

# Mecânica Vetorial para Engenheiros

5ª Edição Revisada

Ferdinand P. Beer

E. Russell Johnston, Jr.

Cinemática  
e Dinâmica



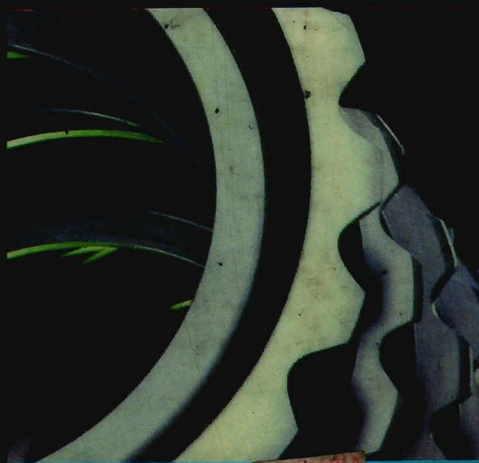
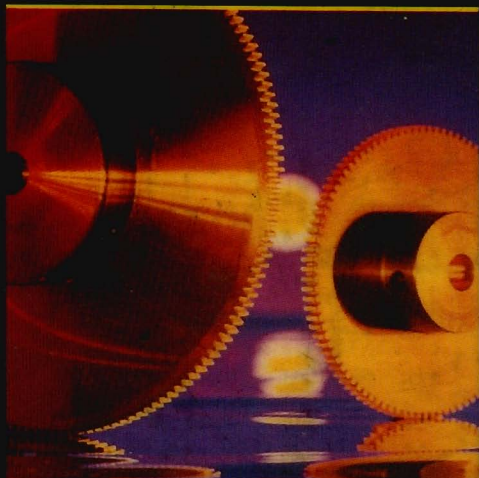
MAKRON Books



# Mecânica Vetorial para Engenheiros

Ferdinand P. Beer  
E. Russell Johnston, Jr.

Cinemática  
e Dinâmica



MANAIRA

ISBN 85-346-0203-4



9 788534 602037



MAKRON Books





MAKRON  
Books



# Mecânica Vetorial para Engenheiros CINEMÁTICA E DINÂMICA 5ª Edição Revisada

**Ferdinand P. Beer**

Professor Emérito de Engenharia Mecânica e Mecânica Lehigh University

**E. Russell Johnston, Jr.**

Professor de Engenharia Civil da University of Connecticut

*Tradução*

**Mário Alberto Tenan**

Doutor em Ciências

Professor do Instituto de Física Gleb Wataghin

UNICAMP

*Revisão Técnica*

**Giorgio E. O. Giacaglia**

Professor Catedrático de Mecânica Geral da

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

*Revisão Técnica da Edição Revisada*

**Francisco Moral**

Professor do Instituto de Ciências Exatas da

Universidade do Vale do Paraíba – UNIVAP – São José dos Campos

MAKRON Books do Brasil Editora Ltda.

Editora McGraw-Hill Ltda.

São Paulo

Rua Tabapuã, 1105, Itaim Bibi

CEP 04533

(011) 829-8604 e (011) 820-8528

Rio de Janeiro • Lisboa • Bogotá • Buenos Aires • Guatemala • Madrid • México • New York •  
Panamá • San Juan • Santiago

Auckland • Hamburg • Kuala Lumpur • London • Milan • Montreal • New Delhi • Paris •  
Singapore • Sydney • Tokyo • Toronto

**Do original**

**Vector Mechanics for Engineers – Dynamics**

**Copyright © 1984, 1977, 1972, 1962 by McGraw-Hill Inc.**

**Copyright © 1994, 1991 da Makron Books do Brasil Editora Ltda.**

**Todos os direitos para a língua portuguesa reservados pela Editora McGraw-Hill, Ltda. e Makron Books do Brasil Editora Ltda.**

Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida, guardada pelo sistema “retrieval” ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, seja este eletrônico, mecânico, de fotocópia, de gravação, ou outros, sem prévia autorização, por escrito, das Editoras.

**EDITOR: MILTON MIRA DE ASSUMPTÃO FILHO**

*Editor Assistente:* Adauto Bertolla

*Produtora Editorial:* Daisy Pereira Daniel

*Produtor Gráfico:* José Rodrigues

*Editoração Eletrônica:* JAG Composição Editorial e Artes Gráficas Ltda.

**Dados de Catalogação na Publicação (CIP) Internacional  
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)**

Beer, Ferdinand Pierre, 1915-

Mecânica vetorial para engenheiros / Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, Jr. ; tradução Mário Alberto Tenan ; revisão técnica Giorgio E. O. Giacaglia. — 5. ed. — São Paulo : Makron, McGraw-Hill, 1991.

Conteúdo: v. 1. Estática — v. 2. Dinâmica.

1. Cálculo vetorial 2. Engenharia mecânica 3. Mecânica aplicada I. Johnston, Elwood Russell, 1925- II. Título.

90-2231

CDD-620.100151563

-531.0151563

**Índices para catálogo sistemático:**

1. Mecânica vetorial : Engenharia 620.100151563
2. Mecânica vetorial : Física 531.0151563

# Sumário

Prefácio .....	XIII
Lista de Símbolos .....	XIX

## CAPÍTULO 11

CINEMÁTICA DO PONTO MATERIAL .....	1
11.1 Introdução .....	1
Movimento Retilíneo de um Ponto Material .....	2
11.2 / Posição, Velocidade e Aceleração .....	2
11.3 / Determinação do Movimento de um Ponto Material .....	8
11.4 / Movimento Retilíneo Uniforme .....	22
11.5 / Movimento Retilíneo Uniformemente Acelerado .....	23
11.6 / Movimento de Vários Pontos Materiais .....	25
11.7 / Solução Gráfica de Problemas de Movimento Retilíneo .....	39
11.8 Outros Métodos Gráficos .....	41

Movimento Curvilíneo de um Ponto Material . . . . .	52
11.9    Vetor de Posição, Velocidade e Aceleração . . . . .	52
11.10   Derivadas de Funções Vetoriais . . . . .	56
11.11   Componentes Cartesianas de Velocidade e Aceleração . . . . .	60
11.12   Movimento Relativo a um Sistema de Referência em Translação . . . . .	62
11.13   Componentes Tangencial e Normal . . . . .	82
11.14   Componentes Radial e Transversal . . . . .	86
Recapitulação e Sumário . . . . .	104
Problemas de Recapitulação . . . . .	112

## **CAPÍTULO 12**

<b>DINÂMICA DO PONTO MATERIAL: SEGUNDA LEI DE NEWTON . . .</b>	<b>115</b>
12.1    Introdução . . . . .	115
12.2    Segunda Lei de Newton . . . . .	116
12.3    Quantidade de Movimento de um Ponto Material. Derivada da Quantidade de Movimento . . . . .	118
12.4    Sistemas de Unidades . . . . .	120
12.5    Equações do Movimento . . . . .	122
12.6    Equilíbrio Dinâmico . . . . .	124
12.7    Movimento Angular de um Ponto Material. Variação do Momento Angular. . . . .	151
12.8    Equações do Movimento em Termos das Componentes Radial e Transversal . . . . .	154
12.9    Movimento sob Força Central. Conservação do Momento Angular . . .	155
12.10   Lei da Gravitação de Newton . . . . .	157
12.11   Trajetória de um Ponto Material sob a Ação de uma Força Central . .	168
12.12   Aplicação à Mecânica Espacial . . . . .	170

<b>12.13</b>	<b>Leis de Kepler para o Movimento Planetário . . . . .</b>	<b>177</b>
	Recapitulação e Sumário . . . . .	187
	Problemas de Recapitulação . . . . .	194

## **CAPÍTULO 13**

<b>DINÂMICA DO PONTO MATERIAL: MÉTODOS DA ENERGIA E DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO . . . . .</b>		<b>197</b>
<b>13.1</b>	<b>Introdução . . . . .</b>	<b>197</b>
<b>13.2</b>	<b>Trabalho de uma Força . . . . .</b>	<b>198</b>
<b>13.3</b>	<b>Energia Cinética de um Ponto Material. Princípio do Trabalho e Energia . . . . .</b>	<b>204</b>
<b>13.4</b>	<b>Aplicações do Princípio do Trabalho e Energia . . . . .</b>	<b>207</b>
<b>13.5</b>	<b>Potência e Rendimento . . . . .</b>	<b>210</b>
<b>13.6</b>	<b>Energia Potencial . . . . .</b>	<b>236</b>
<b>13.7</b>	<b>Forças Conservativas . . . . .</b>	<b>240</b>
<b>13.8</b>	<b>Conservação da Energia . . . . .</b>	<b>242</b>
<b>13.9</b>	<b>Movimento sob a Ação de uma Força Central Conservativa. Aplicações à Mecânica Espacial . . . . .</b>	<b>244</b>
<b>13.10</b>	<b>Princípio do Impulso e da Quantidade de Movimento . . . . .</b>	<b>269</b>
<b>13.11</b>	<b>Movimento Impulsivo . . . . .</b>	<b>273</b>
<b>13.12</b>	<b>Choque . . . . .</b>	<b>284</b>
<b>13.13</b>	<b>Choque Central Direto . . . . .</b>	<b>284</b>
<b>13.14</b>	<b>Choque Central Oblíquo . . . . .</b>	<b>289</b>
<b>13.15</b>	<b>Problemas Envolvendo Energia e Quantidade de Movimento . . . . .</b>	<b>293</b>
	<b>Recapitulação e Sumário . . . . .</b>	<b>314</b>
	<b>Problemas de Recapitulação . . . . .</b>	<b>323</b>

## **CAPÍTULO 14**

<b>SISTEMAS DE PONTOS MATERIAIS</b>	<b>326</b>
14.1    Introdução	326
14.2    Aplicação das Leis de Newton ao Movimento de um Sistema de Pontos Materiais. Forças Efetivas.	327
14.3    Quantidade de Movimento e Momento Angular de um Sistema de Pontos Materiais	331
14.4    Movimento do Centro de Massa de um Sistema de Pontos Materiais	333
14.5    Momento Angular de um Sistema de Pontos Materiais em Relação a seu Centro de Massa	335
14.6    Conservação da Quantidade de Movimento para um Sistema de Pontos Materiais	339
14.7    Energia Cinética de um Sistema de Pontos Materiais	348
14.8    Princípio do Trabalho e Energia. Conservação da Energia para um Sistema de Pontos Materiais	349
14.9    Princípio do Impulso e Quantidade de Movimento para um Sistema de Pontos Materiais	350
14.10    Sistemas Variáveis	362
14.11    Fluxo Estacionário de Pontos Materiais	363
14.12    Sistemas com Ganho ou Perda de Massa	366
Recapitulação e Sumário	386
Problemas de Recapitulação	393

## **CAPÍTULO 15**

<b>CINEMÁTICA DOS CORPOS RÍGIDOS</b>	<b>397</b>
15.1    Introdução	397
15.2    Translação	401
15.3    Rotação em Torno de um Eixo Fixo	402



<b>15.4</b>	<b>Equações que Definem a Rotação de um Corpo Rígido em torno de um Eixo Fixo . . . . .</b>	<b>407</b>
<b>15.5</b>	<b>Movimento Plano Geral . . . . .</b>	<b>418</b>
<b>15.6</b>	<b>Velocidade Absoluta e Relativa no Movimento Plano . . . . .</b>	<b>420</b>
<b>15.7</b>	<b>Centro Instantâneo de Rotação no Movimento Plano . . . . .</b>	<b>432</b>
<b>15.8</b>	<b>Aceleração Absoluta e Relativa no Movimento Plano . . . . .</b>	<b>444</b>
<b>15.9</b>	<b>Análise do Movimento Plano em Função de um Parâmetro . . . . .</b>	<b>447</b>
<b>15.10</b>	<b>Derivada Temporal de um Vetor em Relação a um Sistema em Rotação . . . . .</b>	<b>464</b>
<b>15.11</b>	<b>Movimento Plano de um Ponto Material em Relação a um Sistema em Rotação. Aceleração de Coriolis . . . . .</b>	<b>466</b>
<b>15.12</b>	<b>Movimento em Torno de um Ponto Fixo . . . . .</b>	<b>481</b>
<b>15.13</b>	<b>Movimento Geral . . . . .</b>	<b>486</b>
<b>15.14</b>	<b>Movimento Tridimensional de um Ponto Material em Relação a um Sistema Rotativo. Aceleração de Coriolis . . . . .</b>	<b>502</b>
<b>15.15</b>	<b>Sistema de Referência ao Movimento Geral . . . . .</b>	<b>505</b>
	<b>Recapitulação e Sumário . . . . .</b>	<b>520</b>
	<b>Problemas de Recapitulação . . . . .</b>	<b>531</b>

## **CAPÍTULO 16**

	<b>MOVIMENTO PLANO DE CORPOS RÍGIDOS: FORÇAS E ACELERAÇÕES . . . . .</b>	<b>535</b>
<b>16.1</b>	<b>Introdução . . . . .</b>	<b>535</b>
<b>16.2</b>	<b>Equações de Movimento para um Corpo Rígido . . . . .</b>	<b>536</b>
<b>16.3</b>	<b>Momento Angular de um Corpo Rígido em Movimento Plano . . . . .</b>	<b>538</b>
<b>16.4</b>	<b>Movimento Plano de um Corpo Rígido. Princípio de d'Alembert . . . . .</b>	<b>540</b>
<b>16.5</b>	<b>Observação sobre os Axiomas da Mecânica dos Corpos Rígidos. . . . .</b>	<b>543</b>

<b>16.6</b>	Solução de Problemas que Envolvem o Movimento de um Corpo Rígido . . . . .	544
<b>16.7</b>	Sistemas de Corpos Rígidos . . . . .	546
<b>16.8</b>	Movimento Plano Vinculado . . . . .	577
	Recapitulação e Sumário . . . . .	616
	Problemas de Recapitulação . . . . .	619

## **CAPÍTULO 17**

	<b>MOVIMENTO PLANO DOS CORPOS RÍGIDOS: MÉTODOS DA ENERGIA E QUANTIDADE DE MOVIMENTO . . . . .</b>	<b>623</b>
<b>17.1</b>	Introdução . . . . .	623
<b>17.2</b>	Princípio do Trabalho e Energia para um Corpo Rígido . . . . .	624
<b>17.3</b>	Trabalho das Forças que Atuam num Corpo Rígido . . . . .	625
<b>17.4</b>	Energia Cinética de um Corpo Rígido em Movimento Plano . . . . .	627
<b>17.5</b>	Sistemas de Corpos Rígidos . . . . .	629
<b>17.6</b>	Conservação da Energia . . . . .	630
<b>17.7</b>	Potência . . . . .	632
<b>17.8</b>	Princípio do Impulso e Quantidade de Movimento para o Movimento Plano de um Corpo Rígido . . . . .	658
<b>17.9</b>	Sistemas de Corpos Rígidos . . . . .	662
<b>17.10</b>	Conservação do Momento Angular . . . . .	663
<b>17.11</b>	Movimento Impulsivo . . . . .	681
<b>17.12</b>	Choque Excêntrico . . . . .	686
	Recapitulação e Sumário . . . . .	702
	Problemas de Recapitulação . . . . .	707

**CAPÍTULO 18****DINÂMICA DOS CORPOS RÍGIDOS EM MOVIMENTO**

<b>TRIDIMENSIONAL</b>	711
18.1 Introdução	711
18.2 Momento Angular de um Corpo Rígido Tridimensional	713
18.3 Aplicação do Princípio do Impulso e Quantidade de Movimento ao Movimento Tridimensional de um Corpo Rígido	719
18.4 Energia Cinética de um Corpo Rígido em Três Dimensões	720
18.5 Movimento de um Corpo Rígido em Três Dimensões	738
18.6 Equações de Euler do Movimento. Extensão do Princípio de d'Alembert ao Movimento de um Corpo Rígido Tridimensional	740
18.7 Movimento de um Corpo Rígido em Torno de um Ponto Fixo	742
18.8 Rotação de um Corpo Rígido em Torno de um Eixo Fixo	743
18.9 Movimento de um Giroscópio. Ângulos de Euler	762
18.10 Precessão Estacionária de um Giroscópio	766
18.11 Movimento de um Corpo de Revolução Submetido Apenas ao seu Peso	768
Recapitulação e Sumário	788
Problemas de Recapitulação	795

**CAPÍTULO 19**

<b>VIBRAÇÕES MECÂNICAS</b>	800
19.1 Introdução	800
Vibrações sem Amortecimento	801
19.2 Pontos Materiais em Vibrações Livres. Movimento Harmônico Simples	801
19.3 Pêndulo Simples (Solução Aproximada)	806
19.4 Pêndulo Simples (Solução Exata)	807

<b>19.5</b>	<b>Corpo Rígidos em Vibrações Livres</b> . . . . .	<b>818</b>
<b>19.6</b>	<b>Aplicação do Princípio da Conservação da Energia</b> . . . . .	<b>833</b>
<b>19.7</b>	<b>Vibrações Forçadas</b> . . . . .	<b>844</b>
	<b>Vibrações Amortecidas</b> . . . . .	<b>856</b>
<b>19.8</b>	<b>Vibrações Livres Amortecidas</b> . . . . .	<b>856</b>
<b>19.9</b>	<b>Vibrações Forçadas Amortecidas</b> . . . . .	<b>859</b>
<b>19.10</b>	<b>Analogia Elétrica</b> . . . . .	<b>862</b>
	<b>Recapitulação e Sumário</b> . . . . .	<b>873</b>
	<b>Problemas de Recapitulação</b> . . . . .	<b>880</b>

## **APÊNDICE A**

<b>Algumas Definições Úteis e Propriedades da Álgebra Vetorial</b> . . . . .	<b>883</b>
--	------------

## **APÊNDICE B**

<b>Momentos de Inércia</b> . . . . .	<b>894</b>
--------------------------------------	------------

## **APÊNDICE C**

<b>Como Usar o Software Interativo</b> . . . . .	<b>934</b>
<b>Respostas aos Problemas Pares</b> . . . . .	<b>936</b>
<b>Índice Analítico</b> . . . . .	<b>971</b>

# Prefácio

O objetivo principal de um curso de Mecânica Geral é desenvolver no estudante de engenharia a capacidade de analisar qualquer problema de modo simples e lógico e aplicar à sua solução alguns princípios básicos bem assimilados. Espera-se que este volume, da mesma forma que o anterior, *Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática*, ajude o professor a atingir essa meta\*.

A álgebra vetorial, introduzida no início do primeiro volume, foi usada na apresentação dos princípios básicos da estática e também na solução de muitos problemas, especialmente aqueles envolvendo três dimensões. De maneira análoga, será introduzido, logo no início do presente volume, o conceito de derivada de um vetor, empregando-se o cálculo vetorial ao longo de todo o texto. Esse procedimento proporciona uma dedução mais concisa dos princípios fundamentais e torna possível analisar muitos problemas de cinemática e dinâmica \*\* de difícil solução por métodos escalares. A ênfase neste texto, entretanto, reside na compreensão correta dos princípios da mecânica e na sua aplicação à solução de problemas de engenharia, apresentando-se o cálculo vetorial como uma ferramenta conveniente para esse fim. \*\*\*

\* Ambos os textos são encontrados, em língua inglesa, num único volume: *Vector Mechanics for Engineers; Statics and Dynamics* (fifth edition).

\*\* Os autores empregam o termo *kinetics* (cinética) na acepção que adotamos aqui para dinâmica. Para eles *dynamics* (dinâmica) é o estudo do movimento, dividindo-se em *kinematics* (cinemática) e *kinetics* (cinética). Preferimos, no entanto, adotar na presente tradução a terminologia consagrada em nosso meio. (Nota do T.)

\*\*\* Num texto paralelo, não traduzido, *Mechanics for Engineers: Dynamics* (third edition), o uso do cálculo vetorial limita-se à adição e subtração de vetores, omitindo-se a derivação vetorial.

Uma das características da estratégia usada nos dois volumes é a de se ter separado claramente a mecânica do *ponto material* da mecânica do *corpo rígido*. Com esse procedimento, torna-se possível considerar aplicações práticas simples, logo no início, adiando-se, convenientemente, a introdução de conceitos mais difíceis. No volume de estática, tratou-se, inicialmente, da estática do ponto material e o princípio do equilíbrio foi imediatamente aplicado a situações práticas, envolvendo apenas forças concorrentes. A estática do corpo rígido foi considerada mais tarde, quando se introduziram os produtos vetorial e escalar, para se definirem os momentos de uma força em relação a um pólo e a um eixo. Neste volume, obedeceu-se à mesma divisão. Os conceitos básicos de força, massa e aceleração, de trabalho e energia e de impulso e quantidade de movimento serão introduzidos e aplicados, inicialmente, a problemas que envolvem apenas pontos materiais. Desta forma, o estudante poderá familiarizar-se com os três métodos básicos, usados na dinâmica, e compreender suas respectivas vantagens, antes de enfrentar as dificuldades inerentes ao movimento do corpo rígido.

Como este texto se destina a um primeiro curso de dinâmica, os novos conceitos foram apresentados em termos simples e cada etapa explicada em detalhe. Por outro lado, pela discussão dos aspectos mais amplos dos problemas e pela ênfase dada aos métodos de aplicabilidade geral, alcançou-se o ponto mais alto da estratégia. Por exemplo, o conceito de energia potencial é discutido no caso geral de força conservativa. Como outro exemplo, tem-se o do movimento plano do corpo rígido, cujo estudo leva naturalmente ao estudo do movimento geral no espaço. Isso ocorre tanto em cinemática como em dinâmica, em que o princípio da equivalência entre as forças externas e as efetivas\* aplica-se diretamente à análise do movimento plano, facilitando a transição ao estudo do movimento tridimensional.

Evidenciou-se nesta obra o fato de que a mecânica é uma ciência essencialmente *dedutiva*, baseada num número reduzido de princípios fundamentais. As deduções foram apresentadas na sua seqüência lógica e com todo o rigor admissível a este nível. Todavia, como o processo de aprendizagem é em grande parte *indutivo*, aplicações elementares sempre foram consideradas em primeiro lugar. Assim, a dinâmica do ponto material precede à do corpo rígido; e, nesta última, os princípios são aplicados inicialmente à solução de problemas no plano, que podem ser mais bem visualizados pelo estudante (Capítulos 16 e 17), deixando-se para mais tarde (Capítulo 18) os problemas no espaço.

A quinta edição de *Mecânica Vetorial para Engenheiros* mantém a apresentação dos princípios fundamentais da dinâmica que caracterizou as edições anteriores. Os conceitos de quantidade de movimento e de momento angular são introduzidos no Capítulo 12, de modo que a segunda lei de Newton pode ser apresentada tanto em sua

---

\* Neste texto, "força efetiva" é entendida como o produto de massa por aceleração, o que, em nosso meio, chama-se *Força de Inércia* ou *Força de D'Alembert*. (Nota do R. T.)

forma convencional  $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$ , como na forma de uma lei, relacionando, respectivamente, a soma das forças agentes, num ponto material, e a soma de seus momentos, com as taxas de variação da quantidade de movimento e do momento angular do referido ponto. Com isso, pode-se fazer uma introdução antecipada no princípio da conservação do momento angular, bem como uma discussão mais bem fundamentada do movimento de um ponto material, sujeito a uma força central (Seção 12.9). Mais importante ainda, este enfoque pode ser estendido, facilmente, ao estudo do movimento de um sistema de pontos materiais (Capítulo 14) e, também, pode levar a um tratamento unificado e mais conciso da dinâmica dos corpos rígidos, em duas e três dimensões (Capítulos 16 a 18).

Os diagramas de corpo livre foram introduzidos bem cedo na estática, sendo usados não apenas para resolver problemas de equilíbrio, mas, também, para expressar a equivalência de dois sistemas de forças ou, de modo mais geral, de dois sistemas de vetores. A vantagem deste procedimento evidencia-se no estudo da dinâmica do corpo rígido, em que os diagramas são utilizados para resolver problemas no plano e no espaço. Dando-se maior ênfase às “equações correspondentes aos diagramas de corpo livre”, do que às equações algébricas do movimento, pode-se ter uma compreensão mais intuitiva e mais completa dos princípios fundamentais da dinâmica. Este enfoque, introduzido pela primeira vez em 1962, na primeira edição de *Mecânica Vetorial para Engenheiros*, tem tido ampla aceitação entre os professores de Mecânica Geral nos EUA; por isso preferiu-se empregar este método na resolução de todos os problemas resolvidos da presente edição.

Algumas seções opcionais foram incluídas e estão assinaladas com asteriscos, podendo ser facilmente distinguidas daquelas que formam o corpo principal do curso. Essas seções podem ser omitidas, sem perda de compreensão do resto do texto. Entre os tópicos opcionais incluem-se os seguintes: métodos gráficos para a solução de problemas de movimento retilíneo, trajetória de um ponto material sob a ação de uma força central, deflexão de jatos de fluidos, problemas sobre propulsão a jato e foguetes, cinemática e dinâmica de corpos rígidos em três dimensões, vibrações amortecidas e analogias elétricas. Estes assuntos serão de interesse num segundo curso.

O material apresentado neste volume, incluindo-se a maioria dos problemas, não exige conhecimentos matemáticos além de álgebra, trigonometria, cálculo elementar e elementos de álgebra vetorial, apresentados nos Capítulos 2 e 3 do volume de estática\*. Entretanto, há problemas especiais que demandam maior conhecimento de cálculo. Certas seções, como, por exemplo, as Seções 19.8 e 19.9 sobre vibrações amortecidas, deverão ser estudadas somente se os alunos possuírem uma formação matemática apropriada.

---

\* Algumas definições e propriedades de álgebra vetorial encontram-se resumidas no Apêndice A no fim deste volume, para maior comodidade do leitor. Além disso, as seções 9.11 – 9.16 do volume de estática, que tratam de momentos de inércia, foram reproduzidos no Apêndice B.

Cada capítulo se inicia com uma seção de introdução, que estabelece os objetivos do capítulo e descreve, em termos simples, o material a ser coberto e a sua aplicação à solução de problemas de engenharia. O texto foi dividido em unidades, cada qual consistindo numa ou mais seções de teoria, num ou mais problemas resolvidos e num grande número de problemas propostos. Cada unidade corresponde a um assunto bem definido que pode ser coberto, em geral, em uma aula. Em vários casos, todavia, o professor poderá considerar desejável dedicar mais do que uma aula a um dado tópico. Cada capítulo termina com uma recapitulação e sumário do assunto tratado. Algumas observações à margem auxiliam o aluno a organizar seu trabalho de recapitulação, assim como algumas indicações o ajudam a encontrar no texto os pontos importantes da matéria. Os problemas resolvidos foram desenvolvidos de uma forma semelhante àquela que os estudantes usarão para resolver os problemas propostos. Os exemplos têm, portanto, dupla finalidade: enriquecer o texto e demonstrar o tipo de trabalho limpo e organizado que o estudante deve desenvolver para a solução de problemas. A maioria dos problemas propostos são de natureza prática e deverão interessar ao estudante de engenharia; entretanto, eles foram projetados, principalmente, para ilustrar a matéria desenvolvida no texto e ajudar o estudante a compreender os princípios básicos da mecânica. Os problemas foram organizados de acordo com as partes da matéria, cuja ilustração se deseja, e foram arranjados em ordem de dificuldade crescente. Problemas que necessitam de uma atenção especial foram assinalados com asteriscos. As respostas aos problemas de número par encontram-se no final do livro.

A introdução de um curso de programação de computadores nos currículos das escolas de engenharia e o advento das facilidades computacionais tornaram possível resolver problemas de mecânica muito interessantes que eram considerados, há alguns anos, inadequados a um curso de graduação, em virtude da enorme dificuldade computacional apresentada. Em vista deste fato, esta nova edição de *Mecânica Vetorial para Engenheiros – Cinemática e Dinâmica* apresenta um grupo de quatro problemas para cada capítulo, preparados especialmente para serem resolvidos com a ajuda de um computador. Estes problemas podem envolver a determinação do movimento de um ponto material sob diferentes condições iniciais, a análise cinemática ou dinâmica de mecanismos em posições sucessivas, ou a integração numérica de várias equações de movimento. Ao desenvolver o necessário algoritmo para a solução de um dado problema, o aluno se beneficiará duplamente, pois terá a oportunidade de (1) melhorar o seu entendimento dos conceitos estudados e (2) aplicar a um problema de engenharia os conhecimentos adquiridos num curso de programação.

Os autores desejam registrar seus agradecimentos pelos inúmeros comentários e sugestões apresentados pelos leitores das edições anteriores\*.

Ferdinand P. Beer

E. Russell Johnston, Jr.

---

\* *Mechanics for Engineers e Vector Mechanics for Engineers.*



# Lista de Símbolos

$\mathbf{a}, a$	Aceleração
$a$	Constante; raio; distância; semi-eixo maior da elipse
$\bar{a}, \bar{a}$	aceleração do centro de massa
$\mathbf{a}_{B/A}$	Aceleração de $\mathbf{B}$ relativa a um referencial em translação com $A$
$\mathbf{a}_c$	Aceleração de Coriolis ou Complementar
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$	Reações nos suportes e conexões
$A, B, C, \dots$	Pontos
$A$	Área
$b$	Espessura; distância; semi-eixo menor da elipse
$c$	Constante; coeficiente de amortecimento viscoso
$C$	Centróide; centro instantâneo de rotação; capacitância
$d$	Distância
$e$	Coeficiente de restituição; base dos logaritmos naturais
$E$	Energia mecânica total, voltagem
$f$	Frequência; função escalar
$\mathbf{F}$	Força; força de atrito

$g$	Aceleração da gravidade
$G$	Baricentro; centro de massa; constante de gravitação
$h$	Momento angular por unidade de massa
$H_O$	Momento angular em relação ao ponto $O$
$\dot{H}_G$	Derivada do momento angular $H_G$ em relação a um referencial de orientação fixa
$(\dot{H}_G)_{Gxyz}$	Derivada do momento angular $H_G$ em relação ao referencial em rotação $Gxyz$
$i, j, k$	Vetores unitários na direção dos eixos coordenados
$i_n, i_t$	Vetores unitários na direção da normal e tangente
$i_r, i_\theta$	Vetores unitários nas direções radial e transversal
$i$	Corrente
$I, I_x, \dots$	Momentos de inércia
$\bar{I}$	Momento central ou baricêntrico de inércia
$J$	Momento polar de inércia
$k$	Constante de mola
$k_x, k_y, k_o$	Raio de giração
$\bar{k}$	Raio central (ou baricêntrico) de inércia
$l$	Comprimento
$L$	Quantidade de movimento
$L$	Comprimento; indutância
$m$	Massa
$m'$	Massa por unidade de comprimento
$M$	Binário; momento
$M_O$	Momento em relação ao pólo $O$
$M_O^R$	Momento resultante em relação ao pólo $O$
$M$	Módulo de um momento ou do momento de um binário, massa da Terra

---

$M_{OL}$	Momento em relação ao eixo $OL$
$n$	Direção normal
$N$	Componente normal da reação
$O$	Origem do sistema de coordenadas
$p$	Frequência circular ou angular
$\mathbf{P}$	Força; vetor
$\dot{\mathbf{P}}$	Derivada do vetor $\mathbf{P}$ em relação a um sistema de referência fixo.
$P_{xy}, \dots$	Produto de inércia
$q$	Taxa de escoamento de massa; carga elétrica
$\mathbf{Q}$	Força; vetor
$\dot{\mathbf{Q}}$	Derivada do vetor $\mathbf{Q}$ em relação a um sistema de referência fixo
$(\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz}$	Derivada do vetor $\mathbf{Q}$ em relação a um referencial $Oxyz$
$\mathbf{r}$	Vetor de posição
$r$	Raio; distância; coordenada polar
$\mathbf{R}$	Força resultante; vetor resultante, reação
$R$	Raio da Terra; resistência
$\mathbf{s}$	Vetor de posição
$s$	Comprimento de arco
$t$	Tempo; espessura; direção tangente
$\mathbf{T}$	Força
$T$	Tensão; energia cinética
$\mathbf{u}$	Velocidade
$u$	Variável
$U$	Trabalho
$\mathbf{v}, v$	Velocidade
$v$	Velocidade
$\bar{\mathbf{v}}, \bar{v}$	Velocidade do centro de massa

---

$\mathbf{v}_{B/A}$	Velocidade de $B$ em relação a um referencial em translação com $A$
$\times$	Produto vetorial
$V$	Volume; energia potencial
$w$	Carregamento por unidade de comprimento
$\mathbf{P}$	Peso, carga
$x, y, z$	Coordenadas cartesianas, distância
$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$	Derivadas temporais das coordenadas $x, y, z$
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	Coordenadas cartesianas do centróide, baricentro ou centro de massa
$\alpha, \alpha$	Aceleração angular
$\alpha, \beta, \gamma$	Ângulos
$\gamma$	Peso específico
$\delta$	Alongamento
$\varepsilon$	Excentricidade de uma seção cônica ou de uma órbita
$\lambda, \lambda$	Vetor unitário ao longo de uma reta
$\eta$	Rendimento
$\theta$	Coordenada angular; ângulo de Euler; ângulo; coordenada polar
$\mu$	Coefficiente de atrito
$\rho$	Massa específica; raio de curvatura
$\tau$	Período; período de um satélite
$\phi$	Ângulo de atrito; ângulo Euler; ângulo de fase; ângulo
$\phi$	Defasagem
$\psi$	Ângulo de Euler
$\omega, \omega$	Vetor velocidade angular. Velocidade angular (escalar)
$\omega$	Frequência angular de uma vibração forçada
$\Omega$	Vetor velocidade angular de um sistema de referência

# Capítulo 11

## Cinemática do Ponto Material

**11.1 Introdução** Os Capítulos de 1 a 10 foram dedicados à *Estática*, ou seja, à análise dos corpos em repouso. Iniciaremos, neste capítulo, o estudo dos corpos em movimento.

Enquanto o estudo da estática remonta à época dos filósofos gregos, a primeira contribuição significativa ao estudo do movimento se deve a Galileu (1564-1642). Suas experiências sobre o movimento uniformemente acelerado levaram Newton (1642-1727) a formular as leis fundamentais do movimento.

O estudo do movimento divide-se em duas partes: *cinemática* e *dinâmica*. A cinemática trata da "geometria" do movimento, relacionando posição, velocidade, aceleração e tempo, sem referência às causas do movimento. A dinâmica, por sua vez, trata das relações entre as forças agentes num corpo e o seu movimento; usa-se a dinâmica para se prever o movimento causado pelas forças aplicadas ou para se determinar as forças necessárias à produção de um determinado movimento.

Os Capítulos de 11 a 14 tratam do *movimento do ponto material* e o Capítulo 11, em particular, destina-se à *cinemática do ponto material*.

O termo ponto material não implica que nos limitaremos ao estudo de corpúsculos. Nos próximos capítulos estudaremos os movimentos de corpos tão grandes como automóveis, foguetes ou aviões, sem levar em conta seus tamanhos. Dizer que um corpo é analisado como ponto material significa que apenas seu movimento, como um todo, é considerado; qualquer movimento de rotação em torno do seu centro de massa será ignorado. Há casos, entretanto, em que o movimento de rotação não é desprezível; o corpo, então, não poderá ser considerado como um ponto material. A análise de tais movimentos será feita em capítulos posteriores, que tratam do movimento do *corpo rígido*.

Na primeira parte deste capítulo, analisaremos o movimento retilíneo de um ponto material, isto é, determinaremos, para cada instante, a posição, a velocidade e a aceleração de um ponto que se move em linha reta. Depois de estudarmos o movimento, empregando métodos gerais de análise, consideraremos dois casos particulares importantes: o movimento uniforme e o uniformemente acelerado (Seções 11.4 e 11.5). A seguir, consideraremos, na Seção 11.6, os movimentos simultâneos de vários pontos materiais e introduziremos o conceito de movimento de um ponto em relação a outro. A primeira parte deste capítulo termina com um estudo de métodos gráficos de análise e de sua aplicação à solução de vários problemas sobre movimento retilíneo de pontos materiais (Seções 11.7 e 11.8).

Na segunda parte deste capítulo, analisaremos o movimento de um ponto que se move ao longo de uma trajetória curvilínea.

Uma vez que a posição, a velocidade e a aceleração de um ponto material serão definidas como grandezas vetoriais, será necessário introduzir-se o conceito de derivada de uma função vetorial. Isto será feito na Seção 11.10, a partir da qual o conceito de derivada de um vetor passará a fazer parte de nossas ferramentas matemáticas. Consideraremos, então, aplicações em que o movimento do ponto será definido em coordenadas cartesianas; neste ponto será analisado o movimento de um projétil (Seção 11.11). Na Seção 11.12, analisaremos o movimento de um ponto material relativamente a um sistema de referência em translação. Finalmente, analisaremos o movimento curvilíneo em coordenadas não-cartesianas. Na Seção 11.13, introduziremos as componentes tangencial e normal da velocidade e da aceleração e, na Seção 11.14, suas componentes radial e transversal.

## Movimento Retilíneo de um Ponto Material

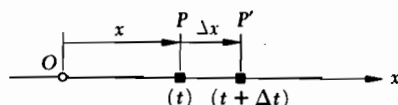
**11.2 Posição, Velocidade e Aceleração.** Se um ponto material se desloca ao longo de uma trajetória retilínea, diz-se que ocupa uma certa posição na reta. Para definir a posição  $P$  do ponto, escolhemos uma origem  $O$  fixa na reta e um sentido positivo ao longo dela. Medimos a distância  $x$  de  $O$  a  $P$  e atribuímos-lhe um sinal positivo (+) ou negativo (-), de acordo com a orientação escolhida. A distância  $x$ , com o sinal adequado, define completamente a posição do ponto; é chamada de *coordenada de posição* do ponto material considerado. Por exemplo, a coordenada de posição que corresponde a  $P$  na Fig. 11.1a é  $x = +5\text{m}$ , enquanto a coordenada correspondente a  $P'$  na Fig. 11.1b é  $x' = -2\text{m}$ .



Figura 11.1

Quando a coordenada de posição  $x$  de um ponto material for conhecida para qualquer valor do tempo  $t$ , dizemos que o movimento do ponto será conhecido. O movimento pode ser representado na forma de uma relação entre  $x$  e  $t$ , tal como  $x = 6t^2 - t^3$ , ou na forma de um gráfico de  $x$  versus  $t$ , como mostra a Fig. 11.6. As unidades mais usadas para medir  $x$  e  $t$  são as do SI, isto é, metro e segundo, respectivamente\*. Consideremos a posição  $P$  ocupada pelo ponto material no instante  $t$  e a coordenada correspondente  $x$  (Fig. 11.2). Consideremos, também, a posição  $P'$  ocupada pelo ponto em um instante  $t + \Delta t$ ; a coordenada de posição  $P'$  pode ser obtida adicionando-se à coordenada  $x$  de  $P$  o deslocamento  $\Delta x$ , que será positivo ou negativo se  $P'$  estiver à direita ou à esquerda de  $P$ . A velocidade escalar média da partícula no intervalo de tempo  $\Delta t$  é definida como o quociente entre o deslocamento  $\Delta x$  e o intervalo de tempo  $\Delta t$ .

$$\text{Velocidade escalar média} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$



**Figura 11.2**

Se  $\Delta x$  for expresso em metros e  $\Delta t$  em segundos, a velocidade escalar média será expressa em metro por segundo (m/s).

A *velocidade escalar instantânea* (ou, simplesmente, *velocidade*)  $v$  do ponto material, no instante  $t$ , é obtida da velocidade escalar média, considerando-se intervalos de tempo  $\Delta t$  cada vez menores:

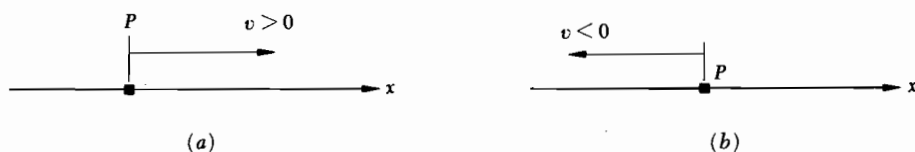
$$\text{Velocidade escalar instantânea} = v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

A velocidade escalar instantânea no instante  $t$  será, também, expressa em m/s. Observando-se que o limite do quociente é igual, por definição, à derivada de  $x$  em relação a  $t$ , escrevemos

\* Ver Seção 1.3.

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (11.1)$$

A velocidade escalar  $v$  é representada por um número real, positivo, negativo\* ou nulo. Um valor positivo de  $v$  indica que  $x$  aumenta, isto é, que o ponto material se desloca no sentido positivo (Fig. 11.3a); um valor negativo de  $v$  indica que  $x$  diminui, isto é, que o ponto se desloca no sentido negativo (Fig. 11.3b).\*

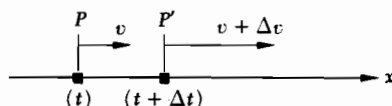


**Figura 11.3**

Consideremos a velocidade  $v$  do ponto material num instante  $t$  e também sua velocidade  $v + \Delta v$  num instante posterior  $t + \Delta t$  (Fig. 11.4). A *aceleração escalar média* do ponto, no intervalo de tempo  $\Delta t$ , é definida como o quociente entre  $\Delta v$  e  $\Delta t$ :

$$\text{Aceleração escalar média} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Se  $\Delta v$  for expresso em m/s e  $\Delta t$  em segundos, a aceleração escalar média será dada em m/s<sup>2</sup>.



**Figura 11.4**

\* Como veremos na Seção 11.9, velocidade é uma quantidade vetorial. Entretanto, já que estamos considerando aqui o movimento retilíneo de um ponto material, em que a velocidade tem uma direção conhecida e fixa, precisamos somente especificar seu sentido e módulo. Isto pode ser convenientemente indicado usando-se uma quantidade escalar com sinal positivo (+) ou negativo (-). A mesma consideração será aplicada à aceleração de um ponto material em movimento retilíneo.



A *aceleração escalar instantânea*  $a$  (ou, simplesmente, *aceleração*) do ponto material, no instante  $t$ , é obtida da aceleração escalar média, tomando-se valores cada vez menores de  $\Delta t$  e  $\Delta v$ :

$$\text{aceleração escalar instantânea} = a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

A aceleração escalar instantânea será também expressa em  $\text{m/s}^2$ . O limite do quociente acima é, por definição, a derivada de  $v$ , em relação a  $t$ , e mede a taxa de variação da velocidade. Escrevemos:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (11.2)$$

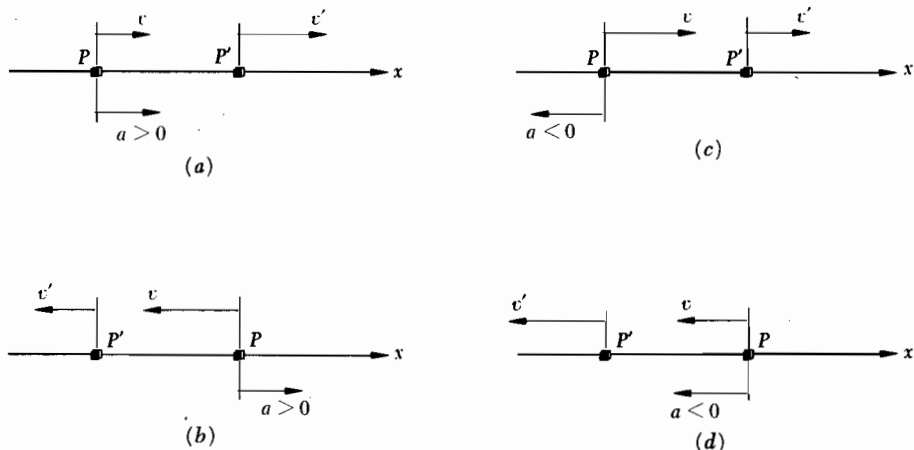
ou, substituindo-se o valor de  $v$  de (11.1)

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (11.3)$$

Analogamente à velocidade, a aceleração escalar  $a$  é representada por um número real, positivo, negativo\* ou nulo. Um valor positivo de  $a$  indica que a velocidade (isto é, o escalar  $v$ ) está aumentando.

Isto pode significar que o ponto material se desloca cada vez mais rapidamente no sentido positivo (Fig. 11.5a) ou que ele se desloca cada vez mais lentamente no sentido negativo. Fig (11.5b); em ambos os casos,  $\Delta v$  é positivo. Um valor negativo de  $a$  indica que a velocidade escalar está diminuindo; o ponto material se desloca cada vez mais lentamente, no sentido positivo (Fig. 11.5c) ou cada vez mais rapidamente, no sentido negativo (Fig. 11.5d).

\* Ver nota da página anterior.

**Figura 11.5**

Emprega-se, às vezes, o termo *desaceleração*, para indicar que o módulo da velocidade está diminuindo; o ponto desloca-se cada vez mais lentamente. Por exemplo, o ponto na Fig. 11.5 está desacelerado nos casos *b* e *c*, enquanto nos casos *a* e *d* ele está realmente acelerado (isto é, está se deslocando cada vez mais rapidamente).

Utilizando a "regra da derivação em cadeia", da Eq. (11.2) tem-se

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

pois da Eq. (11.1),  $v = dx/dt$ .

Assim

$$a = v \frac{dv}{dx} \quad (11.4)$$

*Exemplo.* Consideremos um ponto material que se desloca em linha reta, de modo que sua posição seja definida por

$$x = 6t^2 - t^3,$$

onde  $t$  é expresso em segundos e  $x$  em metros. A velocidade  $v$ , em qualquer instante  $t$ , é obtida derivando-se  $x$  em relação a  $t$

$$v = \frac{dx}{dt} = 12t - 3t^2.$$

A aceleração  $a$ , por sua vez, é obtida derivando-se novamente em relação a  $t$ .

$$a = \frac{dv}{dt} = 12 - 6t.$$

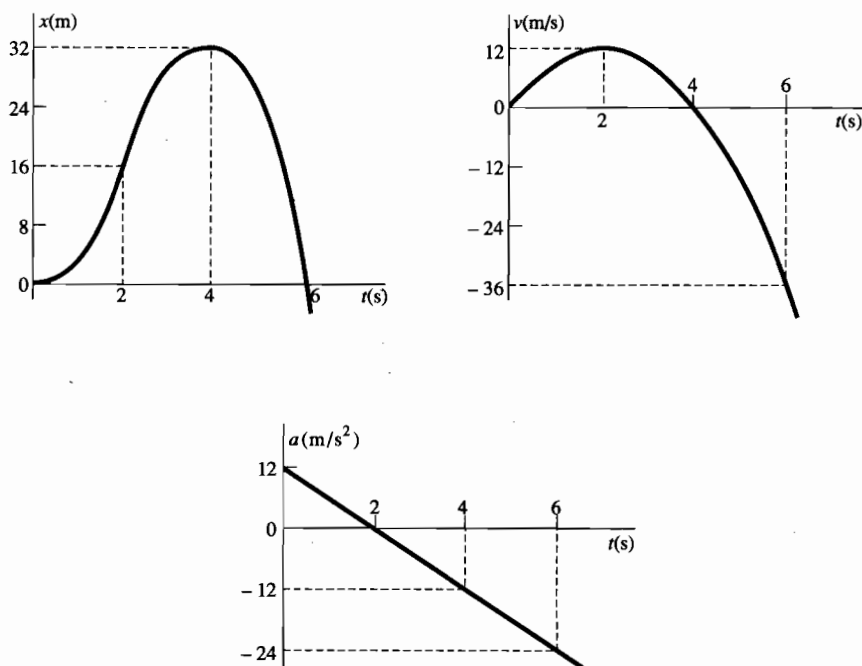
A coordenada de posição, a velocidade e a aceleração foram representadas em um gráfico, em função de  $t$  na Fig. 11.6. As curvas obtidas denominam-se diagramas do movimento. Não se deve esquecer, entretanto, que o ponto material não se move ao longo de qualquer uma dessas curvas; o ponto move-se sobre uma reta. Como a derivada de uma função mede a inclinação da curva correspondente, a inclinação da curva  $x-t$ , para qualquer instante dado, é igual ao valor de  $v$  nesse instante, e a inclinação da curva  $v-t$  é igual ao valor de  $a$ . Já que  $a = 0$  para  $t = 2s$ , a inclinação da curva  $v-t$  deve ser zero para  $t = 2s$ ; a velocidade alcança um máximo nesse instante.\* Também, sendo  $v = 0$  para  $t = 4s$ , a tangente à curva  $x-t$  deve ser horizontal para este valor de  $t$ .

Uma análise dos três diagramas do movimento da Fig. 11.6 mostra que o movimento do ponto material deste  $t = 0$  até  $t \rightarrow \infty$  pode ser dividido em quatro fases:

1. O ponto material parte da origem,  $x = 0$ , com velocidade zero, mas com aceleração positiva. Animado com esta aceleração, o ponto adquire uma velocidade positiva no sentido positivo. De  $t = 0$  a  $t = 2s$ ,  $x$ ,  $v$  e  $a$  são todos positivos.
2. Em  $t = 2s$ , a aceleração é zero; a velocidade atinge o valor máximo. De  $t = 2s$  a  $t = 4s$ ,  $v$  é positivo; mas  $a$  é negativo; o ponto move-se, ainda, no sentido positivo, cada vez mais lentamente; está desacelerado.
3. Em  $t = 4s$ , a velocidade é zero; a coordenada de posição  $x$  alcança o valor máximo. Daqui por diante,  $v$  e  $a$  são negativos; o ponto está acelerado e move-se no sentido negativo, com um aumento de velocidade.

---

\* Deve-se entender como inclinação o valor do *coeficiente angular* da reta tangente. (Nota do R. T.)

**Figura 11.6**

4. Em  $t = 6$  s, o ponto passa pela origem; sua coordenada  $x$  é então, zero, enquanto a distância total percorrida desde o início do movimento é 64 m. Para valores de  $t$  maiores que 6 s,  $x$ ,  $v$  e  $a$  serão todos negativos. O ponto irá se movimentar no sentido negativo, afastando-se de  $O$ , cada vez mais rapidamente.

**11.3 Determinação do Movimento de um Ponto Material.** Vimos, na seção anterior, que o movimento de um ponto material é conhecido se sua posição é conhecida para cada valor do tempo  $t$ . Na prática, entretanto, um movimento é raramente definido por uma relação entre  $x$  e  $t$ . Muitas vezes, as condições do movimento estarão especificadas pelo tipo de aceleração que o ponto possui. Por exemplo, um corpo em queda livre terá uma aceleração constante, dirigida para baixo e igual\* a  $9,81 \text{ m/s}^2$ ; uma massa presa a uma mola, que foi estendida, terá uma aceleração proporcional ao afastamento instantâneo da mola medido em relação à posição de equilíbrio etc. Em geral, a aceleração do ponto material pode ser expressa como uma função de uma das diversas variáveis  $x$ ,  $v$  e  $t$ . Para determinar a coordenada de posição  $x$  em termos de  $t$ , será necessário efetuar duas integrações sucessivas.

\* O valor de  $g$ , aceleração da gravidade, depende do local na superfície da Terra.

Consideraremos as três classes mais comuns de movimento:

1.  $a = f(t)$ . A Aceleração é uma Dada Função de  $t$ . Resolvendo-se (11.2) para  $dv$  e substituindo-se  $a$  por  $f(t)$ , escrevemos

$$dv = a dt$$

$$dv = f(t) dt$$

Integrando-se ambos os membros, obtemos

$$\int dv = \int f(t) dt$$

que define  $v$  em função de  $t$ . Deve-se observar que uma constante arbitrária será introduzida como resultado da integração. Isto se deve ao fato de existirem muitos movimentos que correspondem a uma dada aceleração  $a = f(t)$ . Para definir univocamente o movimento do ponto material, é necessário especificar as *condições iniciais* do movimento, isto é, o valor  $v_0$  da velocidade e  $x_0$  da coordenada de posição para  $t = 0$ . Substituindo-se as integrais indefinidas por *integrais definidas* com os limites inferiores correspondentes às condições iniciais de  $t = 0$  e  $v = v_0$ , escrevemos

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t f(t) dt$$

$$v - v_0 = \int_0^t f(t) dt$$

que dá  $v$  em função de  $t$ .

Resolvemos agora (11.1) para  $dx$ ,

$$dx = v dt$$

e substituímos para  $v$  a relação obtida acima. Ambos os membros são então integrados, o primeiro membro, em relação a  $x$ , de  $x = x_0$  até  $x = x$ , e o segundo membro, em relação a  $t$ , de  $t = 0$  até  $t = t$ . A coordenada de posição  $x$  é, assim, obtida em função de  $t$ ; o segundo movimento está completamente determinado.

Dois casos particularmente importantes serão estudados com maiores detalhes nas Seções 11.4 e 11.5: aquele em que  $a = 0$ , correspondente a um *movimento uniforme*, e o caso em que  $a = \text{cte.}$ , correspondente ao *movimento uniformemente acelerado*.

