MÉTODOS DE JACOBI-RICHARDSON E DE GAUSS-SEIDEL

- ALGORITMOS
- ALGUMAS OBSERVAÇÕES E COMPARAÇÕES COM OS MÉTODOS DIRETOS
- MAIS UM EXEMPLO

- MAT 271 – Cálculo Numérico PER3/2021/UFV
- Professor Amarísio Araújo DMA/UFV

SISTEMA LINEAR $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Suponhamos que $detA \neq 0$ e $a_{ii} \neq 0$ para todo i. Seja $\bar{x}$ a solução única do sistema, considerada como uma n-upla de $\mathbb{R}^n$: $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$.

JACOBI-RICHARDSON

Equações de Iteratividade:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(k)} - \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k)} - \dfrac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} x_n^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{b_n}{a_{nn}} - \dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1^{(k)} - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}} x_{n-1}^{(k)} \end{cases} \quad (k = 0,1,2,3,\ldots).$$

$$x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) \text{ (qualquer)}$$

JACOBI-RICHARDSON: UM POSSÍVEL ALGORITMO

1) Forneça: aproximação inicial $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)$; $\varepsilon > 0$ (tolerância ou precisão); $k = 0$; $Pare = Falso$;

2) Enquanto $Pare = Falso$, faça:

Para $i = 1, \dots, n$, faça:

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \Big/ a_{ii}$$

Se $\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| < \varepsilon$, então $Pare = Verdade$;

Senão $k = k + 1$.

PODERIA SER O ERRO RELATIVO

GAUSS-SEIDEL

Equações de Iteratividade:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(k)} - \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} x_n^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{b_3}{a_3} - \dfrac{a_{31}}{a_{33}} x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{32}}{a_{33}} x_2^{(k+1)} - \dfrac{a_{34}}{a_{33}} x_4^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{3n}}{a_{33}} x_n^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{b_n}{a_{nn}} - \dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2^{(k+1)} - \cdots - \dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}} x_{n-1}^{(k+1)} \end{cases} \quad k = 0,1,2,\ldots$$

$$x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) \text{ (qualquer)}$$

GAUSS-SEIDEL: UM POSSÍVEL ALGORITMO

1) Forneça: aproximação inicial $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)$; $\varepsilon > 0$ (tolerância ou precisão); $k = 0$; $Pare = Falso$;

2) Enquanto $Pare = Falso$, faça:

Para $i = 1, \dots, n$, faça:

$$x_i{}^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j{}^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j{}^{(k)}\right) \Big/ a_{ii}$$

Se $\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| < \varepsilon$, então $Pare = Verdade$;

Senão $k = k + 1$.

PODERIA SER O ERRO RELATIVO

LEMBRANDO: NORMAS EM $\mathbb{R}^n$

Três casos especiais de normas de $\mathbb{R}^n$: para $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \epsilon \mathbb{R}^n$:

$\|v\|_1 = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n|$ (Norma da Soma)

$\|v\|_2 = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 \dots + {v_n}^2}$ (Norma Euclidiana)

$\|v\|_\infty = máx\{|v_1|, |v_2|, \dots, |v_n|\}$ (Norma do Máximo)

No nosso Curso, escolhemos usar a Norma do Máximo.

ALGUMAS OBSERVAÇÕES E COMPARAÇÕES DOS MÉTODOS DIRETOS E INDIRETOS

De uma forma geral, os métodos diretos (Eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan, Decomposição LU, por exemplo) são métodos finitos na determinação da solução do sistema linear, e devem ser usados quando a matriz A do sistema for densa, isto é, apresenta poucos elementos nulos, e quando o sistema é de pequeno porte (dimensão pequena).

Os métodos iterativos devem ser usados na resolução de sistemas lineares de grande porte (centenas de equações e de incógnitas) e quando a matriz A do sistema for esparsa, apresenta muitos elementos nulos. Nestes métodos, quando a convergência é garantida, eles independem da aproximação inicial considerada, mostrando-se vantajosos por não alterarem a estrutura da matriz A durante a sua aplicação e por minimizarem a propagação dos erros de arredondamento.

Alguns sistemas lineares em Computação Aplicada surgem de situações envolvendo resolução de equações diferenciais, que resultam em sistemas de grande porte e esparsos. Para estes, os métodos iterativos são mais atrativos, em especial o Método de Gauss-Seidel, que, em caso de convergência assegurada, apresentam maior rapidez na obtenção da solução aproximada.

EXEMPLO

Sistema do exercício 7 da Lista de Exercícios III:

Seja o sistema linear: $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20. \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases}$

Vamos usar o método de Gauss-Seidel, com aproximação inicial $x^{(0)} = (0.1{,}0.2{,}0.5)$, para encontrar uma aproximação do sistema com precisão $\varepsilon = 0.01$ para o erro absoluto. (Na lista, pediu-se para usar Jacobi-Richardson)

EXEMPLO

Como a matriz A dos coeficientes do sistema é tal que $detA = 253$, o sistema possui solução única. E como $a_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1,2,3$, as equações de iteratividade do método de Gauss-Seidel podem ser obtidas.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{12}{5} - \dfrac{2}{5}x_2 - \dfrac{1}{5}x_3 \\ x_2 = 5 + \dfrac{1}{4}x_1 - \dfrac{1}{2}x_3 \\ x_3 = \dfrac{3}{10} - \dfrac{1}{5}x_1 + \dfrac{3}{10}x_2 \end{cases}$$

O Critério de Sassenfeld é satisfeito. Logo há garantia de convergência.

