UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA – UFV
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – CCE
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA - DEL

Sistemas de Controle II

ELT331

AULA 9 – Resposta em Frequência

Prof. Tarcísio Pizziolo

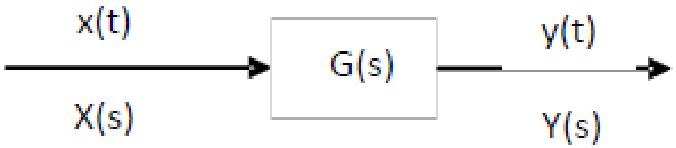
9 Resposta em Frequência

9.1. Análise de Resposta em Frequência

Resposta em Frequência é a **Resposta em Regime Estacionário** (ou Permanente) de um sistema com entrada senoidal.

A análise de resposta em frequência é feita variando-se a frequência do sinal de entrada em um certo intervalo e verificando-se a resposta em frequência resultante.

Considere um sistema dado pelo seu Diagrama de Blocos:



Considere sua **Função de Transferência** generalizada:

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{(s+s_1).(s+s_2)...(s+s_n)}$$

9.1. Análise de Resposta em Frequência

Para um entrada x(t) = X.sen(wt), a saída será dada por:

$$Y(s) = G(s).X(s) = [\frac{p(s)}{q(s)}].\frac{w.X}{(s^2 + w^2)}$$

No estado permanente, para G(s) com somente polos reais distintos:

$$Y(s) = G(s).X(s) = [\frac{p(s)}{q(s)}].\frac{w.X}{(s^2 + w^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{A}{(s+jw)} + \frac{\bar{A}}{(s-jw)} + \frac{B_1}{(s+s_1)} + \frac{B_2}{(s+s_2)} + \ldots + \frac{B_n}{(s+s_n)} \Rightarrow \ y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$$

$$\textbf{Então:} \quad y(t) = A.e^{-jwt} + \bar{A}.e^{+jwt} + \underbrace{\cancel{B_1.e^{-s_1t}}}_{=0} + \underbrace{\cancel{B_2.e^{-s_2t}}}_{=0} + \ldots + \underbrace{\cancel{B_n.e^{-s_nt}}}_{=0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = A.e^{-jwt} + \bar{A}.e^{+jwt}$$

Se Y(s) possuir polos múltiplos s_j de multiplicidade m_j, então y(t) terá termos como $t^{h_j}.e^{-s_j.t}$ (h_j = 0, 1, 2,...). Assim sendo:

$$\text{Quando } t \to \infty \Rightarrow \lim_{t\to\infty} (t^{h_j}.e^{-s_j.t}) = 0$$

9.1. Análise de Resposta em Frequência

Determinação das constantes A e $\bar{A}$:

$$\begin{cases} A = G(s).\dfrac{w.X}{(s^2+w^2)}.(s+jw)\,|_{s=-jw} = -\dfrac{XG(-jw)}{j2} \\ \bar{A} = G(s).\dfrac{w.X}{(s^2+w^2)}.(s-jw)\,|_{s=jw} = \dfrac{XG(jw)}{j2} \end{cases}$$

$$G(jw) = |G(jw)|.e^{j\phi}$$

$$G(-jw) = |G(-jw)|.e^{-j\phi} = |G(jw)|.e^{-j\phi}$$

$$\phi = \angle G(jw) = tg^{-1}\left[\frac{Im[(G(s)]}{Real[(G(jw)]}\right]$$

Então:

$$y(t) = A.e^{+jwt} + \bar{A}.e^{-jwt} = X.|G(jw)|.\frac{(e^{j(wt+\phi)} - e^{-j(wt+\phi)})}{2j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = X.|G(jw)|.sen(wt+\phi) \Rightarrow y(t) = Y.sen(wt+\phi)$$

9.1. Análise de Resposta em Frequência

Conclusão:

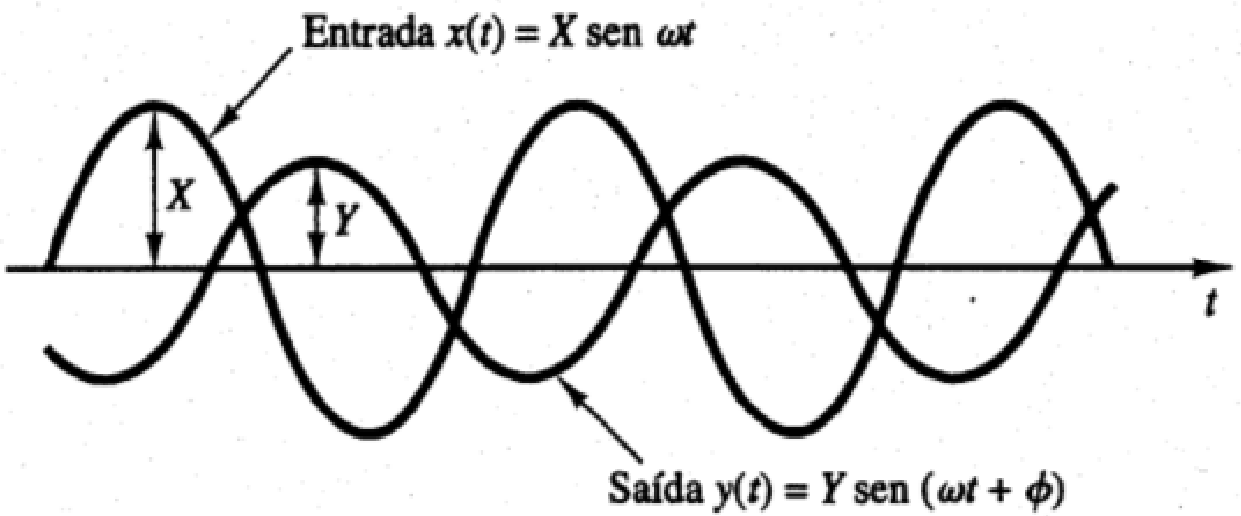
$$|G(jw)| = \left|\frac{Y(jw)}{X(jw)}\right|$$

|G(jw)| é a relação de **amplitude** entre a saída e a entrada senoidais.

$$\angle G(jw) = \angle\left[\frac{Y(jw)}{X(jw)}\right]$$

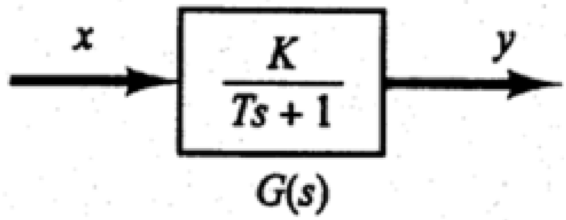
O **ângulo** de **G(jw)** e a defasagem entre a saída e a entrada senoidais.

Graficamente:



9.1. Análise de Resposta em Frequência

Exemplo 1: Considere o sistema mostrado na Figura.



A função de transferência $G(s)$ é: $G(s) = \dfrac{K}{Ts + 1}$

A saída em regime permanente $y_{ss}(t)$ Para a entrada senoidal $x(t) = X \operatorname{sen} \omega t$ será?

Solução

Substituindo $j\omega$ por s em $G(s)$

$$G(j\omega) = \frac{K}{jT\omega + 1}$$

A relação de amplitude entre a saída e a entrada é:

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}$$

o ângulo de fase ϕ é:

$$\phi = \angle G(j\omega) = -\text{tg}^{-1} T\omega$$

$$y_{ss}(t) = \frac{XK}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \text{sen}(\omega t - \text{tg}^{-1} T\omega)$$

Exemplo 2: Considere a rede dada por:

$$G(s) = \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{T_2}}$$

Determine se essa é uma rede de avanço de fase ou de atraso de fase.

Para $x(t) = X \operatorname{sen} \omega t$:

$$G(j\omega) = \frac{j\omega + \frac{1}{T_1}}{j\omega + \frac{1}{T_2}} = \frac{T_2(1 + T_1 j\omega)}{T_1(1 + T_2 j\omega)}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{T_2\sqrt{1 + T_1^2\omega^2}}{T_1\sqrt{1 + T_2^2\omega^2}}$$

$$\phi = \angle G(j\omega) = \operatorname{tg}^{-1} T_1\omega - \operatorname{tg}^{-1} T_2\omega$$

$$y_{ss}(t) = \frac{XT_2\sqrt{1 + T_1^2\omega^2}}{T_1\sqrt{1 + T_2^2\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \operatorname{tg}^{-1} T_1\omega - \operatorname{tg}^{-1} T_2\omega)$$

se $T_1 > T_2$, então $\operatorname{tg}^{-1} T_1\omega - \operatorname{tg}^{-1} T_2\omega > 0$

se $T_1 > T_2$, então a rede será uma rede de avanço de fase.

Se $T_1 < T_2$, então a rede será uma rede de atraso de fase.

Diagrama de Bode

- Dois gráficos traçados em relação à frequência em escala logarítmica:
  - Gráfico do Módulo em dB (**dB = $20.\log_{10}|G(jw)|$**)
  - Gráfico do ângulo de fase (**$\phi(w)$**)
- A multiplicação dos módulos pode ser convertida em soma.
- Fatores Básicos de $G(j\omega)$:

- Ganho K

- Fatores integral e derivativo $(j\omega)^{\pm 1}$

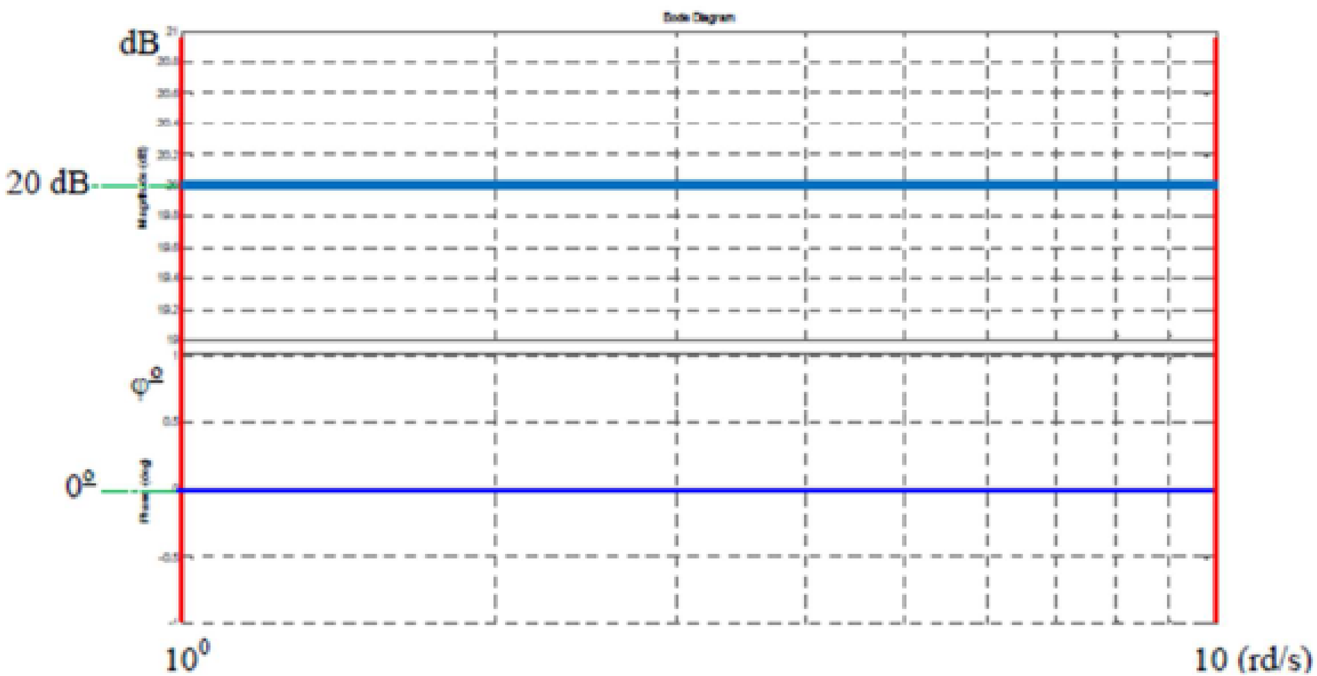
- Fatores de primeira ordem $(1+j\omega T)^{\pm 1}$

