MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS: UM EXERCÍCIO

MAT 271 – CÁLCULO NUMÉRICO –PER3/2021/UFV

Professor Amarísio Araújo – DMA/UFV

EXERCÍCIO

EXERCÍCIO 1.10 DA APOSTILA (página 19):

A equação $xe^{-x} - e^{-3} = 0$ possui exatamente duas soluções α_1 e α_2 , sendo que $\alpha_1 \epsilon [0.01\ , 1]$ e $\alpha_2 \epsilon [4\ , 5]$.

Considere as funções: φ_1 e φ_2 dadas por $\varphi_1(x) = e^{x-3}$ e $\varphi_2(x) = lnx + 3$.

(a) φ_1 pode ser usada para obter uma aproximação de α_1 pelo método das aproximações sucessivas com garantia de convergência? E φ_2?

(b) φ_1 pode ser usada para obter uma aproximação de α_2 pelo método das aproximações sucessivas com garantia de convergência? E φ_2?

RESOLVENDO O EXERCÍCIO

Temos a equação $f(x) = 0$, onde $f(x) = xe^{-x} - e^{-3}$.

Sejam $\varphi_1(x) = e^{x-3}$ e $\varphi_2(x) = lnx + 3$.

Mostremos, inicialmente, que é possível obter as duas equivalências:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi_1(x) \qquad\qquad f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi_2(x)$$

$\boxed{\text{I}}$ $$\boxed{xe^{-x} - e^{-3} = 0} \Leftrightarrow xe^{-x} = e^{-3} \Leftrightarrow \boxed{x = e^{x-3}}$$

$\boxed{\text{II}}$ $$\boxed{xe^{-x} - e^{-3} = 0} \Leftrightarrow xe^{-x} = e^{-3} \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} \ln(xe^{-x}) = \ln(e^{-3})$$

$$\overset{x>0}{\Longleftrightarrow} \ln x + lne^{-x} = -3 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} \ln x - x = -3 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} \boxed{x = \ln x + 3}$$

$$\boxed{f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi_1(x), \forall x \epsilon \mathbb{R}} \qquad \boxed{f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi_2(x), \forall x \epsilon (0, \infty]}$$

RESOLVENDO O EXERCÍCIO

(a) φ_1 pode ser usada para obter uma aproximação de α_1 pelo método das aproximações sucessivas com garantia de convergência? E φ_2?

- φ derivável em $[a, b]$
- $|\varphi'(x)| < 1$ em $[a, b]$

Verificando as condições suficientes de convergência:

A função $\varphi_1(x) = e^{x-3}$ é derivável em $[\,0.01,1]$, sendo $\varphi_1{}'(x) = e^{x-3}$.

A função $\varphi_2(x) = lnx + 3$ é derivável em $[\,0.01,1]$, sendo $\varphi_2{}'(x) = \frac{1}{x}$.

$$|\varphi_1{}'(x)| = |e^{x-3}| = e^{x-3}, \forall x \epsilon [0.01,1].$$

$$0.01 \leq x \leq 1 \;\Rightarrow\; -2.99 \leq x - 3 \leq -2 \;\Rightarrow\; e^{x-3} \leq e^{-2} < 1 \;\Rightarrow\; |\varphi_1{}'(x)| < 1, \forall x \epsilon [0.01,1]$$

Se φ_1 for usada para obter uma aproximação da solução α_1, há garantia de convergência.

$$|\varphi_2{}'(x)| = |1/x| = 1/x, \forall x \epsilon [0.01,1]$$

$$0.01 \leq x \leq 1 \;\Rightarrow\; 1/x \geq 1 \;\Rightarrow\; |\varphi_2{}'(x)| \geq 1, \forall x \epsilon [0.01,1]$$

Se φ_2 for usada para obter uma aproximação da solução α_1, não há garantia de convergência.

RESOLVENDO O EXERCÍCIO

(b) φ_1 pode ser usada para obter uma aproximação de α_2 pelo método das aproximações sucessivas com garantia de convergência? E φ_2?

- φ derivável em $[a, b]$
- $|\varphi'(x)| < 1$ em $[a, b]$

Verificando as condições suficientes de convergência:

A função $\varphi_1(x) = e^{x-3}$ é derivável em $[4{,}5]$, sendo $\varphi_1{}'(x) = e^{x-3}$.

A função $\varphi_2(x) = lnx + 3$ é derivável em $[4{,}5]$, sendo $\varphi_2{}'(x) = \frac{1}{x}$.

$|\varphi_1{}'(x)| = |e^{x-3}| = e^{x-3}, \forall x \epsilon [4{,}5]$.

$4 \leq x \leq 5 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq x - 3 \leq 2 \quad \Rightarrow \quad e^{x-3} \geq e^1 > 1 \quad \Rightarrow \quad |\varphi_1{}'(x)| > 1, \forall x \epsilon [4{,}5]$

Se φ_1 for usada para obter uma aproximação da solução α_2, não há garantia de convergência.

$|\varphi_2{}'(x)| = |1/x| = 1/x, \forall x \epsilon [4{,}5]$

$4 \leq x \leq 5 \quad \Rightarrow \quad 1/x \leq 1/4 < 1 \quad \Rightarrow \quad |\varphi_2{}'(x)| < 1, \forall x \epsilon [4{,}5]$

Se φ_2 for usada para obter uma aproximação da solução α_2, há garantia de convergência.

