INTEGRAÇÃO NUMÉRICA:

REGRA 3/8 DE SIMPSON

MAT 271 – Cálculo Numérico – PER3/2021/UFV

Professor Amarísio Araújo DMA/UFV

RESOLVER DE FORMA APROXIMADA UMA INTEGRAL DEFINIDADA

Consideremos que f seja uma função integrável no intervalo $[a, b]$.

Vamos aprender, aqui, mais uma técnica para calcular, de forma aproximada, a integral definida

$$\int_a^b f(x)dx\,.$$

Trata-se da Regra 3/8 de Simpson, baseada na aproximação de $f(x)$ por um polinômio interpolador $p_3(x)$, de grau ≤ 3 , no intervalo $[a, b]$, de modo que:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b p_3(x)dx\,.$$

REGRA 3/8 DE SIMPSON

Para obter um polinômio interpolador de grau ≤ 3 de $f(x)$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em três subintervalos de mesmo comprimento $h = \frac{b-a}{3}$, $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$ e $[x_2, x_3]$, sendo:

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h \text{ e } x_3 = x_2 + h = b.$$

Usando, por exemplo, a interpolação de Newton, obtemos:

$$p_3(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + d_3(x - x_0)(x - x_1)\,(x - x_2),$$

onde d_0, d_1, d_2 e d_3 são as primeiras diferenças divididas de ordens zero, um, dois e três respectivamente.

REGRA 3/8 DE SIMPSON

Resolvendo a integral $\int_a^b p_3(x)dx$, obtemos:

$$\int_a^b p_3(x)dx = \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)].$$

Temos, então, a aproximação, chamada de Regra 3/8 de Simpson (Caso Simples):

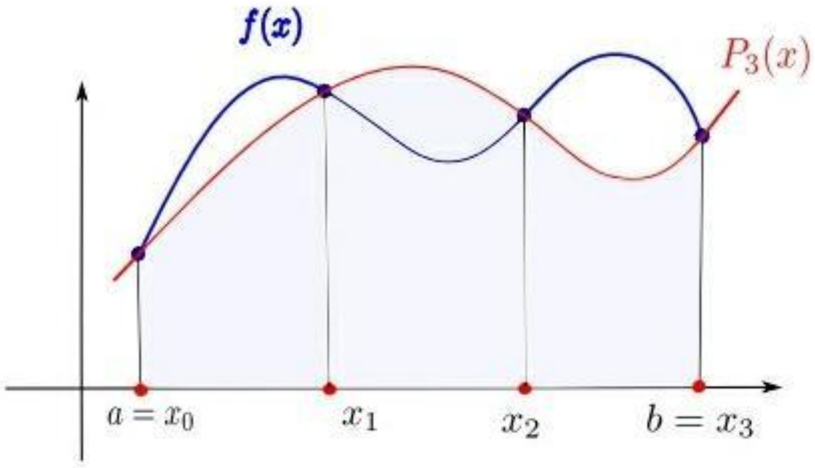
$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)],$$

onde: $h = \frac{b-a}{3}$; $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$ e $x_3 = b$.

REGRA 3/8 DE SIMPSON (CASO SIMPLES)

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

$$\boxed{f(x) > 0}$$



A ÁREA SOB O GRÁFICO DE f NO INTERVALO $[a, b]$ É APROXIMADA

PELA ÁREA SOB O GRÁFICO DO POLINÔMIO INTERPOLADOR $p_3(x)$.

EXEMPLO 1

Aplicar a Regra 3/8 de Simpson no cálculo aproximado da integral $\int_1^4 \sqrt{x}dx$.

Temos: $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 1$, $b = 4$; $h = \frac{4-1}{3} = 1$, e temos: $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 4$.

$$\int_1^4 \sqrt{x}dx \cong \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

$$\int_1^4 \sqrt{x}dx \cong \frac{3}{8}[f(1) + 3f(2) + 3f(3) + f(4)] = 0.375[1 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 2] = 0.6645474$$

$$\boxed{\int_1^4 \sqrt{x}dx \cong 4.6645474}$$

EXATO $\boxed{\int_1^4 \sqrt{x}dx = 4.6666666}$

REGRA 3/8 DE SIMPSON GENERALIZADA

Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i], i = 1,2, \dots n$, ($n$ múltiplo de 3) de mesmo comprimento $h = \frac{b-a}{n}$.