- Fatores quadráticos $[1+2\zeta\,(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2]^{\pm 1}$

1) Ganho K (K > 0)

- O Gráfico de ***log-módulo*** de **K** é uma reta horizontal $20.\log_{10}|K|$ em dB.
- O Gráfico do ângulo de fase **φ(w)** de **K** é 0º.
- A variação do ganho **K** desloca a curva ***log-módulo*** para baixo ou para cima não afetando o ângulo de fase **φ(w)**.

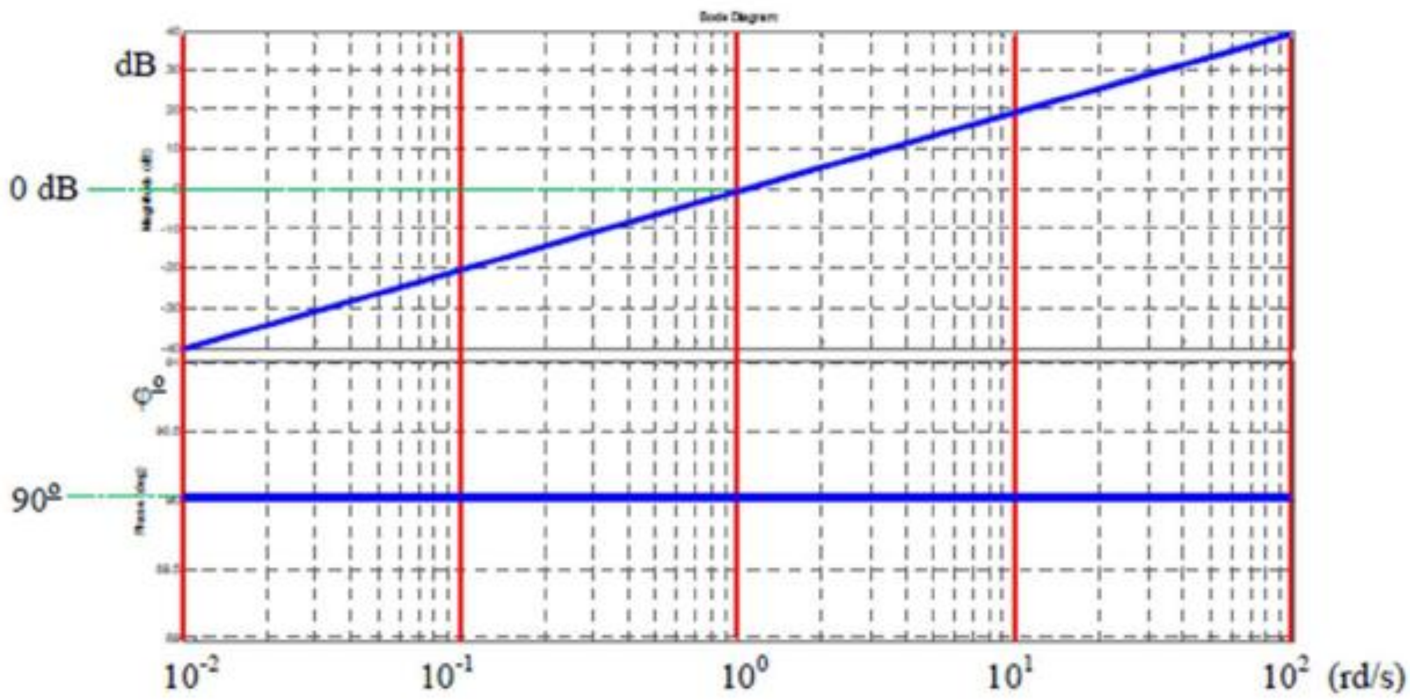
Gráfico: H(jw) = K = 10



2) Fator Integral e Derivativo $(jw)^{\pm 1}$

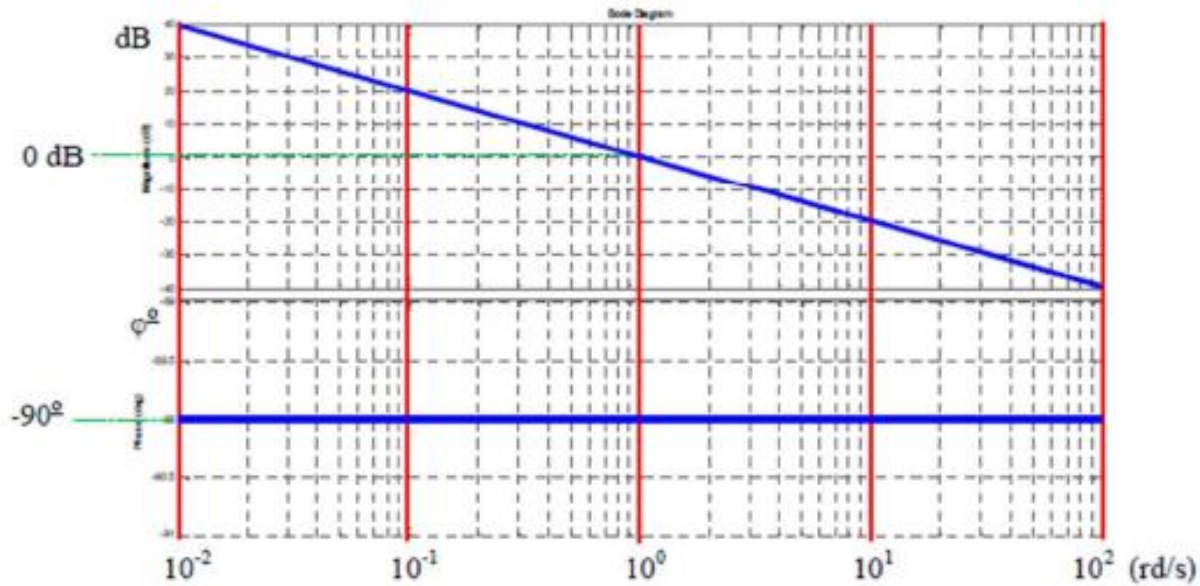
- O Gráfico de ***log-módulo*** de **(jw)** em dB é $20.\log_{10}|(jw)^1| = 20.\log_{10}(w)$ dB.
- O Gráfico do ângulo de fase **φ(w)** de **(jw)** é 90º.

Gráfico de (jw):



- O Gráfico de ***log-módulo*** de $\mathbf{(jw)^{-1}}$ em dB é $20.\log_{10}|(jw)^{-1}| = -20.\log_{10}(w)$ dB.
- O Gráfico do ângulo de fase $\boldsymbol{\varphi}$**(w)** de $\mathbf{(jw)^{-1}}$ é **-90º**.

Gráfico de $(jw)^{-1}$:



Se a Função de Transferência possui o fator $\mathbf{(jw)^{\pm n}}$, o ***log-módulo*** será:

a) $20.\log_{10}|(jw)^{-n}| = -n.20.\log_{10}(w) = -20.n.\log_{10}(w)$ dB

b) $20.\log_{10}|(jw)^{+n}| = n.20.\log_{10}(jw) = 20.n.\log_{10}(w)$ dB

<u>Conclusões:</u>

- As inclinações das curvas dos ***log-módulo*** para os fatores $\mathbf{(jw)^{-n}}$ e $\mathbf{(jw)^{n}}$ serão -20n dB/década e 20n dB/década respectivamente.
- Os ângulos de fase para os fatores $\mathbf{(jw)^{-n}}$ e $\mathbf{(jw)^{n}}$ serão –(90n)º e (90n)º respectivamente em toda a faixa de freqüência.

3) Fator de Primeira Ordem $(1 + jwT)^{\pm 1}$

- O Gráfico de ***log-módulo*** de **(1+jwT)** em dB varia para baixos e altos valores de w.

Para **(1 + jwT)** temos: $20.\log_{10}|(1+jwT)| = 20.\log_{10}(\sqrt{(1+w^2T^2)}$ (dB)

Assíntotas:

- Para baixas freqüências ($w \to 0$):

$$f(w \to 0) = 20.\log_{10}(\sqrt{(1+w^2T^2)} = 20.\log_{10}(1) \cong 0\ (\text{dB})$$

- Para altas freqüências ($w \to \infty$):

$$f(w \to \infty) = 20.\log_{10}(\sqrt{(1+w^2T^2)} = 20.\log_{10}(wT)\ (\text{dB})$$

No cruzamento das assintotas teremos:

$$20.\log_{10}(wT) = 0 \Rightarrow \log_{10}(wT) = 0 \Rightarrow wT = 10^0 \Rightarrow wT = 1 \Rightarrow w = \frac{1}{T}(rd/s)$$

Esta freqüência $w = \frac{1}{T}(rd/s)$ é denominada ***Frequência de Canto*** e é denotada por:

$$w_n = \frac{1}{T}(rd/s)$$

A ***Frequência de Canto*** $\mathbf{w_n}$ divide a curva de resposta em freqüência em duas regiões, a **região de baixa freqüência** ($w \to 0$) e a **região de alta freqüência** ($w \to \infty$).

Então para $w = \frac{1}{T}$ => ***log-módulo*** = 0 dB e para $w = \frac{10}{T}$ => ***log-módulo*** = 20 dB.

Assim, o valor de $20.\log_{10}(wT)$ (dB) **cresce** 20 dB/década de freqüência w.

