UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA – UFV
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – CCE
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA - DEL

Sistemas de Controle II

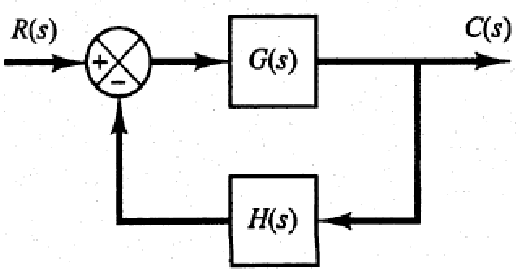
ELT331

AULA 3 – Regras para Construção do Lugar das Raízes – Realimentação Negativa

Prof. Tarcísio Pizziolo

3. Regras Gerais Construção do Lugar das Raízes

Seja o sistema de controle com **realimentação negativa** dado a seguir:



$$F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

A equação característica é dada por:

$$1 + \frac{K(s+z_1)(s+z_2)...(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)...(s+p_n)} = 0$$

<u>Regras Gerais:</u>

1 – Localizar os pólos e os zeros de G(s)H(s) no plano complexo.

2 – Determinar os trechos do LR no eixo real pela condição de ângulo.

3 – Determinar as assíntotas do LR e os seus pontos de interseção com o eixo real.

4 – Determinar os pontos de bifurcação (partida e os de chegada) do LR no eixo real.

5 – Determinar o ângulo de partida de um pólo complexo do LR.

6 – Determinar os pontos onde o LR pode cruzar o eixo imaginário.

7 – Com um ganho **K** determinar os pólos de malha fechada com a condição de módulo.

8 – Obter uma série de pontos de teste **s** na região da origem do plano complexo e esboçar o LR.

3. Regras Gerais Construção do Lugar das Raízes

Exemplo 3.1 Seja a função de transferência de malha aberta a seguir.

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+2)(s+5)}{s^2(s+4)}$$

Regras Gerais:

1 – Localizar os pólos e os zeros de **G(s)H(s)** no plano complexo.

- O número de pólos e zeros de um sistema de controle deve ser igual.
- Se número de pólos finitos for maior que o número de zeros finitos, a quantidade de zeros finitos a menos que a quantidade de pólos finitos está localizada no infinito.
- Deve-se considerar que quando o ganho de malha aberta **K → 0** o LR tende aos pólos e quando o ganho de malha aberta **K → ∞** o LR tende para os zeros.

Número de pólos de malha aberta: $s^2(s+4) = 0$; $s_1 = s_2 = 0$ e $s_3 = -4$; (3 pólos finitos).
Número de zeros de malha aberta: $(s+2)(s+5) = 0$; $s_1 = -2$; $s_2 = -5$; s_3 no infinito.

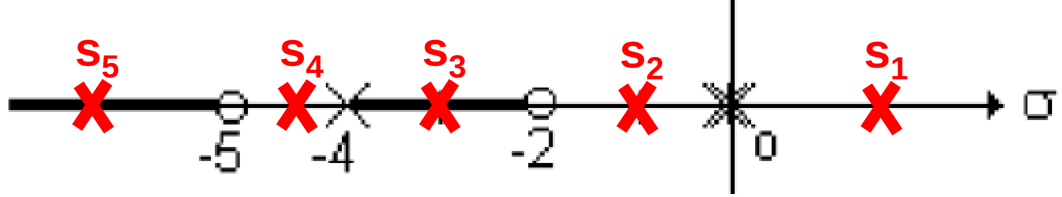
- O número de ramos do LR deve ser igual ao número de pólos (**n**) do sistema em malha fechada, e como em geral **m** (número de zeros finitos) <= **n** (número de pólos finitos), haverá sempre (**n-m**) ramos que tendem para os zeros no infinito quando **K → ∞**. Estes ramos constituem as assíntotas!
- O polinômio característico tem coeficientes reais e suas raízes podem ser de dois tipos apenas, ou seja, **raízes reais** ou **pares de raízes complexas conjugadas**. Sendo assim, conclui-se que o LR é **simétrico em relação ao eixo real do plano complexo**.

3. Regras Gerais Construção do Lugar das Raízes

2 – Determinar os trechos do Lugar das Raízes no eixo real pela condição de ângulo.

- As **regiões do eixo real à esquerda** de um **número ímpar de pólos e zeros** de **G(s)H(s)** pertencem ao **Root-Locus**.
- Aplicando um ponto de teste **s** sobre o eixo real pode-se verificar!

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+2)(s+5)}{s^2(s+4)}$$



$$s_1 : \text{De} \quad 0 \quad a \quad +\infty \Rightarrow \underbrace{\angle K}_{\text{ganho}} + \underbrace{\angle(s+2)+\angle(s+5)}_{\text{zeros finitos}} - \underbrace{\overbrace{\angle s^2}^{-(\angle s+\angle s)} - \angle(s+4)}_{\text{pólos}} = 0^0 \quad (\nexists \quad LR)$$

$$s_2 : \text{De} \quad -2 \quad a \quad 0 \Rightarrow \angle K + \angle(s+2)+\angle(s+5) - \angle s^2 - \angle(s+4) = 360^0 = 0^0 \quad (\nexists \quad LR)$$

$$s_3 : \text{De} \quad -4 \quad a \quad -2 \Rightarrow \angle K + \angle(s+2)+\angle(s+5) - \angle s^2 - \angle(s+4) = 540^0 = 180^0 \quad (\exists \quad LR)$$

$$s_4 : \text{De} \quad -5 \quad a \quad -4 \Rightarrow \angle K + \angle(s+2)+\angle(s+5) - \angle s^2 - \angle(s+4) = 720^0 = 0^0 \quad (\nexists \quad LR)$$

$$s_5 : \text{De} \quad -\infty \quad a \quad -5 \Rightarrow \angle K + \angle(s+2)+\angle(s+5) - \angle s^2 - \angle(s+4) = 900^0 = 180^0 \quad (\exists \quad LR)$$

3. Regras Gerais Construção do Lugar das Raízes

3 – Determinar as assíntotas do Lugar das Raízes.

- À medida que um ponto **s** → ∞ no LR pode-se definir:

$$\lim_{s\to\infty} G(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)} \quad ; \quad (n \geq m)$$

$$\text{Então}: \boxed{\lim_{s\to\infty} G(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{K}{s^{(n-m)}}}$$

A partir desta simplificação, a contribuição angular de **G(s)** será dada por:

$$\lim_{s\to\infty} G(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{K}{s^{(n-m)}} \Rightarrow \angle G(s) = \pm 180^0 (2n+1) \Rightarrow \angle \frac{K}{s^{(n-m)}} = \pm 180^0 (2n+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle K - \angle s^{(n-m)} = \pm 180^0 (2n+1) \Rightarrow 0^0 - \angle s^{(n-m)} = \pm 180^0 (2n+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(n-m)\angle s = \pm 180^0 (2n+1) \Rightarrow \boxed{\angle s = \frac{\pm 180^0 (2n+1)}{(n-m)}}$$

<u>**Conclusão:**</u>

- Os ângulos das assíntotas ao **LR** para **s**→∞ partem de pontos de bifurcações no eixo real do plano s orientados pela divisão dos múltiplos de **180°** divididos pela diferença entre o número **n** de pólos e o número **m** de zeros finitos de **G(s)**.