2.  $a = f(x)$ . *A Aceleração É uma Dada Função de  $x$* . Partindo da Eq. (11.4) e substituindo  $a$  por  $f(x)$ , escrevemos:

$$\begin{aligned}v dv &= a dx \\v dv &= f(x) dx\end{aligned}$$

Como as variáveis já estão separadas, podemos integrar a equação. Denominando-se por  $v_0$  e  $x_0$ , respectivamente, os valores iniciais da velocidade e da coordenada de posição, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_{v_0}^v v dv &= \int_{x_0}^x f(x) dx \\ \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 &= \int_{x_0}^x f(x) dx\end{aligned}$$

que dá  $v$  em função de  $x$ . De (11.1) temos

$$dt = \frac{dx}{v}$$

onde se substitui  $v$  pela relação obtida acima. Ambos os membros podem ser integrados, obtendo-se a relação desejada entre  $x$  e  $t$ .

3.  $a = f(v)$ . *A Aceleração É uma Dada Função de  $v$* . Podemos substituir  $a$  por  $f(v)$  em (11.2) ou (11.4) e obter as seguintes relações:

$$\begin{aligned}f(v) &= \frac{dv}{dt} & f(v) &= v \frac{dv}{dx} \\ dt &= \frac{dv}{f(v)} & dx &= \frac{v dv}{f(v)}\end{aligned}$$

A integração da primeira equação fornecerá uma relação entre  $v$  e  $t$ ; a integração da segunda fornecerá uma relação entre  $v$  e  $x$ . Cada uma destas relações pode ser usada em conjunto com a Eq. (11.1), para se obter a relação entre  $x$  e  $t$  que caracteriza o movimento do ponto material.

### Problema Resolvido 11.1

A posição de um ponto material que se desloca em linha reta é definida pela relação  $x = t^3 - 6t^2 - 15t + 40$ , onde  $x$  é expresso em metros e  $t$  em segundos e  $t \geq 0$ . Determinar (a) o instante em que a velocidade será nula, (b) a posição e a distância percorrida pelo ponto até esse instante, (c) a aceleração do ponto nesse instante, (d) a distância percorrida pelo ponto de  $t = 4s$  a  $t = 6s$ .

**Solução** As equações que caracterizam o movimento são

$$x = t^3 - 6t^2 - 15t + 40 \quad (1)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 12t - 15 \quad (2)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 12 \quad (3)$$

**a. Instante em Que  $v = 0$**  Fazemos  $v = 0$  em (2)

$$3t^2 - 12t - 15 = 0 \quad t = -1s \text{ e} \quad t = +5s \quad \Leftarrow$$

Somente a raiz  $t = +5s$  corresponde ao instante posterior ao início do movimento; para  $t < 5s$ ,  $v < 0$ , o ponto material se desloca no sentido negativo; para  $t > 5s$ ,  $v > 0$ , o ponto se desloca no sentido positivo.

**b. Posição e Distância Percorrida Quando  $v = 0$ .** Levando  $t = 5s$  para (1), temos

$$x_5 = (5)^3 - 6(5)^2 - 15(5) + 40 \quad x_5 = -60m \quad \Leftarrow$$

A posição inicial para  $t = 0$  era  $x_0 = + 40\text{m}$ . Já que  $v \neq 0$  durante o intervalo  $t = 0$  a  $t = 5\text{s}$ , temos

$$\text{Distância percorrida} = x_5 - x_0 = - 60\text{m} - 40\text{m} = - 100\text{m}$$

$$\begin{aligned} \text{Distância percorrida} &= 100\text{m} \\ \text{no sentido negativo} &\Leftarrow \end{aligned}$$

**c. Aceleração Quando  $v = 0$**  Levamos  $t = 5\text{s}$  à equação (3):

$$a_5 = 6(5) - 12 \qquad a_5 = +18 \text{ m/s}^2 \Leftarrow$$

**d. Distância Percorrida de  $t = 4\text{s}$  a  $t = 6\text{s}$**  Como o ponto material se desloca no sentido negativo, de  $t = 4\text{s}$  a  $t = 5\text{s}$  e no sentido positivo, de  $t = 5\text{s}$  a  $t = 6\text{s}$ , calcularemos separadamente a distância percorrida durante cada um desses intervalos de tempo.

$$\begin{aligned} \text{De } t = 4\text{s a } t = 5\text{s:} \quad x_5 &= - 60 \\ x_4 &= (4)^3 - 6(4)^2 - 15(4) - 40 = - 52\text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Distância percorrida} &= x_5 - x_4 = - 60 - (-52) = - 8\text{m} \\ &= 8\text{m no sentido negativo.} \end{aligned}$$

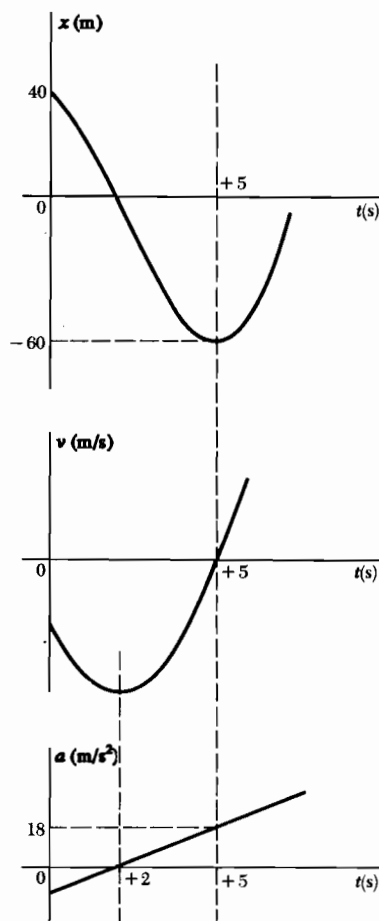
$$\begin{aligned} \text{De } t = 5\text{s a } t = 6\text{s: } x_5 &= - 60\text{m} \\ x_6 &= (6)^3 - 6(6)^2 - 15(6) - 40 = - 50\text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Distância percorrida} &= x_6 - x_5 = - 50 - (- 60) = +10\text{m} \\ &= 10\text{m no sentido positivo.} \end{aligned}$$

**A distância total percorrida de  $t = 4\text{s}$  a  $t = 6\text{s}$  é**

$$8\text{m} + 10\text{m} = 18\text{m} \Leftarrow$$





## Problema Resolvido 11.2

De uma janela de um prédio, localizada a 20m acima do solo, arremessa-se, verticalmente para cima, uma bola, com velocidade de 10 m/s. Sabendo-se que a aceleração da bola é constante e igual a  $9,81 \text{ m/s}^2$ , para baixo, determinar (a) a velocidade  $v$  e a elevação  $y$  da bola, relativamente ao solo, para qualquer instante  $t$ , (b) a máxima elevação atingida pela bola e o correspondente instante  $t$  e (c) o instante em que a bola atinge o solo e a sua correspondente velocidade. Esboçar os gráficos  $v - t$  e  $y - t$ .

**a. Velocidade e Elevação.** Escolhamos o eixo  $y$  para medir a coordenada de posição (ou elevação), com origem  $O$  no solo e sentido positivo para cima. O valor da aceleração e os valores iniciais de  $v$  e  $y$  estão indicados na figura ao lado. Substituindo-se  $a$  em  $a = dv/dt = 0$ ,  $v_0 = +10\text{ m/s}$ , tem-se

$$\frac{dv}{dt} = a = -9,81 \text{ m/s}^2$$

$$\int_{v_0=10}^v dv = - \int_0^t 9,81 dt$$

$$[v]_{10}^v = -[9,81 t]_0^t$$

$$v - 10 = -9,81t$$

$$v = 10 - 9,81t \quad (1) \quad \Leftarrow$$

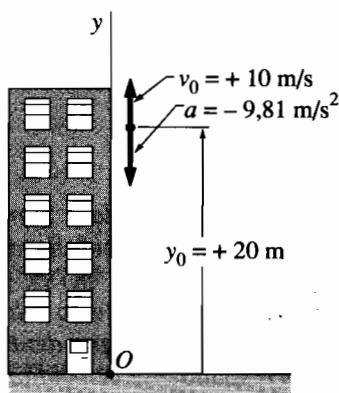
Substituindo-se  $v$  em  $v = dy/dt$  e notando-se que para  $t = 0$ ,  $y_0 = 20\text{ m}$ , obtém-se

$$\frac{dy}{dt} = v = 10 - 9,81t$$

$$\int_{y_0=20}^y dy = \int_0^t (10 - 9,81 t) dt$$

$$[y]_{20}^y = [10t - 4,90t^2]_0^t$$

$$y = 20 + 10t - 4,90t^2 \quad (2) \quad \Leftarrow$$



**b. Máxima Elevação.** A velocidade da bola anula-se quando esta atinge a elevação máxima. Segue-se de (1) que

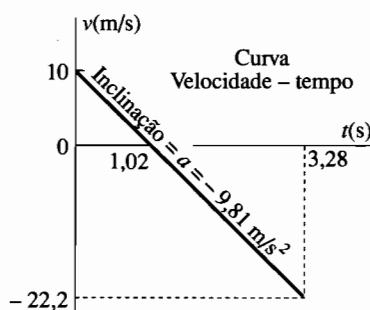
$$10 - 9,81t = 0$$

$$t = 1,02s \quad \Leftarrow$$

Substituindo-se  $t = 1,02s$  em (2), resulta

$$y = 20 + 10(1,02) - 4,90(1,02)^2$$

$$y = 25,1m \quad \Leftarrow$$



**c. A Bola Atinge o Solo.** Quando a bola atinge o solo, tem-se  $y = 0$ . Fazendo-se  $y = 0$  em (2), obtém-se

$$20 + 10t - 4,90t^2 = 0$$

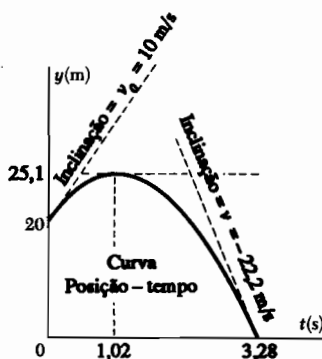
$$t = -1,24s \quad \text{e}$$

$$t = +3,28s \quad \Leftarrow$$

Somente a raiz  $t = +3,28s$  corresponde a um tempo posterior ao início do movimento. Levando-se este valor de  $t$  para (1), tem-se, finalmente,

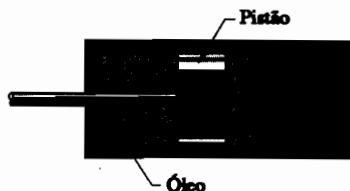
$$v = 10 - 9,81(3,28) = -22,2m/s$$

$$v = 22,2 \text{ m/s} \quad \downarrow \quad \Leftarrow$$



### Problema Resolvido 11.3

O mecanismo de amortecimento usado para reduzir o recuo em certos tipos de armas consiste essencialmente em um pistão, que está preso ao cano e pode mover-se num cilindro fixo cheio de óleo. Quando o cano recua com uma velocidade  $v_0$ , o pistão movimenta-se e o óleo é forçado através de orifícios no pistão, provocando uma desaceleração do pistão e do cano, proporcional à sua velocidade, isto é,  $a = -kv$ . Expressar (a)  $v$  em função de  $t$ , (b)  $x$  em função de  $t$  e (c)  $v$  em função de  $x$ . Esboçar as correspondentes curvas do movimento.

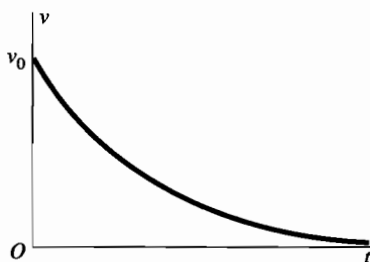


a)  $v$  em Função de  $t$  Substituindo  $a$  por  $-kv$  na fórmula fundamental que define a aceleração,  $a = dv/dt$ , escrevemos

$$-kv = \frac{dv}{dt} \quad \frac{dv}{v} = -k dt \quad \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -k \int_0^t dt$$

$$\ln \frac{v}{v_0} = -kt$$

$$v = v_0 e^{-kt} \Leftarrow$$



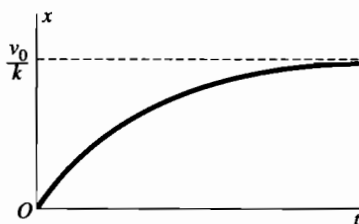
**b)  $x$  em Termos de  $t$ .** Substituindo-se a relação obtida para  $v$  em  $v = dx/dt$ , escrevemos

$$v_0 e^{-kt} = \frac{dx}{dt}$$

$$\int_0^x dx = v_0 \int_0^t e^{-kt} dt$$

$$x = -\frac{v_0}{k} [e^{-kt}]_0^t = -\frac{v_0}{k} (e^{-kt} - 1)$$

$$x = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) \Leftarrow$$



**c)  $v$  em Termos de  $x$ .** Substituindo-se  $a$  por  $kv$  em  $a = v dv/dx$ , escrevemos

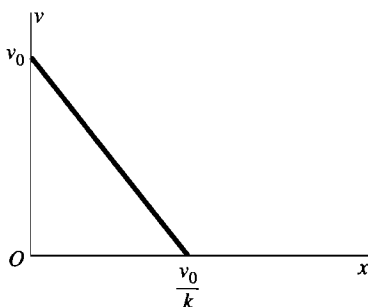
$$-kv = v \frac{dv}{dx}$$

$$dv = -k dx$$

$$\int_{v_0}^v dv = -k \int_0^x dx$$

$$v - v_0 = -kx$$

$$v = v_0 - kx \Leftarrow$$



**Verificação.** A parte c poderia ter sido resolvida eliminando-se  $t$  das respostas obtidas para as partes a e b. Este método pode ser usado como verificação. Da parte a obtemos  $e^{-kt} = v/v_0$ ; substituindo-se na resposta da parte b, obtemos

$$x = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) = \frac{v_0}{k} \left( 1 - \frac{v}{v_0} \right) \quad v = v_0 - kx \quad (\text{verificado})$$

## Problemas

**11.1** O movimento de um ponto material é definido pela relação  $x = 2t^3 - 15t^2 + 36t - 10$ , onde  $x$  é expresso em metros e  $t$  em segundos. Determinar a posição, a velocidade e a aceleração, quando  $t = 4$ s.

**11.2** O movimento de um ponto material é definido pela relação  $x = t^4 - 3t^3 + t$ , onde  $x$  é expresso em metros e  $t$  em segundos. Determinar a posição e a aceleração, quando  $t = 3$ s.

**11.3** O movimento de um ponto material é definido pela relação  $x = t^3 - 3t^2 + 6$ , onde  $x$  é dado em metros e  $t$  em segundos. Determinar o instante, a posição e a aceleração, quando  $v = 0$ .

**11.4** O movimento de um ponto material é definido pela relação  $x = t^3 - 9t^2 + 15t + 18$ , com  $x$  em metros e  $t$  em segundos. Determinar o instante, a posição e a aceleração quando  $v = 0$ .

**11.5** A relação  $x = t^3 - 12t^2 + 45t - 20$ , onde  $x$  é expresso em metros e  $t$  em segundos, define o movimento de um ponto material. Determinar (a) o instante para o qual a velocidade se anula e (b) a posição, a aceleração e a distância total percorrida quando  $t = 5$ s.

**11.6** O movimento de um ponto material é definido pela relação  $x = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 4$ , onde  $x$  é expresso em metros e  $t$  em segundos. Determine (a) o instante para o qual a velocidade se anula e (b) a posição e a distância total percorrida quando a aceleração se anula.

**11.7** A aceleração de um ponto material é definida pela relação  $a = -5\text{m/s}^2$ . Se  $v = +30\text{m/s}$  e  $x = 0$  quando  $t = 0$ , determinar a velocidade, a posição e a distância total percorrida quando  $t = 8\text{s}$ .

**11.8** A aceleração de um ponto material é diretamente proporcional ao tempo  $t$ . No instante  $t = 0$ , a velocidade do ponto é  $v = -9\text{m/s}$  e a aceleração é  $a = 0$ . Sabendo-se que  $v = 0$  e  $x = 12\text{m}$  quando  $t = 3\text{s}$ , escrever as equações que caracterizam o movimento.

**11.9** A aceleração de um ponto material é definida no SI pela relação  $a = 32 - 6t^2$ . O ponto parte de  $x = 50\text{m}$  com velocidade nula, no instante  $t = 0$ . Determinar (a) o instante no qual a velocidade se anula novamente, (b) a posição e a velocidade quando  $t = 6\text{s}$  e (c) a distância total percorrida pelo ponto de  $t = 0$  a  $t = 6\text{s}$ .

**11.10** A aceleração de um ponto material é definida por  $a = kt^2$ , no sistema internacional de unidades. (a) Sabendo-se que  $v = -24\text{m/s}$  quando  $t = 0$  e que  $v = +40\text{m/s}$  quando  $t = 4\text{s}$ , determinar a constante  $k$ . (b) Escrever as equações que caracterizam o movimento, sabendo-se também que  $x = 6\text{m}$  quando  $t = 2\text{s}$ .

**11.11** A aceleração de um ponto material é definida por  $a = -kx^2$ . O ponto material parte de  $x = 900\text{mm}$ , com velocidade nula. Observa-se que sua velocidade é de  $10\text{m/s}$ , para  $x = 300\text{mm}$ . Determinar (a) o valor de  $k$  e (b) a velocidade quando  $x = 500\text{mm}$ .

**11.12** A aceleração de um ponto material é definida por  $a = -k/x$ . Determinou-se experimentalmente que  $v = 3\text{m/s}$  quando  $x = 500\text{mm}$ . Obter (a) a velocidade quando  $x = 750\text{mm}$  e (b) a posição do ponto para a qual sua velocidade é nula.

**11.13** A aceleração de um ponto material oscilante é definida por  $a = -kx$ . Obtenha o valor de  $k$  tal que  $v = 24\text{m/s}$  quando  $x = 0$  e  $v = 0$  quando  $x = 6\text{m}$ .

**11.14** A aceleração de um ponto material é dada por  $a = 90 - 6x^2$ , onde  $x$  é dado em metros e  $a$  em  $\text{m/s}^2$ . O ponto material parte com velocidade nula da posição  $x = 0$ . Determine (a) a velocidade quando  $x = 5\text{m}$ , (b) a posição onde a velocidade se torna outra vez igual a zero e (c) a posição onde a velocidade é máxima.

**11.15** A aceleração de um ponto material é dada por  $a = -16x(1 + kx^2)$ , onde  $a$  é expresso em  $\text{m/s}^2$  e  $x$  em metros. A velocidade é  $v = 20\text{m/s}$  quando  $x = 0$ . Determinar  $v$  quando  $x = 4\text{m}$ , para (a)  $k = 0$ , (b)  $k = 2,0 \times 10^{-3}\text{m/s}^2$  e (c)  $k = -2,0 \times 10^{-3}\text{m/s}^2$ .

**11.16** A aceleração de um ponto material é dada por  $a = -60x^{-1,5}$ , onde  $a$  é expresso em  $\text{m/s}^2$  e  $x$  em metros. O ponto material parte de  $x = 4\text{m}$ , com velocidade nula. Determinar a velocidade para (a)  $x = 2\text{m}$ , (b)  $x = 1\text{m}$  e (c)  $x = 100\text{mm}$ .

**11.17** A aceleração de um ponto material é definida por  $a = -3v$ , com  $a$  em  $\text{m/s}^2$  e  $v$  em  $\text{m/s}$ . No instante inicial,  $v = 60\text{m/s}$ . Determinar (a) a distância percorrida até o ponto atingir o repouso, (b) o tempo necessário para o ponto alcançar o repouso e (c) o tempo necessário para a velocidade se reduzir a 1% de seu valor inicial.

**11.18** A aceleração de um ponto material é definida por  $a = -kv^2$ , onde  $a$  é dado em  $\text{m/s}^2$  e  $v$  em  $\text{m/s}$ . O ponto material parte de  $x = 0$  com velocidade de  $20\text{m/s}$  quando  $x = 100\text{m}$  a velocidade vale  $v = 15\text{m/s}$ . Determinar a distância percorrida pelo ponto (a) até sua velocidade atingir  $10\text{m/s}$  e (b) até o repouso.

**11.19** Resolva o problema anterior supondo que a aceleração do ponto é dada por  $a = -kv^3$

**11.20** Devido à resistência do ar, a ogiva de um pequeno foguete experimental sofre uma desaceleração (em  $\text{m/s}^2$ ) dada por  $5,0 \times 10^{-4} v^2$ , onde  $v$  (em  $\text{m/s}$ ) é a velocidade. Determinar a máxima altura atingida pela ogiva, se ela for lançada do solo, verticalmente, com uma velocidade inicial de  $100\text{ m/s}$ . (Sugestão: a aceleração total na subida é  $-(g + 5,0 \times 10^{-4} v^2)$ , onde  $g = 9,81\text{ m/s}^2$ ).

**11.22** A aceleração de um ponto material é dada por  $a = -kv^{1,5}$ . O ponto sai da origem no instante inicial, com uma velocidade  $v_0$ . (a) Mostre que a velocidade e a coordenada de posição estão relacionadas pela equação  $x/t = \sqrt{v_0 v}$ . (b) Sabendo-se que para  $v_0 = 36\text{ m/s}$  o ponto material atinge o repouso depois de se deslocar  $3\text{m}$ , determinar sua velocidade e o instante quando  $x = 2\text{m}$ .

**11.23** A velocidade de um ponto material é definida pela relação  $v = 40 - 0,2x$  onde  $v$  é dado em  $\text{m/s}$  e  $x$  em metros. Sabendo-se que  $x = 0$  para  $t = 0$ , determinar (a) a distância percorrida pelo ponto até o repouso, (b) a aceleração para  $t = 0$  e (c) o instante quando  $x = 50\text{m}$ .

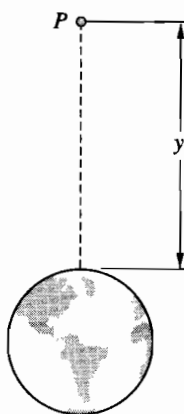
**11.24** Um projétil penetra num meio resistente, na posição  $x = 0$ , com uma velocidade  $v_0 = 274\text{ m/s}$  e percorre  $10\text{ cm}$  até atingir o repouso. Supondo-se que a velocidade do projétil seja dada por  $v = v_0 - kx$  ( $v$  em  $\text{m/s}$  e  $x$  em  $\text{m}$ ), determinar (a) a aceleração inicial e (b) o tempo necessário para o projétil penetrar  $9,9\text{ cm}$ .

**11.25** A aceleração devida à gravidade, a uma altitude  $y$  acima da superfície da Terra, pode ser expressa como

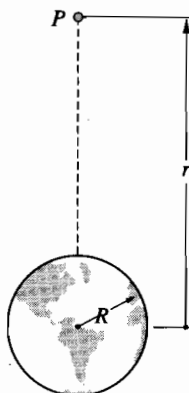
$$a = \frac{-9,81}{\left(1 + \frac{y}{6,37 \times 10^6}\right)^2}$$

onde  $a$  é medido em  $\text{m/s}^2$  e  $y$  em metros. Usando-se esta expressão, calcule a altura atingida por uma bala disparada verticalmente para cima, a partir da superfície terrestre, com as seguintes velocidades iniciais (a)  $300\text{ m/s}$ , (b)  $3000\text{ m/s}$  e (c)  $11,18\text{ km/s}$ .



**Figura P11.25**

**11.26** A aceleração devida à gravidade é  $a = -gR^2/r^2$ , onde  $r$  é a distância do *centro* da Terra até o ponto material,  $R$  é o raio terrestre e  $g$  é a aceleração devida à gravidade, na superfície da Terra. Deduza uma expressão para a *velocidade de escape*, isto é, a mínima velocidade com a qual um ponto material deve ser lançado verticalmente para cima, a partir da superfície da Terra, para que não haja retorno à superfície. (*Sugestão:*  $v = 0$  para  $r \rightarrow \infty$ ).

**Figura P11.26**

**11.27** A aceleração de um ponto material é  $a = k \sin(\pi t/T)$ . Sabendo-se que o ponto tem coordenada de posição e velocidade iniciais nulas, determinar (a) as equações que caracterizam o movimento, (b) a velocidade máxima, (c) a posição para  $t = 2T$  e (d) a velocidade média durante o intervalo  $t = 0$  a  $t = 2T$ .

**11.28** A posição de um ponto material oscilante é dada por  $x = A \sin(pt + \phi)$ . Denotando-se a velocidade e a coordenada de posição iniciais por  $v_0$  e  $x_0$ , respectivamente, mostre (a) que  $\tan \phi = x_0 p / v_0$  e (b) que o máximo valor da coordenada de posição é

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{p}\right)^2}$$

---

**11.4 Movimento Retilíneo Uniforme.** Este é um tipo de movimento retilíneo freqüentemente encontrado em aplicações práticas. Nesse movimento, a aceleração  $a$  do ponto material é nula para qualquer valor de  $t$ . A velocidade  $v$  é, dessa forma, constante e a Eq. (11.1) torna-se

$$\frac{dx}{dt} = v = \text{constante}$$

A coordenada de posição  $x$  é obtida pela integração desta equação. Denotando-se por  $x_0$ , o valor inicial de  $x$ , escrevemos

$$\int_{x_0}^x dx = v \int_0^t dt$$

$$x - x_0 = vt$$

$x = x_0 + vt$

(11.5)

Esta equação poderá ser usada somente quando a velocidade do ponto material for constante.

**11.5 Movimento Retilíneo Uniformemente Acelerado** Este é outro tipo de movimento. Nele a aceleração  $a$  do ponto material é constante e a Eq. (11.2) torna-se

$$\frac{dv}{dt} = a = \text{constante}$$

A velocidade  $v$  do ponto material é obtida pela integração desta equação

$$\int_{v_0}^v dv = a \int_0^t dt$$

$$v - v_0 = at$$

$$v = v_0 + at$$

(11.6)

onde  $v_0$  é a velocidade inicial. Substituindo-se  $v$  na Eq. (11.1), escrevemos

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + at$$

Chamando-se de  $x_0$  o valor inicial de  $x$  e integrando-se, temos

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t (v_0 + at) dt$$

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

(11.7)

Podemos também usar a Eq. (11.4) e escrever

$$v \frac{dv}{dx} = a = \text{constante}$$

$$v \, dv = a \, dx$$

Integrando-se ambos os membros, obtemos

$$\int_{v_0}^v v \, dv = a \int_{x_0}^x dx$$

$$\frac{1}{2} (v^2 - v_0^2) = a(x - x_0)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

(11.8)

As três equações deduzidas acima fornecem relações úteis entre coordenada de posição, velocidade e tempo para o caso de um movimento uniformemente acelerado, assim que  $a$ ,  $v_0$  e  $x_0$  forem substituídos por valores apropriados. Primeiramente, será definida a origem  $O$  no eixo  $x$ , escolhendo-se um sentido positivo ao longo deste eixo; este sentido possibilitará determinar os sinais de  $a$ ,  $v$  e  $x_0$ . A Eq. (11.6) relaciona  $v$  e  $t$  e será usada quando se desejar o valor de  $v$  correspondente ao valor de  $t$  ou vice-versa. A Eq. (11.7) relaciona  $x$  e  $t$ ; a Eq. (11.8) relaciona  $v$  e  $x$ . Uma aplicação importante do movimento uniformemente acelerado é na queda livre de um corpo. A aceleração de um corpo em queda livre (geralmente indicada por  $g$ ) é igual a  $9,81 \text{ m/s}^2$ , valor tomado como padrão (aceleração normal). Efetivamente, este valor depende da posição considerada, sobre a superfície da Terra, e de sua distância ao centro desta\*.

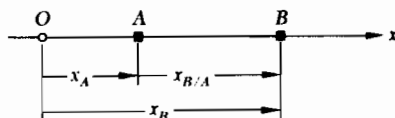
É importante não esquecer que as três equações anteriores podem ser usadas somente quando a aceleração do ponto material é constante. Se a aceleração do ponto for variável, seu movimento será determinado pelas equações fundamentais (11.1) a (11.4), de acordo com os métodos delineados na Seção 11.3.

\* Ver Problemas 12.2 e 12.4, p. 136 (Nota do R. T.)

**11.6 Movimento de Vários Pontos Materiais** Quando vários pontos materiais se movem, ao longo de uma mesma reta, equações independentes podem ser escritas para cada um deles. Sempre que possível, o tempo será contado a partir do mesmo instante inicial, para todos os pontos, e os deslocamentos serão medidos em relação à mesma origem e no mesmo sentido. Em outras palavras, utilizam-se um único cronômetro e um único referencial.

*Movimento Relativo de Dois Pontos Materiais.* Consideremos dois pontos materiais  $A$  e  $B$  que se deslocam ao longo de uma mesma reta (Fig. 11.7). Se as coordenadas de posição  $x_A$  e  $x_B$  são medidas a partir de uma mesma origem, a diferença  $x_B - x_A$  define a coordenada de posição de  $B$  em relação a  $A$  e se representa por  $x_{B/A}$ . Escrevemos

$$x_{B/A} = x_B - x_A \quad \text{ou} \quad \boxed{x_B = x_A + x_{B/A}} \quad (11.9)$$



**Figura 11.7**

Um sinal positivo para  $x_{B/A}$  significa que  $B$  está à direita de  $A$ , um sinal negativo significa que  $B$  está à esquerda de  $A$ , independentemente da posição de  $A$  e  $B$  em relação à origem.

A variação no tempo de  $x_{B/A}$  é denominada velocidade de  $B$  em relação a  $A$  e representada por  $v_{B/A}$ . Derivando-se (11.9), temos

$$v_{B/A} = v_B - v_A \quad \text{ou} \quad \boxed{v_B = v_A + v_{B/A}} \quad (11.10)$$

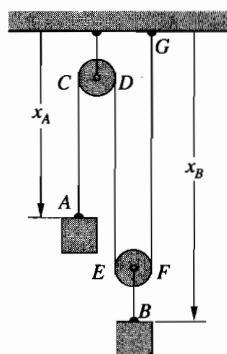
Um sinal positivo para  $v_{B/A}$  significa que  $B$  é observado de  $A$  deslocando-se no sentido positivo; um sinal negativo significa que é observado deslocando-se no sentido negativo.

A variação no tempo de  $v_{B/A}$  é denominada aceleração de  $B$  em relação a  $a$  sendo representada por  $a_{A/B}$ . Derivando-se (11.10)\*, obtemos

$$a_{B/A} = a_B - a_A \quad \text{ou} \quad a_B = a_A + a_{B/A} \quad (11.11)$$

**Movimentos Dependentes.** Algumas vezes, a posição de um ponto material depende da posição de outro ou de vários outros pontos. Os movimentos são chamados dependentes. Por exemplo, a posição do bloco  $B$  na Fig. 11.8 depende da posição do bloco  $A$ . Já que a corda  $ACDEFG$  é de comprimento constante, e como os comprimentos de corda  $CD$  e  $EF$  que envolvem as polias permanecem constantes, segue-se que a soma dos segmentos  $AC$ ,  $DE$  e  $FG$  é constante. Observando-se que o comprimento do segmento  $AC$  difere de  $x_A$  por uma constante e que, semelhantemente, os comprimentos dos segmentos  $DE$  e  $FG$  diferem de  $x_B$  por uma constante, temos

$$x_A + 2x_B = \text{constante}$$



**Figura 11.8**

Como somente uma das coordenadas  $x_A$  ou  $x_B$  pode ser escolhida arbitrariamente, dizemos que o sistema ilustrado na Fig. 11.8 possui um grau de liberdade. Das relações entre as coordenadas de posição  $x_A$  e  $x_B$ , segue-se que se a  $x_A$  for dado um incremento  $\Delta x_A$ , isto é, se o bloco  $A$  for baixado de uma quantidade  $\Delta x_A$ , a coordenada  $x_B$  receberá um incremento  $\Delta x_B = -1/2 \Delta x_A$ , isto é, o bloco  $B$  se elevará da metade do valor de que  $A$  baixou; isto pode facilmente ser verificado com o auxílio da Fig. 11.8.

\* Note-se que o produto dos subíndices  $A$  e  $B/A$  usados nos segundos membros das Eqs. (11.9), (11.10) e (11.11) é igual ao subíndice  $B$  usado nos primeiros membros das equações.

No caso de três blocos, conforme mostra a Fig. 11.9, podemos novamente observar que o comprimento da corda que passa sobre as polias é constante, devendo ser satisfeita para as coordenadas de posição dos três blocos a seguinte relação:

$$2x_A + 2x_B + x_C = \text{constante}$$

Já que duas das coordenadas podem ser escolhidas arbitrariamente, dizemos que o sistema ilustrado na Fig. 11.9 possui dois graus de liberdade.

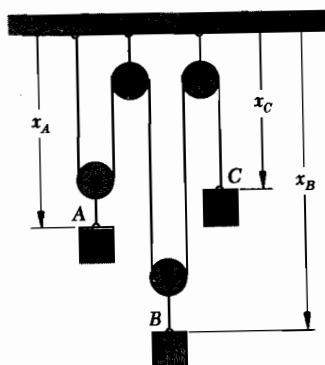


Figura 11.9

Quando a relação existente entre as coordenadas de posição dos vários pontos materiais é, linear, uma relação semelhante vale entre as velocidades e acelerações desses pontos. No caso dos blocos da Fig. 11.9, por exemplo, derivamos duas vezes a equação obtida e escrevemos

$$2\frac{dx_A}{dt} + 2\frac{dx_B}{dt} + \frac{dx_C}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad 2v_A + 2v_B + v_C = 0$$

$$2\frac{dv_A}{dt} + 2\frac{dv_B}{dt} + \frac{dv_C}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad 2a_A + 2a_B + a_C = 0$$

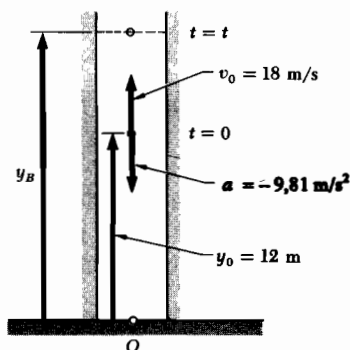
## Problema Resolvido 11.4

Uma bola é arremessada, verticalmente, para cima, a partir de uma altura de 12m, num poço de elevador, com uma velocidade inicial de 18 m/s. No mesmo instante, um elevador de plataforma está a uma altura de 5m, subindo com velocidade constante de 2m/s. Determinar (a) quando e onde a bola se encontrará com o elevador, (b) a velocidade da bola em relação ao elevador quando o encontrar.

**Movimento da Bola** Como a bola tem uma aceleração constante, seu movimento é uniformemente acelerado. Colocando a origem  $O$  do eixo  $y$  no solo e escolhendo arbitrariamente o sentido positivo para cima, a posição inicial é  $y_0 = +12\text{m}$ , a velocidade inicial é  $v_0 = +18\text{m/s}$  e a aceleração é  $a = -9,81\text{m/s}^2$ . Substituindo estes valores nas equações para o movimento uniformemente acelerado, temos

$$v_B = v_0 + at \qquad v_B = 18 - 9,81t \qquad (1)$$

$$y_B = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad y_B = 12 + 18t - 4,90t^2 \qquad (2)$$

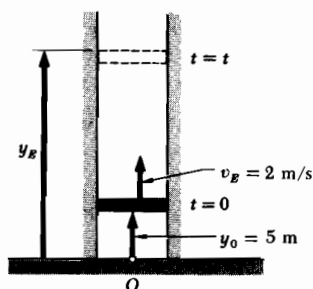


**Movimento do Elevador** Como o elevador tem velocidade constante, seu movimento é uniforme. Novamente estabelecendo a origem  $O$  no solo e escolhendo o sentido positivo para cima, vemos que  $y_0 = +5\text{m}$  e escrevemos

$$v_E = +2\text{m/s} \qquad (3)$$

$$y_E = y_0 + v_E t \qquad y_E = 5 + 2t \qquad (4)$$





**A Bola Atinge o Elevador** Primeiramente notamos que o mesmo tempo  $t$  e a mesma origem  $O$  foram usados para escrever as equações do movimento da bola e do elevador. Vemos na figura que quando a bola encontra a plataforma,

$$y_E = y_B \quad (5)$$

Substituindo-se as Eqs. (2) e (4) em (5) vem

$$5 + 2t = 12 + 18t - 4,90t^2$$

$$t = -0,39s \quad \text{e} \quad t = +3,65s \leftarrow$$

Somente a raiz  $t = +3,65s$  corresponde a um instante posterior ao início do movimento. Substituindo-se estes valores na Eq. (4), temos:

$$y_E = 5 + 2(3,65) = 12,30m$$

$$\text{Altura em relação ao solo} = 12,30m \leftarrow$$

A velocidade da bola em relação ao elevador é

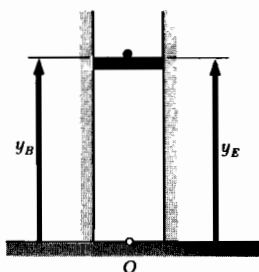
$$v_{B/E} = v_B - v_E = (18 - 9,81t) - 2 = 16 - 9,81t$$

Quando a bola encontra a plataforma no instante  $t = 3,65\text{s}$  temos

$$v_{B/E} = 16 - 9,81(3,65)$$

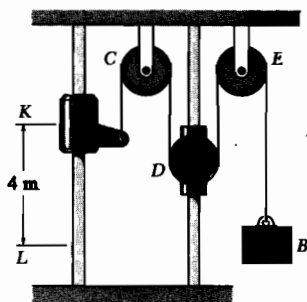
$$v_{B/E} = -19,81\text{m/s} \Leftarrow$$

O sinal negativo indica que a bola é observada da plataforma deslocando-se no sentido negativo (para baixo).



### Problema Resolvido 11.5

O cursor A e o bloco B estão ligados por uma corda que passa sobre três polias C, D e E como está ilustrado na figura. C e E são fixas, enquanto D, presa a um cursor, é puxada para baixo com uma velocidade constante de  $1,5\text{m/s}$ . No instante  $t = 0$ , o bloco A inicia seu movimento para baixo a partir da posição K com uma aceleração constante e velocidade inicial nula. Sabendo-se que a velocidade do cursor A é  $6\text{m/s}$  ao passar pelo ponto L, determinar a variação da altura, a velocidade e a aceleração do bloco B quando A passar por L.



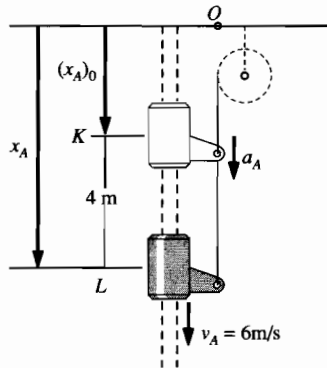
**Movimento do cursor A.** Vamos estabelecer a origem  $O$  na superfície horizontal superior e escolher o sentido positivo para baixo. Observamos que para  $t = 0$ , o cursor  $A$  está na posição  $K$  e  $(v_A)_0 = 0$ . Como  $v_A = 6\text{ m/s}$  e  $x_A - (x_A)_0 = 4\text{ m}$  quando o bloco passa por  $L$ , escrevemos

$$v_A^2 = (v_A)_0^2 + 2a_A[x_A - (x_A)_0] \quad 6^2 = 0 + 2a_A(4)$$

$$a_A = 4,5 \text{ m/s}^2$$

O tempo para que o cursor  $A$  alcance o ponto  $L$  é obtido escrevendo-se

$$v_A = (v_A)_0 + a_A t \quad 6 = 0 + 4,5t \quad t = 1,3\text{s}$$



**Movimento da Polia D.** Recordando-se que o movimento positivo é para baixo, escrevemos:

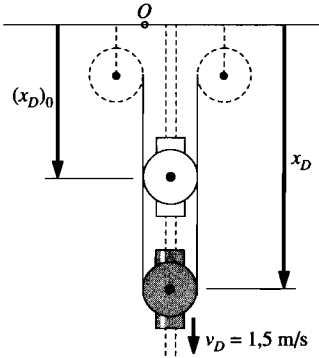
$$a_D = 0 \quad v_D = 1,5 \text{ m/s} \quad x_D = (x_D)_0 + v_D t = (x_D)_0 + 1,5t$$

Quando  $A$  alcança  $L$ ,  $t = 1,3\text{s}$ , portanto

$$x_D = (x_D)_0 + 1,5(1,3) = (x_D)_0 + 2$$

Então,

$$x_D - (x_D)_0 = 2\text{m}$$



**Movimento do cursor B.** Vemos que o comprimento total da corda ACDEB difere da quantidade  $(x_A + 2x_D + x_B)$  apenas por uma constante. Como o comprimento da corda é constante durante o movimento, esta quantidade deve também permanecer constante. Assim, considerando os instantes  $t = 0$  e  $t = 1,3s$ , escrevemos

$$x_A + 2x_D + x_B = (x_A)_0 + 2(x_D)_0 + (x_B)_0 \quad (1)$$

$$[x_A - (x_A)_0] + 2[x_D - (x_D)_0] + [x_B - (x_B)_0] = 0 \quad (2)$$

Mas sabemos que  $x_A - (x_A)_0 = 4m$  e  $x_D - (x_D)_0 = 2m$ ; substituindo estes valores em (2), encontramos

$$4 + 2(2) + [x_B - (x_B)_0] = 0 \quad x_B - (x_B)_0 = -8$$

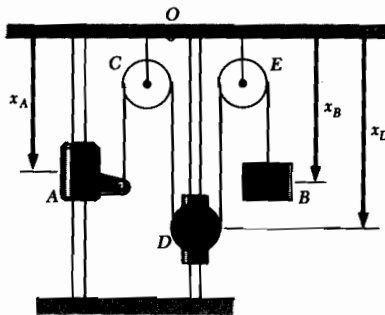
Assim:

Variação na altura de B =  $8m \uparrow \Leftarrow$

Derivando-se (1) duas vezes, obtemos as equações que relacionam as velocidades e acelerações de A, B e D. Substituindo-se os valores das velocidades e acelerações de A e D para  $t = 1,3s$ , temos

$$\begin{aligned} v_A + 2v_D + v_B &= 0: & 6 + 2(1,5) + v_B &= 0 \\ & & v_B &= -9m/s & v_B &= 9m/s \uparrow \Leftarrow \end{aligned}$$

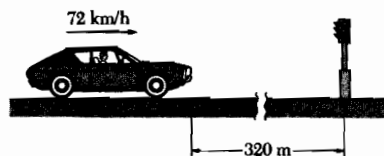
$$\begin{aligned} a_A + 2a_D + a_B &= 0: & 4,5 + 2(0) + a_B &= 0 \\ & & a_B &= -4,5m/s^2 & a_B &= 4,5m/s^2 \uparrow \Leftarrow \end{aligned}$$



## Problemas

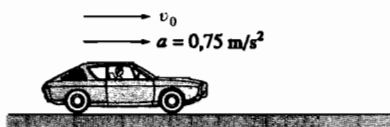
**11.29** Atira-se uma bola verticalmente, para cima, a partir de um ponto localizado a 25m acima do solo. Sabendo-se que a bola atinge o solo 3 s após ter sido atirada, determinar as velocidades (a) de arremesso e (b) de chegada ao solo.

**11.30** Um motorista viajando a 72 km/h observa um semáforo 320 m à sua frente no instante em que se acende a luz vermelha. O sinal foi projetado para que o vermelho permaneça durante 22 s. Se o motorista deseja passar pelo semáforo sem parar, justamente na mudança para o verde, determinar (a) a desaceleração uniforme necessária e (b) a velocidade de passagem pelo semáforo.



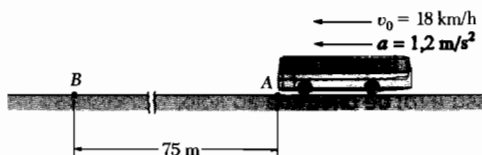
**Figura P11.30**

**11.31** Um automóvel percorreu 240 m em 20 s com aceleração uniforme de  $0,75 \text{ m/s}^2$ . Determine (a) sua velocidade inicial, (b) sua velocidade final e (c) a distância percorrida durante os primeiros 10 s.

**Figura P11.31**

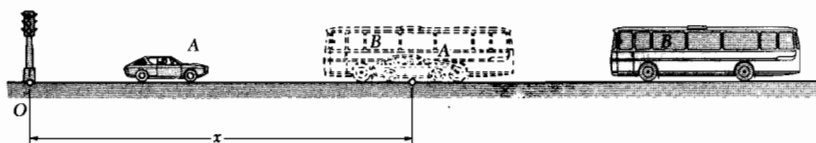
**11.32** De um elevador em movimento ascendente, com velocidade de 3,66 m/s, abandona-se uma pedra que atinge o fundo do poço em 2,5 s. (a) A que altura estava o elevador no momento do abandono da pedra? (b) Qual a velocidade da pedra no instante do choque com o solo?

**11.33** Um ônibus com uma aceleração de  $1,2 \text{ m/s}^2$  move-se de A para B. A velocidade do ônibus em A é  $v_0 = 18 \text{ km/h}$ . Determinar (a) o tempo necessário para o ônibus atingir B e (b) a sua correspondente velocidade.

**Figura P11.33**

**11.34** Resolva o problema 11.33, tomando para  $v_0$  o valor de 36 km/h.

**11.35** Um carro parte de O com uma aceleração de  $0,8 \text{ m/s}^2$ . Um pouco mais tarde, ele passa por um ônibus trafegando em sentido oposto, a uma velocidade constante de 5 m/s. Sabendo-se que o ônibus passa por O 22 s após o carro ter saído de lá, determinar quando e onde os veículos se cruzaram\*.

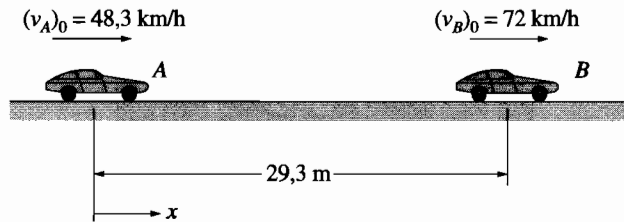
**Figura P11.35**

\* Considerando tanto o carro como o ônibus pontos materiais (Nota do R. T.).

**11.36** Um elevador de plataforma desloca-se, para baixo, no poço de uma mina com uma velocidade constante  $v_e$ . Num dado instante, a plataforma do elevador bate e desaloja uma pedra. Supondo-se que a pedra começa a cair com velocidade inicial zero, (a) mostrar que a pedra atingirá a plataforma com uma velocidade relativa de módulo  $v_e$ ; (b) se  $v_e = 7,5 \text{ m/s}$  quando e onde a pedra atingirá a plataforma do elevador?

**11.37** Um elevador de carga, movendo-se para cima com uma velocidade de  $1,8 \text{ m/s}$  passa por um elevador de passageiros que está parado. Quatro segundos depois este último se põe em movimento, para cima, com aceleração de  $0,72 \text{ m/s}^2$ . Determinar (a) quando e onde os elevadores estarão à mesma altura e (b) qual será a velocidade do elevador de passageiros.

**11.38** Dois automóveis A e B trafegam em pistas adjacentes e no instante  $t = 0$  têm as posições e velocidades mostradas na figura. O automóvel A tem uma aceleração constante de  $0,6 \text{ m/s}^2$  e B tem uma desaceleração constante de  $0,45 \text{ m/s}^2$ . Determinar (a) quando e onde A ultrapassará B e (b) a velocidade de cada veículo.

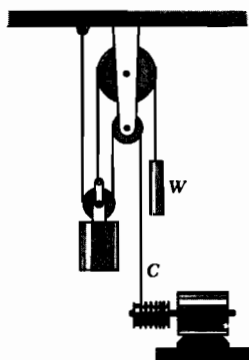


**Figura P11.38**

**11.39** O elevador E, mostrado na figura sobe com uma velocidade constante de  $4 \text{ m/s}$ . Determinar (a) a velocidade do cabo C, (b) a velocidade do contrapeso W, (c) a velocidade do cabo C em relação ao elevador e (d) a velocidade do contrapeso W em relação ao elevador.

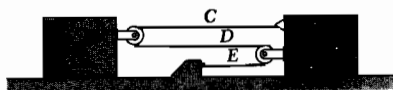
**11.40** O elevador E, mostrado na figura, parte do repouso e sobe com aceleração constante. Se o contrapeso W se desloca de  $10 \text{ m}$  em  $40 \text{ s}$ , determinar (a) a aceleração do elevador (b) a aceleração do cabo C e (c) a velocidade do elevador depois de  $6 \text{ s}$ .

**11.41** O bloco B move-se, para a direita, com velocidade de  $0,5 \text{ m/s}$ . Determinar (a) a velocidade do bloco A, (b) a velocidade da porção D do cabo, (c) a velocidade de A em relação a B e (d) a velocidade da porção C do cabo em relação à porção D.



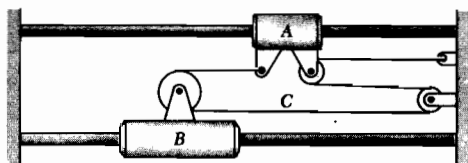
Figuras P11.39 e P11.40

**11.42** O bloco A parte do repouso e se move, para esquerda, com aceleração constante. A velocidade do bloco B é de 0,30 m/s após mover-se 0,60m. Determinar (a) as acelerações de A e B e (b) a velocidade e posição de A após 5 s.



Figuras P11.41 e P11.42

**11.43** O cursor A parte do repouso e se move, para a esquerda, com aceleração constante. Depois de 4 s, a velocidade do cursor B em relação a A é de 300 mm/s. Determine (a) as acelerações de A e B e (b) a posição e velocidade de B após 5 s.



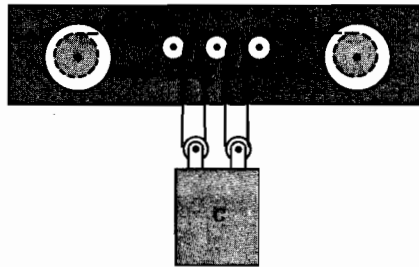
Figuras P11.43 e P11.44



**11.44** Na posição mostrada na figura, o cursor B move-se para a esquerda com a velocidade de 150 mm/s. Determinar (a) a velocidade de A, (b) a velocidade da porção C do cabo e (c) a velocidade de C em relação a B.

**11.45** Sob condições normais de operação, transfere-se uma fita entre os carretéis mostrados na figura, a uma velocidade de 600 mm/s. A porção A da fita move-se para a direita com aceleração constante. No instante inicial, a velocidade de A é 480 mm/s. A porção B tem velocidade constante de 600 mm/s. Sabendo-se que A atinge a velocidade de 600 mm/s no instante  $t = 5$  s, determinar (a) a aceleração e a velocidade do compensador C para  $t = 3$  s e (b) a distância percorrida por C até o instante  $t = 5$  s.

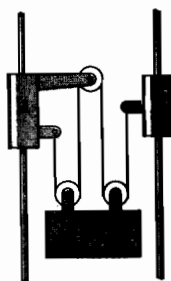
**11.46** As porções A e B da fita, mostrada na figura, partem do repouso no instante inicial e são aceleradas uniformemente até uma velocidade de 600 mm/s. A e B alcançam esta velocidade em 15 s e 12 s, respectivamente. Determinar (a) a aceleração e a velocidade do compensador C em  $t = 8$  s e (b) a distância percorrida por C até que ambas as porções da fita tenham alcançado a velocidade terminal.



**Figuras P11.45 e P11.46**

**11.47** O cursor A parte do repouso no instante  $t = 0$  e sobe com aceleração constante de  $6,25 \text{ cm/s}^2$  e o cursor B desce com velocidade constante de  $37,5 \text{ cm/s}$ . Determinar (a) o instante em que a velocidade do bloco C é nula e (b) a posição de C nesse instante.

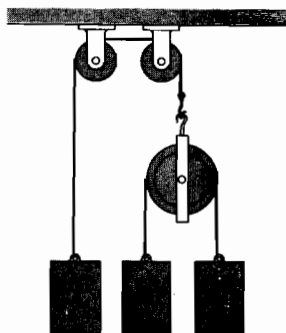
**11.48** Os cursores A e B partem do repouso e se movem com as acelerações  $a_A = 7,5 \text{ cm/s}^2$  para cima e  $a_B = 22,5 \text{ cm/s}^2$  para baixo, respectivamente. Determinar (a) o instante em que a velocidade do bloco C é novamente nula e (b) a distância percorrida pelo bloco até esse instante.



Figuras P11.47 e P.11.48

**11.49** (a) Considere, como positivo, o sentido descendente para o movimento de qualquer dos blocos e expresse a velocidade de A em termos das velocidades de B e C. (b) Considere, também, que os blocos A e C partem do repouso e descem com as acelerações  $a_A = 50 \text{ mm/s}^2$  e  $a_C = 110 \text{ mm/s}^2$ , respectivamente. Determine a velocidade e a posição de B após 3s.

