



Universidade Federal de Viçosa
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

1^a Lista - MAT 135 - Geometria Analítica e Álgebra Linear 2017/II

1. Considere as matrizes A, B, C, D e E com respectivas ordens, 4×3 , 4×5 , 3×5 , 2×5 e 3×5 . Determine quais das seguintes expressões matriciais são possíveis e determine a respectiva ordem.

(a) $AE + B^T$; (b) $C(D^T + B)$; (c) $AC + B$; (d) $E^T(CB)$.

2. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 & -5 \end{bmatrix}$. Determine:

- (a) a ordem de A ;
(b) os elementos a_{21} , a_{34} e a_{44} .

3. Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $C = A.B$ e $D = B.A$.

Determine os elementos c_{23} e d_{41} .

4. Determine a matriz quadrada $A = (a_{ij})$, de ordem 4 cujos elementos são dados por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 3i - j, & \text{se } i < j \\ i^2 - 3j, & \text{se } i = j \\ -i + 3j, & \text{se } i > j \end{cases}.$$

5. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Determine:

(a) A^2 ; (b) A^3 ; (c) A^{31} ; (d) A^{42} .

6. Determine números reais x e y tais que

$$\begin{bmatrix} x^3 & y^2 \\ y^2 & x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x & 3y \\ 4y & 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

7. Determine em cada um dos casos abaixo, x , y e z números reais tais que a matriz A seja simétrica.

$$(a) A = \begin{bmatrix} -2 & x \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (b) B = \begin{bmatrix} 4 & x+1 & -6 \\ -3 & 2 & -4 \\ 2y+2 & 2z & 9 \end{bmatrix}, \quad (c) C = \begin{bmatrix} 8 & x^2+3 & -5 \\ 7 & -9 & 4 \\ y+x & z+3x & 11 \end{bmatrix}.$$

8. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Quando possível, calcule o que se pede:

$$(a) 4E - 2D; \quad (b) 2A^T + C; \quad (c) (2E^T - 3D^T)^T; \quad (d) (BA^T - 2C)^T.$$

9. Obtenha as matrizes que comutam com $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

10. Diz-se que uma matriz B é uma *raiz quadrada* de uma matriz A se $B^2 = A$.

(a) Encontre duas raízes quadradas de $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) Existem quantas raízes quadradas distintas de $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$? Justifique.

(c) Na sua opinião qualquer matriz 2×2 tem pelo menos uma raiz quadrada? Justifique.

11. Uma matriz quadrada A é dita *idempotente* se $A^2 = A$.

(a) Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ é idempotente. Calcule A^3, A^4, \dots, A^n .

(b) Qual é a única matriz idempotente não singular? Justifique sua resposta.

12. Uma matriz quadrada A é dita *nilpotente* se existir um número inteiro $p > 0$ tal que $A^p = 0$. Se p é o menor inteiro para o qual $A^p = 0$, A diz-se nilpotente de ordem p . Mostre que a

matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ é nilpotente e determine seu índice de nilpotência.

13. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Defina $A^0 = I$ e $A^n = A^{n-1}A$, para todo número natural $n \geq 1$. Mostre que: $A^{2n} = I$ e $A^{2n+1} = A$, para todo natural n .

14. Sejam A, B matrizes em $M_n(\mathbb{R})$. Se $AB = BA$, mostre que:

$$(a) (A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2; \quad (b) (A - B)(A + B) = A^2 - B^2;$$

$$(c) (A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3.$$

15. Seja A matriz em $M_n(\mathbb{R})$. Mostre que:

- (a) as matrizes $A.A^T$ e $\frac{1}{2}(A + A^T)$ são simétricas;
- (b) a matriz $\frac{1}{2}(A - A^T)$ é antissimétrica;
- (c) toda matriz quadrada é a soma de uma matriz simétrica com uma matriz antissimétrica.

16. Dizemos que uma matriz A é *ortogonal* se é invertível e $A^{-1} = A^T$.

- (a) Determine os possíveis valores para o determinante de uma matriz ortogonal.
- (b) Determine quais matrizes reais de ordem 2 são simultaneamente antissimétricas e ortogonais.
- (c) Mostre que o produto de duas matrizes ortogonais é também uma matriz ortogonal.

17. Verifique quais das matrizes abaixo é ortogonal.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

18. Dado um número real α , considere a matriz $T_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$.

- (a) Calcule $T_{\frac{\pi}{2}}$.
- (b) Dados α e β em \mathbb{R} , mostre que $T_\alpha.T_\beta = T_{\alpha+\beta}$.
- (c) Calcule $T_{-\alpha}$.
- (d) Mostre que, para todo número α , a matriz T_α é ortogonal.

19. Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, uma matriz quadrada de ordem n . O *traço* de A , denotado por $tr(A)$, é definido como sendo o número real

$$tr(A) = \sum_{k=1}^n a_{kk} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn},$$

ou seja, o traço de A é a soma dos elementos da diagonal principal de A . Dadas A e B matrizes quadradas de ordem n , valem as seguintes propriedades:

- (a) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$; (c) $tr(A^T) = tr(A)$;
 (b) $tr(kA) = ktr(A)$, onde $k \in \mathbb{R}$; (d) $tr(AB) = tr(BA)$.

Usando algumas destas propriedades verifique que não existem matrizes quadradas A e B de ordem n tais que $AB - BA = I$.

20. Verifique que se A é uma matriz $m \times n$, então os traços de AA^T e $A^T A$ estão definidos. Em seguida prove que $tr(AA^T) = tr(A^T A)$.

21. Mostre que se $A^T A = A$, então A é simétrica e $A = A^2$.

22. Prove que se A é invertível e $AB = AC$, então $B = C$.

23. É possível ter $AB = I$ e B não ser inversa de A ? Justifique sua resposta.

24. Seja A uma matriz quadrada de ordem n , mostre que:

(a) Se A satisfaz a igualdade $A^2 - 3A + I = 0$, então $A^{-1} = 3I - A$.

(b) Se A é tal que $A^{n+1} = 0$, então $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^n$.

25. Seja A uma matriz quadrada de ordem 5, cujo determinante é igual a -3 , pede-se:

(a) O determinante da matriz P dada por $P = 4A^{-1}A^T$.

(b) Decidir se P é ou não invertível.

(c) O determinante da matriz B obtida de A após serem realizadas as seguintes operações:

$L_3 \longleftrightarrow L_2$; $L_1 \longrightarrow L_1 + 2L_5$; $L_4 \longrightarrow -3L_4$.

(d) Decidir se a matriz $Q = AA^T$ é ou não invertível.

26. Calcule o determinante da matriz $A =$

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) desenvolvendo-o pela segunda linha (usando cofatores).

(b) pelo processo de triangularização (usando operações elementares sobre as linhas da matriz).

27. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, determine:

(a) $\det(AB)$; (b) A^{-1} ; (c) B^{-1} ; (d) $(AB)^{-1}$; (e) $\det(C)$, onde $CA^T = 2BC^2$.

28. Seja Q uma matriz quadrada de ordem n tal que $\det Q \neq 0$ e $Q^3 + 2Q^2 = 0$. Determine o valor de $\det Q$.

29. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & 4 \\ 6 & 7 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, determine:

(a) $\det A$ utilizando as operações elementares sobre as linhas de A ;

(b) $\det A^T$; (c) $\det(A^2)$; (d) A^{-1} ; (e) $\det(-A)$; (f) $3AA^T$.

30. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Determine o polinômio $p(x) = \det(xI_3 - A)$, onde I_3 é a matriz identidade de ordem 3 e $x \in \mathbb{R}$.

(b) Verifique que $p(A) = 0$, onde 0 é a matriz nula de ordem 3.

(c) Use o item anterior para calcular a inversa de A .

31. Calcule os seguintes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

(b) $\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}$;

(c) $\begin{vmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 2 \end{vmatrix}$;

(d) $\begin{vmatrix} 4 & -5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$;

(e) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

(f) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

32. Resolva as seguintes equações:

(a) $\begin{vmatrix} x & 5 & 7 \\ 0 & x+1 & 6 \\ 0 & 0 & 2x-1 \end{vmatrix} = 0$; (b) $\begin{vmatrix} 2 & x-2 & 3 \\ 2x+3 & x-1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 16$; (c) $\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$.

33. Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Generalize o resultado para uma matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ na qual $a_{ij} = 0$ sempre que $i + j \leq n$.

34. Diz-se que uma matriz A é *semelhante* à matriz B quando existe uma matriz invertível P tal que $B = PAP^{-1}$.

(a) Mostre que se A é uma matriz semelhante a B , então B é semelhante a A .

(b) Mostre que se A é semelhante a B e B é semelhante a C , então A é semelhante a C .

(c) Prove que matrizes semelhantes tem mesmo determinante.

35. Nos casos abaixo, pede-se: verificar se A é invertível; $\text{cof}(A)$, a matriz cofatora de A , e A^{-1} , a matriz inversa de A , se esta existir.

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix};$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(c) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(d) A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

36. Usando algumas propriedades dos determinantes, sem calcular diretamente, verifique que:

$$\begin{vmatrix} b+c & a+c & a+b \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

37. Nos casos abaixo, determine A^{-1} , utilizando operações elementares, se esta existir.

$$(a) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix};$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix};$$

$$(c) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(d) A = \begin{bmatrix} -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & -3 \\ -6 & -9 & 24 \end{bmatrix}.$$

38. Sendo A e B matrizes invertíveis de ordem n , isolar a matriz X de cada equação abaixo:

- (a) $AXB = I$; (b) $(AX)^T = B$; (c) $(AX)^{-1} = I$;
 (d) $(A + X)^T = B$; (e) $AXB = BA$; (f) $(AX^{-1})^T = B$.

39. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$.

Determine matrizes elementares E_1, E_2, E_3 e E_4 tais que $B = E_2 E_1 A$ e $C = E_4 E_3 A$. Explique como estas matrizes foram obtidas e confira seu resultado.

40. Encontre matrizes elementares E_1, E_2, \dots, E_k tais que $A = E_1 E_2 \dots E_k$ para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

41. Uma construtora está fazendo o orçamento de 65 estabelecimentos rurais sendo estes divididos em: 20 de alvenaria, 30 mistos e 15 de madeira. A tabela abaixo descreve a quantidade de material utilizado em cada tipo de construção.

Tipo de construção/ Material	Tábuas (unidade)	Tijolos (mil)	Telhas (mil)	Tinta (litros)	Mão-de-obra (dias)
Alvenaria	50	15	6	70	25
Madeira	500	1	5	20	30
Misto	200	8	7	50	40

Pede-se:

- (a) Determinar, utilizando o produto de matrizes, a matriz A que descreve quantas unidades de cada componente serão necessárias para cumprir o orçamento.
 (b) Dar o significado do produto de matrizes AB , sendo A a matriz obtida no item (a) e B é a matriz obtida pela tabela abaixo.

	Valor da Compra (a unidade em reais)	Transporte (a unidade em reais)
Tábuas	12	0,08
Tijolos	100	20
Telhas	300	10
Tinta	3	0,50
Mão-de-obra	40	1,50

42. Considere os adubos I,II,III e IV com características e preços descritos nas tabelas abaixo:

Substância po kg	Fósforo	Nitrato	Potássio
Adubo I	25g	15g	70g
Adubo II	30kg	25g	40g
Adubo III	60g	10g	55g
Adubo IV	15g	30g	60g

Adubos	I	II	III	IV
Preço por Kg	R\$7,50	R\$5,00	R\$4,50	R\$6,50

Um agricultor necessita de uma mistura com a seguinte especificação: 6 kg do adubo I, 7 kg do adubo II, 5 kg do adubo III e 8 kg do adubo IV. Usando o produto de matrizes, determine a quantidade de cada substância na mistura descrita acima e o preço desta mistura.

43. Decida se a afirmação é (sempre) verdadeira ou (às vezes) falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico matemático ou um contra-exemplo.

- (a) () Se a primeira coluna de A for constituída somente de zeros, o mesmo ocorre com a primeira coluna de qualquer produto AB .
- (b) () Se a primeira linha de A for constituída somente de zeros, o mesmo ocorre com a primeira linha de qualquer produto AB .
- (c) () Se a soma de matrizes $AB + BA$ estiver definida, então A e B devem ser matrizes quadradas.
- (d) () Se A é uma matriz quadrada com duas linhas idênticas, então A^2 tem duas linhas idênticas.
- (e) () Se A é uma matriz quadrada e A^2 tem uma coluna constituída somente de zeros, então necessariamente A tem uma coluna constituída somente de zeros.
- (f) () Se AA^T é uma matriz singular, então A não é invertível.
- (g) () Se A é invertível e $AB = 0$, então necessariamente B é a matriz nula.
- (h) () A soma de duas matrizes invertíveis é sempre uma matriz invertível.
- (i) () Se A é uma matriz quadrada tal que $A^4 = 0$, então

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3.$$

- (j) () $\det(2A) = 2 \det(A)$.
- (k) () $\det(I + A) = 1 + \det(A)$.
- (l) () Não existe matriz real quadrada A tal que $\det(AA^T) = -1$.
- (m) () Se $\det(AA^T) = 4$, então $\det(A) = 2$.

- (n) () $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
- (o) () Se $\det(A) \neq 0$ e $AB = 0$, então B é invertível.
- (p) () Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e n é par, então $\det(A) = \det(-A)$.
- (q) () Se A^{100} é invertível, então $3A$ também o é.
- (r) () Se $AB = 0$ e B é invertível, então $A = 0$.
- (s) () Sejam A, B e P matrizes reais de ordem n , tais que $B = P^T.A.P$, sendo P invertível. Então $\det(A) = \det(B)$.
- (t) () Dada a equação matricial $X^2 + 2X = 0$, onde X é uma matriz quadrada de ordem n , não singular. Então esta equação tem única solução.
- (u) () Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ são tais que $A.B = 0$ (matriz nula), então $B.A$ também é a matriz nula.
- (v) () Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ são tais que $A.B = 0$ (matriz nula), então $A = 0$ ou $B = 0$.
- (w) () A soma de duas matrizes simétricas de mesma ordem é uma matriz simétrica.
- (x) () O produto de duas matrizes simétricas de mesma ordem é uma matriz simétrica.
- (y) () Se $A.B = C$ e duas das matrizes são invertíveis, então a terceira também o é.
- (z) () Se $A.B = C$ e duas das matrizes são singulares, então a terceira também o é.