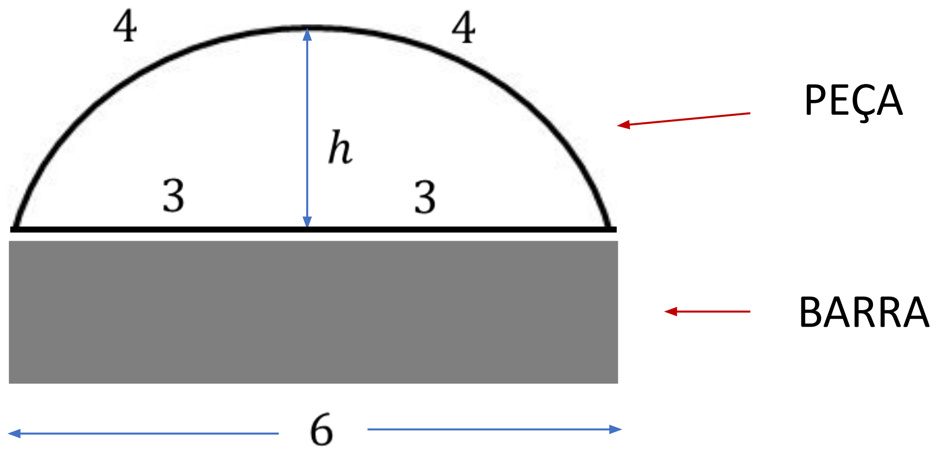
SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES DE UMA ÚNICA VARIÁVEL

MAT 271 – CÁLCULO NUMÉRICO –PER3/2021

Professor Amarísio Araújo – DMA/UFV

UMA MOTIVAÇÃO

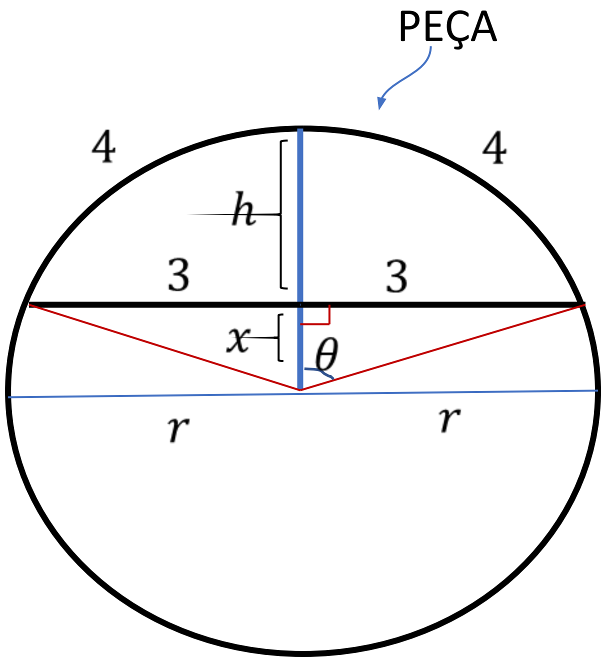
Uma peça deve ser construída com o formato de um arco de circunferência de comprimento externo igual a 8 metros. Esta peça será fixada em uma barra de comprimento igual a 6 metros, conforme figura abaixo:



Determinar a altura h máxima da peça.

MODELANDO MATEMATICAMENTE O PROBLEMA

Como a peça tem o formato de um arco de circunferência, podemos representá-la na figura abaixo:



Na figura:

- h é a altura da peça;
- θ é um ângulo do triângulo retângulo;
- r é o raio da circunferência, sendo $r = h + x$.