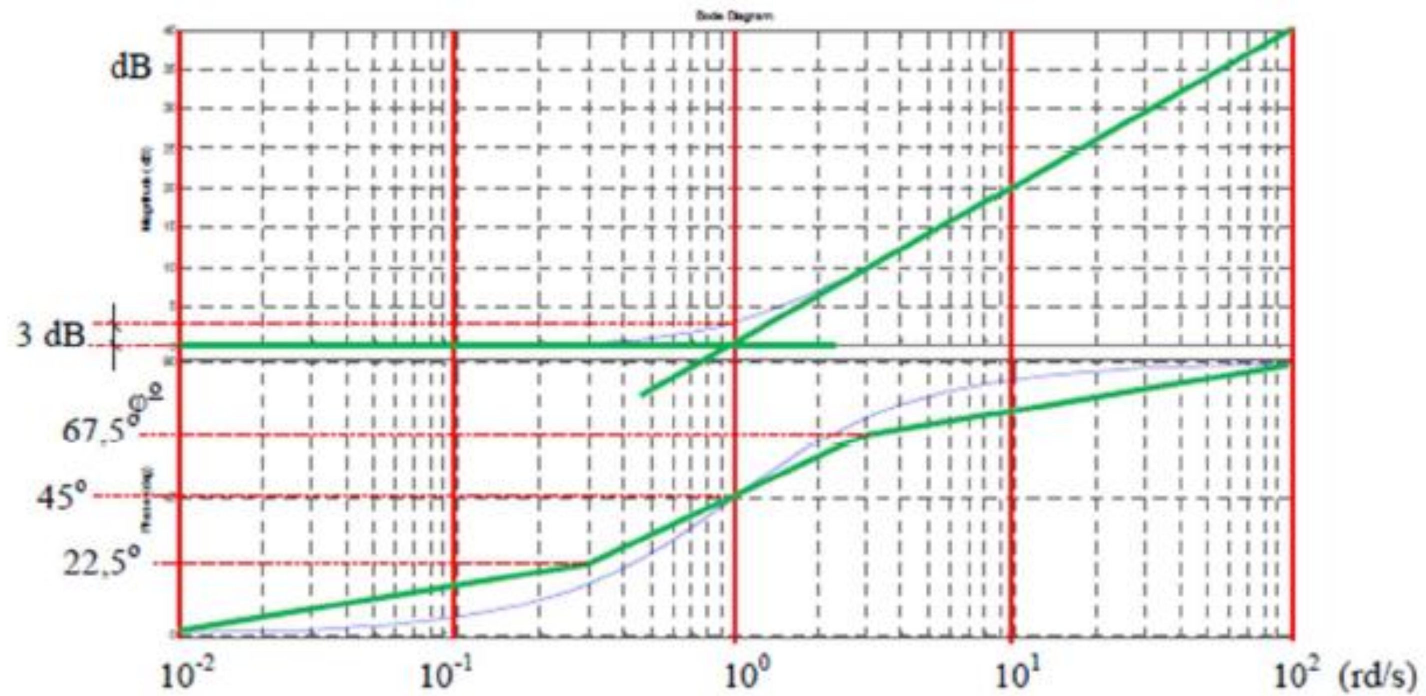
- O Gráfico do ângulo de fase **φ(w)** de **(1 + jwT)** é dado por: $\varphi(w) = tg^{-1}(wT)$

Para $w \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi = 0^{\underline{o}}$

Para $w = \dfrac{1}{T} \Rightarrow \varphi = 45^{\underline{o}}$

Para $w \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi = 90^{\underline{o}}$

Gráfico de (1 + jwT) com T = 1:



Para $\mathbf{(1 + jwT)^{-1}}$ temos: $-20.\log_{10}|(1+\mathrm{j}w\mathrm{T})| = -20.\log_{10}(\sqrt{(1+w^2\mathrm{T}^2)}$ (dB)

Assíntotas:

- Para baixas freqüências ($w \rightarrow 0$):

$$f(w \rightarrow 0) = -20.\log_{10}(\sqrt{(1+w^2\mathrm{T}^2)} = -20.\log_{10}(1) \cong 0 \text{ (dB)}$$

- Para altas freqüências ($w \rightarrow \infty$):

$$f(w \rightarrow \infty) = -20.\log_{10}(\sqrt{(1+w^2\mathrm{T}^2)} = -20.\log_{10}(w\mathrm{T}) \text{ (dB)}$$

No cruzamento das assíntotas de baixa e de alta freqüência teremos:

$$-20.\log_{10}(w\mathrm{T}) = 0 \Rightarrow \log_{10}(w\mathrm{T}) = 0 \Rightarrow w\mathrm{T} = 10^0 \Rightarrow w\mathrm{T} = 1 \Rightarrow w = \frac{1}{\mathrm{T}}(\mathrm{rd/s})$$

Esta freqüência $w = \frac{1}{\mathrm{T}}(\mathrm{rd/s})$ é denominada ***Frequência de Canto*** e é denotada por:

$$w_n = \frac{1}{\mathrm{T}}(\mathrm{rd/s})$$

A ***Frequência de Canto*** $\mathbf{w_n}$ divide a curva de resposta em freqüência em duas regiões, a **região de baixa freqüência** ($w \rightarrow 0$) e a **região de alta freqüência** ($w \rightarrow \infty$).

Então para $w = \frac{1}{\mathrm{T}}$ => ***log-módulo*** = 0 dB e para $w = \frac{10}{\mathrm{T}}$ => ***log-módulo*** = -20 dB.

Assim, o valor de $-20.\log_{10}(w\mathrm{T})$ (dB) **decresce** -20 dB/década de freqüência w.

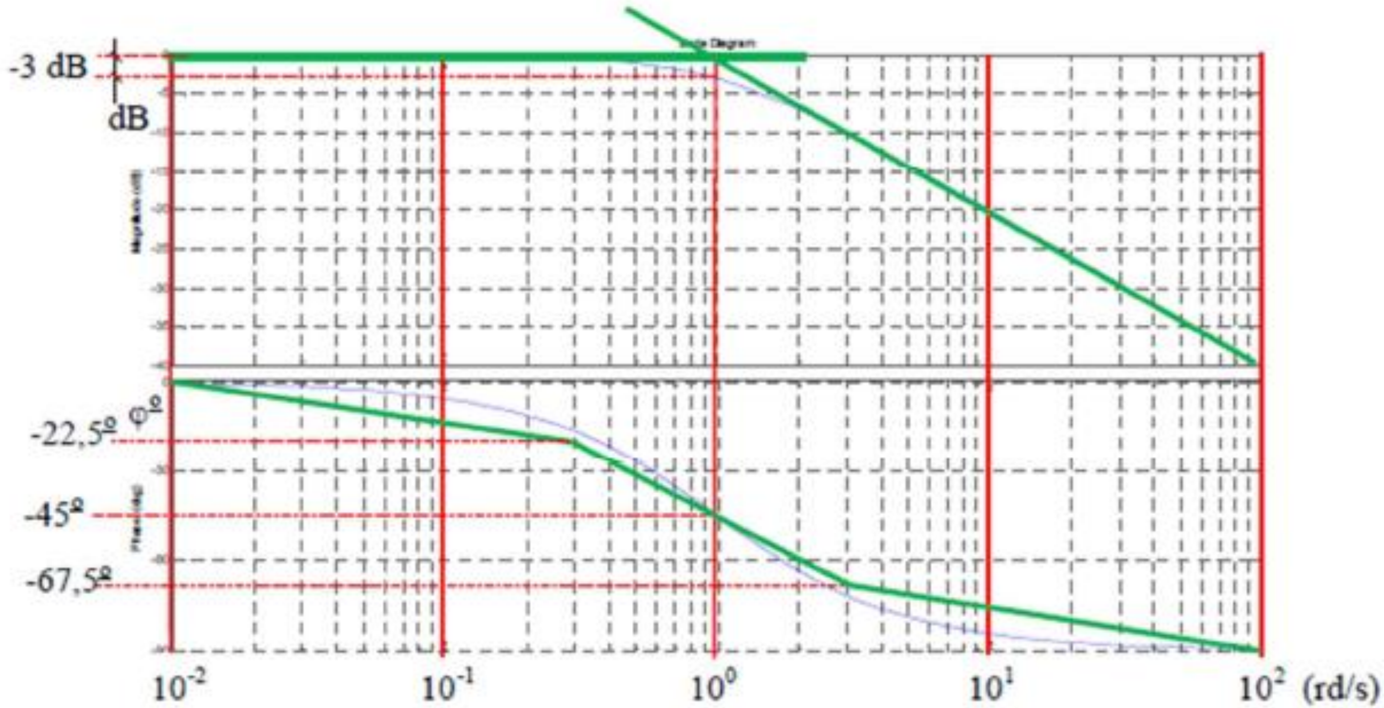
- O Gráfico do ângulo de fase **φ(w)** de **$(1 + jwT)^{-1}$** é dado por: $\varphi(w) = -tg^{-1}(wT)$

Para $w \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi = 0^{\circ}$

Para $w = \dfrac{1}{T} \Rightarrow \varphi = -45^{\circ}$

Para $w \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi = -90^{\circ}$

Gráfico de $(1 + jwT)^{-1}$ com T = 1:



$\underline{\text{4) Fatores Quadráticos}}\left[1+2\xi\left(\frac{jw}{w_n}\right)+\left(\frac{jw}{w_n}\right)^2\right]^{\pm 1}$

- O Gráfico de ***log-módulo*** de $\left[1+2\xi\left(\frac{jw}{w_n}\right)+\left(\frac{jw}{w_n}\right)^2\right]^{\pm 1}$ em dB varia para baixos e altos valores de w.

Geralmente encontra-se: $\left[1+2\xi\left(\frac{jw}{w_n}\right)+\left(\frac{jw}{w_n}\right)^2\right]^{-1}$

- Se $\xi > 1$ => pólos reais distintos => dois fatores de 1ª ordem => idem a $(1 + jwT)^{-1}$!

- Se $0 < \xi < 1$ => pólos complexos conjugados => ***log-módulo*** e **φ(w)** dependem de **ξ** e de **w_n**.

Então: $$20.\mathbf{log}_{10}\left|\left[1+2\xi\left(\frac{jw}{w_n}\right)+\left(\frac{jw}{w_n}\right)^2\right]^{-1}\right| = -20.\mathbf{log}_{10}\left[\sqrt{\left(1-\frac{w^2}{w_n^2}\right)^2+\left(2\xi\frac{w}{w_n}\right)^2}\right]$$

Assíntotas:

- Para baixas freqüências ($w \to 0$):

$$f(w \to 0) = -20.\mathbf{log_{10}}\left[\sqrt{\left(1-\frac{w^2}{w_n^2}\right)^2+\left(2\xi\frac{w}{w_n}\right)^2}\right] = -20.\mathbf{log_{10}(1)} \cong 0 \text{ dB}$$

- Para altas freqüências ($w \to \infty$):

$$f(w \to \infty) = =$$

$$-20.\mathbf{log_{10}}\left[\sqrt{\left(1-\frac{w^2}{w_n^2}\right)^2+\left(2\xi\frac{w}{w_n}\right)^2}\right] = -20.\mathbf{log_{10}}\left[\frac{w}{w_n}\right]^2 = -40.\mathbf{log_{10}}\left[\frac{w}{w_n}\right] \text{dB}$$

No cruzamento das assíntotas teremos:

$$-40.\mathbf{log_{10}}\left(\frac{w}{w_n}\right) = 0 \Rightarrow w = w_n \text{ (rd/s)}.$$

Esta freqüência $w = w_n$ (rd/s) é denominada ***Frequência de Canto*** do Fator Quadrático.