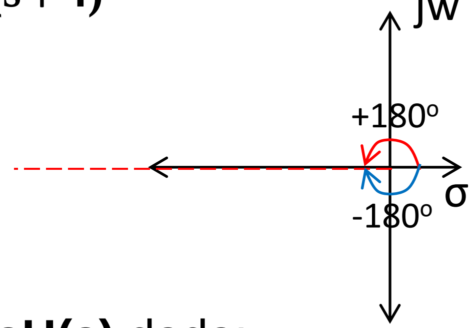
3. Regras Gerais Construção do Lugar das Raízes

- Exemplo de assíntotas de LR:

$$\boxed{\alpha = \frac{\pm 180^0(2n+1)}{(n-m)}}$$

Determinar os ângulos das assíntotas para a $G(s)H(s) = \dfrac{K(s+2)(s+5)}{s^2(s+4)}$

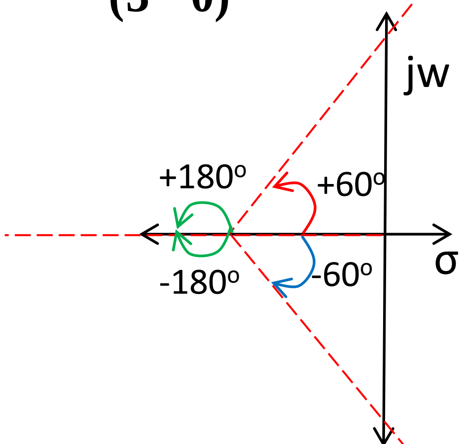
$$\alpha = \frac{\pm 180^0(2n+1)}{(n-m)} \Rightarrow \alpha = \frac{\pm 180^0(2n+1)}{(3-2)} \Rightarrow \alpha = \pm 180^0(2n+1)$$



Exemplo 3.2 Determinar os ângulos das assíntotas para a **G(sH(s)** dada:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\alpha = \frac{\pm 180^0(2n+1)}{(n-m)} \Rightarrow \alpha = \frac{\pm 180^0(2n+1)}{(3-0)} \Rightarrow \alpha = \frac{\pm 180^0(2n+1)}{3} \Rightarrow \alpha = \pm 60^0(2n+1)$$



n = 0: α = +60º e -60º

n = 1: α = +180º e -180º

...

Múltiplos de n !

3. Regras Gerais Construção do Lugar das Raízes

- Cruzamento das assíntotas no eixo real.

Todas as assíntotas se cruzam no eixo real.

Expandindo o numerador e o denominador da função de transferência de malha aberta obtemos:

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)...(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)...(s+p_n)}\Rightarrow G(s)H(s)=\frac{K[s^m+(z_1+z_2+...+z_m)s^{(m-1)}+...+z_1z_2...z_m]}{[s^n+(p_1+p_2+...+p_n)s^{(n-1)}+...+p_1p_2...p_n]}$$

Dividindo o numerador e o denominador de **G(s)H(s)** pelo numerador obtendo:

$$G(s)H(s)=\frac{\dfrac{K[s^m+(z_1+z_2+...+z_m)s^{(m-1)}+...+z_1z_2...z_m]}{[s^m+(z_1+z_2+...+z_m)s^{(m-1)}+...+z_1z_2...z_m]}}{\dfrac{[s^n+(p_1+p_2+...+p_n)s^{(n-1)}+...+p_1p_2...p_n]}{[s^m+(z_1+z_2+...+z_m)s^{(m-1)}+...+z_1z_2...z_m]}}\Rightarrow G(s)H(s)=\frac{K}{\dfrac{[s^n+(p_1+p_2+...+p_n)s^{(n-1)}+...+p_1p_2...p_n]}{[s^m+(z_1+z_2+...+z_m)s^{(m-1)}+...+z_1z_2...z_m]}}$$

Realizando a divisão no denominador de **G(s)H(s)**:

$$\begin{array}{l|l}
s^n+(p_1+p_2+...+p_n)s^{(n-1)}+...+p_1p_2...p_n & s^m+(z_1+z_2+...+z_m)s^{(m-1)}+...+z_1z_2...z_m \\ \hline
-s^n-(z_1+z_2+...+z_m)s^{(n-1)}+... & s^{(n-m)}+[(p_1+p_2+...+p_n)-(z_1+z_2+...+z_m)]s^{(n-m-1)}+... \\
\quad [(p_1+p_2+...+p_n)-(z_1+z_2+...+z_m)]s^{(n-1)}+... &
\end{array}$$

Então: $$G(s)H(s)=\frac{K}{s^{(n-m)}+[(p_1+p_2+...+p_n)-(z_1+z_2+...+z_m)]s^{(n-m-1)}+...}$$

Para um ponto de teste **s→∞** pode-se simplificar **G(s)H(s)** para:

$$G(s)H(s)=\frac{K}{\left[s+\dfrac{(p_1+p_2+...+p_n)-(z_1+z_2+...+z_m)}{(n-m)}\right]^{(n-m)}}$$

3. Regras Gerais Construção do Lugar das Raízes

A abscissa do ponto de interseção das assíntotas com o eixo real será dada por:

$$s+\frac{(p_1+p_2+\dots+p_n)-(z_1+z_2+\dots+z_m)}{(n-m)}=0\Rightarrow s=-\frac{(p_1+p_2+\dots+p_n)-(z_1+z_2+\dots+z_m)}{(n-m)}$$

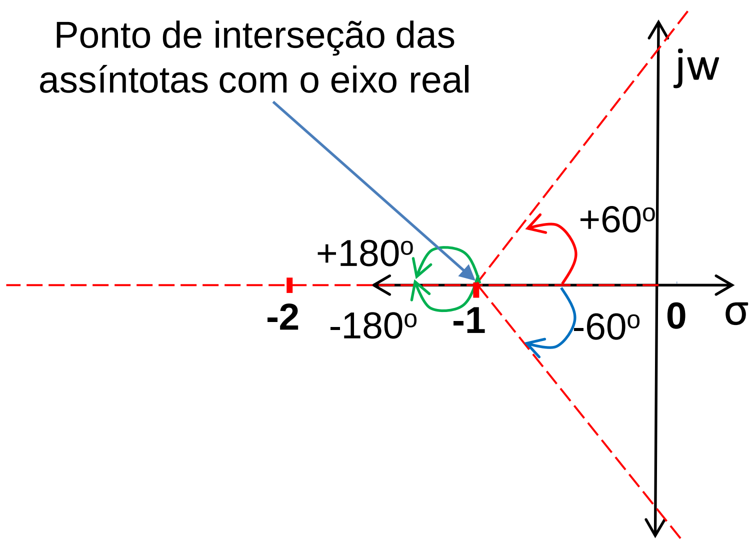
Ou:

$$\boxed{\sigma_a=\frac{\sum \text{Pólos}-\sum \text{Zeros}}{(n-m)}}$$

Exemplo 3.3: Determinar o ponto de interseção das assíntotas de G(sH(s) com o eixo real.