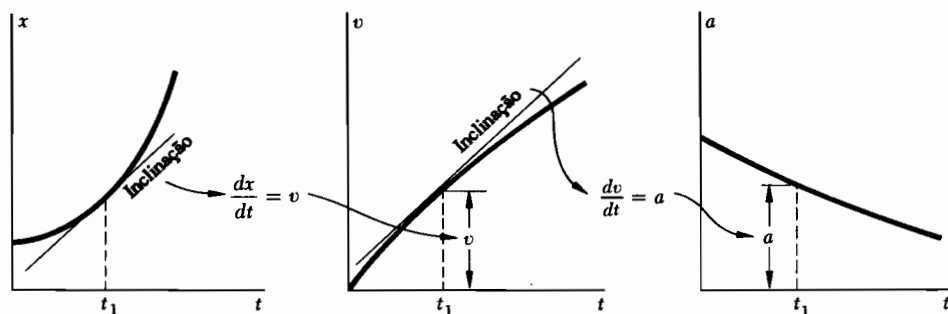
**11.50** Os três blocos, mostrados na figura, movem-se com velocidades constantes. Obtenha a velocidade de cada bloco, sabendo-se que a velocidade A relativa a C é 300 mm/s para cima e a velocidade de B relativa a A é 200 mm/s para baixo.



Figuras P11.49 e P.11.50

### 11.7 Solução Gráfica de Problemas de Movimento Retilíneo Viu-se na Seção 11.2 que as fórmulas fundamentais

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad a = \frac{dv}{dt}$$



**Figura 11.10**

possuem significado geométrico. A primeira fórmula nos diz que a velocidade em cada instante é igual à inclinação da curva  $x-t$  neste mesmo instante (Fig. 11.10). A segunda fórmula, por sua vez, exprime a aceleração como a inclinação da curva  $v-t$ . Estas duas propriedades podem ser usadas para se obter graficamente, as curvas de movimento  $v-t$  e  $a-t$ , quando se conhece a curva  $x-t$ .

Integrando-se as duas fórmulas fundamentais de  $t_1$  a  $t_2$ , podemos escrever

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v dt \quad \text{e} \quad v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a dt \quad (11.12)$$

A primeira fórmula nos diz que a área medida sob a curva  $v-t$ , de  $t_1$  a  $t_2$ , é igual à variação de  $x$  nesse intervalo de tempo (Fig. 11.11). A segunda fórmula nos diz, semelhantemente, que a área medida sob a curva  $a-t$  de  $t_1$  a  $t_2$  é igual à variação de  $v$  durante o mesmo intervalo de tempo. Estas duas propriedades podem ser usadas para determinar, graficamente, o diagrama  $x-t$  de um movimento, quando se conhece o diagrama  $v-t$  ou  $a-t$  (ver Problema Resolvido 11.6) e os valores iniciais de  $x$  e  $v^*$ .

\* E os valores iniciais de  $x$  e  $t$  quando é dado o diagrama  $a-t$ , (Nota do R. T.).

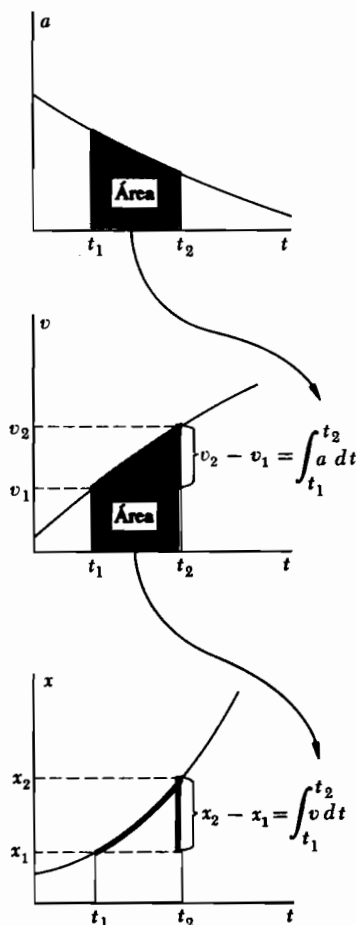


Figura 11.11

Soluções gráficas são muito úteis quando o movimento considerado vem definido por dados experimentais e quando  $x$ ,  $v$  e  $a$  não podem ser expressos analiticamente como funções de  $t$ . Também podem ser usadas, com vantagens, quando o movimento consiste em partes distintas e sua análise exige uma equação diferente para cada parte. Ao usar uma solução gráfica, entretanto, terá de se ter em mente (a) que a área sob a curva  $v - t$  mede a variação de  $x$  e não  $x$ ; e, analogamente, que a área sob a curva  $a - t$  mede a variação de  $v$ , e (b) que, enquanto uma área acima do eixo  $t$  corresponde a um aumento de  $x$  ou  $v$ , uma área abaixo de  $t$  mede um decréscimo de  $x$  ou  $v$ .

Recorde-se, ao desenhar diagramas de movimento, que se a velocidade for constante será representada por uma reta horizontal; a coordenada de posição  $x$  será

então uma função linear de  $t$  e será representada por uma reta oblíqua. Se a aceleração for constante e diferente de zero, ela será representada por uma reta horizontal;  $v$  será, neste caso, uma função linear de  $t$ , representada por uma reta oblíqua;  $x$  será um polinômio de 2º grau em  $t$ , representado por uma parábola. Se a aceleração for uma função linear de  $t$ , a velocidade e a coordenada de posição serão, respectivamente, polinômios do segundo e terceiro graus;  $a$  será então representada por uma reta oblíqua,  $v$  por uma parábola e  $x$  por uma cúbica. De um modo geral, se a aceleração for um polinômio de grau  $n$  em  $t$ , a velocidade será um polinômio de grau  $n + 1$  e a coordenada de posição um polinômio de grau  $n + 2$ ; estes polinômios são representados por curvas de graus correspondentes.

**11.8 Outros Métodos Gráficos.** Pode-se usar uma solução gráfica alternativa para determinar, diretamente, a partir do diagrama  $a - t$ , a posição de um ponto material, em um dado instante. Denominando-se, respectivamente,  $x_0$  e  $v_0$  os valores de  $x$  e  $v$  para  $t = 0$ ,  $x_1$  e  $v_1$  seus valores para  $t = t_1$  e observando-se que a área sob a curva  $v - t$  pode ser decomposta em um retângulo de área  $v_0 t_1$  e elementos diferenciais horizontais, de área  $(t_1 - t) dv$  (Fig. 11.12a), escrevemos

$$x_1 - x_0 = \text{área sob a curva } v - t = v_0 t_1 + \int_{v_0}^{v_1} (t_1 - t) dv$$

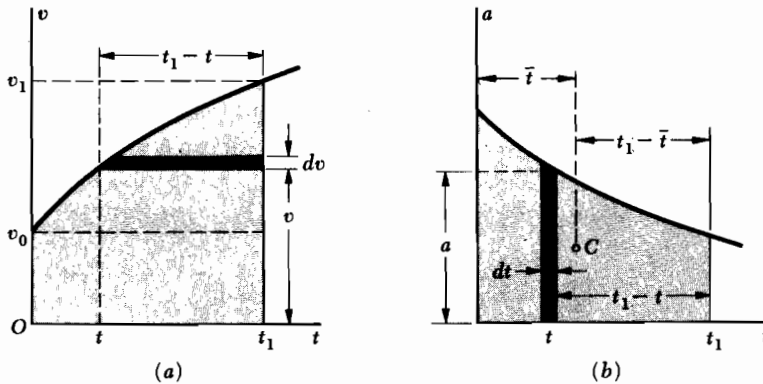


Figura 11.12

Substituindo-se  $dv = a dt$  na integral, obtemos

$$x_1 - x_0 = v_0 t_1 + \int_0^{t_1} (t_1 - t) a dt$$

Observando-se a Fig. 11.12b, notamos que a integral representa o primeiro momento da área sob a curva  $a - t$ , em relação à linha  $t = t_1$ , que limita a área à direita. Este método de solução é conhecido por este motivo como método do momento da área. Se a abscissa  $t$  do centróide  $C$  da área for conhecida, a coordenada de posição  $x_1$  poderá ser obtida escrevendo-se

$$x_1 = x_0 + v_0 t_1 + (\text{área sob a curva } a - t)(t_1 - t) \quad (11.13)$$

Se a área sob a curva  $a - t$  for uma área composta, o último termo em (11.13) poderá ser obtido multiplicando-se cada área componente pela distância do seu centróide à reta  $t = t_1$ . Áreas acima do eixo  $t$  são consideradas positivas e as áreas abaixo do eixo  $t$ , negativas.

Pode-se usar, também, um outro tipo de diagrama do movimento: a curva  $v - x$ . Considerando-se que tal curva tenha sido traçada (Fig. 11.13), a aceleração  $a$  pode ser obtida, para cada instante, traçando-se a normal à curva e medindo-se a subnormal  $BC$ . De fato, observando-se que o coeficiente angular entre  $AC$  e  $AB$  é igual ao coeficiente angular entre a horizontal e a reta tangente em  $A$  (coeficiente angular  $= dv/dx$ )\*, escrevemos

$$BC = AB \frac{dv}{dx} = v \frac{dv}{dx}$$

e assim, pela fórmula (11.4),

$$BC = a$$

---

\* O autor usou, na edição original, a relação  $\frac{dv}{dx} = \tan \theta$  para caracterizar a inclinação da reta tangente à curva no ponto  $A$ . Preferimos usar  $\frac{dv}{dx} = \text{coeficiente angular da reta tangente, em } A, \text{ à curva } v - t$ .

O coeficiente angular é uma grandeza física com dimensões e seu valor numérico não coincide necessariamente com a tangente do pseudo ângulo  $\theta$  (Nota do R. T.).

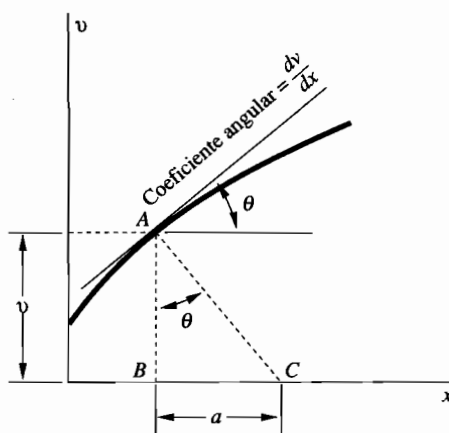
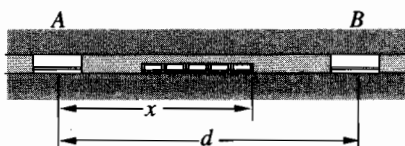


Figura 11.13

### Problema Resolvido 11.6

Uma composição de metrô deixa a estação A; acelera à razão de  $1,2 \text{ m/s}^2$  durante 6s e, então, acelera à razão de  $1,8 \text{ m/s}^2$  até alcançar a velocidade de  $14,4 \text{ m/s}$ . A composição mantém a mesma velocidade até as proximidades da estação B; aplicam-se, então, os freios que a desaceleram uniformemente e a fazem parar em 6s. O tempo total gasto na viagem de A a B foi de 40s. Trace os diagramas  $a-t$ ,  $v-t$  e  $x-t$  e determine a distância entre as estações A e B.



**Diagrama Aceleração-Tempo.** Como a aceleração é constante ou zero, a curva  $a-t$  é composta de segmentos de reta horizontais. Os valores de  $t_2$  e  $a_4$  são determinados como se segue.

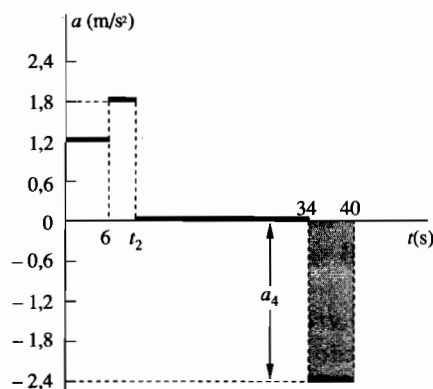
$$0 < t < 6: \quad \text{Variação de } v = \text{área sob a curva } a - t \\ v_6 - 0 = (6 \text{ s})(1,2 \text{ m/s}^2) = 7,2 \text{ m/s}$$

$$6 < t < t_2: \quad \text{Como a velocidade aumenta de } 7,2 \text{ a } 14,4 \text{ m/s} \\ \text{Variação de } v = \text{área sob a curva } a - t \\ 14,4 - 7,2 = (t_2 - 6)(1,8 \text{ m/s}^2) \quad t_2 = 10 \text{ s}$$

$$t_2 < t < 34: \quad \text{Como a velocidade é constante, a aceleração é zero}$$

$$34 < t < 40: \quad \text{Variação de } v = \text{área sob a curva } a - t \\ 0 - 14,4 = (6 \text{ s})a_4 \quad a_4 = -2,4 \text{ m/s}^2$$

Sendo negativa a aceleração, a área correspondente está abaixo do eixo  $t$ , esta área representa um decréscimo na velocidade.



**Diagrama Velocidade-Tempo.** Como a aceleração é constante ou zero, a curva  $v - t$  é composta de segmentos de reta que unem os pontos determinados acima.

Variação de  $x = \text{área sob a curva } v - t$

$$0 < t < 6: \quad x_6 - 0 = \frac{1}{2} (6) (7,2) = 21,6 \text{ m}$$

$$6 < t < 10: \quad x_{10} - x_6 = \frac{1}{2} (4) (7,2 + 14,4) = 43,2 \text{ m}$$

$$10 < t < 34: \quad x_{34} - x_{10} = (24) (14,4) = 345,6 \text{ m}$$

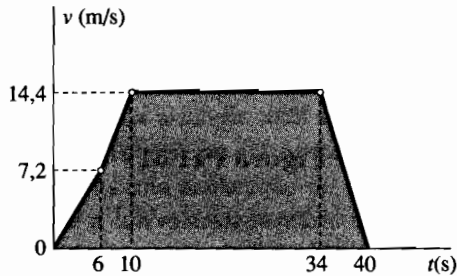
$$34 < t < 40: \quad x_{40} - x_{34} = \frac{1}{2} (6) (14,4) = 43,2 \text{ m}$$



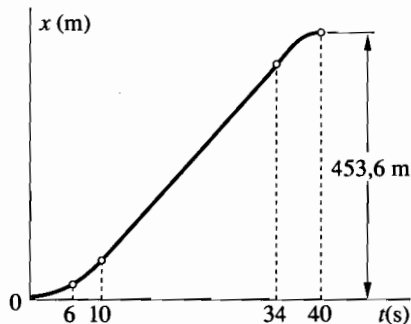
Somando estas variações de  $x$ , obtemos a distância de A a B.

$$d = x_{40} - 0 = 453,6 \text{ m}$$

$$d = 453,6 \text{ m}$$

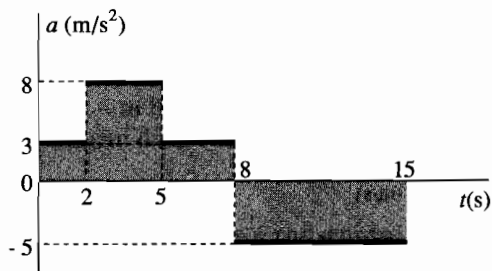


**Diagrama Posição-Tempo.** Os pontos determinados acima devem unir-se por três arcos de parábola e um segmento de reta. A construção da curva  $x - t$  será executada mais facilmente e com maior precisão se levarmos em consideração que para qualquer valor de  $t$  a inclinação da tangente à curva  $x - t$  é igual ao valor de  $v$  nesse instante.



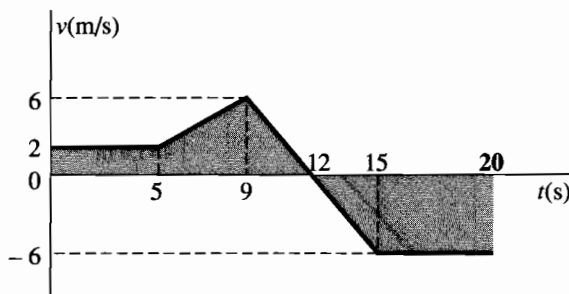
## Problemas

**11.51** Um ponto material move-se em linha reta com a aceleração indicada na figura. Sabe-se que o ponto material saiu da origem, com velocidade  $v_0 = -14 \text{ m/s}$ . Esboçar as curvas  $v - t$  e  $x - t$  para  $0 < t < 15 \text{ s}$  e determinar (a) a máxima velocidade alcançada pelo ponto e (b) a sua máxima coordenada de posição.

**Figura P11.51**

**11.52** Considerando-se o movimento descrito no problema anterior, determinar a velocidade e a posição do ponto material no instante  $t = 10$  s. Determinar também a distância percorrida até esse instante.

**11.53** A figura mostra o diagrama  $v - t$  de um ponto material em movimento retilíneo. No instante inicial,  $x = -8$  m. Esboce os diagramas  $a - t$  e  $x - t$ , para  $0 < t < 20$  s e determine (a) o máximo valor da coordenada de posição do ponto material e (b) os valores de  $t$  para os quais o ponto dista 18 m da origem.

**Figura P11.53**

**11.54** Considerando-se o problema anterior, determine (a) a distância total percorrida pelo ponto entre  $t = 0$  e  $t = 15$  s, e (b) os instantes para os quais o ponto passa pela origem.

**11.55** Um ônibus, na posição A, parte com velocidade nula e acelera a uma razão de  $0,75 \text{ m/s}^2$  até atingir a velocidade de  $9 \text{ m/s}$ . Com essa velocidade prossegue viagem até um dado instante, quando o motorista começa a frear. O ônibus pára no ponto B, 27 m distante do ponto onde os freios começaram a ser acionados. Determinar o tempo gasto pelo ônibus para ir de A até B, considerando-se desaceleração uniforme.

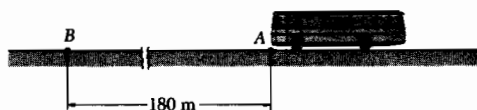


Figura P11.55

**11.56** Regula-se um sistema de semáforos para que um automóvel, trafegando a uma velocidade constante de 54 km/h, possa alcançar cada sinal justamente no instante de mudança para o verde. Um motorista "perde" um dos sinais e fica retido no sinal A. Sabendo-se que o próximo sinal B dista 300m de A e que a máxima aceleração do carro é  $1,8 \text{ m/s}^2$ , determinar o que o motorista deverá fazer para manter a sua velocidade máxima tão pequena quanto possível e ainda alcançar B justamente quando acende o verde. Qual é o valor dessa velocidade?

**11.57** O disparo de um canhão faz o cano recuar 800 mm antes que o mecanismo de amortecimento atue, levando-o à posição inicial. Por meio de uma fotografia tirada a alta velocidade, verificou-se que a máxima velocidade de recuo é de 5,4 m/s e que é alcançada 0,02 s após o disparo. Admitindo que o período de recuo consiste em duas fases, durante as quais a aceleração tem, respectivamente, um valor positivo constante  $a_1$  e um valor negativo constante  $a_2$  determine (a) os valores de  $a_1$  e  $a_2$ , (b) a posição do cano 0,02s após o disparo, (c) o instante no qual a velocidade do cano é zero.

**11.58** Durante uma operação de acabamento, o suporte de uma plaina move-se alternadamente de 90 cm para a direita e 90 cm para a esquerda. Sua velocidade limita-se a um valor máximo de 15cm/s para a direita e 22,5 cm/s para a esquerda; a aceleração é igual, sucessivamente, a  $7,5 \text{ cm/s}^2$  para a direita, zero,  $7,5 \text{ cm/s}^2$  para a esquerda, zero etc. Determine o período do movimento da plaina e esboce os diagramas  $v - t$  e  $x - t$ .

**11.59** Um motorista está trafegando a 72 km/h quando vê o semáforo, distante 320 m, passar para o vermelho. Sabe-se que o sinal está regulado para ficar fechado durante 22s. O que o motorista teria de fazer para passar o sinal a 72 km/h, justamente quando estivesse verde novamente? Trace a curva  $v - t$ , escolhendo a solução que exige as menores desaceleração e aceleração, e determine (a) os valores da desaceleração e aceleração em  $\text{m/s}^2$  e (b) a velocidade mínima alcançada em km/h.

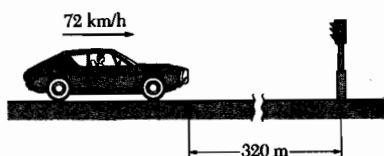
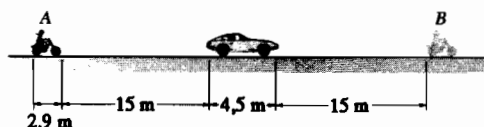


Figura P11.59

**11.60** Resolva o problema anterior, sabendo que a aceleração do carro não pode exceder  $0,75 \text{ m/s}^2$ .

**11.61** Um caminhão, em movimento uniforme, com velocidade de  $54 \text{ km/h}$ , passa por um carro estacionado. O automóvel parte e acelera uniformemente durante  $10 \text{ s}$ , até atingir a velocidade de  $81 \text{ km/h}$  quando então passa a se mover uniformemente. Determinar quando e onde o carro ultrapassa o caminhão, supondo-se que ele parta do repouso (a) imediatamente após a passagem do caminhão e (b)  $2 \text{ s}$  após a passagem do caminhão.

**11.62** Um carro e uma motocicleta movem-se ambos a  $64,4 \text{ km/h}$ . A motocicleta encontra-se a  $15 \text{ m}$  atrás do carro. O motociclista deseja ultrapassá-lo, colocando sua moto no ponto B,  $15 \text{ m}$  à frente do automóvel e, então, desacelerar até retornar à velocidade de  $64,4 \text{ km/h}$ . A máxima aceleração da motocicleta é  $1,8 \text{ m/s}^2$  e a máxima desaceleração é  $5,4 \text{ m/s}^2$ . Qual deve ser o tempo mínimo para o motorista cumprir a operação de ultrapassagem, sem exceder a velocidade de  $88,6 \text{ m/s}$ ? Esboce o diagrama  $v - t$ .



**Figura P11.62**

**11.63** Resolva o problema anterior, supondo que o motociclista não se preocupa com qualquer limite de velocidade, procurando alcançar B e retomam a velocidade de  $64,4 \text{ km/h}$ . Qual é a máxima velocidade atingida? Esboce o gráfico  $v - t$ .

**11.64** Um carro encontra-se a  $10,7 \text{ m}$  atrás de um caminhão e ambos estão trafegando uniformemente a uma velocidade  $v_0$ . Repentinamente, o motorista do caminhão freia, desacelerando o veículo à razão constante de  $3,05 \text{ m/s}^2$ . Dois segundos depois o motorista do carro começa a freiar e mal consegue evitar uma colisão. Determinar a desaceleração do carro se (a)  $v_0 = 96,5 \text{ km/h}$  e (b)  $v_0 = 48,3 \text{ km/h}$ .

**11.65** Um veículo A, movendo-se uniformemente com velocidade  $v_A$ , aproxima-se de um outro B que está trafegando no mesmo sentido, a uma velocidade constante de  $63 \text{ km/h}$ . O motorista de B nota o veículo A, quando este ainda se encontra a  $50 \text{ m}$  e, então, começa a acelerar uniformemente à razão de  $0,8 \text{ m/s}^2$ , para evitar uma colisão ou ser ultrapassado por A. Determinar  $v_A$  para uma aproximação máxima de  $10 \text{ m}$ .

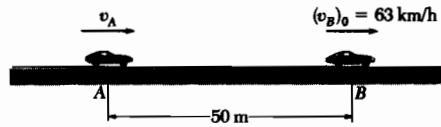


Figura P11.65

**11.66** Um caça, voando horizontalmente em linha reta a uma velocidade de 900 km/h, tenta atingir um bombardeiro que voa a 720 km/h na mesma linha e sentido do caça. O piloto do caça dispara um míssil ar-ar, quando a distância entre ambos é de 1150 m. O foguete acelera à razão constante de  $400 \text{ m/s}^2$  durante 1 s e então viaja a uma velocidade constante. (a) Quanto tempo leva o míssil, desde o seu disparo, para atingir o bombardeiro? (b) Qual é a distância entre os aviões no instante em que o bombardeiro é alcançado pelo foguete? Supõe-se que os dois aviões mantêm suas velocidades constantes.

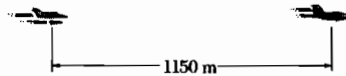


Figura P11.66

**11.67** A aceleração de um pequeno avião, em curso retilíneo, varia no tempo, como indica a figura. Determinar para as condições iniciais  $x_0 = 0$  e  $v_0 = 50 \text{ m/s}$  (a) a velocidade e a posição do avião para  $t = 20 \text{ s}$  e (b) sua velocidade média no intervalo  $6 \text{ s} < t < 14 \text{ s}$ .

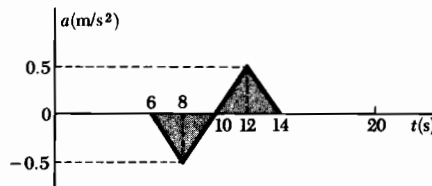


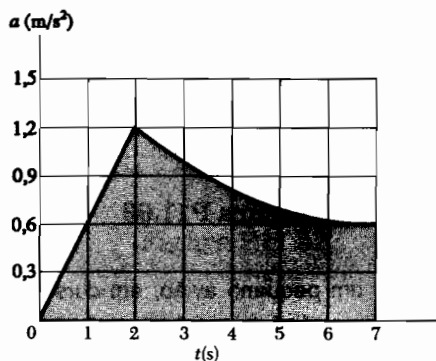
Figura P11.67

**11.68** Um trem se põe em movimento com uma aceleração uniforme de  $0,35 \text{ m/s}^2$  até atingir uma velocidade de  $6,1 \text{ m/s}^2$ , quando adquire movimento uniforme. Determinar o tempo e a distância percorrida se sua velocidade média for (a)  $3,66 \text{ m/s}$  e (b)  $5,49 \text{ m/s}$ .

**11.69** Variações abruptas ou muito fortes da aceleração de um elevador causam desconforto aos usuários. Se a aceleração de um elevador puder variar de  $\pm 0,45 \text{ m/s}^2$  por segundo, determine (a) o tempo mínimo necessário para o elevador partindo do repouso, subir 7,2 m e parar, e (b) a correspondente velocidade média.

**11.70** Para manter o conforto do usuário de um elevador, a sua aceleração foi limitada a  $\pm 1,2 \text{ m/s}^2$  e a taxa de variação de aceleração, a  $\pm 0,4 \text{ m/s}^2$  por segundo. Determine para o elevador que parte do repouso (a) o tempo mínimo para atingir uma velocidade constante de 6 m/s, (b) a distância percorrida nesse tempo e (c) a correspondente velocidade média.

**11.71** O diagrama  $a - t$ , mostrado na figura, foi obtido do movimento retilíneo de um automóvel numa estrada. A velocidade inicial do automóvel era de 24,2 km/h. Determine a velocidade e a distância percorrida quando  $t = 3 \text{ s}$  e (b)  $t = 6 \text{ s}$ .



**Figura P11.71**

**11.72** Um trenó de teste é levado ao repouso em 5 s depois de concluída uma experiência. Por meio de um acelerômetro ligado ao trenó levantou-se o diagrama  $a - t$  mostrado na figura. Determinar aproximadamente (a) a velocidade inicial e (b) a distância percorrida pelo trenó durante o intervalo  $0 < t < 5 \text{ s}$ .

**11.73** Determinou-se, experimentalmente, a desaceleração máxima possível de um trem de passageiros, sob condições de emergência (ver os resultados na figura). Se o trem é freado quando sua velocidade for de 108 km/h, determinar, aproximadamente, (a) o tempo necessário para o trem parar e (b) a distância percorrida.

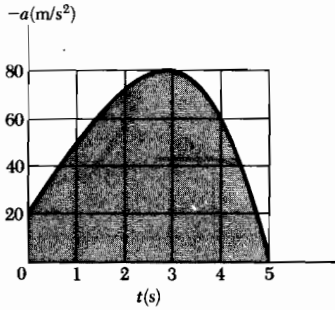


Figura P11.72

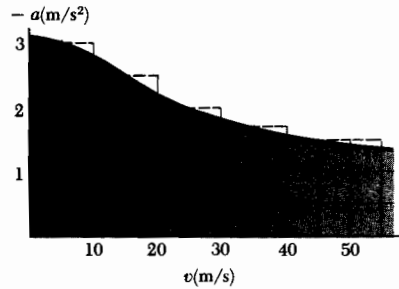


Fig. P11.73

**11.74** A curva  $v - x$  mostrada na figura foi obtida experimentalmente durante o movimento do suporte de uma plaina industrial. Determinar de modo aproximado a aceleração ( $a$ ) quando  $x = 7,6 \text{ cm}$  e (b) quando  $v = 10 \text{ cm/s}$ .

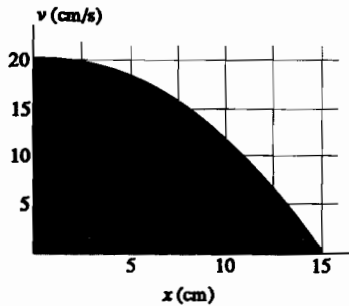


Figura P11.74

**11.75** Usando o método discutido na Seção 11.8, deduzir a fórmula  $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ , válida para a coordenada de posição de um ponto material em movimento retilíneo uniformemente acelerado.

**11.76** A aceleração de um objeto, submetido a uma onda de pressão, causada por uma explosão muito forte, obedece à curva mostrada na figura. O objeto, inicialmente em repouso, retorna ao repouso depois de um tempo  $t_1$ . Utilize o método da Seção 11.8 para determinar (a) o tempo  $t_1$  e (b) a distância percorrida pelo objeto ao ser levado pela onda de pressão.

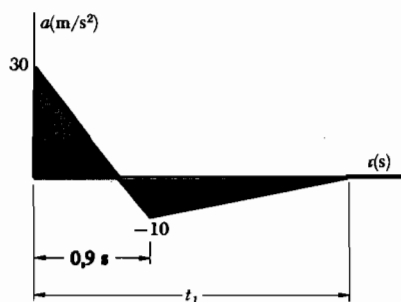


Figura P11.76

**11.77** Esboce a curva  $a - t$  para o ponto material considerado no Problema 11.53 e, usando o método da Seção 11.8, determine (a) a posição do ponto quando  $t = 10\text{ s}$  e (b) o máximo valor da sua coordenada de posição.

**11.78** Use o método da Seção 11.8 para determinar a posição do ponto material considerado no Problema 11.51, quando  $t = 8\text{ s}$ .

→ Início DO ESTUDO DE MECÂNICA II.

## Movimento Curvilíneo de um Ponto Material

**11.9 Vetor de Posição, Velocidade e Aceleração.** Quando um ponto material se desloca ao longo de uma curva, dizemos que está em *movimento curvilíneo*. Para definir a posição  $P$ , ocupada pelo ponto material num instante  $t$ , selecionamos um sistema de referência fixo, tal como o sistema  $Oxyz$ , ilustrado na Fig. 11.14a, e traçamos o vetor  $r$  unindo a origem  $O$  ao ponto  $P$ . Já que o vetor  $r$  é caracterizado pelo seu módulo  $r$  e sua direção em relação aos eixos de referência, ele define completamente a posição do ponto material em relação àqueles eixos; o vetor  $r$  é denominado *vetor de posição* do ponto material, no instante  $t$ .

Consideremos agora o vetor  $r'$  que define a posição  $P'$  ocupada pelo mesmo ponto material, no instante posterior  $t + \Delta t$ . O vetor  $\Delta r$  que une  $P$  a  $P'$  representa a variação do vetor de posição no intervalo de tempo  $\Delta t$ , já que, como podemos facilmente observar na Fig. 11.14a, o vetor  $r'$  é obtido adicionando-se os vetores  $r$  e  $\Delta r$  segundo a regra do triângulo. Pode-se notar que  $\Delta r$  representa uma variação na *direção* e *sentido* e também uma variação no módulo do vetor de posição  $r$ . A velocidade média do ponto material no intervalo de tempo  $\Delta t$  é definida como o quociente de  $\Delta r$  e  $\Delta t$ . Como  $\Delta r$  é um vetor e  $\Delta t$  um escalar, o quociente de  $\Delta r / \Delta t$  é um vetor associado a  $P$ , de mesma *direção* e *sentido* que  $\Delta r$  e módulo igual ao de  $\Delta r$  dividido por  $\Delta t$  (Fig. 11.14b).



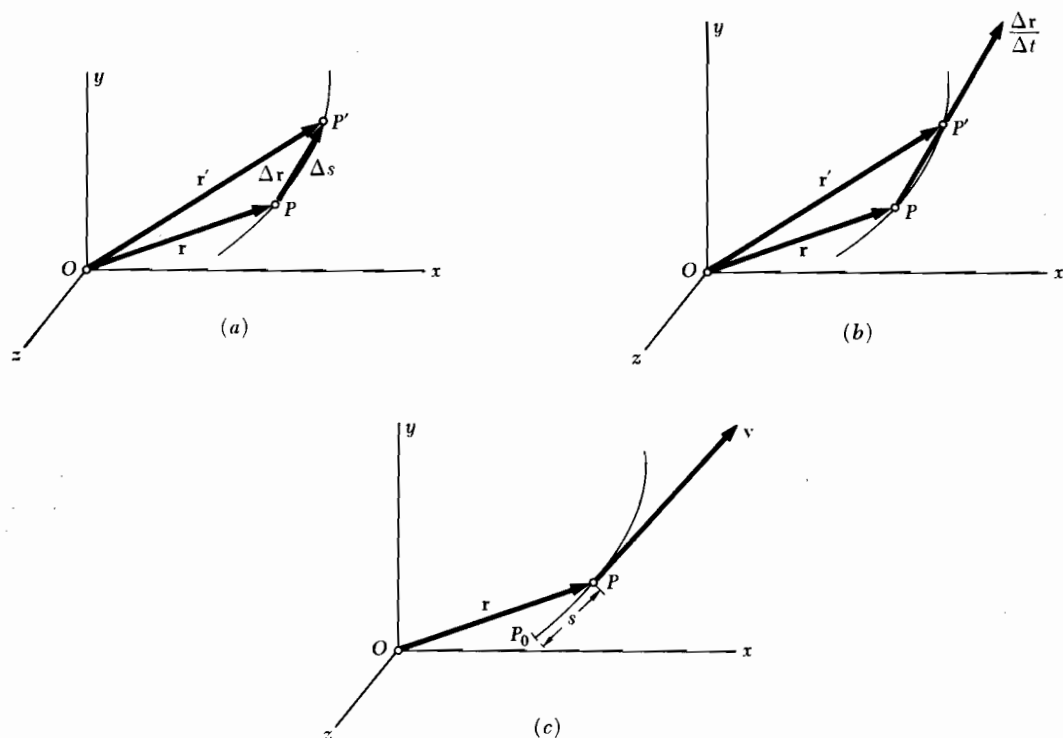


Figura 11.14

A velocidade instantânea do ponto material no instante  $t$  é obtida escolhendo-se intervalos de tempo  $\Delta t$  cada vez menores. A velocidade instantânea é, desse modo, representada pelo limite:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (11.14)$$

À medida que  $\Delta t$  se torna menor, o ponto  $P'$  se aproxima de  $P$ . No limite, o vetor  $\mathbf{v}$  obtido será tangente à trajetória do ponto material (Fig. 11.4c).

Como o vetor de posição  $\mathbf{r}$  depende do instante  $t$ , podemos defini-lo como uma *função vetorial* da variável escalar  $t$  e designá-lo por  $\mathbf{r}(t)$ . Estendendo-se o conceito de derivada de uma função escalar, introduzido no cálculo elementar, iremos nos referir ao limite do quociente  $\Delta \mathbf{r} / \Delta t$  como a derivada da função vetorial  $\mathbf{r}(t)$ . Escrevemos

$$\boxed{v = \frac{dr}{dt}} \quad (11.15)$$

A projeção  $v$  do vetor  $\mathbf{v}$  sobre a reta tangente à trajetória é chamada velocidade escalar do ponto material. A velocidade escalar pode ser obtida, substituindo-se o vetor  $\Delta \mathbf{r}$ , na fórmula (11.14), pela sua projeção representada pelo segmento retilíneo  $PP'$ . Como o comprimento do segmento  $PP'$  se aproxima do comprimento  $\Delta s$  do arco  $PP'$ , quando  $\Delta t$  decresce (Fig. 11.14a), podemos escrever

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{PP'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt}} \quad (11.16)$$

A velocidade escalar  $v$  pode, assim, ser obtida, derivando-se em relação a  $t$  o comprimento  $s$  do arco descrito pelo ponto material.

Consideremos a velocidade  $v$  do ponto material no instante  $t$  e  $v'$  num instante posterior  $t + \Delta t$  (Fig. 11.15a). Tracemos os vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}'$  a partir da mesma origem  $O'$  (Fig. 11.15b). O vetor  $\Delta \mathbf{v}$  que une  $Q$  a  $Q'$  representa a variação da velocidade do ponto material durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ , isto porque a velocidade  $v'$  pode ser obtida adicionando-se os vetores  $\mathbf{v}$  e  $\Delta \mathbf{v}$ . Podemos notar que  $\Delta \mathbf{v}$  representa a variação da *direção* e *sentido* da velocidade, bem como do seu módulo. A *aceleração média* do ponto material no intervalo de tempo  $\Delta t$  é definida como o quociente  $\Delta \mathbf{v} / \Delta t$ . Como  $\Delta \mathbf{v}$  é um vetor e  $\Delta t$  é um escalar, o quociente  $\Delta \mathbf{v} / \Delta t$  é um vetor de mesma direção e sentido que  $\Delta \mathbf{v}$ .

A *aceleração instantânea* do ponto material no instante  $t$  é obtida tomando-se valores de  $\Delta t$  cada vez menores. A aceleração instantânea é assim representada pelo limite

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (11.17)$$

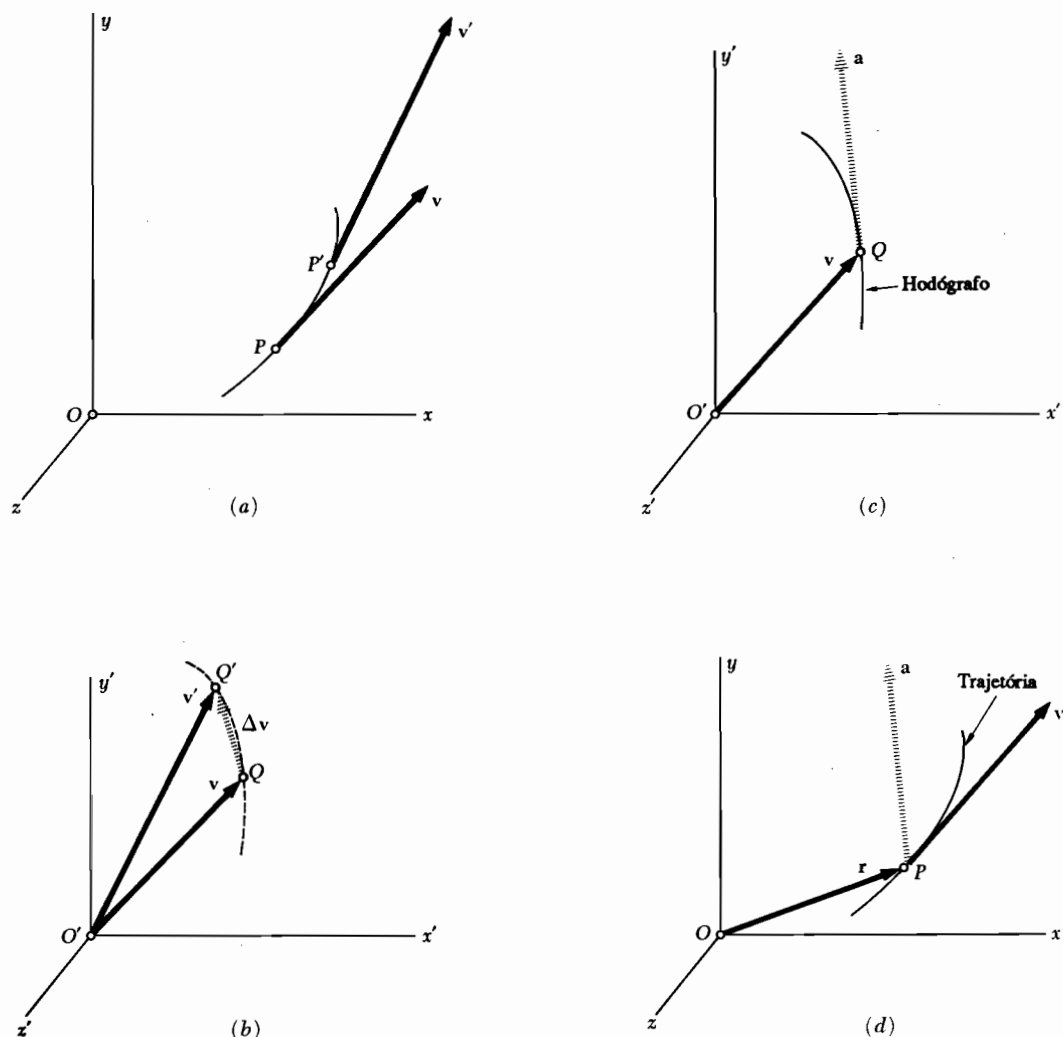


Figura 11.15

Observando-se que a velocidade  $v$  é uma função vetorial  $v(t)$  do tempo  $t$ , podemos referir-nos ao limite do quociente  $\Delta v / \Delta t$  como a derivada de  $v$  em relação a  $t$ . Escrevemos

$$a = \frac{dv}{dt}$$

(11.18)

Observemos que a aceleração  $a$  é tangente à curva descrita pela extremidade  $Q$  do vetor  $v$  quando o mesmo é traçado da origem fixa  $O'$  (Fig. 11.15c) e que, em geral, a aceleração *não* é tangente à trajetória do ponto material (Fig. 11.15d). A curva descrita pela extremidade de  $v$  ilustrada na Fig. 11.15c é chamada *hodógrafo* do movimento.

**11.10 Derivadas de Funções Vetoriais** Vimos, na seção precedente, que a velocidade  $v$  de um ponto material com movimento curvilíneo pode ser representada pela derivada da função vetorial  $r(t)$ , que caracteriza a posição do ponto. Da mesma forma, a aceleração  $a$  do ponto material pode ser representada pela derivada da função vetorial  $v(t)$ . Nesta seção, daremos uma definição formal da derivada da função vetorial e estabeleceremos algumas regras que regem a derivação de somas e produtos de funções vetoriais.

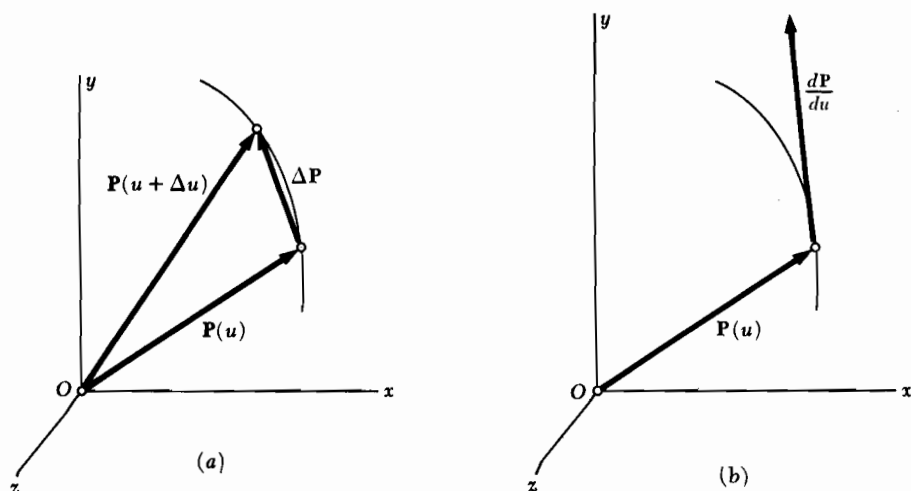


Figura 11.16

Seja  $P(u)$  uma função vetorial da variável escalar  $u$ . Com isto queremos indicar que o escalar  $u$  não define completamente o módulo, a direção e o sentido do vetor  $P$ . Se o vetor  $P$  for traçado de uma origem fixa  $O$  e se o escalar  $u$  puder variar, a extremidade  $P$  descreverá uma determinada curva no espaço. Consideremos os vetores  $P$  que correspondem aos valores  $u$  e  $u + \Delta u$  da variável escalar (Fig. 11.16a). Seja  $\Delta P$  o vetor que une as extremidades dos dois vetores dados; escrevemos

$$\Delta P = P(u + \Delta u) - P(u)$$

Dividindo-se ambos os membros por  $\Delta u$  e fazendo  $\Delta u$  tender a zero, definimos a derivada da função vetorial  $P(u)$  como o limite

$$\frac{d\mathbf{P}}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}(u + \Delta u) - \mathbf{P}(u)}{\Delta u} \quad (11.19)$$

Quando  $\Delta u$  tende a zero, a linha de ação torna-se tangente\* à curva da Fig. 11.16a. Assim, a derivada  $d\mathbf{P}/du$  da função vetorial  $P(u)$  é tangente à curva descrita pela extremidade de  $P(u)$ . (Fig. 11.16b).

Mostraremos, agora, que as regras que regem a derivação de somas e produtos de funções escalares podem ser estendidas às funções vetoriais. Consideremos, primeiro, a *adição de duas funções vetoriais*  $P(u)$  e  $Q(u)$  da mesma variável escalar  $u$ . De acordo com a definição dada em (11.19), a derivada do vetor  $P + Q$  é

$$\frac{d(\mathbf{P} + \mathbf{Q})}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta(\mathbf{P} + \mathbf{Q})}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta u} + \frac{\Delta \mathbf{Q}}{\Delta u} \right)$$

ou, como o limite de uma soma é igual à soma dos limites de seus termos,

$$\frac{d(\mathbf{P} + \mathbf{Q})}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta u} + \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{Q}}{\Delta u}$$

$$\boxed{\frac{d(\mathbf{P} + \mathbf{Q})}{du} = \frac{d\mathbf{P}}{du} + \frac{d\mathbf{Q}}{du}} \quad (11.20)$$

Agora, vamos considerar a *multiplicação de uma função escalar*  $f(u)$  com uma função vetorial  $P(u)$  da mesma variável escalar  $u$ . A derivada do vetor  $f\mathbf{P}$  é

$$\frac{d(f\mathbf{P})}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{(f + \Delta f)(\mathbf{P} + \Delta \mathbf{P}) - f\mathbf{P}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta f}{\Delta u} \mathbf{P} + f \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta u} \right)$$

\* É claro que o autor admite a existência de tangente única em qualquer ponto da curva. Isto nem sempre é verdade, mesmo neste livro, como é fácil ver, por exemplo, na Fig. P11.53. (Nota do R. T.)

ou, recordando as propriedades dos limites de somas e produtos,

$$\frac{d(f\mathbf{P})}{du} = \frac{df}{du}\mathbf{P} + f\frac{d\mathbf{P}}{du} \quad (11.21)$$

As derivadas do *produto escalar* e *produto vetorial* de duas funções vetoriais  $P(u)$  e  $Q(u)$  podem ser obtidas de modo análogo. Temos

$$\frac{d(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q})}{du} = \frac{d\mathbf{P}}{du} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{P} \cdot \frac{d\mathbf{Q}}{du} \quad (11.22)$$

$$\frac{d(\mathbf{P} \times \mathbf{Q})}{du} = \frac{d\mathbf{P}}{du} \times \mathbf{Q} + \mathbf{P} \times \frac{d\mathbf{Q}}{du} \quad (11.23)^*$$

Usaremos as propriedades que acabamos de ver para determinar as *componentes cartesianas da derivada de uma função vetorial*  $P(u)$ . Decompondo-se  $P$  em suas componentes segundo eixos ortogonais fixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , temos

$$\mathbf{P} = P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k} \quad (11.24)$$

onde  $P_x$ ,  $P_y$  e  $P_z$  são as componentes escalares cartesianas do vetor  $P$ , e  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  são os vetores unitários correspondentes, respectivamente, aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  (Seção 2.12). Pela (11.20) a derivada de  $P$  é igual à soma das derivadas dos termos do segundo membro. Como cada um destes termos é o produto de um escalar e uma função vetorial, usaremos a (11.21). Os vetores unitários  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  possuem módulos constantes (iguais a 1) e direções e sentidos fixos. Suas derivadas são, desta forma, nulas. Temos, assim,

$$\frac{d\mathbf{P}}{du} = \frac{dP_x}{du} \mathbf{i} + \frac{dP_y}{du} \mathbf{j} + \frac{dP_z}{du} \mathbf{k} \quad (11.25)$$

\* Como o produto vetorial não é comutativo (Seção 3.4), a ordem dos fatores em (11.23) deve ser mantida.

Observando-se que os coeficientes dos vetores unitários são, por definição, as componentes cartesianas do vetor  $dP/du$ , concluímos que as componentes cartesianas escalares da derivada  $dP/du$  da função vetorial  $P(u)$  são obtidas derivando-se as correspondentes componentes cartesianas escalares de  $P$ .

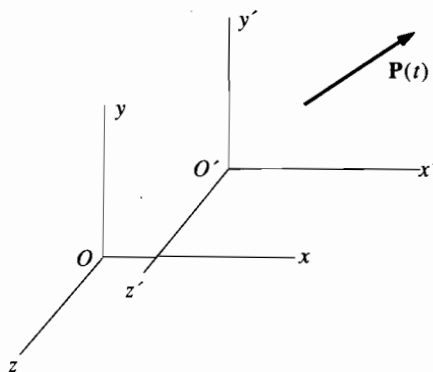
**Varição de um Vetor.** Quando o vetor  $P$  é uma função do tempo  $t$ , sua derivada  $dP/dt$  representa a variação de  $P$  em relação ao sistema  $Oxyz$ . Decompondo  $P$  nas suas componentes cartesianas, temos pela (11.25)

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{dP_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dP_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dP_z}{dt} \mathbf{k}$$

ou, usando pontos para indicar derivada em relação a  $t$ ,

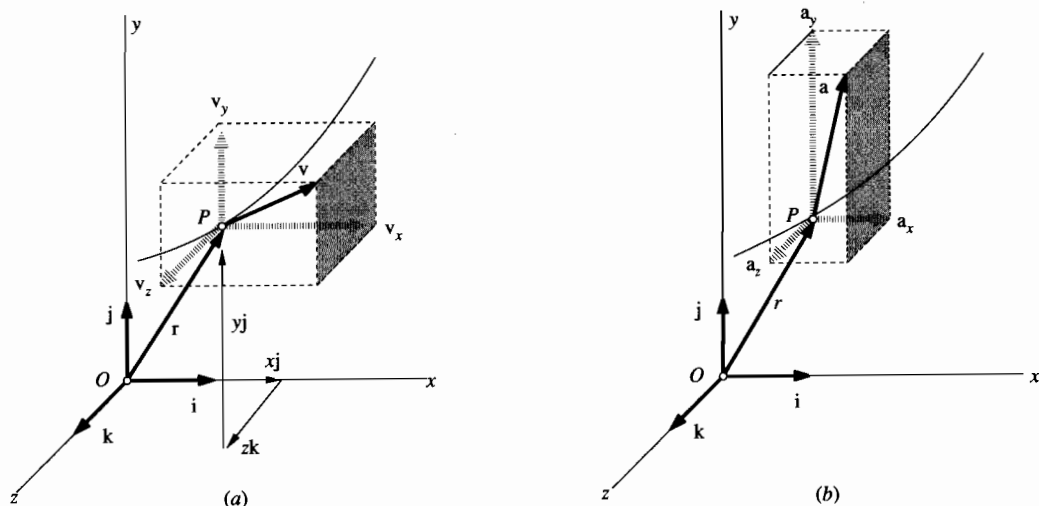
$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{P}_x \mathbf{i} + \dot{P}_y \mathbf{j} + \dot{P}_z \mathbf{k} \quad (11.25')$$

Veremos, na Seção 15.10, que a variação de um vetor, quando observado de um sistema de referência em movimento é, em geral, diferente da sua variação quando observado de um sistema de referência fixo. Entretanto, se o sistema  $O'x'y'z'$  estiver em translação, isto é, se seus eixos forem sempre paralelos aos eixos correspondentes do sistema fixo  $Oxyz$  (Fig. 11.17), os mesmos vetores unitários  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  serão usados para ambos os sistemas, e o vetor  $P$  terá, em qualquer instante, as mesmas componentes  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$ , em ambos os sistemas. Segue-se da (11.25') que a derivada  $P$  será a mesma em relação aos sistemas  $Oxyz$  e  $O'x'y'z'$ . Podemos estabelecer, portanto, que a variação de um vetor é a mesma em relação tanto a um sistema fixo quanto a um sistema em translação. Esta propriedade simplificará muito o trabalho, já que trataremos, principalmente, de sistemas em translação.



