# ELT221 - Circuitos Elétricos II

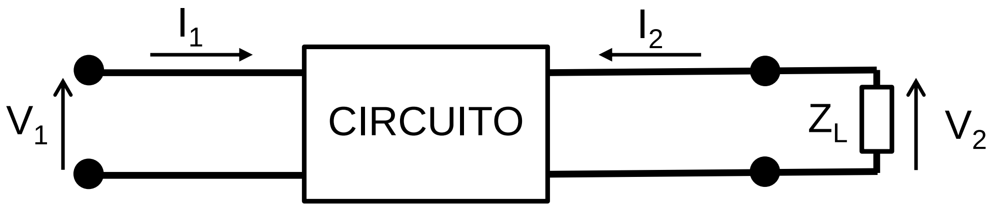
**Prof. Tarcísio Pizziolo**

## Aula 4

### 4) Quadripolo com Carregamento (sob Carga)

Quando é colocada uma **carga** nos terminais do quadripolo podemos determinar as **Funções de Transferência** a partir de seus parâmetros.

Seja o **Quadripolo** carregado:




Função de Transferência $\mathbf{F(s) = \frac{V_2}{V_1}}$:

**Modelo π com parâmetros de admitância Y's:**

$$\begin{cases} \mathbf{I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2} \text{..................(1)} \\ \mathbf{I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2} \text{..................(2)} \end{cases}$$

**Fazendo** $\mathbf{I_2 = -\frac{V_2}{Z_L}}$ **em (2) temos:**

$$\mathbf{I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{V_2}{Z_L} = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \quad \Rightarrow}$$

$$\mathbf{(-\frac{1}{Z_L} - Y_{22})V_2 = Y_{21}V_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{V_2}{V_1} = \frac{-Y_{21}}{(\frac{1}{Z_L} + Y_{22})}}}$$

Função de Transferência $\mathbf{F(s) = \frac{I_2}{I_1}}$:

**Modelo T com parâmetros de impedância Z's:**

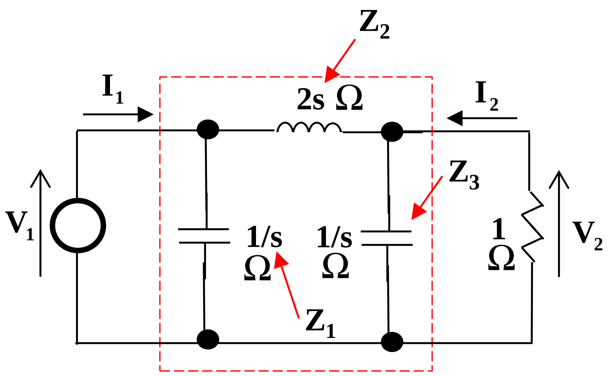
$$\begin{cases} \mathbf{V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2} \text{..................(1)} \\ \mathbf{V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2} \text{..................(2)} \end{cases}$$

**Fazendo** $\mathbf{V_2 = -Z_L I_2}$ **em (2) temos:**

$$\mathbf{V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \quad \Rightarrow \quad -Z_L I_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \quad \Rightarrow}$$

$$\mathbf{(-Z_L - Z_{22})I_2 = Z_{21}I_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{I_2}{I_1} = \frac{-Z_{21}}{(Z_L + Z_{22})}}}$$

**Exemplo:** Determinar a Função de Transferência $\frac{V_2}{V_1}$ para o circuito dado:




$$F(s)=\frac{V_2}{V_1}\Rightarrow \textbf{Configuração } \pi$$

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{-Y_{21}}{(\frac{1}{Z_L}+Y_{22})}$$

$$\textbf{Configuração} \quad \pi \quad \Rightarrow \begin{cases} Y_{11}=(Y_1+Y_2) \\ Y_{12}=(-Y_2) \\ Y_{21}=(-Y_2) \\ Y_{22}=(Y_2+Y_3) \end{cases}$$