Observando o Fator $\left[1+2\xi\left(\frac{jw}{w_n}\right)+\left(\frac{jw}{w_n}\right)^2\right]^{-1}$, pode-se supor uma situação de ressonância quando $\mathbf{w = w_n}$, assim: $\left[1+2\xi.(j1)+(-1).(1)^2\right]^{-1} = (j2\xi)^{-1}$

<u>Conclusão:</u> no valor $\mathbf{w} = \mathbf{w_n}$ a resposta sofrerá um pico de ressonância dependendo do valor de ξ, ou seja, quanto maior a amplitude de ξ menor será o pico de ressonância e quanto menor a amplitude de ξ mior será o pico de ressonância.
A ***Frequência de Canto*** $\mathbf{w_n}$ divide a curva de resposta em freqüência em duas regiões, a **região de baixa freqüência** ($w \to 0$) e a **região de alta freqüência** ($w \to \infty$).
Então para $\mathbf{w} = \mathbf{w_n}$ => ***log-módulo*** = 0 dB e para $\mathbf{w} = \mathbf{10.w_n}$ => ***log-módulo*** = -40 dB.

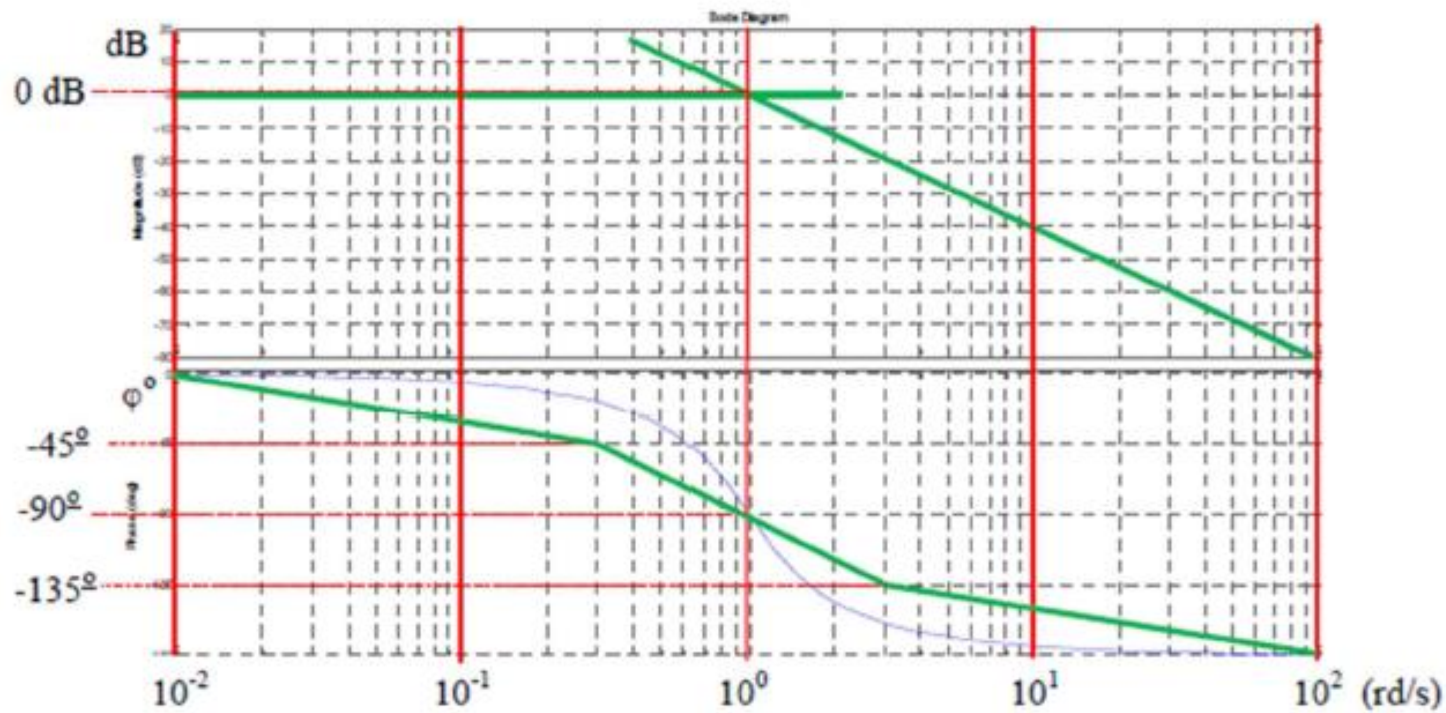
Assim, o valor de $-40.\mathbf{log}_{10}\left(\frac{w}{w_n}\right)$ **(dB)** **decresce** -40 dB/década de freqüência w.

- O Gráfico do ângulo de fase $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{w})$ de $\left[1+2\xi\left(\frac{jw}{w_n}\right)+\left(\frac{jw}{w_n}\right)^2\right]^{-1}$ é dado por:

$$\varphi(w) = -tg^{-1}\left[\frac{2\xi.\left(\frac{w}{w_n}\right)}{1-\left(\frac{w}{w_n}\right)^2}\right].$$

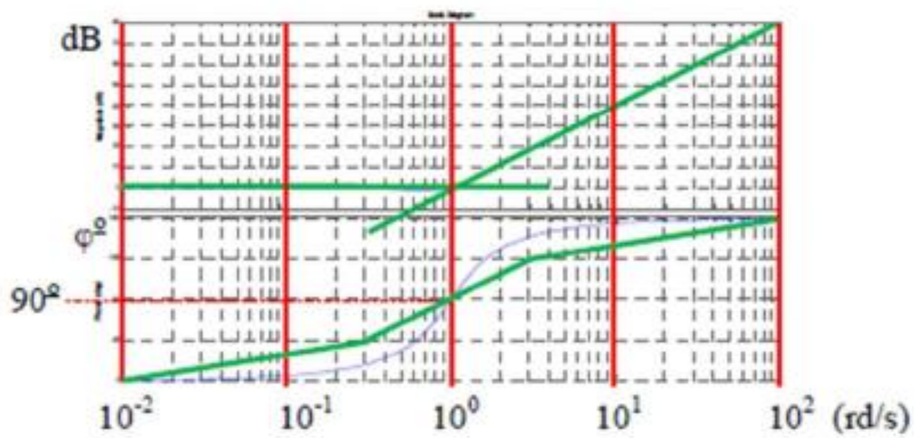
Para $w \to 0$ => $\varphi = 0^{\underline{o}}$
Para $w = w_n$ => φ = $-90^{\underline{o}}$
Para $w \to \infty$ => φ = $-180^{\underline{o}}$

Gráfico para $\boldsymbol{\xi = 0{,}5}$ e $\mathbf{w_n = 1}$ **rd/s** de $\left[1+2\xi\left(\dfrac{jw}{w_n}\right)+\left(\dfrac{jw}{w_n}\right)^2\right]^{-1}$:



Analogamente à análise feita para o fator de 1ª ordem, para o fator $\left[1+2\xi\left(\frac{jw}{w_n}\right)+\left(\frac{jw}{w_n}\right)^2\right]$ obtém-se as curvas ***log-módulo*** e ***φ(w)*** invertendo-se os sinais do ***log-módulo*** e do ângulo de fase ***φ(w)*** de $\left[1+2\xi\left(\frac{jw}{w_n}\right)+\left(\frac{jw}{w_n}\right)^2\right]^{-1}$.

Gráfico para **ξ = 0,5 e w_n =1 rd/s** de $\left[1+2\xi\left(\frac{jw}{w_n}\right)+\left(\frac{jw}{w_n}\right)^2\right]$:



Frequência de Ressonância ($\mathbf{w_r}$)

O módulo de $\left|G(jw)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{w^2}{w_n^2}\right)^2 + \left(2\xi\dfrac{w}{w_n}\right)^2}}$ possui um valor de pico na freqüência de ressonância.

O pico de ressonância ocorrerá quando: $g(w) = \left(1-\dfrac{w^2}{w_n^2}\right)^2 + \left(2\xi\dfrac{w}{w_n}\right)^2$ for mínimo!

Então: $\dfrac{dg(w)}{dw} = 0 \Rightarrow w = w_n\sqrt{(1-2\xi^2}$

Como: $\dfrac{dg^2(w)}{dw^2} => 0 \Rightarrow w_r = w_n\sqrt{(1-2\xi^2}$, para $\mathbf{0 \le \xi \le 0{,}707}$.

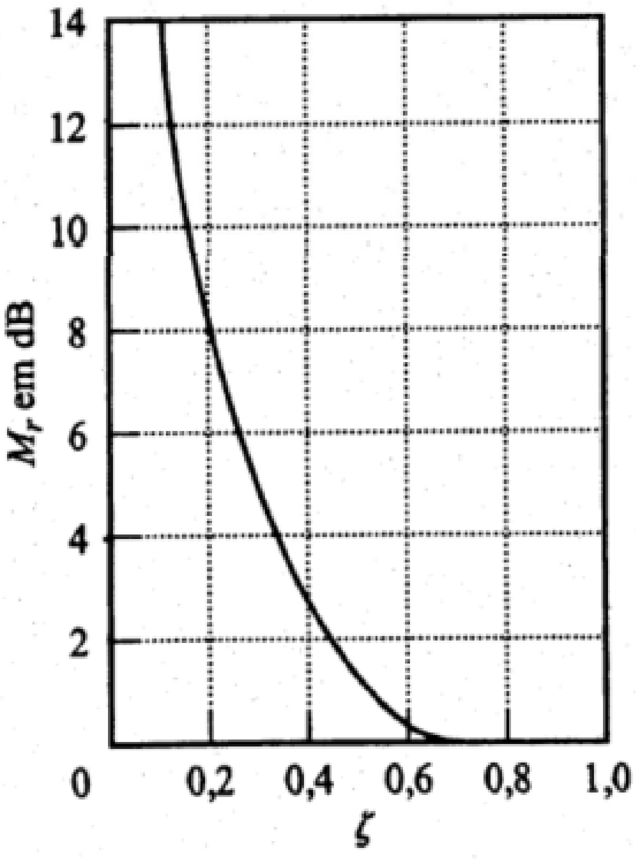
- Se ξ > **0,707 não existe** $\mathbf{w_r}$.