**Figura 11.17**

**11.11 Componentes Cartesianas da Velocidade e Aceleração.** Quando a posição instantânea de um ponto material  $P$  for definida por suas coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , será conveniente decompor sua velocidade  $v$  e sua aceleração  $a$  em função de tais componentes (Fig. 11.18).



**Figura 11.18**

Decompondo-se o vetor de posição  $\mathbf{r}$  do ponto material nas suas componentes cartesianas, temos

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (11.26)$$

onde as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  são funções de  $t$ . Derivando-se duas vezes, obtemos

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \quad (11.27)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} \quad (11.28)$$



onde  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  e  $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$  representam, respectivamente, as primeiras e segundas derivadas de  $x, y$  e  $z$  em relação a  $t$ . Segue-se das (11.27) e (11.28) que as componentes cartesianas escalares da velocidade e aceleração são

$$v_x = \dot{x} \qquad v_y = \dot{y} \qquad v_z = \dot{z} \qquad (11.29)$$

$$a_x = \ddot{x} \qquad a_y = \ddot{y} \qquad a_z = \ddot{z} \qquad (11.30)$$

Um valor positivo para  $v_x$  indica que a componente vetorial  $v_x$  está orientada para a direita, e um valor negativo, que está orientada para a esquerda; o sentido de cada uma das outras componentes vetoriais pode ser determinado de modo semelhante, levando-se em conta o sinal da componente escalar correspondente. Se se desejar, os módulos, direções e sentidos da velocidade e aceleração podem ser obtidos das suas componentes cartesianas escalares utilizando-se os métodos das Seções 2.7 e 2.12.

O uso das componentes cartesianas para determinar a posição, velocidade e aceleração de um ponto material é vantajoso quando a componente  $a_x$  da aceleração depende somente de  $t, x$  e/ou  $v_x$ , e quando, da mesma forma,  $a_y$  depende somente de  $t, y$  e/ou  $v_y$ , e  $a_z$  de  $t, z$  e/ou  $v_z$ . As equações (11.30) podem então ser integradas independentemente, e desta forma também as Eqs. (11.29). Em outras palavras, os movimentos do ponto material segundo os eixos  $x, y$  e  $z$  podem ser estudados separadamente.

No caso do *movimento de um projétil*, por exemplo, pode-se demonstrar (ver Seção 12.5) que as componentes da aceleração são

$$a_x = \ddot{x} = 0 \qquad a_y = \ddot{y} = -g \qquad a_z = \ddot{z} = 0$$

quando não se considera a resistência do ar. Chamando-se de  $x_0, y_0, z_0$  as coordenadas da arma, e  $(v_x)_0, (v_y)_0, (v_z)_0$  as componentes da velocidade inicial  $v_0$  do projétil e integrando-se duas vezes, obtemos

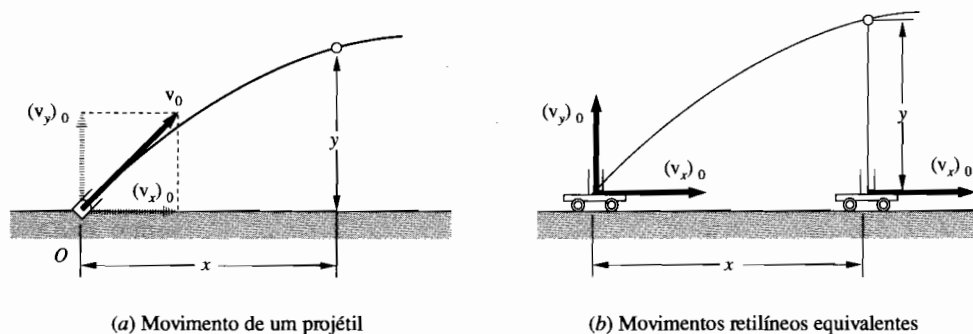
$$v_x = \dot{x} = (v_x)_0 \qquad v_y = \dot{y} = (v_y)_0 - gt \qquad v_z = \dot{z} = (v_z)_0$$

$$x = x_0 + (v_x)_0 t \qquad y = y_0 + (v_y)_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad z = z_0 + (v_z)_0 t$$

Se o projétil é disparado de  $O$  no plano  $xy$ , temos  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$  e  $(v_z)_0 = 0$ , e as equações do movimento reduzem-se a

$$\begin{aligned} v_x &= (v_x)_0 & v_y &= (v_y)_0 - gt & v_z &= 0 \\ x &= (v_x)_0 t & y &= (v_y)_0 t - \frac{1}{2}gt^2 & z &= 0 \end{aligned}$$

Estas equações mostram que o projétil se mantém no plano  $xy$  e que seu movimento na direção horizontal é uniforme, enquanto na direção vertical é uniformemente acelerado. Desta forma, o movimento de um projétil pode ser substituído por dois movimentos retilíneos independentes. Estes são facilmente visualizados se admitirmos que o projétil é disparado verticalmente, com uma velocidade inicial  $(v_y)_0$ , de uma plataforma que se desloca com uma velocidade horizontal constante  $(v_x)_0$  (Fig. 11.19). A coordenada  $x$  do projétil é igual, em qualquer instante, à distância percorrida pela plataforma, enquanto sua coordenada  $y$  pode ser obtida como se o projétil se deslocasse ao longo de uma linha vertical.



**Figura 11.19**

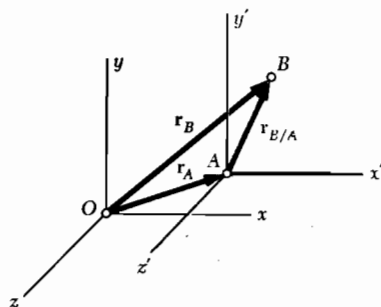
Pode-se observar que as equações que definem as coordenadas  $x$  e  $y$  de um projétil em um instante qualquer são as equações paramétricas de uma parábola. Desta forma, a trajetória de um projétil é *parabólica*. Este resultado, entretanto, deixará de ser válido quando a resistência do ar ou a variação da aceleração da gravidade com a altitude for levada em conta.

### 11.12 Movimento Relativo a um Sistema de Referência em Translação.

Na seção anterior, um único sistema de referência foi usado para representar o movimento de um ponto material. Na maioria dos casos, este sistema estava preso à Terra e era considerado fixo. Vamos, agora, analisar situações onde é conveniente a utilização

simultânea de vários sistemas de referência. Se um destes sistemas estiver preso à Terra, será chamado de *sistema de referência fixo* e os demais serão denominados *sistemas de referência móveis*. Entenda-se, entretanto, que a seleção de um sistema de referência fixo é puramente arbitrário.\* Qualquer sistema poderá ser designado como “fixo”, e todos os demais não ligados rigidamente a este serão os “móveis”.

Considerem-se dois pontos materiais  $A$  e  $B$ , que se movem no espaço (Fig. 11.20). Os vetores  $r_A$  e  $r_B$  definem as suas posições em qualquer instante com relação ao sistema de referência fixo  $Oxyz$ . Consideremos, agora, um sistema de eixos  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$ , com origem em  $A$  e paralelos aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Enquanto a origem destes eixos se desloca, suas orientações permanecem as mesmas; o sistema de referência  $Ax'y'z'$  está em translação em relação a  $Oxyz$ . O vetor  $r_{B/A}$  que une  $A$  e  $B$  define a *posição de  $B$  relativa ao sistema móvel  $Ax'y'z'$*  (ou, simplesmente, a *posição de  $B$  relativa a  $A$* ).



**Figura 11.20**

Observamos da Fig. 11.20 que o vetor de posição  $r_B$  do ponto material  $B$  é a soma do vetor de posição  $r_A$  do ponto  $A$  com o vetor de posição  $r_{B/A}$  de  $B$  relativo a  $A$ ; logo

$$r_B = r_A + r_{B/A} \quad (11.31)$$

\* Tal arbitrariedade é possível apenas em cinemática. Quando se estudam os efeitos e causas em dinâmica (movimentos e forças), para que as equações sejam válidas, um sistema “fixo” tem uma definição bastante complexa. (Nota do R. T.)

Derivando-se (11.31) em relação a  $t$ , no sistema de referência fixo e usando pontos para indicar derivadas em relação ao tempo temos

$$\dot{\mathbf{r}}_B = \dot{\mathbf{r}}_A + \dot{\mathbf{r}}_{B/A} \quad (11.32)$$

As derivadas  $\dot{\mathbf{r}}_A$  e  $\dot{\mathbf{r}}_B$  representam, respectivamente, as velocidades  $v_A$  e  $v_B$  dos pontos materiais  $A$  e  $B$ . A derivada  $\dot{\mathbf{r}}_{B/A}$  representa a variação de  $\mathbf{r}_{B/A}$  em relação ao sistema  $Ax'y'z'$ , bem como ao referencial fixo, já que  $Ax'y'z'$  está em translação (Seção 11.10). Esta derivada, entretanto, define a velocidade  $v_{B/A}$  de  $B$  em relação ao referencial  $Ax'y'z'$  (ou, resumindo, a velocidade  $v_{B/A}$  de  $B$  em relação a  $A$ ). Logo,

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \quad (11.33)$$

Derivando-se a Equação (11.33) em relação a  $t$  e usando-se a derivada de  $\dot{\mathbf{v}}_{B/A}$  para definir a aceleração  $\mathbf{a}_{B/A}$  de  $B$  em relação ao referencial  $Ax'y'z'$  (ou, simplesmente, a aceleração  $\mathbf{a}_{B/A}$  de  $B$  em relação a  $A$ ), escrevemos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \quad (11.34)$$

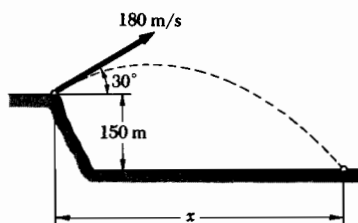
O movimento de  $B$  em relação ao referencial fixo  $Oxyz$  é denominado movimento absoluto de  $B$ . As equações obtidas nesta seção mostram que o movimento absoluto de  $B$  pode ser obtido pela combinação do movimento de  $A$  e o movimento relativo de  $B$  em relação ao referencial móvel preso em  $A$ . A Eq. (11.33), por exemplo, exprime o fato de que a velocidade absoluta  $v_B$  do ponto material  $B$  pode ser obtida pela adição vetorial da velocidade de  $A$  com a velocidade de  $B$  relativa ao referencial  $Ax'y'z'$ . A Eq. (11.34) exprime uma propriedade semelhante para a aceleração.\* Devemos recordar, entretanto, que o sistema  $Ax'y'z'$  está em translação, isto é, que, enquanto se move com  $A$ , seus eixos mantêm as mesmas orientações. Como veremos (Seção 15.14), relações diferentes devem ser usadas no caso de sistema de referência com movimento de rotação.

\* Note-se que o produto dos subíndices  $A$  e  $A/B$  usados nos segundos membros das Eqs. (11.31) a (11.34) é igual ao subíndice  $B$  usado nos primeiros membros das equações.

### Problema Resolvido 11.7

Dispara-se um projétil, da extremidade de uma colina de 150 m de altura, com uma velocidade inicial de 180 m/s, num ângulo de  $30^\circ$  com a horizontal. Desprezando-se a resistência do ar, determinar (a) a distância horizontal da arma ao ponto onde o projétil atinge o solo, (b) a altura máxima que o projétil alcança em relação ao solo.

**Solução:** Consideremos separadamente o movimento vertical e o horizontal.



**Movimento Vertical** Movimento uniformemente acelerado. Escolhendo o sentido positivo do eixo  $y$  para cima e colocando a origem  $O$  na arma, temos

$$(v_y)_0 = (180 \text{ m/s}) \sin 30^\circ = +90 \text{ m/s}$$

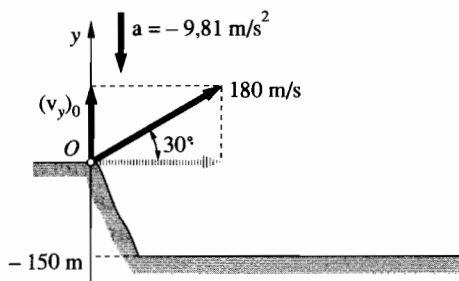
$$a = -9,81 \text{ m/s}^2$$

Substituindo-se nas equações do movimento uniformemente acelerado, tem-se

$$v_y = (v_y)_0 + at \qquad v_y = 90 - 9,81t \qquad (1)$$

$$y = (v_y)_0 t + \frac{1}{2} at^2 \qquad y = 90t - 4,90t^2 \qquad (2)$$

$$v_y^2 = (v_y)_0^2 + 2ay \qquad v_y^2 = 8,10 \times 10^3 - 19,62y \qquad (3)$$



**Movimento Horizontal.** *Movimento uniforme. Escolhendo-se o sentido positivo do eixo  $x$  para a direita, tem-se*

$$(v_x)_0 = (180 \text{ m/s}) \cos 30^\circ = + 155,9 \text{ m/s}$$

*Substituindo-se na equação do movimento uniforme, obtém-se*

$$x = (v_x)_0 t \qquad x = 155,9t \qquad (4)$$

**a) Distância Horizontal.** *Quando o projétil atinge o solo, temos*

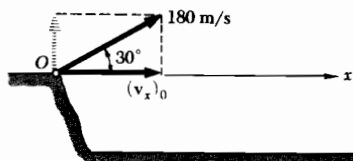
$$y = - 150 \text{ m}$$

*Levando-se este valor à Eq. (2) do movimento vertical, escrevemos*

$$-150 = 90t - 4,90t^2 \qquad t^2 - 18,4t - 30,6 = 0 \qquad t = 19,9\text{s}$$

*Levando-se  $t = 19,9\text{s}$  à Eq. (4) do movimento horizontal, obtemos*

$$x = 155,9 \times 19,9 \qquad x = 3,10\text{km} \leftarrow$$



**b) Máxima Elevação** Quando o projétil atinge a máxima elevação, temos  $v_y = 0$ ; levando-se este valor à Eq. (3) do movimento vertical, escrevemos

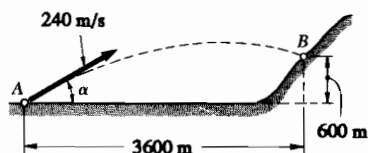
$$0 = 8,10 \times 10^3 - 19,62y \quad y = 413 \text{ m}$$

Elevação máxima acima do solo = 150 m + 413 m

= 563 m ←

### Problema Resolvido 11.8

Dispara-se um projétil com uma velocidade inicial de 240 m/s contra um alvo B situado 600 m acima da arma A e a uma distância horizontal de 3 600 m. Desprezando a resistência do ar, determinar o valor do ângulo  $\alpha$  de disparo.



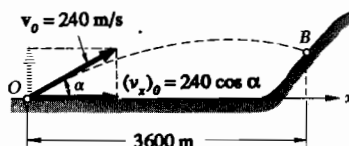
**Solução** Consideremos separadamente os movimentos horizontal e vertical.

**Movimento Horizontal** Estabelecendo a origem do sistema coordenado na arma, temos

$$(v_x)_0 = 240 \cos \alpha$$

Substituindo-se na equação do movimento horizontal uniforme, obtemos

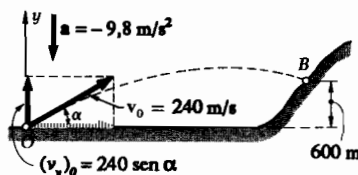
$$x = (v_x)_0 t \quad x = (240 \cos \alpha)t$$



O tempo necessário para que o projétil percorra uma distância horizontal de 3.600 m é obtido fazendo  $x$  igual a 3.600 m.

$$3.600 = (240 \cos \alpha) t$$

$$t = \frac{3.600}{240 \cos \alpha} = \frac{15}{\cos \alpha}$$



### Movimento Vertical

$$(v_y)_0 = 240 \operatorname{sen} \alpha \quad a = -9,8 \text{ m/s}^2$$

Substituindo-se na equação do movimento vertical uniformemente acelerado, resulta

$$600 = 240 \operatorname{sen} \alpha \frac{15}{\cos \alpha} - 4,9 \left( \frac{15}{\cos \alpha} \right)^2$$



Como  $1/\cos^2 \alpha = \sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$ , temos

$$600 = 240 (15) \tan \alpha - 4,9(15)^2 (1 + \tan^2 \alpha)$$

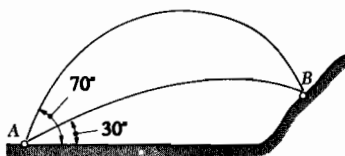
$$1.103 \tan^2 \alpha - 3.600 \tan \alpha + 1.703 = 0$$

Resolvendo-se a equação de segundo grau na  $\tan \alpha$ , temos

$$\tan \alpha = 2,690 \quad \text{e} \quad \tan \alpha = 0,574$$

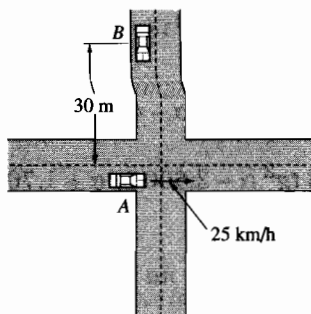
$$\alpha = 70^\circ \quad \text{e} \quad \alpha = 30^\circ \Leftarrow$$

O alvo será atingido se for utilizado qualquer um dos dois ângulos de tiro (ver figura).



### Problema Resolvido 11.9

Um automóvel A está trafegando para leste com uma velocidade constante de 25 km/h. Quando passa pelo cruzamento ilustrado na figura, um automóvel B, que estava parado a 30 m ao norte dirige-se para o sul com uma aceleração constante de  $1,2 \text{ m/s}^2$ . Determine a posição, velocidade e aceleração de B relativas a A cinco segundos após A passar pelo cruzamento.



**Solução.** Escolhemos a origem dos eixos  $x$  e  $y$  no cruzamento das duas ruas com os sentidos positivos, respectivamente, para leste e norte.

**Movimento do Automóvel A.** Primeiramente vamos exprimir a velocidade em  $m/s$ .

$$25 \text{ km/h} = \frac{25 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{25,0 \times 10^3 \text{ m}}{3.600 \text{ s}} = 6,94 \text{ m/s}$$

Como o movimento de A é uniforme, escrevemos, para qualquer instante  $t$ ,

$$a_A = 0$$

$$v_A = +6,94 \text{ m/s}$$

$$x_A = (x_A)_0 + v_A t = 0 + 6,94t$$

Para  $t = 5 \text{ s}$ , temos

$$a_A = 0$$

$$v_A = +6,94 \text{ m/s}$$

$$x_A = + (6,94 \text{ m/s})(5 \text{ s}) = +34,7 \text{ m}$$

$$a_A = 0$$

$$v_A = 6,94 \text{ m/s} \rightarrow$$

$$r_A = 34,7 \text{ m} \rightarrow$$

**Movimento do Automóvel B.** Como o movimento de B é uniformemente acelerado, temos

$$a_B = -1,2 \text{ m/s}^2$$

$$v_B = (v_B)_0 + at = -1,2t$$

$$y_B = (y_B)_0 + (v_B)_0 t + \frac{1}{2} a_B t^2 = 30 + 0 - \frac{1}{2} (1,2) t^2$$

Para  $t = 5$  s, temos

$$a_B = -1,2 \text{ m/s}^2$$

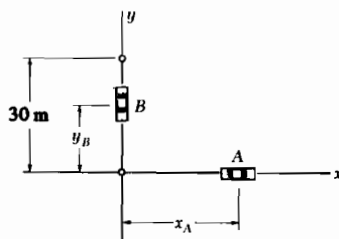
$$a_B = 1,2 \text{ m/s}^2 \downarrow$$

$$v_B = -(1,2 \text{ m/s})(5 \text{ s}) = -6 \text{ m/s}$$

$$v_B = 6 \text{ m/s} \downarrow$$

$$y_B = 30 - \frac{1}{2} (1,2 \text{ m/s})(5 \text{ s})^2 = +15 \text{ m}$$

$$r_B = 15 \text{ m} \uparrow$$



**Movimento de B em Relação a A** Determinando o triângulo correspondente à equação vetorial  $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$ , obtemos o módulo, direção e sentido do vetor B em relação a A.

$$r_{B/A} = 37,8 \text{ m}$$

$$\alpha = 23,4^\circ$$

$$r_{B/A} = 37,8 \text{ m} \searrow 23,4^\circ \Leftarrow$$

Procedendo de maneira semelhante, encontramos a velocidade e aceleração de B em relação a A.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

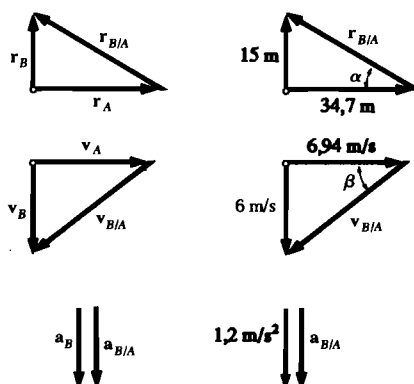
$$v_{A/B} = 9,17 \text{ m/s}$$

$$\beta = 40,8^\circ$$

$$v_{B/A} = 9,17 \text{ m/s} \nearrow 40,8^\circ \Leftarrow$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

$$a_{B/A} = 1,2 \text{ m/s}^2 \downarrow \Leftarrow$$

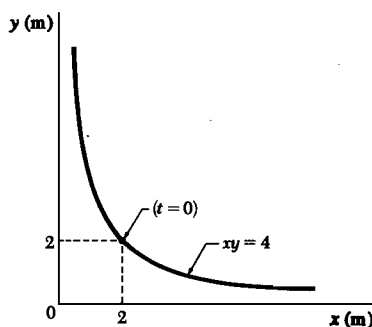


## Problemas

*Observação:* Desprezar a resistência do ar nos problemas de balística.

**11.79** As equações  $x = 1,5t^2 - 6t$  e  $y = 6t^2 - 2t^3$ , onde  $x$  e  $y$  são expressos em metros e  $t$ , em segundos, definem o movimento de um ponto material. Determinar a velocidade e a aceleração do ponto nos instantes (a)  $t = 1\text{ s}$  (b)  $t = 2\text{ s}$  e (c)  $t = 3\text{ s}$ .

**OK** **11.80** As equações dadas definem o movimento de um ponto material:  $x = 2(t+1)^2$  e  $y = 2(t+1)^{-2}$ , onde  $x$  e  $y$  são dados em metros e  $t$  em segundos. Mostrar que a trajetória do ponto é o segmento de hipérbole mostrado na figura e determinar a velocidade e aceleração quando (a)  $t = 0$  e (b)  $t = 0,5\text{ s}$ .

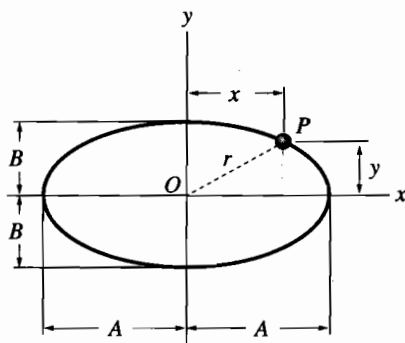


**Figura P11.80**

**11.81** O movimento de um ponto material é definido pelas equações  $x = 2t^2 - 4t$  e  $y = 2(t-1)^2 - 4(t-1)$ , onde  $x$  e  $y$  são dados em metros e  $t$ , em segundos. Determinar (a) o mínimo valor da velocidade escalar do ponto e (b) o instante, a posição e a direção da velocidade, correspondentes.

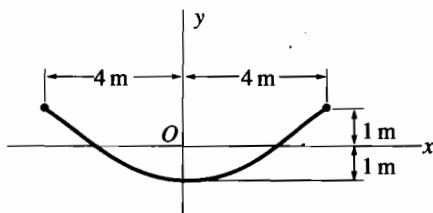
**11.82** O movimento de um ponto material é definido pelas equações  $x = 120 \sin \frac{1}{2} \pi t$  e  $y = 40t^2$ , onde  $x$  e  $y$  são dados em milímetros e  $t$  em segundos. Determinar a velocidade e a aceleração do ponto em (a)  $t = 1$  s e (b)  $t = 2$  s.

**11.83** Um ponto material descreve uma elipse de equação:  $\mathbf{r} = A \cos pt \mathbf{i} + B \sin pt \mathbf{j}$ . Mostre que a aceleração (a) aponta para a origem e (b) é proporcional a  $r$ .



**Figura P11.83**

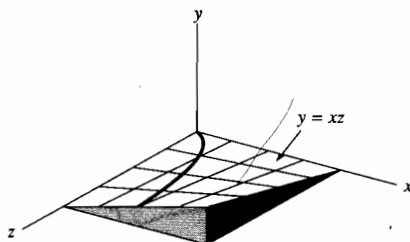
**11.84** O movimento vibratório de um ponto material é definido pela equação  $\mathbf{r} = (4 \sin \pi t) \mathbf{i} - (\cos 2\pi t) \mathbf{j}$ , onde  $r$  é expresso em metros e  $t$  em segundos. (a) Determine a velocidade e a aceleração em  $t = 1$  s e (b) mostre que a trajetória limita-se a um arco de parábola.



**Figura P11.84**

**11.85** O movimento tridimensional de um ponto material é definido por  $\mathbf{r} = (R \sin pt) \mathbf{i} + c t \mathbf{j} + (R \cos pt) \mathbf{k}$ . Determinar os módulos da velocidade e da aceleração do ponto. (A curva descrita pelo ponto é uma hélice).

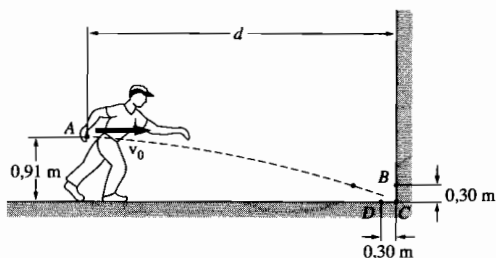
**11.86** O movimento de um ponto material é descrito por  $\mathbf{r} = A t \mathbf{i} + B t^3 \mathbf{j} + C t^2 \mathbf{k}$ , onde  $r$  é expresso em metros e  $t$ , em segundos. Mostre que a trajetória do ponto está contida no parabolóide hiperbólico  $y = x^2$ . Determine os módulos da velocidade e da aceleração para  $A = 1 \text{ m/s}$ ,  $B = 1 \text{ m/s}^3$  e  $C = 1 \text{ m/s}^2$ , nos instantes (a)  $t = 0$  e (b)  $t = 2 \text{ s}$ .



**Figura P11.86**

**11.87** Um homem numa torre a 18m de altura, atira horizontalmente uma pedra que atinge um ponto do solo a 25m da torre: determine (a) a velocidade inicial da pedra e (b) a que distância da torre a pedra atingiria o solo se fosse atirada, também horizontalmente, de uma altura de 22m.

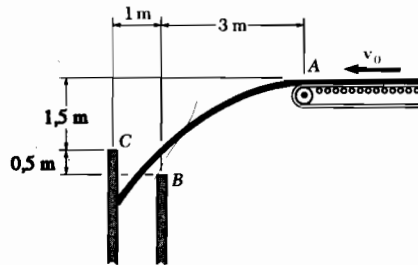
**11.88** Um jogador de handebol atira uma bola do ponto A, com velocidade horizontal  $v_0$ . A distância  $d$  vale 6,1m. Determinar (a) o valor de  $v_0$  para o qual a bola atingirá o vértice C e (b) o intervalo de valores de  $v_0$  para os quais a bola atingirá a região BCD.



**Figura P11.88**

**OK** 11.89 Resolva o problema anterior, supondo  $d = 9\text{ m}$ .

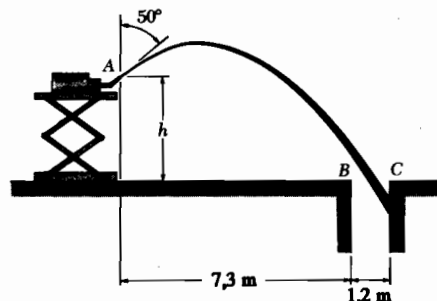
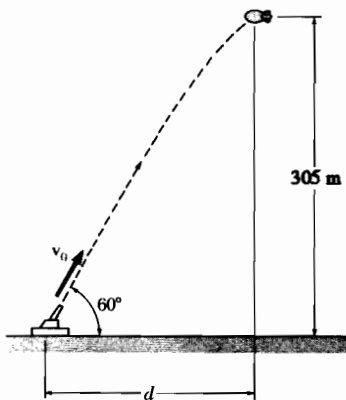
**OK** 11.90 Descarrega-se areia do ponto A de uma esteira horizontal, com velocidade inicial  $v_0$ . Determinar o intervalo de valores de  $v_0$  para os quais a areia entrará no tubo vertical.



**Figura P11.90**

**OK** 11.91 Dispara-se um projétil com uma velocidade inicial de  $305\text{ m/s}$  contra um balão-alvo localizado a  $305\text{ m}$  do chão. Considerando-se que o projétil atinge o balão, determinar (a) a distância  $d$  e (b) o tempo de voo do projétil.

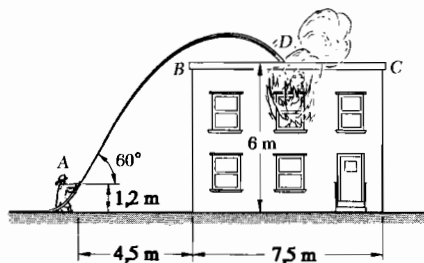
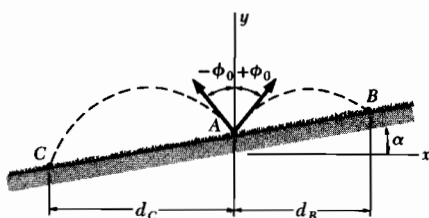
**OK** 11.92 Uma bomba localiza-se na beirada de uma plataforma. O bocal A expelle água a uma velocidade inicial de  $7,6\text{ m/s}$ , formando um ângulo de  $50^\circ$  com a vertical. Determinar o intervalo de alturas  $h$  para as quais a água atinge a abertura BC.



**Figuras P11.91 e P11.92**

**11.93** Um esguicho oscilante opera no ponto  $A$  do gramado inclinado de um ângulo  $\alpha$  como indica a figura. O ângulo  $\phi$  que a velocidade inicial  $v_0$  da água ejetada forma com a vertical varia de  $-\phi_0$  a  $\phi_0$ . Sabendo-se que  $v_0 = 10$  m/s,  $\phi_0 = 40^\circ$  e  $\alpha = 10^\circ$ , determine as distâncias  $d_B$  e  $d_C$  que definem a região molhada.

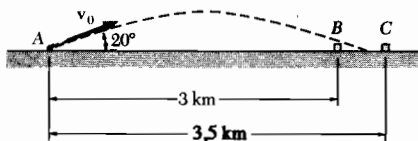
**11.94** Um bocal no ponto  $A$  ejeta água a uma velocidade inicial de 12 m/s e a um ângulo de  $60^\circ$  com a horizontal. Determine o ponto  $D$  onde a água atinge a cobertura. Verifique se o jato consegue ultrapassar a borda  $B$  do telhado.



**Figuras P11.93 e P.1194**

**11.95** No problema anterior, determine o intervalo de velocidades iniciais às quais a água atinge o telhado.

**11.96** Dispara-se um projétil com velocidade inicial  $v_0$  a um ângulo de  $20^\circ$  com a horizontal. Determine  $v_0$  para o projétil atingir (a) B e (b) C.

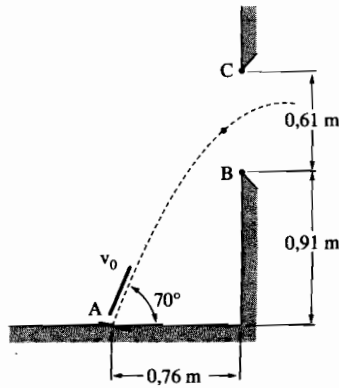


**Figura P11.96**

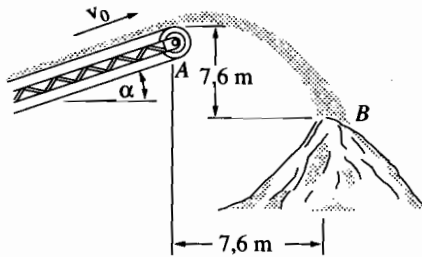
**11.97** A areia descarregada no ponto  $A$  cai no monte, em  $B$ . A esteira forma um ângulo  $\alpha = 20^\circ$  com a horizontal. Determinar a velocidade  $v_0$  da esteira.

**11.98** Do ponto  $A$  lança-se uma bola com velocidade  $v_0$  a um ângulo de  $70^\circ$  com a horizontal. Determine o intervalo de velocidade  $v_0$  para as quais a bola passará pela abertura  $BC$ .



**Figura P11.98**

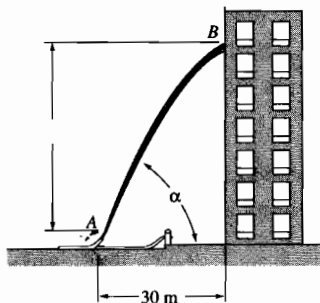
**11.99** A esteira mostrada na figura move-se com velocidade constante de 7,2 m/s. Determinar o ângulo  $\alpha$  para o qual a areia atinge o ponto B.

**Figuras P11.97, P11.99 e P11.100**

**11.100** Considerando-se que a esteira se move uniformemente com velocidade  $v_0$ , (a) determinar o valor mínimo de  $v_0$  para o qual a areia pode ser depositada em B. Determinar também o correspondente valor de  $\alpha$ .

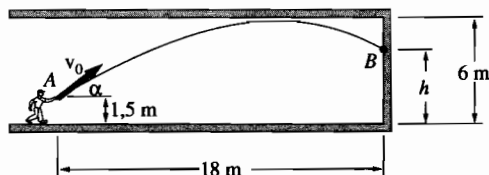
**11.101** A mangueira esguicha água com velocidade inicial  $v_0 = 24$  m/s. A saída A da mangueira localiza-se a 30 m do prédio. Determinar, (a) a máxima altura  $h$  que pode ser alcançada pela água e (b) o correspondente ângulo  $\alpha$ .

**11.102** A saída A da mangueira esguicha água a uma velocidade de 24 m/s e o jato alcança um ponto B do prédio a uma altura  $h = 18$  m. Determinar  $\alpha$ .

**Figuras P11.101 e P11.102**

**11.103** Um jogador arremessa uma bola, com velocidade inicial  $v_0 = 15 \text{ m/s}$ , de um ponto A a 1,5 m do solo. Sabendo-se que  $h = 3 \text{ m}$ , determinar o ângulo  $\alpha$  para a bola atingir o ponto B.

**11.104** Um jogador atira uma bola com velocidade  $v_0 = 15 \text{ m/s}$ , de um ponto A localizado a 1,5 m do solo. Sabendo-se que o pé direito\* do ginásio de esportes mede 6 m, determinar a máxima altura do ponto B que pode ser atingida pela bola.

**Figuras P11.103 e P11.104**

**11.105** As velocidades dos barcos A e C estão indicadas na figura. A velocidade do barco B relativa a A é  $v_{B/A} = 4 \text{ m/s}$   $\angle 50^\circ$ . Determinar (a)  $v_{A/C}$ , (b)  $v_{C/B}$  e (c) a variação da posição de B relativamente a C, durante um intervalo de 10 s. Mostre também que, para qualquer movimento  $v_{B/A} + v_{C/B} + v_{A/C} = 0$ .

**11.106** Os instrumentos de um avião indicam que ele está se movendo para o norte com velocidade de 500 km/h, em relação ao ar. Simultaneamente, um radar terrestre indica que o avião se move com velocidade de 530 km/h, numa direção que faz com o norte um ângulo de  $5^\circ$  voltado para o leste. Determinar a magnitude e a direção da velocidade do ar.

\* Pé direito é a distância vertical do teto ao piso de um aposento (Nota do R. T.).

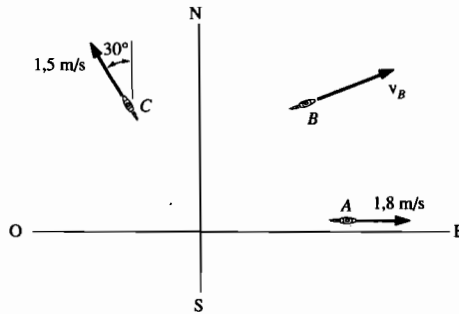
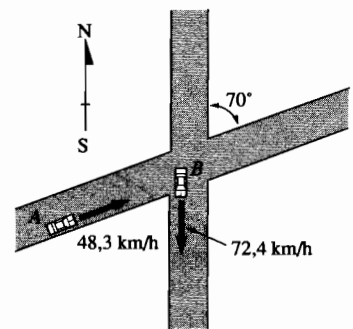
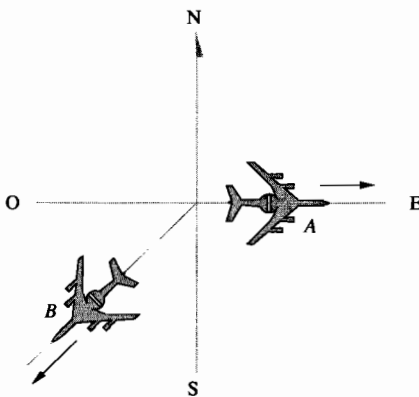


Figura P11.105

**11.107** Dois aviões *A* e *B* estão voando a uma mesma altitude; o avião *A* está voando para o leste a uma velocidade constante de 900 km/h, enquanto *B* está voando para sudoeste a uma velocidade constante de 600 km/h. Determinar a mudança de posição de *B* relativamente a *A*, que ocorre durante um intervalo de 2 min.

**11.108** O automóvel *A* passa pelo cruzamento 4s após o automóvel *B* ter passado pelo mesmo cruzamento. Ambos os veículos trafegam com velocidades constantes. Determinar (a) a velocidade de *B* em relação a *A* (b) o deslocamento de *B* em relação a *A*, durante um intervalo de 3s e (c) a distância entre os carros 2s após *A* ter passado pelo cruzamento.



Figuras P11.107 e P11.108

**11.109** O pino *P* move-se uniformemente com velocidade de 90 mm/s, no sentido anti-horário, numa fenda circular feita num bloco deslizante *A*. O bloco se move para baixo com velocidade constante de 60 mm/s. Determinar a velocidade de *P* quando (a)  $\theta = 30^\circ$  e (b)  $\theta = 120^\circ$ .

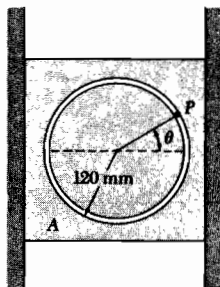
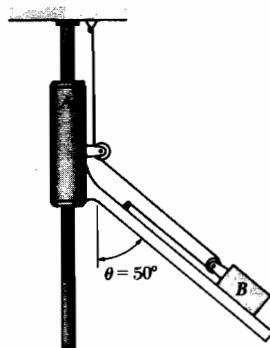
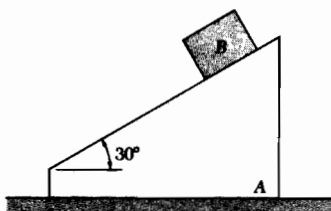


Figura P11.109

**11.110** No instante  $t = 0$ , a cunha  $A$  põe-se em movimento para a direita, com aceleração constante de  $100 \text{ mm/s}^2$  e o bloco  $B$ , por sua vez, põe-se em movimento ao longo da cunha, indo para a esquerda com uma aceleração constante de  $150 \text{ mm/s}^2$  relativamente à cunha. Determine (a) a aceleração do bloco  $B$  e (b) sua velocidade no instante  $t = 4 \text{ s}$ .

**11.111** Num dado instante, a peça  $A$  tem velocidade de  $16 \text{ mm/s}$  e uma aceleração de  $24 \text{ mm/s}$ , ambas para baixo. Determinar (a) a velocidade do bloco  $B$  e (b) sua aceleração, no mesmo instante.



Figuras P11.110 e P11.111

**11.112** Resolva o problema anterior supondo  $\theta = 30^\circ$ .

**11.113** Esguicha-se água de  $A$  com velocidade inicial de  $12 \text{ m/s}$ , atingindo-se uma série de pás em  $B$ . Sabendo-se que as pás se movem para baixo com velocidade constante de  $1,5 \text{ m/s}$ , determine a velocidade e a aceleração da água em relação à pás em  $B$ .

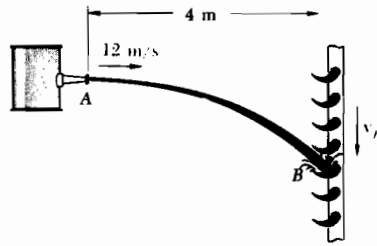


Figura P11.113

**11.114** Um canhão antiaéreo dispara uma granada no instante em que um avião passa sobre ele a uma altitude de 1829 m. A velocidade inicial da granada é 457 m/s. O avião voa horizontalmente a 724 km/h. Determinar (a) o ângulo de tiro necessário para atingir o avião e (b) a velocidade e aceleração da granada relativas ao avião, no momento do impacto.

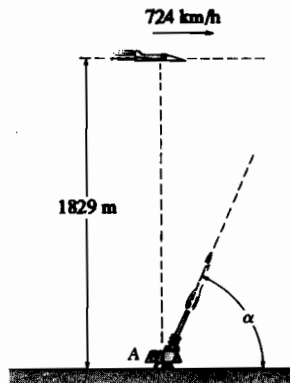


Figura P11.114

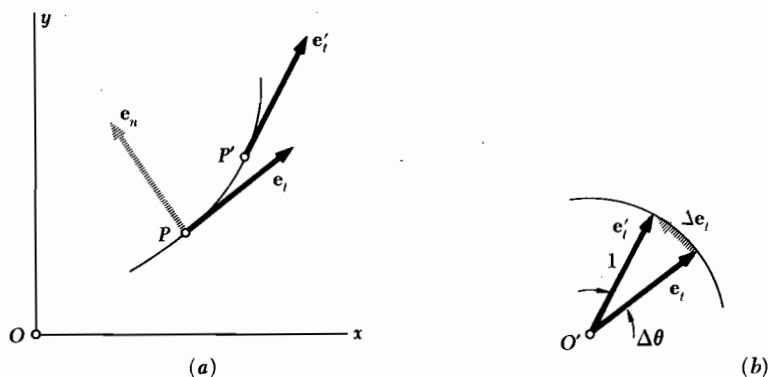
**11.115** Observado de um navio que se move para o leste a 8 km/h, o vento parece soprar do sul. Depois de o navio ter mudado seu curso, movendo-se para o norte também a 8 km/h, o vento parece soprar do sudoeste. Determinar a magnitude e a direção da verdadeira velocidade do vento firme, considerando que não houve alteração dessa velocidade durante todo o tempo de observação.

**11.116** Um barco a motor, manobrando numa corrente de maré, mantém uma velocidade constante de 2 m/s relativamente à água. Quando o barco aponta para o leste, observa-se da praia que seu movimento se dá para o sul e quando aponta para o nordeste, observa-se que ele se move para o oeste. Determinar a velocidade da corrente.

**11.117** Durante uma tempestade, as trajetórias das gotas de chuva parecem formar um ângulo de  $30^\circ$  com a vertical e estar voltadas para a esquerda, quando observadas da janela de um trem que se move a 16,1 km/h. Depois de o trem ter aumentado sua velocidade para 24,1 km/h, o ângulo entre a vertical e as trajetórias das gotas parecem ser de  $45^\circ$ . Qual deve ser a velocidade (módulo e direção) das gotas, em relação ao solo?

**11.118** Aumentou-se a velocidade do trem do problema anterior de modo que o ângulo entre a vertical e as trajetórias dos pingos d'água se torna igual a  $60^\circ$ . Determinar a velocidade do trem para este caso.

**11.13 Componentes Tangencial e Normal** Vimos, na Seção 11.9, que a velocidade de um ponto material é um vetor tangente à sua trajetória, mas que, em geral, a aceleração não é tangente à trajetória. É conveniente, algumas vezes, decompor a aceleração nas suas componentes, dirigidas, respectivamente, segundo a tangente e a normal à trajetória do ponto material.



**Figura 11.21**

**Movimento Plano de um Ponto Material.** Consideraremos, em primeiro lugar, um ponto material que se desloca ao longo de uma curva contida no plano da figura. Seja  $P$  a posição do ponto material num dado instante. Fixemos em  $P$  o vetor  $\mathbf{e}_t$  tangente à trajetória do ponto material, com o sentido do movimento\* (Fig. 11.21a). Seja  $\mathbf{e}'_t$  o vetor unitário correspondente à posição  $P'$  do ponto material, num instante posterior. Traçando-se ambos os vetores com a mesma origem  $O'$ , definimos o vetor  $\Delta \mathbf{e}_t = \mathbf{e}'_t - \mathbf{e}_t$  (Fig. 11.21b). Como  $\mathbf{e}_t$  e  $\mathbf{e}'_t$  possuem comprimentos unitários, suas extremidades ficam sobre uma circunferência de raio unitário. Denominando-se  $\Delta\theta$  o ângulo formado por  $\mathbf{e}_t$  e  $\mathbf{e}'_t$ , encontramos para o módulo de  $\Delta \mathbf{e}_t$  o valor  $2 \operatorname{sen}(\Delta\theta/2)$ . Considerando-se, agora, o vetor  $\Delta \mathbf{e}_t / \Delta\theta$ , observamos que, quando  $\Delta\theta$  tende a zero, este vetor se torna tangente à circunferência unitária da Fig. 11.21b, isto é, perpendicular a  $\mathbf{e}_t$ , e que seu módulo tende à unidade. De fato,

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen}(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta\theta/2)}{\frac{\Delta\theta}{2}}$$

Assim, o vetor, no limite é um vetor unitário normal à trajetória do ponto material e com o sentido de rotação de  $\mathbf{e}_t$ . Denominando-se este vetor  $\mathbf{e}_n$ , temos

$$\mathbf{e}_n = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{e}_t}{\Delta\theta}$$

$$\boxed{\mathbf{e}_n = \frac{d\mathbf{e}_t}{d\theta}} \quad (11.35)$$

Como a velocidade  $\mathbf{v}$  da partícula é tangente à trajetória, podemos exprimi-la como o produto da velocidade escalar  $v$  pelo vetor unitário  $\mathbf{e}_t$ . Temos

$$\mathbf{v} = v \mathbf{e}_t \quad (11.36)$$

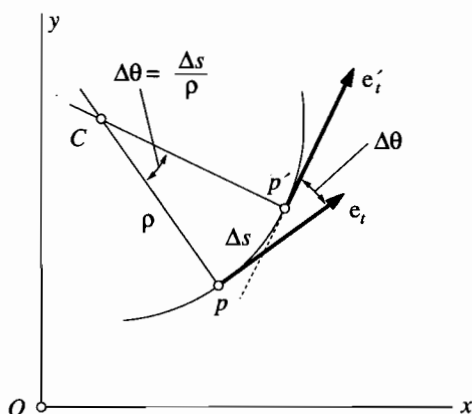
\* Fixemos uma origem  $P_0$  arbitrária sobre a trajetória de  $P$  e um sentido positivo arbitrário para a contagem do valor do arco  $s = P_0P$  sobre a curva. Conforme o movimento de  $P$ , e de acordo com o sentido positivo arbitrário adotado, a *coordenada curvilínea*  $s$ , expressa pelo valor do escalar  $s$ , será positiva ou negativa. Da mesma forma, ainda de acordo com o sentido arbitrário adotado,  $s$  será *crescente* no sentido positivo e *decrecente* no sentido negativo sobre a curva. Fixemos em  $P$ , o vetor  $\mathbf{e}_t$  tangente à trajetória e orientado segundo o sentido crescente do arco  $s$  (Nota do R. T.).

Para obter a aceleração do ponto material, derivamos (11.36) em relação a  $t$ . Aplicando a regra da derivação do produto de um escalar por uma função vetorial (Seção 11.10), escrevemos

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t + v \frac{d\mathbf{e}_t}{dt} \quad (11.37)$$

mas

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_t}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt}$$



**Figura 11.22**

De acordo com (11.16)  $ds/dt = v$  de (11.35)  $d\mathbf{e}_t/d\theta = \mathbf{e}_n$  e do cálculo elementar  $d\theta/ds$  é igual a  $1/\rho$ , onde  $\rho$  é o raio de curvatura da trajetória em  $P$  (Fig. 11.22). Logo

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{v}{\rho} \mathbf{e}_n \quad (11.38)$$

Substituindo-se em (11.37), obtemos

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n \quad (11.39)$$



Assim, as componentes escalares da aceleração são

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad (11.40)$$

As relações obtidas nos dizem que a componente tangencial da aceleração é igual à derivada temporal da velocidade escalar do ponto material, enquanto a componente normal é igual ao quadrado da velocidade escalar dividida pelo raio de curvatura da trajetória em  $P$ . Conforme a velocidade do ponto material aumenta ou diminui,  $a_t$  é positiva ou negativa, e a componente vetorial  $\mathbf{a}_t$  está dirigida no sentido do movimento ou contrária ao mesmo. A componente vetorial  $\mathbf{a}_n$ , por outro lado, está sempre orientada para o centro de curvatura  $C$  da trajetória (Fig. 11.23).

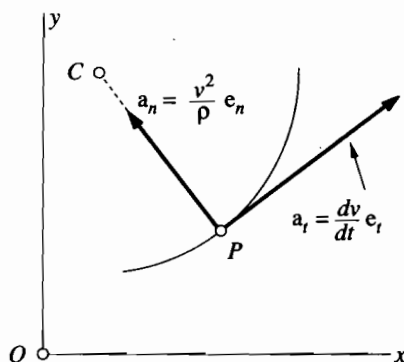


Figura 11.23

Conclui-se, portanto, que a componente tangencial da aceleração é responsável pela mudança da velocidade escalar do ponto material, enquanto sua componente normal reflete a mudança na direção de seu movimento. A aceleração de um ponto material será zero somente se ambas as componentes forem zero. Assim, a aceleração de um ponto material que se desloca com uma velocidade constante ao longo de uma curva nunca será zero, a não ser que o ponto material passe por um ponto de inflexão da curva (onde o raio de curvatura é infinito) ou a curva seja uma linha reta.

O fato de a componente normal da aceleração depender do raio de curvatura da trajetória do ponto material é levado em conta no projeto de estruturas ou mecanismos como asas de avião, linhas férreas e cames. Para evitar variações repentinas na aceleração de partículas do ar que se escoam ao redor da asa de um avião, projetam-se perfis de asas sem qualquer mudança brusca de curvatura. Da mesma forma, devem-se

tomar cuidados nos projetos de curvas de linhas férreas, para evitar súbitas mudanças na aceleração dos vagões (que prejudicariam a carga e trariam desconforto aos passageiros). Uma porção reta do trilho, por exemplo, nunca é seguida diretamente por uma seção circular. Utilizam-se seções especiais de transição para auxiliar na passagem suave de um raio infinito de curvatura da porção reta a um raio finito do trilho circular. Da mesma maneira, no projeto de cames de alta velocidade, evitam-se mudanças abruptas na aceleração usando-se curvas de transição que permitam uma variação contínua da aceleração.

*Movimento de um Ponto Material no Espaço.* As relações (11.39) e (11.40) continuam sendo válidas no caso de um ponto material que se desloca ao longo de uma curva no espaço. Entretanto, como há infinitas retas perpendiculares à tangente em um dado ponto  $P$  da curva é necessário definir com mais precisão a direção do vetor unitário  $\mathbf{e}_n$ .

Vamos considerar, novamente os vetores unitários  $\mathbf{e}_t$  e  $\mathbf{e}'_t$  tangentes à trajetória do ponto material em dois pontos vizinhos  $P$  e  $P'$  (Fig. 11.24a) e o vetor  $\Delta\mathbf{e}_t$  que representa a diferença entre  $\mathbf{e}_t$  e  $\mathbf{e}'_t$  (Fig. 11.24b). Vamos supor um plano passando por  $P$  (Fig. 11.24a), paralelo ao plano definido pelos vetores  $\mathbf{e}_t$  e  $\mathbf{e}'_t$  e que, portanto, contém  $\Delta\mathbf{e}_t$  (Fig. 11.24b). Este plano contém a tangente à curva em  $P$  sendo paralelo à tangente em  $P'$ . Se fizermos  $P'$  tender a  $P$ , obteremos no limite o plano que mais se ajusta à curva e que a contém nas proximidades de  $P$ . Este plano se chama plano osculador em  $P^*$ . Segue-se, desta definição, que o plano osculador contém o vetor unitário  $\mathbf{e}_n$ , já que este vetor representa o limite do vetor  $\Delta\mathbf{e}_t/\Delta\theta$ . A normal definida por  $\mathbf{e}_n$  está assim, contida no plano osculador: é chamada de normal principal em  $P$ . O vetor unitário  $\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n$ , que completa o triedro positivo de vetores  $\mathbf{e}_t$ ,  $\mathbf{e}_n$ ,  $\mathbf{e}_b$  (Fig. 11.24c), define a binormal em  $P$ . A binormal é assim, perpendicular ao plano osculador. Concluímos que, de acordo com o estabelecido em (11.39), a aceleração da partícula em  $P$  pode ser expressa como a soma de duas componentes, uma segundo a tangente e outra segundo a normal principal em  $P$ . A aceleração não possui componentes segundo a binormal.