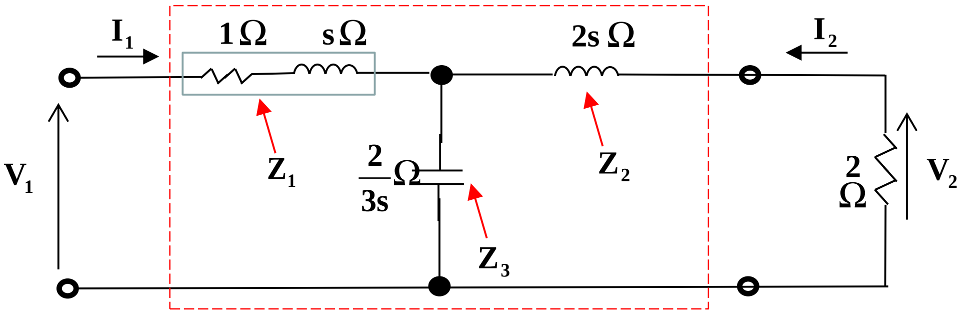
$$\begin{cases} Z_L=1\Omega \quad ; \quad Y_{21}=-Y_2=-\frac{1}{Z_2}=-\frac{1}{2s} \\ Y_{22}=(Y_2+Y_3)=\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}=\left(\frac{1}{2s}+s\right) \end{cases}$$

Então:

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{-Y_{21}}{(1+Y_{22})} \quad ; \quad Y_{21}=-\frac{1}{2s} \quad \textbf{e} \quad Y_{22}=\left(s+\frac{1}{2s}\right)$$

$$\textbf{Substituindo :} \quad \frac{V_2}{V_1}=\frac{\frac{1}{2s}}{1+\left(s+\frac{1}{2s}\right)} \Rightarrow \boxed{\frac{V_2}{V_1}=\frac{1}{(2s^2+2s+1)}}$$

**Exemplo:** Determinar a Função de Transferência $F(s)=\frac{I_2}{I_1}$ para o circuito dado.




$$F(s)=\frac{I_2}{I_1}\Rightarrow \textbf{Configuração T}$$

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{-Z_{21}}{(Z_L+Z_{22})}$$

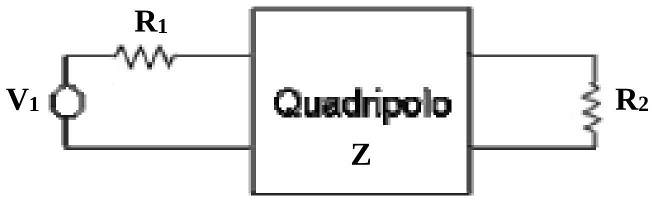
$$\textbf{Configuração} \quad \textbf{T} \quad \Rightarrow \begin{cases} Z_{11}=(Z_1+Z_3) \\ Z_{12}=(Z_3) \\ Z_{21}=(Z_3) \\ Z_{22}=(Z_2+Z_3) \end{cases}$$