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\sigma_a=\frac{\sum \text{Pólos}-\sum \text{Zeros}}{(n-m)}\Rightarrow \sigma_a=\frac{(0-1-2)}{(3-0)}\Rightarrow \sigma_a=\frac{-3}{3}\Rightarrow \boxed{\sigma_a=-1}$$



3. Regras Gerais Construção do Lugar das Raízes

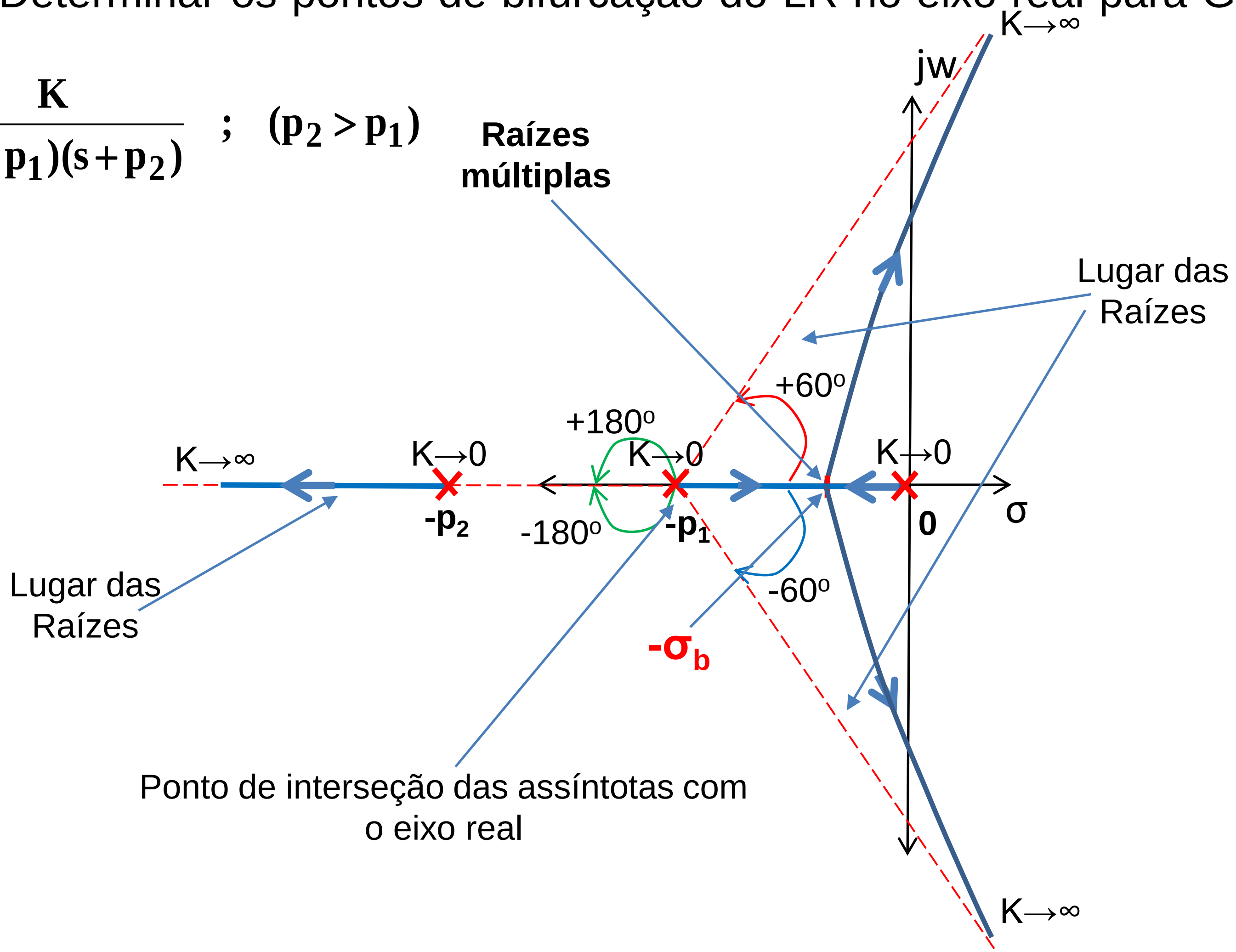
4 – Determinar os pontos de bifurcação do LR no eixo real.

É o ponto do plano **s** onde são encontradas **raízes múltiplas** da equação característica.

Ponto de bifurcação: **($-\sigma_b$, 0)**

Exemplo 3.4 Determinar os pontos de bifurcação do LR no eixo real para G(s)H(s) dada.

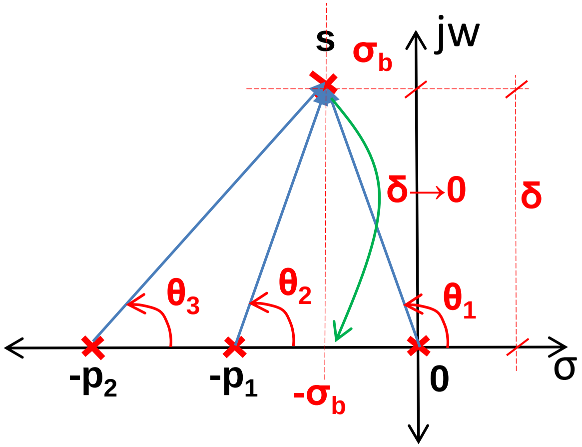
$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+p_1)(s+p_2)} \quad ; \quad (p_2 > p_1)$$



3. Regras Gerais Construção do Lugar das Raízes

4 – Determinar os pontos de bifurcação do LR no eixo real.

