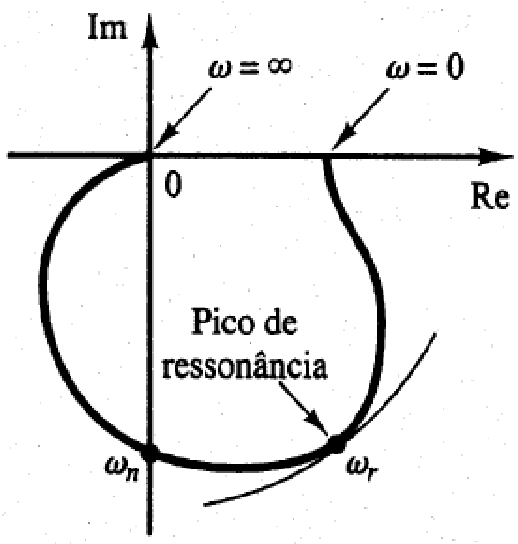
1) a freqüência cujo ponto está mais distante da origem corresponde à freqüência de ressonância ω_r.

2) O valor de pico de $G(j\omega)$ é obtido pela relação entre o módulo do vetor na freqüência de ressonância ω_r e o módulo do vetor em $\omega = 0$.

3) Para o caso superamortecido, à medida que ζ aumenta muito além da unidade, o lugar geométrico de $G(j\omega)$ se aproxima de uma semicircunferência.

4) Pode-se observar esse fato nos sistemas muito amortecidos, em que as raízes características são reais e uma delas é bem menor do que a outra.

5) Dado que, para ζ suficientemente grande, o efeito da maior raiz (maior em valor absoluto) na resposta é muito pequeno, o sistema se comporta como de primeira ordem.



Exemplo 1

Considere a seguinte função de transferência de segunda ordem:

$$G(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)}$$

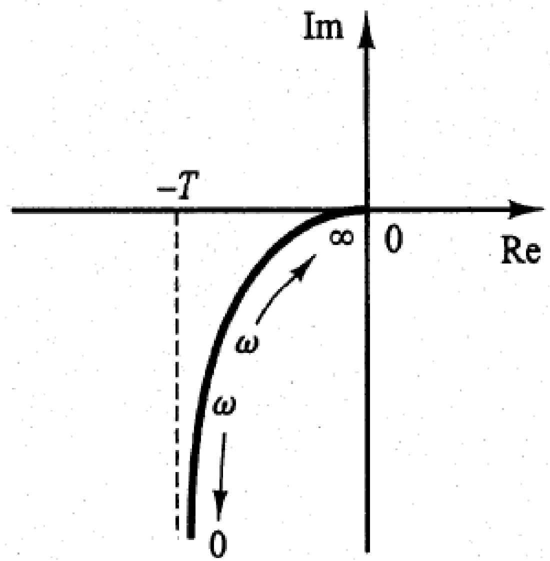
Construa o diagrama polar dessa função de transferência.

Como a função de transferência senoidal pode ser escrita como se segue:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1 + j\omega T)} = -\frac{T}{1 + \omega^2 T^2} - j\frac{1}{\omega(1 + \omega^2 T^2)}$$

porção relativa à baixa freqüência $\lim_{\omega \to 0} G(j\omega) = -T - j\infty = \infty \underline{/-90^\circ}$

porção relativa à alta freqüência $\lim_{\omega \to \infty} G(j\omega) = 0 - j0 = 0 \underline{/-180^\circ}$



Exemplo 2

Obtenha o diagrama polar da seguinte função de transferência:

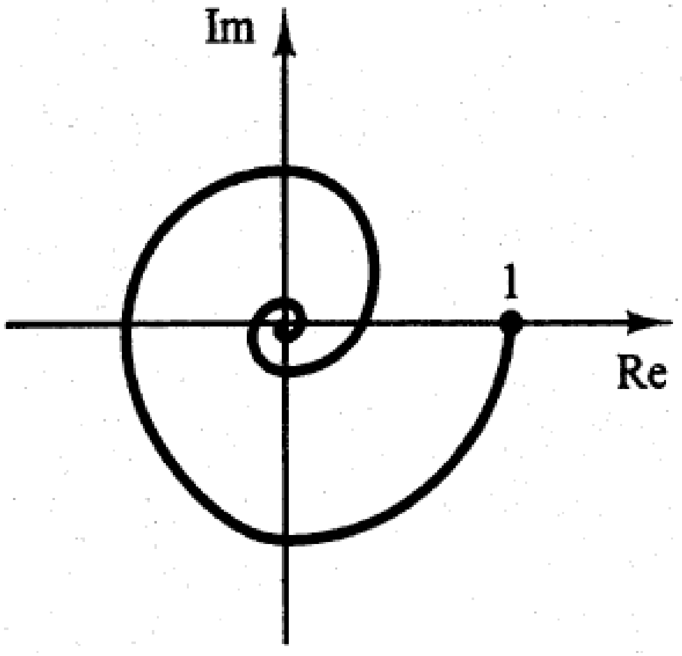
$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1 + j\omega T}$$

