UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA – UFV
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – CCE
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA - DEL

Sistemas de Controle II

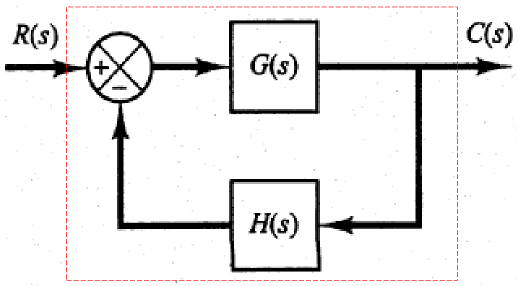
ELT331

AULA 2 – Construção do Lugar das Raízes

Prof. Tarcísio Pizziolo

2. Construção do Lugar das Raízes

- Em um sistema de controle de malha fechada, o lugar das raízes expressa no plano complexo-s a localização dos pólos do sistema em função da variação do ganho de malha.
- - Seja o sistema de controle em malha fechada dado pelo diagrama de blocos a seguir:



$$F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Equação Característica:

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad (\text{Pólos de Malha Fechada})$$

Então:

Condição de Módulo

$$G(s)H(s) = -1 \ \text{ou} \ \begin{cases} |G(s)H(s)| = 1 \\ \angle G(s)H(s) = \pm 180^o (2n+1) \quad ; \quad (n = 0,1,2,3,\ldots) \end{cases}$$

Condição de Ângulo

2. Construção do Lugar das Raízes

A condição e módulo pode ser escrita generalizada como:

$$|G(s)H(s)| = 1 \Rightarrow \left|\frac{K(s+z_1)(s+z_2)...(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)...(s+z_n)}\right| = 1 \Rightarrow \left|\frac{(s+z_1)(s+z_2)...(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)...(s+z_n)}\right| = \frac{1}{K}$$

Considerando 0 < K < ∞ e que a identidade seja verdadeira, pode-se escrever:

$$\lim_{K\to 0}\left|\frac{(s+z_1)(s+z_2)...(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)...(s+z_n)}\right| = \lim_{K\to 0}\left(\frac{1}{K}\right)$$

- Para a identidade permanecer, quando $\lim_{K\to 0}\left(\frac{1}{K}\right) \to \infty$ os valores de **s** no denominador deverão tender a se igualarem aos pólos.
- Para a identidade permanecer, quando $\lim_{K\to \infty}\left(\frac{1}{K}\right) \to 0$ os valores de **s** no numerador deverão tender a se igualarem aos zeros.

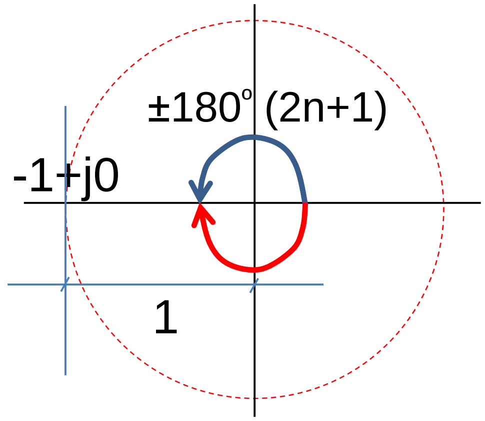
Conclusão:

- Quando $K \to 0 \Rightarrow s_n \to p_n$; ou seja, quando o ganho **K** tende a **zero** o Lugar das Raízes tende aos **pólos**.

- Quando $K \to \infty \Rightarrow s_m \to z_m$; ou seja, quando o ganho **K** tende ao **infinito** o Lugar das Raízes tende aos **zeros**.

2.1. Condições de Ângulo e de Módulo

$$\mathbf{G(s)H(s) = -1}$$



$$\begin{cases} \left|G(s)H(s)\right| = 1 & \rightarrow \text{Condição de Módulo} \\ \angle G(s)H(s) = \pm 180^{o}(2n+1)\,;\,(n = 0,1,2,3,\ldots) & \rightarrow \text{Condição de Ângulo} \end{cases}$$

Os valores de **s** que satisfazem a estas duas condições serão os **Pólos** de **Malha Fechada** e os que satisfaçam **apenas** à **Condição de Ângulo** construirão o **Lugar das Raízes**.

A **Condição de Módulo**, dado um valor de ganho **K**, determina os **Pólos** de **Malha Fechada**.

Para construir o **Lugar das Raízes** deve-se conhecer a localização dos **pólos** e **zeros** de **G(s)H(s)**.

2.2. Alocação de Pontos de Teste

- Primeiramente devem ser alocados **pontos de teste s** no plano complexo para a verificação se o mesmo pertence ao Lugar das raízes de **G(s)H(s)**.

- Para a construção do Lugar das Raízes inicialmente deve-se traçar os **vetores** no palno complexo que se **iniciam nos pólos e zeros de G(S)H(s**) e **terminam nos pontos de teste s**.

- Os **ângulos dos vetores** deverão ser medidos no **sentido anti-horário**.

Exemplo: Seja a Função de Transferência de **Malha Aberta G(s)H(s)** onde os pólos **-p_2** e **-p_3** são **complexos conjugados** e os demais pólos e o zero são reais, traçar os vetores para um ponto de **teste s** dado.

