ELT330 – Sistemas de Controle I

Prof. Tarcísio Pizziolo

Aula 11 – Discretização das Eq. de Esp. de Estados

1. Discretização das Equações de Espaço de Estados

O comportamento dos sistemas dinâmicos contínuos pode ser representado no domínio do tempo usando a abordagem por espaço de estados, ou seja, por um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem.

A resposta de um sistema representado pela equação diferencial de estado pode ser obtida utilizando-se uma "aproximação discreta no tempo".

A aproximação discreta no tempo, ou seja, a divisão do eixo dos tempos em $\Delta t \rightarrow 0$, nos permite os cálculos dos valores das variáveis de estado em sucessivos Δt (t = 0, T, 2T, 3T, ...).

Se Δt for suficientemente pequeno em comparação às constantes de tempo do sistema, a resposta será razoavelmente exata.

Usualmente escolhe-se,

$$\Delta t \leq \frac{1}{2}\tau_{\text{menor do sistema}} \ (\tau = \text{constante de tempo do sistema})$$

As constantes de tempo do sistema são os polos da equação característica da função de transferência.

Então, seja a Equação de Estados,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \quad \text{.....(1)}$$

Pela definição de derivada,

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \lim_{\Delta \mathbf{t} \rightarrow \mathbf{0}} \left\{ \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t} \right\}$$

Para $\Delta t = T$,

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{x}(t + T) - \mathbf{x}(t)}{T}$$

Substituindo em (1),

$$\frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t} \cong A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$$

Assim;

$$\mathbf{x}(t + T) \cong TA\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t) + TB\mathbf{u}(t) \Longrightarrow \mathbf{x}(t + T) \cong [TA + I]\mathbf{x}(t) + TB\mathbf{u}(t)$$

Como t é dividido em intervalos T tal que t = KT, (K=0,1,2,3,....), finalmente,

$$\mathbf{x}[(K + 1)T] \cong [TA + I]\mathbf{x}(KT) + TB\mathbf{u}(KT)$$

Simplificando:

$$\mathbf{x}[(K + 1)T] \cong \boldsymbol{\varphi}(T)\mathbf{x}(KT) + TB\mathbf{u}(K)$$

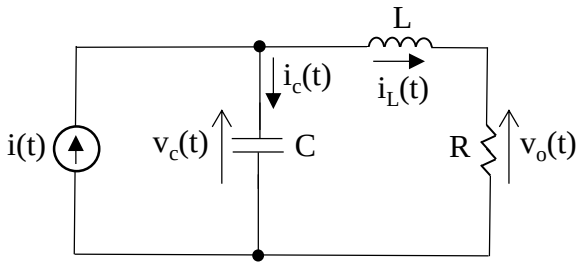
$$\boldsymbol{\varphi}(T) = (TA + I)$$

Concluindo, se for efetuada uma discretização nas Equações de Espaço, como os elementos das matrizes A, B, C e D são os parâmetros do circuito, a

partir do valor da entrada **u**(t) e das condições iniciais **x**(KT) determina-se os valores de **x**(K + T) e da saída **y**(KT).

$$\mathbf{y}(\mathrm{KT}) = \mathrm{C}\mathbf{x}(\mathrm{KT}) + \mathrm{D}\mathbf{u}(\mathrm{KT})$$

Exemplo: Seja o circuito RLC com R = 3 Ω, L = 1 H e C = ½ F. A entrada é a fonte de corrente i(t) = 1u(t) A (degrau unitário), portanto, as condições iniciais para o circuito são nulas, ou seja, $i_L(0) = 0$ e $v_c(0) = 0$,



Discretizar as Equações de Espaço de Estados e calcular $v_0(t)$ após 13 amostragens.
As equações de espaço de estados foram determinadas em um exemplo anterior, então,

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} [u(t)] \\ [y(t)] = [0 \quad 3] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u(t)] \end{cases}$$

O primeiro passo para a discretização é a determinação do "tempo de amostragem" T. Utiliza-se,

$$\Delta t \leq \frac{1}{2}\tau_{\text{menor do sistema}} \; (\tau = \text{constante de tempo do sistema})$$

