Weriton Alves - 96708

Questão 2) Quais são as normas 1, norma 2 e a norma infinita dos vetores.

$$X_1 = \begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix} \qquad X_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\|X_1\|_1 = 2+3+1 = 6$$

$$\|X_1\|_2 = \sqrt{(2)^2+(-3)^2+(1)^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$$

$$\|X_1\|_\infty = \max(X_1) = 3$$

$$\|X_2\|_1 = 1+1+1 = 3$$

$$\|X_2\|_2 = (1^2+1^2+1^2)^{1/2} = \sqrt{3}$$

$$\|X_2\|_\infty = \max(X_2) = 1$$

Questão 3) Encontre dois vetores ortonormais que abrangem o mesmo espaço que os dois vetores do problema 3.2.

$$X_1 = \begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix} \qquad X_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

i) $\vec{u}_1 = \vec{x}_1$

ii) $\vec{q}_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \dfrac{[2,-3,1]'}{\sqrt{14}}$

iii) $\vec{u}_2 = \vec{x}_2 - (\vec{q}_1' x_2)\vec{q}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \left(\dfrac{[2,-3,1]}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{14}} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - 0 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = X_2$

$\vec{q}_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|} = \dfrac{[1\ 1\ 1]'}{\sqrt{3}}$

Os vetores ortonormais são $\vec{q}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}$ e $\vec{q}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

Isto pode ser verificado por $X_1' X_2 = X_2' X_1 = 0$, o qual indica que existe um vetor ortonormal, sendo estes $\vec{q}_1$ e $\vec{q}_2$

√ Questão 5 Encontre os postos e nulidades das seguintes matrizes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\rho = 2$ $\qquad \rho = 3$ $\qquad \rho = 3$

$\eta = 3-2 = 1$ $\qquad \eta = 3-3 = 0$ $\qquad \eta = 4-3 = 1$

√ Questão 7 Considere a equação algébrica linear: $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = y$ $\left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ equações} \\ 2 \text{ incógnitas} \end{array} \right\}$

Existe uma solução X na equação? A solução é única? Existe uma solução se $y = [1\ 1\ 1]'$?

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -3x_1 + 3x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 = x_2 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x_1 - x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \\ x_2 = x_1 = 1 \\ -x_1 + 2x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \end{array}$$

$$\underbrace{3 \times 2 \quad 2 \times 1}_{3 \times 1}$$

Portanto, existe uma solução $\vec{X}$ na equação, onde, a solução $\vec{x} = [1, 1]'$ é única

Isto pode ser visto ao observar que: $\rho(\vec{A}) = 2 = \rho([\vec{A}\ \vec{y}]) = 2$, portanto existe uma solução $\vec{X}$ para $\vec{A}\vec{x} = \vec{y}$.

Para $y = [1\ 1\ 1]'$, temos $\rho([A\ y]) = 3 \neq \rho(A)$, logo não existe solução em $\vec{A}\vec{x} = \vec{y}$

$$\begin{array}{ccc} A & A\ y_1 & A\ y_2 \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Weriton Alves 96708

<u>Questão 13)</u> Encontre representação em forma de Jordan das seguintes matrizes

$\checkmark$ $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{autovalores distintos}}$

$\Delta(\lambda) = \det(\lambda \vec{I} - \vec{A}_1) =$

$= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases}$

$(A_1 - 1I)q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} q_1 = 0 \Rightarrow q_1 = [1 \ 0 \ 0]'$

$(A_1 - 2I)q_2 = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} q_2 = 0 \Rightarrow q_2 = [4 \ 1 \ 0]'$

$(A_1 - 3I)q_3 = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 10 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q_3 = 0 \Rightarrow q_3 = [5 \ 0 \ 1]'$

$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\checkmark$ $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$ $\Delta(\lambda) = \det(\lambda \vec{I} - A_2) = (\lambda+3)\lambda^2 + 2 + 4\lambda = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 2 =$

