Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática

Lista de MAT 141

1) Resolva as integrais:

a) $\int \sqrt{1-4x^2}\,dx$	b) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	c) $\int \sqrt{9-4x^2}\,dx$
d) $\int \sqrt{9-(x-1)^2}\,dx$	e) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx$	f) $\int \frac{3x-2}{x^2+x+1}\,dx$
g) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$	h) $\int \frac{2x+1}{x^2+4x+5}\,dx$	i) $\int \frac{x^4+x+1}{x^3-x}\,dx$
j) $\int \frac{x+5}{x^3-4x^2+4x}\,dx$	l) $\int \frac{2}{x^3(x+2)}\,dx$	m) $\int \frac{4x^2+17x+13}{(x-1)(x^2+6x+10)}\,dx$
n) $\int \frac{3x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3}\,dx$	o) $\int_0^4 \left\|x^2-3x+2\right\|\,dx$	p) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 x\,dx$

Respostas: a) $\frac{1}{4}\left[\arcsin 2x + 2x\sqrt{1-4x^2}\right] + c$, b) $\frac{1}{2}\left[\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}\right] + c$, c) Faça $2x = 3\sin t$, d) $\frac{9}{2}\arcsin\frac{x-1}{3} + \frac{(x-1)\sqrt{9-(x-1)^2}}{2} + c$, e) $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + c$, f) $\frac{3}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{7}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, g) $\frac{\pi}{4}$, h) $\ln\left(x^2+4x+5\right) - 3\arctan(x+2) + c$ i) $\frac{x^2}{2} - \ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + c$ j) $\frac{5}{4}\ln|x| - \frac{5}{4}\ln|x-2| - \frac{7}{2(x-2)} + c$ l) $-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x+2| + c$, m) $2\ln|x-1| + \ln(x^2+6x+10) + \arctan(x+3) + c$, n) $2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + c$, o) $\frac{17}{3}$, p) $\frac{11}{24}$

2) Desenhe o conjunto R dado e calcule a área da região R.

a) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le x \le 1 \ e \ \sqrt{x} \le y \le 3\}$.

b) $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \ e \ \frac{1}{x^2} \le y \le 5 - 4x^2\right\}$.

c) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le y \le |\sin x|\}$, com $0 \le x \le 2\pi$.

d) onde R é a região limitada pelas curvas $y = -x^2 + x + 7$ e $y = |x-2|$.

Resposta: a) $\frac{7}{3}u.a$ b) $\frac{1}{3}u.a$ c) $4u.a$

3) Calcule a área da região compreendida entre $f(x) = x^3 + x^2$, $x = -2$ e $x = 1$.

Resposta: $\frac{25}{12}u.a$

4) Calcule a área da região:

a) delimitada pela parábola $x = y^2 - 1$ e pelo eixo y.

b) compreendida entre $x = y - y^2$ e $x = y^2 - 3$. Resposta: a) $\frac{4}{3}u.a$, b) $\frac{125}{24}$

5) Sejam $m, n \in \mathbb{N}^*$. Verifique que:

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m\,dx = \frac{m}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{m-1}\,dx$$

6) a) Determine α e β de modo que

$$\sin(3x)\sin(2x) = -\frac{1}{2}(\cos(\alpha x) - \cos(\beta x)).$$

Resposta: $\alpha = 5$ e $\beta = 1$

b) Calcule $\int \sin(3x)\sin(2x)\,dx$.

Resposta: $-\frac{\sin 5x}{10} + \frac{1}{2}\sin x + c$

7) Calcule $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)dx$.

Resposta: 0.

8) Seja f uma função par e contínua em $[-r, r]$, $r > 0$.

a) Mostre que $\int_{-r}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{r} f(x)dx$.

b) Conclua que $\int_{-r}^{r} f(x)dx = 2.\int_{0}^{r} f(x)dx$. Faça uma interpretação geométrica.

9) Seja f uma função ímpar e contínua em $[-r, r]$, $r > 0$.

a) Mostre que $\int_{-r}^{r} f(x)dx = 0$.

b) Calcule $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x^4 + x^2 + 1}dx$.

Resposta: 0

10) Suponha f'' contínua em $[a, b]$. Verifique que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \int_{a}^{b} (b-t)f''(t)dt.$$

11) Mostre que $\int_{1}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \geq \int_{1}^{\pi} \frac{dx}{1+x^4}$.