Obs: É fácil ver que o Critério Norma Linha é satisfeito.

Como vimos, se o Critério Norma Linha é satisfeito, o Critério de Sassenfeld também o é.

EXEMPLO

$$\boxed{\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -2.4 - 0.4x_2^{(k)} - 0.2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 5 + 0.25x_1^{(k+1)} - 0.5x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 0.3 - 0.2x_1^{(k+1)} + 0.3x_2^{(k+1)} \end{cases}}$$

$$x^{(0)} = (0.1,0.2,0.5) \qquad \varepsilon = 0.01$$

$$k = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = -2.4 - 0.4 \times 0.2 - 0.2 \times 0.5 = -2.5800 \\ x_2^{(1)} = 5 + 0.25 \times (-2.58) - 0.5 \times 0.5 = 4.1050 \\ x_3^{(1)} = 0.3 - 0.2 \times (-2.58) + 0.3 \times 4.105 = 2.0475 \end{cases} \Longrightarrow x^{(1)} = (-2.5800,4.1050,2.0475)$$

$$\left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|_\infty = \|(-2.6800,3.9050,1.5475)\|_\infty = 3.9050 > 0.01$$

EXEMPLO

$$x^{(0)} = (0.1,0.2,0.5) \qquad x^{(1)} = (-2.5800,4.1050,2.0475)$$

$$k = 1 \Longrightarrow \begin{cases} {x_1}^{(2)} = -2.4 - 0.4 \times 4.105 - 0.2 \times 2.0475 = -4.4515 \\ {x_2}^{(2)} = 5 + 0.25 \times (-4.4515) - 0.5 \times 2.0475 = 2.8634 \\ {x_3}^{(2)} = 0.3 - 0.2 \times (-4.4515) + 0.3 \times 2.8634 = 2.0493 \end{cases} \Longrightarrow x^{(2)} = (-4.4515,2.8634,2.0493)$$

$$\left\| x^{(2)} - x^{(1)} \right\|_\infty = \|(-1.8715, -1.2416,0.0018)\|_\infty = 1.8715 > 0.01$$

EXEMPLO

$$x^{(0)} = (0.1,0.2,0.5) \qquad x^{(1)} = (-2.5800,4.1050,2.0475) \qquad x^{(2)} = (-4.4515,2.8634,2.0493)$$

$$k = 2 \Longrightarrow \begin{cases} {x_1}^{(3)} = -2.4 - 0.4 \times 2.8634 - 0.2 \times 2.0493 = -3.9552 \\ {x_2}^{(3)} = 5 + 0.25 \times (-3.9552) - 0.5 \times 2.0493 = 2.9865 \\ {x_3}^{(3)} = 0.3 - 0.2 \times (-3.9552) + 0.3 \times 2.9865 = 1.9870 \end{cases} \Longrightarrow x^{(3)} = (-3.9552,2.9865,1.9870)$$

$$\left\| x^{(3)} - x^{(2)} \right\|_\infty = \|(0.4963,0.1231,-0.0623)\|_\infty = 0.4963 > 0.01$$

EXEMPLO

$x^{(0)} = (0.1, 0.2, 0.5)$ $\quad x^{(1)} = (-2.5800, 4.1050, 2.0475)$ $\quad x^{(2)} = (-4.4515, 2.8634, 2.0493)$

$x^{(3)} = (-3.9552, 2.9865, 1.9870)$

$$k = 3 \Longrightarrow \begin{cases} {x_1}^{(4)} = -2.4 - 0.4 \times 2.9865 - 0.2 \times 1.987 = -3.9920 \\ {x_2}^{(4)} = 5 + 0.25 \times (-3.992) - 0.5 \times 1.987 = 3.0085 \\ {x_3}^{(4)} = 0.3 - 0.2 \times (-3.992) + 0.3 \times 3.0085 = 2.0010 \end{cases} \Longrightarrow x^{(4)} = (-3.9920, 3.0085, 2.0010)$$

$$\left\| x^{(4)} - x^{(3)} \right\|_\infty = \|(-0.0368, 0.0220, 0.0140)\|_\infty = 0.0368 > 0.01$$

EXEMPLO

$x^{(0)} = (0.1,0.2,0.5)$ $x^{(1)} = (-2.5800,4.1050,2.0475)$ $x^{(2)} = (-4.4515,2.8634,2.0493)$