Seja um ponto de teste **s** próximo ao eixo real. Pode-se determinar graficamente o ponto de bifurcação do LR no eixo real conforme a seguir.



$$\theta_1 = 180^0 - tg^{-1}\left(\frac{\delta}{\sigma_b}\right)$$

$$\theta_2 = tg^{-1}\left(\frac{\delta}{p_1 - \sigma_b}\right)$$

$$\theta_3 = tg^{-1}\left(\frac{\delta}{p_2 - \sigma_b}\right)$$

- Para um valor pequeno de **δ** (δ→0):

$$\theta_1 = 180^0 - \frac{\delta}{\sigma_b}\ ;\ \theta_2 = \frac{\delta}{(p_1 - \sigma_b)}\ \text{e}\ \theta_3 = \frac{\delta}{(p_2 - \sigma_b)}$$

- Quando **δ→0** o ponto de teste **s** interceptará o eixo real determinando assim o ponto de bifurcação do LR no eixo real.

Aplicando a condição de ângulo: $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pm 180^\circ\,(2n+1)$

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 180^0 \Rightarrow 180^0 - \frac{\delta}{\sigma_b} + \frac{\delta}{(p_1 - \sigma_b)} + \frac{\delta}{(p_2 - \sigma_b)} = 180^0 \Rightarrow -\frac{1}{\sigma_b} + \frac{1}{(p_1 - \sigma_b)} + \frac{1}{(p_2 - \sigma_b)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma_b} + \frac{1}{(\sigma_b - p_1)} + \frac{1}{(\sigma_b - p_2)} = 0 \Rightarrow \frac{(\sigma_b - p_1)(\sigma_b - p_2) + \sigma_b(\sigma_b - p_2) + \sigma_b(\sigma_b - p_1)}{\sigma_b(\sigma_b - p_1)(\sigma_b - p_2)} = 0 \Rightarrow$$

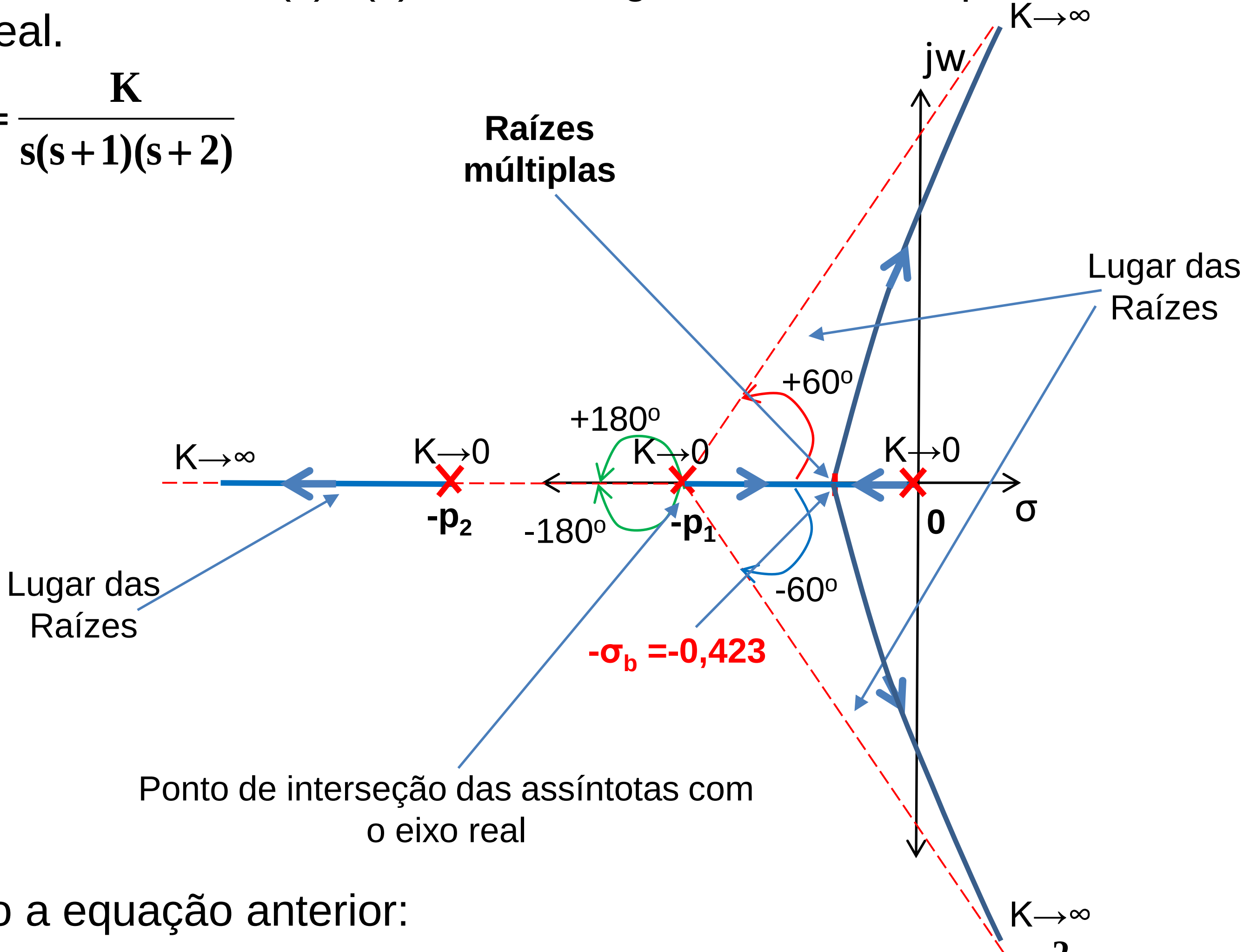
$$\Rightarrow (\sigma_b - p_1)(\sigma_b - p_2) + \sigma_b(\sigma_b - p_2) + \sigma_b(\sigma_b - p_1) \Rightarrow \boxed{3\sigma_b^{\,2} - 2(p_1 + p_2)\sigma_b + (p_1 p_2) = 0}$$

Resolvendo a equação quadrática em σ_b e em seguida verificando se os valores encontrados pertencem ao LR, determina-se então o ponto de bifurcação do LR no eixo real.

3. Regras Gerais Construção do Lugar das Raízes

Exemplo 3.5 Para a G(s)H(s) dada a seguir determine o ponto de bifurcação do LR no eixo real.

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$



Aplicando a equação anterior:

$$3\sigma_b{}^2 - 2(p_1 + p_2)\sigma_b + (p_1 p_2) = 0 \Rightarrow \textbf{substituindo} \quad p_1 \quad \textbf{e} \quad p_2 \Rightarrow 3\sigma_b{}^2 - 2(1+2)\sigma_b + (1x2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\sigma_b{}^2 - 6\sigma_b + 2 = 0 \Rightarrow \sigma_{b_1} = 0{,}423\,(\in LR) \quad \textbf{e} \quad \sigma_{b_2} = 1{,}577\,(\notin LR)$$

$$\textbf{O ponto de bifurcação é:} \boxed{\sigma_b = \sigma_{b_1} = -0{,}423}$$

3. Regras Gerais Construção do Lugar das Raízes

4 – Determinar os pontos de bifurcação do LR no eixo real.