As constantes de tempo do sistema são os polos da equação característica da função de transferência. A matriz de transferência é,

$$\mathrm{G}(s) = [\mathrm{C}(s\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\,\mathrm{B} + \mathrm{D}] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mathrm{G}(s) = [0 \quad 3]\left[s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\right]^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mathrm{G}(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \Longrightarrow \mathrm{G}(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$\tau_1 = 1 \text{ s} \quad \text{e} \quad \tau_2 = \frac{1}{2} \text{ s}$$

Assim tem-se:

$$\Delta t = \mathrm{T} \leq \frac{1}{2}\tau_{\text{menor do sistema}} \Longrightarrow \mathrm{T} \leq \frac{1}{2}\tau_2 \leq \frac{1}{4} \Longrightarrow \mathrm{T} \leq 0{,}25 \text{ s}$$

O valor de T será T = 0,2 s.
A equação de espaço de estados discretizada será:

$$\mathbf{x}[(\mathrm{K}+1)\mathrm{T}] \cong \boldsymbol{\varphi}(\mathrm{T})\mathrm{x}(\mathrm{KT}) + \mathrm{TB}\mathbf{u}(\mathrm{K})$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathrm{T}) = (\mathrm{TA} + \mathrm{I}) = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{TB} = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}[(\mathrm{K}+1)\mathrm{T}] \cong \begin{bmatrix} 1 & -0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(\mathrm{KT}) + \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(\mathrm{KT})$$

Para as condições iniciais iguais a $x_1(0) = x_2(0) = 0$ e u(t)=1;

Para k = 0

$$X(1) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times X(0) + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [u(0)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(1) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(1) \cong \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_c(1) \\ i_L(1) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,4\ V \\ 0\ A \end{bmatrix}$$

$$Y(0) = y(0) = [0 \quad 3] \times X(0) \Rightarrow y(0) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(0) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y(0) = 0 \Rightarrow \boxed{v_o(0) = 0\ V}$$

Para k = 1

$$X(2) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times X(1) + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [u(1)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(2) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(2) \cong \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,08 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,08 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_c(2) \\ i_L(2) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,8\ V \\ 0,08\ A \end{bmatrix}$$

$$Y(1) = y(1) = [0 \quad 3] \times X(1) \Rightarrow y(1) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(1) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y(1) = 0 \Rightarrow \boxed{v_o(1) = 0\ V}$$

Para k = 2

$$X(3) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times X(2) + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [u(2)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(3) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,08 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(3) \cong \begin{bmatrix} 1,17 \\ 0,19 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1,17 \\ 0,19 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_c(3) \\ i_L(3) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1,17 \\ 0,19 \end{bmatrix}$$

$$Y(2) = y(2) = [0 \quad 3] \times X(2) \Rightarrow y(2) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(2) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,08 \end{bmatrix} \Rightarrow y(2) = 0,24 \Rightarrow \boxed{v_o(2) = 0,24\ V}$$

Para k = 3

$$X(4) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times X(3) + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [u(3)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(4) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1,17 \\ 0,19 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(4) \cong \begin{bmatrix} 1,49 \\ 0,31 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(4) \\ x_2(4) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1,49 \\ 0,31 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_c(4) \\ i_L(4) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1,49 \\ 0,31 \end{bmatrix}$$

$$Y(3) = y(3) = [0 \quad 3] \times X(3) \Rightarrow y(3) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(3) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} 1,17 \\ 0,19 \end{bmatrix} \Rightarrow y(3) = 0,57 \Rightarrow \boxed{v_o(3) = 0,57\ V}$$

Para k = 4

$$X(5) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times X(4) + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [u(4)] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X(5) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1,49 \\ 0,31 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [1] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X(5) \cong \begin{bmatrix} 1,77 \\ 0,42 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1(5) \\ x_2(5) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1,77 \\ 0,42 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} v_c(5) \\ i_L(5) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1,77 \\ 0,42 \end{bmatrix}$$

$$Y(4) = y(4) = [0 \quad 3] \times X(4) \Longrightarrow y(4) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} x_1(4) \\ x_2(4) \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y(4) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} 1,49 \\ 0,31 \end{bmatrix} \Longrightarrow y(4) = 0,93 \Longrightarrow \boxed{v_o(4) = 0,93 \ V}$$