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+z_1)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)(s+p_4)}$$

Solução:

$$K = |K|\angle 0^o$$

$$(s+z_1) = |s+z_1|\angle\varphi_1 \Rightarrow (s+z_1) = B_1\angle\varphi_1$$

$$(s+p_1) = |s+p_1|\angle\theta_1 \Rightarrow (s+p_1) = A_1\angle\theta_1$$

$$(s+p_2) = |s+p_2|\angle\varphi_2 \Rightarrow (s+p_2) = A_2\angle\theta_2$$

$$(s+p_3) = |s+p_3|\angle\theta_3 \Rightarrow (s+p_3) = A_3\angle\theta_3$$

$$(s+p_4) = |s+p_4|\angle\varphi_4 \Rightarrow (s+p_4) = A_4\angle\theta_4$$

2.2. Alocação de Pontos de Teste

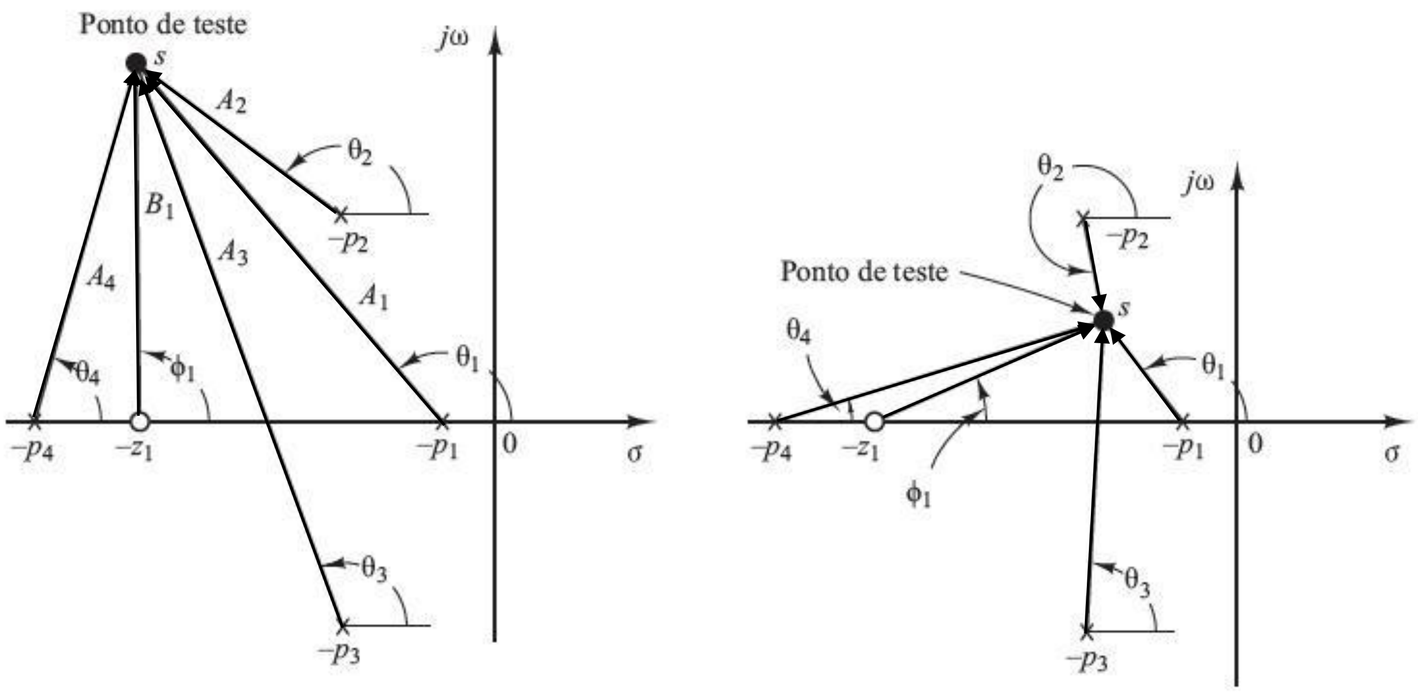
Daí o Módulo de G(s)H(s) poderá ser escrito por:

$$|G(s)H(s)| = \frac{KB_1}{A_1A_2A_3A_4}$$

E o Ângulo de G(s)H(s) poderá ser escrito por:

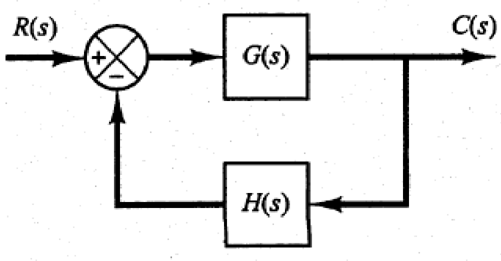
$$\angle G(s)H(s) = (\varphi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4)$$

Diagramas que mostram medidas dos ângulos a partir do ponto de testes *s* e dos polos e zeros de malha aberta.



