INTERPOLAÇÃO DE NEWTON - RESOLVENDO UM EXERCÍCIO – PROPRIEDADE DAS DIFERENÇAS DIVIDIDAS – AVALIAÇÃO DO ERRO ABSOLUTO

MAT 271 – Cálculo Numérico –PER3/2021/UFV

Professor Amarísio Araújo –DMA/UFV

RESOLVENDO UM PROBLEMA DE INTERPOLAÇÃO SEM USAR TODOS OS PONTOS DISPONÍVEIS

A tabela abaixo nos mostra alguns valores da função f definida $f(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$.

x	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
$f(x)$	4.0379	3.3547	2.9591	2.6813	2.4679	2.2953

Vamos obter um valor aproximado do valor de f para $x = 0.0378$, com um polinômio interpolador de grau 2 e com um polinômio interpolador de grau 3, usando a interpolação de Newton.

I – POLINÔMIO DE GRAU 2

x	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
$f(x)$	4.0379	3.3547	2.9591	2.6813	2.4679	2.2953

Precisamos de 3 pontos da tabela. Como $x = 0.0378$ está entre 0.03 e 0.04, podemos usar $x_0 = 0.03$, $x_1 = 0.04$ e $x_2 = 0.05$ para construir o polinômio interpolador de Newton.

		DIFERENÇAS DIVIDIDAS		
x	$f(x)$	ORDEM 0	ORDEM 1	ORDEM 2
0.03	2.9591	2.9591		
			-27.78	
0.04	2.6813	2.6813		322
			-21.34	
0.05	2.4679	2.4679		

$$p_2(x) = 2.9591 - 27.78(x - 0.03) + 322(x - 0.03)(x - 0.04)$$

$$p_2(0.0378) = 2.7369$$

$$\boxed{f(0.0378) \cong 2.7369}$$

II – POLINÔMIO DE GRAU 3

x	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
$f(x)$	4.0379	3.3547	2.9591	2.6813	2.4679	2.2953

Precisamos de 4 pontos da tabela. Vamos usar agora $x_0 = 0.02$, $x_1 = 0.03$, $x_2 = 0.04$ e $x_3 = 0.05$ para construir o polinômio interpolador de Newton (o importante é que $0.03 < 0.0378 < 0.04$).

		DIFERENÇAS DIVIDIDAS			
x	$f(x)$	ORDEM 0	ORDEM 1	ORDEM 2	ORDEM 3
0.02	3.3547	3.3547			
			-39.56		
0.03	2.9591	2.9591		589	
			-27.78		-8900
0.04	2.6813	2.6813		322	
			-21.34		
0.05	2.4679	2.4679			

II – POLINÔMIO DE GRAU 3

		DIFERENÇAS DIVIDIDAS			
x	$f(x)$	ORDEM 0	ORDEM 1	ORDEM 2	ORDEM 3
0.02	3.3547	3.3547			
			-39.56		
0.03	2.9591	2.9591		589	
			-27.78		-8900
0.04	2.6813	2.6813		322	
			-21.34		
0.05	2.4679	2.4679			

$$p_3(x) = 3.3547 - 39.56(x - 0.02) + 589(x - 0.02)(x - 0.03) - 8900(x - 0.02)(x - 0.03)(x - 0.04)$$

$$p_3(0.0378) = 2.7350$$

$$\boxed{f(0.0378) \cong 2.7350}$$

COMPARANDO

x	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
$f(x)$	4.0379	3.3547	2.9591	2.6813	2.4679	2.2953

POLINÔMIO DE GRAU 2: $\boxed{f(0.0378) \cong 2.7369}$

POLINÔMIO DE GRAU 3: $\boxed{f(0.0378) \cong 2.7350}$

POLINÔMIO DE GRAU 5 (TODOS OS PONTOS): $\boxed{f(0.0378) \cong 2.7361}$

(FAÇAM!!)

UMA IMPORTANTE PROPRIEDADE DAS DIFERENÇAS DIVIDIDAS

Seja uma função f cujos valores $f(x_0), f(x_1), f(x_2),\ldots, f(x_n)$ em $n+1$ pontos distintos $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ de um intervalo $[x_0, x_n]$ são conhecidos

Como vimos, as diferenças divididas de ordem 1 de f são dadas por:

$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}]-f[x_i]}{x_{i+1}-x_i}, i = 0,1,\ldots,n.$

Observe que: $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}]-f[x_i]}{x_{i+1}-x_i} = \frac{f[x_i]-f[x_{i+1}]}{x_i-x_{i+1}} = f[x_{i+1}, x_i]$

Ou seja: permutar os elementos x_n usados na obtenção de uma diferença divida de ordem 1 não altera o seu valor: $f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]$, $f[x_1, x_2] = f[x_2, x_1]$ ...

Se considerarmos as diferenças divididas de ordem 2 de f, chegaremos à mesma conclusão: permutar os elementos x_n usados na obtenção de uma diferença divida de ordem 2 não altera o seu valor:

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_0, x_2, x_1] = f[x_1, x_0, x_2] = f[x_1, x_2, x_0] = f[x_2, x_0, x_1] = f[x_2, x_1, x_0]$$

UMA IMPORTANTE PROPRIEDADE DAS DIFERENÇAS DIVIDIDAS

De maneira geral, temos o seguinte resultado:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = f[x_{j_0}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}],$$

onde j_0 , j_1 , … , j_n é uma permutação qualquer de $0, 1, \ldots, n$.

AVALIANDO O ERRO ABSOLUTO

Sejam $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ pontos distintos do intervalo $[x_0, x_n]$ no qual as $n+1$ derivadas da função f existem e são contínuas. Seja $p(x)$ o polinômio interpolador de $f(x)$ em $[x_0, x_n]$. Então, para cada $x \in [x_0, x_n]$, $x \neq x_i$, $i = 0,1, \ldots, n$, tem-se que:

$$|f(x) - p(x)| \leq M|(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)|,$$

onde $M = max\{|f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]|; x \in [x_0, x_n]\}$.

O resultado acima nos dá um majorante para $|f(x) - p(x)|$, que é o erro absoluto na aproximação de $f(x)$ por $p(x)$, dando-nos uma possibilidade de avaliar tal erro através de diferenças divididas de ordem $n+1$.

Não exploraremos esse tipo de avaliação do erro absoluto de interpolação aqui no nosso curso.