**11.14 Componentes Radial e Transversal.** Em certos problemas de movimento no plano, a posição do ponto material  $P$  é definida por suas coordenadas polares  $r$  e  $\theta$  (Fig. 11.25a). É, então, conveniente expressar a velocidade e a aceleração do ponto material em componentes paralela e perpendicular à linha  $OP$ ; estas componentes são denominadas componente *radial* e *transversal*, respectivamente.

\* Do latim *osculare*, beijar.

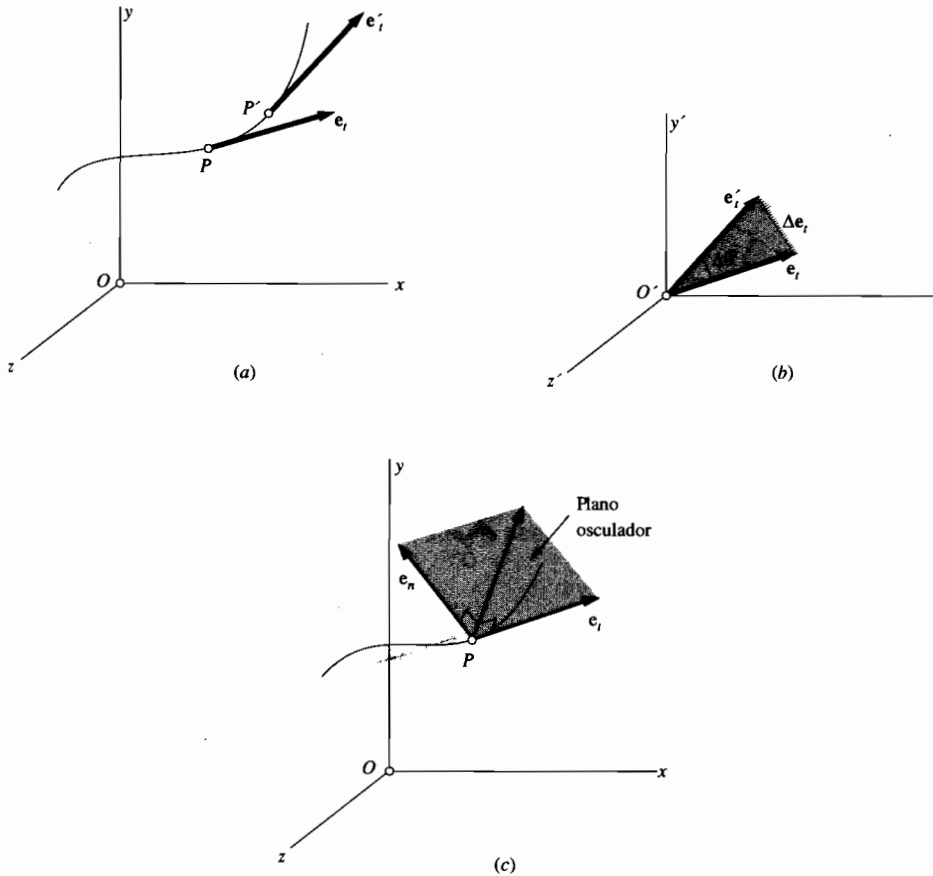


Figura 11.24

Consideremos em  $P$  dois vetores unitários  $\mathbf{e}_r$  e  $\mathbf{e}_\theta$  (Fig. 11.25b). O vetor  $\mathbf{e}_r$  tem direção e sentido de  $OP$  e o vetor  $\mathbf{e}_\theta$  é obtido girando  $\mathbf{e}_r$  de  $90^\circ$  no sentido anti-horário. O vetor unitário  $\mathbf{e}_r$  define a direção radial, isto é, a direção na qual  $P$  se deslocaria se  $r$  aumentasse e  $\theta$  permanecesse constante; o vetor unitário  $\mathbf{e}_\theta$  define a direção transversal, isto é, a direção pela qual  $P$  se deslocaria se  $\theta$  aumentasse e  $r$  permanecesse constante. Se derivamos, como foi feito na Seção 11.13 para determinar a derivada do vetor unitário  $\mathbf{e}_r$ , chegamos às relações.

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = \mathbf{e}_\theta \quad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{e}_r \quad (11.41)$$

onde  $-\mathbf{e}_r$  representa o vetor unitário de sentido oposto ao de  $\mathbf{e}_r$  (Fig. 11.25c).

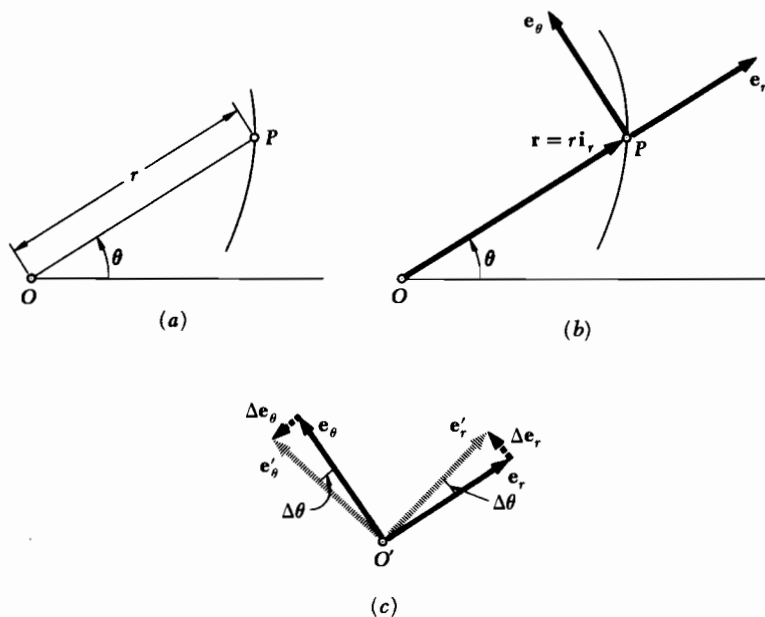


Figura 11.25

Exprimindo-se o vetor de posição  $\mathbf{r}$  do ponto material  $P$  como o produto do escalar  $r$  pelo vetor unitário  $\mathbf{e}_r$  e derivando em relação ao tempo  $t$ , resulta

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \quad (11.42)$$

$$= \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta}$$

Recordando-se a primeira das relações (11.41) e usando-se pontos para indicar as derivadas em relação ao tempo, temos

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$$

(11.43)

Derivando-se, novamente, em relação a  $t$ , escrevemos

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt}$$

ou, como  $d\mathbf{e}_r/dt = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$  e  $d\mathbf{e}_\theta/dt = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta \quad (11.44)$$

As componentes escalares da velocidade e aceleração segundo as direções radial e transversal são, portanto,

$$v_r = \dot{r} \quad v_\theta = r\dot{\theta} \quad (11.45)$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \quad (11.46)$$

É importante notar que  $a_r$  não é igual à derivada em relação ao tempo de  $v_r$  e que  $a_\theta$  não é igual à derivada em relação ao tempo de  $v_\theta$ .

No caso de um ponto material que se desloca ao longo de uma circunferência de centro  $O$ , temos  $r = \text{constante}$ ,  $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ , e as fórmulas (11.43) e (11.44) reduzem-se, respectivamente, a

$$\mathbf{v} = r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad \mathbf{a} = -r\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad (11.47)$$

*Generalização para o Movimento de um Ponto Material no Espaço: Coordenadas Cilíndricas.* A posição de um ponto material  $P$  no espaço é, algumas vezes, definida pelas suas coordenadas cilíndricas  $R$ ,  $\theta$  e  $z$  (Fig. 11.26a). É, então, conveniente utilizar os vetores unitários  $\mathbf{e}_R$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  e  $\mathbf{k}$ , representados na Fig 11.26b. Decompondo-se o vetor-posição  $\mathbf{r}$  do ponto material  $P$  segundo estes vetores unitários, temos

$$\mathbf{r} = R\mathbf{e}_R + z\mathbf{k} \quad (11.48)$$

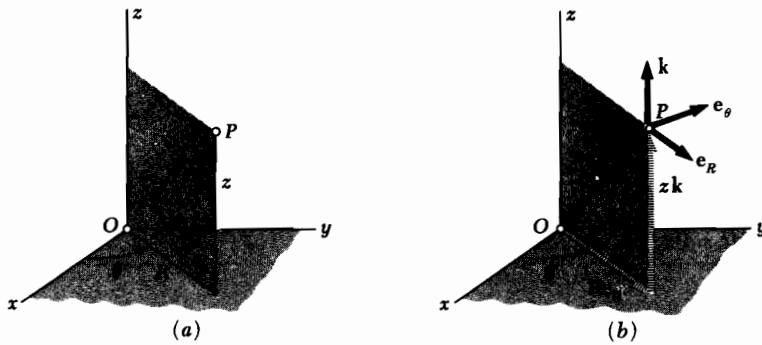


Figura 11.26

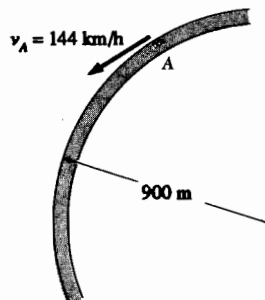
Observando-se que  $\mathbf{e}_R$  e  $\mathbf{e}_\theta$  definem, respectivamente, a direção radial e transversal no plano  $Oxy$  e que o vetor  $\mathbf{k}$ , que define a *direção axial*, é constante em módulo, direção e sentido, facilmente verificam-se as relações

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{R} \mathbf{e}_R + R\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{z} \mathbf{k} \quad (11.49)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2) \mathbf{e}_R + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta}) \mathbf{e}_\theta + \ddot{z} \mathbf{k} \quad (11.50)$$

### Problema Resolvido 11.10

Um trem está se deslocando a  $144 \text{ km/h}$  na seção curva da linha, de raio  $900 \text{ m}$ . Os freios são repentinamente aplicados, causando uma desaceleração constante do trem. Após  $6 \text{ s}$  a velocidade do trem se reduziu a  $96 \text{ km/h}$ . Determinar a aceleração de um vagão imediatamente após os freios terem sido aplicados.



**Componente Tangencial da Aceleração** Em primeiro lugar, expressemos as velocidades em m/s.

$$144 \text{ km/h} = (144 \frac{\text{km}}{\text{h}}) (\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}}) (\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}) = 40 \text{ m/s}$$

$$96 \text{ km/h} = 26,6 \text{ m/s}$$

Já que o trem reduz a marcha de forma constante, temos

$$a_t = a_t \text{ média} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{26,6 \text{ m/s} - 40 \text{ m/s}}{6 \text{ s}} = -2,23 \text{ m/s}^2$$

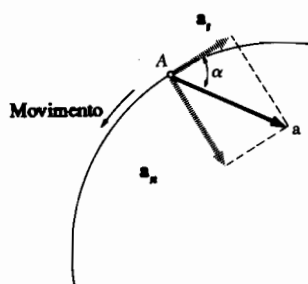
**Componente Normal da Aceleração** Imediatamente após os freios terem sido aplicados, a velocidade é ainda de 40 m/s e temos

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(40 \text{ m/s})^2}{900 \text{ m}} = 1,78 \text{ m/s}^2$$

**Módulo, Direção e Sentido da Aceleração** O módulo, direção e sentido da resultante e das componentes  $a_n$   $a_t$  são dados por (Ver figuras).

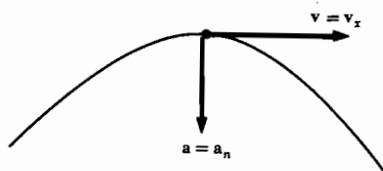
$$\text{tg } \alpha = \frac{a_n}{a_t} = \frac{1,78 \text{ m/s}^2}{2,23 \text{ m/s}^2} \quad \alpha = 38,6^\circ \Leftarrow$$

$$a = \frac{a_n}{\text{sen } \alpha} = \frac{1,78 \text{ m/s}^2}{\text{sen } 38,6^\circ} \quad a = 2,85 \text{ m/s}^2 \Leftarrow$$



### Problema Resolvido 11.11

Determinar o raio de curvatura mínima da trajetória descrita pelo projétil considerado no Problema Resolvido 11.7.



**Solução** Como  $a_n = v^2/\rho$ , temos  $\rho = v^2/a_n$ . O raio diminui quando  $v$  diminui ou quando  $a_n$  aumenta. A velocidade  $v$  é mínima no topo da trajetória, pois  $v_y = 0$  neste ponto;  $a_n$  é máximo neste mesmo ponto, já que a direção vertical coincide com a direção normal. Portanto, o raio mínimo de curvatura ocorre no topo da trajetória. Neste ponto, temos

$$v = v_x = 155,9 \text{ m/s}$$

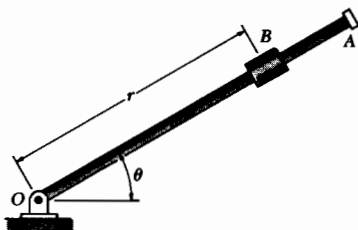
$$a_n = a = 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(155,9 \text{ m/s})^2}{9,81 \text{ m/s}^2} \quad \rho = 2,48 \text{ km} \Leftarrow$$



# **Problema Resolvido 11.12**

O braço OA de 0,9m de comprimento gira ao redor de O e seu movimento está definido pela relação  $\theta = 0,15t^2$ , onde  $\theta$  está expresso em radianos e  $t$  em segundos. O cursor B desliza ao longo do braço, sendo o seu deslocamento em relação a O dado por  $r = 0,9 - 0,12t^2$ , onde  $r$  é expresso em metros e  $t$  em segundos. Determinar a velocidade e aceleração total do cursor B após o braço OA ter girado  $30^\circ$ .



**Solução** Primeiramente achamos  $t$  quando  $\theta = 30^\circ$ . Substituindo  $\theta$ , obtemos

$$\theta = 0,15t^2$$

$$0,524 = 0,15t^2$$

$$t = 1,87 \text{ s}$$

Agora, substituindo-se  $t = 1,87 \text{ s}$  nas expressões para  $r$ ,  $\theta$  e suas primeiras e segundas derivadas, temos

$$r = 0,9 - 0,12t^2 = 0,481 \text{ m}$$

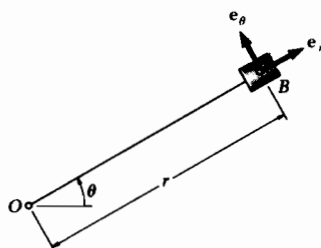
$$\theta = 0,15t^2 = 0,524 \text{ rad}$$

$$\dot{r} = 0,24t = -0,449 \text{ m/s}$$

$$\dot{\theta} = 0,30t = 0,561 \text{ rad/s}$$

$$\ddot{r} = -0,24 = -0,240 \text{ m/s}^2$$

$$\ddot{\theta} = 0,30 = 0,300 \text{ rad/s}^2$$



$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta$$

**a. Velocidade de B.** Usando as Eqs. (11.45), obtemos os valores de  $\mathbf{v}_r$  e  $\mathbf{v}_\theta$  quando  $t = 1,87\text{s}$

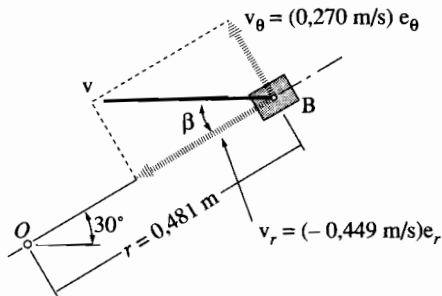
$$v_r = \dot{r} = -0,449 \text{ m/s}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = 0,481(0,561) = 0,270 \text{ m/s}$$

Do triângulo retângulo ilustrado na figura, obtemos o módulo, direção e sentido da velocidade

$$v = 0,524 \text{ m/s}$$

$$\beta = 31,0^\circ \leftarrow$$



**b. Aceleração de B.** Usando as Eqs. (11.46), obtemos

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

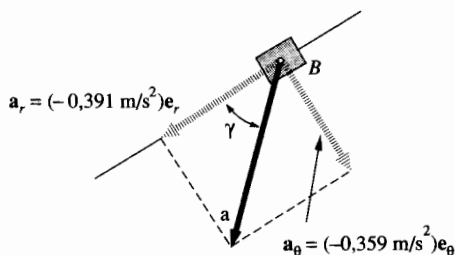
$$= -0,24 - 0,481(0,561)^2 = -0,391 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$= 0,481(0,300) + 2(-0,449)(0,561) = -0,359 \text{ m/s}^2$$

$$a = 0,531 \text{ m/s}^2$$

$$\gamma = 42,6^\circ \leftarrow$$

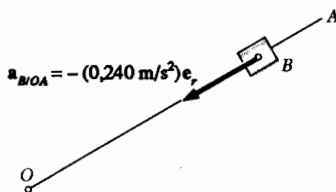


**c. Aceleração de B em relação ao braço OA** Note-se que o movimento do cursor em relação ao braço OA é retilíneo, sendo definido pela coordenada  $r$ . Logo,

$$a_{B/OA} = \ddot{r} = -0,240 \text{ m/s}^2$$

$$a_{B/OA} = 0,240 \text{ m/s}^2, \text{ dirigido para } O$$

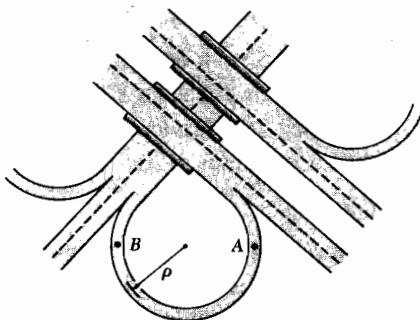
←



## Problemas

**OK 11.119** Qual deverá ser o valor mínimo do raio de uma curva, se a componente normal da aceleração de um carro a 96,5 km/h não puder exceder  $0,762 \text{ m/s}^2$ ?

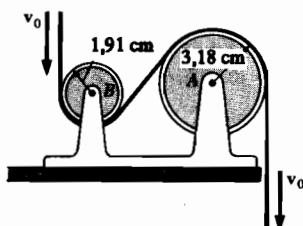
**11.120** Um carro a uma velocidade constante  $v_0$  encontra-se numa rampa circular de um trevo, movendo-se no sentido de A para B. O odômetro do carro indica uma distância de 0,6 km entre o ponto A e o ponto B. Determine  $v_0$  para que a componente normal da aceleração seja  $0,08g$ .



**Figura P11.120**

**11.121** Deseja-se que a componente normal da aceleração de um avião em teste seja  $6g$ . Determinar o raio da trajetória circular horizontal que o avião deve descrever a uma velocidade de  $1800 \text{ km/h}$ .

**11.122** Uma fita de computador move-se sobre dois tambores, a uma velocidade  $v_0$ . A componente normal da aceleração da porção da fita em contato com o tambor  $B$  é  $122 \text{ m/s}^2$ . Determinar (a) a velocidade  $v_0$  e (b) a componente normal da aceleração da porção da fita em contato com o tambor  $A$ .



**Figura P11.122**

**11.123** Um carro a  $90 \text{ km/h}$  encontra-se numa curva de  $400 \text{ m}$  de raio. Num dado instante, o motorista freia o carro, imprimindo-lhe uma desaceleração constante de  $1,2 \text{ m/s}^2$ . Determinar a aceleração total do veículo (a) imediatamente após ter sido aplicado o freio do carro e (b)  $5 \text{ s}$  mais tarde.

**11.124** Um ônibus parte do repouso, descrevendo uma circunferência de  $250 \text{ m}$  de raio. Sua aceleração  $a_t$  é igual a  $0,6 \text{ m/s}^2$ . Determinar o tempo necessário para que o módulo da aceleração total do ônibus atinja  $0,75 \text{ m/s}^2$ . Determinar também a distância percorrida nesse tempo.

**11.125** Um motorista desacelera uniformemente seu carro, fazendo a velocidade do veículo decrescer de  $72,4 \text{ km/h}$  para  $48,3 \text{ km/h}$ , numa distância de  $229 \text{ m}$ , ao longo de uma curva de  $457 \text{ m}$  de raio. Determine o módulo da aceleração total do carro no fim dos primeiros  $152 \text{ m}$  da curva.

**11.126** Assim que um trem a  $96,5 \text{ km/h}$  entra numa curva de  $1219 \text{ m}$  de raio, o maquinista freia a composição de modo a produzir uma aceleração total de  $0,762 \text{ m/s}^2$ . Depois de  $10 \text{ s}$ , os freios passam a agir com maior eficiência, produzindo-se novamente uma aceleração total de  $0,762 \text{ m/s}^2$ . Se se mantiver esta última ação dos freios, qual deverá ser o tempo total para a imobilização do trem?

**11.127** Enquanto o automóvel  $A$  trafega pelo trecho reto da estrada, o automóvel  $B$  percorre a faixa curva cujo raio é  $80 \text{ m}$ . A velocidade de  $A$  está aumentando à razão de  $2 \text{ m/s}^2$  e a velocidade de  $B$  está decrescendo à razão de  $1,2 \text{ m/s}^2$ . Para as posições mostradas na figura, determinar (a) a velocidade e (b) a aceleração de  $A$  relativamente a  $B$ .

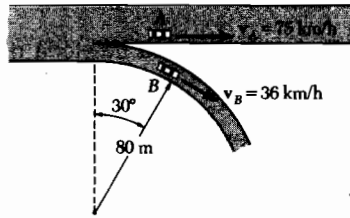


Figura P11.127

**11.128** Resolva o problema anterior, supondo que a velocidade de  $B$  é 18 km/h e que sua desaceleração é de  $1,2 \text{ m/s}^2$ .

**11.129** A velocidade inicial do jato d'água mostrado na figura é 7,62 m/s. Determinar o raio de curvatura do jato (a) na saída  $A$  e (b) no seu ponto de máxima altura.

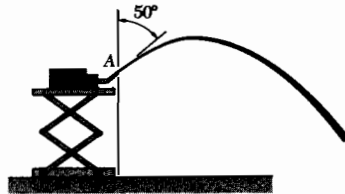


Figura P11.129

**11.130** Para cada um dos dois ângulos de tiro obtidos no Problema Resolvido 11.8, determinar o raio de curvatura da trajetória do projétil, justamente na saída da arma.

**11.131** Determine o raio de curvatura da trajetória do projétil considerado no Problema Resolvido 11.7 (a) no ponto em que o projétil deixa a arma e (b) no ponto de máxima altura.

**11.132** Medidas feitas sobre uma fotografia revelaram que o jato d'água mostrado na figura tinha um raio de curvatura de 25 m, no ponto  $A$ . Determinar (a) a velocidade inicial  $v_A$  do jato e (b) o raio de curvatura no ponto de máxima altura  $B$ .

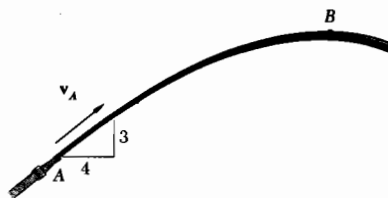
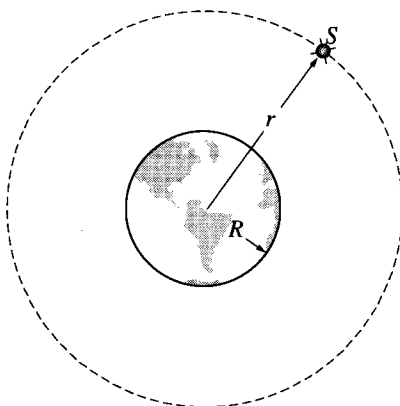


Figura P11.132

**11.133** Determine o raio de curvatura da hélice considerada no Problema 11.85.

**11.134** Determine o raio de curvatura da trajetória do ponto material considerado no Problema 11.86, quando (a)  $t = 0$  e (b)  $t = 2$  s.

**11.135** Um satélite irá se manter em órbita circular em torno da Terra, desde que a componente normal de sua aceleração seja igual a  $g(R/r)^2$ , onde  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ,  $R$  = raio da Terra =  $6,37 \times 10^3 \text{ km}$  e  $r$  = distância entre o satélite e o centro da Terra. Determine a altitude de um satélite para que ele possa orbitar a uma velocidade de  $2,65 \times 10^4 \text{ km/h}$ .



**Figura P11.135**

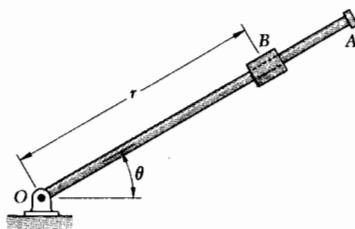
**11.136** Determinar a velocidade de um ônibus espacial em órbita circular a 225 km da superfície da Terra (ver informações no problema anterior).

**11.137** Mostrar que a velocidade de um satélite em órbita circular ao redor da Terra é inversamente proporcional à raiz quadrada da distância do satélite ao centro da Terra. Com as informações dadas no Problema 11.135, determinar o tempo mínimo necessário para o satélite completar uma volta ao redor do planeta.

**11.138** Supondo-se que a órbita da Lua ao redor da Terra seja uma circunferência de raio  $3,84 \times 10^5 \text{ km}$ , determinar a velocidade da Lua em relação à Terra (ver informações contidas no Problema 11.135).

**11.139** O movimento de rotação da haste  $OA$ , em torno de  $O$ , é definido pela relação  $\theta = t^3 - 4t$ , onde  $\theta$  é dado em radianos e  $t$  em segundos. O cursor  $B$  desliza por  $OA$  de modo que sua distância a  $O$  é  $r = 25t^3 - 50t^2$ , onde  $r$  é expresso em milímetros e  $t$  em segundos. Determine para o cursor  $B$  (a) sua velocidade, (b) sua aceleração total e (c) sua aceleração relativa à haste, no instante  $t = 1$  s.

- 11.140** O movimento de rotação da barra  $OA$ , em torno de  $O$ , é definido por  $\theta = \frac{1}{2}\pi(4t - 3t^2)$ . O cursor  $B$  desliza pela barra de modo que sua distância ao ponto  $O$  é dada por  $r = 1,25t^2 - 0,9t^3$ . Nas equações acima  $\theta$  é dado em radianos,  $r$  em metros e  $t$  em segundos. Determinar para  $B$  (a) sua velocidade, (b) sua aceleração total e (c) sua aceleração relativa a  $OA$ , no instante  $t = 1$  s.



Figuras P11.139 e P11.140

- 11.141** O movimento plano de um ponto material é definido por  $r = 2b \cos \omega t$ ,  $\theta = \omega t$ , onde  $b$  e  $\omega$  são constantes positivas. Determine (a) a velocidade e a aceleração do ponto e (b) o raio de curvatura de sua trajetória. Que conclusão você pode tirar sobre a trajetória do ponto material?

- 11.142** A trajetória de um ponto  $P$  é uma espiral de Arquimedes. As relações  $r = 10t$  e  $\theta = 2\pi t$  definem o movimento de  $P$ , onde  $r$  é expresso em metros,  $t$  em segundos e  $\theta$  em radianos. Determine a velocidade e a aceleração do ponto, nos instantes (a)  $t = 0$  e (b)  $t = 0,25$  s.

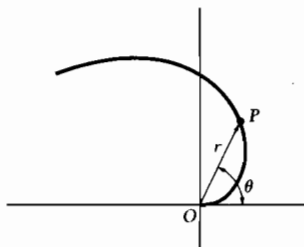


Figura P11.142

- 11.143** O movimento de um ponto  $P$ , ao longo da elipse mostrada na figura, é dado por  $r = 35/(1 - 0,75 \cos \pi t)$  e  $\theta = \pi t$ , onde  $r$  é dado em milímetros,  $\theta$  em radianos e  $t$  em segundos. Determine a velocidade e a aceleração do ponto  $P$ , nos instantes (a)  $t = 0$  e (b)  $t = 0,5$  s.

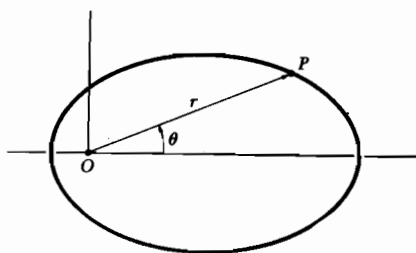
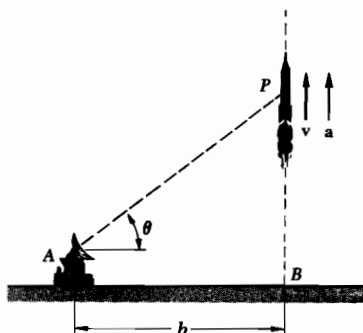


Figura P11.143

11.144 Resolva o problema anterior, para (a)  $t = 1$  s e (b)  $t = 1,5$  s.

11.145 Um foguete lançado de uma plataforma em B segue uma trajetória retilínea vertical. Seu voo é acompanhado pelo radar em A. Determine a velocidade do foguete em termos de  $b$ ,  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ .



Figuras P11.145 e P11.149

11.146 A trajetória do avião B é uma reta horizontal que passa diretamente sobre a estação de rastreamento A. Sabendo-se que a velocidade do avião é  $v_0$ , determine  $dh/dt$  em termos de  $v_0$ ,  $h$  e  $\theta$ .



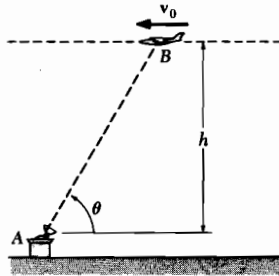


Figura P11.146

**11.147** Determine a aceleração do foguete considerado no Problema 11.145, em termos de  $b$ ,  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$  e  $\ddot{\theta}$ .

**11.148** Determinar, no Problema 11.146,  $d\theta^2/dt^2$  em termos de  $v_0$ ,  $h$  e  $\theta$ .

**11.149** O foguete de prova lançado verticalmente da plataforma  $B$  atinge o ponto  $P$  correspondente a um ângulo de elevação  $\theta = 42,0^\circ$ . Meio segundo depois,  $\theta = 43,2^\circ$ . Calcular, aproximadamente, a velocidade do foguete durante aquele intervalo de meio segundo. A distância  $b$  vale 3 km.

**11.150** Um avião passa sobre uma estação de radar  $A$  e continua voando para o leste. Quando ele está em  $P$ , a distância  $r$  e o ângulo de elevação  $\theta$  valem, respectivamente,  $r = 3414$ , m e  $\theta = 26,5^\circ$ . Dois segundos mais tarde, o radar "vê" o avião em  $r = 3749$  m e  $\theta = 23,3^\circ$ . Determine aproximadamente a velocidade do avião e seu ângulo de mergulho  $\alpha$  durante aquele intervalo de dois segundos.

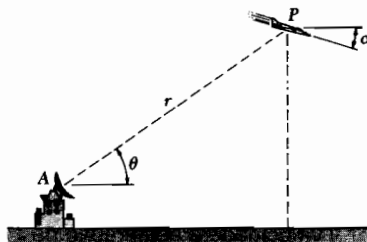
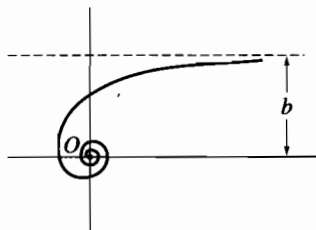


Figura P11.150

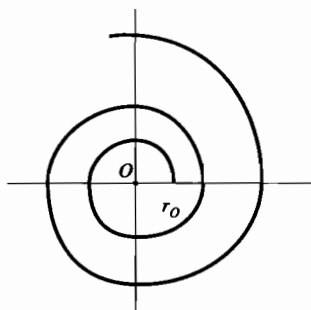
**11.151 e 11.152** Um ponto material percorre a espiral mostrada na figura; determine o módulo da velocidade do ponto em termos de  $b$ ,  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ .



Espiral hiperbólica  $r\theta = b$

**Figuras P11.151 e P11.153**

**11.153 e 11.154** Um ponto descreve a espiral mostrada na figura. Sabendo-se que  $\dot{\theta} = \omega = \text{constante}$ , determinar o módulo da aceleração do ponto em termos de  $b$ ,  $\theta$  e  $\omega$ .

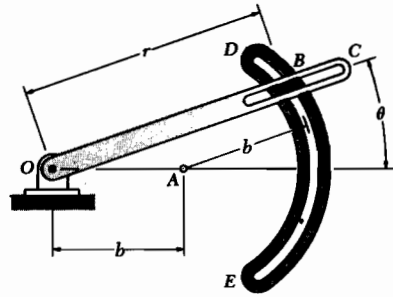
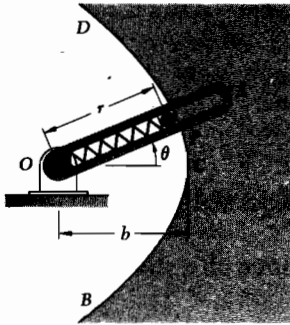


Espiral logarítmica  $r = r_0 e^{b\theta}$

**Figuras P11.152 e P11.154**

**11.155** Conforme a barra  $OA$  gira, o pino  $P$  descreve a parábola  $BCD$  de equação  $r = 2b/(1 + \cos \theta)$ , com  $\theta = kt$ . Determinar a velocidade e aceleração de  $P$  quando (a)  $\theta = 0$  e (b)  $\theta = 90^\circ$ .

**11.156** O pino  $B$  pode deslizar livremente pela abertura circular  $DE$  e também pela abertura feita na barra  $OC$ . A barra  $OC$  gira uniformemente a uma razão  $\dot{\theta}$ . (a) Mostre que a aceleração de  $B$  tem módulo constante e (b) determine sua direção e sentido.



Figuras P11.155 e P11.156

**11.157** O movimento de um ponto material sobre a superfície lateral de um cilindro circular reto é definido por  $R = A$ ,  $\theta = 2\pi t$  e  $z = B \sin 2\pi n t$ , onde  $A$  e  $B$  são constantes positivos e  $n$  é um inteiro. Determine os módulos da velocidade e da aceleração do ponto, em função de  $t$ .

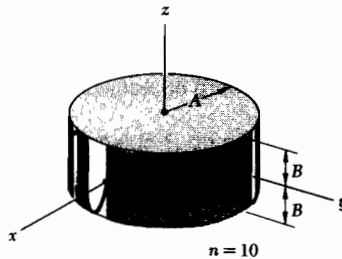


Fig. P11.157

**11.158** Para o caso de  $n = 1$ , no problema anterior, (a) mostre que a trajetória do ponto é plana e (b) determine seus raios de curvatura máximo e mínimo.

**11.159** O movimento de um ponto material sobre a superfície de um cone circular reto é definido por  $R = ht \tan \beta$ ,  $\theta = 2\pi t$  e  $z = ht$ , onde  $\beta$  é o ângulo do vértice do cone e  $h$  é o avanço em altura que o ponto sofre em cada volta completa. Determine os módulos da velocidade e da aceleração do ponto, em função do tempo  $t$ .

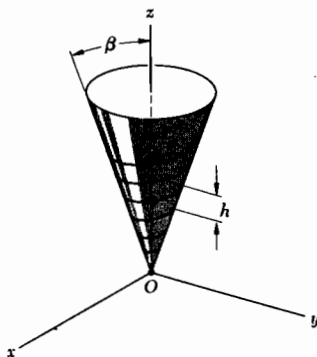


Figura P11.159

**11.160** O movimento tridimensional de um ponto é definido por  $R = A(1 - e^{-t})$ ,  $\theta = 2\pi t$  e  $z = B(1 - e^{-t})$ . Determine a velocidade e a aceleração, em módulo, para (a)  $t = 0$  e (b)  $t = \infty$ .

**11.161** O movimento tridimensional de um ponto é definido por  $R = A$ ,  $\theta = 2\pi t$  e  $z = A \sin^2 2\pi t$ . Determinar os módulos da velocidade e da aceleração, em função de  $t$ .

**11.162** O movimento tridimensional de um ponto é definido por  $R = 2k \cos t$ ,  $\theta = t$  e  $z = pt$ . Determine (a) a trajetória do ponto, (b) os módulos da velocidade e da aceleração em função do tempo e (c) o raio da curvatura da trajetória para qualquer instante  $t$ .

**\*11.163** Para a hélice considerada no Problema 11.85, determine o ângulo que o plano osculador forma com o eixo  $Oy$ .

**\*11.164** Determine a direção e o sentido da binormal da trajetória descrita pelo ponto material considerado no Problema 11.86, para (a)  $t = 0$  e (b)  $t = 2$  s.

## Recapitulação e Sumário

### Coordenada de Posição de um Ponto em Movimento Retilíneo

Na primeira metade do capítulo, analisamos o *movimento retilíneo de um ponto material*, isto é, o movimento de um ponto ao longo de uma reta. Para definir a posição  $P$  do ponto na reta, escolhe-se uma origem fixa e um sentido positivo (Fig. 11.27). A distância  $x$  de  $O$  a  $P$ , com o sinal apropriado, define completamente a posição do ponto e é chamada de *coordenada de posição do ponto* [Seção 11.2].

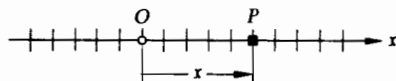


Figura 11.27

## Velocidade e Aceleração no Movimento Retilíneo

A *velocidade*  $v$  do ponto é definida como a derivada temporal da coordenada de posição,

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (11.1)$$

e a *aceleração*  $a$  é definida como a derivada temporal de  $v$ ,

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (11.2)$$

ou

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (11.3)$$

Observamos também que a aceleração  $a$  pode ser expressa como

$$a = v \frac{dv}{dx} \quad (11.4)$$

Notamos que a velocidade  $v$  e a aceleração  $a$  são representadas por números positivos ou negativos. Um valor positivo para  $v$  indica um movimento no sentido positivo e um valor negativo indica movimento no sentido inverso. Por outro lado, um valor positivo de  $a$  pode indicar que o ponto está sendo realmente acelerado (movendo-se cada vez mais depressa) no sentido positivo ou que está sendo desacelerado (movendo-se cada vez mais devagar) no sentido negativo. Um valor negativo para  $a$  tem uma interpretação análoga [Problema Resolvido 11.1].

## Determinação da Velocidade e Aceleração por Integração

Em muitos problemas, as condições de movimento de um ponto são definidas pelo tipo de aceleração que este possui e pelas condições iniciais [Seção 11.3]. A velocidade e a posição do ponto podem, então, ser obtidas por integração de duas das equações (11.1) a (11.4). A escolha adequada das equações depende do tipo de aceleração envolvida [Problemas Resolvidos 11.2 e 11.3].

## Movimento Retilíneo Uniforme e Uniformemente Acelerado

Dois tipos de movimentos são freqüentemente encontrados: o *movimento retilíneo uniforme* [Seção 11.4], no qual a velocidade é constante e o *movimento retilíneo uniformemente acelerado*, no qual a aceleração é constante, valendo as equações

$$x = x_0 + vt \quad (11.5)$$

$$v = v_0 + at \quad (11.6)$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (11.7)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad (11.8)$$

## Movimento Relativo

Quando dois pontos  $A$  e  $B$  se movem ao longo de uma reta, podemos considerar o *movimento de  $B$  em relação a  $A$*  [Seção 11.6].

Denotando-se por  $x_{B/A}$  a *coordenada de posição de  $B$  em relação a  $A$*  (Fig. 11.28), tem-se

$$x_B = x_A + x_{B/A} \quad (11.9)$$

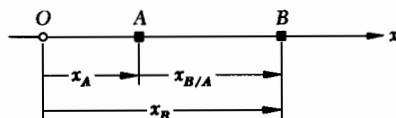


Figura 11.28

Por derivações sucessivas da Eq. (11.9), em relação ao tempo, obtemos

$$v_B = v_A + v_{B/A} \quad (11.10)$$

$$a_B = a_A + a_{B/A} \quad (11.11)$$

onde  $v_{B/A}$  e  $a_{B/A}$  representam, respectivamente, a *velocidade* e a *aceleração* de  $B$  *relativamente a A*.

## Blocos Ligados por Fios Inextensíveis

Quando vários blocos são *ligados por fios inextensíveis* é possível estabelecer para as suas coordenadas de posição *uma relação linear*. Relações semelhantes podem, então, ser estabelecidas para as suas velocidades e acelerações [Problema Resolvido 11.5].

## Soluções Gráficas

Algumas vezes, é conveniente utilizar um *método gráfico* para resolver um problema de movimento retilíneo [Seções 11.7 e 11.8]. O método gráfico mais utilizado envolve as curvas  $x-t$ ,  $v-t$  e  $a-t$  [Seções 11.7; Problema Resolvido 11.6]. Mostrou-se que, para cada instante  $t$ ,

$v$  = coeficiente angular da curva  $x-t$

$a$  = coeficiente angular da curva  $v-t$

assim como, para um dado intervalo de tempo entre  $t_1$  e  $t_2$ ,

$v_2 - v_1$  = área sob a curva  $a-t$

$x_2 - x_1$  = área sob a curva  $v-t$

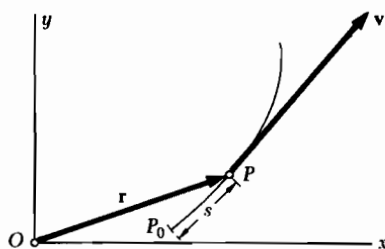


Figura 11.29

## Vetor de Posição e Velocidade no Movimento Curvilíneo

Na segunda metade do capítulo, analisamos o *movimento curvilíneo de um ponto*, isto é, o movimento de um ponto ao longo de uma trajetória curvilínea. A posição  $P$  do ponto, num dado instante [Seção 11.9], fica determinada pelo *vetor de posição*  $\mathbf{r}$ , ligando a origem  $O$  ao ponto  $P$  (Fig. 11.29). A *velocidade*  $\mathbf{v}$  do ponto é definida pela relação

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (11.15)$$

sendo, portanto, um *vetor tangente à trajetória*, de módulo  $v$  igual à derivada temporal do comprimento do arco  $s$  descrito pelo ponto:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (11.16)$$

## Aceleração no Movimento Curvilíneo

A *aceleração*  $\mathbf{a}$  do ponto é o vetor definido por

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (11.18)$$

Deve-se notar que, em geral, *a aceleração não é tangente à trajetória do ponto*.

## Derivada de uma Função Vetorial

Antes de estudarmos as componentes da velocidade e da aceleração, recapitulamos a definição formal de *derivada de uma função vetorial* e estabelecemos algumas regras decorrentes das propriedades da derivação de somas e produtos de vetores. Mostramos, então, que a derivada temporal de um vetor calculada num referencial fixo coincide com a derivada calculada num referencial em translação [Seção 11.10].

## Componentes Cartesianas da Velocidade e da Aceleração

Denotando por  $x$ ,  $y$  e  $z$  as coordenadas cartesianas do ponto  $P$ , verificamos que as *componentes cartesianas da velocidade e da aceleração* de  $P$  são iguais, respectivamente, às derivadas temporais de primeira e segunda ordem das coordenadas da posição:



$$v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z} \quad (11.29)$$

$$a_x = \ddot{x} \quad a_y = \ddot{y} \quad a_z = \ddot{z} \quad (11.30)$$

## Componentes do Movimento

Quando a componente  $a_x$  da aceleração depende de  $t$ ,  $x$  e/ou  $v_x$ , e quando, analogamente,  $a_y$  depende de  $t$ ,  $y$  e/ou  $v_y$ , e  $a_z$ , de  $t$ ,  $z$  e/ou  $v_z$ , as Eqs. (11.30) podem ser integradas independentemente. Neste caso, a análise de um dado movimento curvilíneo é equivalente à análise de três movimentos retilíneos [Seção 11.11]. Este procedimento é muito útil no estudo do movimento de projéteis [Problemas Resolvidos 11.7 e 11.8].

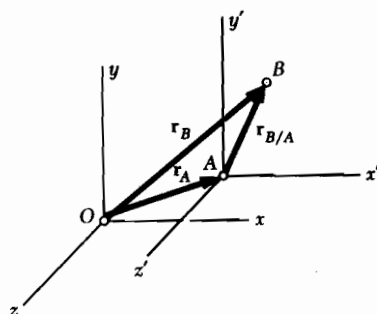


Figura 11.30

## Movimento Relativo

Para dois pontos  $A$  e  $B$  que se movem no espaço (Fig. 11.30), consideramos o movimento de  $B$  em relação a  $A$ , ou mais precisamente, em relação a um sistema com origem  $A$  e se movendo em translação com  $A$  [Seção 11.12]. Denotando por  $\mathbf{r}_{B/A}$  o vetor de posição de  $B$  relativamente a  $A$  (Fig. 11.30), temos

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \quad (11.31)$$

Denotando por  $\mathbf{v}_{B/A}$  e  $\mathbf{a}_{B/A}$  a velocidade e a aceleração de  $B$  em relação a  $A$ , respectivamente, mostramos também que

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \quad (11.33)$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \quad (11.34)$$

## Componentes Tangencial e Normal

Nem sempre é desejável expressar a velocidade e a aceleração de um ponto  $P$  em termos de suas componentes cartesianas. Para um ponto  $P$  que se move num plano, podemos considerar associados a ele dois vetores unitários  $\mathbf{e}_t$ , tangente à trajetória, e  $\mathbf{e}_n$  normal a esta e apontando para o centro de curvatura [Seção 11.13].

Expressamos, então, a velocidade e a aceleração em termos de suas componentes tangencial e normal.

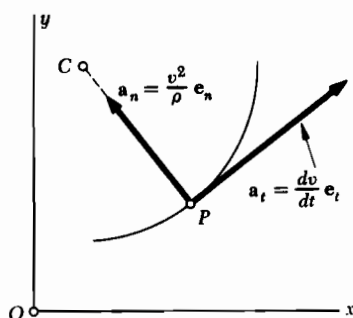


Figura 11.31

Escrevemos, portanto,

$$\mathbf{v} = v \mathbf{e}_t \quad (11.36)$$

e

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n \quad (11.39)$$

onde  $v$  é a velocidade escalar do ponto  $P$  e  $\rho$ , o raio de curvatura de sua trajetória [Problemas Resolvidos 11.10 e 11.11]. Notemos que a velocidade é sempre tangente à trajetória, isto é, tem apenas componentes tangencial, enquanto que a aceleração possui uma componente tangencial e outra normal voltada para o centro de curvatura da trajetória (Fig. 11.31).

## Movimento ao Longo de uma Curva no Espaço

Para um ponto  $P$  que descreve uma curva no espaço definimos o *plano osculador*.

Este plano contém os vetores unitários  $\mathbf{e}_t$  e  $\mathbf{e}_n$ , que definem, respectivamente, a tangente e a normal principal à curva. O vetor unitário  $\mathbf{e}_b$  perpendicular ao plano osculador define a *binormal*.

## Componentes Radial e Transversal

Quando se define a posição de um ponto  $P$  em movimento plano, em termos das coordenadas polares  $r$  e  $\theta$ , torna-se conveniente usar as *componentes radial e transversal*, orientadas, respectivamente, ao longo do vetor de posição  $\mathbf{r}$  e na direção obtida pela rotação de  $90^\circ$ , anti-horária, do vetor de posição [Seção 11.14]. Associamos a  $P$  os vetores unitários  $\mathbf{e}_r$  e  $\mathbf{e}_\theta$  orientados nas direções radial e transversal (Fig. 11.32).

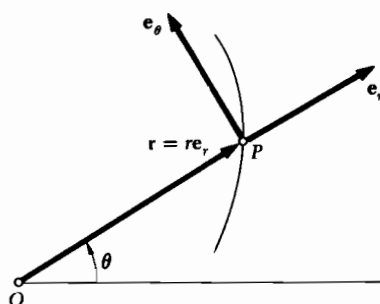


Figura 11.32

Expressamos, então, a velocidade e a aceleração do ponto em termos das componentes radial e transversal

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \quad (11.43)$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \mathbf{e}_\theta \quad (11.44)$$

onde os pontos indicam derivação em relação ao tempo. As componentes escalares da velocidade e da aceleração são dadas, portanto, por

$$v_r = \dot{r} \quad v_\theta = r \dot{\theta} \quad (11.45)$$

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \quad a_\theta = r \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \quad (11.46)$$

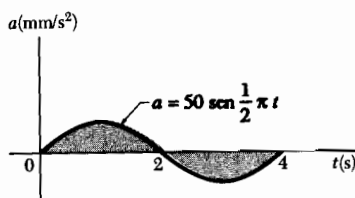
É importante notar que  $a_r$  não é igual à derivada de  $v_r$  e que  $a_\theta$  também não é a derivada de  $v_\theta$  [Problema Resolvido 11.12].

O capítulo se encerra com uma discussão sobre o uso de coordenadas cilíndricas empregadas na descrição de movimentos no espaço.

## Problemas de Recapitulação

**11.165** Acelera-se uniformemente um carro de corrida, de modo que sua velocidade passa de 72 km/h a 108 km/h, num percurso curvo de 120 m de comprimento e 200 m de raio. Determine o módulo da aceleração total do carro, após um percurso de 80 m na curva.

**11.166** A aceleração de um cursor em movimento retilíneo é definida por  $a = 50 \sin \frac{1}{2} \pi t$ , onde  $a$  é expresso em  $\text{mm/s}^2$  e  $t$  em segundos. Sabe-se que  $x = 0$  e  $v = 0$ , quando  $t = 0$ . Determine (a) a máxima velocidade do cursor, (b) sua posição para  $t = 4$  s e (c) sua velocidade média no intervalo  $0 < t < 4$  s. Esboce os diagramas  $x - t$  e  $v - t$  para esse movimento.



**Figura P11.166**

**11.167** A aceleração de um ponto material, que se move sobre o eixo  $Ox$ , aponta para a origem  $O$ , sendo inversamente proporcional ao cubo da distância do ponto à origem. O ponto parte do repouso na posição  $x = 0,914$  m e sua velocidade é de 1,52 m/s quando  $x = 0,610$  m. Determine a velocidade do ponto quando (a)  $x = 0,305$  m e (b)  $x = 0,152$  m.

**11.168** Um bocal emite um jato d'água com uma velocidade inicial  $v_0$  de módulo 22,9 m/s. Sabendo-se que o tubo horizontal possui um diâmetro interno  $d = 1,83$  m, determinar o alcance máximo  $x$  do jato no interior do tubo.

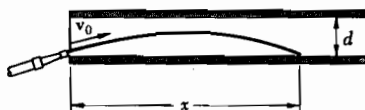


Fig. P11.168

11.169 Do ponto  $A$  de um plano inclinado de  $\beta$ , arremessa-se uma bola com velocidade  $v_0$  ortogonal ao plano. A bola atinge o plano no ponto  $B$ . Determinar o alcance  $R$  em termos de  $v_0$  e  $\beta$ .

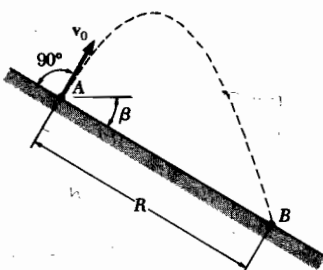


Fig. P11.169

11.170 No problema anterior, determinar o alcance  $R$  para  $v_0 = 10 \text{ m/s}$  e  $\beta = 30^\circ$ .

11.171 Um avião  $A$  voa para o leste a  $700 \text{ km/h}$ , enquanto um avião  $B$  a  $500 \text{ km/h}$  voa à mesma altitude numa direção entre o sul e o oeste. A velocidade de  $B$  relativa a  $A$  é de  $1125 \text{ km/h}$ . Determine a direção da trajetória de  $B$ .

11.172 Deixa-se cair uma pedra da superfície para o interior de um poço de uma mina. No mesmo instante em que a pedra inicia seu movimento de queda, uma caçamba de minério passa por um ponto  $120 \text{ m}$  abaixo da superfície. Determine onde e quando a pedra alcançará a caçamba se a sua velocidade for de  $8 \text{ m/s}$  (a) para cima e (b) para baixo.

11.173 O pino  $B$ , preso no braço  $AC$ , move-se com uma velocidade constante  $v_0 = 2,92 \text{ m/s}$ . O pino pode deslizar livremente pela fenda existente no braço  $OD$ . Determine a derivada  $\theta$  do ângulo que  $OD$  faz com a horizontal e a componente radial  $v_r$  da velocidade de  $B$  quando (a)  $\theta = 0$  e (b)  $\theta = 90^\circ$ .