**Então :**

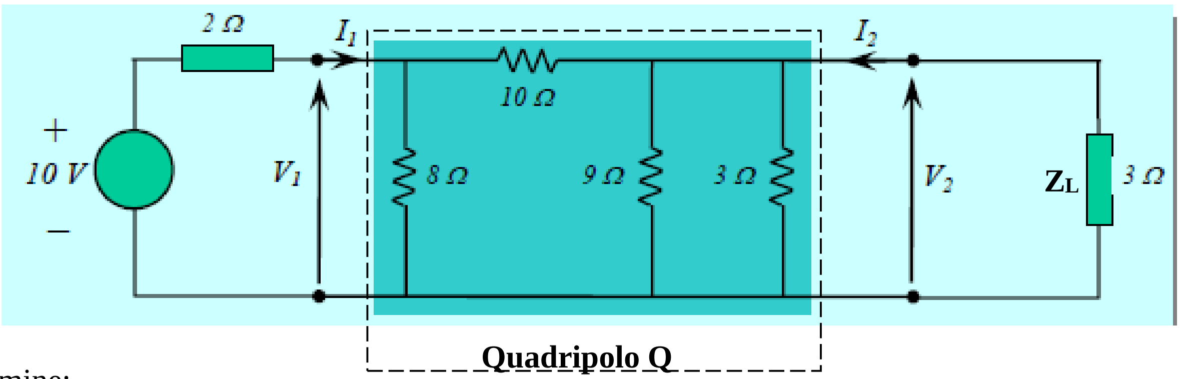
$$\begin{cases} Z_L=2\Omega \quad ; \quad Z_{21}=Z_3=\frac{2}{3s} \\ Z_{22}=(Z_2+Z_3)=2s+\frac{2}{3s}\Rightarrow Z_{22}=\left(\frac{6s^2+2}{3s}\right) \end{cases} ; \quad \frac{I_2}{I_1}=-\frac{\frac{2}{3s}}{\left(2+\frac{6s^2+2}{3s}\right)} \Rightarrow \boxed{\frac{I_2}{I_1}=-\frac{2}{(6s^2+6s+2)}}$$

**Exercício:** Calcule a **potência** entregue ao resistor $\mathbf{R_2}$ de valor igual a **100 Ω**, considerando os seguintes dados: $\mathbf{V_1 = 120\ V}$ e **R1 = 40 Ω**. (**P = 11,75 W**)

$$Z = \begin{bmatrix} 50 & 10 \\ 30 & 20 \end{bmatrix} \Omega$$




**Exemplo:** O circuito abaixo representa um **Quadripolo Q** alimentado por uma fonte de tensão $\mathbf{V_g = 10}$ ***V*** com resistência interna de $\mathbf{R_g = 2\ \Omega}$ o qual está alimentando uma carga $\mathbf{Z_L = 3\ \Omega}$.




Determine:

**a)** (2 pts) $F_1(s) = I_2(s)/I_1(s)$; **b)** (2 pts) $F_2(s) = V_2(s)/V_1(s)$ **c)** (2 pts) $F_3(s) = V_2(s)/V_g(s)$

**Cálculos dos parâmetros Z's:**

$$z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = \left((3//9)+10\right)//8 = 4{,}840\ \Omega$$

$$z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{\dfrac{(3//9)}{(3//9)+10}V_1}{I_1} = \frac{(3//9)}{(3//9)+10}\cdot\frac{V_1}{I_1} = 0{,}184\cdot 4{,}84 = 0{,}889\ \Omega$$

$$z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = \left(3//9//(10+8)\right) = 2{,}0\ \Omega$$

$$z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{\dfrac{8}{8+10}V_2}{I_2} = \frac{8}{8+10}\cdot\frac{V_2}{I_2} = 0{,}444\cdot 2{,}0 = 0{,}889\ \Omega$$

**Equações do circuito contendo o Quadriplo Q:**

$$\begin{cases} V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 & \text{..........................................Equação 1} \\ V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 & \text{..........................................Equação 2} \\ V_1 = V_g - Z_g I_1 & \text{..........................................Equação 3} \\ V_2 = -Z_L I_2 & \text{..........................................Equação 4} \end{cases}$$

**a) Determinação de $F_1(s) = I_2(s)/I_1(s)$.**

Da Equação 2:

$$I_2 = \frac{V_2 - z_{21}I_1}{z_{22}}$$

; Substituindo $V_2 = -Z_L.I_2$ da Equação 4:

$$I_2 = \frac{-Z_L I_2 - z_{21}I_1}{z_{22}} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = -\frac{z_{21}}{z_{22}+Z_L}$$

Substituindo os valores:

$$\mathbf{\frac{I_2}{I_1} = -\frac{z_{21}}{z_{22}+Z_L} = -\frac{0{,}889}{2+3} = -0{,}178\ \Omega}$$