Para k = 5

$$X(6) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times X(5) + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [u(5)] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X(6) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1,77 \\ 0,42 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [1] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X(6) \cong \begin{bmatrix} 2 \\ 0,52 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1(6) \\ x_2(6) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 2 \\ 0,52 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} v_c(6) \\ i_L(6) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 2 \\ 0,52 \end{bmatrix}$$

$$Y(5) = y(5) = [0 \quad 3] \times X(5) \Longrightarrow y(5) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} x_1(5) \\ x_2(5) \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y(5) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} 1,77 \\ 0,42 \end{bmatrix} \Longrightarrow y(5) = 1,26 \Longrightarrow \boxed{v_o(5) = 1,26 \ V}$$

Para k = 6

$$X(7) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times X(6) + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [u(6)] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X(7) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 0,52 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [1] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X(7) \cong \begin{bmatrix} 2,19 \\ 0,61 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1(7) \\ x_2(7) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 2,19 \\ 0,61 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} v_c(7) \\ i_L(7) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 2,19 \\ 0,61 \end{bmatrix}$$

$$Y(6) = y(6) = [0 \quad 3] \times X(6) \Longrightarrow y(6) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} x_1(6) \\ x_2(6) \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y(6) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} 2 \\ 0,52 \end{bmatrix} \Longrightarrow y(6) = 1,56 \Longrightarrow \boxed{v_o(6) = 1,56 \ V}$$

Para k = 7

$$X(8) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times X(7) + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [u(7)] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X(8) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2,19 \\ 0,61 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [1] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X(8) \cong \begin{bmatrix} 2,35 \\ 0,68 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1(8) \\ x_2(8) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 2,35 \\ 0,68 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} v_c(8) \\ i_L(8) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 2,35 \\ 0,68 \end{bmatrix}$$

$$Y(7) = y(7) = [0 \quad 3] \times X(7) \Longrightarrow y(7) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} x_1(7) \\ x_2(7) \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y(7) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} 2,19 \\ 0,61 \end{bmatrix} \Longrightarrow y(7) = 1,83 \Longrightarrow \boxed{v_o(7) = 1,83 \ V}$$

Para k = 8

$$X(9) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix} \times X(8) + \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [u(8)] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X(9) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2{,}35 \\ 0{,}68 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [1] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X(9) \cong \begin{bmatrix} 2{,}48 \\ 0{,}74 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1(9) \\ x_2(9) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 2{,}48 \\ 0{,}74 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} v_c(9) \\ i_L(9) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 2{,}48 \\ 0{,}74 \end{bmatrix}$$

$$Y(8) = y(8) = [0 \quad 3] \times X(8) \Longrightarrow y(8) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} x_1(8) \\ x_2(8) \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y(8) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} 2{,}35 \\ 0{,}68 \end{bmatrix} \Longrightarrow y(8) = 2{,}04 \Longrightarrow \boxed{v_o(8) = 2{,}04 \text{ V}}$$

Para k = 9

$$X(10) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix} \times X(9) + \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [u(9)] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X(10) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2{,}48 \\ 0{,}74 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [1] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X(10) \cong \begin{bmatrix} 2{,}58 \\ 0{,}79 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1(10) \\ x_2(10) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 2{,}58 \\ 0{,}79 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} v_c(10) \\ i_L(10) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 2{,}58 \\ 0{,}79 \end{bmatrix}$$

$$Y(9) = y(9) = [0 \quad 3] \times X(9) \Longrightarrow y(9) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} x_1(9) \\ x_2(9) \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y(9) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} 2{,}48 \\ 0{,}74 \end{bmatrix} \Longrightarrow y(9) = 2{,}22 \Longrightarrow \boxed{v_o(9) = 2{,}22 \text{ V}}$$

Para k = 10

$$X(11) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix} \times X(10) + \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [u(10)] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X(11) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2{,}58 \\ 0{,}79 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [1] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X(11) \cong \begin{bmatrix} 2{,}66 \\ 0{,}83 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1(11) \\ x_2(11) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 2{,}66 \\ 0{,}83 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} v_c(11) \\ i_L(11) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 2{,}66 \\ 0{,}83 \end{bmatrix}$$

$$Y(10) = y(10) = [0 \quad 3] \times X(10) \Longrightarrow y(10) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} x_1(10) \\ x_2(10) \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y(10) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} 2{,}58 \\ 0{,}79 \end{bmatrix} \Longrightarrow y(10) = 2{,}37 \Longrightarrow \boxed{v_o(10) = 2{,}37 \text{ V}}$$