2.3. Exemplo

2.3.1 Seja o sistema de controle em malha fechada dado a seguir:

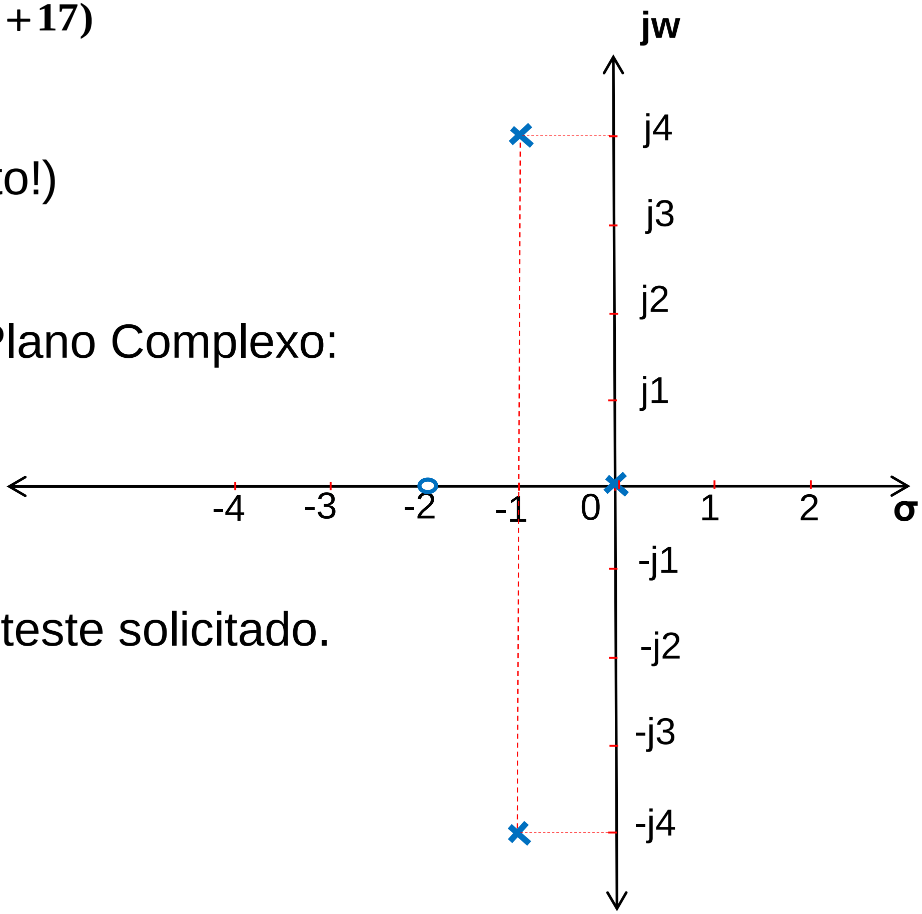


$$G(s) = \frac{K}{(s^2 + 2s + 17)}$$

$$H(s) = \frac{(s+2)}{s}$$

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{s(s^2 + 2s + 17)}$$

Pólos e Zeros no Plano Complexo



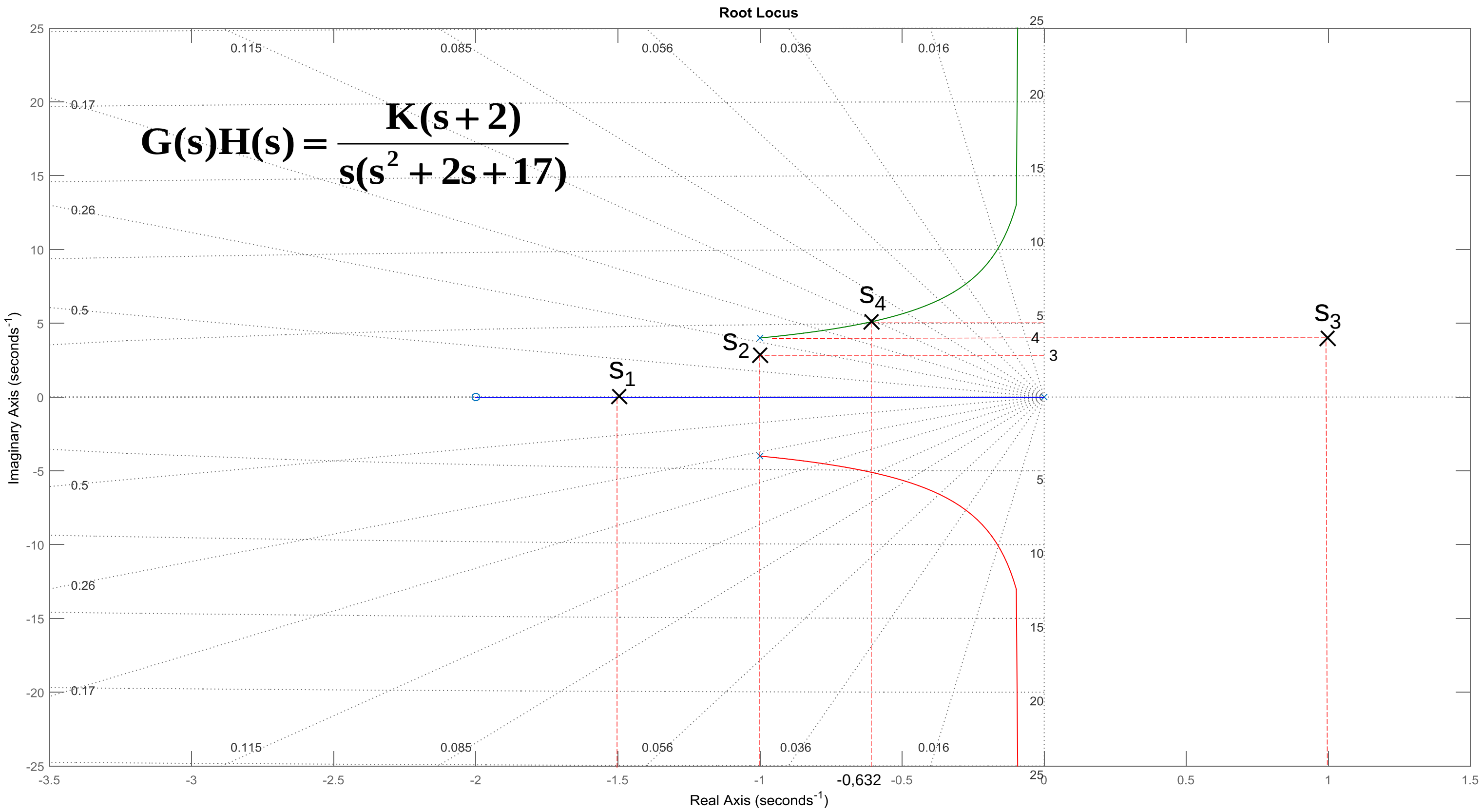
- Pólos: s = 0; s = -1 + j4; s = -1 – j4
- Zeros: s = -2; (mais dois zeros no infinito!)

Alocar os seguintes pontos de teste no Plano Complexo:

a) s_1 = -1,5 + j0
b) s_2 = -1 + j3
c) s_3 = 1 + j4
d) s_4 = -0,632 + j5
d) Traçar os vetores para cada ponto de teste solicitado.