Existe um método analítico (matemático) para a determinação do ponto de bifurcação do LR no eixo real.

Suponha uma função **f(s)** a qual possua raízes múltiplas de ordem **r**:

$$\mathbf{f(s) = (s+s_1)^r(s+s_2)...(s+s_n)}$$

Derivando esta equação temos:

$$\frac{df(s)}{ds} = r(s+s_1)^{(r-1)}[(s+s_2)...(s+s_n)] + ...$$

Para $s = -s_1$ a derivada de **f(s)** será igual a **zero**! Daí: $\left.\frac{df(s)}{ds}\right|_{s=-s_1} = 0$

Isto indica que raízes múltiplas de **f(s)** satisfazem $\left.\frac{df(s)}{ds}\right|_{s=-s_1} = 0$!

Consideremos agora que a equação caracterísitca de um sistema de controle seja dada por:

$$1 + G(s)H(s) = 0 \Rightarrow 1 + \underbrace{KG_1(s)}_{G(s)}H(s) = 0 \Rightarrow \boxed{K = -\frac{1}{G_1(s)H(s)}}$$

O que torna K = f(s) !!!

Então, se **derivarmos K em relação a *s* e igualarmos a zero**, encontraremos os pontos de bifurcação do LR no eixo real.

$$\boxed{\frac{dK}{ds} = 0}$$

3. Regras Gerais Construção do Lugar das Raízes

4 – Determinar os pontos de bifurcação do LR no eixo real.

Para determinarmos se o ponto de bifurcação no eixo real do LR é ponto de saída ou ponto de chegada, devemos obter $\frac{d^2K}{ds^2}$ e substituir as raízes encontradas em $\frac{dK}{ds}=0$.

- Se:

$$\left.\frac{d^2K}{ds^2}\right|_{s=-\sigma_b} < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \Rightarrow \text{Ponto de saída do LR no eixo real.}$$

- Se:

$$\left.\frac{d^2K}{ds^2}\right|_{s=-\sigma_b} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \Rightarrow \text{Ponto de chegada do LR no eixo real.}$$

Exemplo 3.6 Para a G(s)H(s) dada a seguir determine o ponto de bifurcação do LR no eixo real. $G(s)H(s)=\frac{K}{s(s^2+6s+10)}$

$$1+G(s)H(s)=0 \Rightarrow 1+\frac{K}{s(s^2+6s+10)}=0 \Rightarrow K=-(s^3+6s^2+10s)$$

$$\frac{dK}{ds}=-3s^2-12s-10=0 \Rightarrow s_1=-1{,}18 \quad \text{e} \quad s_2=-2{,}82$$

$$\left.\frac{d^2K}{ds^2}\right|_{s_1=-1{,}18}=-4{,}92 \Rightarrow \text{Máximo} \Rightarrow \sigma_{b_1}=-1{,}18 \Rightarrow \text{Ponto de saída no eixo real no LR!}$$

$$\left.\frac{d^2K}{ds^2}\right|_{s_1=-2{,}82}=4{,}92 \Rightarrow \text{Mínimo} \Rightarrow \sigma_{b_1}=-2{,}82 \Rightarrow \text{Ponto de chegada no eixo real no LR!}$$

3. Regras Gerais Construção do Lugar das Raízes

Exemplo 3.7 Para a G(s)H(s) dada a seguir determine o ponto de bifurcação do LR no eixo real.

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

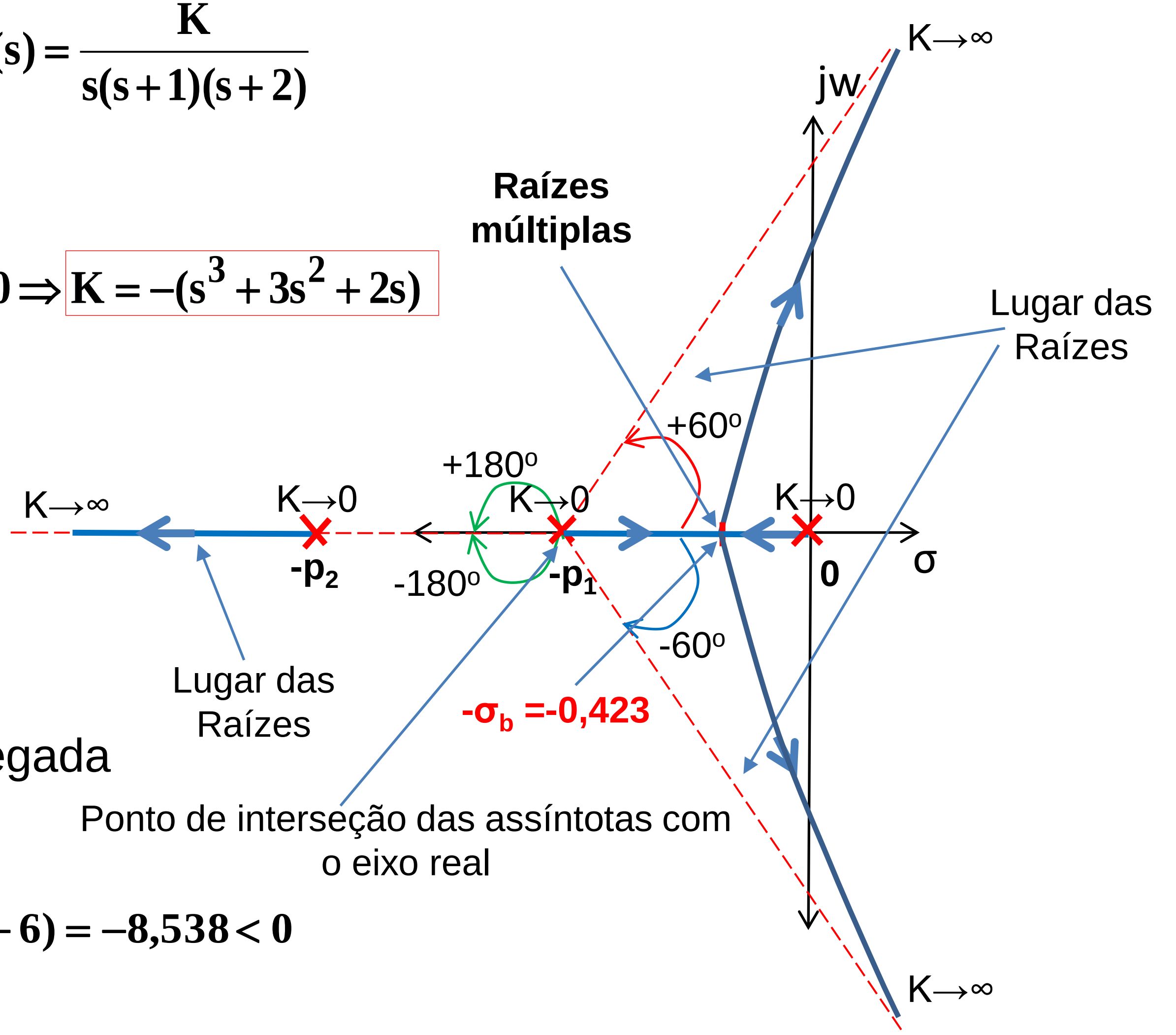
Aplicando $\frac{dK}{ds}=0$:

$$1+G(s)H(s)=0 \Rightarrow 1+\frac{K}{s(s+1)(s+2)}=0 \Rightarrow \boxed{K=-(s^3+3s^2+2s)}$$

$$\frac{dK}{ds}=0 \Rightarrow -(3s^2+6s+2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{s_1=-0{,}423\,(\in LR)} \\ s_2=-1{,}577\,(\notin LR) \end{cases}$$

Então: $-\sigma_b = -0{,}423$



Verificação se s_1 é ponto de chegada ou de partida:

$$\left.\frac{d^2K}{ds^2}\right|_{s=-0{,}423} = -6s-6=-6.(0{,}423)-6)=-8{,}538<0$$

$$\left.\frac{d^2K}{ds^2}\right|_{s=-0{,}423} <0 \Rightarrow \text{Máximo} \Rightarrow \sigma_b=-0{,}423 \Rightarrow \text{Ponto de Partida no eixo real no LR!}$$

3. Regras Gerais Construção do Lugar das Raízes

5 – Determinar o ângulo de partida de um pólo complexo (ou de chegada de um zero complexo) do LR.

Se um ponto de teste **s** for escolhido **nas “proximidades”** de um polo complexo (ou de um zero complexo), pode-se considerar que a soma das contribuições angulares de todos os outros polos e zeros permanece “invariável”.

Assim, o ângulo de partida (ou de chegada) do LR de um polo complexo (ou zero complexo) pode ser determinado subtraindo de **180°** a soma de todos os ângulos dos polos e somando-se todos os ângulos dos zeros que chegam ao polo complexo (ou zero complexo) em questão, incluindo os sinais apropriados.

Então:

Ângulo de partida de um pólo complexo:

$$\boxed{\angle \text{Pólo Complexo} = 180^0 - \sum\angle\left(\text{vetores} <_{\text{pólo referência}}^{\text{outros pólos}}\right) + \sum\angle\left(\text{vetores} <_{\text{pólo referência}}^{\text{zeros}}\right)}$$

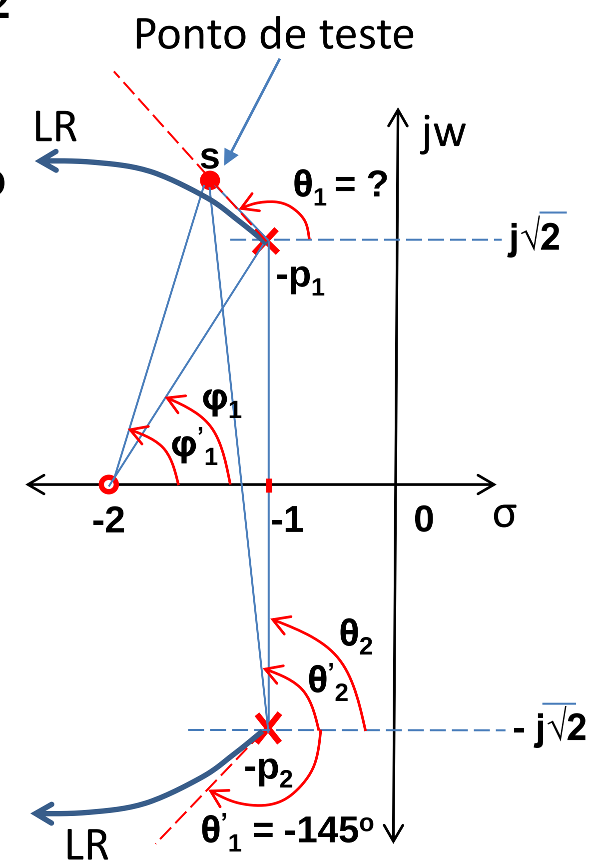
Ângulo de chegada de um zero complexo:

$$\boxed{\angle \text{Zero Complexo} = 180^0 - \sum\angle\left(\text{vetores} <_{\text{zero referência}}^{\text{outros zeros}}\right) + \sum\angle\left(\text{vetores} <_{\text{zero referência}}^{\text{pólos}}\right)}$$

3. Regras Gerais Construção do Lugar das Raízes

Exemplo 3.8 Determinar o ângulo de partida dos pólos complexos da **G(s)H(s)** dada.

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{(s^2+2s+3)} \Rightarrow \begin{cases} \text{zeros}: z_1 = -2 \quad \text{e} \quad z_2 \to \infty \\ \text{pólos}: p_1 = -1 + j\sqrt{2} \quad \text{e} \quad p_2 = -1 - j\sqrt{2} \end{cases}$$



Se o ponto de teste s estiver sobre o LR e próximo do pólo $-p_1$; ou seja; $s \to -p_1$:

(A **soma** das contribuições angulares de todos os **outros pólos** e **zeros** permanece “invariável”).

Ângulo de partida de um pólo complexo:

$$\angle s \Rightarrow -(\theta_1 + \theta_2') + \varphi_1' = \pm 180^o(2n+1) \Rightarrow \theta_1 = 180^o \underbrace{-\theta_2' + \varphi_1'}_{=(-\theta_2+\varphi_1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_1 = 180^o - \theta_2 + \varphi_1 \Rightarrow \theta_1 = 180^o - 90^o + 55^o \Rightarrow \boxed{\theta_1 = 145^o}$$

Então, o ângulo de partida do LR para o pólo **$-p_1$ é θ_1 = 145°**, e como o LR é simétrico ao eixo real, o ângulo de partida do LR para o pólo **$-p_2$ é θ'_1 = -145°**.

3. Regras Gerais Construção do Lugar das Raízes

6 – Determinar os pontos onde o LR pode cruzar o eixo imaginário.

a) Como os pontos que cruzam o eixo imaginário apresentam somente a parte imaginária, consideramos **s = jw** na equação característica e igualamos a zero tanto a parte real como a parte imaginária. Em seguida resolvemos as equações para **w** e **K**.