Para k = 11

$$X(12) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix} \times X(11) + \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [u(11)] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X(12) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2{,}66 \\ 0{,}83 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [1] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X(12) \cong \begin{bmatrix} 2{,}73 \\ 0{,}86 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1(12) \\ x_2(12) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 2{,}73 \\ 0{,}86 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} v_c(12) \\ i_L(12) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 2{,}73 \\ 0{,}86 \end{bmatrix}$$

$$Y(11) = y(11) = [0 \quad 3] \times X(11) \Longrightarrow y(11) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} x_1(11) \\ x_2(11) \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y(11) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} 2{,}66 \\ 0{,}83 \end{bmatrix} \Longrightarrow y(11) = 2{,}49 \Longrightarrow \boxed{v_o(11) = 2{,}49 \text{ V}}$$

Para k = 12

$$X(13) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix} \times X(12) + \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [u(12)] \Longrightarrow$$

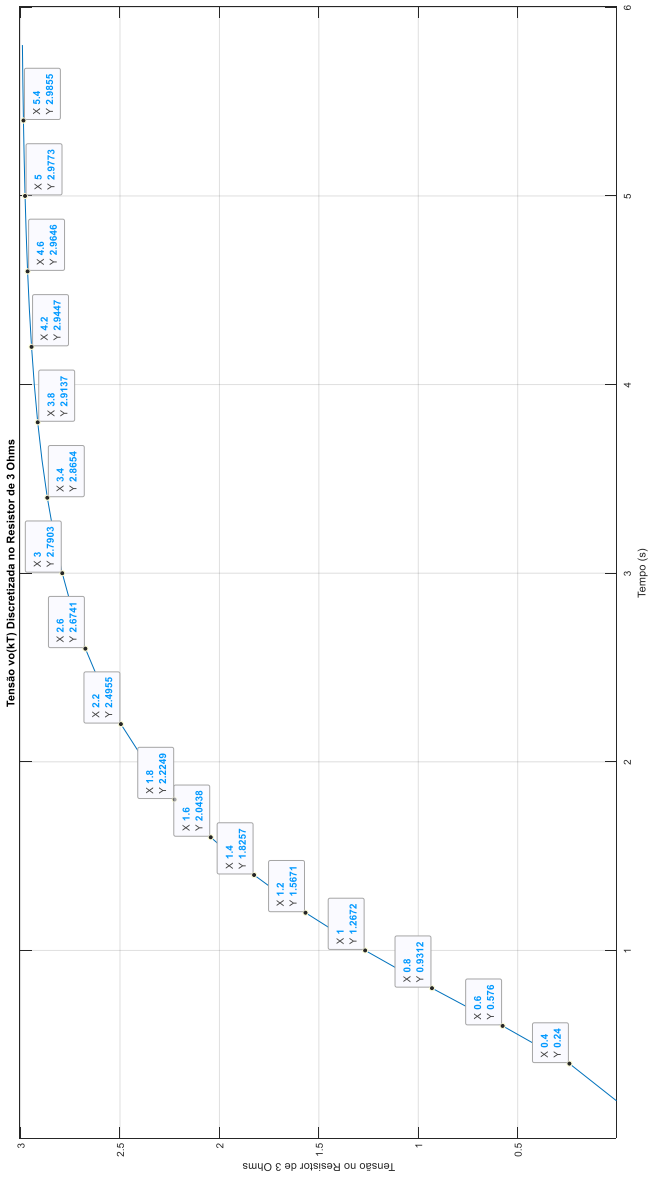
$$\Longrightarrow X(13) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2{,}73 \\ 0{,}86 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [1] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X(13) \cong \begin{bmatrix} 2{,}79 \\ 0{,}89 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1(13) \\ x_2(13) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 2{,}79 \\ 0{,}89 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} v_c(13) \\ i_L(13) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 2{,}79 \\ 0{,}89 \end{bmatrix}$$

$$Y(12) = y(12) = [0 \quad 3] \times X(12) \Longrightarrow y(12) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} x_1(12) \\ x_2(12) \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y(12) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} 2{,}73 \\ 0{,}86 \end{bmatrix} \Longrightarrow y(12) = 2{,}58 \Longrightarrow \boxed{v_o(12) = 2{,}58 \text{ V}}$$

O gráfico a seguir ilustra a variação da tensão $v_o(kT)$ no resistor de 3 Ohms.