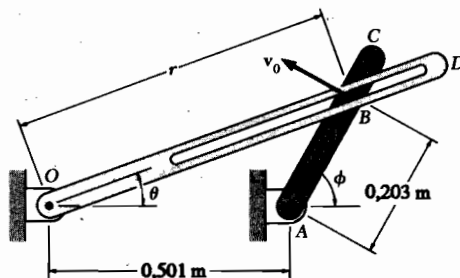
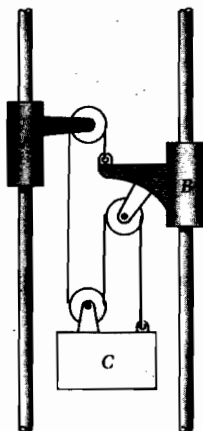


Figura P11.173

11.174 Um policial, numa motocicleta, escolta uma fila de carros que se desloca a 48,3 km/h. Num dado instante, o policial decide tomar nova posição na fila, 61,0 m à frente. Supondo-se que ele acelera e desacelera uniformemente à razão  $3,35 \text{ m/s}^2$  e que não excede a velocidade de 72,4 km/h, esboçar os diagramas  $a-t$  e  $v-t$  para o movimento e determinar (a) o tempo mínimo em que o policial poderá alcançar a nova posição e (b) a distância que ele percorrerá nesse tempo.

11.175 O cursor A, mostrado na figura, desce com velocidade de 80 mm/s e o bloco C move-se a 40 mm/s para baixo, relativamente ao cursor B. Determinar (a) a velocidade de B e (c) a velocidade de C.

11.176 Os cursores A e B partem do repouso e se movem com acelerações no sentido ascendente  $a_A = 160 \text{ mm/s}^2$  e  $a_B = 100 \text{ mm/s}^2$ , respectivamente. Determine a velocidade do bloco C em relação a A depois de 4 s.



Figuras P11.175 e P11.176

## Capítulo 12

# Dinâmica do Ponto Material: a Segunda Lei de Newton

**12.1 Introdução.** A primeira e a terceira lei de Newton foram extensivamente empregadas na estática para estudarmos os corpos em repouso sob a ação das forças neles agentes. Essas duas leis são também usadas em dinâmica, sendo suficientes para estudarmos os movimentos de corpos que não têm aceleração. Todavia, quando os corpos são acelerados, isto é, quando as velocidades se modificam em módulo, direção ou sentido, é necessário utilizar a segunda lei de Newton para relacionar os efeitos (acelerações) com as causas (forças aplicadas).

Neste capítulo, discutiremos a segunda lei e a aplicaremos à análise do movimento de pontos materiais. Como diremos na Seção 12.2, se a resultante das forças agentes num ponto material for diferente de zero, o ponto terá uma aceleração de módulo proporcional ao módulo da resultante e os dois vetores terão a mesma direção e sentido. Mais ainda, a razão entre o módulo da força resultante e o da aceleração pode ser usado para definir a *massa* do ponto material\*.

Na Seção 12.3, definiremos a *quantidade de movimento* de um ponto como o produto  $L = mv$  da massa  $m$  pela velocidade  $v$  do ponto material e mostraremos que a segunda lei de Newton pode ser expressa de forma alternativa, relacionando a derivada (em relação ao tempo) da quantidade de movimento com a resultante das forças agentes no ponto material.

A Seção 12.4 enfatiza a necessidade de um sistema de unidades consistente para a solução de problemas de dinâmica e fornece uma recapitulação do Sistema Internacional de Unidades (SI).

\* Considerando-se que a grandeza força foi definida previamente. (Nota do T.)

Nas Seções 12.5 e 12.6 e nos problemas resolvidos subsequentes, aplica-se a segunda lei de Newton à solução de problemas de engenharia, empregando-se tanto as componentes cartesianas, como as componentes tangencial e normal das forças e acelerações. Observemos que os corpos reais tão grandes como carros, foguetes ou aviões – podem ser considerados como pontos materiais, se os efeitos de rotações puderem ser ignorados.

A segunda parte deste capítulo é dedicada à solução de problemas em termos das componentes radial e transversal, com ênfase especial no movimento de um ponto sob a ação de uma força central. Na Seção 12.7, definiremos o *momento angular*  $\mathbf{H}_O$  de um ponto material, em relação a um pólo  $O$  como o momento, em relação a  $O$ , da quantidade de movimento do ponto material:  $\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ . Segue-se, então, da segunda lei de Newton, que a derivada temporal do momento angular  $\mathbf{H}_O$ , é igual à soma dos momentos, em relação a  $O$  (fixo), das forças agentes no ponto material.

A seção 12.9 trata do movimento de um ponto material sob a ação de uma *força central*, isto é, sob a ação de uma força paralela ao vetor de posição do ponto material, relativamente a um ponto fixo  $O$ . Uma vez que o momento dessa força, em relação ao pólo  $O$ , é nulo, o momento angular do ponto material,  $\mathbf{H}_O$ , mantém-se constante. Essa propriedade simplifica muitíssimo a análise do movimento de um ponto material sob a ação de uma força central. Na Seção 12.10, essa propriedade será empregada na solução de problemas que tratam do movimento orbital de um corpo sob atração gravitacional.

As seções 12.11 a 12.13 são opcionais. Elas apresentam uma discussão mais ampla do movimento orbital e contêm um certo número de problemas relacionados com a mecânica espacial.

**12.2 A Segunda Lei de Newton** A segunda lei de Newton pode ser enunciada na seguinte forma:

*Um ponto material submetido a uma força não nula adquire uma aceleração com módulo proporcional ao módulo da força e na mesma direção e sentido desta.*

A segunda lei de Newton poderá ser melhor compreendida se imaginarmos a seguinte experiência: um ponto material está sujeito a uma força  $\mathbf{F}_1$  constante. Sob a ação desta força, observa-se que o ponto material desloca-se em linha reta, na direção e sentido da força (Fig. 12.1a). Determinando-se a posição do ponto material em vários instantes, verificamos que a aceleração possui módulo constante  $a_1$ . Se a experiência for repetida com forças  $\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$  etc., de diferentes módulos, direções e sentidos (Fig. 12.1b e c), verificaremos, para cada caso, que o ponto material se deslocará na direção e sentido da força que atuar sobre ele e que os módulos  $a_1, a_2, a_3$  etc. das acelerações serão proporcionais aos módulos  $F_1, F_2, F_3$  etc. das forças correspondentes

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = \dots = \text{constante}$$



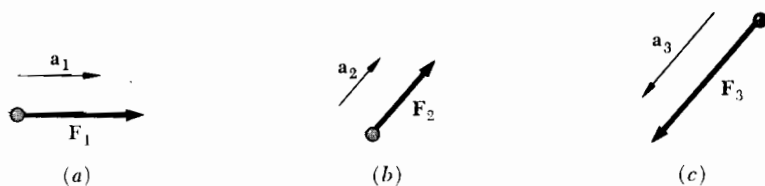


Figura 12.1

O valor constante obtido para a relação entre os módulos das forças e acelerações é uma característica do ponto material em consideração; é chamado de massa do ponto material denotado por  $m$ . Quando sobre um ponto material de massa  $m$  atua uma força  $F$ , a aceleração  $a$  do ponto material e a força  $F$  devem satisfazer à relação

$$F = ma$$

(12.1)

Esta relação nos dá uma formulação completa da segunda lei de Newton; ela exprime não somente que os módulos de  $F$  e  $a$  são proporcionais, mas que (como  $m$  é um escalar positivo) os vetores  $F$  e  $a$  têm a mesma direção e sentido (Fig. 12.2). Note-se que, quando  $F$  não for constante, mas variável com o tempo  $t$ , a aceleração  $a$  também irá variar com  $t$ ; entretanto, a Eq. (12.1) ainda valerá para qualquer instante dado. Porém, nem  $F$  nem  $a$  serão, em geral, tangentes à trajetória do ponto material.

Quando um ponto material estiver sujeito simultaneamente a várias forças, a Eq. (12.1) será substituída por

$$\Sigma F = ma$$

(12.2)

onde  $\Sigma F$  representa a soma, ou resultante, de todas as forças que atuam sobre o ponto material.

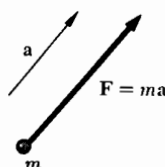


Figura 12.2

Deve-se notar que o sistema de referência no qual a aceleração  $\mathbf{a}$  é determinada não é arbitrário. Seus eixos devem ter uma orientação constante em relação às estrelas, e sua origem deve estar fixa no Sol\* ou deslocar-se com velocidade constante em relação a ele. Tal sistema de eixos é chamado *sistema de referência newtoniano*.\*\* Um sistema de eixos tomado na Terra não constitui um sistema de referência newtoniano, pois a Terra gira em relação às estrelas e está acelerada em relação ao sol. Entretanto, em muitas aplicações de engenharia, a aceleração  $\mathbf{a}$  pode ser determinada em relação aos eixos ligados à Terra, e as Eqs. (12.1) e (12.2) podem ser usadas sem erro apreciável. Por outro lado estas equações não valerão se  $\mathbf{a}$  representar uma aceleração medida em relação a determinados eixos em movimento, tais como eixos ligados a carros acelerados ou a uma peça rotativa de máquina.

Pode-se observar que se a resultante  $\Sigma \mathbf{F}$  das forças que atuam sobre o ponto material for zero, segue-se da Eq. (12.2) que a aceleração  $\mathbf{a}$  do ponto material também é zero. Logo, se o ponto material estiver inicialmente em repouso ( $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ ) em relação a um certo sistema de referência newtoniano, ele permanecerá em repouso ( $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ); se o ponto material estiver inicialmente com velocidade  $\mathbf{v}_0$ , continuará a se mover com velocidade constante  $\mathbf{v}_0$  numa mesma linha reta. Isto já foi estabelecido na primeira lei de Newton (Seção 2.10).\*\*\*

**12.3 Quantidade de Movimento de um Ponto Material. Derivada da Quantidade de Movimento.** Substituindo-se a aceleração  $\mathbf{a}$  pela derivada  $d\mathbf{v}/dt$  na Eq. (12.2), escrevemos

$$\Sigma \mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

\* Mais exatamente, no centro de massa do sistema solar.

\*\* Como as estrelas não são fixas, e nem o centro de massa do sistema solar tem movimento de translação uniforme, pode-se considerar, mais cuidadosamente, como sistema de referência newtoniano (também chamado *sistema inercial*) todo sistema para o qual vale a primeira lei.

\*\*\* É oportuno observar que a primeira lei, enunciada separadamente da segunda, serve como ponto de partida para se identificar um referencial inercial, pois um ponto material livre de forças devidas a outros pontos materiais terá aceleração diferente de zero quando for observado de um referencial não inercial. (Nota do T.)

ou, uma vez que se considera constante a massa  $m$  do ponto material,

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) \quad (12.3)$$

O vetor  $m\mathbf{v}$  é chamado *quantidade de movimento* do ponto material. Ele tem a mesma direção e sentido que a velocidade do ponto material e seu módulo é igual ao produto da massa  $m$  pela velocidade  $v$  do ponto (Fig. 12.3). A Eq. (12.3) mostra que a *resultante das forças que atuam num ponto material é igual à derivada temporal da quantidade de movimento desse ponto*. É nesta forma que a segunda lei do movimento foi originariamente enunciada por Newton. Designando-se por  $\mathbf{L}$  a quantidade de movimento do ponto material,

$$\mathbf{L} = m\mathbf{v}, \quad (12.4)$$

e por  $\dot{\mathbf{L}}$  sua derivada em relação a  $t$ , podemos escrever a Eq. (12.3) na forma alternativa

$$\Sigma \mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} \quad (12.5)$$

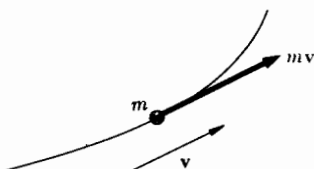


Figura 12.3

Observe-se que nas Eqs. (12.3) e (12.5) supôs-se que a massa  $m$  do ponto material era constante. As Eqs. (12.3) e (12.5), portanto, não podem ser utilizadas na solução de problemas de movimento de corpos que ganham ou perdem massa, tais como foguetes. Problemas deste tipo serão considerados na Seção 14.11.\*

\* Por outro lado, as Eqs. (12.3) e (12.5) valem em mecânica relativística, onde a massa  $m$  do ponto material varia com a velocidade desse ponto.

Segue-se da Eq. (12.3) que a taxa de variação da quantidade de movimento  $m\mathbf{v}$  é zero quando  $\Sigma \mathbf{F} = 0$ . Então, se a *força resultante que atua num ponto material é zero, a quantidade de movimento do ponto material permanece constante, tanto em módulo como em direção e sentido*.

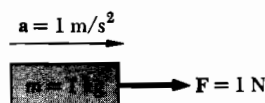
Este é o princípio da conservação da quantidade de movimento para um ponto material, que podemos reconhecer como um enunciado alternativo da primeira lei de Newton (Seção 2.10).

**12.4 Sistema de Unidades** Usando-se a equação fundamental  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , as unidades de força, massa, comprimento e tempo não podem ser escolhidas de maneira arbitrária. Se assim não fosse, o módulo da força  $\mathbf{F}$  necessária para dar uma aceleração  $\mathbf{a}$  à massa  $m$  não seria numericamente igual ao produto  $ma$ ; seria somente **proporcional**. Podemos escolher, portanto, três das quatro unidades, arbitrariamente, **mas a quarta** deverá ser escolhida de modo que se tenha satisfeita a equação  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ . Diz-se, então, que as unidades formam um sistema coerente de unidades.

O sistema de unidades correntemente utilizado é o Sistema Internacional de Unidades (Unidades SI) tratado em detalhes na Seção 1.3 e que será brevemente discutido nesta seção.

*Sistema Internacional de Unidades* (Unidades SI). Neste sistema, as unidades de base são as unidades de comprimento, massa e tempo, chamadas, respectivamente, *metro* (m), *quilograma* (kg) e *segundo* (s); todas definidas arbitrariamente (Seção 1.3). A unidade de força é uma unidade derivada. É chamada *newton* (N) e é definida como a força que produz uma aceleração de  $1 \text{ m/s}^2$  num corpo massa de  $1 \text{ kg}$  (Fig. 12.4). Da Eq. (12.1) escrevemos

$$1 \text{ N} = (1 \text{ kg})(1 \text{ m/s}^2) = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$



**Figura 12.4**

Diz-se que as unidades SI formam um sistema *absoluto* de unidades. Isto significa que as três unidades de base escolhidas são independentes do local onde as medidas são feitas. O metro, o quilograma e o segundo podem ser usados em qualquer lugar da Terra; podem até ser usados em outro planeta, pois terão sempre o mesmo significado.

Tal como qualquer outra força, o peso  $P$  de um corpo pode ser expresso em newtons. Como um corpo sujeito a seu próprio peso adquire uma aceleração  $g$ , denominada aceleração da gravidade, segue-se da segunda lei de Newton que o módulo  $P$  do peso do corpo de massa  $m$  é

$$P = mg \quad (12.6)$$

Lembrando-se que o valor adotado para  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ , encontramos para o peso de um corpo de 1 kg (Fig. 12.5) o valor

$$P = (1 \text{ kg}) (9,81 \text{ m/s}^2) = 9,81 \text{ N}$$

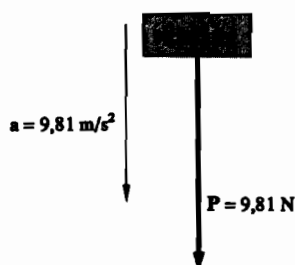


Figura 12.5

Múltiplos e submúltiplos das unidades de comprimento, massa e força são usados freqüentemente na prática de engenharia. São eles: *quilômetro* (km) e *milímetro* (mm); *megagrama* (Mg) e *grama* (g); e *quiloneutron* (kN). Por definição

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

$$1 \text{ mm} = 0,001 \text{ m}$$

$$1 \text{ Mg} = 1000 \text{ kg}$$

$$1 \text{ g} = 0,001 \text{ kg}$$

$$1 \text{ kN} = 1000 \text{ N}$$

A conversão destas unidades em metros, quilogramas e newtons, respectivamente, pode ser efetivada simplesmente movendo-se a vírgula para a direita ou para a esquerda.

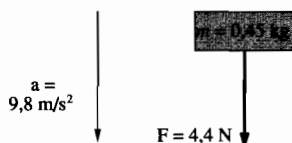
Outras unidades, além das unidades de massa, comprimento e tempo podem ser expressas em termos destas três unidades de base. Por exemplo, a unidade da quantidade de movimento pode ser obtida lembrando-se a sua definição e escrevendo-se

$$mv = (\text{kg})(\text{m/s}) = \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

**12.5 Equações do Movimento.** Considere um ponto material de massa  $m$  sob a ação de diversas forças. Lembramos, da Seção 12.1, que a segunda lei de Newton pode ser expressa pela equação

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (12.2)$$

que relaciona a resultante das forças que atuam no ponto material e o vetor  $m\mathbf{a}$  (Fig. 12.6). Todavia, para resolver problemas que envolvem o movimento de um ponto material, será mais conveniente substituir a Eq. (12.2) por equações escalares equivalentes.



**Figura 12.6**

*Componentes Cartesianas.* Expressando-se cada força  $\mathbf{F}$  e a aceleração  $\mathbf{a}$  em componentes cartesianas, escrevemos

$$\Sigma (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}) = m (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k})$$

da qual resultam

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \Sigma F_y = ma_y \quad \Sigma F_z = ma_z \quad (12.8)$$

Lembrando da Seção 11.1 que as componentes da aceleração são iguais às derivadas segundas das coordenadas do ponto material, temos

$$\Sigma F_x = m\ddot{x} \quad \Sigma F_y = m\ddot{y} \quad \Sigma F_z = m\ddot{z} \quad (12.8'')$$

Considere-se, como exemplo, o movimento de um projétil. Se desprezarmos a resistência do ar, a única força que atua no projétil, após ter sido disparado, é seu peso  $\mathbf{P} = -P\mathbf{j}$ . As equações que definem o movimento do projétil são, portanto,

$$m\ddot{x} = 0 \quad m\ddot{y} = -P \quad m\ddot{z} = 0$$

e as componentes da aceleração do projétil são

$$\ddot{x} = 0 \quad \ddot{y} = -\frac{P}{m} = -g \quad \ddot{z} = 0$$

onde  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Como foi visto na Seção 11.11, cada uma das equações acima pode ser integrada separadamente, obtendo-se, desse modo, a velocidade e a aceleração do projétil, em qualquer instante.

*Componentes Normal e Tangencial.* Expressando-se as forças e a aceleração do ponto material em componentes nas direções da tangente à trajetória (na direção do movimento) e da normal principal (para o interior da trajetória) (Fig. 12.9), e substituindo-se na Eq. (12.2), obtemos duas equações escalares.\*

$$\Sigma F_t = ma_t \quad \Sigma F_n = ma_n \quad (12.9)$$

\* A projeção na direção da binormal, no caso de uma trajetória reversa, fornece, ainda,

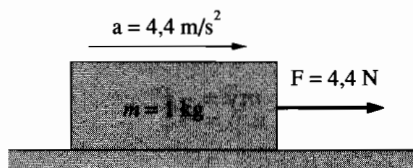
$$\Sigma F_b = 0$$

o que expressa o fato de que, na direção da binormal, as forças ativas (aplicadas) devem ser totalmente compensadas pelas forças reativas ou, então, ambas são nulas. (Nota do R. T.)

Utilizando-se as Eqs. (11.40) resultam:

$$\Sigma F_t = m \frac{dv}{dt} \quad \Sigma F_n = m \frac{v^2}{\rho} \quad (12.9')$$

As equações obtidas podem ser resolvidas para duas incógnitas.

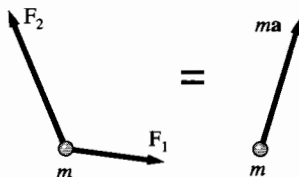


**Figura 12.7**

**12.6 Equilíbrio Dinâmico.** Rearranjando-se os termos da Eq. (12.2) podemos escrever a segunda lei de Newton na forma alternativa

$$\Sigma \mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0 \quad (12.10)$$

Esta equação mostra que, se adicionarmos o vetor  $-m\mathbf{a}$  às forças que atuam sobre o ponto material, obteremos um *sistema de vetores equivalentes a zero* (Fig. 12.8). O vetor  $-m\mathbf{a}$  é chamado vetor de inércia. O ponto material pode, então, ser considerado em equilíbrio sob a ação das forças dadas e do vetor de inércia. Diz-se que o ponto material está em *equilíbrio dinâmico*, e o problema em consideração pode ser resolvido utilizando-se os métodos desenvolvidos anteriormente na Estática.



**Figura 12.8**



No caso de forças coplanares, podemos traçar os vetores um em seguida ao outro, incluindo o vetor de inércia, para formar um polígono fechado, ou então podemos escrever que as somas das componentes de todos os vetores na Fig. 12.8, incluindo, novamente, o vetor de inércia, são nulas. Usando componentes cartesianas, escrevemos

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{incluindo o vetor de inércia} \quad (12.11)$$

Quando as componentes tangencial e normal são utilizadas, é mais conveniente representar o vetor de inércia por suas duas componentes –  $ma_t$  e  $ma_n$  no próprio desenho (Fig. 12.9). A componente tangencial do vetor de inércia mede a resistência que o ponto material oferece quando se tenta mudar o módulo de sua velocidade, enquanto a componente normal (também chamada *força centrífuga*) representa a tendência do ponto material em abandonar sua trajetória curvilínea. Observamos que qualquer destas duas componentes pode ser zero em condições especiais: (1) se o ponto material parte do repouso, sua velocidade inicial é zero e a componente normal do vetor de inércia é zero em  $t = 0$ ; (2) se o ponto material se move com velocidade escalar constante ao longo de sua trajetória, a componente tangencial do vetor de inércia é zero e somente a componente normal precisa ser considerada.

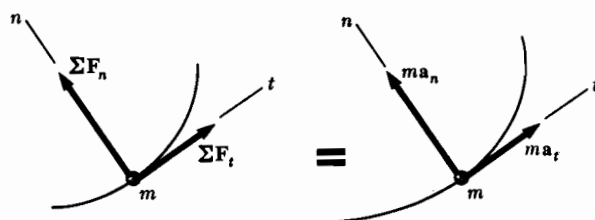


Figura 12.9

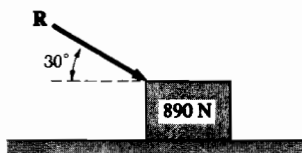
Como os vetores de inércia medem a resistência oferecida pelos pontos materiais quando tentamos colocá-los em movimento ou quando tentamos mudar as condições de seus movimentos, eles são muitas vezes chamados de *forças de inércia*. As forças de inércia, no entanto, não são iguais às forças encontradas na estática, que são forças de contato ou forças gravitacionais (pesos). Por essa razão muitas pessoas fazem objeções à utilização da palavra “força”, quando se trata do vetor  $-ma$ , ou até evitam completamente o conceito de equilíbrio dinâmico. Outros consideram que forças de inércia e forças reais como as gravitacionais afetam nossos sentidos da mesma maneira e não podem ser distinguidas por medidas físicas. Um homem num elevador, que é acelerado para cima, terá a sensação de que seu peso aumentou; e nenhuma medida

realizada dentro do elevador pode estabelecer se o elevador está verdadeiramente acelerado ou se a força de atração exercida pela Terra aumentou.

Os problemas resolvidos neste texto fazem aplicação direta da segunda lei de Newton, como ilustrado nas Figs. 12.6 e 12.7, em vez do método do equilíbrio dinâmico.

## Problema Resolvido 12.1

Um bloco de 890 N está em repouso no plano horizontal. Determinar o módulo da força  $R$  necessária para produzir no bloco uma aceleração de  $3 \text{ m/s}^2$  para a direita. O coeficiente de atrito entre o bloco e o plano é  $\mu = 0,25$ .



**Solução** A massa do bloco é

$$m = \frac{P}{g} = \frac{890 \text{ N}}{9,81 \text{ m/s}^2} = 90,7 \text{ kg}$$

Notamos que  $F = \mu N = 0,25 N$  e que  $a = 3 \text{ m/s}^2$ . Considerando as forças que atuam no bloco como equivalentes ao vetor  $ma$ , escrevemos

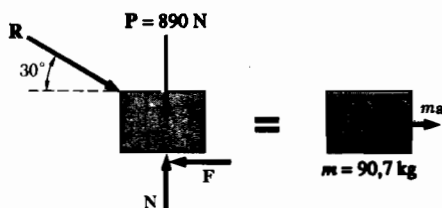
$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x = ma: \quad R \cos 30^\circ - 0,25 N &= (90,7 \text{ kg}) (3 \text{ m/s}^2) \\ R \cos 30^\circ - 0,25 N &= 272 \text{ N} \end{aligned} \quad (1)$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0: \quad N - R \sin 30^\circ - 890 \text{ N} = 0 \quad (2)$$

Resolvendo a Eq. (2) para  $N$  e introduzindo este resultado na Eq. (1), obtemos

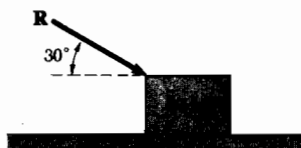
$$N = R \sin 30^\circ + 890 \text{ N}$$

$$R \cos 30^\circ - 0,25(R \sin 30^\circ + 890 \text{ N}) = 272 \text{ N} \quad R = 674 \text{ N} \leftarrow$$



## Problema Resolvido 12.2

Um bloco de 80 kg repousa sobre um plano horizontal. Obtenha a intensidade da força  $R$  capaz de comunicar ao bloco uma aceleração de  $2,5 \text{ m/s}^2$  para a direita. O coeficiente de atrito entre o bloco e o plano é  $\mu = 0,25$ .



**Solução** O peso do bloco é

$$P = mg = (80\text{kg})(9,81 \text{ m/s}^2) = 785 \text{ N}$$

Notemos que  $F = \mu N = 0,25 \text{ N}$  e que  $a = 2,5 \text{ m/s}^2$ . Considerando as forças agentes no bloco equivalentes ao vetor  $ma$ , escrevemos

$$\begin{aligned} +\rightarrow \Sigma F_x = ma : \quad R \cos 30^\circ - 0,25 \text{ N} &= (80\text{kg})(2,5 \text{ m/s}^2) \\ R \cos 30^\circ - 0,25 \text{ N} &= 200 \text{ N} \end{aligned} \quad (1)$$

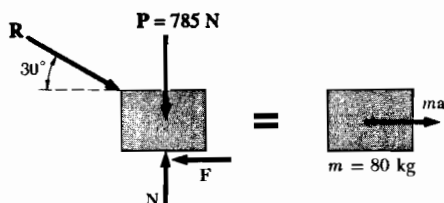
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad N - R \sin 30^\circ - 785 \text{ N} = 0 \quad (2)$$

Da Eq. (2) podemos obter  $N$  que substituída em (1) fornece

$$N = R \sin 30^\circ + 785 \text{ N}$$

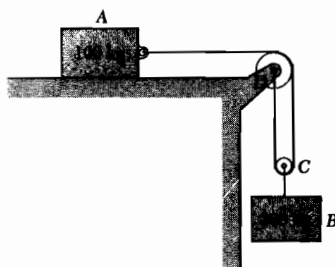
$$R \cos 30^\circ - 0,25 (R \sin 30^\circ + 785 \text{ N}) = 200 \text{ N}$$

$$R = 535 \text{ N} \quad \Leftarrow$$



### Problema Resolvido 12.3

Os dois blocos ilustrados na figura partem do repouso. O plano horizontal e a roldana são isentos de atrito e a massa da roldana é desprezível. Determinar a aceleração de cada bloco e a tensão em cada corda.



**Solução** Denotemos por  $T_1$  a tensão na corda ACD e por  $T_2$  a tensão na corda BC. Notemos que, se o bloco A se move de  $s_A$ , o bloco B move-se de

$$s_B = \frac{1}{2} s_A$$

Derivando duas vezes em relação ao tempo  $t$ , temos

$$a_B = \frac{1}{2} a_A \quad (1)$$

Aplicaremos sucessivamente a segunda lei de Newton ao bloco A, ao bloco B e à roldana C.

### Bloco A

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m_A a_A: \quad T_1 = 100 a_A \quad (2)$$

**Bloco B** Observando que o peso do bloco B é

$$P_B = m_B g = (300 \text{ kg}) (9,81 \text{ m/s}^2) = 2,94 \text{ kN}$$

escrevemos

$$+\downarrow \Sigma F_y = m_B a_B: \quad 2,94 \times 10^3 - T_2 = 300 a_B$$

ou, substituindo  $a_B$  de (1),

$$\begin{aligned} 2,94 \times 10^3 - T_2 &= 300 \left( \frac{1}{2} a_A \right) \\ T_2 &= 2,94 \times 10^3 - 150 a_A \end{aligned} \quad (3)$$

**Roldana C** Como  $m_c$  é suposta nula, temos

$$+\downarrow \Sigma F_y = m_c a_c = 0: \quad T_2 - 2T_1 = 0 \quad (4)$$

Substituindo  $T_1$  e  $T_2$  pelos vetores de (2) e (3), respectivamente, em (4), escrevemos

$$2,94 \times 10^3 - 150a_A - 2(100a_A) = 0$$

$$2,94 \times 10^3 - 350a_A = 0$$

$$a_A = 8,40 \text{ m/s}^2 \Leftarrow$$

Substituindo o valor obtido para  $a_A$  em (1) e (2), temos

$$a_B = \frac{1}{2} a_A = \frac{1}{2} (8,40 \text{ m/s}^2)$$

$$a_B = 4,20 \text{ m/s}^2 \Leftarrow$$

$$T_1 = 100a_A = (100 \text{ kg}) (8,40 \text{ m/s}^2)$$

$$T_1 = 840 \text{ N} \Leftarrow$$

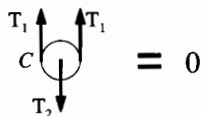
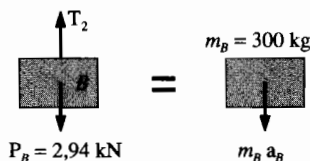
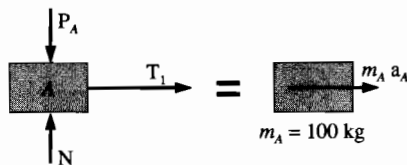
Lembrando (4), escrevemos

$$T_2 = 2T_1$$

$$T_2 = 2(840 \text{ N})$$

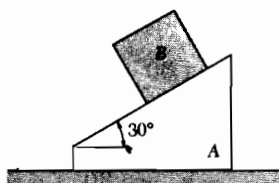
$$T_2 = 1,68 \text{ kN} \Leftarrow$$

Notamos que o valor obtido para  $T_2$  não é igual ao peso do bloco B.



### Problema Resolvido 12.4

Um bloco  $B$  de  $53,4\text{ N}$  parte do repouso e escorrega sobre uma cunha  $A$  de  $133\text{ N}$ . A cunha por sua vez é suportada por um plano horizontal. Desprezando os atritos, determine (a) a aceleração da cunha e (b) a aceleração do bloco relativa à cunha.



**Cinemática** Começaremos por examinar as acelerações da cunha e do bloco.

**Cunha A** Como a cunha é forçada a se mover sobre o plano horizontal, sua aceleração  $a_A$  é horizontal. De acordo com a figura, é de se supor que a cunha se mova para a direita.

**Bloco B** A aceleração de  $B$  pode ser escrita como a soma de  $a_A$ , aceleração de  $A$ , e de  $a_{B/A}$ , aceleração de  $B$  relativamente a  $A$ . Tem-se portanto,

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A},$$

onde  $\mathbf{a}_{B/A}$  é paralela à superfície inclinada da cunha.



**Dinâmica** Faremos agora os diagramas de “corpo livre” para ambos os corpos e, então, consideraremos a segunda lei para cada um deles.

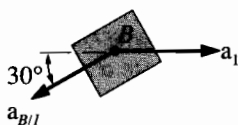
**Cunha A.** Sejam  $N_1$  e  $N_2$  as forças normais de reação de contato exercidas, respectivamente, pelo bloco e pelo plano horizontal sobre a cunha A

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x = m_A a_A : \quad N_1 \sin 30^\circ &= m_A a_A \\ 0,5 N_1 &= (P_A/g) a_A \end{aligned} \quad (1)$$

**Bloco B.** Usando-se o sistema de eixos mostrados na figura e decompondo-se  $\mathbf{a}_B$  em suas componentes  $\mathbf{a}_A$  e  $\mathbf{a}_{B/A}$ , escrevemos

$$\begin{aligned} + \nearrow \Sigma F_x = m_B a_x : \quad -P_B \sin 30^\circ &= m_B a_A \cos 30^\circ - m_B a_{B/A} \\ -P_B \sin 30^\circ &= (P_B/g) (a_A \cos 30^\circ - a_{B/A}) \\ a_{B/A} &= a_A \cos 30^\circ + g \sin 30^\circ \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} + \nwarrow \Sigma F_y = m_B a_y : \quad N_1 - P_B \cos 30^\circ &= -m_B a_A \sin 30^\circ \\ N_1 - P_B \cos 30^\circ &= -(P_B/g) a_A \sin 30^\circ \end{aligned} \quad (3)$$



**a. Aceleração da Cunha A** = Substituindo-se  $N_1$  da Eq. (1) na Eq. (3)

$$2(P_A/g) a_A - P_B \cos 30^\circ = -(P_B/g) a_A \sin 30^\circ$$

tem-se

$$a_A = \frac{P_B \cos 30^\circ}{2P_A + P_B \sin 30^\circ} \cdot g = \frac{(53,4\text{N}) \cos 30^\circ}{2(133\text{N}) + (53,4\text{N}) \sin 30^\circ} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$a_A = 1,55 \text{ m/s}^2 \rightarrow \leftarrow$$

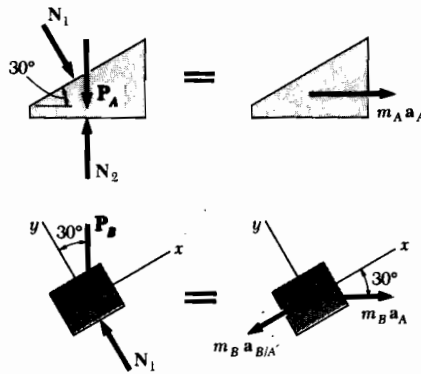


**b. Aceleração de B relativa a A** Substituindo-se na Eq. (2) o valor obtido para  $a_A$ , obtemos

$$a_{B/A} = (1,55 \text{ m/s}^2) \cos 30^\circ + (9,81 \text{ m/s}^2) \sin 30^\circ$$

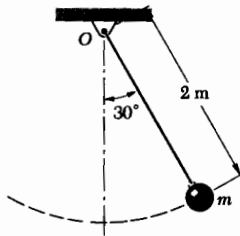
$$a_{B/A} = 6,25 \text{ m/s}^2$$

$$a_{B/A} = 6,25 \text{ m/s}^2 \nearrow 30^\circ \leftarrow$$



### Problema Resolvido 12.5

O pêndulo de comprimento igual a 2 m descreve um arco de circunferência num plano vertical. Se a tensão na corda é 2,5 vezes o peso do pêndulo para a posição mostrada na figura, determinar a velocidade e a aceleração do pêndulo nesta posição.



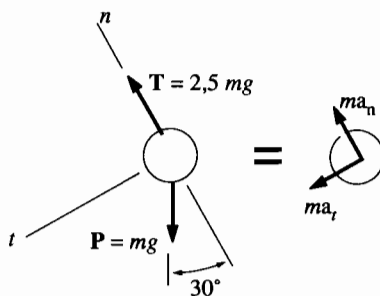
**Solução.** O peso do pêndulo é  $P = mg$ ; a tensão na corda é, então,  $2,5 mg$ . Lembrando que  $\mathbf{a}_n$  aponta sempre para  $O$  e supondo  $\mathbf{a}_t$  no sentido mostrado, aplicamos a segunda lei de Newton e obtemos

$$+ \nearrow \Sigma F_t = ma_t: \quad mg \sin 30^\circ = ma_t \quad a_t = g \sin 30^\circ = +4,90 \text{ m/s}^2 \quad a_t = 4,90 \text{ m/s}^2 \nearrow \Leftarrow$$

$$+ \nwarrow \Sigma F_n = ma_n: \quad 2,5 mg - mg \cos 30^\circ = ma_n \quad a_n = 1,634 g = +16,0 \text{ m/s}^2 \quad a_n = 16,0 \text{ m/s}^2 \nwarrow \Leftarrow$$

Como  $a_n = v^2 / \rho$ , temos  $v^2 = \rho a_n = (2\text{m}) (16,0 \text{ m/s}^2)$

$$v = \pm 5,66 \text{ m/s} \quad v = 5,66 \text{ m/s} \nearrow \quad (\text{para cima ou para baixo}) \Leftarrow$$



## Problema Resolvido 12.6

Determinar a velocidade de segurança de uma curva compensada de estrada de rodagem, inclinada de  $\theta = 18^\circ$  e raio  $\rho = 120 \text{ m}$ . A velocidade de segurança de uma curva compensada de uma rodovia é aquela na qual um carro poderá trafegar sem que nenhuma força de atrito lateral seja exercida em suas rodas.

**Solução** O carro viaja numa trajetória circular horizontal de raio  $\rho$ . A componente normal  $a_n$  da aceleração é voltada para o centro da trajetória; seu módulo é  $a_n = v^2/\rho$ , onde  $v$  é a velocidade do carro em m/s. A massa  $m$  do carro é  $P/g$ , onde  $P$  é o seu peso. Visto que nenhuma força de atrito lateral deve ser exercida sobre o carro, a reação  $R$  deve ser perpendicular à estrada. Aplicando-se a segunda lei de Newton, escrevemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad R \cos \theta - P = 0 \quad R = \frac{P}{\cos \theta} \quad (1)$$

$$+\leftarrow \Sigma F_n = ma_n: \quad R \sin \theta = \frac{P}{g} a_n \quad (2)$$

Substituindo-se  $R$  de (1) em (2) e lembrando-se que  $a_n = v^2/\rho$ :

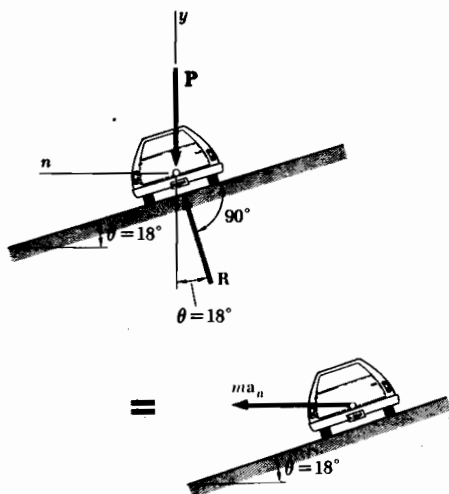
$$\frac{P}{\cos \theta} \sin \theta = \frac{Pv^2}{g\rho} \quad v^2 = g\rho \tan \theta$$

Substituindo-se os valores dados,  $\rho = 120 \text{ m}$  e  $\theta = 18^\circ$ , nesta equação, obtemos

$$v^2 = (9,81 \text{ m/s}^2) (120) \tan 18^\circ$$

$$v = 19,6 \text{ m/s}$$

$$v = 70,4 \text{ km/h} \leftarrow$$



## Problemas

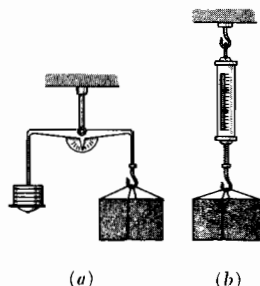
**12.1** A aceleração da gravidade na superfície da Lua é  $1,62 \text{ m/s}^2$ . Conduzindo-se uma barra de ouro de 2 kg, da Terra para a Lua, qual deve ser a sua massa e o seu peso na superfície lunar?

**12.2** O valor de  $g$  a uma latitude  $\phi$  pode ser dado pela fórmula

$$g = 9,7807 (1 + 0,0053 \sin^2 \phi) \text{ m/s}^2$$

Determine com quatro algarismos significativos (a) o peso em newtons e (b) a massa em quilogramas, para as latitudes de  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $90^\circ$ , de uma barra de prata cuja massa é oficialmente definida como 10,00 kg.

**12.3** Duas caixas são pesadas nas balanças ilustradas: a balança *a* é de sistema de alavanca e a balança *b* é de sistema com mola. As balanças estão presas no teto de um elevador. Quando o elevador está parado, cada balança indica uma carga de 100 N. Se a balança com mola indica uma carga de 90 N, determine a aceleração do elevador e a carga indicada pela balança de alavanca.



**Figura P 12.3**

**12.4** Um satélite de 400 kg foi colocado numa órbita circular de 1500 km acima da superfície da Terra. A aceleração da gravidade nesta altura é de  $6,43 \text{ m/s}^2$ . Determine a quantidade de movimento do satélite, sabendo-se que sua velocidade orbital é  $25,6 \times 10^3 \text{ km/h}$ .

**12.5** Determine a máxima velocidade teoricamente esperada para que um carro, partindo do repouso, cubra uma distância de 50 m. O coeficiente de atrito estático entre os pneus e o asfalto é 0,80. Suponha tração nas quatro rodas.

**12.6** Resolva o problema anterior, sabendo-se que as rodas dianteiras suportam 60% do peso do carro e as traseiras, os restantes 40%. Suponha (a) tração dianteira e (b) tração traseira.

**12.7** Freia-se, repentinamente, um carro a 90 km/h que então, derrapa por 50 m até parar. Determine (a) o tempo necessário para o veículo parar e (b) o coeficiente de atrito entre os pneus e o asfalto.

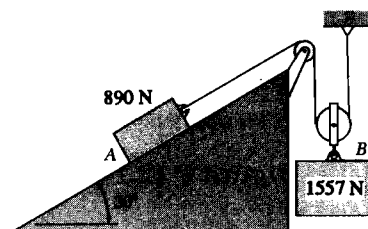
**12.8** Um carro está subindo um trecho em acive de 2%, a uma velocidade constante de 88,5 km/h. Se o motorista não mudar de marcha, nem modificar a pressão de seu pé no acelerador, qual deverá ser a aceleração do carro no trecho em declive de 3%?



**Figura P 12.8**

**12.9** Um carro pesando  $1,33 \times 10^4 \text{ N}$  desce uma ladeira de  $5^\circ$ , a uma velocidade de 80,5 km/h. Acionam-se os freios, produzindo-se uma força desaceleradora de  $5,34 \times 10^3 \text{ N}$ . Determine a distância percorrida pelo carro até o repouso.

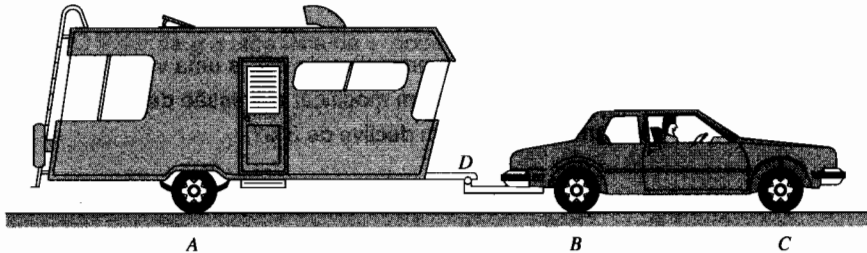
**12.10** Os dois blocos mostrados na figura estão inicialmente em repouso. Despreze as massas das polias e os atritos entre as diversas partes do sistema. Obtenha (a) a aceleração de cada bloco e (b) a tensão no cabo.



**Figura P 12.10**

**12.11** Resolva o problema anterior supondo-se que os coeficientes de atrito entre o bloco  $A$  e o plano inclinado são  $\mu_e = 0,25$  e  $\mu_c = 0,20$  ( $\mu_c$  = coeficiente de atrito cinemático).

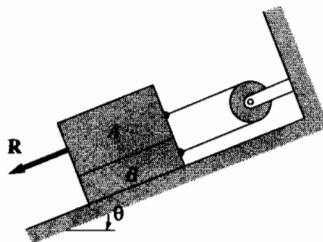
**12.12** Um carro de 1200 kg traciona um reboque de 1050 kg. O conjunto movendo-se a 90 km/h sofre repentinamente a ação dos freios. Sabendo-se que as forças dos freios agentes no carro e no trailer valem 4500 N e 3600 N, respectivamente, determinar (a) a desaceleração do conjunto e (b) a componente horizontal da força exercida pelo reboque sobre o carro.



**Figura P 12.12**

**12.13** Resolva o problema anterior, supondo que os freios do reboque não funcionem.

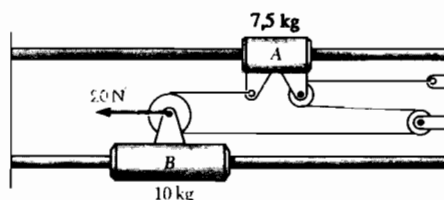
**12.14** As massas dos blocos  $A$  e  $B$  valem, respectivamente, 30 kg e 15 kg. Os coeficientes de atrito entre todas as superfícies em contato são  $\mu_e = 0,15$  e  $\mu_c = 0,10$ . Sabendo-se que  $\theta = 30^\circ$  e que a intensidade da força  $R$  agente no bloco  $A$  vale 250 N, determinar (a) a aceleração de  $A$  e (b) a tensão na corda.



**Figura P 12.14**

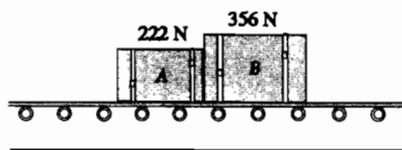
**12.15** Resolva o problema anterior, supondo que a força **R** está aplicada em **B** e não em **A**.

**12.16** Supondo que o sistema mostrado na figura parta do repouso, obtenha as velocidades dos cursores (a) **A** e (b) **B** no instante  $t = 1,2$  s. Despreze as massas das polias e os atritos.



**Figura P12.16**

**12.17** Duas caixas foram colocadas numa esteira inicialmente em repouso. O coeficiente de atrito cinemático entre a esteira e a caixa **A** vale 0,20 e o coeficiente de atrito cinemático entre a esteira e a caixa **B** vale 0,10. Suponha que, repentinamente, a esteira é posta em movimento da esquerda para a direita e que haja deslizamento entre as caixas e a esteira. Determine (a) a aceleração de cada caixa e (b) a força exercida por **A** sobre **B**:



**Figura P12.17**

**12.18** Todos os sistemas mostrados na figura estão inicialmente em repouso. Suponha que as polias têm massas desprezíveis e que os atritos nos eixos são nulos. Determine para cada sistema (a) a aceleração do bloco **A**, (b) a velocidade de **A** depois de 2 s e (c) a velocidade do bloco **A** depois de percorrer uma distância de 2,44 m.

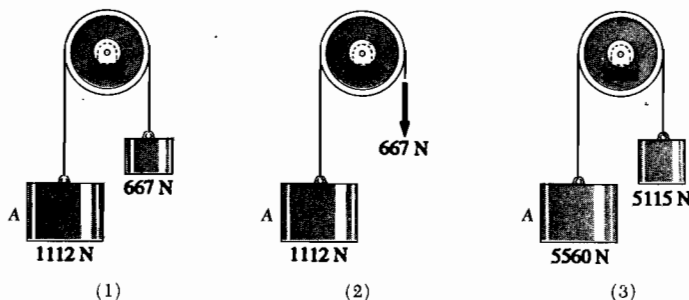


Figura P 12.18

**12.19** Os coeficientes de atrito entre a carga e o caminhão valem  $\mu_e = 0,50$  e  $\mu_c = 0,40$ . Sabendo-se que a velocidade do caminhão é de 72,4 km/h, determine a menor distância que ele deve percorrer, até parar, para que a carga não deslize.

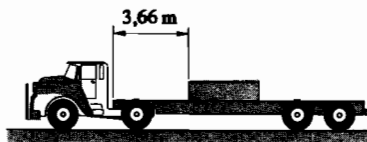


Figura P 12.19

**12.20** O caminhão-reboque, considerado no problema anterior, está viajando a 96,5 km/h, quando, repentinamente, o motorista freia o veículo, fazendo-o derrapar por 5 s, até pará-lo. (a) Verificar se a carga irá ou não escorregar. (b) Se a carga escorregar, qual será a sua velocidade relativa ao atingir a cabina?

**12.21** Num processo de fabricação, levam-se discos de um nível A para outro B, por meio do sistema indicado na figura. O braço-elevador parte de A com velocidade inicial nula, movendo-se com uma aceleração constante  $a_1$ , depois adquire uma desaceleração constante  $a_2$  até chegar a B com velocidade zero. O coeficiente de atrito estático disco-braço vale 0,25. Determine os máximos valores de  $|a_1|$  e  $|a_2|$  para que os discos não escorreguem.



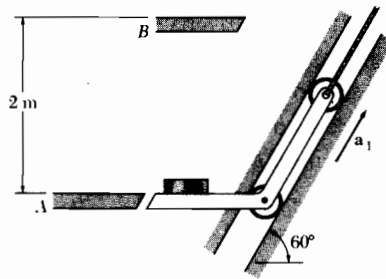


Figura P12.21

**12.22** Supondo-se que os discos considerados no problema anterior devam ser elevados de A para B, no menor tempo possível, sem haver escorregamento, determinar (a) a máxima velocidade alcançada pelo elevador e (b) o tempo necessário para transportar cada disco.

**12.23** Uma corrente, de massa  $m'$  por unidade de comprimento, repousa sobre uma polia, de massa desprezível. Abandona-se a corrente, na posição mostrada na figura ( $h > l/2$ ). Determinar (a) a velocidade  $v_1$  da corrente quando esta abandona a polia e (b) o máximo valor possível de  $v_1$  quando  $h$  se aproxima de  $l/2$ . Desprezar o raio da polia.

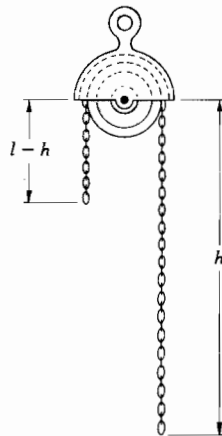


Figura P 12.23

**12.24** As turbinas de um avião de 30 Mg desenvolvem uma propulsão total de 50 kN durante a decolagem. A força de resistência do ar sobre o avião tem módulo, no SI, dado por  $2,50 v^2$ , onde  $v$  é o módulo da velocidade do avião. Determine a distância percorrida pelo aparelho na decolagem, até atingir uma velocidade de 270 km/h.

**12.25** Determine o tempo de decolagem do avião considerado no problema anterior.

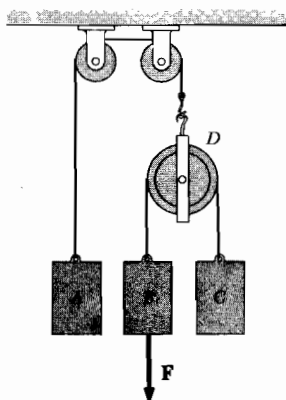
**12.26** Aplica-se uma força constante  $P$  a um pistão de massa  $m$  que se move num cilindro cheio de óleo. Conforme o pistão se move, o óleo é forçado através de orifícios no pistão, exercendo sobre este uma força adicional de módulo  $k v$ , onde  $k$  é uma constante e  $v$  é a velocidade do pistão. Esta força tem sempre o sentido oposto ao do movimento do pistão. Supondo-se que o pistão, no instante inicial, parta de  $x = 0$ , com velocidade  $v = 0$ , obtenha  $x$  em função de  $t$ .



**Figura P 12.26**

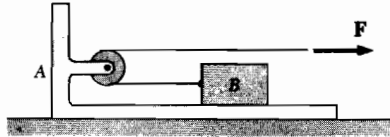
**12.27** O bloco  $A$  pesa  $89\text{ N}$  e os blocos  $B$  e  $C$  têm pesos iguais (cada um deles pesa  $44,5\text{ N}$ ). Sabendo-se que  $F = 11,1\text{ N}$  e que os blocos estão inicialmente em repouso, determinar (a) a velocidade de  $B$  em relação a  $A$  e (b) a velocidade de  $C$  em relação a  $A$ . Desprezar os atritos e as massas das polias.

**12.28** Os pesos dos blocos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , mostrado na figura valem,  $89\text{ N}$ ,  $44,5\text{ N}$  e  $44,5\text{ N}$ , respectivamente. Os blocos estão inicialmente em repouso. Sabendo-se que  $B$  percorre  $2,44\text{ m}$  em  $2\text{ s}$ , determinar (a) o módulo de  $F$  e (b) a tensão na corda  $AD$ . Desprezar as massas das polias e os atritos.



**Figuras P 12.27 e P12.28**

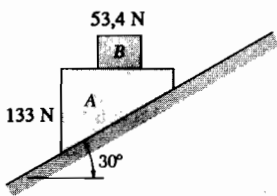
**12.29** Um bloco  $B$  de 8 kg repousa sobre um suporte móvel  $A$  de 12 kg. Os coeficientes de atrito entre o bloco e o suporte são  $\mu_e = 0,40$  e  $\mu_c = 0,30$ . Não há atritos entre o suporte e o piso, bem como na polia. Se  $F = 30\text{ N}$ , determinar a velocidade de  $B$  relativa a  $A$ , depois de  $B$  ter-se deslocado 400 mm relativamente ao suporte  $A$ .