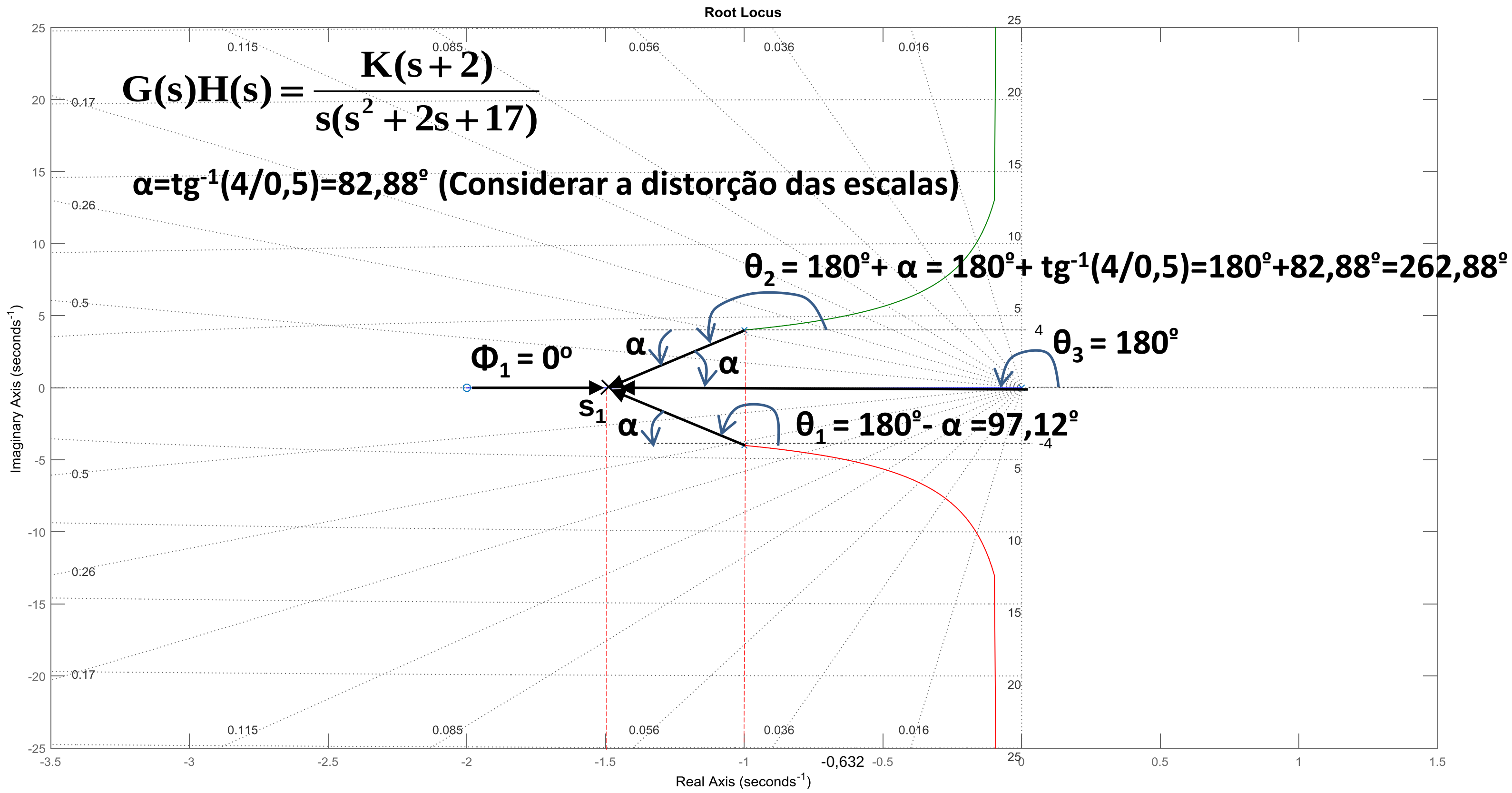
Solução

Pontos de teste no Plano Complexo:



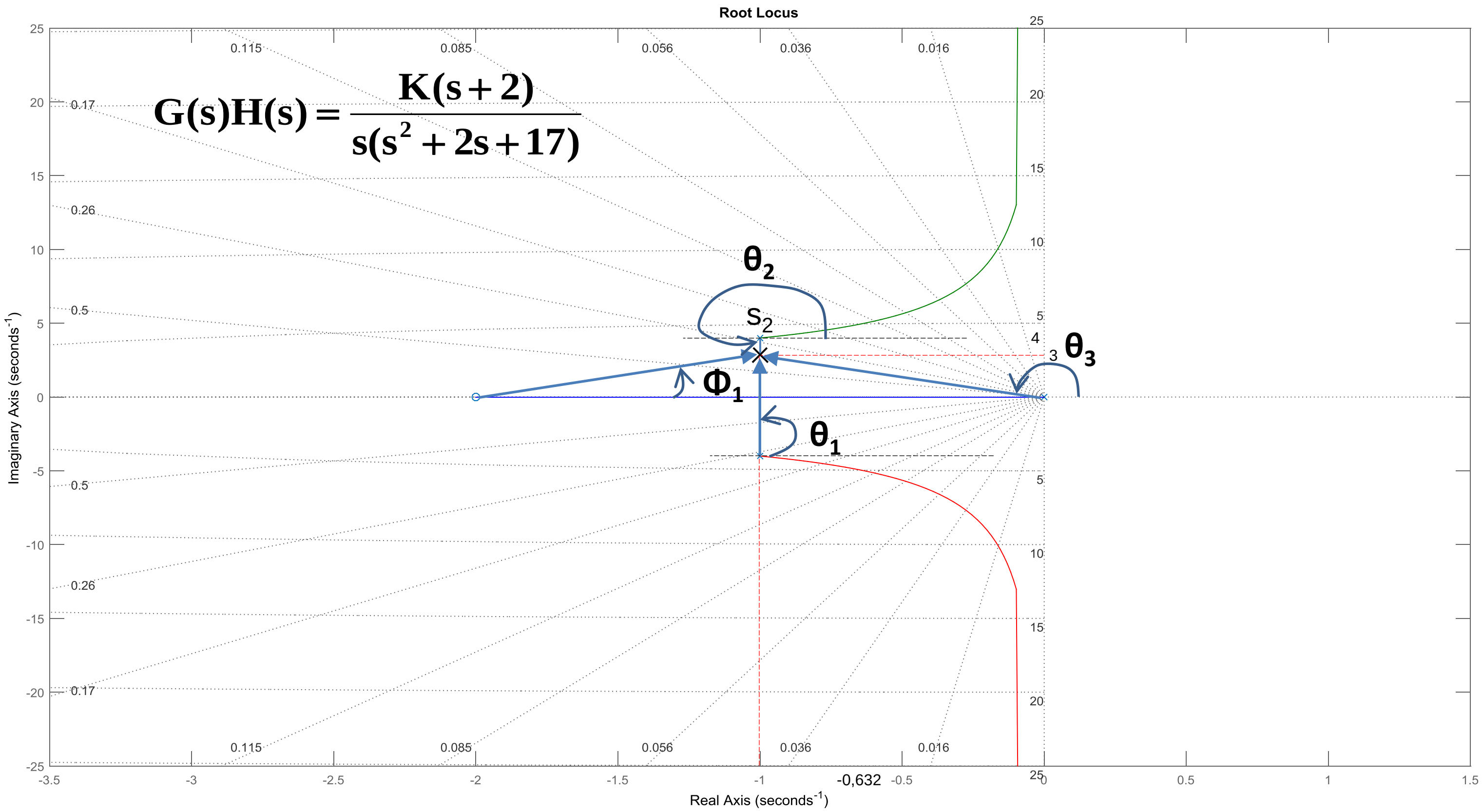
Solução

Vetores para o ponto de teste $\mathbf{s_1 = -1,5 + j0}$:



Solução

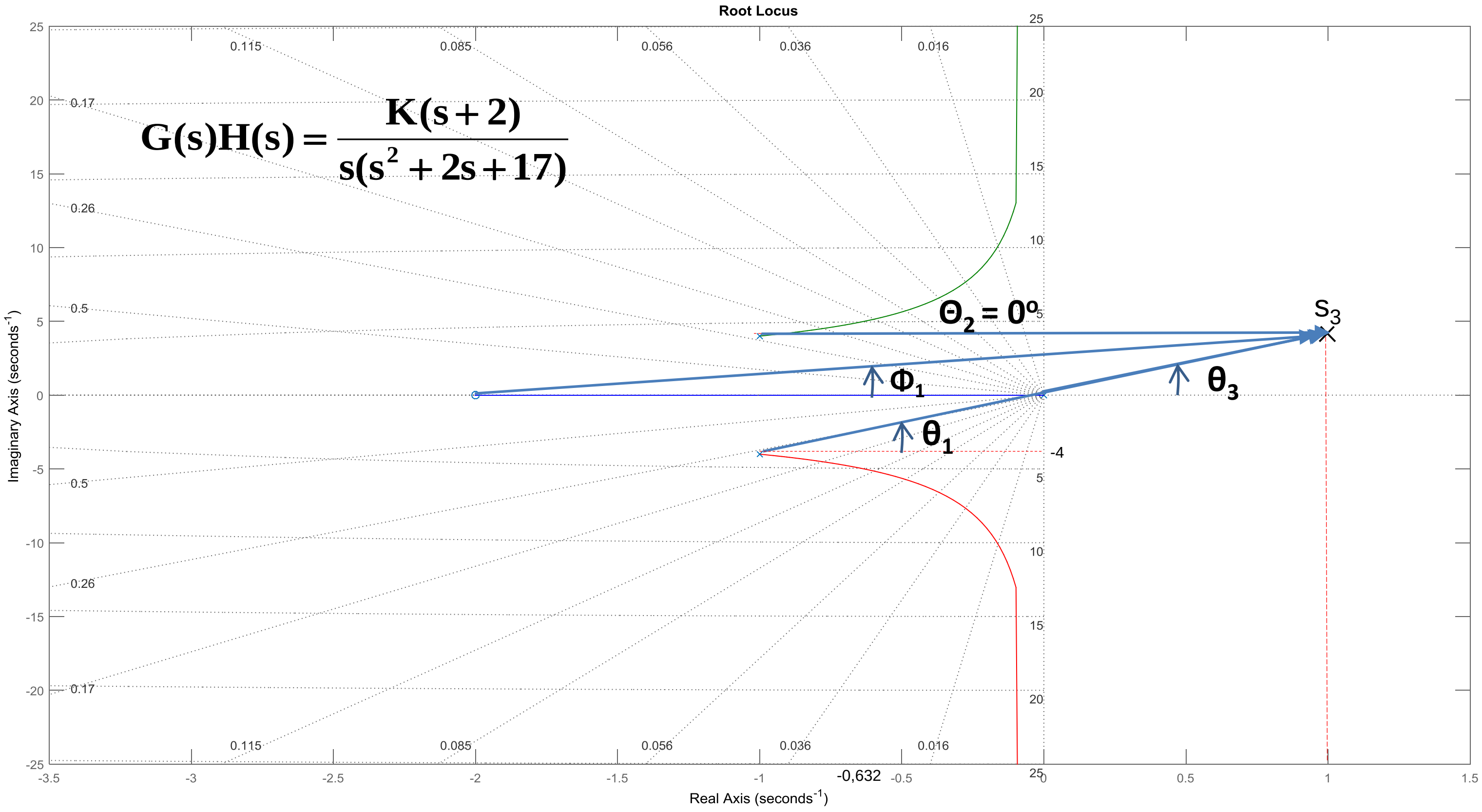
Vetores para o ponto de teste $\mathbf{s_2 = -1 + j3}$:



Calcular os ângulos φ_1, θ_1, θ_2 e θ_3 dos vetores!!!