Exemplo: Para o exemplo anterior, consideremos agora as condições iniciais iguais a $i_L(0) = v_c(0) = 0$ e $i(t) = 0u(t)$ A, determine a saída $y(kT) = v_o(kT)$ até a 13ª amostragens será:

Para k = 0

$$X(1) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times X(0) + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [u(0)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(1) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(1) \cong \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_c(1) \\ i_L(1) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,6\ \text{V} \\ 0,6\ \text{A} \end{bmatrix}$$

$$Y(0) = y(0) = [0 \quad 3] \times X(0) \Rightarrow y(0) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(0) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow y(0) = 3 \Rightarrow \boxed{v_o(0) = 3\ \text{V}}$$

Para k = 1

$$X(2) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times X(1) + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [u(1)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(2) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(2) \cong \begin{bmatrix} 0,36 \\ 0,36 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,36 \\ 0,36 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_c(2) \\ i_L(2) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,36\ \text{V} \\ 0,36\ \text{A} \end{bmatrix}$$

$$Y(1) = y(1) = [0 \quad 3] \times X(1) \Rightarrow y(1) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(1) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,6 \end{bmatrix} \Rightarrow y(1) = 1,8 \Rightarrow \boxed{v_o(1) = 1,8\ \text{V}}$$

Para k = 2

$$X(3) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times X(2) + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [u(2)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(3) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,36 \\ 0,36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(3) \cong \begin{bmatrix} 0,22 \\ 0,22 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,22 \\ 0,22 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_c(3) \\ i_L(3) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,22\ \text{V} \\ 0,22\ \text{A} \end{bmatrix}$$

$$Y(2) = y(2) = [0 \quad 3] \times X(2) \Rightarrow y(2) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(2) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} 0,36 \\ 0,36 \end{bmatrix} \Rightarrow y(2) = 1,08 \Rightarrow \boxed{v_o(2) = 1,08\ \text{V}}$$

Para k = 3

$$X(4) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times X(3) + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [u(3)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(4) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,22 \\ 0,22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(4) \cong \begin{bmatrix} 0,13 \\ 0,13 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(4) \\ x_2(4) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,13 \\ 0,13 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_c(4) \\ i_L(4) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,13\,V \\ 0,13\,A \end{bmatrix}$$

$$Y(3) = y(3) = [0 \quad 3] \times X(3) \Rightarrow y(3) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(3) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} 0,22 \\ 0,22 \end{bmatrix} \Rightarrow y(3) = 0,66 \Rightarrow \boxed{v_o(3) = 0,66\,V}$$

Para k = 4

$$X(5) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times X(4) + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [u(4)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(5) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,13 \\ 0,13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(5) \cong \begin{bmatrix} 0,08 \\ 0,08 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(5) \\ x_2(5) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,08 \\ 0,08 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_c(5) \\ i_L(5) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,08\,V \\ 0,08\,A \end{bmatrix}$$

$$Y(4) = y(4) = [0 \quad 3] \times X(4) \Rightarrow y(4) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} x_1(4) \\ x_2(4) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(4) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} 0,13 \\ 0,13 \end{bmatrix} \Rightarrow y(3) = 0,39 \Rightarrow \boxed{v_o(3) = 0,39\,V}$$

Para k = 5

$$X(6) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times X(5) + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [u(5)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(6) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,08 \\ 0,08 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(6) \cong \begin{bmatrix} 0,05 \\ 0,05 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(6) \\ x_2(6) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,05 \\ 0,05 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_c(6) \\ i_L(6) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,05\,V \\ 0,05\,A \end{bmatrix}$$

$$Y(5) = y(5) = [0 \quad 3] \times X(5) \Rightarrow y(5) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} x_1(5) \\ x_2(5) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(5) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} 0,08 \\ 0,08 \end{bmatrix} \Rightarrow y(5) = 0,24 \Rightarrow \boxed{v_o(5) = 0,24\,V}$$

Para k = 6

$$X(7) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times X(6) + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [u(6)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(7) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,05 \\ 0,05 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(7) \cong \begin{bmatrix} 0,03 \\ 0,03 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(7) \\ x_2(7) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,03 \\ 0,03 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_c(7) \\ i_L(7) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,03\,V \\ 0,03\,A \end{bmatrix}$$

$$Y(6) = y(6) = [0 \quad 3] \times X(6) \Rightarrow y(6) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} x_1(6) \\ x_2(6) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(6) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} 0,05 \\ 0,05 \end{bmatrix} \Rightarrow y(6) = 0,15 \Rightarrow \boxed{v_o(6) = 0,15\,V}$$