Exemplo 3.9 Considerando **s = jw** na equação característica, determinar os pontos onde o LR pode cruzar o eixo imaginário para:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

$$1 + G(s)H(s) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = 0 \Rightarrow s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

$$\text{Substituindo } s = jw: (jw)^3 + 3(jw)^2 + 2(jw) + K = 0 \Rightarrow (K - 3w^2) + j(2w - w^3) = 0$$

$$\text{Então}: \begin{cases} (K - 3w^2) = 0 \\ (2w - w^3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w = \pm\sqrt{2} \\ K = 6 \end{cases}$$

O LR interceptará o eixo imaginário nas frequências $w = \pm\sqrt{2} \quad rd/s$ com **K = 6**.

3. Regras Gerais Construção do Lugar das Raízes

b) Aplicando do Critério de Estabilidade de Routh determinamos o valor do ganho **K** para o limite da estabilidade. Para este valor de **K** o **LR** cruza o eixo imaginário. Resolvemos a equação auxiliar da Matriz de Routh a qual nos permite calcular os valores das frequências **w** para o valor de **K** encontrado.

Exemplo 3.10 Aplicando do **Critério de Estabilidade de Routh** na equação característica, determinar os pontos onde o LR pode cruzar o eixo imaginário.

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

$$1 + G(s)H(s) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = 0 \Rightarrow s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

Matriz de Routh:

$$\begin{array}{c} s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & K \\ \frac{(6-K)}{3} & 0 \\ K & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{(6-K)}{3} > 0 \Rightarrow K < 6 \\ K > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad K_{limite} = 6$$

Substituindo **K = 6** na segunda equação auxiliar da Matriz de Routh:

$$3s^2 + K = 0 \Rightarrow 3s^2 + 6 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j\sqrt{2} \Rightarrow w = \pm\sqrt{2} \quad rd/s$$

O LR interceptará o eixo imaginário nas frequências $w = \pm\sqrt{2} \quad rd/s$ com **K = 6**.

3. Regras Gerais Construção do Lugar das Raízes

7 – Com um ganho **K** determinar os pólos de malha fechada com a condição de módulo.

Para deteminar o valor ddo ganho **K** aplica-se a condição de módulo de **G(s)H(s)**, e se for necessário obter os **pólos de malha fechada** dado o valor do ganho **K** o procedimento é o mesmo.

$$|G(s)H(s)| = 1 \Rightarrow \left|\underbrace{KG_1(s)H(s)}_{G(s)}\right| = 1 \Rightarrow K = \left|\frac{1}{G_1(s)H(s)}\right|_{s=p_{mf}}$$

Exemplo 3.11 Dada **G(s)H(s)**, determinar o valor do ganho **K** para que o pólo de malha fechada **s = -1,67 + j1,70** pertença ao LR de G(S)H(s).

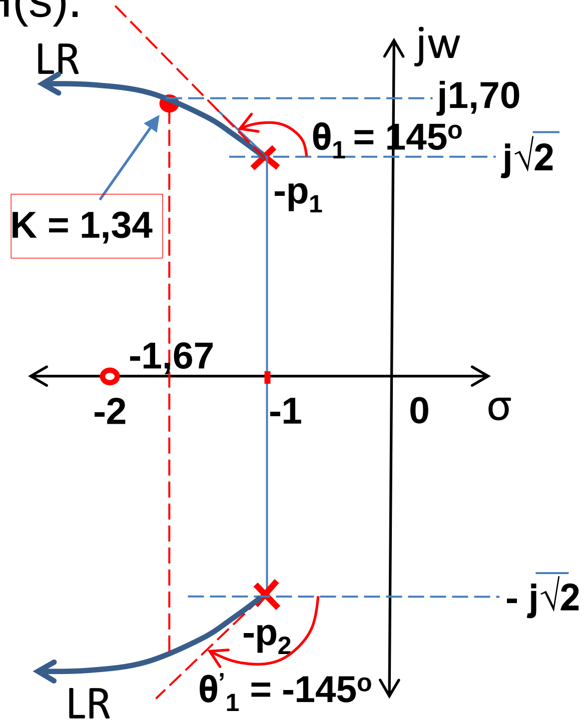
$$G(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{(s^2+2s+3)}$$

$$|G(s)H(s)| = 1 \Rightarrow \left|\frac{K(s+2)}{(s^2+2s+3)}\right| = 1 \Rightarrow K = \left|\frac{(s^2+2s+3)}{(s+2)}\right|_{s=-1,67+j1,70} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \left|\frac{(s+1-j\sqrt{2})(s+1+j\sqrt{2})}{(s+2)}\right|_{s=-1,67+j1,70} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \left|\frac{(-1,67+j1,70+1-j\sqrt{2})(-1,67+j1,70+1+j\sqrt{2})}{(-1,67+j1,70+2)}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{K = 1,34}$$