12) Prove que, se $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in I$, então

$$\left|\int_{a}^{b} f(x)dx\right| \leq M\,|b-a|, \text{ tal que } a, b \in I.$$

13) Calcule:

a) $\frac{d}{dx}\int_{1}^{x} \frac{dt}{1+t}$ b) $\frac{d}{dx}\int_{0}^{x^5} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt$ c) $\frac{d}{dx}\left[\int_{1}^{x^3} \sqrt[4]{t^3+1}dt + \int_{5}^{x^3} \sqrt[4]{t^3+1}\,dt\right]$

d) $\frac{d}{dx}\int_{0}^{2\cos x} \frac{t^2}{\sqrt{4+t^2}}dt$

Resposta: b) $\frac{5x^9}{\sqrt{1+x^{10}}}$, d) $\frac{4\sin x\cos^2 x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$

14) Mostre que $\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x} \frac{1}{t^2+3}dt = \frac{2}{x^2+3}$.

15) Seja $f(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2} \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$. Encontre o número crítico de f e mostre que f é crescente em $(0, +\infty)$ e é decrescente em $(-\infty, 0)$.

16) Mostre que o volume de um cilindro de raio r e altura h é $V = \pi r^2 h$.

17) Encontre o volume da esfera de raio r usando integração definida.
Resposta: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

18) Achar o volume do sólido gerado pela rotação da região sob a curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, em torno de eixo x, nos casos:
a) $f(x) = \ln x$, $a = 1$ e $b = 2$.
b) $f(x) = \sec \dfrac{\pi x}{2}$, $a = -0,5$ e $b = 0,5$.
Resposta: b) 4

19) Idem ao execício anterior, sendo a região limitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.
Resposta: $\frac{3}{10}\pi$

20) Ache o volume do sólido de revolução gerado quando a região limitada pela curva $y = x^3$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $x = 2$ é rotacionada em torno do eixo x.
Resposta: $\frac{127}{7}\pi$ unidades cúbicas.

21) Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $x = 4$, da região limitada pela reta $y = x - 2$ e pela parábola $x = 4 + 6y + 2y^2$.
Resposta: $\frac{333}{40}\pi$ unidades cúbicas.

22) Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y = -3$, da região limitada pela parábolas $y = x^2$ e $y = 1 + x - x^2$.
Resposta: $\frac{261}{32}\pi$ unidades cúbicas.

23) Achar o volume do sólido garado pela rotação da região R em torno do eixo $x = 6$, onde R é limitada pelos gráficos de $y^2 = 4x$ e $x = 4$.
Resposta: $\frac{768}{5}\pi$ unidades cúbicas.

24) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pelos gráficos de $f(x) = 3x^2 - 4$ e $g(x) = 12 - x^2$.
Resposta: $614,4\pi$.

25) Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $x = -4$, da região limitada pelas curvas $x = y - y^2$ e $x = y^2 - 3$.
Resposta: $\frac{875}{32}\pi$ unidades cúbicas.

27) Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno de $x = 1$, da região limitada

pela curva $(x-1)^2 = 20 - 4y$ e pelas retas $x = 1$, $y = 1$ e $y = 3$, e à direita de $x = 1$. Resposta: 24π.

28) Mostre que o comprimento de uma circunferência de raio r é $L = 2\pi r$.

29) a) Mostre que $1 + senh^2\, x = cosh^2\, x$, sabendo que

$$senh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ e } cosh\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Mostre também que $(senh\, x)' = cosh\, x$ e $(cosh\, x)' = senh\, x$.

b) Calcule o comprimento do gráfico de $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$; $0 \le x \le a$, $a > 0$.

30) Achar os espaços percorridos nos casos abaixo:
a) $y = \ln \sec x$; $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$
b) $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $0 \le a \le x \le b$
c) $y = \ln \cos x$; $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$. Respostas: a) $\ln(2 + \sqrt{3})$ b) $a - b + \ln \frac{e^{2b} - 1}{e^{2a} - 1}$, c) $\ln\left(1 + \sqrt{3}\right)$.

31) Se uma curva é dada em forma paramétrica, ou seja, se $x = f(t)$, $y = g(t)$; $t \in [a, b]$, então o comprimento da curva é

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(f'(t)\right)^2 + \left(g'(t)\right)^2}\, dt.$$

a) Ache o comprimento da curva $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, entre $t = 0$ e $t = \frac{\pi}{4}$. Resposta: $\frac{3a}{4}$.
b) Ache o comprimento da curva $x = t$, $y = \sqrt{a^2 - t^2}$; $-a \le x \le a$. Resposta: πa.