Para k = 7

$$X(8) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times X(7) + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [u(7)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(8) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,03 \\ 0,03 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(8) \cong \begin{bmatrix} 0,02 \\ 0,02 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(8) \\ x_2(8) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,02 \\ 0,02 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_c(8) \\ i_L(8) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,02\,V \\ 0,02\,A \end{bmatrix}$$

$$Y(7) = y(7) = [0 \quad 3] \times X(7) \Rightarrow y(7) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} x_1(7) \\ x_2(7) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(7) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} 0,03 \\ 0,03 \end{bmatrix} \Rightarrow y(7) = 0,09 \Rightarrow \boxed{v_o(7) = 0,09\,V}$$

Para k = 8

$$X(9) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times X(8) + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [u(8)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(9) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,02 \\ 0,02 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(9) \cong \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0,01 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(9) \\ x_2(9) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0,01 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_c(9) \\ i_L(9) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,01\,V \\ 0,01\,A \end{bmatrix}$$

$$Y(8) = y(8) = [0 \quad 3] \times X(8) \Rightarrow y(8) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} x_1(8) \\ x_2(8) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(8) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} 0,02 \\ 0,02 \end{bmatrix} \Rightarrow y(8) = 0,06 \Rightarrow \boxed{v_o(8) = 0,06\,V}$$

Para k = 9

$$X(10) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times X(9) + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [u(9)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(10) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0,01 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(10) \cong \begin{bmatrix} 0,006 \\ 0,006 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(10) \\ x_2(10) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,006 \\ 0,006 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_c(10) \\ i_L(10) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,006\,V \\ 0,006\,A \end{bmatrix}$$

$$Y(9) = y(9) = [0 \quad 3] \times X(9) \Rightarrow y(9) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} x_1(9) \\ x_2(9) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(9) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0,01 \end{bmatrix} \Rightarrow y(9) = 0,03 \Rightarrow \boxed{v_o(9) = 0,03\,V}$$

Para k = 10

$$X(11) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times X(10) + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [u(10)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(11) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,006 \\ 0,006 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(11) \cong \begin{bmatrix} 0,004 \\ 0,004 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(11) \\ x_2(11) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,004 \\ 0,004 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_c(11) \\ i_L(11) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,004\,V \\ 0,004\,A \end{bmatrix}$$

$$Y(10) = y(10) = [0 \quad 3] \times X(10) \Rightarrow y(10) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} x_1(10) \\ x_2(10) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(10) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} 0,006 \\ 0,006 \end{bmatrix} \Rightarrow y(10) = 0,02 \Rightarrow \boxed{v_o(10) = 0,02\,V}$$

Para k = 11

$$X(12) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times X(11) + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [u(11)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(12) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,004 \\ 0,004 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(12) \cong \begin{bmatrix} 0,002 \\ 0,002 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(12) \\ x_2(12) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,002 \\ 0,002 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_c(12) \\ i_L(12) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,002\,V \\ 0,002\,A \end{bmatrix}$$

$$Y(11) = y(11) = [0 \quad 3] \times X(11) \Rightarrow y(11) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} x_1(11) \\ x_2(11) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(11) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} 0,004 \\ 0,004 \end{bmatrix} \Rightarrow y(11) = 0,01 \Rightarrow \boxed{v_o(11) = 0,01\,V}$$

Para k = 12

$$X(13) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times X(12) + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [u(12)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(13) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,002 \\ 0,002 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times [0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(13) \cong \begin{bmatrix} 0,001 \\ 0,001 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(13) \\ x_2(13) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,001 \\ 0,001 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_c(13) \\ i_L(13) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,001\,V \\ 0,001\,A \end{bmatrix}$$

$$Y(12) = y(12) = [0 \quad 3] \times X(12) \Rightarrow y(12) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} x_1(12) \\ x_2(12) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(12) = [0 \quad 3] \times \begin{bmatrix} 0,002 \\ 0,002 \end{bmatrix} \Rightarrow y(12) = 0,006 \Rightarrow \boxed{v_o(12) = 0,006\,V}$$

O gráfico a seguir ilustra a variação da tensão $v_o(kT)$ no resistor de 3 Ohms.