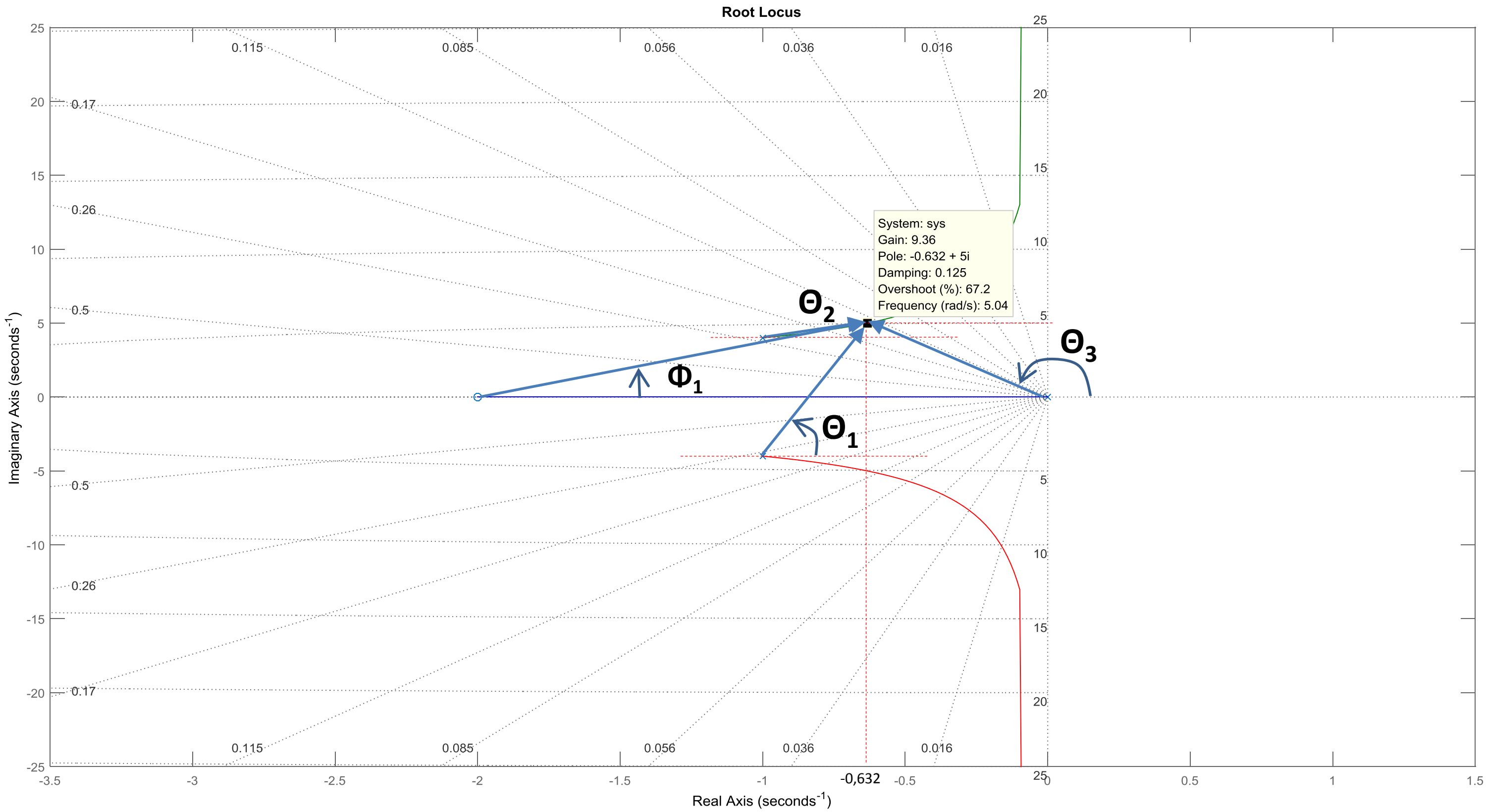
Solução

Vetores para o ponto de teste $\mathbf{s_3 = 1 + j4}$:



Solução

Vetores para o ponto de teste $\mathbf{s_4 = -0,632 + j5}$:

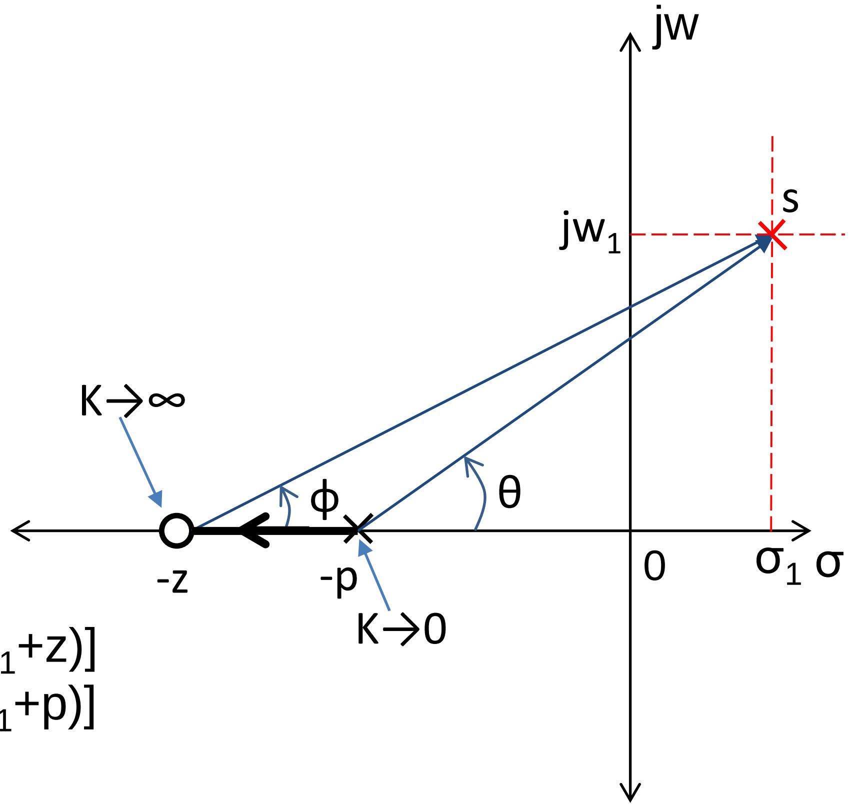


2.4. Esboço do Lugar das Raízes

Sistemas de 1ª Ordem (com pólo e zero)

Seja $$\mathbf{G(s)=\frac{K(s+z)}{(s+p)}}$$ com **z > p > 0**.