Valor do Pico de Ressonância ($\mathbf{M_r}$)

Substituindo-se $\mathbf{w_r}$ em $|\mathbf{G(jw)}|$ temos que o valor do Pico de Ressonância. Assim:

$$M_r = \left|G(jw)\right|_{máx} = \left|G(jw_r\right| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

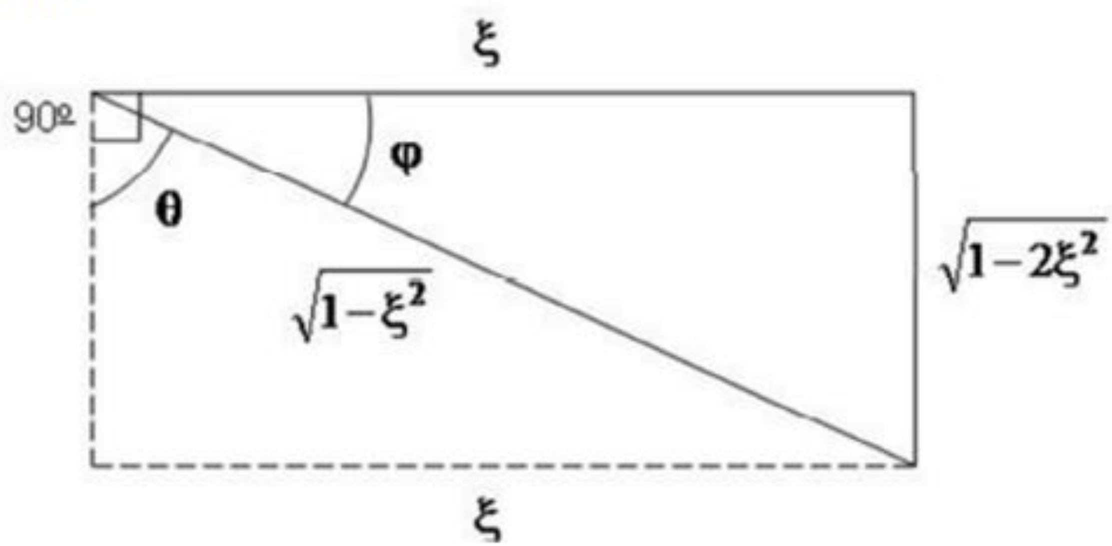
- Para $\boldsymbol{\xi} > \mathbf{0,707} \Rightarrow \mathbf{M_r = 1}$.
- Para $\boldsymbol{\xi} \rightarrow \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{M_r} \rightarrow \infty$.



O ângulo de fase *φ(w)* onde ocorre o pico de ressonância pode ser obtido substituindo o valor de $w_r = w_n\sqrt{(1-2\xi^2}$ em $\varphi(w) = -tg^{-1}\left[\dfrac{2\xi.\left(\dfrac{w}{w_n}\right)}{1-\left(\dfrac{w}{w_n}\right)^2}\right]$ resultando:

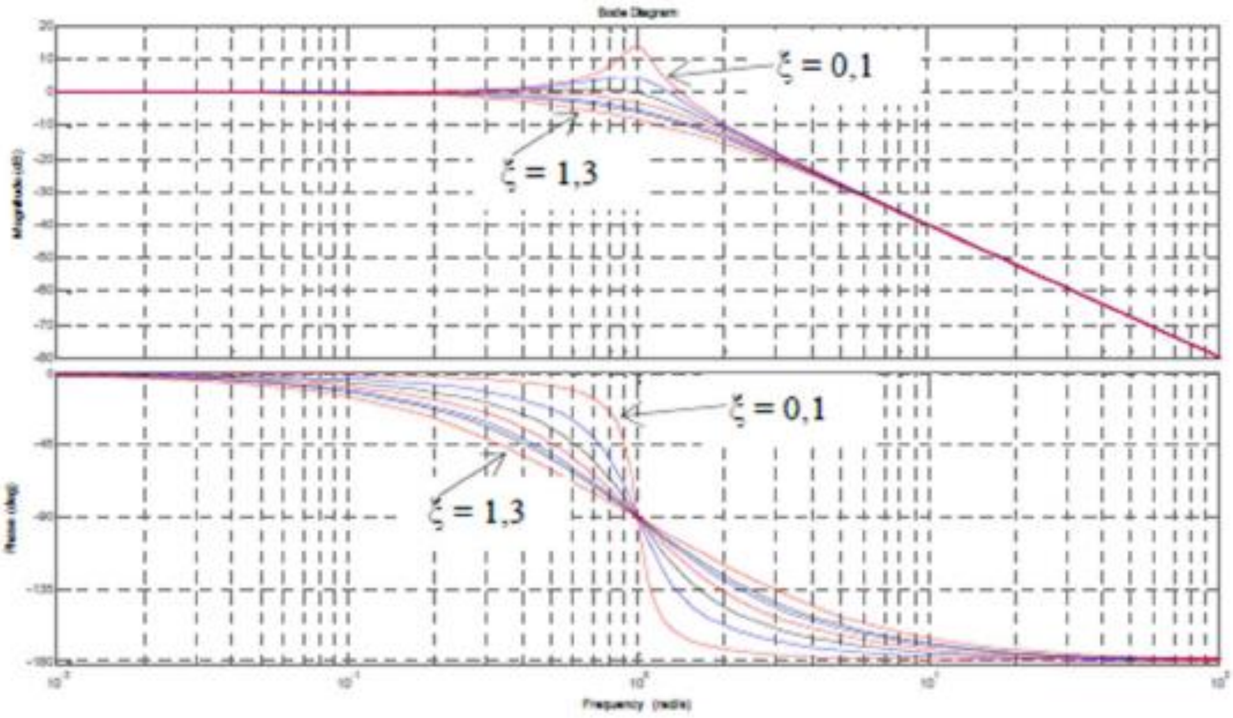
$$\varphi(w_r) = -tg^{-1}\left[\frac{\sqrt{1-2\xi^2}}{\xi}\right] = -90^\circ + \text{sen}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

Geometricamente:



Exemplo de Picos de Ressonância

Gráficos de $\left[1+2\xi\left(\frac{jw}{w_n}\right)+\left(\frac{jw}{w_n}\right)^2\right]^{-1}$ para $\mathbf{w_n} = \mathbf{1}$ **rd**/s e $\boldsymbol{\xi}$ variando de **0,1** até **1.3** em intervalos de 0,3.



Importante:

Utilizando o **Diagrama de Bode,** a partir da Função de Transferência **H(s)** de um circuito e dada sua entrada, pode-se obter a sua saída em **estado permanente** ($s = jw$) para qualquer valor de frequência **w**.

Por exemplo, se $\mathbf{H(s = jw) = \dfrac{V_o(jw)}{V_i(jw)}}$ é a Função de Transferência **H(jw)** de um circuito e dado que a sua entrada seja $\mathbf{v_i(t) = V_m.cos(w_it + 0)}$, sendo $\mathbf{w_i}$ a frequência da fonte, a saída $\mathbf{v_o(t)}$ é obtida de:

$$\mathbf{V_o(jw_i) = H(jw_i).V(jw_i)}$$

Onde: $\mathbf{H(jw_i) = |H(jw_i)| \angle H(jw_i)}$ e $\mathbf{V_i(jw_i) = |V_i(jw_i)| \angle V_i(jw_i)}$.

No entanto, esta saída (ou resposta) do circuito é determinada apenas para a frequência $\mathbf{w_i}$ da fonte de entrada necessitando de novos cálculos de $\mathbf{H(jw) = |H(jw)| \angle H(jw)}$ e de $\mathbf{V_i(jw) = |V_i(jw)| \angle V_i(jw)}$ para qualquer outra ferquência da fonte.

Como o **Diagrama de Bode** nos fornece $\mathbf{|H(jw)|}$ **e** $\mathbf{\angle H(jw)}$ para quaisquer valores de **w** variando de **0** a ∞, pode-se então determinar a saída (ou resposta) do circuito, dada a entrada $\mathbf{v_i(t)}$ para qualquer valor de freqüência **w** desejada sem a necessidade de novos cálculos apenas utilizando os valores dados no **Diagrama de Bode**.

Procedimentos Geral para a Construção do Diagrama de Bode

- Reescreve-se a função de transferência senoidal $G(j\omega)H(j\omega)$ como produto de fatores básicos.
- Identifica-se a freqüência de canto associada a estes fatores básicos
- Traça-se as curvas assitóticas com módulo em dB com as inclinações apropriadas entre as freqüências de canto
- A curva do ângulo de fase pode ser obtida adicionando-se as curvas de ângulo de fase dos fatores individuais

EXEMPLO 3

Desenhe o diagrama de Bode da seguinte função de transferência:

$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega + 3)}{(j\omega)(j\omega + 2)[(j\omega)^2 + j\omega + 2]}$$

$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega + 3)}{(j\omega)(j\omega + 2)[(j\omega)^2 + j\omega + 2]} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{7{,}5\left(\frac{j\omega}{3} + 1\right)}{(j\omega)\left(\frac{j\omega}{2} + 1\right)\left[\frac{(j\omega)^2}{2} + \frac{j\omega}{2} + 1\right]}$$

Essa função é composta pelos seguintes fatores:

$7{,}5$

$(j\omega)^{-1}$

$1 + j\frac{\omega}{3}$

$\left(1 + j\frac{\omega}{2}\right)^{-1}$

$\left[1 + j\frac{\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2}\right]^{-1}$

	frequências de canto	coeficiente de amortecimento
$1 + j\dfrac{\omega}{3}$	$\omega = 3$	
$\left(1 + j\dfrac{\omega}{2}\right)^{-1}$	$\omega = 2$	
$\left[1 + j\dfrac{\omega}{2} + \dfrac{(j\omega)^2}{2}\right]^{-1}$	$\omega = \sqrt{2}$	0,3536

Gráfico do Ganho (dB)