ENCONTRANDO APROXIMAÇÕES DE α_1 E α_2

$\boxed{\alpha_1 \epsilon [0.01,1]}$ $\varphi_1(x) = e^{x-3}$, $x_0 = 0.5$, com erro relativo menor que $\varepsilon = 0.001$

$$x_1 = \varphi_1(x_0) = \varphi_1(0.5) = e^{0.5-3} = 0.082085$$

$$\boxed{\frac{|x_1 - x_0|}{|x_1|} = 5.0912 > \varepsilon}$$

$$x_2 = \varphi_1(x_1) = \varphi_1(0.082085) = e^{0.082085-3} = 0.054046$$

$$\boxed{\frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = 0.5188 > \varepsilon}$$

$$x_3 = \varphi_1(x_2) = \varphi_1(0.054046) = e^{0.054046-3} = 0.052552$$

$$\boxed{\frac{|x_3 - x_2|}{|x_3|} = 0.0284 > \varepsilon}$$

$$x_4 = \varphi_1(x_3) = \varphi_1(0.052552) = e^{0.052552-3} = 0.052473$$

$$\boxed{\frac{|x_4 - x_3|}{|x_4|} = 0.0015 > \varepsilon}$$

$$x_5 = \varphi_1(x_4) = \varphi_1(0.052473) = e^{0.052473-3} = 0.052469$$

$$\boxed{\frac{|x_5 - x_4|}{|x_5|} = 0.0001 < \varepsilon}$$

$\boxed{\alpha_1 \cong x_5 = 0.052469, \text{ com erro relativo menor que } \varepsilon = 0.001.}$

ENCONTRANDO APROXIMAÇÕES DE α_1 E α_2

$\boxed{\alpha_2 \epsilon [4,5]}$ $\varphi_2(x) = lnx + 3$, $x_0 = 4$, com erro relativo menor que $\varepsilon = 0.001$

$$x_1 = \varphi_2(x_0) = \varphi_2(4) = \ln(4) + 3 = 4.386294$$

$$\boxed{\frac{|x_1 - x_0|}{|x_1|} = 0.0881 > \varepsilon}$$

$$x_2 = \varphi_2(x_1) = \varphi_2(4.386294) = \ln(4.386294) + 3 = 4.478485$$

$$\boxed{\frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = 0.0206 > \varepsilon}$$

$$x_3 = \varphi_2(x_2) = \varphi_2(4.478485) = \ln(4.478485) + 3 = 4.499285$$

$$\boxed{\frac{|x_3 - x_2|}{|x_3|} = 0.0046 > \varepsilon}$$

$$x_4 = \varphi_2(x_3) = \varphi_2(4.499285) = \ln(4.499285) + 3 = 4.503918$$

$$\boxed{\frac{|x_4 - x_3|}{|x_4|} = 0.00102 > \varepsilon}$$

$$x_5 = \varphi_2(x_4) = \varphi_2(4.503918) = \ln(4.503918) + 3 = 4.504947$$

$$\boxed{\frac{|x_5 - x_4|}{|x_5|} = 0.0002 < \varepsilon}$$

$\boxed{\alpha_2 \cong x_5 = 4.504947\text{, com erro relativo menor que } \varepsilon = 0.001.}$

USANDO $\varphi_2(x)$ COM $x_0 = 0.5$:

$$\varphi_2(x) = lnx + 3, x_0 = 0.5\ .$$

$$x_1 = \varphi_2(x_0) = \varphi_2(0.5) = \ln(0.5) + 3 = 2.30685$$

$$x_2 = \varphi_2(x_1) = \varphi_2(2.30685) = \ln(2.30685) + 3 = 3.835883$$

$$x_3 = \varphi_2(x_2) = \varphi_2(3.835883) = \ln(3.835883) + 3 = 4.344310$$

$$x_4 = \varphi_2(x_3) = \varphi_2(4.344310) = \ln(4.344310) + 3 = 4.468867$$

$$x_5 = \varphi_2(x_4) = \varphi_2(4.468867) = \ln(4.468867) + 3 = 4.497135$$

A sequência $x_{n+1} = \varphi_2(x_n)$ não está convergindo para a solução α_1

A sequência $x_{n+1} = \varphi_2(x_n)$ está convergindo para a solução α_2

USANDO $\varphi_1(x)$ COM $x_0 = 4$:

$$\varphi_1(x) = e^{x-3}, x_0 = 4$$

$$x_1 = \varphi_1(x_0) = \varphi_1(4) = e^{4-3} = 2.718282$$

$$x_2 = \varphi_1(x_1) = \varphi_1(2.718282) = e^{2.718282-3} = 0.754486$$

$$x_3 = \varphi_1(x_2) = \varphi_1(0.754486) = e^{0.754486-3} = 0.105873$$

$$x_4 = \varphi_1(x_3) = \varphi_1(0.105873) = e^{0.105873-3} = 0.055347$$

$$x_5 = \varphi_1(x_4) = \varphi_1(0.055347) = e^{0.055347-3} = 0.052620$$

A sequência $x_{n+1} = \varphi_1(x_n)$ não está convergindo para a solução α_2

A sequência $x_{n+1} = \varphi_1(x_n)$ está convergindo para a solução α_1

LOCALIZAÇÃO GRÁFICA DAS SOLUÇÕES α_1 E α_2

$f(x) = 0$ $\qquad\qquad\qquad$ $f(x) = xe^{-x} - e^{-3}$