Daí, obtemos $n + 1$ pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$ do intervalo $[a, b]$, sendo:

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, \dots, x_n = x_{n-1} + h = b.$$

Assim, como f é integrável em $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_6} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-3}}^{x_n} f(x)dx\,.$$

REGRA 3/8 DE SIMPSON GENERALIZADA

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_6} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-3}}^{x_n} f(x)dx\,.$$

Aplicamos, então, a Regra 3/8 de Simpson (Caso Simples) a cada integral do lado direito, que é uma integral de $f(x)$ num intervalo $[x_{i-3}, x_i], i = 3,6, \dots, n$:

$$\int_{x_{i-3}}^{x_i} f(x)dx \cong \frac{3h}{8}[f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-2}) + 3f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

A Regra 3/8 de Simpson (Caso Simples) é aplicada a cada trio de intervalos consecutivos:

$$[x_{i-3}, x_{i-2}], [x_{i-2}, x_{i-1}], [x_{i-1}, x_i], \; i = 3,6, \dots, n.$$

Por isto o número de subintervalos deve ser múltiplo de 3.

REGRA 3/8 DE SIMPSON GENERALIZADA

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_6} f(x)dx + \int_{x_6}^{x_9} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-6}}^{x_{n-3}} f(x)dx \; + \int_{x_{n-3}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\int_{x_{i-3}}^{x_i} f(x)dx \cong \frac{3h}{8}[f(x_{i-3}) \; + 3f(x_{i-2}) + 3f(x_{i-1}) + f(x_i)],, i = 3, \dots, n.$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{\substack{i=3 \\ i=3k \\ k\epsilon\mathbb{N}^*}}^{n} \frac{3h}{8}[f(x_{i-3}) \; + 3f(x_{i-2}) + 3f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

REGRA 3/8 DE SIMPSON GENERALIZADA

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \cong \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

$$\int_{x_3}^{x_6} f(x)dx \cong \frac{3h}{8}[f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + f(x_6)]$$

$$\vdots$$

$$\int_{x_{n-3}}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{3h}{8}[f(x_{n-3}) + 3f(x_{n-2}) + 3f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \cong \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3\sum_{\substack{i \neq 3k \\ k \in \mathbb{N}}} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i=3k \\ k\in\mathbb{N} \\ i\neq 0,n}} f(x_i) + f(x_n)\right]}$$

REGRA 3/8 DE SIMPSON GENERALIZADA

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{3h}{8}\left[f(x_0) \; + 3(f(x_1) + f(x_2) + \cdots . + f(x_{n-1})) + 2(f(x_3) + f(x_6) + \cdots . + f(x_{n-3})) + f(x_n)\right]}$$

$n \geq 6, n$ múltiplo de 3

REGRA 3/8 DE SIMPSON

Regra 3/8 de Simpson Generalizada: $n \geq 6, n$ múltiplo de 3

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{3h}{8}[f(x_0) \ + 3(f(x_1) + f(x_2) + \cdots . + f(x_{n-1})) + 2(f(x_3) + f(x_6) + \cdots . + f(x_{n-3})) + f(x_n)]$$

Regra 3/8 de Simpson Simples: $n = 3$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{3h}{8}[f(x_0) \ + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

EXEMPLO 2

Aplicar a Regra 3/8 de Simpson, com $n = 6$, para calcular a integral $\int_1^4 \sqrt{x}dx$.

Temos: $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 1$, $b = 4$;

$h = \frac{4-1}{6} = 0.5$, e temos: $x_0 = 1$, $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2.5$, $x_4 = 3$, $x_5 = 3.5$ e $x_6 = 4$.

$$\int_1^4 \sqrt{x}dx \cong \frac{3h}{8}[f(x_0) \ + 3(f(x_1) + f(x_2) + f(x_4) + f(x_5)) + 2f(x_3) + f(x_6)]$$

$$\int_1^4 \sqrt{x}dx \cong \frac{3 \times 0.5}{8}[f(1) \ + 3(f(1.5) + f(2) + f(3) + f(3.5)) + 2f(2.5) + f(x_6)]$$

$$\int_1^4 \sqrt{x}dx \cong 0.1875\left[1 \ + 3\left(\sqrt{1.5} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3.5}\right) + 2\sqrt{2.5} + 2\right] = 4.6664609$$