Do triângulo retângulo e do arco subentendido pelo ângulo θ, temos:

$sen\theta = 3/r \quad \Rightarrow rsen\theta = 3$ (A)

$cos\theta = x/r \quad \Rightarrow rcos\theta = x$ (B)

$4 = r\theta \quad \Rightarrow r = 4/\theta$ (C)

De (A) e (C), obtemos a equação: $\boxed{4sen\theta - 3\theta = 0}$

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO

A equação $4sen\theta - 3\theta = 0$ tem uma solução aproximada $\bar{\theta} = 1.2757$, como veremos nos métodos numéricos que serão apresentados. De modo que:

$$r = 4/\bar{\theta} = 4/1.2757 = 3.1355$$

$$x = rcos\bar{\theta} = 3.1355\cos(1.2757) = 0.9119$$

$$h = r - x = 3.1355 - 0.9119 = 2.2236$$

Portanto a altura máxima da peça deve ser de aproximadamente 2.22 metros

PROBLEMA

Trataremos, aqui, portanto, da resolução de equações da forma

$$f(x) = 0,$$

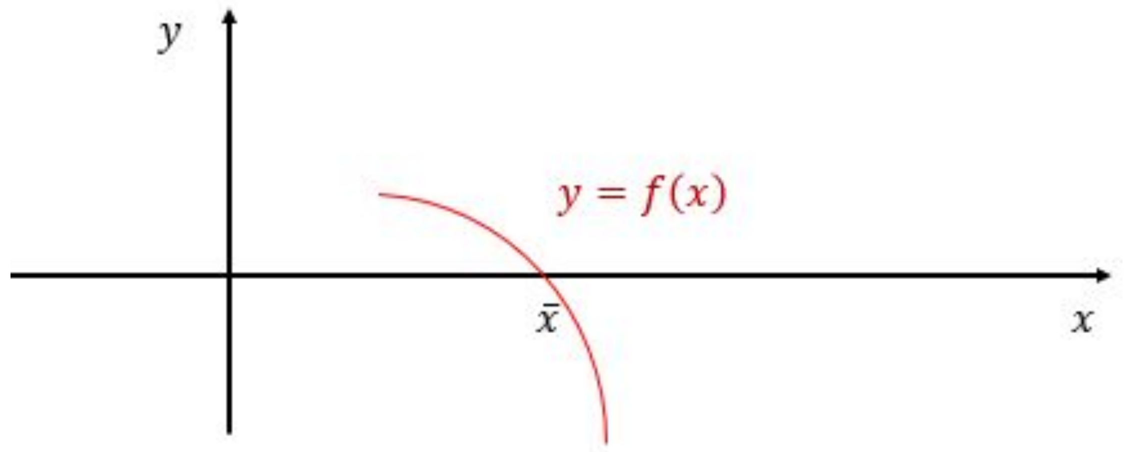
onde f é uma função real não-linear de uma única variável x.

Uma solução da equação acima é um número real $\bar{x}$ que satisfaz a equação, isto é, tal que $f(\bar{x}) = 0$ se torna uma identidade.

Obs: $\bar{x}$ pode ser chamada também de raiz (ou zero) da equação.

GRAFICAMENTE

Graficamente, uma solução $\bar{x}$ da equação $f(x) = 0$ é um ponto no eixo x de interseção do gráfico de f com este eixo.



Ou seja, uma solução $\bar{x}$ da equação $f(x) = 0$ corresponde à abscissa de um ponto de interseção do gráfico de f com o eixo x.