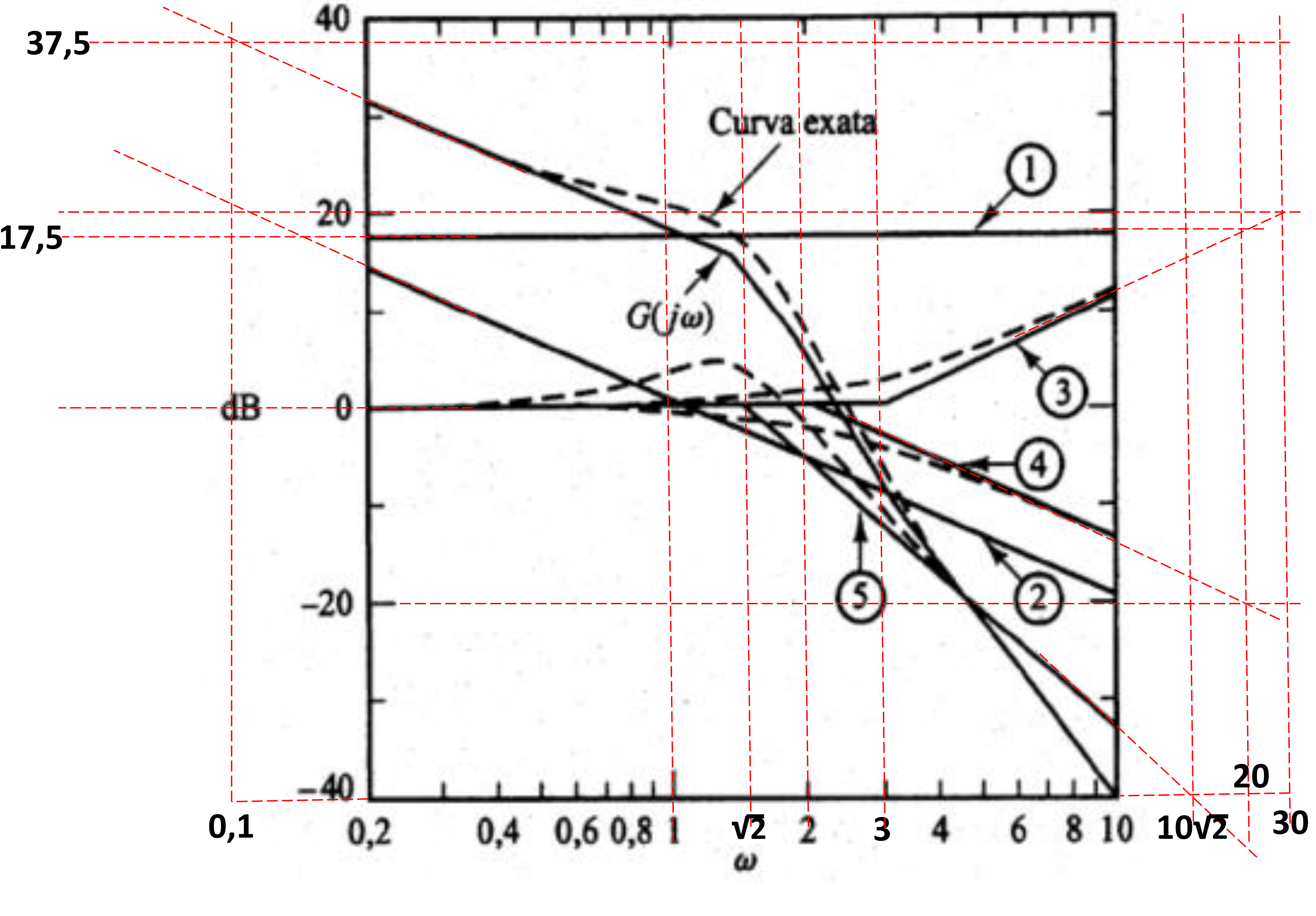
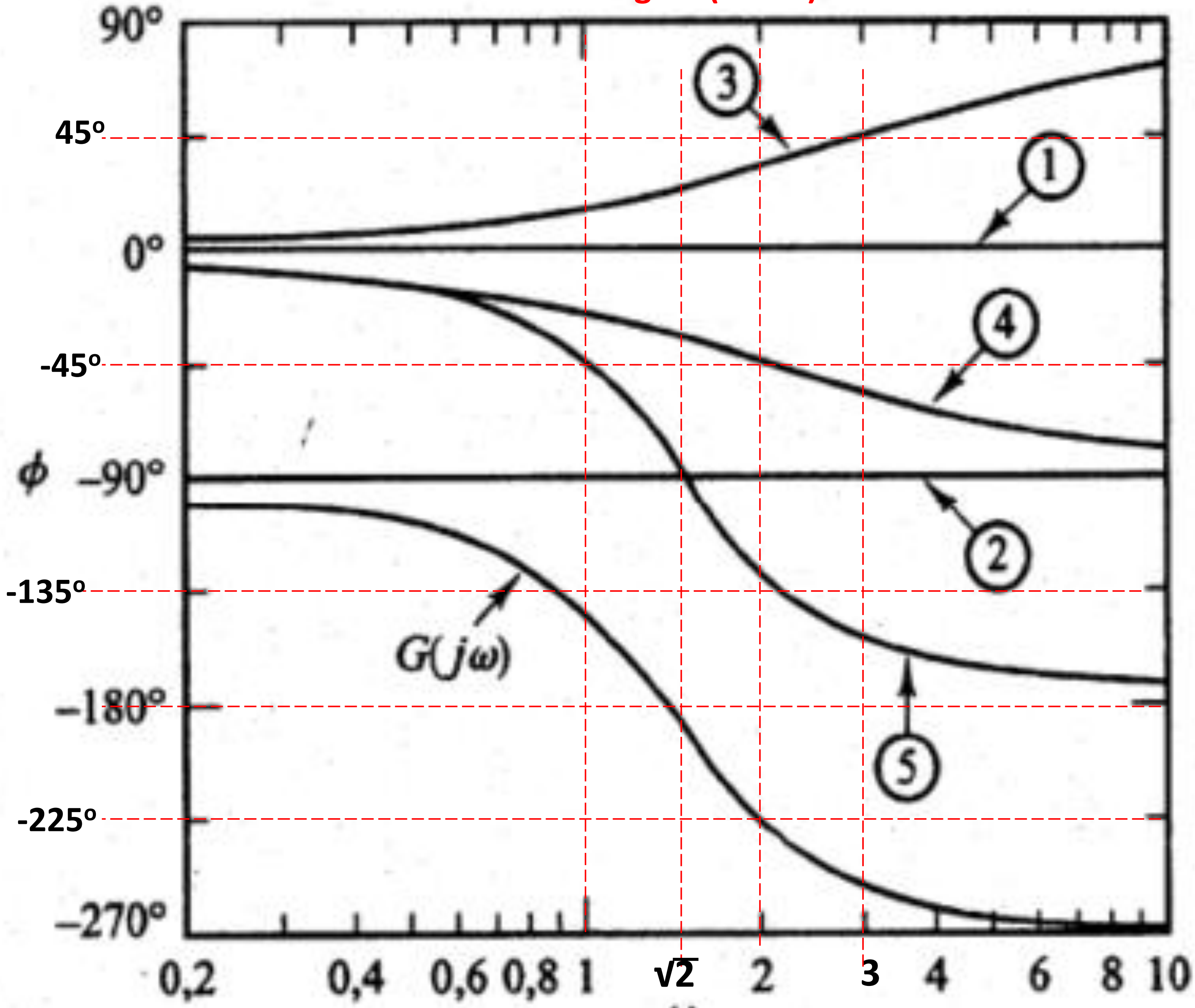


Gráfico do Ângulo (Graus)



EXERCÍCIO 1

Esboçar o Diagrama de Bode para a Função de Transferência dada a seguir:

$$\mathbf{H(s) = \frac{100.(s+10)}{s.(s+1).(s^2+s+100)}}$$

Primeiramente devemos fatorar a **H(jw)** em **Fatores Básicos**:

$$\mathbf{H(jw) = \frac{100.(jw+10)}{(jw).(jw+1).100.[(j\frac{w}{10})^2+(j\frac{w}{100})+1)]} = \frac{100.10.(1+j\frac{w}{10})}{(jw).(1+jw).100.[1+(2\xi\, j\frac{w}{10})+(j\frac{w}{10})^2]} \Rightarrow}$$

$$\mathbf{\Rightarrow H)jw) = \frac{10.(1+j\frac{w}{10})}{(jw).(1+jw).[1+(2\xi\, j\frac{w}{10})+(j\frac{w}{10})^2]}; \quad onde: 2\xi\, j(\frac{w}{w_c}) = j(\frac{w}{100}); w_c = 10\, rd/s \Rightarrow \xi = \frac{1}{20}}$$

Os **Fatores Básicos** serão:

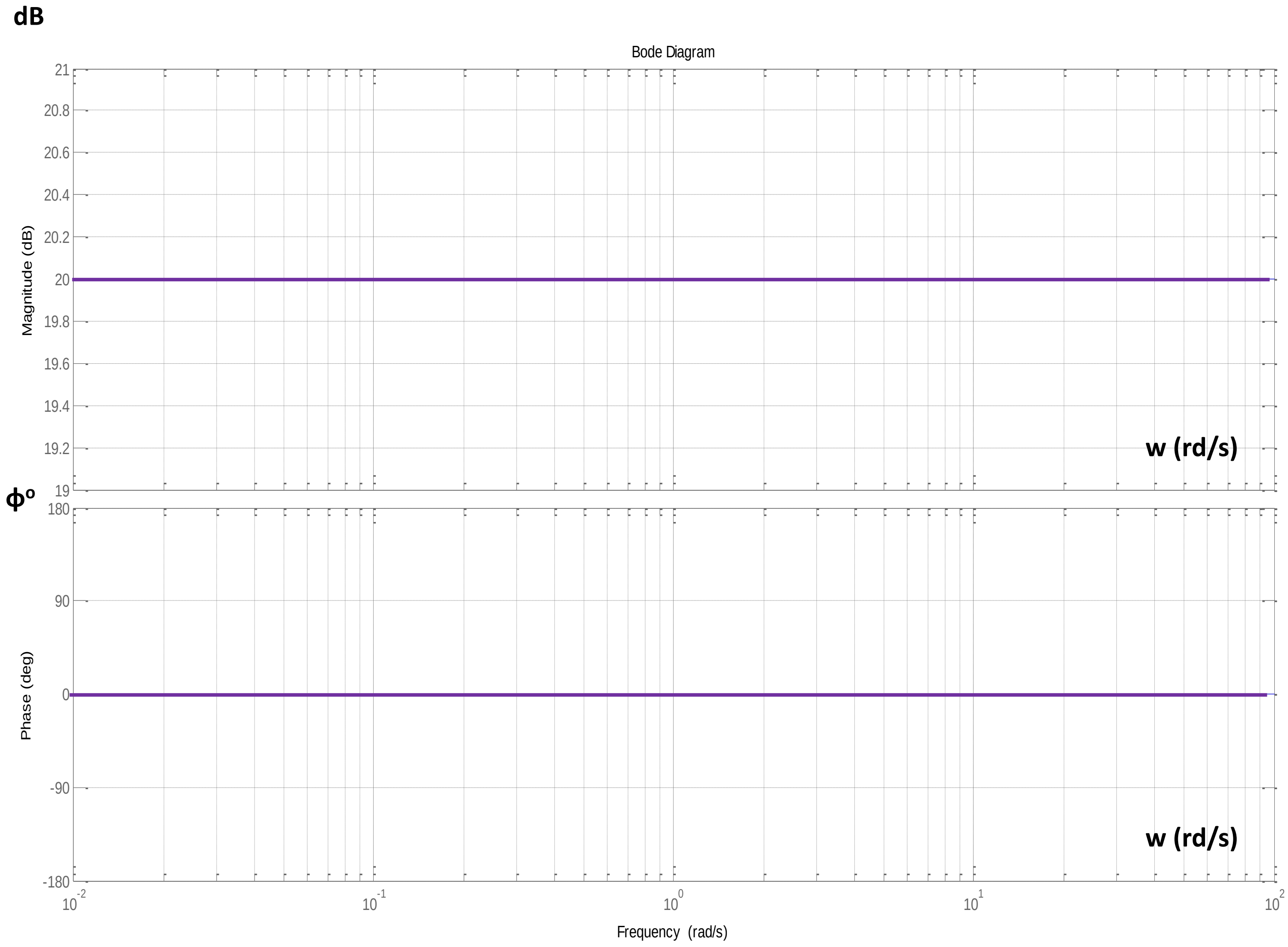
1 – Fator Ganho: **K = 10**.