COMPARANDO

VALOR EXATO DA INTEGRAL: $$\int_1^4 \sqrt{x}dx = 4.6666666$$

VALORES APROXIMADOS DA INTEGRAL COM A REGRA 3/8 DE SIMPSON:

$$(n = 3): \int_1^4 \sqrt{x}dx \cong 4.6645474$$

$$(n = 6): \int_1^4 \sqrt{x}dx \cong 4.6664609$$

VALOR APROXIMADO DA INTEGRAL COM A REGRA 1/3 DE SIMPSON:

$$(n = 4): \int_1^4 \sqrt{x}dx \cong 4.6662207$$

FEITO EM UMA AULA ASSÍNCRONA

$$(n = 6): \int_1^4 \sqrt{x}dx \cong 4.6665631$$

FAÇAM!!

SOBRE O ERRO NA REGRA 3/8 DE SIMPSON

$$|E| \leq \boxed{\frac{h^4}{80}(b-a)max\{|f^{(4)}(x)|, x \in [a,b]\}}$$

LIMITANTE SUPERIOR PARA O ERRO

$$\boxed{|E| < \varepsilon \Rightarrow n > \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{80\varepsilon}max\{|f^{(4)}(x)|, x \in [a,b]\}}}$$

Assim, o menor natural n, múltiplo de 3, tal que $n > \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{80\varepsilon}max\{|f^{(4)}(x)|, x \in [a,b]\}}$ é um número de subintervalos que nos garante que, ao aplicar a Regra 3/8 de Simpson para resolver a integral $\int_a^b f(x)dx$, o erro absoluto cometido na aproximação seja menor que um dado $\varepsilon > 0$.

EXEMPLO 3

Vamos encontrar um número de subintervalos que garanta que o erro absoluto ao se calcular de forma aproximada a integral $\int_1^4 \sqrt{x}dx$ pela Regra 3/8 de Simpson seja menor que $\varepsilon = 0.001$.

$$n > \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{80\varepsilon} max\{|f^{(4)}(x)|, x \in [a,b]\}}$$

$$a = 1, b = 4$$

Como feito em uma aula assíncrona anterior: $max\{\left|f^{(4)}(x)\right|, x \in [a,b]\} = \left|f^{(4)}(1)\right| = 0.9375$

$$\Rightarrow n > \sqrt[4]{\frac{(4-1)^5}{80 \times 0.001} \times 0.9375} \qquad \Rightarrow n > 7.3051, n\ múltiplo\ de\ 3 \qquad \Rightarrow n \geq 9$$

Portanto, com $n = 9$ subintervalos, há garantia de que o erro absoluto seja menor que 0.001

Trapézio: $n = 24$.

1/3 de Simpson: $n = 6$.

3/8 de Simpson: $n = 9$.

SOBRE OS ERROS NAS TRÊS REGRAS

TRAPÉZIO ($n \epsilon \mathbb{N}$) $$|E| \leq \frac{h^2}{12}(b-a)max\{|f^{(2)}(x)|, x \epsilon [a,b]\}$$

1/3 DE SIMPSON ($n \epsilon \mathbb{N}$, n par) $$|E| \leq \frac{h^4}{180}(b-a)max\{|f^{(4)}(x)|, x \epsilon [a,b]\}$$

3/8 DE SIMPSON ($n \epsilon \mathbb{N}$, n múltiplo de 3) $$|E| \leq \frac{h^4}{80}(b-a)max\{|f^{(4)}(x)|, x \epsilon [a,b]\}$$

EXERCÍCIO

Seja a integral $\int_{1.6}^{5.6}[\ln(x+8)-2x]dx$. Para cada uma das Regras, encontre um número n de subintervalos que garanta que, ao aplicar a Regra, o erro absoluto na aproximação seja menor que $\varepsilon = 0.000001$.

RESPOSTA: TRAPÉZIO: $n = 241$ 1/3 DE SIMPSON: $n = 8$ 3/8 DE SIMPSON: $n = 12$