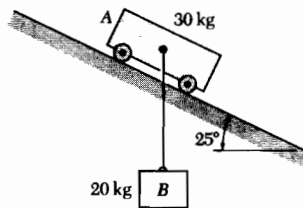
**Figura P 12.29**

**12.30** Determinar, para o sistema considerado no problema anterior, (a) a máxima força  $F$  para o bloco não escorregar sobre o suporte e (b) a correspondente aceleração deste.

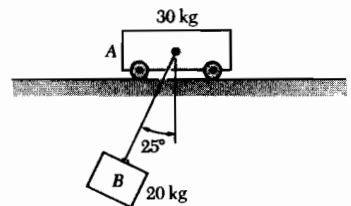
**12.31** Um bloco  $B$  de 53,4 N repousa sobre uma cunha  $A$  de 133 N. Determinar (a) a aceleração de  $A$  e (b) a aceleração de  $B$  em relação a  $A$ , imediatamente após o sistema ter sido abandonado do repouso. Desprezam-se os atritos.



**Figuras P12.31**



**P 12.32**



**P 12.33**

**12.34** Considere um painel móvel de 178 N, suspenso pelos rolamentos  $B$  e  $C$ , como indica a figura. Um contrapeso de 111 N está ligado a um cabo e, nos casos (a) e (c), está inicialmente em contato com o painel. Determine, em cada caso, a aceleração do painel e a tensão no cabo, imediatamente após o sistema ter sido abandonado do repouso. Desprezam-se os atritos.

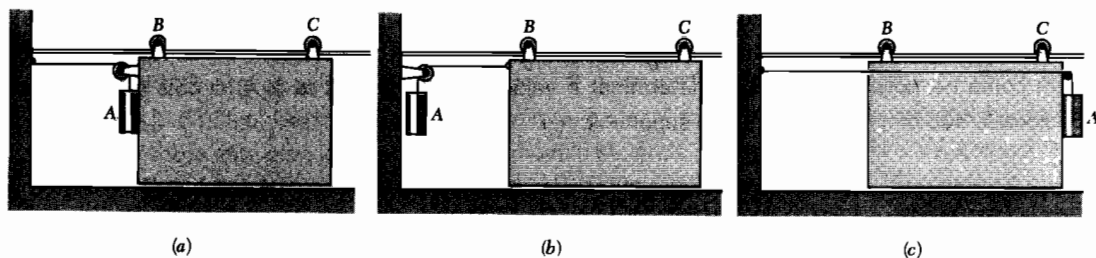
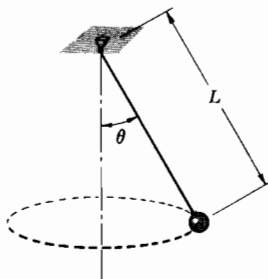


Figura P 12.34

**12.35** Uma bola pesando 22,2 N descreve uma circunferência horizontal, como indica a figura. Sabendo-se que  $L = 1,22$  m e que a máxima tensão suportada pelo fio é 53,4 N, determinar (a) a máxima velocidade da esfera e (b) o correspondente ângulo.



Figuras P 12.35 e P 12.36

**12.36** Uma esfera de 3 kg descreve uma circunferência horizontal a uma velocidade de 1,2 m/s. Sabendo-se que  $L = 800$  mm, determinar (a) o ângulo  $\theta$  e (b) a tensão no fio.

**12.37 e 12.38** Um fio ACB passa através de um anel C preso numa esfera que descreve uma circunferência horizontal, com uma velocidade constante  $v$ . Sabendo-se que a tensão é a mesma em ambas as partes do fio, determinar a velocidade  $v$ .

**12.39** Dois fios AC e BC estão ligados em C a uma esfera que descreve uma circunferência horizontal, com velocidade  $v$  constante. Determine o intervalo de valores de  $v$  para os quais ambos os fios permanecem tensionados.

**12.40** Dois fios AC e BC estão presos em C a uma esfera que percorre, em movimento uniforme, uma circunferência horizontal. Determinar o intervalo de valores da velocidade  $v$  da esfera para os quais a tensão em qualquer dos fios não excede 35 N.

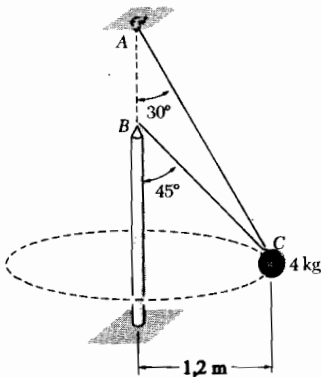


Fig. P 12.37, P 12.39, P 12.40 e P 12.42

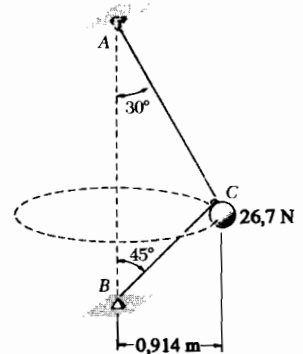


Fig. P 12.38 e P 12.41

**\*12.41** Dois fios  $AC$  e  $BC$  estão ligados em  $C$  a uma esfera em movimento circular uniforme, como indica a figura. Determinar o intervalo de valores da velocidade  $v$  da esfera para que ambos os fios permaneçam tensionados e nenhum deles fique submetido a tensão superior a  $53,4$  N.

**\*12.42** Dois fios  $AC$  e  $BC$  estão ligados em  $C$  a uma esfera que se move, com velocidade constante  $v$ , numa circunferência horizontal. Determine o intervalo de valores de  $v$  para que ambos os fios permaneçam tensionados e nenhum deles fique submetido a tensões superiores a  $50$  N.

**12.43** Mantém-se suspensa uma pequena esfera de peso  $P$ , por meio de fios  $AB$  e  $CD$ , como se mostra na figura. (a) Determine a tensão no fio  $CD$ . (b) Se o fio  $AB$  for cortado, qual deverá ser a tensão em  $CD$ , imediatamente após o corte?

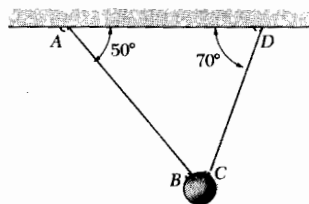
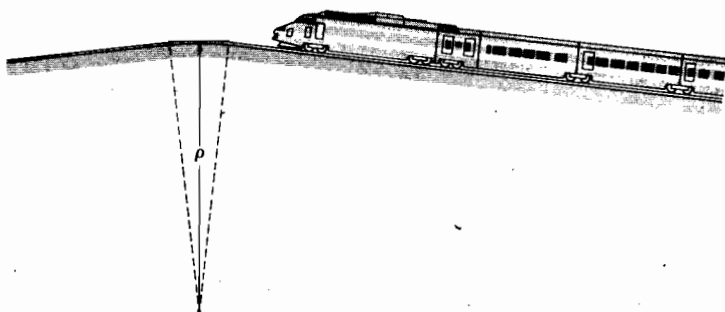


Figura P 12.43

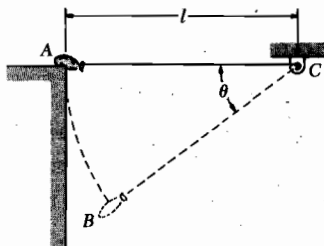
**12.44** Resolva o problema anterior supondo que o fio  $CD$  é cortado, em vez de  $AB$ .

**12.45** O trem francês de alta velocidade (TGV) que corre entre Paris e Lyon usa trilhos especiais vedados a trens de carga. Por essa razão os projetistas da linha puderam usar aclives mais acentuados que os normalmente permitidos para estradas de ferro. Por outro lado, foi necessário evitar variações bruscas de inclinação por causa das altas velocidades atingidas. Estabeleceu-se, portanto, um limite inferior para o raio de curvatura  $\rho$  do perfil vertical da estrada. (a) Sabendo-se que a máxima velocidade de teste foi de 382 km/h, determinar o menor valor permitido para  $\rho$ . (b) Considerando-se o valor mínimo de  $\rho$  obtido em (a), determinar a força que o assento de uma poltrona do trem exerce numa pessoa de 80 kg, quando se passa a 270 km/h pelo topo e pela base de uma colina.



**Figura P 12.45**

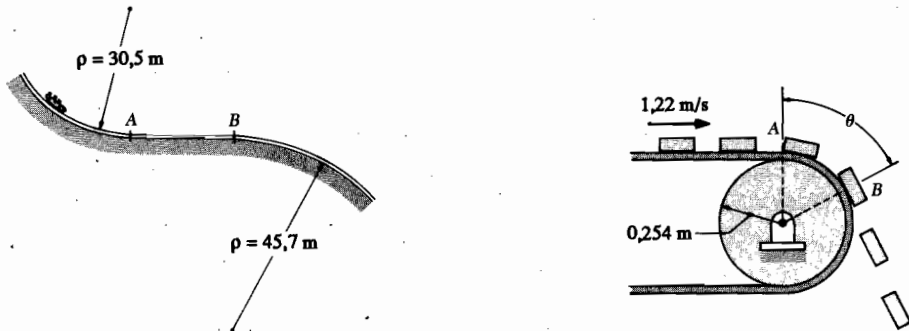
**12.46** Empurra-se suavemente do ponto A de um muro um pequeno saquinho atado a um fio de comprimento  $l$ . (a) Determine para uma posição genérica B a componente tangencial  $a_t$  da aceleração do saquinho e obtenha por integração a sua velocidade  $v$ . (b) Determine o ângulo  $\theta$  para o qual o fio se romperá, sabendo-se que ele suporta uma tensão máxima igual ao dobro do peso do saquinho.



**Figura P 12.46**

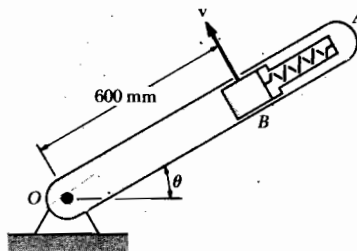
**12.47** O trecho de trilho mostrado na figura está contido num plano vertical. A porção  $AB$  é retilínea e horizontal e as partes anterior a  $A$  e posterior a  $B$  têm os raios de curvatura mostrados na figura. Um carrinho a  $72,4 \text{ km/h}$  sofre repentinamente a ação de seus freios, de modo que suas rodas escorregam sobre o trilho ( $\mu_c = 0,25$ ). Determinar a desaceleração inicial do carrinho se os freios forem acionados (a) quando o carro quase tiver alcançado  $A$ , (b) quando estiver em  $AB$  e (c) quando tiver acabado de passar por  $B$ .

**12.48** Uma esteira rolante descarrega uma série de pacotinhos, cada um pesando  $3,34 \text{ N}$ . Sabendo-se que o coeficiente de atrito estático entre a esteira e cada pacotinho vale  $0,40$ , determinar (a) a força exercida pela esteira sobre um pacote, imediatamente após ter passado por  $A$  e (b) o ângulo  $\theta$  que define o ponto  $B$  onde os pacotes começam a escorregar relativamente à esteira.



**Figuras P 12.47 e P 12.48**

**12.49** Um bloco de  $200 \text{ g}$  encaixa-se numa cavidade feita numa barra, como indica a figura. A barra  $OA$  gira num plano vertical com velocidade angular constante tal que  $v = 2 \text{ m/s}$  (veja a figura). Sabendo que a mola exerce uma força de  $0,8 \text{ N}$  e desprezando o efeito de atrito, determine os valores de  $\theta$  para os quais o bloco  $B$  está em contato com a parede (da cavidade) mais próxima do eixo de rotação  $O$ .



**Figura P 12.49**

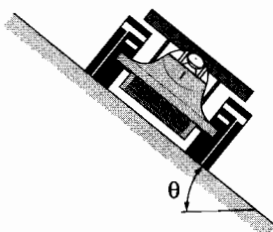
**12.50** Resolva o problema anterior, supondo que a mola exerce sobre o bloco  $B$  uma força de intensidade  $F = 3 \text{ N}$ .

**12.51** Expressar a mínima e a máxima velocidades de segurança, relativamente a derrapagens de um carro que trafegue numa rodovia compensada, em função do raio  $r$  da curva, do ângulo  $\theta$  de superelevação e do ângulo de atrito estático  $\phi_s$  entre os pneus e o pavimento.

**12.52** Um piloto de prova propõe-se a dirigir um pequeno carro, a uma velocidade de  $64,4 \text{ km/h}$ , na parede vertical de um fosso circular de  $15,2 \text{ m}$  de raio. Sabendo-se que o centro de massa piloto-carro encontra-se a  $0,610 \text{ m}$  da parede, determinar o coeficiente de atrito estático mínimo entre os pneus e a parede.

**12.53** Para a curva da rodovia considerada no Problema 12.6, determinar a máxima velocidade de segurança, supondo que o coeficiente de atrito estático pneus-pavimento é  $0,60$ .

**12.54** Uma curva de uma pista de corrida tem raio de  $150 \text{ m}$  e a velocidade de segurança é de  $135 \text{ km/h}$  (para a definição de velocidade de segurança em pistas consultar o Problema 12.6). Sabendo-se que um carro começa a derrapar na curva quando sua velocidade atinge  $300 \text{ km/h}$ , determinar (a) o ângulo de superelevação  $\theta$  (b) o coeficiente de atrito estático pneus-pista e (c) a velocidade mínima para a qual o carro pode ser controlado na curva.



**Figura P 12.54**

**12.55** Um cursor  $C$  de  $200 \text{ g}$  pode deslizar num aro semicircular em rotação em torno da vertical  $AB$ , a uma velocidade angular constante de  $6$  radianos por segundo. Determinar o valor mínimo do coeficiente de atrito estático aro-cursor para não haver deslizamento de  $C$  quando (a)  $\theta = 90^\circ$ , (b)  $\theta = 75^\circ$  e (c)  $\theta = 45^\circ$ . Indicar, em cada caso, o sentido do movimento iminente.

**12.56** Determine o vetor força de atrito agente no cursor  $C$  considerado no problema anterior, imediatamente após ter sido abandonado no aro girante, na posição correspondente a (a)  $\theta = 70^\circ$  e (b)  $\theta = 30^\circ$ . Os coeficientes de atrito valem  $\mu_e = 0,25$  e  $\mu_c = 0,20$ . Indicar também em qual dos casos o cursor deslizará ao longo do aro.



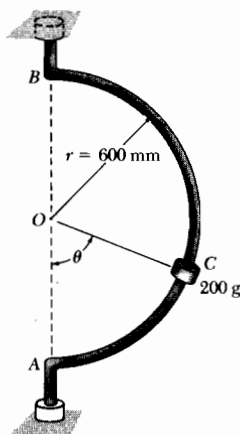
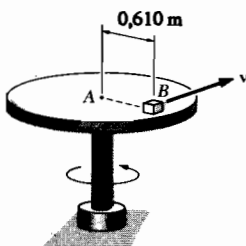


Figura P 12.55

**\*12.57** Considerando-se o sistema cursor-aro girante tratado no Problema 12.55, determinar (a) os três valores de  $\theta$  para os quais o cursor não escorregará no aro (supor atrito desprezível) e (b) o intervalo de valores de  $\theta$  para os quais o cursor não deslizará (supor um coeficiente de atrito estático de 0,25). *Sugestão:* na parte b resolver por tentativa a equação obtida para  $\theta$ .

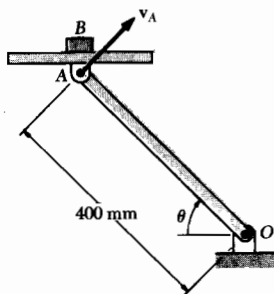
**12.58** Considere-se uma mesa girante que suporta um bloquinho B. A mesa, partindo do repouso, adquire um movimento de rotação tal que o bloco B mantém-se com uma aceleração tangencial constante  $a_t = 1,83 \text{ m/s}^2$ . Determine (a) quanto tempo demora para o bloco começar a escorregar na mesa e (b) a sua velocidade  $v$  no instante do deslizamento. O coeficiente de atrito estático bloco-mesa é 0,60.



Figuras P 12.58 e P 12.59

**12.59** Põe-se a girar uma mesa, a partir do repouso, de modo que um bloquinho  $B$  sobre ela adquira uma aceleração tangencial constante. Determinar o menor intervalo de tempo no qual o bloco pode atingir a velocidade  $v = 1,52 \text{ m/s}^2$ , sem escorregar. O coeficiente de atrito estático bloco-mesa é 0,50.

**12.60** Uma plataforma articulada em  $A$  a uma barra  $OA$  suporta um bloquinho  $B$ . O ponto  $A$  descreve uma circunferência vertical, a uma velocidade escalar constante  $v_A$ . Usando-se um sistema especial, não mostrado na figura, mantém-se a plataforma sempre em posição horizontal. Os coeficientes de atrito bloco-plataforma valem  $\mu_e = 0,40$  e  $\mu_c = 0,30$ . Determinar (a) a máxima velocidade  $v_A$  para a qual o bloco não escorrega na plataforma e (b) os valores de  $\theta$  para os quais o escorregamento é iminente.



**Figura P 12.60**

**\*12.61** Considerando-se o sistema tratado no problema anterior, verifica-se que o bloco  $B$  escorrega intermitentemente sobre a plataforma, quando o ponto  $A$  se move a uma velocidade constante  $v_A = 1,22 \text{ m/s}$ . Determinar os valores de  $\theta$  para os quais o bloco começa a deslizar.

**12.62** No tubo de raios catódicos mostrado na figura, os elétrons emitidos pelo cátodo e atraídos pelo ânodo passam por um orifício neste último e mantêm uma trajetória retilínea, com velocidade  $v_0$ , até atingirem o ponto  $A$  da tela (isto ocorre quando não há uma diferença de potencial entre as placas horizontais). Entretanto, quando se estabelece uma voltagem  $V$ , cada elétron será defletido quando passar entre as placas horizontais, pois ficará submetido a uma força vertical  $F$ , cuja intensidade é  $F = eV/d$  onde  $e$  é o módulo da carga eletrônica e  $d$  é a distância entre as placas horizontais. Deduza uma expressão para a deflexão  $\delta$  em termos de  $V$ ,  $v_0$ , o módulo  $e$  e da carga do elétron, sua massa  $m$  e as dimensões  $d$ ,  $l$  e  $L$ .

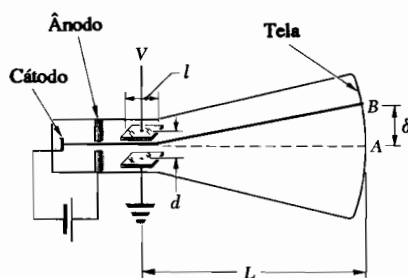


Figura P 12.62

**12.63** No problema anterior, determine o menor valor permissível para a razão  $d/l$  em termos de  $e$ ,  $m$ ,  $v_0$  e  $V$ , para os elétrons não atingirem a placa positiva.

**12.64** Um fabricante deseja projetar um novo tubo de raios catódicos que tenha apenas a metade do comprimento do modelo em fabricação. O tamanho da tela e todas as outras características do circuito deverão ser mantidos. Como deve ser modificado o comprimento  $l$  das placas? Ver no Problema 12.62 a descrição do tubo de raios catódicos.

**12.7 Momento Angular de um Ponto Material. Variação do Momento Angular** Considere-se um ponto material  $P$  de massa  $m$  que se desloca em relação a um sistema de referência newtoniano  $Oxyz$ . Como vimos na Seção 12.3, a quantidade de movimento de um ponto material num dado instante é definida como o vetor  $m\mathbf{v}$  obtido multiplicando-se a velocidade  $\mathbf{v}$  do ponto material por sua massa  $m$ . O momento em relação a  $O$  do vetor  $m\mathbf{v}$  é chamado *momento da quantidade de movimento ou momento angular* do ponto material em relação a  $O$ , naquele instante sendo denominado  $\mathbf{H}_O$ . Recordando a definição de momento de um vetor (Seção 3.6), e denominando  $\mathbf{r}$  o vetor de posição de  $P$ , escrevemos

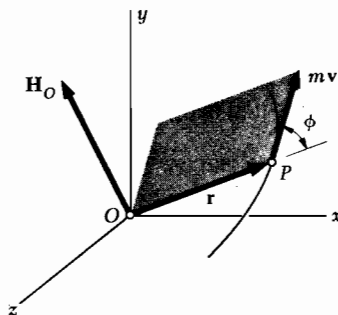
$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (12.12)$$

Observemos que  $\mathbf{H}_O$  é um vetor perpendicular ao plano que contém  $\mathbf{r}$  e  $m\mathbf{v}$  e tem módulo

$$H_O = rmv \sin \phi \quad (12.13)$$

onde  $\phi$  é ângulo entre  $\mathbf{r}$  e  $m\mathbf{v}$  (Fig. 12.10). O sentido de  $\mathbf{H}_O$  pode ser determinado a partir do sentido de  $m\mathbf{v}$ , aplicando-se a regra da mão direita. A unidade de momento angular é obtida multiplicando as unidades de comprimento e quantidade de movimento (Seção 12.4). Com unidades do sistema SI tem-se

$$(\text{m})(\text{kg} \cdot \text{m/s}) = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$



**Figura 12.10**

Expressando os vetores  $\mathbf{r}$  e  $m\mathbf{v}$  em termos de suas coordenadas cartesianas e aplicando a fórmula (3.10), escrevemos

$$\mathbf{H}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \quad (12.14)$$

As componentes de  $\mathbf{H}_O$ , que também representam os momentos da quantidade de movimento  $m\mathbf{v}$  em relação aos eixos coordenados, podem ser obtidas pelo desenvolvimento do determinante em (12.14). Tem-se

$$\begin{aligned} H_x &= m(yv_z - zv_y) \\ H_y &= m(zv_x - xv_z) \\ H_z &= m(xv_y - yv_x) \end{aligned} \quad (12.15)$$

No caso de um ponto material que se move no plano  $Oxy$  temos  $z = v_z = 0$  e as componentes  $H_x$  e  $H_y$  reduzem-se a zero. O momento angular é então perpendicular ao plano  $Oxy$  e definido completamente pelo escalar

$$H_O = H_z = m(xv_y - yv_x) \quad (12.16)$$

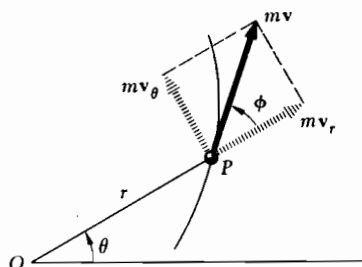
que pode ser positivo ou negativo dependendo do sentido do movimento do ponto material, relativamente a  $O$ . Considerando-se a quantidade de movimento expressa em suas componentes radial e transversal (Fig. 12.11), pode-se escrever  $H_O$  em coordenadas polares

$$H_O = rmv \sin \phi = rmv_\theta \quad (12.17)$$

ou, levando-se em conta (11.45),

$$H_O = mr^2\dot{\theta}$$

(12.18)



**Figura 12.11**

Calcularemos agora a derivada em relação a  $t$  do momento angular  $H_O$  de um ponto material  $P$  que se desloca no espaço. Derivando ambos os membros da Eq. (12.12) e recordando a regra para a derivada do produto vetorial (Seção 11.10), escrevemos

$$\dot{H}_O = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\mathbf{a}$$

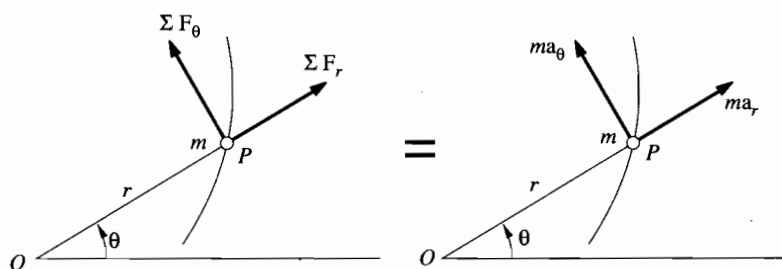
Como os vetores  $\mathbf{v}$  e  $m\mathbf{v}$  são paralelos, o primeiro termo da expressão obtida é zero; e, pela segunda lei de Newton,  $m\mathbf{a}$  é igual à soma  $\Sigma \mathbf{F}$  das forças que atuam sobre  $P$ . Observando que  $\mathbf{r} \times \Sigma \mathbf{F}$  representa a soma  $\Sigma \mathbf{M}_O$  dos momentos, em relação a  $O$  dessas forças, escrevemos

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \quad (12.19)$$

A Eq. (12.19), obtida diretamente da segunda lei de Newton, afirma que a soma dos momentos, em relação a  $O$  (fixo), das forças que atuam sobre o ponto material é igual à variação na unidade de tempo do momento angular do ponto material, em relação a  $O$ .

**12.8 Equações do Movimento em Termos das Componentes Radial e Transversal** Considere-se um ponto material  $P$ , de coordenadas polares  $r$  e  $\theta$ , que se move num plano sob a ação de várias forças. Expressando as forças e aceleração do ponto material em suas componentes radial e transversal (Fig. 12.12) e substituindo o resultado na Eq. (12.2), obtemos as duas equações escalares

$$\Sigma F_r = ma_r \quad \Sigma F_\theta = ma_\theta \quad (12.20)$$



**Figura 12.12**

Das Eqs. (11.46) tem-se

$$\Sigma F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (12.21)$$

$$\Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \quad (12.22)$$

A Eq. (12.22) poderia ter sido obtida da Eq. (12.19). De fato, lembrando (12.18) e notando que  $\Sigma \mathbf{M}_O = r \Sigma \mathbf{F}$ , a Eq. (12.19) fornece

$$\begin{aligned} r \Sigma F_{\theta} &= \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\theta}) \\ &= m(r^2 \ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) \end{aligned}$$

e, após dividir ambos os membros por  $r$ ,

$$\Sigma F_{\theta} = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \quad (12.22)$$

### 12.9 Movimento sob Força Central. Conservação do Momento Angular

Quando a única força que atua sobre o ponto material  $P$  é uma força  $\mathbf{F}$  paralela ao vetor de posição  $\mathbf{r}$  de  $P$  relativamente a um ponto fixo  $O$ , diz-se que o ponto material se move sob a ação de uma *força central* e o ponto  $O$  é chamado de *centro de força* (Fig. 12.13). Como a reta de ação de  $\mathbf{F}$  passa por  $O$ , devemos ter  $\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$  em qualquer instante. Nesse caso, a Eq. (12.19) se reduz a

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{0}$$

para todos os valores de  $t$ , ou integrando em  $t$ ,

$$\mathbf{H}_O = \text{vetor constante} \quad (12.23)$$

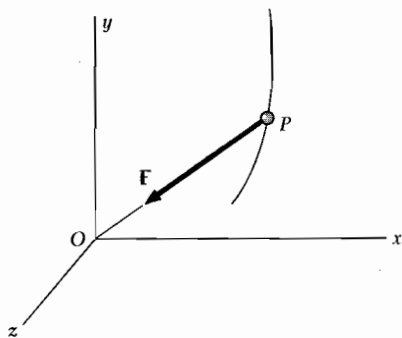


Figura 12.13

Concluimos, então, que o momento angular do ponto material que se move sob a ação de uma força central é constante em módulo, direção e sentido.

Lembrando a definição de momento angular de um ponto material (Seção 12.7), escrevemos

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{H}_O = \text{vetor constante} \quad (12.24)$$

da qual se conclui que o vetor de posição  $\mathbf{r}$  do ponto  $P$  deve ser perpendicular ao vetor constante  $\mathbf{H}_O$ . Então, um ponto material sob uma força central move-se num plano fixo perpendicular a  $\mathbf{H}_O$ . O vetor  $\mathbf{H}_O$  e o plano fixo são definidos pela posição inicial do vetor  $\mathbf{r}_O$  e pela velocidade inicial  $\mathbf{v}_O$  do ponto material. Por conveniência, suporemos que o plano da figura coincide com o plano fixo do movimento (Fig. 12.14).

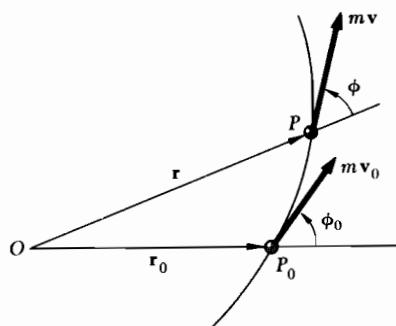


Figura 12.14

Como o módulo  $H_O$  do momento angular do ponto material  $P$  é constante, o segundo membro da Eq. (12.13) deve ser constante. Escrevemos, portanto,

$$rmv \sin \phi = r_O m v_O \sin \phi_O \quad (12.25)$$

Esta relação aplica-se ao movimento de qualquer ponto material sob a ação de uma força central. Como a força gravitacional exercida pelo Sol sobre um planeta é uma força central dirigida para o centro do Sol, a Eq. (12.25) é fundamental para o estudo do movimento planetário. Pela mesma razão, é também fundamental ao estudo do movimento de veículos espaciais em órbita ao redor da Terra.



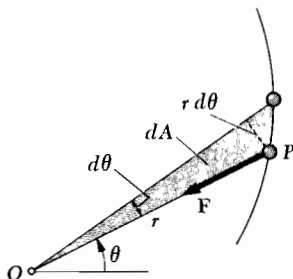
Lembrando a Eq. (12.18), podemos afirmar que o módulo  $H_O$  do momento angular da partícula  $P$  é constante, escrevendo

$$mr^2\dot{\theta} = H_O = \text{constante} \quad (12.26)$$

ou, dividindo por  $m$  e chamando de  $h$  o momento angular por unidade de massa  $H_O/m$ ,

$$r^2\dot{\theta} = h \quad (12.27)$$

À Eq. (12.27) pode ser dada uma interpretação geométrica interessante. Observando da Fig. 12.15 que o raio vetor  $OP$  varre uma área infinitesimal  $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$ , quando gira de um ângulo  $d\theta$ , e definindo a *velocidade areolar* do ponto material como o quociente  $dA/dt$ , concluímos que o primeiro membro da Eq. (12.27) representa o dobro da velocidade areolar do ponto material. Podemos dizer então que, quando um ponto material se move sob uma força central, sua velocidade areolar é constante.



**Figura 12.15**

**12.10 Lei da Gravitação de Newton** Como foi visto na seção precedente, a força gravitacional exercida pelo Sol sobre um planeta, ou pela Terra sobre um satélite em órbita, é um exemplo importante de força central. Nesta seção mostraremos como determinar o módulo de uma força gravitacional.

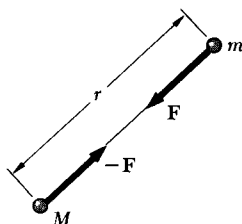


Figura 12.16

Newton estabeleceu em sua lei de gravitação universal que dois pontos materiais distanciados de  $r$  e com massas, respectivamente,  $M$  e  $m$  atraem-se com forças opostas  $\mathbf{F}$  e  $-\mathbf{F}$  situadas sobre a linha que os une (Fig. 12.16). O módulo comum  $F$  das duas forças é

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (12.28)$$

onde  $G$  é uma constante, chamada constante de gravitação. O valor experimental de  $G$  é  $(6,673 \pm 0,003) \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$ . Embora as forças gravitacionais existam entre qualquer par de corpos, seus efeitos são apreciáveis somente quando pelo menos um dos corpos tem massa muito grande. O efeito das forças gravitacionais é evidente no caso do movimento de um planeta ao redor do Sol, de satélites em órbita ao redor da Terra ou de corpos caindo na superfície da Terra.

Como a força exercida pela Terra sobre um corpo de massa  $m$ , localizado sobre sua superfície ou próximo a ela, é definida como o peso  $\mathbf{P}$  do corpo, podemos substituir  $F$  pelo módulo  $P = mg$  do peso, e  $r$  pelo raio  $R$  da Terra na Eq. (12.28). Obtemos

$$P = mg = \frac{GM}{R^2} m \quad \text{ou} \quad g = \frac{GM}{R^2} \quad (12.29)$$

onde  $M$  é a massa da Terra. Como a Terra não é realmente uma esfera, a distância  $R$  de seu centro depende do ponto escolhido na sua superfície, e os valores de  $P$  e  $g$  variam, com a altitude e latitude do ponto considerado. Outra razão para a variação de  $P$  e  $g$  com a latitude é que um referencial fixo na Terra não é um sistema de referência newtoniano (ver Seção 12.2). Uma definição mais precisa de peso de um corpo deve portanto, incluir

uma componente representando a força centrífuga devida à rotação da Terra. Os valores de  $g$  ao nível do mar variam de  $9,781 \text{ m/s}^2$  no equador a  $9,833 \text{ m/s}^2$  nos pólos.\*

A força exercida pela Terra sobre um corpo de massa  $m$  localizado no espaço à distância  $r$  do centro da Terra pode ser determinada da Eq. (12.28). Os cálculos serão um pouco simplificados se notarmos que, de acordo com a Eq (12.29), o produto da constante de gravitação  $G$  e da massa  $M$  da Terra pode ser expresso por

$$GM = gR^2 \quad (12.30)$$

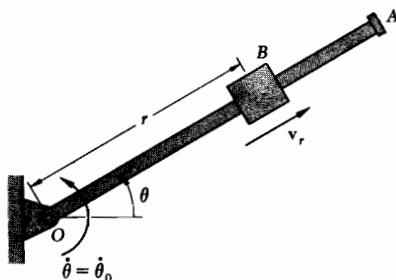
onde  $g$  e o raio  $R$  da Terra são substituídos por seus valores médios  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  e  $R = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$ .

A descoberta da lei da gravitação universal tem sido atribuída muitas vezes ao fato de que Newton, após observar a queda de uma maçã de uma árvore, considerou que a Terra deveria atrair a maçã e a Lua da mesma forma. Embora se duvide atualmente que este incidente tenha ocorrido, pode-se dizer que Newton poderia não ter formulado sua lei se não tivesse percebido que a aceleração de queda dos corpos deve ter a mesma origem que a aceleração que mantém a Lua em sua órbita. Este conceito básico de continuidade da atração universal é agora mais facilmente entendido quando a lacuna entre a maçã e a Lua está sendo preenchida com mísseis balísticos de longo alcance e satélites artificiais da Terra.

## Problema Resolvido 12.7

Um bloco  $B$  de massa  $m$  pode deslizar livremente, sem atrito, num braço  $OA$ , que gira num plano horizontal com velocidade constante  $\dot{\theta}_0$ . Sabendo-se que  $B$  é liberado a uma distância  $r_0$  de  $O$ , exprima em função de  $r$  (a) a componente  $v_r$  da velocidade de  $B$  ao longo de  $OA$ , (b) o módulo da força horizontal  $F$  exercida sobre  $B$  pelo braço  $OA$ .

\*Uma fórmula exprimindo  $g$  em termos da latitude  $\phi$  foi dada no Problema 12.2



**Solução** Como todas as outras forças são perpendiculares ao plano da figura, a única força desse plano que atua sobre B é a força  $\mathbf{F}$  pelo braço OA.

**Equações do Movimento** Usando componentes radial e transversal

$$+ \nearrow \Sigma F_r = m a_r: \quad 0 = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (1)$$

$$+ \nwarrow \Sigma F_\theta = m a_\theta: \quad F = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \quad (2)$$

**a) Componente  $v_r$  da Velocidade.** Como  $v_r = \dot{r}$ , temos

$$\ddot{r} = \dot{v}_r = \frac{d v_r}{dt} = \frac{d v_r}{dr} \frac{dr}{dt} = v_r \frac{d v_r}{dr}$$

Substituindo  $\ddot{r}$  em (1), lembrando que  $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$  e separando as variáveis

$$v_r d v_r = \dot{\theta}_0^2 r dr$$

Multiplicando por 2 e integrando de 0 a  $v_r$  e de  $r_0$  a  $r$

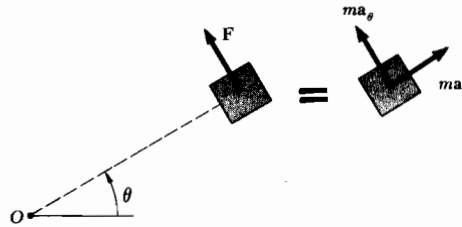
$$v_r^2 = \dot{\theta}_0^2 (r^2 - r_0^2)$$

$$v_r = \dot{\theta}_0 (r^2 - r_0^2)^{1/2}$$

**b) Força Horizontal F.** Fazendo  $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$ ,  $\ddot{\theta} = 0$  e  $\dot{r} = v_r$  na Eq. (2), e substituindo  $v_r$  na expressão obtida na parte a:

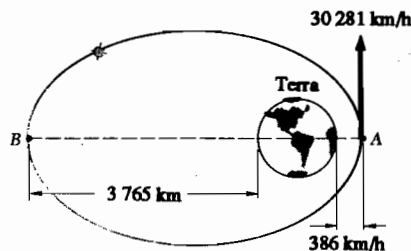
$$F = 2m\dot{\theta}_0 (r^2 - r_0^2)^{1/2} \dot{\theta}_0$$

$$F = 2m\dot{\theta}_0^2 (r^2 - r_0^2)^{1/2} \Leftarrow$$



### Problema Resolvido 12.8

Lançou-se um satélite numa direção paralela à superfície da Terra, com velocidade de 30281 km/h e a uma altura de 386 km. Determine a velocidade do satélite quando este atinge a altura máxima de 3765 km. O raio médio da Terra é de 6372 km.



**Solução** Como o satélite se move sob a ação de força central dirigida para o centro O da Terra, seu momento angular  $H_O$  é constante. Da Eq. (12.13), temos

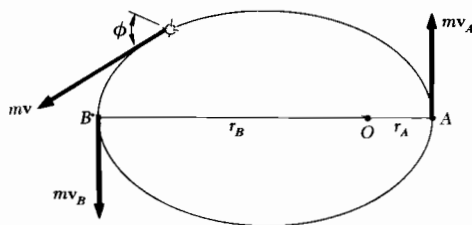
$$rmv \sin \phi = H_O = \text{constante}$$

que mostra que  $v$  é mínimo em  $B$ , onde  $r$  e  $\sin \phi$  são máximos. Considerando a conservação do momento angular entre  $A$  e  $B$

$$r_A m v_A = r_B m v_B$$

$$v_B = v_A \frac{r_A}{r_B} = 30281 \frac{6372 + 386}{6372 + 3765}$$

$$v_B = 20193 \text{ km/h} \quad \Leftarrow$$



## Problemas

**12.65** O movimento plano de um ponto-material é definido pelas relações  $r = 25t^3 - 50t^2$  e  $\theta = t^3 - 4t$ , onde  $r$  é expresso em milímetros,  $t$  em segundos e  $\theta$  em radianos. O ponto tem massa de 2 kg e se move num plano horizontal. Determine as componentes radial e transversal da força agente no ponto nos instantes (a)  $t = 0$  e (b)  $t = 1$  s.

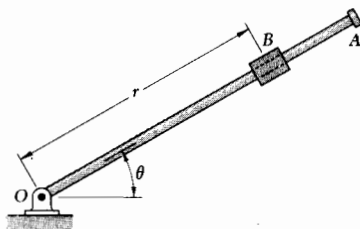
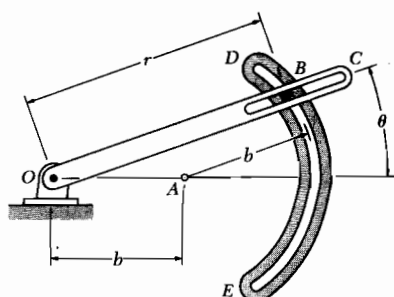


Figura 12.65

**12.66** Considerando o movimento do ponto material tratado no problema anterior, obter a força, em componentes radial e transversal, quando o ponto passa novamente pela origem.

**12.67** Para o movimento tratado no Probl. Resolvido 11.12, determine a força aplicada pela barra  $OA$  no cursor  $B$  e a força radial  $Q$  que deve ser aplicada ao cursor (a) quando  $\theta = 0$  e (b) quando  $\theta = 30^\circ$ . Suponha que  $B$  tem massa de 2 kg e que a barra gira num plano vertical.

**12.68** O pino  $B$ , pesando 1,11 N, pode deslizar ao longo da barra girante  $OC$  e também ao longo da peça circular  $DE$  de raio  $b = 0,508$  m. Desprezando atrito e supondo que  $OC$  gira com velocidade angular constante  $\dot{\theta}_0 = 15$  rad/s num plano horizontal, determinar, em função de  $\theta$ , (a) as componentes radial e transversal da força resultante sobre o pino  $B$  e (b) as forças  $P$  e  $Q$  sobre o pino  $B$ , devidas à barra  $OC$  e à peça curva  $DE$ , respectivamente.

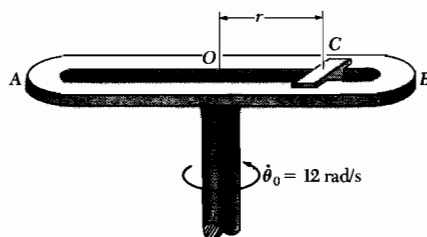


**Figura P12.68**

**12.69** Resolva o problema anterior para a posição  $\theta = 20^\circ$ , supondo que os correspondentes valores de  $\dot{\theta}$  e  $\ddot{\theta}$  são, respectivamente, 15 rad/s e 250 rad/s<sup>2</sup>.

**12.70** O cursor  $C$  de 200 g pode deslizar ao longo da fenda existente na peça  $AB$ . A peça  $AB$  gira num plano horizontal, com velocidade angular constante  $\dot{\theta}_0 = 12$  rad/s. O cursor está preso a uma mola de constante  $K = 36$  N/m, cuja configuração de relaxamento corresponde a  $r = 0$ . Num dado instante o cursor passa pela posição  $r = 400$  mm com uma velocidade radial  $v_r = 1,8$  m/s. Determinar para esse instante (a) as componentes radial e transversal da aceleração do cursor, (b) a aceleração do cursor relativa à peça  $AB$  e (c) a força horizontal exercida sobre o cursor pela barra  $AB$ .

**\*12.71** Consideremos o sistema tratado no problema anterior. Suponhamos que o cursor seja solto com velocidade radial nula, na posição  $r = 500$  mm. Desprezando-se os atritos, determinar para  $r = 300$  mm (a) as componentes radial e transversal da velocidade do cursor, (b) as componentes radial e transversal de sua aceleração e (c) a força horizontal sobre o cursor devida à peça  $AB$ .



Figuras P 12.70 e P 12.71

**\*12.72** Resolva o problema anterior, supondo que a mola esteja relaxada quando o cursor está localizado a 45 mm à esquerda do ponto médio O da peça AB ( $r = -45 \text{ mm}$ ).

**12.73** Lança-se um ponto material de massa  $m$  da posição A, com velocidade inicial  $\mathbf{v}_0$  perpendicular à reta OA. O ponto se desloca ao longo da trajetória semicircular OA, sob a ação de uma força central  $\mathbf{F}$ . Notando que  $r = r_0 \cos \theta$  e usando a Eq. (12.27), mostre que a velocidade  $v$  do ponto material é inversamente proporcional ao quadrado da distância  $r$  do ponto ao centro de força O.

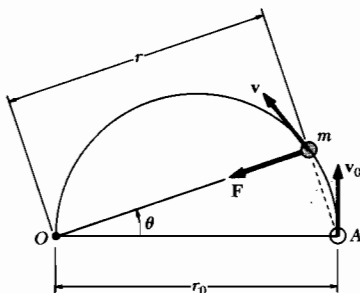


Figura P 12.73

**12.74** Lança-se do ponto A um ponto material de massa  $m$ , com velocidade  $\mathbf{v}_0$  perpendicular a OA. O ponto se desloca sob a ação de uma força central  $\mathbf{F}$  com sentido de O para A. A equação da trajetória é definida por  $r = r_0 / \cos 2\theta$ . Use a Eq. (12.29) para expressar as componentes radial e transversal da velocidade  $v$  do ponto material, em função de  $\theta$ .



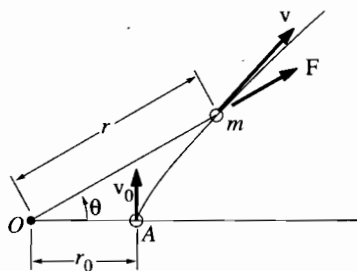


Figura P 12.74

**12.75** (a) Mostre, para o ponto material considerado no Problema 12.73, que a força central  $\mathbf{F}$  é inversamente proporcional à quinta potência da distância  $r$  do ponto material ao centro de força  $O$ . (b) Determine a intensidade de  $\mathbf{F}$  para  $\theta = 0$ .

**12.76** (a) Mostre, para o ponto material considerado no Problema 12.74, que a força central  $\mathbf{F}$  é inversamente proporcional ao cubo da distância  $r$  do ponto ao centro de força  $O$ . (b) Determine a intensidade de  $\mathbf{F}$  para  $\theta = 0$ .

**12.77** Denotando por  $\rho$  a densidade média de um planeta, mostre que o tempo mínimo gasto por um satélite para completar uma volta em torno do planeta é  $(3\pi/G\rho)^{1/2}$ , onde  $G$  é a constante de gravitação.

**12.78** Mostre que o raio  $r$  da órbita da Lua pode ser determinado a partir do conhecimento do raio  $R$  da Terra, da aceleração da gravidade  $g$  na superfície terrestre e do tempo  $\tau$  para uma revolução completa da Lua ao redor da Terra. Calcule  $r$ , considerando que  $\tau = 27,3$  dias.

**12.79** Colocam-se os satélites de comunicação em órbitas geossíncronas, isto é, órbitas circulares nas quais os satélites completam uma volta ao redor da Terra em um dia sideral (23 h 56 min), de modo que ficam estacionários em relação ao solo. Determine (a) a altitude de um desses satélites e (b) a sua velocidade.

**12.80** Os períodos de revolução de dois satélites de Júpiter, Io e Calisto, valem 1 dia 18 h 28 min e 16 dias 16 h 32 min, respectivamente. O raio da órbita de Calisto é  $1,884 \times 10^6$  km. Determine (a) a massa de Júpiter e (b) o raio da órbita de Io.

**12.81** Uma nave Apollo com velocidade de  $5,13 \times 10^3$  km/h descreve uma órbita circular, em torno da Lua, de  $2,41 \times 10^3$  km de raio. Para transferi-la a uma órbita circular menor, de raio  $1,93 \times 10^3$  km, coloca-se a Apollo primeiramente numa órbita elíptica  $AB$ , reduzindo-se sua velocidade para  $4,83 \times 10^3$  km/h quando a nave passa por  $A$ . Determine (a) a velocidade da espaçonave no ponto  $B$  da trajetória elíptica e (b) de quanto se deve reduzir sua velocidade em  $B$  para introduzi-la na órbita circular menor.

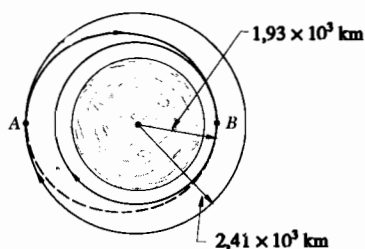


Figura P 12.81

**12.82** Deseja-se colocar uma nave espacial em órbita circular em torno de Vênus. A órbita deverá ter 8000 km de raio e situa-se num dado plano. Assim que a nave, em sua trajetória de aproximação, atingir o ponto A, sua velocidade deverá ser reduzida de  $\Delta v_A$  para introduzi-la primeiramente numa órbita elíptica. Nessa órbita, o veículo atingirá o ponto B, com velocidade bem reduzida. Nesse ponto, a velocidade será reduzida de  $\Delta v_B$ , modificando sua direção, para que a nave entre numa segunda órbita de transferência situada no plano desejado. Finalmente, quando a espaçonave atingir o ponto C sua velocidade sofrerá uma redução de  $\Delta v_C$ , entrando na órbita circular programada. A massa de Vênus corresponde a 82% da massa da Terra,  $r_A = 12 \times 10^3$  km e  $r_B = 96 \times 10^3$  km, a velocidade do veículo ao atingir A será 7400 m/s e ao atingir B 869 m/s. Nesse ponto a velocidade sofrerá uma redução de 146 m/s. Com esses dados calcular a redução de velocidade (a) em A e (b) em C.

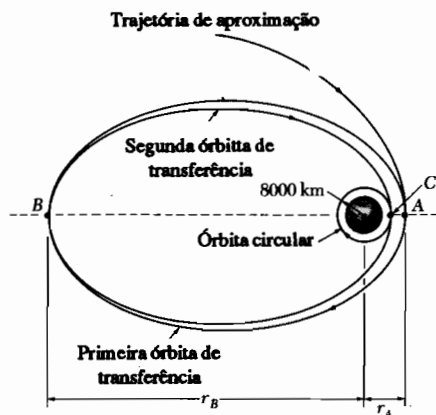


Figura P 12.82

**12.83** Considere a espaçonave tratada no problema anterior. Sabe-se que  $r_A = 10 \times 10^3$  km e  $r_B = 100 \times 10^3$  km, que a nave atingirá A com uma velocidade de 8100 m/s, e que sua velocidade se reduzirá de 400 m/s nesse ponto e então de 2300 m/s em C. Determine (a) a velocidade do veículo quando atingir B e (b) quanto sua velocidade deverá ser reduzida nesse ponto.

**12.84** Utiliza-se um rebocador espacial para colocar um satélite de comunicação numa órbita geossíncrona (Prob. 12.79) a uma altitude de  $35,8 \times 10^3$  km. O rebocador descreve inicialmente uma órbita circular a uma altitude de 354 km e, então, quando passa pelo ponto A, se introduz numa órbita elíptica de transferência. Sua velocidade nesse instante torna-se igual a 2,41 km/s. De quanto a velocidade do rebocador deve ser aumentada em B para que se transfira à órbita geossíncrona?

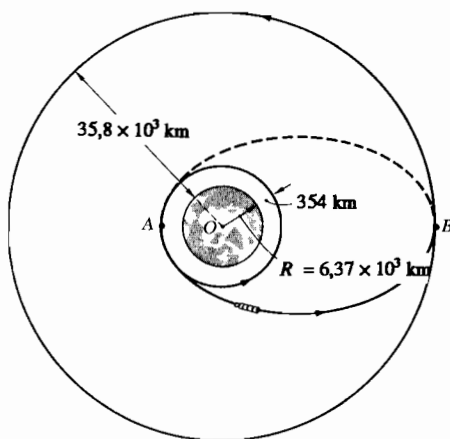


Figura P 12.84

**12.85** Uma bola de 22,2 N está montada numa haste horizontal que pode girar em torno de um eixo vertical fixo. A velocidade da bola na posição mostrada na figura é  $v = 0,610$  cm/s e a bola é mantida nessa posição por meio de um fio. Num dado instante, corta-se o fio e a bola começa a deslocar-se em direção ao ponto B, devido ao movimento de rotação da haste. Despreze a massa da haste para determinar (a) as componentes radial e transversal da aceleração da bola imediatamente após o corte do fio, (b) a aceleração da bola relativamente à haste, no mesmo instante e (c) a velocidade da bola depois de ter atingido o obstáculo B.

**12.86** Uma bola de 1,11 N desliza sem atrito sobre uma mesa horizontal. A bola mantém-se presa a um fio que passa por um orifício no centro O da mesa. Quando o comprimento do fio acima da mesa é  $r_1 = 0,457$  m, a velocidade da bola é  $v_1 = 1,52$  m/s. Sabendo-se que a tensão de ruptura do fio é 17,8 N, (a) determinar a menor distância  $r_2$  que se pode atingir sem ruptura puxando-se o fio lentamente para baixo. (b) Obter também a correspondente velocidade  $v_2$ .

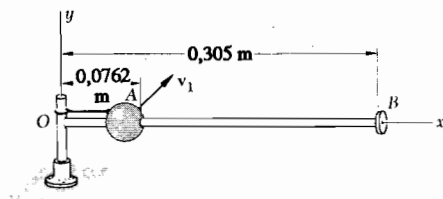


Figura P12.85

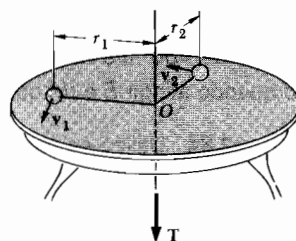


Figura P12.86

**12.87** Um cursor de 250 g pode deslizar ao longo de uma haste horizontal que pode girar em torno de um eixo vertical. Inicialmente o cursor é mantido preso no ponto A por meio de um fio ligado ao eixo. Nessa posição, o cursor comprime uma mola de 50 mm de comprimento (quando relaxada) e constante de 60 N/m. Quando a velocidade de rotação da haste atinge  $\dot{\theta}_0 = 16$  rad/s, corta-se o fio e o cursor se move ao longo da haste. Desprezando o atrito e a massa da haste, determine, para a posição (b) as componentes radial e transversal de sua aceleração e (c) a aceleração do cursor relativa à haste.

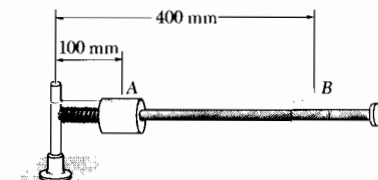


Figura P 12.87

**\*12.88** No problema anterior, determine para a posição B, (a) a componente radial da velocidade do cursor e (b) o valor de  $\dot{\theta}$ .