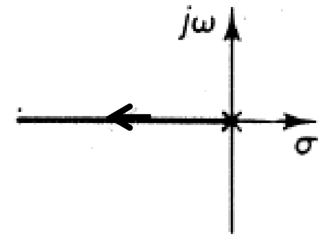
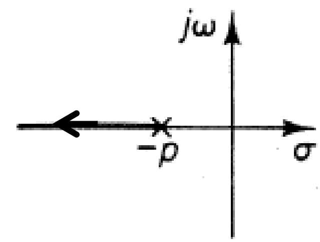
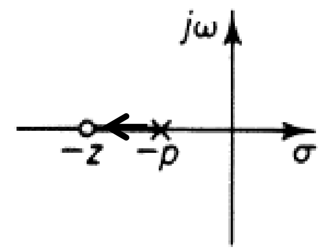
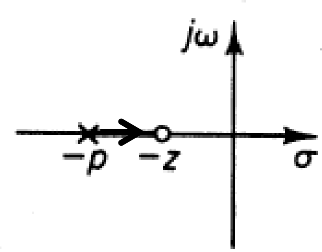
- Condição de Ângulo: $\angle \mathbf{K}+\angle(\mathbf{s}+\mathbf{z})-\angle(\mathbf{s}+\mathbf{p})=\pm 180^{\circ}(2\mathbf{n}+1); \quad (\mathbf{n}=0,1,2,3,\ldots)$



$\Phi = tg^{-1}[w_1/(\sigma_1+z)]$
$\Theta = tg^{-1}[w_1/(\sigma_1+p)]$

$$\angle \mathbf{G(s)} = 0^{\circ} + tg^{-1}\left[\frac{w_1}{(\sigma_1+z)}\right] + tg^{-1}\left[\frac{w_1}{(\sigma_1+p)}\right]$$

Lugares das Raízes mais comuns para sistemas de 1ª Ordem

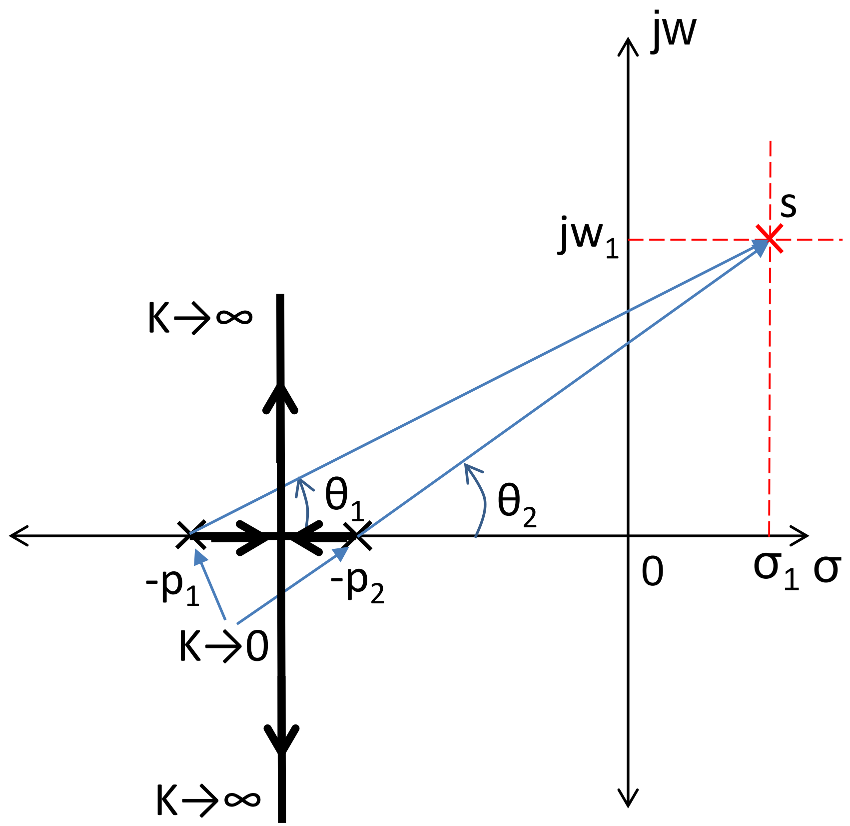
$G(s)H(s)$	**Localização dos pólos e zeros de malha aberta e os lugares das raízes**
$\frac{K}{s}$	
$\frac{K}{s+p}$	
$\frac{K(s+z)}{s+p}$ $(z > p)$	
$\frac{K(s+z)}{s+p}$ $(z < p)$	

2.4. Esboço do Lugar das Raízes

Sistemas de 2ª Ordem (sem zeros)

Seja $$G(s) = \frac{K}{(s+p_1)(s+p_2)}$$ com $p_1 > p_2 > 0$.