QUESTÃO INICIAL: EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO

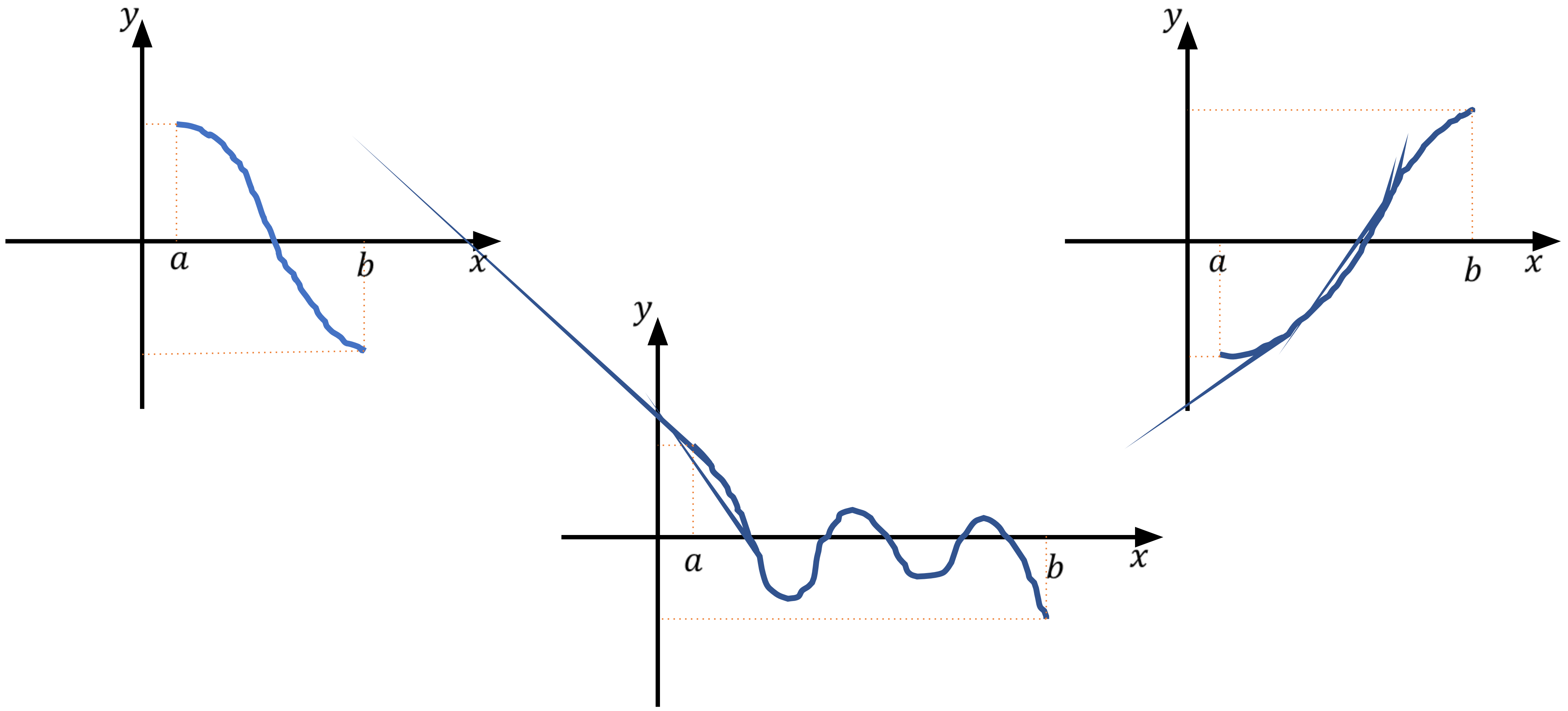
Um resultado importante que apresenta condições suficientes para garantir a existência de solução de uma equação $f(x) = 0$ é o seguinte:

TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO (TVI): Seja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e tal que $f(a).f(b) < 0$.
Então existe um $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = 0$.

Portanto, dada a equação $f(x) = 0$, se determinarmos um intervalo $[a, b]$ no qual a função f seja contínua e tal que $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais contrários, isto é: $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$ ou $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, podemos garantir que a equação tem pelo menos uma solução $\bar{x}$ neste intervalo.

O TVI GARANTE A EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO NO INTERVALO, MAS NÃO SUA UNICIDADE

ILUSTRANDO GRAFICAMENTE



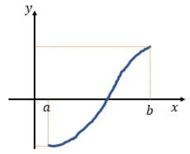
BUSCA DE SOLUÇÕES APROXIMADAS

O nosso objetivo será o de encontrar, de forma aproximada, uma solução $\bar{x}$ de uma dada a equação $f(x) = 0$ em algum intervalo onde ela seja única.