**b) Determinação de $F_2(s) = V_2(s)/V_1(s)$.**

Da Equação 2 com a substituição de $V_2 = -Z_L.I_2$:

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}\left(-\frac{V_2}{Z_L}\right) = z_{21}I_1 - \frac{z_{22}}{Z_L}V_2$$ ..........................................Equação 5

Da Equação 1 com a substituição de $V_2 = -Z_L.I_2$ da Equação 4:

$$z_{11}I_1 = V_1 - z_{12}I_2 = V_1 - z_{12}\left(-\frac{V_2}{Z_L}\right) \Rightarrow I_1 = \frac{1}{z_{11}}\left(V_1 + \frac{z_{12}}{Z_L}V_2\right)$$ ..................................Equação 6

Da Equação 2 com a substituição de $I_1$ da Equação 6 e $V_2 = -Z_L.I_2$ da Equação 4:

$$V_2 = z_{21}\left[\frac{1}{z_{11}}\left(V_1 + \frac{z_{12}}{Z_L}V_2\right)\right] - \frac{z_{22}}{Z_L}V_2 \Rightarrow V_2 + \frac{z_{22}}{Z_L}V_2 - \frac{z_{21}z_{12}}{z_{11}Z_L}V_2 = \frac{z_{21}}{z_{11}}V_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{z_{22}}{Z_L} - \frac{z_{21}z_{12}}{z_{11}Z_L}\right)V_2 = \frac{z_{21}}{z_{11}}V_1 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{z_{21}}{z_{11}}}{1 + \frac{z_{22}}{Z_L} - \frac{z_{21}z_{12}}{z_{11}Z_L}} = \frac{\frac{z_{21}}{z_{11}}}{\frac{z_{11}Z_L + z_{11}z_{22} - z_{21}z_{12}}{z_{11}Z_L}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{z_{21}Z_L}{z_{11}\left(z_{22}+Z_L\right) - z_{21}z_{12}} = \frac{z_{21}Z_L}{z_{11}Z_L + \Delta z}$$ .........................Equação 7

Substituindo os valores:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{z_{21}Z_L}{z_{11}Z_L + \Delta z} = \frac{0{,}889 \cdot 3}{4{,}84 \cdot 3 + 8{,}89} = 0{,}114$$

**c) Determinação de $F_3(s) = V_2(s)/V_g(s)$.**

Da Equação 3 com a substituição da Equação 6:

$$\mathbf{V_1 = V_g - Z_g.I_1 \Rightarrow V_1 = V_g - Z_g.[\frac{1}{z_{11}}(V_1 + \frac{z_{12}}{Z_L}.V_2)]}$$

Substituindo $V_1$ em função de $V_2$ da Equação 7:

$$\mathbf{(\frac{z_{11}z_L + \Delta_Z}{z_{21}.Z_L}).V_2 = V_g - \frac{Z_g}{z_{11}}.(\frac{z_{11}Z_L + \Delta_Z}{z_{21}Z_L} + \frac{z_{21}}{Z_L}).V_2 \Rightarrow}$$

$$\mathbf{\Rightarrow \frac{V_2}{V_g} = \frac{z_{21}Z_L}{[(z_{11}+Z_g)(z_{22}+Z_L) - z_{21}z_{12}]}}$$

Substituindo os valores:

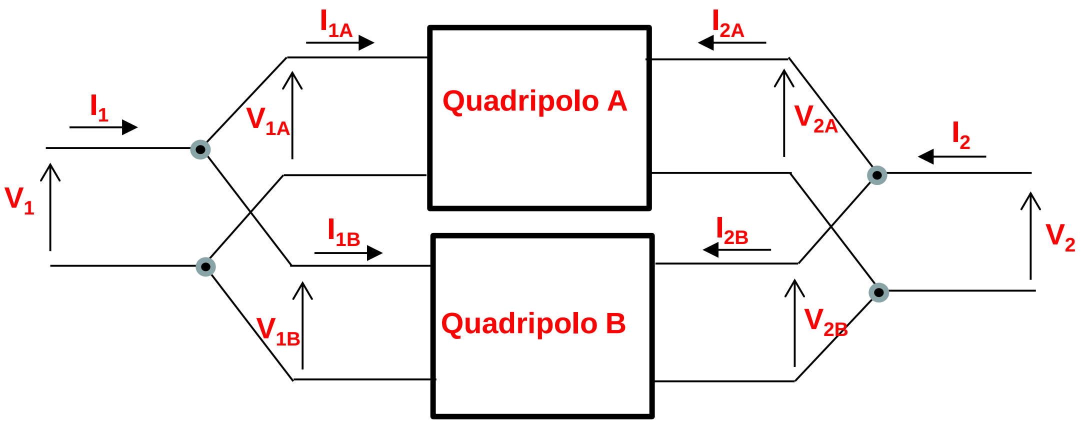
$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{z_{21}Z_L}{\left(z_{11}+Z_g\right)\left(z_{22}+Z_L\right) - z_{21}z_{12}} = \frac{0{,}889 \cdot 3}{\left(4{,}84+2\right)\left(2+3\right) - 0{,}889^2} = 0{,}080$$

## 4.1) Associação de Quadripolos

### a) Em Paralelo

- As admitâncias ***Y's*** se somam (**circuito em paralelo**).
- Utilizamos **V** como entrada porque em paralelo a tensão será a mesma para os dois quadripolos.

Sejam os Quadripolos:

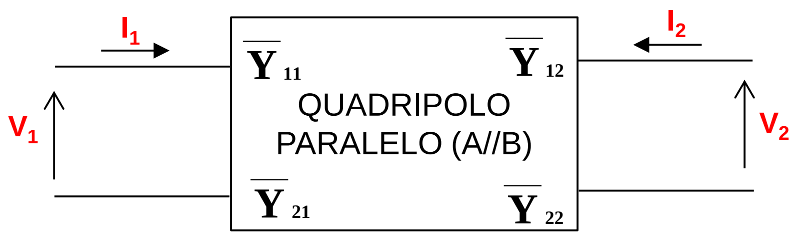



$$\begin{cases} V_1 = V_{1A} = V_{1B} \\ V_2 = V_{2A} = V_{2B} \\ I_1 = I_{1A} + I_{1B} \\ I_2 = I_{2A} + I_{2B} \end{cases}$$

$$\textbf{Temos que :} \begin{cases} I_{1A} = Y_{11A}V_{1A} + Y_{12A}V_{2A} \\ I_{2A} = Y_{21A}V_{1A} + Y_{22A}V_{2A} \end{cases}$$

$$\textbf{e} \quad \begin{cases} I_{1B} = Y_{11B}V_{1b} + Y_{12B}V_{2B} \\ I_{2B} = Y_{21B}V_{1B} + Y_{22B}V_{2B} \end{cases}$$

Substituindo tem-se:

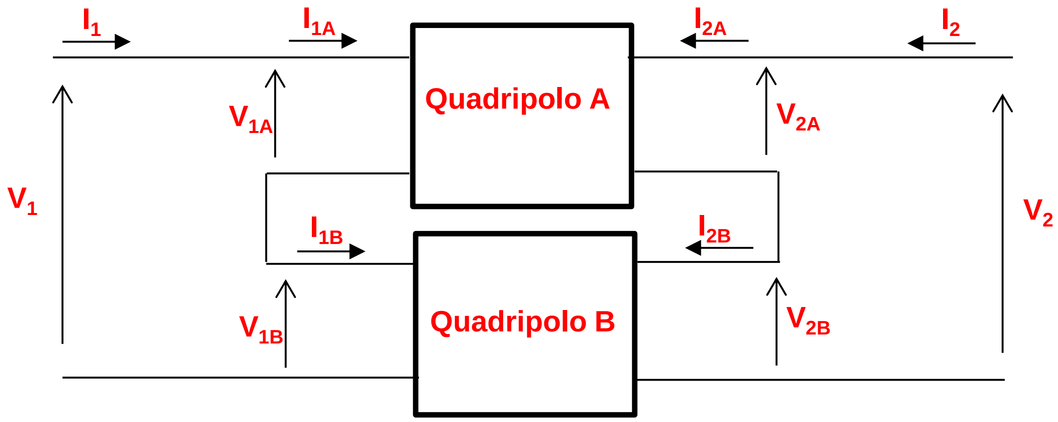



$$\begin{cases} I_1 = \overbrace{(Y_{11A} + Y_{11B})}^{\overline{Y}_{11}}V_1 + \overbrace{(Y_{12A} + Y_{12B})}^{\overline{Y}_{12}}V_2 \\ I_2 = \underbrace{(Y_{21A} + Y_{21B})}_{\overline{Y}_{21}}V_1 + \underbrace{(Y_{22A} + Y_{22B})}_{\overline{Y}_{22}}V_2 \end{cases}$$

**b) Em Série**

- As impedâncias ***Z's*** se somam (**circuito série**).
- Utilizamos **I** como entrada porque em série a corrente será a mesma para os dois quadripolos.

Sejam os Quadripolos:

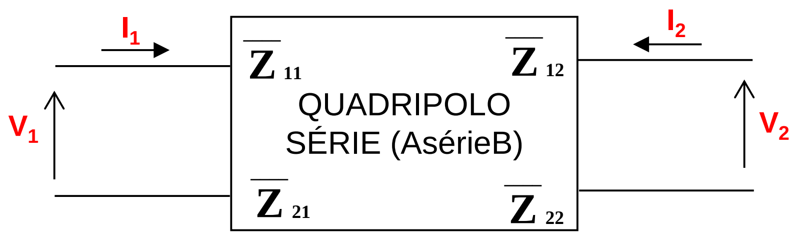



$$\begin{cases} V_1 = V_{1A} + V_{1B} \\ V_2 = V_{2A} + V_{2B} \\ I_1 = I_{1A} = I_{1B} \\ I_2 = I_{2A} = I_{2B} \end{cases}$$

$$\textbf{Temos que :} \begin{cases} V_{1A} = Z_{11A} I_{1A} + Z_{12A} I_{2A} \\ V_{2A} = Z_{21A} I_{1A} + Z_{22A} I_{2A} \end{cases}$$

$$\textbf{e} \quad \begin{cases} V_{1B} = Z_{11B} I_{1B} + Z_{12B} I_{2B} \\ V_{2B} = Z_{21B} I_{1B} + Z_{22B} I_{2B} \end{cases}$$

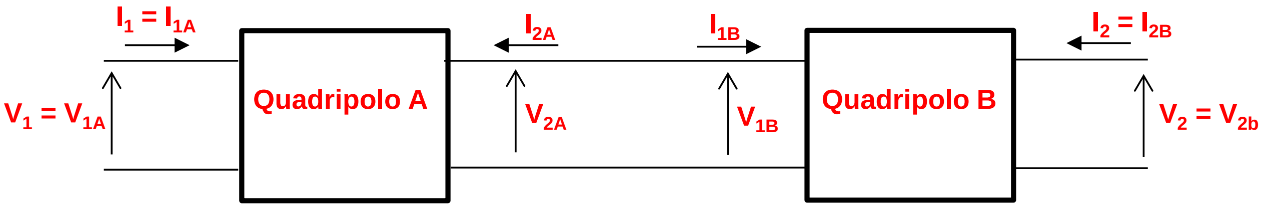
Substituindo tem-se:




$$\begin{cases} V_1 = \overbrace{\left(Z_{11A} + Z_{11B}\right)}^{\overline{Z}_{11}} I_1 + \overbrace{\left(Z_{12A} + Z_{12B}\right)}^{\overline{Z}_{12}} I_2 \\ V_2 = \underbrace{\left(Z_{21A} + Z_{21B}\right)}_{\overline{Z}_{21}} I_1 + \underbrace{\left(Z_{22A} + Z_{22B}\right)}_{\overline{Z}_{22}} I_2 \end{cases}$$