**\*12.11 Trajetória de um Ponto Material sob a Ação de uma Força Central** Considere-se um ponto material  $P$  que se move sob a ação de uma força central  $F$ . Obtenha uma equação diferencial que define sua trajetória.

Supondo-se a força  $\mathbf{F}$  dirigida para o centro de força  $O$ , notamos que  $\Sigma F_r$  e  $\Sigma F_\theta$  reduzem-se, respectivamente, a  $-F$  e zero nas Eqs. (12.21) e (12.22). Escrevemos, portanto,

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -F \quad (12.31)$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \quad (12.32)$$

Estas equações definem o movimento de  $P$ , todavia, por ser mais conveniente, substituiremos a Eq. (12.32) pela Eq. (12.27). Como se pode verificar facilmente, estas equações são equivalentes. De fato, derivando-se a Eq. (12.27) em relação ao tempo e multiplicando-se o resultado por  $r$ , obtém-se a Eq. (12.32). Escrevemos

$$r^2\dot{\theta} = h \quad \text{ou} \quad r^2 \frac{d\theta}{dt} = h \quad (12.33)$$

A Eq. (12.33) pode ser usada para eliminar a variável independente  $t$  da Eq. (12.31). Resolvendo a Eq. (12.33) para  $\dot{\theta}$  ou  $d\theta/dt$ , temos

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \quad (12.34)$$

da qual resulta

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -h \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (12.35)$$

Por outro lado,

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \frac{d\dot{r}}{d\theta}$$

ou, substituindo  $\dot{r}$  dado pela (12.35),

$$\ddot{r} = \frac{h}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left[ -h \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \right]$$

$$\ddot{r} = - \frac{h^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (12.36)$$

Substituindo  $\dot{\theta}$  e  $\ddot{r}$  (12.34) e (12.36), respectivamente, na Eq. (12.31), e introduzindo a função  $u = 1/r$ , obtemos, após algumas simplificações\*,

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2 u^2} \quad (12.37)$$

Na obtenção da Eq. (12.37), considerou-se a força  $\mathbf{F}$  dirigida para  $O$ . O escalar  $F$  será positivo se  $\mathbf{F}$  estiver realmente dirigida para  $O$  (força de atração) e negativo se  $\mathbf{F}$  estiver se afastando da origem  $O$  (força repulsiva). Se  $F$  é uma função conhecida de  $r$  e, portanto, de  $u$ , a Eq. (12.37) é uma equação diferencial em  $u$  e  $\theta$ . Esta equação diferencial define a trajetória seguida pelo ponto material sob a ação de uma força central  $\mathbf{F}$ . A equação da trajetória será obtida integrando-se a equação diferencial (12.37) para  $u$  como função de  $\theta$  e determinando-se as constantes de integração pelo conhecimento das condições iniciais.

**\*12.12 Aplicação à Mecânica Especial** Podemos considerar em primeira aproximação que um satélite artificial da Terra, após ter-se desligado do foguete lançador, fica sujeito apenas à atração gravitacional terrestre. Seu movimento, pode, portanto, ser determinado pelas Eqs. (12.33) e (12.37), com  $F$  dado por\*\*

$$F = \frac{GMm}{r^2} = GMmu^2$$

\* O autor exclui o caso em que  $h = 0$ , que corresponde às trajetórias que passam pelo centro e forças e são retilíneas. (Nota do R. T.)

\*\* Supõe-se que os veículos espaciais aqui considerados são atraídos unicamente pela Terra, e que suas massas são desprezíveis comparadas com a massa da Terra. Se um veículo se desloca para muito longe da Terra, sua trajetória pode ser afetada pela atração do Sol, da Lua ou de outro planeta. Como a Terra não é esférica, nem homogênea, a lei de atração de Newton é apenas uma aproximação da força efetiva que a Terra exerce sobre um satélite artificial. Assim, todas as conclusões que se obtêm, a seguir, sobre o movimento de um satélite são apenas uma primeira aproximação da realidade. (Nota do R. T.)

onde  $M$  = massa da Terra

$m$  = massa do veículo espacial

$r$  = distância do centro da Terra ao veículo

$u = 1/r$

Obtém-se, portanto, a equação diferencial

$$\frac{d^2 u}{d \theta^2} + u = \frac{GM}{h^2} \quad (12.38)$$

onde o membro à direita da equação é uma constante.

Obtém-se a solução da equação diferencial (12.38) adicionando-se a solução particular  $u = GM/h^2$  à solução geral  $u = C \cos (\theta - \theta_0)$  da correspondente equação homogênea (isto é, a equação que se obtém fazendo o membro à direita igual a zero). Escolhendo o eixo polar tal que  $\theta_0 = 0$ , escrevemos

$$\frac{1}{r} = u = \frac{GM}{h^2} + C \cos \theta \quad (12.39)$$

A Equação (12.39) é a equação de uma *cônica* (elipse, parábola ou hipérbole) em coordenadas polares  $r$  e  $\theta$ . A origem  $O$  das coordenadas, localizadas no centro de massa da Terra, é o *foco* desta cônica, e o eixo polar é um de seus eixos de simetria (Fig. 12.17)

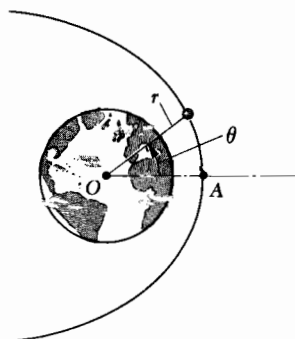


Figura 12.17

A relação entre as constantes  $C$  e  $GM/h^2$  define a *excentricidade*  $\epsilon$  da cônica; escrevemos

$$\epsilon = \frac{C}{GM/h^2} = \frac{Ch^2}{GM} \quad (12.40)$$

Podemos reescrever a Eq. (12.39) na forma

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2} (1 + \epsilon \cos \theta) \quad (12.39)$$

Podemos distinguir três casos:

1.  $\epsilon > 1$  ou  $C > GM/h^2$ : existem dois valores  $\theta_1$  e  $-\theta_1$  do ângulo polar, definidos por  $\cos \theta_1 = -GM/Ch^2$ , para os quais o segundo membro da Eq. (12.39) se torna zero. Para ambos os valores, o raio vetor  $r$  torna-se infinito; a cônica é uma hipérbole (Fig. 12.18).
2.  $\epsilon = 1$  ou  $C = GM/h^2$ : o raio vetor torna-se infinito para  $\theta = 180^\circ$ , a cônica é uma parábola.
3.  $\epsilon < 1$  ou  $C < GM/h^2$ : o raio vetor permanece finito para qualquer valor de  $\theta$ , a cônica é uma *elipse*. No caso particular quando  $\epsilon = C = 0$ , o comprimento do raio vetor é constante; a cônica é uma circunferência (desde que  $h \neq 0$ ).

Veremos agora como as constantes  $C$  e  $GM/h^2$ , que caracterizam a trajetória de um veículo espacial, podem ser determinadas para a sua posição e velocidade no início do seu deslocamento livre. Admitiremos, por ser o caso mais geral, que a fase de propulsão do seu vôo tenha sido programada de tal modo que, quando o último estágio do foguete for desligado, o veículo terá uma velocidade paralela à superfície da Terra (Fig. 12.19). Em outras palavras, admitiremos que o veículo espacial iniciará seu vôo livre no vértice  $A$  de sua trajetória.\*

---

\*Problemas envolvendo lançamentos oblíquos serão considerados na Seção 13.9



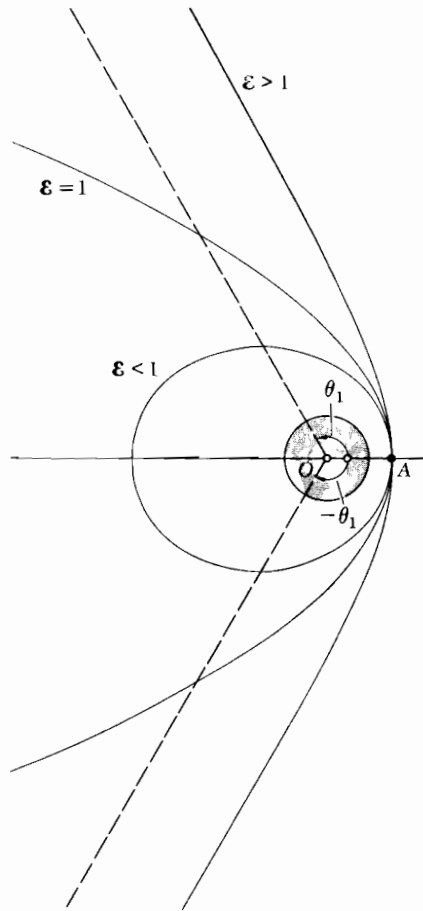


Figura 12.18

Denominando respectivamente por  $r_0$  e  $v_0$  o raio vetor e a velocidade do veículo no início do seu vôo livre, observamos, já que a velocidade se reduz à sua componente transversal, que  $v_0 = r_0 \dot{\theta}_0$ . Recordando a Eq. (12.27), exprimimos o momento angular por unidade de massa,  $h$ , como

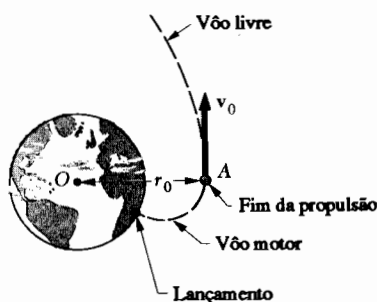
$$h = r_0^2 \dot{\theta}_0 = r_0 v_0$$

(12.41)

O valor obtido para  $h$  pode ser usado para determinar a constante  $GM/h^2$ . Observamos também que o cômputo desta constante será simplificado se usarmos a relação indicada na Seção 12.10

$$GM = gR^2 \quad (12.30)$$

onde  $R$  é o raio da Terra ( $R = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$ ) e  $g$  a aceleração da gravidade na superfície da Terra.



**Figura 12.19**

A constante  $C$  será determinada colocando-se  $\theta = 0$ ,  $r = r_0$  na Eq. (12.39); obtemos

$$C = \frac{1}{r_0} - \frac{GM}{h^2} \quad (12.42)$$

Com a Eq. (12.41) podemos facilmente exprimir  $C$  em termos de  $r_0$  e  $v_0$ .

Vamos, agora, determinar as condições iniciais correspondentes a cada uma das três trajetórias fundamentais indicadas acima. Considerando primeiramente a trajetória parabólica, vamos colocar  $C$  igual a  $GM/h^2$  na Eq. (12.42) e eliminar  $h$  entre as Eqs. (12.41) e (12.42). Resolvendo para  $v_0$ , obtemos

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$$

Podemos comprovar facilmente que um valor da velocidade inicial maior corresponde a uma trajetória hiperbólica e um valor menor, a uma órbita elíptica. Como o valor de  $v_0$  obtido para a trajetória parabólica é o menor valor para o qual o veículo espacial não retorna ao seu ponto inicial, ele é denominado *velocidade de escape*. Usando-se a Eq (12.30), podemos escrever

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \quad \text{ou} \quad v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2gR^2}{r_0}} \quad (12.43)$$

Notemos que a trajetória será (1) hiperbólica, se  $v_0 > v_{\text{esc}}$ ; (2) parabólica, se  $v_0 = v_{\text{esc}}$ ; (3) elíptica, se  $v_0 < v_{\text{esc}}$ .

Entre as órbitas elípticas possíveis, uma é de especial interesse, a *órbita circular*, que é obtida quando  $C = 0$ . O valor da velocidade inicial, correspondente a uma órbita circular, é dado por

$$v_{\text{circ}} = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} \quad \text{ou} \quad v_{\text{circ}} = \sqrt{\frac{gR^2}{r_0}} \quad (12.44)$$

Este resultado pode ser facilmente obtido pelo uso da Eq. (12.30). Podemos observar da Fig. 12.20 que, para valores de  $v_0$  compreendidos entre  $v_{\text{circ}}$  e  $v_{\text{esc}}$ , o ponto A onde o vôo livre se inicia é o ponto da órbita mais próximo da Terra; este ponto é denominado *perigeu*, enquanto o ponto A', o mais afastado da Terra, é conhecido como *apogeu*. Para valores de  $v_0$  menores que  $v_{\text{circ}}$ , o ponto A torna-se apogeu, enquanto o ponto A'', no outro lado da órbita, torna-se perigeu. Para valores de  $v_0$  muito menores que  $v_{\text{circ}}$  a trajetória do veículo espacial intercepta a superfície da Terra; neste caso, o veículo não entra em órbita.

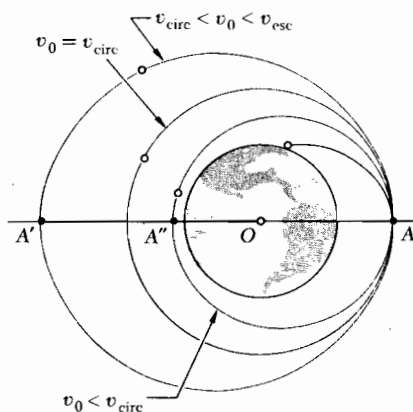


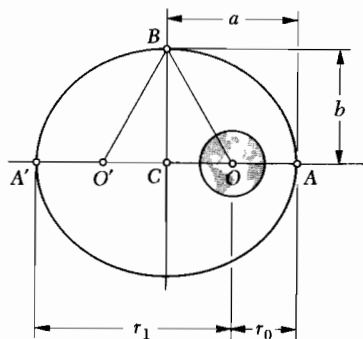
Figura 12.20

Mísseis balísticos, destinados a atingir a superfície da Terra, também se deslocam ao longo de trajetórias elípticas. Realmente, poderemos agora entender que qualquer objeto lançado no vácuo com uma velocidade inicial  $v_0$  menor que  $v_{esc}$  deslocar-se-á ao longo de uma trajetória elíptica. Somente quando as distâncias envolvidas são pequenas é que o campo gravitacional da Terra pode ser considerado uniforme, e a trajetória elíptica pode ser aproximada pela trajetória parabólica, como foi feito anteriormente (Seção 11.11) no caso de projéteis convencionais.

**Período.** Uma característica importante do movimento de um satélite da Terra é o tempo empregado por ele para descrever completamente sua órbita. Este tempo, conhecido como *período* do satélite, é denotado por  $\tau$ . Observemos primeiramente, que tendo-se em vista a definição de velocidade areolar (Seção 12.9),  $\tau$  pode ser obtido dividindo-se a área interna da órbita pela velocidade areolar. Como a área de uma elipse é igual a  $\pi ab$ , onde  $a$  e  $b$  representam, respectivamente, os semi-eixos maior e menor, e a velocidade areolar é igual a  $h/2$ , obtemos

$$\tau = \frac{2 \pi ab}{h} \quad (12.45)$$

Em contraste com  $h$ , que pode ser facilmente determinado pelo conhecimento de  $r_0$  e  $v_0$  para o caso de um satélite lançado numa direção paralela à superfície da Terra, os semi-eixos  $a$  e  $b$  não estão diretamente relacionados às condições iniciais. Como, por outro lado, os valores  $r_0$  e  $r_1$  de  $r$  correspondentes ao perigeu e apogeu da órbita podem ser determinados com facilidade a partir da Eq. (12.39) exprimiremos os semi-eixos  $a$  e  $b$  em termos de  $r_0$  e  $r_1$ .



**Figura 12.21**

Considere-se a órbita elíptica mostrada na Fig. 12.21. O centro da Terra está localizado em  $O$  e coincide com um dos dois focos da elipse. Os pontos  $A$  e  $A'$  representam, respectivamente, o perigeu e apogeu da órbita. Facilmente podemos comprovar que

$$r_0 + r_1 = 2a$$

e, portanto,

$$a = \frac{1}{2}(r_0 + r_1) \quad (12.46)$$

Recordando que a soma das distâncias de cada um dos focos a qualquer ponto da elipse é constante, escrevemos

$$O'B + BO = O'A + OA = 2a \quad \text{ou} \quad BO = a$$

Por outro lado,  $CO = a - r_0$ . Podemos, portanto, escrever

$$\begin{aligned} b^2 &= (BC)^2 = (BO)^2 - (CO)^2 = a^2 - (a - r_0)^2 \\ b^2 &= r_0(2a - r_0) = r_0 r_1 \end{aligned}$$

e, então,

$$b = \sqrt{r_0 r_1} \quad (12.47)$$

As fórmulas (12.46) e (12.47) indicam que os semi-eixos maior e menor da órbita são, respectivamente, iguais às médias aritmética e geométrica dos valores máximo e mínimo do raio vetor. Uma vez determinados  $r_0$  e  $r_1$ , os comprimentos dos semi-eixos podem pois ser facilmente calculados e substituídos na fórmula (12.45), obtendo-se o período procurado.

**12.13 Leis de Kepler para o Movimento Planetário** As equações que regem o movimento de um satélite da Terra podem ser usadas para descrever o movimento da Lua ao redor de nosso planeta. Neste caso, entretanto, a massa da Lua não é desprezível comparada à da Terra e os resultados obtidos não são muito precisos.

A teoria desenvolvida nas seções precedentes pode, também, ser aplicada ao estudo do movimento dos planetas ao redor do Sol.

Apesar de ser introduzido outro erro ao se desprezar o efeito das interações gravitacionais dos planetas, os resultados da teoria aproximada são excelentes.

Realmente, as propriedades expressas pela Eq. (12.39), onde  $M$  representa agora a massa do Sol, e pela Eq. (12.33), foram descobertas pelo astrônomo alemão Johann Kepler (1571-1630) a partir de observações astronômicas do movimento dos planetas, antes de Newton ter formulado sua teoria fundamental.

As três leis do movimento planetário devidas a Kepler podem ser enunciadas como se segue:

1. Cada planeta descreve uma elipse com o Sol localizado num dos focos.
2. O raio vetor traçado do Sol a um planeta varre áreas iguais em tempos iguais.
3. Os quadrados dos períodos dos planetas são proporcionais aos cubos dos semi-eixos maiores de suas órbitas.

A primeira lei enuncia um caso particular estabelecido na Seção 12.12, enquanto a segunda lei afirma que a velocidade areolar de cada planeta é constante (ver Seção 12.9). A terceira lei de Kepler pode também ser deduzida dos resultados obtidos na Seção 12.12\*.

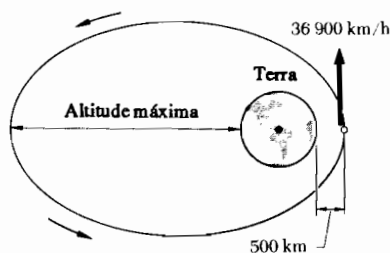
---

## Problema Resolvido 12.9

*Um satélite é lançado numa direção paralela à superfície da Terra com uma velocidade de 36 900 km/h a uma altitude de 500 km. Determinar (a) a máxima altitude alcançada pelo satélite e (b) o seu período.*

---

\* Ver Probl. 12.115



(a) **Máxima Altitude** Após ter sido lançado, o satélite está sujeito somente à atração gravitacional da Terra; seu movimento é assim regido pela Eq. (12.39).

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2} + C \cos \theta \quad (1)$$

Como a componente radial da velocidade é zero no ponto de lançamento A, temos  $h = r_0 v_0$ . Recordando que o raio médio da Terra é  $R = 6\,370\text{ km}$ , calculamos

$$r_0 = 6370\text{ km} + 500\text{ km} = 6870\text{ km} = 6,87 \times 10^6\text{ m}$$

$$36\,900\text{ km/h} = \frac{3,69 \times 10^7\text{ m}}{3,6 \times 10^3\text{ s}} = 1,025 \times 10^4\text{ m/s}$$

$$h = r_0 v_0 = (6,87 \times 10^6\text{ m})(1,025 \times 10^4\text{ m/s}) = 7,04 \times 10^{10}\text{ m}^2/\text{s}$$

$$h^2 = 4,96 \times 10^{21}\text{ m}^4/\text{s}^2$$

Como  $GM = gR^2$ , onde  $R$  é o raio da Terra, tem-se

$$GM = gR^2 = (9,81\text{ m/s}^2)(6,37 \times 10^6\text{ m})^2 = 3,98 \times 10^{14}\text{ m}^3/\text{s}^2$$

$$\frac{GM}{h^2} = \frac{3,98 \times 10^{14}\text{ m}^3/\text{s}^2}{4,96 \times 10^{21}\text{ m}^4/\text{s}^2} = 8,03 \times 10^{-8}\text{ m}^{-1}$$

Substituindo estes valores em (1), obtemos

$$\frac{1}{r} = 8,03 \times 10^{-8} + C \cos \theta \quad (2)$$

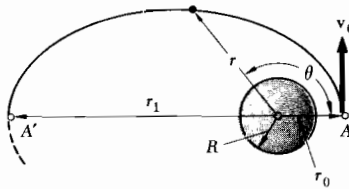
Observando que no ponto A temos  $\theta = 0$  e  $r = r_0 = 6,87 \times 10^6$  m, determinamos o valor da constante C.

$$\frac{1}{6,87 \times 10^6 \text{ m}} = 8,03 \times 10^{-8} + C \cos 0^\circ \quad C = 6,53 \times 10^{-8} \text{ m}^{-1}$$

No ponto A', o ponto da órbita mais afastado da Terra, temos  $\theta = 180^\circ$ . Utilizando (2), determinamos a correspondente distância  $r_1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= 8,03 \times 10^{-8} + (6,53 \times 10^{-8}) \cos 180^\circ \\ r_1 &= 0,667 \times 10^8 \text{ m} = 66\,700 \text{ km} \end{aligned}$$

$$\text{Altitude máxima} = 66\,700 \text{ km} - 6370 \text{ km} = 60\,300 \text{ km} \leftarrow$$



**(b) Período** Como A e A' são, respectivamente, o perigeu e o apogeu da órbita elíptica, usamos as Eqs. (12.46) e (12.47) e determinamos os semi-eixos maior e menor da órbita.

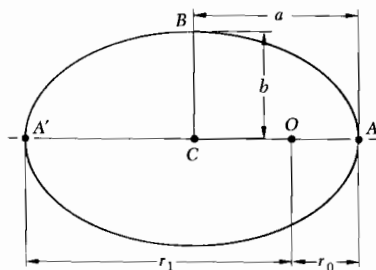
$$a = \frac{1}{2}(r_0 + r_1) = \frac{1}{2}(6,87 + 66,7)(10^6) \text{ m} = 36,8 \times 10^6 \text{ m}$$

$$b = \sqrt{r_0 r_1} = \sqrt{(6,87)(66,7)} \times 10^6 \text{ m} = 21,4 \times 10^6 \text{ m}$$

$$\tau = \frac{2\pi ab}{h} = \frac{2\pi (36,8 \times 10^6 \text{ m})(21,4 \times 10^6 \text{ m})}{7,04 \times 10^{10} \text{ m}^2/\text{s}}$$

$$\tau = 7,03 \times 10^4 \text{ s} = 1171 \text{ min} = 19 \text{ h } 31 \text{ min} \leftarrow$$





## Problemas

**12.89** Usando a Eq. (12.37) mostre para o ponto material considerado no Problema 12.73 que a força central  $F$  é inversamente proporcional à quinta potência da distância  $r$  entre o ponto e o centro de força  $O$ .

**12.90** Usando a Eq. (12.37) mostre para o ponto material considerado no Problema 12.74 que a força central  $F$  é inversamente proporcional ao cubo da distância  $r$  do ponto ao centro de força  $O$ .

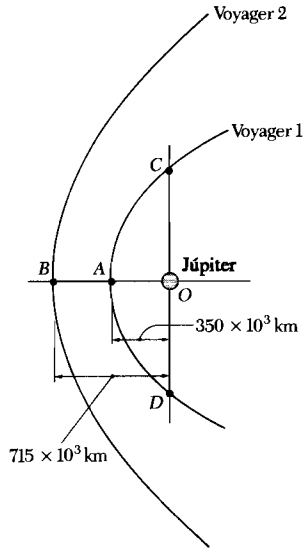
**12.91** Um ponto material de massa  $m$  descreve a espiral hiperbólica  $r = b/\theta$  sob a ação de uma força central  $F$  atrativa. Usando a Eq. (12.37), mostre que  $F$  é inversamente proporcional ao cubo da distância  $r$  do ponto ao centro de força  $O$ .

**12.92** Um ponto material de massa  $m$  descreve a espiral logarítmica  $r = r_0 e^{b\theta}$  sob a ação de uma força central  $F$  atrativa. Usando a Eq. (12.37), mostre que  $F$  é inversamente proporcional ao cubo da distância  $r$  do ponto ao centro de força  $O$ .

**12.93** Em sua máxima aproximação de Júpiter, a sonda espacial Voyager 1, distava 350 mil quilômetros do centro do planeta e sua velocidade era de 26,9 km/s. Determine a massa de Júpiter, admitindo que a trajetória da sonda era parabólica.

**12.94** Em seu ponto de máxima aproximação de Júpiter, a sonda espacial Voyager 2, distava 715 mil quilômetros do centro do planeta. Supondo que a trajetória da sonda era parabólica, e usando as informações contidas no problema anterior, determine a máxima velocidade atingida pela Voyager 2 na sua aproximação de Júpiter.

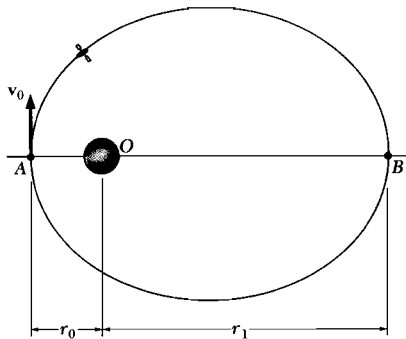
**12.95** Resolva o problema anterior, supondo que a excentricidade da trajetória da Voyager 2 era  $\epsilon = 1,20$ .

**Figuras P12.93 e P12.94**

**12.96** A sonda espacial Voyager 1, quando atingiu o ponto de maior aproximação de Saturno, distava 185 mil quilômetros do centro do planeta e sua velocidade era de 21,0 km/s. Sabendo-se que Tétis, um dos satélites de Saturno, descreve uma órbita circular de raio igual a 294 mil quilômetros, a uma velocidade de 11,3 km/s, determine a excentricidade da trajetória da Voyager 1 na sua aproximação de Saturno.

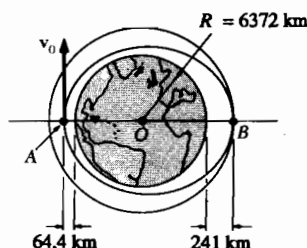
**12.97** Um satélite descreve uma trajetória elíptica ao redor de um planeta de massa  $M$ . Denote por  $r_0$  e  $r_1$ , respectivamente, os valores mínimo e máximo da distância  $r$  entre o satélite e o centro do planeta e deduza a seguinte relação

$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} = \frac{2GM}{h^2}$$

**Figura P12.97**

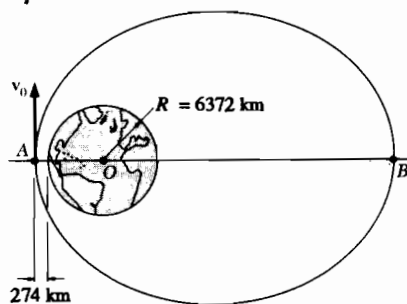
onde  $h$  é o momento angular por unidade de massa do satélite.

**12.98** Em sua segunda missão, o ônibus espacial Colúmbia atingiu o ponto  $A$  a uma altitude de 64,4 km, quando então, cessou a propulsão. Nesse ponto sua velocidade  $v_0$  era horizontal. Sabendo-se que sua primeira órbita era elíptica e que o ônibus foi transferido a uma órbita circular quando passou por  $B$  a uma altitude de 241 km, determinar (a) a sua velocidade  $v_0$  e (b) o aumento da velocidade, em  $B$ , necessária à colocação da nave na órbita circular.



**Figura P12.98**

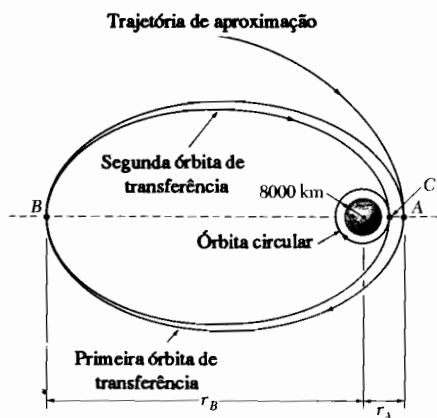
**12.99** Um satélite Explorer, no fim da propulsão, estava a 274 km acima da superfície terrestre e tinha uma velocidade horizontal  $v_0$  de módulo 9,94 km/s. Determine (a) a máxima altitude atingida pelo satélite e (b) sua velocidade no apogeu  $B$ .



**Figura P12.99**

**12.100** Considere-se uma sonda espacial que descreve uma órbita circular ao redor de um planeta de raio  $R$ , a uma altitude  $\alpha R$ , com velocidade  $v_0$ . Para se colocar a sonda numa órbita elíptica que a aproxime do planeta, deve-se reduzir sua velocidade de  $v_0$  para  $\beta v_0$ , onde  $\beta < 1$ . Determine o valor mínimo de  $\beta$  para a sonda não cair na superfície do planeta.

**12.101** Deseja-se colocar uma nave espacial em órbita circular em torno de Vênus. A órbita deverá ter 8000 km de raio e situar-se num dado plano. Assim que a nave em sua trajetória de aproximação atingir o ponto  $A$ , sua velocidade deverá ser reduzida de  $\Delta v_A$  para introduzi-la primeiramente numa órbita elíptica. Nessa órbita o veículo atingirá o ponto  $B$ , com velocidade bem reduzida. Nesse ponto, reduzir-se-á a velocidade de  $\Delta v_B$  e modificar-se-á a sua direção, para que a nave entre numa segunda órbita de transferência situada no plano desejado. Finalmente, quando a espaçonave atingir o ponto  $C$ , sua velocidade sofrerá uma redução de  $\Delta v_C$ , entrando na órbita circular programada. Determinar de quanto deverá ser reduzida a velocidade da nave (a) em  $A$ , (b) em  $B$  e (c) em  $C$ . Dados: a massa de Vênus corresponde a 82% da massa da Terra,  $r_A = 12,5 \times 10^3$  km,  $r_B = 100 \times 10^3$  km e a nave se aproxima do ponto  $A$ , numa trajetória parabólica.



**Figura P 12.101**

**12.102** Considere-se a sonda espacial tratada no problema anterior. Sabe-se que  $r_A = 12,5 \times 10^3$  km e que a velocidade da sonda se reduz a 6890 m/s, ao passar por  $A$ . Determinar (a) a distância do centro de Vênus ao ponto  $B$  e (b) de quanto se reduzirá a velocidade do veículo tanto em  $B$  como em  $C$ .

**12.103** Determinar o tempo necessário para a sonda considerada no Prob. 12.101 deslocar-se de  $A$  para  $B$ , na sua primeira órbita de transferência.

**12.104** Determine o tempo necessário para a sonda considerada no Prob. 12.101 deslocar-se de  $B$  para  $C$ , na sua segunda órbita de transferência.

**12.105** Determine o período do satélite Explorer considerado no Prob. 12.99.

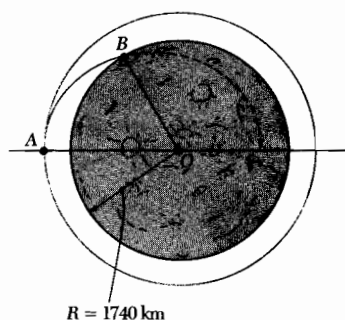
**12.106** Para o ônibus espacial Columbia, considerado no Prob. 12.98, determine (a) o período da nave na sua órbita circular final e (b) o tempo necessário para o deslocamento de A para B na sua trajetória elíptica inicial.

**12.107** Considere-se a sonda espacial Voyager 1 tratada no Probl. 12.93. Determine o tempo necessário para que percorra a trajetória parabólica de C até D.

**12.108** A órbita do cometa de Halley é uma elipse muito alongada, cuja distância mínima do sol é aproximadamente  $1/2 r_E$ , onde  $r_E = 149,5 \times 10^6$  km é a distância média entre o Sol e a Terra. Sabendo-se que o período do cometa é cerca de 76 anos, determine sua máxima distância ao Sol.

**12.109** Considere-se uma sonda com velocidade  $v$ , descrevendo uma órbita circular de raio  $nR$  em torno de um planeta de raio  $R$  e centro  $O$ . Quando a sonda passa pelo ponto A, reduz-se a sua velocidade de  $v_0$  para  $\beta v_0$ , com  $\beta < 1$ , para colocá-la em trajetória de descida ao solo. Mostre que o ângulo  $AOB$ , onde B é o ponto de impacto da sonda contra o solo, depende somente dos valores de  $n$  e  $\beta$ .

**12.110** Após completar seu programa de exploração lunar os dois tripulantes do módulo de excursão (LEM) da Apollo retornaram ao módulo de comando que permaneceu em órbita circular em torno da Lua. Antes de seu retorno à Terra, os astronautas posicionaram os veículos de modo que o LEM ficou de frente para a traseira do módulo de comando. Quando o conjunto passou pelo ponto A, o LEM foi lançado à deriva, indo colidir com a superfície da Lua, no ponto B. Sabendo-se que o módulo de comando orbitava a uma altitude de 150 km e que o ângulo  $AOB$  era de  $60^\circ$ , determinar a velocidade do LEM relativa ao módulo de comando, no instante do lançamento. (Sugestão: O ponto A é o apogeu da trajetória elíptica seguida pelo LEM até atingir a superfície lunar. Informa-se, também, que a massa da Lua é 0,01230 vezes a massa da Terra).

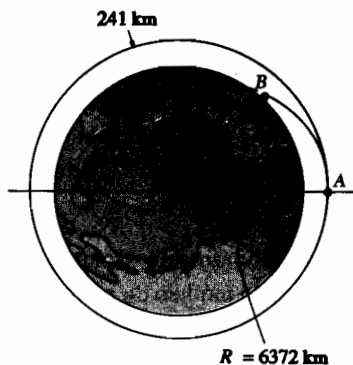


**Figura P 12.110**

**12.111** No problema anterior, determine o ângulo  $AOB$ , supondo que o módulo de comando orbitava em torno da Lua a uma altitude de 120 km e que o LEM foi lançado à deriva com uma velocidade de 40 m/s em relação ao módulo de comando.

**12.112** Um ônibus espacial descreve uma órbita circular a 241 km acima da superfície da Terra. Ao passar pelo ponto *A* ligam-se os motores por alguns instantes, reduzindo-se de 4% a velocidade do veículo. O ônibus começa então a descer. Determine a altitude da nave no ponto *B*, sabendo-se que o ângulo *AOB* é igual a  $50^\circ$ .

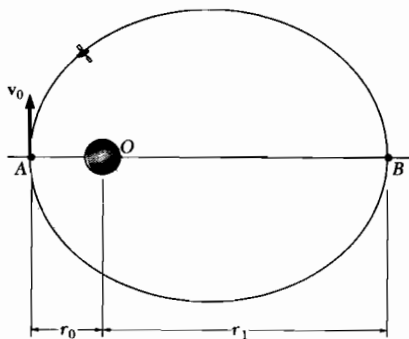
(Sugestão: O ponto *A* é o apogeu da trajetória elíptica ao longo da qual o ônibus desce em direção ao solo).



**Figura P12.112**

**12.113** Um satélite descreve uma órbita elíptica em torno de um planeta. Denotando-se por  $r_0$  e  $r_1$  as distâncias correspondentes ao perigeu e apogeu, respectivamente, mostre que a curvatura da órbita em cada um desses pontos é dada por

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} \right)$$



**Figuras P 12.113 e P 12.114**

**12.114** (a) Expresse a excentricidade  $\epsilon$  da órbita elíptica de um satélite ao redor de um planeta em termos das distâncias  $r_0$  e  $r_1$  correspondentes, respectivamente, ao perigeu e apogeu. (b) Use o resultado obtido na parte (a) para determinar as excentricidades das duas órbitas de transferência descritas no Prob. 12.101.

**12.115** Deduza a terceira lei de Kepler para o movimento planetário, utilizando as Eqs. (12.39) e (12.45).

**12.116** Mostre que o momento angular por unidade de massa,  $h$ , de um satélite numa órbita elíptica de semi-eixo maior  $a$  e excentricidade  $\epsilon$  é dado por

$$h = \sqrt{GMa(1 - \epsilon^2)}$$

onde  $M$  é a massa do planeta em torno do qual se move o satélite.

## Recapitulação e Sumário

### Segunda Lei de Newton

Este capítulo foi dedicado ao estudo da segunda lei de Newton e sua aplicação à análise do movimento de pontos materiais.

Sendo  $m$  a massa de um ponto material e sendo  $\Sigma \mathbf{F}$  e  $\mathbf{a}$ , respectivamente, a resultante das forças agentes e a aceleração do ponto, medidas num *referencial inercial* [Seção 12.2], escrevemos

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (12.2)$$

### Quantidade de Movimento

Introduzindo a *quantidade de movimento* de um ponto material,  $\mathbf{L} = m\mathbf{v}$  [Seção 12.3], reescrevemos a segunda lei de Newton na forma

$$\Sigma \mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} \quad (12.5)$$

A Equação (12.5) nos diz que a *resultante das forças agentes num ponto material é igual à derivada da quantidade de movimento deste ponto*.

## Equações de Movimento de um Ponto Material

Em vários problemas sobre o movimento de um ponto material, podemos considerar as *componentes cartesianas* de  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{a}$ , de modo que em vez da Eq. (12.2), consideramos

$$\Sigma F_x = ma_x \qquad \Sigma F_y = ma_y \qquad \Sigma F_z = ma_z \qquad (12.8)$$

Em outros problemas podemos considerar as *componentes tangencial e normal* dos vetores. Neste caso ficamos com

$$\Sigma F_t = m \frac{dv}{dt} \qquad \Sigma F_n = m \frac{v^2}{\rho} \qquad (12.9')$$

## Equilíbrio Dinâmico

Observamos também [Seção 1.26] que as equações de movimento de um ponto material podem ser substituídas por equações semelhantes às equações de equilíbrio usadas na estática, ao adicionarmos a ambos os membros da Eq. (12.2) o vetor  $-\mathbf{ma}$ . Diz-se, então, que o ponto material está em *equilíbrio dinâmico*. Por razões de uniformidade, consideramos as equações de movimento na discussão dos problemas resolvidos. Primeiramente, empregamos componentes cartesianas [Problemas Resolvidos 12.1 a 12.4] e, em seguida, componentes tangencial e normal [Problemas Resolvidos 12.5 e 12.6].

## Momento Angular

Na segunda parte do capítulo, definimos o *momento angular*  $\mathbf{H}_O$  de um ponto material, em relação a um pólo  $O$  [Seção 12.7], como sendo o produto vetorial

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \qquad (12.12)$$

Como produto vetorial,  $\mathbf{H}_O$  é ortogonal ao plano definido por  $\mathbf{r}$  e  $m\mathbf{v}$  e tem módulo

$$H_O = rmv \sin \phi \qquad (12.13)$$



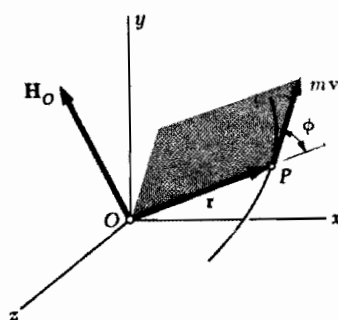


Figura 12.22

Em termos de componentes cartesianas, podemos expressar o momento angular  $\mathbf{H}_O$  na forma de um determinante

$$\mathbf{H}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \quad (12.14)$$

No caso de movimento no plano  $Oxy$ ,  $z = 0$  e  $v_z = 0$ , e, portanto, momento angular é ortogonal ao plano  $Oxy$  e tem componente  $z$  dada por

$$H_O = H_z = m(xv_y - yv_x) \quad (12.16)$$

## Derivada Temporal do Momento Angular

Calculando a derivada temporal de  $\mathbf{H}_O$  e considerando a segunda lei de Newton, escrevemos

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \quad (12.19)$$

A equação acima nos diz que a soma dos momentos das forças agentes, em relação a um pólo  $O$ , é igual à derivada temporal do momento angular, em relação ao mesmo pólo.

No caso de movimento plano, torna-se conveniente, em muitos problemas, empregar as componentes *radial* e *transversal* [Seção 12.8 e Problema Resolvido 12.7] e escrever as equações

$$\Sigma F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (12.21)$$

$$\Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \quad (12.22)$$

## Movimento Sob a Ação de Uma Força Central

Quando a única força agente num ponto  $P$  é uma força  $\mathbf{F}$  paralela ao vetor de posição de  $P$  em relação a uma origem fixa  $O$ , diz-se que o movimento se dá sob a ação de uma *força central* [Seção 12.9]. Uma vez que  $\Sigma \mathbf{M}_O = 0$  em todo instante, segue da Eq. (12.19) que  $\dot{\mathbf{H}}_O = 0$  para todos os valores de  $t$ . Logo,

$$\mathbf{H}_O = \text{constante} \quad (12.23)$$

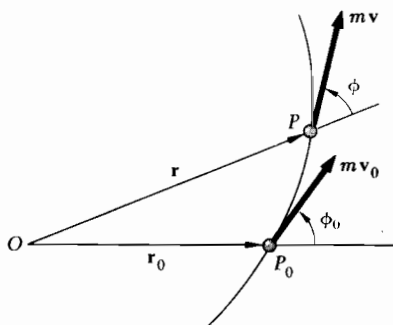
Conclui-se, portanto, que o *momento angular de um ponto material que se move sob a ação de uma força central é constante*. Mais ainda, o movimento se dá num plano ortogonal a  $\mathbf{H}_O$ .

Da Eq. (12.13) decorre a seguinte relação

$$rmv \sin \phi = r_0 m v_0 \sin \phi_0 \quad (12.25)$$

que se aplica ao movimento de qualquer ponto material sob a ação de uma força central (Fig. 12.23). Usando coordenadas polares e levando em conta a Eq. (12.18), temos também

$$r^2 \dot{\theta} = h \quad (12.27)$$



**Figura 12.23**

onde  $h = H_O/m$  é uma constante com dimensões de momento angular por unidade de massa. Observamos (Fig. 12.24) que a área elementar  $dA$  varrida pelo raio vetor  $OP$ , quando este gira de ângulo  $d\theta$ , é igual

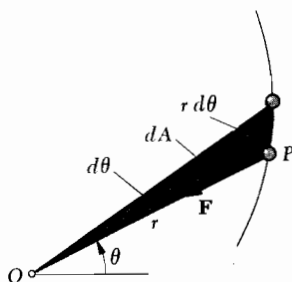


Figura 12.24

a  $\frac{1}{2} r^2 d\theta$  e, portanto, o primeiro membro da Eq. (12.27) representa o dobro da *velocidade areolar*  $dA/dt$  do ponto material. Logo, a *velocidade areolar de um ponto material que se move sob a ação de uma força central é constante*.

## Lei da Gravitação Universal

O movimento orbital de corpos sob a ação da força gravitacional é um exemplo importante de movimento sob a ação de força central. De acordo com a *lei da gravitação universal* enunciada por Newton, dois pontos materiais separados por uma distância  $r$  atraem-se mutuamente com forças opostas. As forças de atração  $\mathbf{F}$  e  $-\mathbf{F}$  têm a direção de reta que une os dois pontos (Fig. 12.25) e o módulo de cada uma é dada por

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (12.28)$$

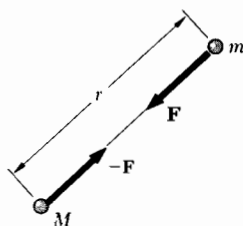


Figura 12.25

onde  $M$  e  $m$  são as massas dos pontos e  $G$  é a *constante de gravitação universal*. No caso de um corpo de massa  $m$  submetido ao campo gravitacional terrestre, o produto da constante de gravitação  $G$  pela massa da Terra,  $M$ , pode ser expresso na forma

$$GM = gR^2 \quad (12.30)$$

onde  $g = 9,81 \text{ N/kg}$  e  $R$  representa o raio da Terra.

## Movimento Orbital

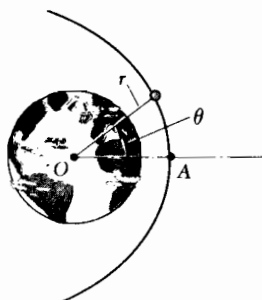
Mostrou-se na Seção 12.11 que um ponto material sob a ação de uma força central descreve uma trajetória definida pela equação

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2u^2} \quad (12.37)$$

onde  $F > 0$  corresponde a uma força atrativa e  $u = 1/r$ . No caso gravitacional [Seção 12.12], a substituição de  $F$  dada pela Eq. (12.28) na Eq. (12.37) nos conduz à seguinte solução da Eq. (12.39)

$$\frac{1}{r} = u = \frac{GM}{h^2} + C \cos \theta \quad (12.39)$$

onde  $\theta$  é medido a partir do eixo  $OA$  que liga o foco  $O$  (centro de força) ao ponto  $A$  (perigeu) como indica a Fig. (12.26).



**Figura 12.26**

A Eq. (12.39) é a equação de uma cônica de excentricidade  $\varepsilon = Ch^2/(GM)$ . A cônica é uma *elipse* se  $\varepsilon < 1$ , uma *parábola* se  $\varepsilon = 1$  e uma *hipérbole* se  $\varepsilon > 1$ . As constantes  $C$  e  $h$  devem ser determinadas pelas condições iniciais. Se o ponto for lançado de  $A$  ( $\theta = 0$ ,  $r = r_0$ ) com velocidade  $v_0$  perpendicular a  $OA$ , têm-se  $h = r_0 v_0$  [Problema Resolvido 12.9].

Mostramos também que os valores da velocidade inicial correspondendo a uma trajetória parabólica valem

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \quad \text{Velocidade de escape} \quad (12.43)$$

No caso de trajetória circular, o resultado é

$$v_{\text{circ}} = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} \quad (12.44)$$

A velocidade dada pela Eq. (12.43), denominada *velocidade de escape*, é a mínima velocidade que se deve comunicar ao ponto material para ele não mais retornar ao ponto de partida.

## Período

O período  $\tau$  de um planeta ou satélite é definido como o tempo necessário para o corpo descrever a órbita. Mostramos que

$$\tau = \frac{2\pi ab}{h} \quad (12.45)$$

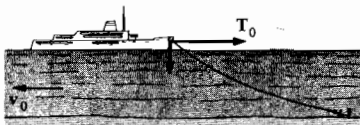
onde  $h = r_0 v_0$ ,  $a$  representa o semi-eixo maior e  $b$  o semi-eixo menor da órbita. Mostramos também que os semi-eixos  $a$  e  $b$  são, respectivamente, as médias aritmética e geométrica dos valores mínimo e máximo do raio vetor  $r$ .

## Leis de Kepler

Na última seção do capítulo [Seção 12.13] apresentamos as *Leis de Kepler* e mostramos que estas leis empíricas, decorrentes das observações astronômicas, confirmam as leis de Newton e a lei da gravitação universal.

## Problemas de Recapitulação

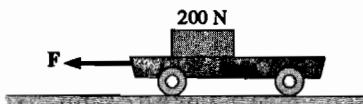
**12.117** Um navio está ancorado no meio de um rio que está fluindo a uma velocidade constante  $v_0$ . A componente horizontal de força agente no navio devida à corrente da âncora é  $T_0$ . Suponha que a corrente se parte repentinamente. Calcule nesse caso o tempo necessário para o navio atingir a velocidade  $\frac{1}{2}v_0$ . Considere que a força de atrito com a água é proporcional à velocidade do navio em relação à água.



**Figura P12.117**

**12.118** Uma bola presa a uma corda descreve uma circunferência vertical, cujo raio mede 1,25m. Determine a velocidade mínima da bola no topo da circunferência para que a corda permaneça tensionada.

**12.119** Os coeficientes de atrito entre um bloco de 200 N e um carrinho de 133 N são  $\mu_e = 0,25$  e  $\mu_c = 0,20$ . Aplica-se no carrinho uma força  $F$  de 89,0 N. Determine a aceleração (a) do carrinho, (b) do bloco e (c) do bloco em relação ao carrinho.



**Figura P12.119**

**12.120** Para o sistema considerado no problema anterior, determine a aceleração do carrinho em função do módulo de  $F$ .

**12.121** A montagem representada na figura gira em torno de um eixo vertical, a uma velocidade angular constante. Sabendo-se que o coeficiente de atrito estático entre o bloquinho A e a parede cilíndrica é 0,30, determinar a velocidade mínima  $v$  para a qual o bloquinho permanece em contato com a parede.

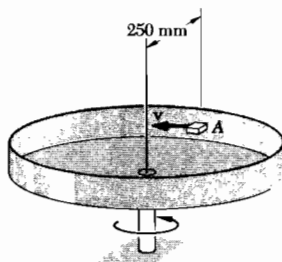
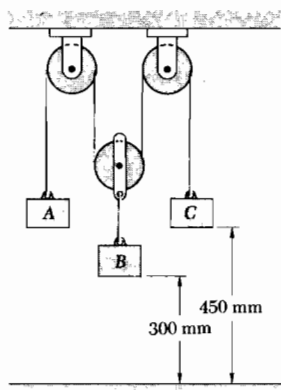


Figura P12.121

**12.122** Sabendo-se que os blocos  $B$  e  $C$  atingem o solo simultaneamente e exatamente 1 s após o sistema ter sido abandonado do repouso, determine  $m_B$  e  $m_C$  em termos de  $m_A$ .

**12.123** Determine a aceleração de cada bloco para  $m_A = 5 \text{ kg}$ ,  $m_B = 15 \text{ kg}$  e  $m_C = 10 \text{ kg}$ . Qual bloco atingirá o solo, em primeiro lugar?

**12.124** Põem-se em contato duas esferas de aço, cada uma com 100 mm de raio. (a) Determine a força de atração gravitacional entre as esferas, supondo-as maciças e considerando que a densidade do aço é  $7,85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ . (b) Supondo as esferas separadas entre si por uma distância de 2 mm e soltas com velocidade nula, determinar o tempo aproximado para que elas se juntem sob a ação das forças gravitacionais mútuas, supostas constantes.



Figuras P12.122 e P12.123

**12.125** Uma pequena esfera presa por um fio, descreve uma circunferência horizontal. O fio tem comprimento  $l_1$  e forma um ângulo  $\theta_1$  com a vertical. Puxa-se a corda vagarosamente, reduzindo seu comprimento livre para  $l_2$ . Deduza uma relação entre  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . (b) Se a esfera for posta em movimento de modo que inicialmente  $l_1 = 1,02 \text{ m}$  e  $\theta_1 = 30^\circ$ , determine  $\theta_2$  para  $l_2 = 0,762 \text{ m}$ .

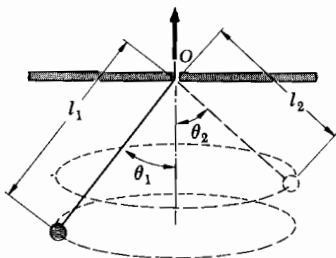


Figura P12.125

**12.126** Uma nave descreve uma órbita elíptica de altitude mínima  $h_A = 1673$  km e altitude máxima  $h_B = 9718$  km. (a) Determine a velocidade da nave em A. (b) Se os motores são acionados de modo que a nave ao passar por A sofre um aumento de 10% em sua velocidade, determinar a máxima altitude a ser alcançada pela espaçonave em sua nova órbita.

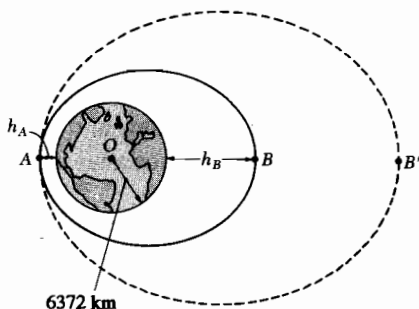


Figura P12.126

**12.127** Calcule, aproximadamente, o tempo que um objeto gasta para atingir a superfície da Terra depois de ter sido abandonado com velocidade nula a uma distância de  $384 \times 10^3$  km (raio da órbita da Lua). *Sugestão:* Suponha que se dá ao objeto uma velocidade inicial muito pequena, digamos,  $v = 1$  m/s, numa direção transversal; determine o período  $\tau$  do objeto na órbita resultante. Examinando-se a órbita será possível mostrar que o tempo de queda vale aproximadamente  $\frac{1}{2}\tau$ .

**12.128** Determine (a) a aceleração de cada bloco e (b) a tensão no cabo. Desprezam-se os atritos.

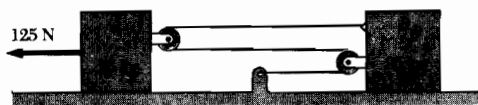


Figura P12.128