Como $G(j\omega)$ pode ser escrita como: $G(j\omega) = \left(e^{-j\omega L}\right)\left(\frac{1}{1 + j\omega T}\right)$

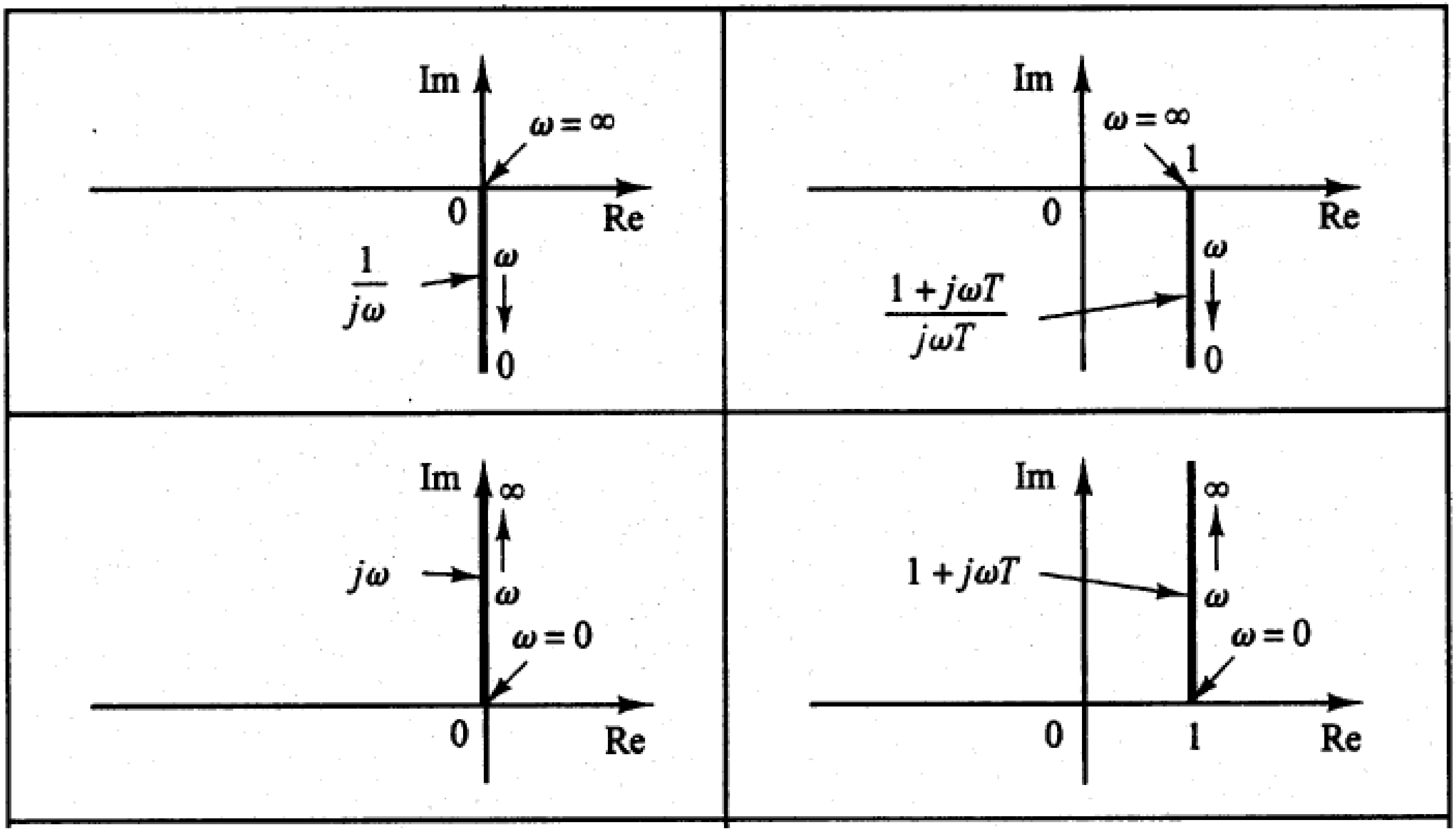
o módulo e o ângulo de fase são, respectivamente,

$$|G(j\omega)| = |e^{-j\omega L}| \cdot \left|\frac{1}{1 + j\omega T}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