### c) Em Cascata

- A saída do Quadripolo **A** é a entrada do Quadripolo **B**.
- Utilizamos $\mathbf{V_2}$ e $\mathbf{I_2}$ como entradas e $\mathbf{V_1}$ e $\mathbf{I_1}$ como saídas porque em cascata tanto as tensões como as correntes são diferentes para os quadripolos.




Temos que: $\begin{cases} V_1 = AV_2 - BI_2 \\ I_1 = CV_2 - DI_2 \end{cases} \quad \therefore \quad$ **Parâmetros de Transmissão A, B, C e D.**

$$\textbf{Daí:}\quad V_1 = V_{1A} = A_A V_{2A} - B_A I_{2A} = A_A V_{1B} + B_A I_{1B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 = A_A\left(A_B V_{2B} - B_B I_{2B}\right) + B_A\left(C_B V_{2B} - D_B I_{2B}\right) \Rightarrow$$

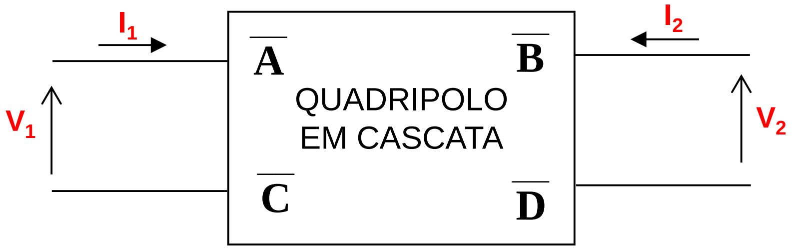
$$\Rightarrow V_1 = \left(A_A A_B + B_A C_B\right) V_{2B} - \left(A_A B_B + B_A D_B\right) I_{2B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 = \underbrace{\left(A_A A_B + B_A C_B\right)}_{\bar{A}} V_2 - \underbrace{\left(A_A B_B + B_A D_B\right)}_{\bar{B}} I_2$$

Analogamente resolve-se para a equação de $\mathbf{I_1}$ resultando em:

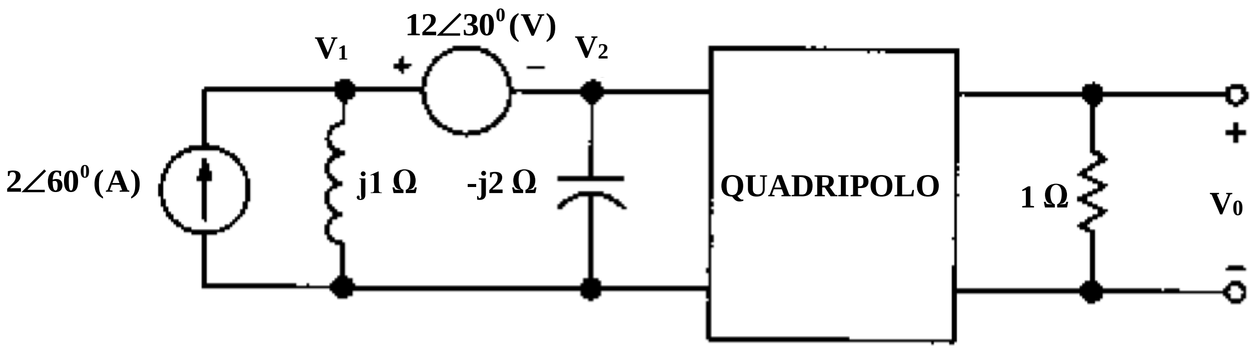
$$I_1 = \underbrace{\left(C_A A_B + D_A C_B\right)}_{\bar{C}} V_2 - \underbrace{\left(C_A B_B + D_A D_B\right)}_{\bar{D}} I_2$$