2 – Fator Integral: $\mathbf{(jw)^{-1}}$ com $\mathbf{w_n = 1\ rd/s}$.

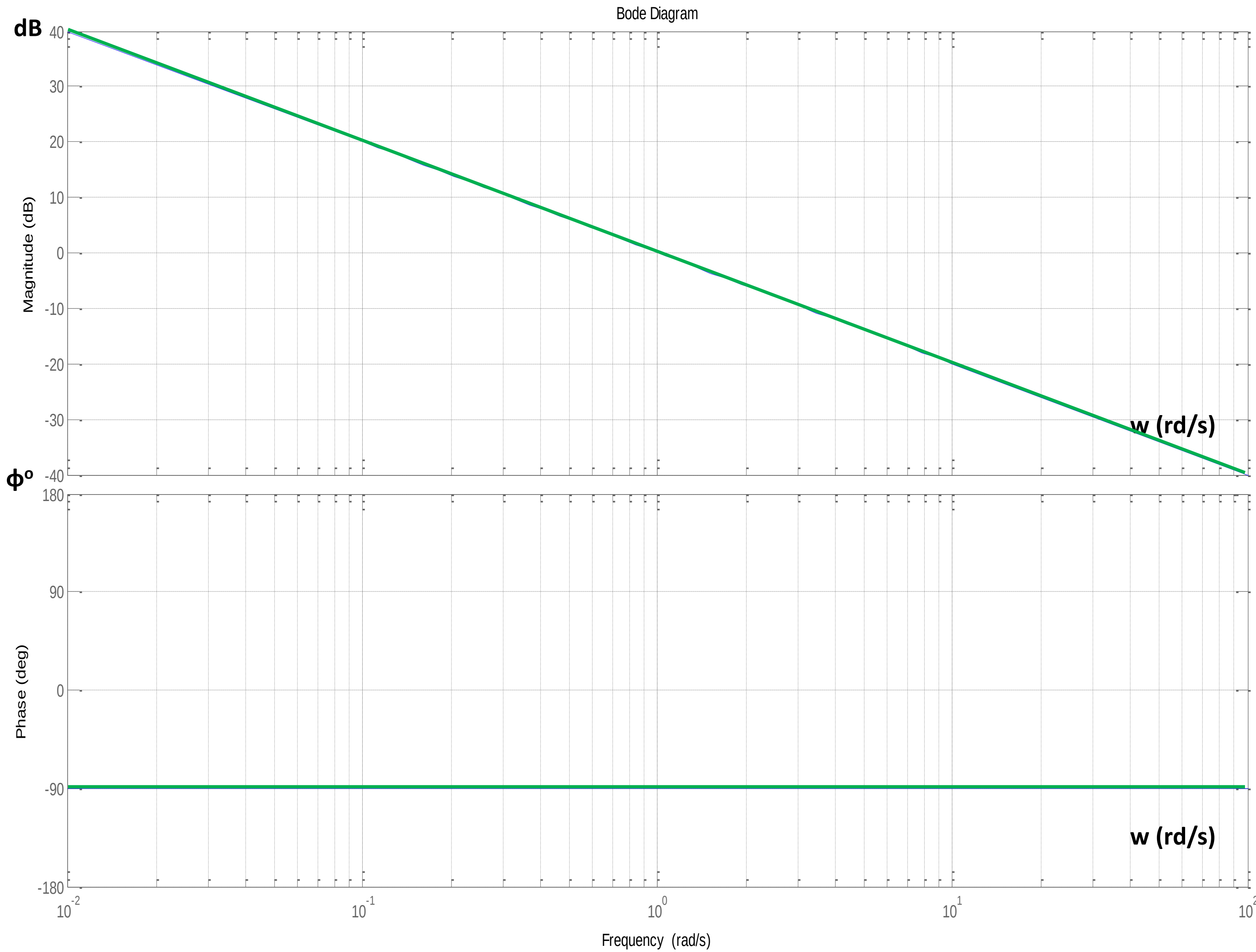
3 – Fatores de Primeira Ordem: **(1 + jw/10)** com $\mathbf{w_n = 10\ rd/s}$ e $\mathbf{(1 + jw)^{-1}}$ com $\mathbf{w_n = 1\ rd/s}$.

4 – Fator Quadrático: $\mathbf{[\ 1+ 2\xi(jw/w_n) + (jw/w_n)^2\ ]^{-1}}$ com $\mathbf{w_n = 10\ rad/s}$.

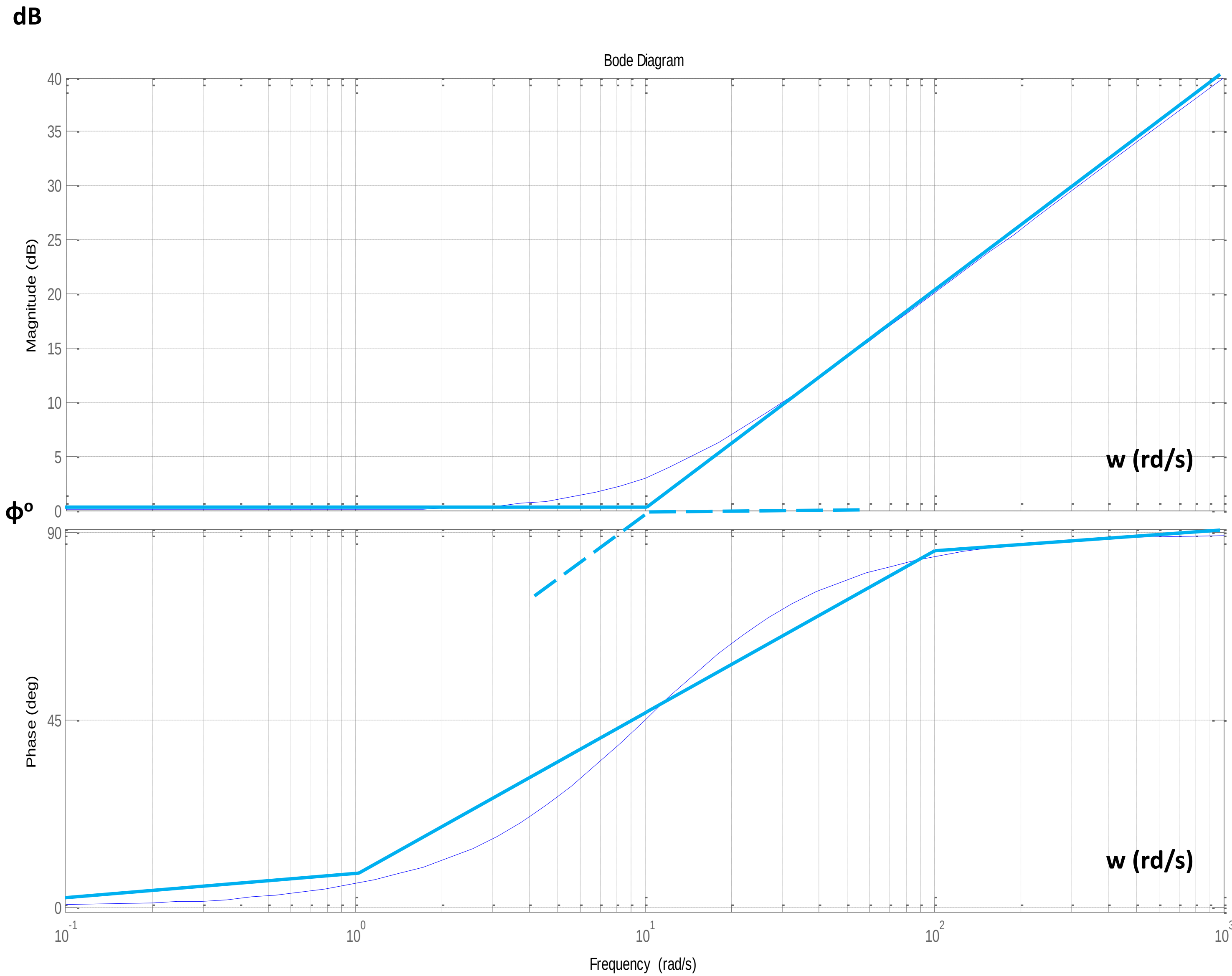
1 – Fator Ganho: **K = 10**.