- Condição de Ângulo: $\angle K - \angle(s+p_1) - \angle(s+p_2) = \pm 180^o(2n+1); \quad (n = 0,1,2,3,...)$

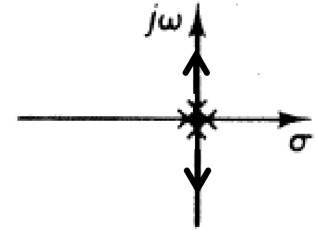
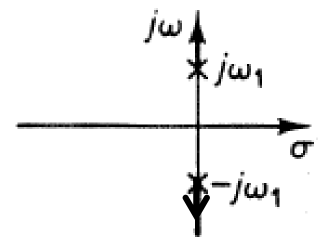
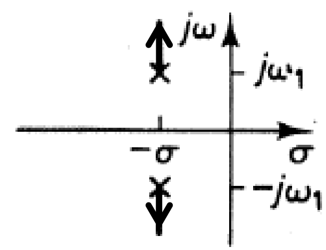
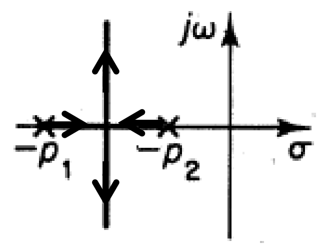


$\Theta_1 = tg^{-1}[w_1/(\sigma_1+z)]$

$\Theta_2 = tg^{-1}[w_1/(\sigma_1+p)]$

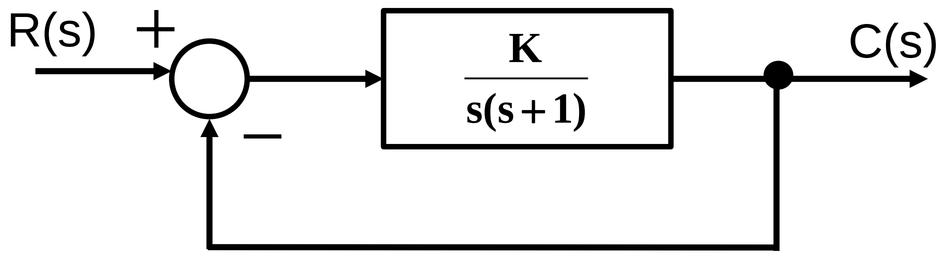
$$\angle G(s) = 0^o + tg^{-1}[\frac{w_1}{(\sigma_1 + p_1)}] + tg^{-1}[\frac{w_1}{(\sigma_1 + p_2)}]$$

Lugares das Raízes mais comuns para sistemas de 2ª Ordem

$G(s)H(s)$	**Localização dos pólos e zeros de malha aberta e os lugares das raízes**
$\dfrac{K}{s^2}$	
$\dfrac{K}{s^2+\omega_1^2}$	
$\dfrac{K}{(s+\sigma)^2+\omega_1^2}$	
$\dfrac{K}{(s+p_1)(s+p_2)}$	

2.5. Exercício

2.5.1 Seja o sistema de controle em malha fechada dado a seguir:



a) Construir o Lugar das Raízes.

b) Para quais os valores do ganho K o sistema é ESTÁVEL?

c) Para quais os valores de K o sistema possui uma resposta superamortecida?

d) Para quais os valores de K o sistema possui uma resposta criticamente amortecida?

e) Para quais os valores de K o sistema possui uma resposta subamortecida?

Solução

a) Construir o Lugar das Raízes.

$$\mathbf{F(s)=\frac{K}{s(s+1)+K} \Rightarrow F(s)=\frac{K}{(s^2+s+K)}}$$

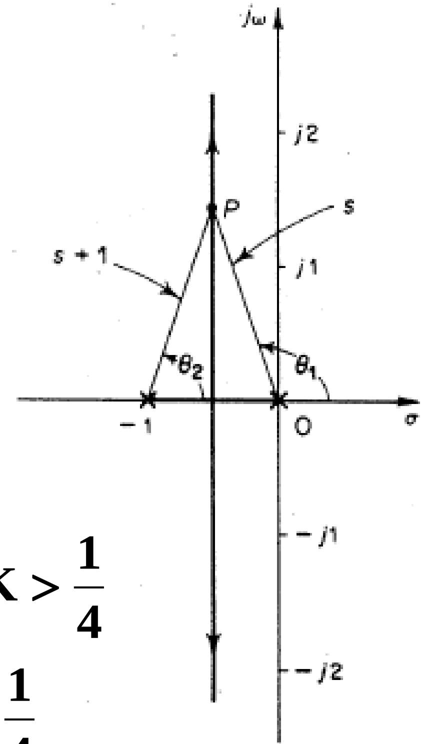
$$\textbf{Equação Característica: } \mathbf{s^2+s+K=0}$$

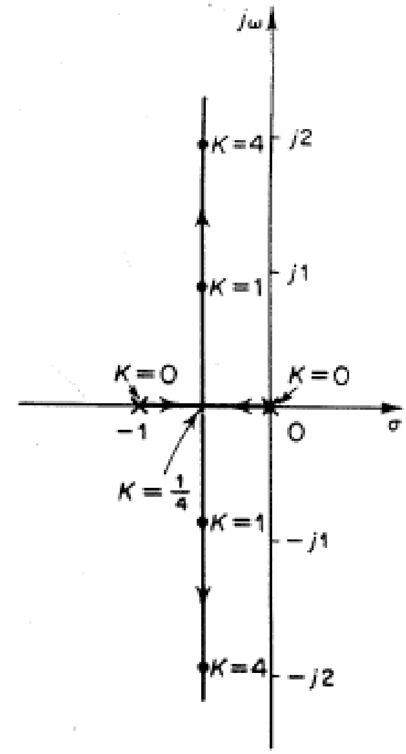
$$\mathbf{s_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{(1-4K)}}{2} \Rightarrow s_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{(1-4K)}}{2}}$$

$$\textbf{Raízes Reais distintas} \Rightarrow \mathbf{(1-4K)>0 \Rightarrow K>\frac{1}{4}}$$

$$\textbf{Raízes Reais iguais} \Rightarrow \mathbf{(1-4K)=0 \Rightarrow K=\frac{1}{4}}$$

$$\textbf{Raízes complexas conjugadas} \Rightarrow \mathbf{(1-4K)<0 \Rightarrow K>\frac{1}{4}}$$





b) Para quais os valores do ganho K o sistema é ESTÁVEL?

R.: K > 0

c) Para quais os valores de K o sistema possui uma resposta superamortecida?

R.: 0 < K < ¼

d) Para quais os valores de K o sistema possui uma resposta criticamente amortecida? **R.: K = ¼**

e) Para quais os valores de K o sistema possui uma resposta subamortecida?

R.: K > ¼