$= (\lambda+1)(\lambda+1+j)(\lambda+1-j)$ $\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -1-j \\ \lambda_3 = -1+j \end{cases}$ $\boxed{\text{Autovalores Complexos}}$

$(A_2 + I)q_1 = \begin{bmatrix} +1 & 1 & 0 \\ 0 & +1 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} q_1 = 0 \Rightarrow q_1 = [1 \ -1 \ 1]'$

$(A_2 + (+1+j)I)q_2 = \begin{bmatrix} 1+i & 1 & 0 \\ 0 & 1+j & 1 \\ -2 & -4 & 1+j \end{bmatrix} q_2 = 0 \Rightarrow q_2 = [1 \ \ j-1 \ \ -2j]'$

$(A_2 - (j-1)I)q_3 = \begin{bmatrix} 1-j & 1 & 0 \\ 0 & 1-j & 1 \\ -2 & -4 & 1-j \end{bmatrix} q_3 = 0 \Rightarrow q_3 = [1 \ \ -1-j \ \ 2j]'$

$\hat{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1+j & 0 \\ 0 & 0 & -1-j \end{bmatrix}$

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1+j & -1-j \\ 1 & -2j & 2j \end{bmatrix}$

$\checkmark$ $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\Delta(\lambda) = \det(\lambda \vec{I} - A_3) = (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-2) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases}$ $\boxed{\text{Autovalores não distintos.}}$

A solução tem duas soluções independentes, logo 2 autovalores, sendo 1 deles com multiplicidade 2 associado a λ. Necessita-se de mais 1 vetor para compor a base R^3,

$(\vec{A}_3 - \vec{I})$ tem posto 1 e nulidade 2, então A_3 tem 2 autovetores independentes associados a $\lambda = 1$,

$(\vec{A}_3 - \vec{I})q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} q_1 = 0 \Rightarrow$ $q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$(A_3 - 2I)q_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q_3 = 0 \Rightarrow q_3 = [1 \ 0 \ -1]'$

$\hat{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Continuação

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 20 & 16 \\ 0 & -25 & -20 \end{bmatrix}$$

$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A_4) = \lambda(\lambda+20)(\lambda-20) + 400\lambda = \lambda^3$

$\lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Todos os autovalores são zeros, multiplicidade 3

nulidade $(A_4 - 0I) = 3 - 2 = 1$. Portanto A_4 tem apenas um autovetor independente associado a 0, logo, pode-se calcular os autovetores gerais:

? $A_4 \vec{v}_1 = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_1 = [1\ 0\ 0]'$

$A_4 \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \Rightarrow \vec{v}_2 = [1\ 4\ -5]'$

$A_4 \vec{v}_3 = \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_3 = [1\ 1\ -1]'$

$$\hat{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} //$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{bmatrix} //$$

√ 3.17 Considere $A = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda T & \lambda T^2/2 \\ 0 & \lambda & \lambda T \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ com $\lambda \neq 0$ e $T > 0$. Mostre que $[0\ 0\ 1]'$ é um autovetor generalizado de grau 3 e as três colunas de $Q = \begin{bmatrix} \lambda T^2 & \lambda T^2 & 0 \\ 0 & \lambda T & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ constituem uma cadeia de autovetores generalizados de comprimento 3. Verifique.

$$\vec{Q}^{-1} \vec{A} \vec{Q} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Devido a disposição dos zeros, para o $\det(\vec{A})$ só restará a diagonal principal, logo $\vec{A}$ tem apenas um autovalor distinto λ com multiplicidade 3.