A **Matriz de Transmissão** completa é dada por: $\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_A & B_A \\ C_A & D_A \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_B & B_B \\ C_B & D_B \end{bmatrix}$

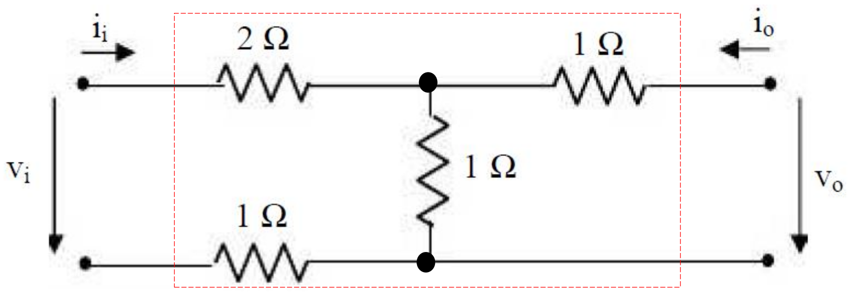



$$\begin{cases} V_1 = \bar{A} V_2 - \bar{B} I_2 \\ I_1 = \bar{C} V_2 - \bar{D} I_2 \end{cases}$$

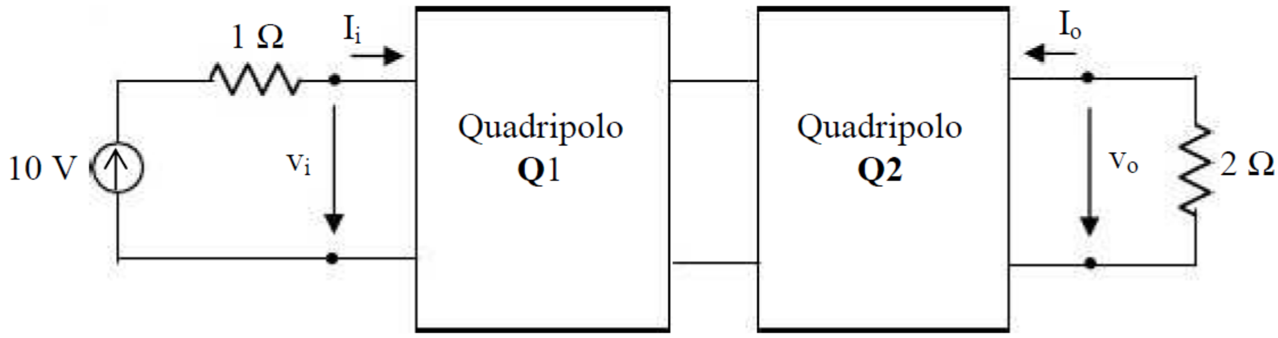
**Exercício:** Determine a tensão de saída $\mathbf{V_o}$ no circuito a seguir se os parâmetros **Z** para o quadripolo sejam $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.




**Exercício:** Considere um quadripolo **Q1** dado pelo circuito a seguir.




Outro quadripolo **Q2 é** descrito pelos seguintes parâmetros de impedancia $\mathbf{Z_{11} = 1\Omega}$, $\mathbf{Z_{12} = 1\Omega}$, $\mathbf{Z_{21} = 1\Omega}$ e $\mathbf{Z_{22} = 2\Omega}$. Estes quadripolos **Q1** e **Q2** são associados da seguinte forma:




a) Determine os parâmetros de impedância do quadripolo **Q1**.
b) Determine os parâmetros de impedância da associação dos dois quadripolos.
c) Com base no resultado anterior da associação dos dois quadripolos, determine o ganho de tensão **Vo/Vi**.