$x^{(3)} = (-3.9552,2.9865,1.9870)$ $x^{(4)} = (-3.9920,3.0085,2.0010)$

$$k = 4 \Longrightarrow \begin{cases} {x_1}^{(5)} = -2.4 - 0.4 \times 3.0085 - 0.2 \times 2.001 = -4.0036 \\ {x_2}^{(5)} = 5 + 0.25 \times (-4.0036) - 0.5 \times 2.001 = 2.9986 \\ {x_3}^{(5)} = 0.3 - 0.2 \times (-4.0036) + 0.3 \times 2.9986 = 2.0003 \end{cases} \Longrightarrow x^{(5)} = (-4.0036,2.9986,2.0003)$$

$$\left\| x^{(5)} - x^{(4)} \right\|_\infty = \|(-0.0116, -0.0099,0.0007)\|_\infty = 0.0116 > 0.01$$

EXEMPLO

$x^{(0)} = (0.1,0.2,0.5)$ $\quad x^{(1)} = (-2.5800,4.1050,2.0475)$ $\quad x^{(2)} = (-4.4515,2.8634,2.0493)$

$x^{(3)} = (-3.9552,2.9865,1.9870)$ $\quad x^{(4)} = (-3.9920,3.0085,2.0010)$

$x^{(5)} = (-4.0036,2.9986,2.0003)$

$$k = 5 \Longrightarrow \begin{cases} {x_1}^{(6)} = -2.4 - 0.4 \times 2.9986 - 0.2 \times 2.0003 = -3.9995 \\ {x_2}^{(6)} = 5 + 0.25 \times (-3.9995) - 0.5 \times 2.0003 = 3.0000 \Longrightarrow x^{(6)} = (-3.9995,3.0000,1.9999) \\ {x_3}^{(6)} = 0.3 - 0.2 \times (-3.9995) + 0.3 \times 3.0 = 1.9999 \end{cases}$$

$$\left\| x^{(6)} - x^{(5)} \right\|_\infty = \|(0.0041,0.0014,-0.0004)\|_\infty = 0.0041 < 0.01$$

Portanto, a solução aproximada do sistema é $x^{(6)} = (-3.9995,3.0000,1.9999)$, com erro absoluto menor que 0.01.

AINDA NO EXEMPLO

VAMOS USAR A NORMA EUCLIDIANA PARA CALCULAR OS ERROS ENTRE OS TERMOS ENCONTRADOS

$x^{(0)} = (0.1,0.2,0.5)$ $x^{(1)} = (-2.5800,4.1050,2.0475)$ $x^{(2)} = (-4.4515,2.8634,2.0493)$

$x^{(3)} = (-3.9552,2.9865,1.9870)$ $x^{(4)} = (-3.9920,3.0085,2.0010)$

$x^{(5)} = (-4.0036,2.9986,2.0003)$ $x^{(6)} = (-3.9995,3.0000,1.9999)$

$$\|v\|_2 = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 \ldots + {v_n}^2}$$

$$\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_2 = \|(-2.6800,3.9050,1.5475)\|_2 = 4.9826$$

$$\left\|x^{(2)} - x^{(1)}\right\|_2 = \|(-1.8715, -1.2416,0.0018)\|_2 = 2.2459$$

$$\left\|x^{(3)} - x^{(2)}\right\|_2 = \|(0.4963,0.1231, -0.0623)\|_2 = 0.5151$$

$$\left\|x^{(4)} - x^{(3)}\right\|_2 = \|(-0.0368,0.0220,0.0140)\|_2 = 0.0451$$

$$\left\|x^{(5)} - x^{(4)}\right\|_2 = \|(-0.0116, -0.0099,0.0007)\|_2 = 0.0153$$

$$\left\|x^{(6)} - x^{(5)}\right\|_2 = \|(0.0041,0.0014, -0.0004)\|_2 = 0.0044$$

AINDA NO EXEMPLO

COMPARANDO

NORMA DO MÁXIMO

$$\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_\infty = 3.9050$$

$$\left\|x^{(2)} - x^{(1)}\right\|_\infty = 1.8715$$

$$\left\|x^{(3)} - x^{(2)}\right\|_\infty = 0.4963$$

$$\left\|x^{(4)} - x^{(3)}\right\|_\infty = 0.0368$$

$$\left\|x^{(5)} - x^{(4)}\right\|_\infty = 0.0116$$

$$\left\|x^{(6)} - x^{(5)}\right\|_\infty = 0.0041$$

NORMA EUCLIDIANA

$$\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_2 = 4.9826$$

$$\left\|x^{(2)} - x^{(1)}\right\|_2 = 2.2459$$

$$\left\|x^{(3)} - x^{(2)}\right\|_2 = 0.5151$$

$$\left\|x^{(4)} - x^{(3)}\right\|_2 = 0.0451$$

$$\left\|x^{(5)} - x^{(4)}\right\|_2 = 0.0153$$

$$\left\|x^{(6)} - x^{(5)}\right\|_2 = 0.0044$$

COMO COLOCADO NA AULA SOBRE O CRITÉRIO DE PARADA

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \sqrt{n}\|v\|_\infty$$

$$\|v\|_2 \leq \sqrt{n}\|v\|_\infty$$

Assim: Se queremos que $\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_2 < \varepsilon$,

basta que exigir que $\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$.