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & \lambda T & \lambda T^2/2 \\ 0 & 0 & \lambda T \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (A - \lambda I)\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda T & \lambda T^2/2 \\ 0 & 0 & \lambda T \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda T^2/2 \\ \lambda T \\ 0 \end{bmatrix} \neq \vec{0}$$

$$(A - \lambda I)^2 \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda^2 T^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2 T^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \vec{0}$$

$$(A - \lambda I)^3 \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda^2 T^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \lambda T & \lambda T^2/2 \\ 0 & 0 & \lambda T \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \lambda^2 T^2 & \lambda T^2/2 & 0 \\ 0 & \lambda T & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} // \Rightarrow AQ = \begin{bmatrix} \lambda^3 T^2 & 3\lambda^2 T^2/2 & \lambda T^2/2 \\ 0 & \lambda T & \lambda T \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$AQ = Q \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ então $\Rightarrow \vec{Q}^{-1} \vec{A} \vec{Q} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} //$

Se,

$$Q \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2 T^2 & \lambda T^2/2 & 0 \\ 0 & \lambda T & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^3 T^2 & 3\lambda^2 T^2/2 & \lambda T^2/2 \\ 0 & \lambda T & \lambda T \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

✓ 3.19| Mostre que se λ é um autovalor de A com autovetor X, então $f(\lambda)$ é um autovalor de $f(A)$ com o mesmo autovetor X.

Seja A uma matriz $n \times n$, usando o teorema 3.5 temos que $f(\vec{A}) = h(\vec{A})$ e $h(\lambda)$ é dito igual a $f(\lambda)$ no espectro de $\vec{A}$.

$\boxed{h(\lambda) = \beta_0 + \beta_1 X + \dots + \beta_{n-1} X^{n-1}}$ Se λ é autovalor de A, então $f(\lambda) = h(\lambda)$ e

$f(\lambda) \because A\vec{x} = \lambda \vec{x} \Rightarrow f(A)\vec{X} = h(A)\vec{X} = (\beta_0 I + \beta_1 A + \dots + \beta_{n-1} A^{n-1})\vec{X}$

$\Rightarrow f(A)\vec{X} = (\beta_0 + \beta_1 \lambda + \dots + \beta_{n-1} \lambda^{n-1})\vec{X} = f(\lambda)\vec{X}$

O que implica que $f(\lambda)$ é um autovalor de $f(A)$ com o mesmo autovetor $\vec{X}$.

✓ 3.23| Mostre que funções da mesma matriz comutam; isto é $f(\vec{A})g(\vec{A}) = g(\vec{A})f(\vec{A})$. Consequentemente temos $\vec{A}e^{\vec{A}t} = e^{\vec{A}t}\vec{A}$.

Seja $\vec{A}$ uma matriz $n \times n$; temos que: $\begin{cases} g(\vec{A}) = \beta_0 \vec{I} + \beta_1 \vec{A} + \dots + \beta_{n-1} \vec{A}^{n-1} \\ f(\vec{A}) = \alpha_0 \vec{I} + \alpha_1 \vec{A} + \dots + \alpha_{n-1} \vec{A}^{n-1} \end{cases}$

Como A comuta consigo mesma, concluímos que $f(\vec{A})g(\vec{A}) = g(\vec{A})f(\vec{A})$ e em particular $\vec{A}e^{\vec{A}t} = e^{\vec{A}t}\vec{A}$.

✓ 3.29| Sejam todos os autovalores de $\vec{A}$ distintos e seja q_i um autovetor direito de $\vec{A}$ associado a λ_i; isto é, $Aq_i = \lambda_i q_i$. Defina $Q = [q_1\ q_2 \cdots q_n]$ e defina $\vec{P}_i = \vec{Q}^{-1} =: \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$ onde p_i é o i-ésimo linha de P. Mostre que p_i é um autovetor esquerdo de A associado a λ_i; ou seja $p_i\vec{A} = \lambda_i p_i$

Seja λ_i os autovalores de A, temos que:

$(A - \lambda I)q = \vec{0} \Rightarrow Q = [q_1\ q_2 \cdots q_n]$

Assim, sabe-se que

$\hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} = \vec{Q}^{-1}\vec{A}\vec{Q} = \vec{P}\vec{A}\vec{P}^{-1}$

Dessa forma, temos que $\hat{A} = \vec{P}\vec{A}\vec{P}^{-1} \Rightarrow PA = \hat{A}P$. Isto é,

$\begin{bmatrix} p_1 A \\ p_2 A \\ \vdots \\ p_n A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_1 \\ \lambda_2 p_2 \\ \vdots \\ \lambda_n p_n \end{bmatrix}$ logo, $p_i A = \lambda_i p_i$, ou seja, p_i é um autovetor de A associado com λ_i.