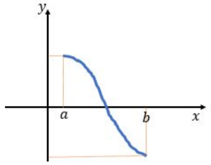
Portanto, é importante, inicialmente, determinar um intervalo (intervalo de busca), no qual tal solução $\bar{x}$ exista, e, de preferência, que $\bar{x}$ seja única.

Assim, encontrando dois números reais a e b, com $a < b$, tais que f satisfaz as condições do TVI em $[a, b]$, já teremos o intervalo de busca $[a, b]$. E, para garantir que a solução $\bar{x}$ seja única neste intervalo:

- ❑ Se $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, basta que f seja crescente em $[a, b]$.



- ❑ Se $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$, basta que f seja decrescente em $[a, b]$.



EXEMPLO: Seja a equação: $x^3 + cosx = 0$

Neste caso, $f(x) = x^3 + cosx$, sendo f uma função contínua em todo $\mathbb{R}$ (pois é a soma de duas funções contínuas em todo $\mathbb{R}$).

Para $a = -1$ e $b = 0$, por exemplo, temos: $f(a) = f(-1) = -0.4596 < 0$ e $f(b) = f(0) = 1 > 0$.

Portanto, as condições do TVI são verificadas no intervalo $[a, b] = [-1,0]$, e podemos garantir a existência de pelo menos uma solução $\bar{x}$ neste intervalo.

Se analisarmos o crescimento ou decrescimento de f em $[-1,0]$, podemos dizer se a solução é única ou não. Como f é derivável no intervalo, esta verificação pode ser feita usando a derivada.

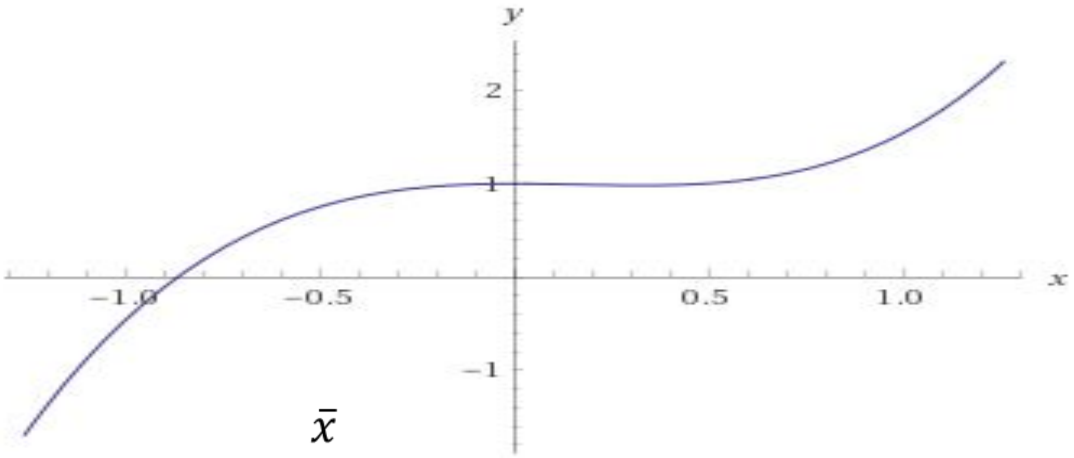
Observe que: $f'(x) = 3x^2 - senx$. Como $3x^2 \geq 0$ e $-senx \geq 0$ para todo $x \in [-1,0]$, temos $f'(x) > 0$ para todo $x \in [-1,0)$ (f' só se anula em 0), e, portanto, f é crescente em $[-1,0]$.

Assim: $f(-1) < 0$ e $f(0) > 0$, e f é crescente em $[-1,0]$. Isto nos garante que a solução da equação $x^3 + cosx = 0$ é única neste intervalo.

Esboço gráfico para determinar um intervalo de busca para a equação: $x^3 + cosx = 0$

$y = f(x) = x^3 + cosx$

$\bar{x}$ solução da equação



O gráfico indica que, assim como o intervalo $[-1{,}0]$, poderíamos ter escolhido outros intervalos de busca da solução. Por exemplo: $[-1{,}0.5]$, $[-2{,}0.5]$, $[-2{,}0]$,... (uma infinidade de intervalos).