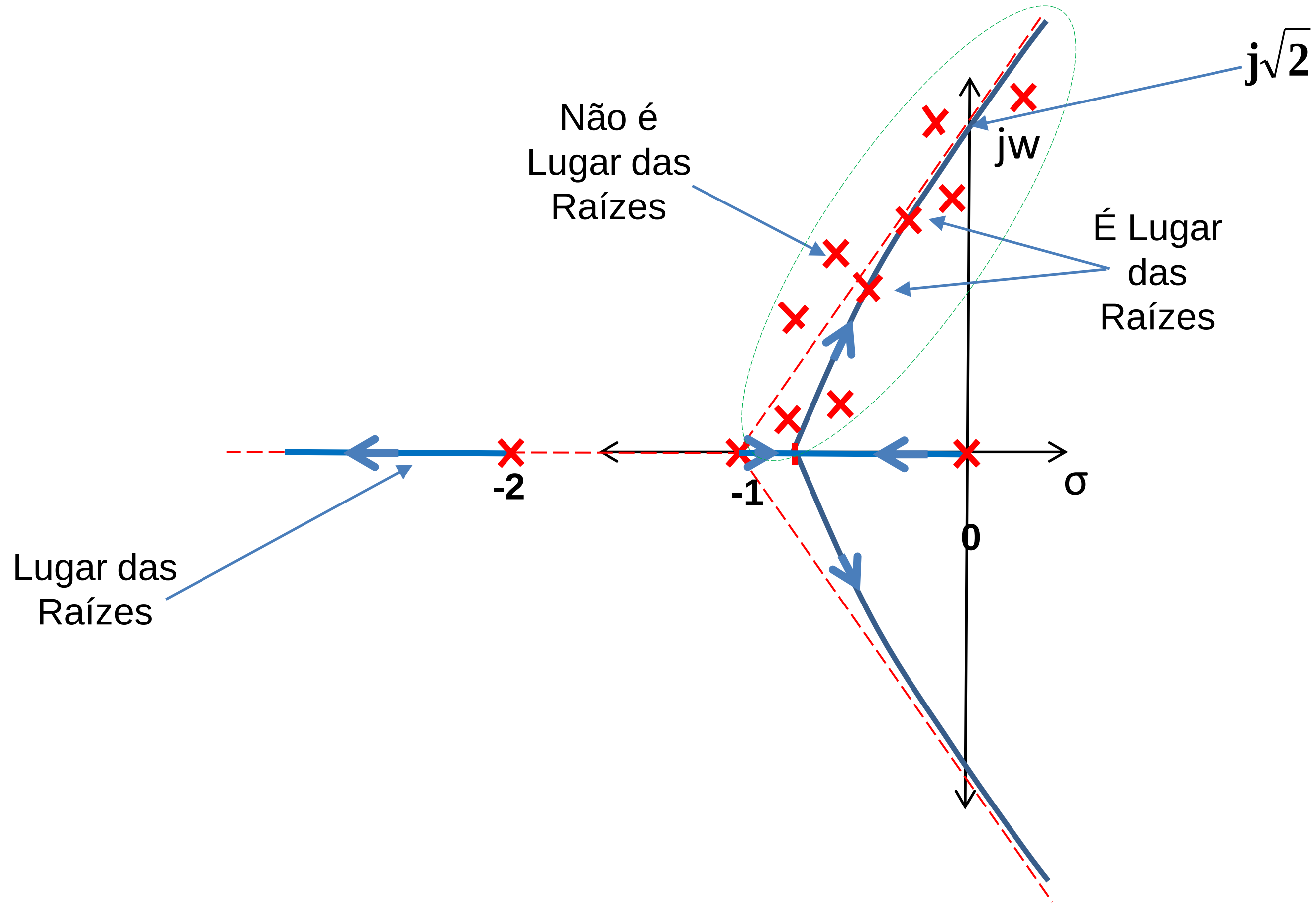


3. Regras Gerais Construção do Lugar das Raízes

8 – Obter uma série de pontos de teste **s** na região da origem do plano complexo e esboçar o LR.

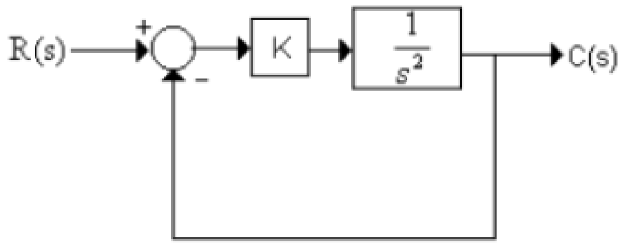
Para esboçar o LR devem ser determinados vários pontos entre o ponto de chegada ao eixo real e os pólos complexos de malha aberta pelo método de "tentativa e erro".

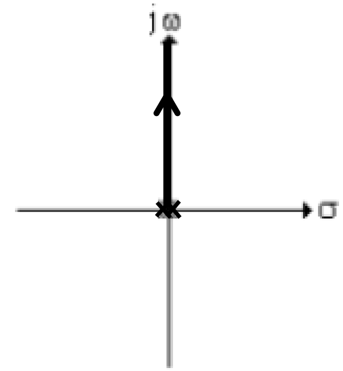
Deve-se encontrar a direção na qual o ponto de teste **s** deve ser movido em função da soma das variações dos ângulos nos pólos e nos zeros.



Exercícios

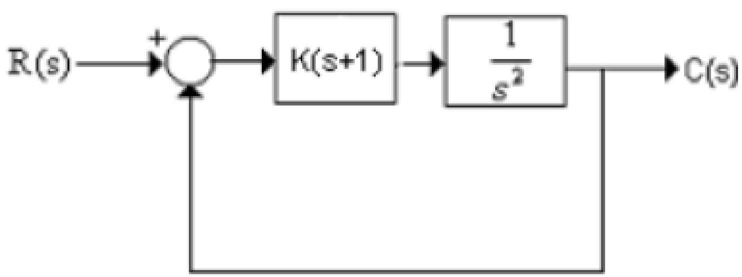
Exercício 3.1 Seja o sistema indicado na figura abaixo que pode, por exemplo, representar um sistema de controle de posição de uma inércia pura através de um controle proporcional.

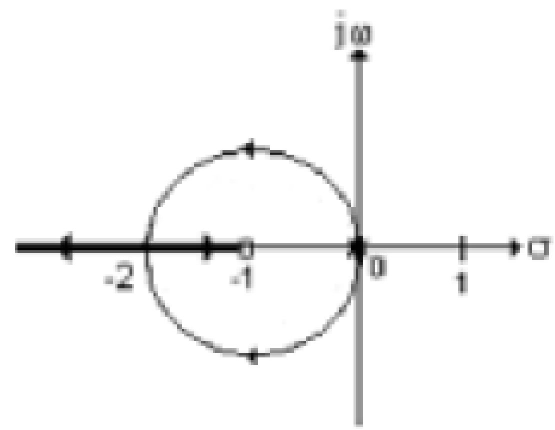




Construir o LR para o sistema dado acima.

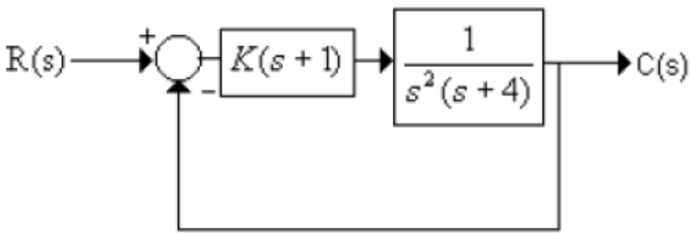
Exercício 3.2 Consideremos agora o sistema mostrado abaixo. Podemos encarar esse caso como sendo correspondente ao controle de posição de uma inércia pura através de um controlador proporcional derivativo (P.D).

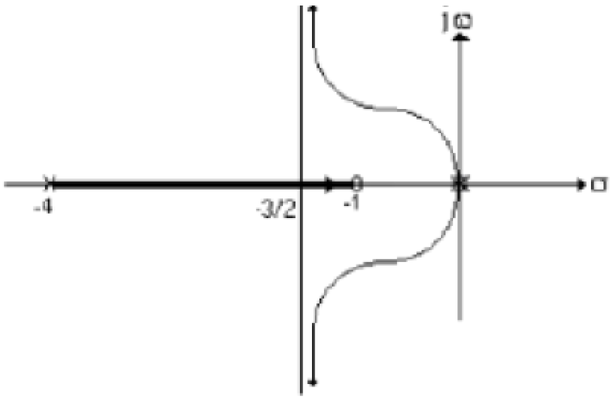




Construir o LR para o sistema dado acima.

Exercício 3.3 Seja agora o sistema abaixo. Construir o LR para o sistema dado.





Exercício 3.4 Obtenha o Root-Locus para um sistema com realimentação unitária com função de transferência de malha aberta dada por:

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 6s + 10)}$$