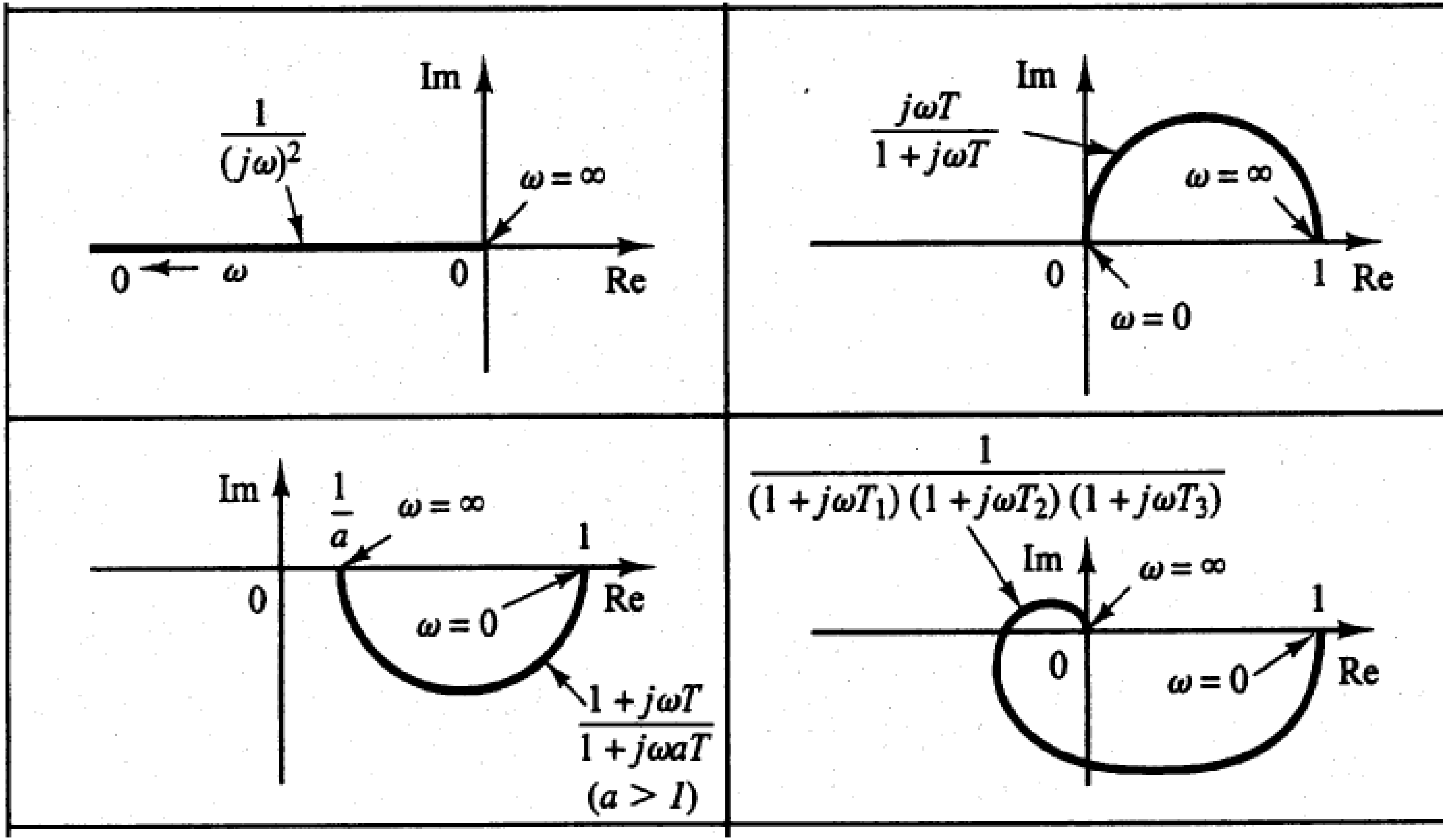
$$\angle G(j\omega) = \angle e^{-j\omega L} + \angle \frac{1}{1 + j\omega T} = -\omega L - \mathrm{tg}^{-1}\,\omega T$$



Diagramas Polares de Funções de Transferência Simples



Diagramas Polares de Funções de Transferência Simples



Diagramas Polares de Funções de Transferência Simples