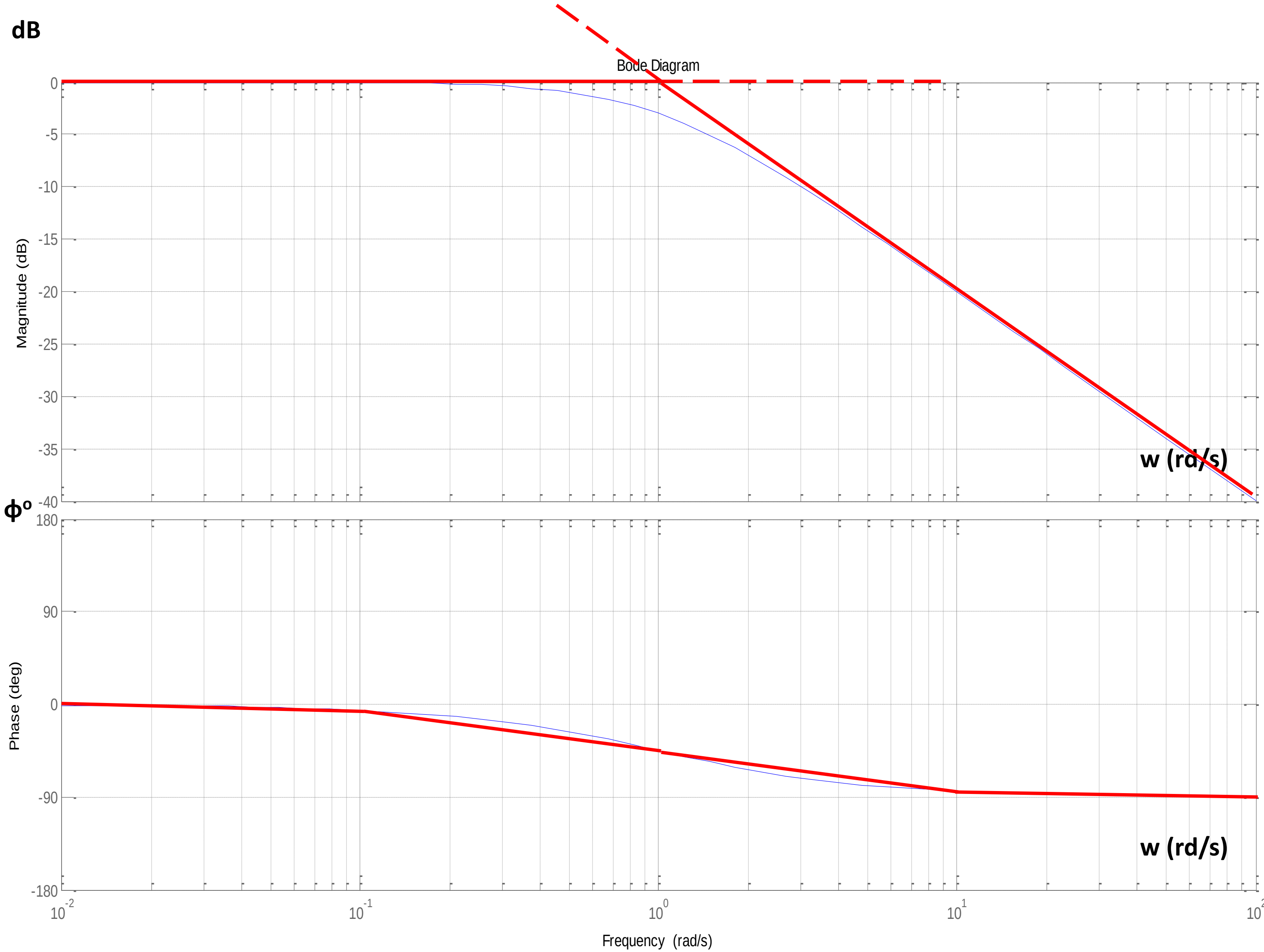
2 – Fator Integral: $(jw)^{-1}$ com $w_n = 1$ rd/s.



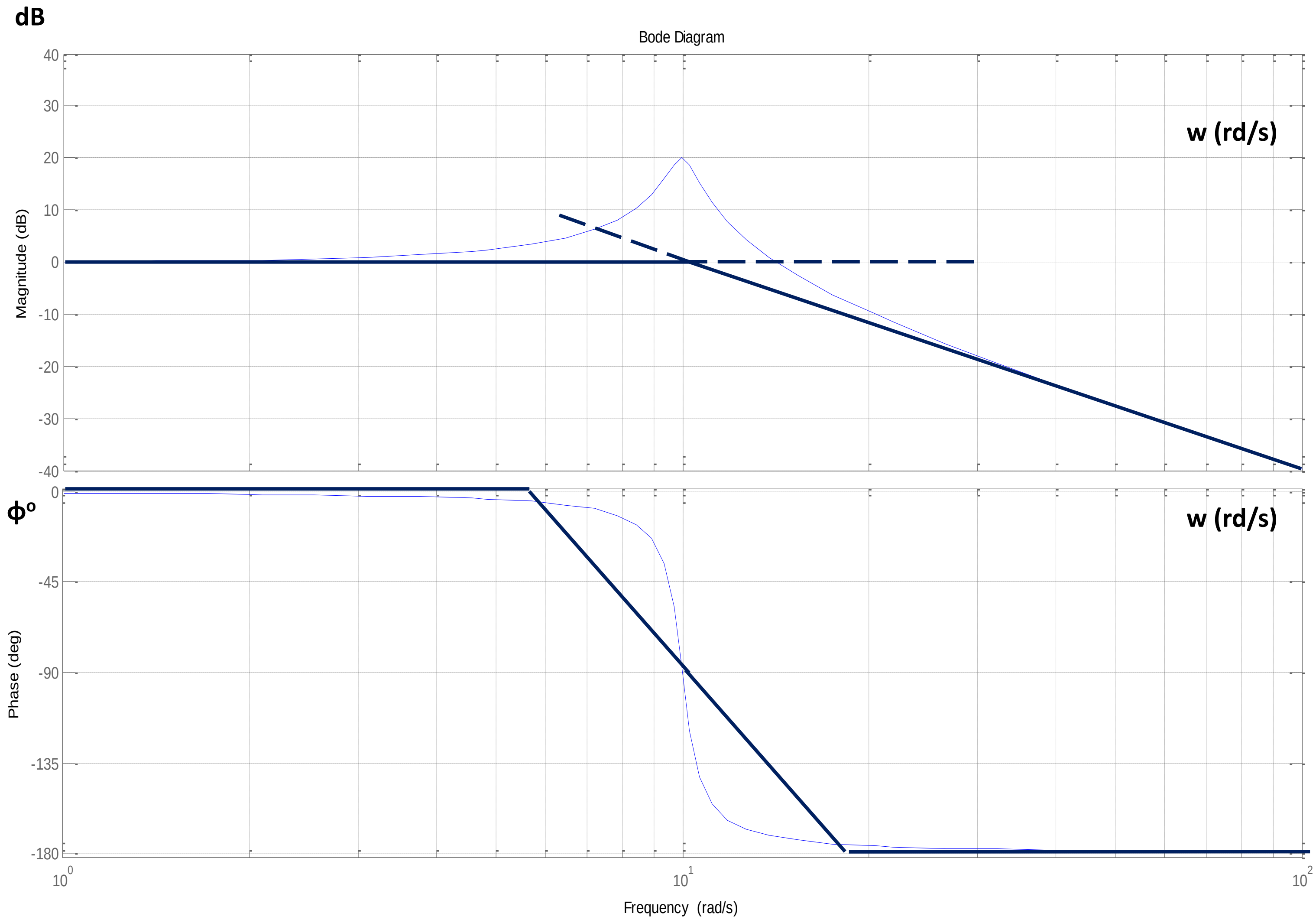
3 – Fatores de Primeira Ordem: **(1 + jw/10)** com $\mathbf{w_n = 10}$ **rd/s**.



4 – Fator de Primeira Ordem: $\mathbf{(1 + jw)^{-1}}$ com $\mathbf{w_n = 1}$ **rd/s**.

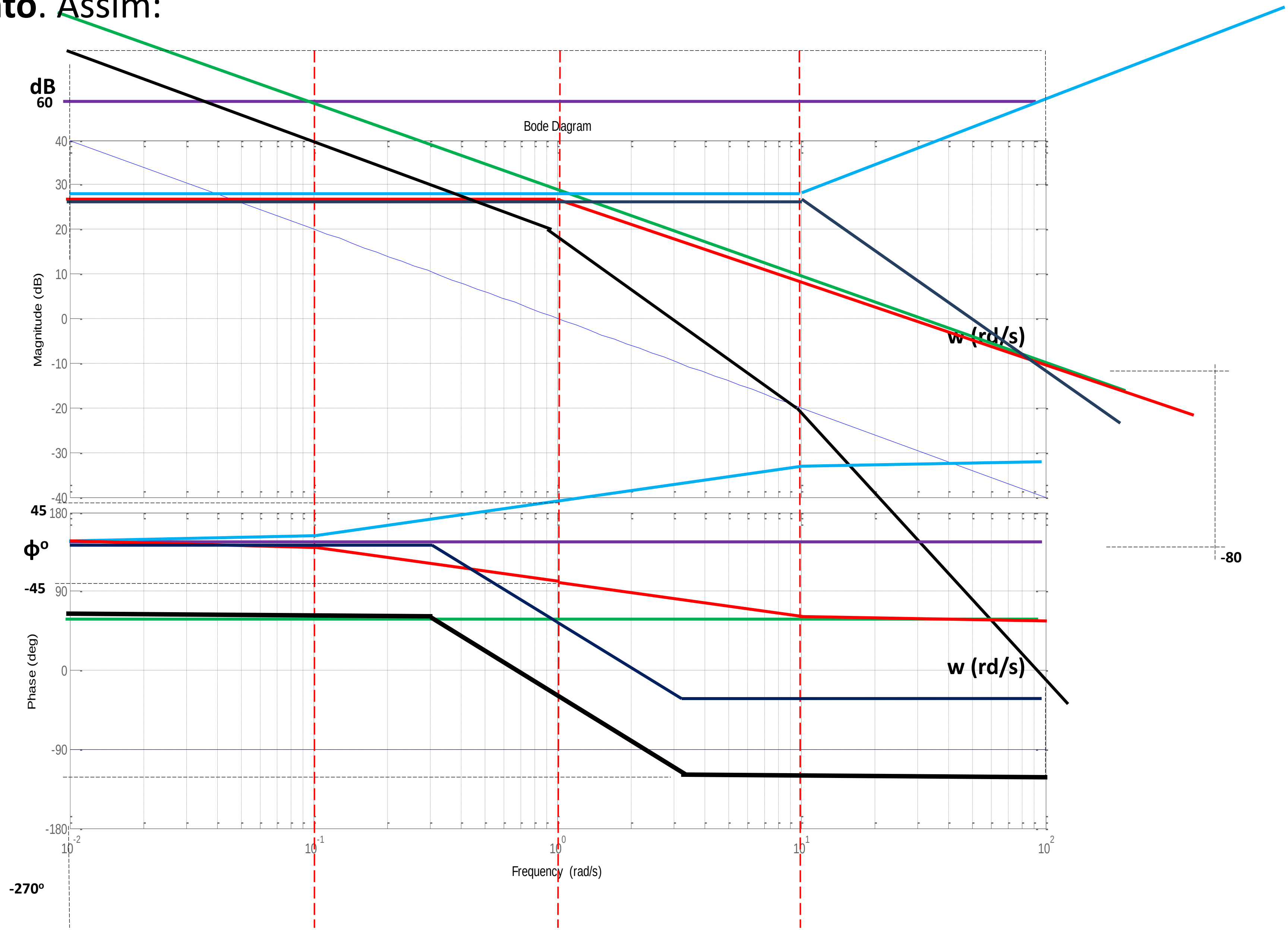


5 – Fator Quadrático: **$[\,1+2\xi(jw/10)+(jw/10)^2\,]^{-1}$** com **$w_n = 10$ rad/s**.



O **Diagrama de Bode** para $\mathbf{H(s) = \dfrac{100.(s+10)}{s.(s+1).(s^2+s+100)}}$

é construído **somando-se** as declinações de cada **Fator Básico** entre as **Frequência de Canto**. Assim:



O Diagrama de Bode preciso para o exercício anterior é mostrado a seguir traçado pelo MatLab.