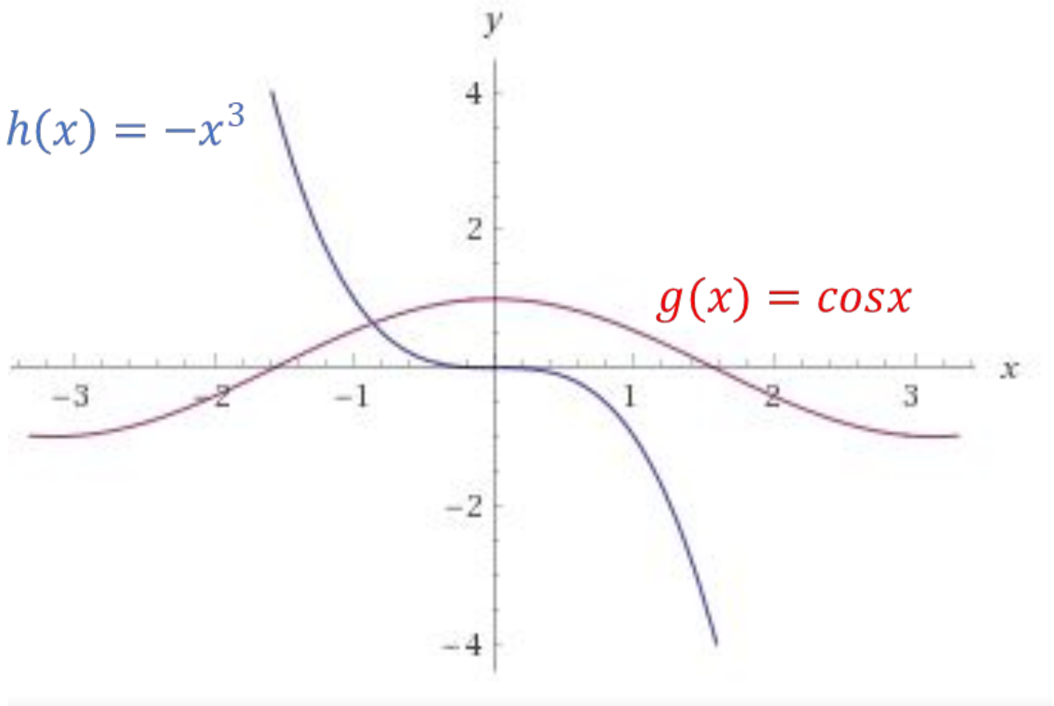
A escolha do intervalo de busca, como veremos mais adiante, pode garantir maior rapidez e sucesso na obtenção de um valor aproximado da solução.

Determinação do intervalo de busca para a equação: $x^3 + cosx = 0$ a partir da interseção do gráfico de duas funções.

Observe que $x^3 + cosx = 0 \Leftrightarrow cosx = -x^3$

Logo, $\bar{x}$ que satisfaz $x^3 + cosx = 0$ também satisfaz $cosx = -x^3$

Portanto $\bar{x}$ é a abscissa do ponto de interseção entre os gráficos de $g(x) = cosx$ e $h(x) = -x^3$



SOLUÇÕES APROXIMADAS DE EQUAÇÕES

- Aprenderemos, aqui, métodos numéricos para a obtenção, de forma aproximada, de uma solução $\bar{x}$ de uma equação $f(x) = 0$ em algum intervalo $[a, b]$, onde a função f é contínua.

- As funções f serão, em geral, combinação de todas as funções não-lineares vistas em um curso de Cálculo I: exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, polinomiais etc.

- A solução $\bar{x}$ será obtida iterativamente a partir da construção de uma sequência de aproximações (x_n) que, espera-se, convirja para $\bar{x}$.