$\sqrt{}$ **3.31)** encontre M para encontrar a equação de Lyapunov em (3.59) com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad B = 3 \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad 3.59 \Rightarrow AM + MB = C$$

Quais são os autovalores da equação de Lyapunov? A equação de Lyapunov é singular? A solução é única?

Seja $M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$ então $AM + MB = C \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}}_{2\times 1} + \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}}_{2\times 1} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}}_{1\times 1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} m_2 + 3m_1 = 3 \\ -2(m_1+m_2) + 3m_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m_1 + m_2 = 3 \\ -2m_1 + m_2 = 3 \; (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m_1 + \cancel{m_2} = 3 \\ 2m_1 - \cancel{m_2} = -3 \end{cases} \Rightarrow \{5m_1 = 0 \Rightarrow \boxed{m_1 = 0}$$

$$\{\boxed{m_2 = 3} \qquad M = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_A(\lambda) = \det(\lambda \vec{I} - \vec{A}) = \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+2 \end{pmatrix} = \lambda(\lambda+2) + 2 = \lambda^2 + 2\lambda + 2 \Rightarrow (\lambda + 1 - j)(\lambda + 1 + j)$$

$$\Delta_B(\lambda) = \det(\lambda \vec{I} - \vec{B}) = \det(\lambda - 3) = (\lambda - 3) \Rightarrow (\lambda + 3)$$

Autovalores de Lyapunov são: $2+j$ e $2-j$

A equação de Lyapunov é não singular com M satisfazendo a equação.

$\sqrt{}$ **3.37)** Mostre (3.65) $\quad s^n \det(s\vec{I}_m - \vec{A}\vec{B}) = s^m (s\vec{I}_n - \vec{B}\vec{A})$

Seja A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $n \times m$, então temos:

$$N = \begin{bmatrix} \sqrt{s}\,\vec{I}_m & \vec{A} \\ \vec{0} & \sqrt{s}\,\vec{I}_n \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} \sqrt{s}\,\vec{I}_m & \vec{0} \\ \vec{B} & \sqrt{s}\,\vec{I}_n \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} \sqrt{s}\,\vec{I}_m & \vec{A} \\ -\vec{B} & \sqrt{s}\,\vec{I}_n \end{bmatrix}$$

$$NP = \begin{bmatrix} s\vec{I}_m - \vec{A}\vec{B} & \vec{0} \\ \sqrt{s}\,\vec{B} & s\vec{I}_n \end{bmatrix} \qquad QP = \begin{bmatrix} s\vec{I}_m & -\sqrt{s}\,\vec{A} \\ \vec{0} & s\vec{I}_n - \vec{B}\vec{A} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \det(NP) &= \det(N)\det(P) = s\det(P) \\ \det(QP) &= \det(Q)\det(P) = s\det(P) \end{aligned}\right\} \det(NP) = \det(QP)$$

$$\det(NP) = \det(s\vec{I}_m - \vec{A}\vec{B})\det(s\vec{I}_n) = s^n \det(s\vec{I}_m - \vec{A}\vec{B})$$

$$\det(QP) = \det(s\vec{I}_m)\det(s\vec{I}_n - \vec{B}\vec{A}) = s^m \det(s\vec{I}_n - \vec{B}\vec{A})$$

Assim, $s^n \det(s\vec{I}_m - \vec{A}\vec{B}) = s^m \det(s\vec{I}_n - \vec{B}\vec{A})$