UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA – UFV
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – CCE
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA - DEL

Sistemas de Controle II

ELT331

AULA 16 – Projeto de Controlador em Atraso e Avanço de Fase pela Resposta em Frequência

Prof. Tarcísio Pizziolo

16. Projeto de Controlador em Atraso e Avanço de Fase pela Resposta em Frequência

16.1 Características

Seja uma Função de Transferência dada por **$G_c(s)$**:

$$G_c(s) = K_c \left(\frac{(s + \frac{1}{T_1})}{(s + \frac{\gamma}{T_1})} \right) \left(\frac{(s + \frac{1}{T_2})}{(s + \frac{1}{\beta T_2})} \right)$$

Onde **$\gamma > 1$** e **$\beta > 1$**.

O termo $\left(\frac{(s + \frac{1}{T_1})}{(s + \frac{\gamma}{T_1})} \right)$ representa a parte em **Avanço de Fase**.

($\gamma > 1$) ($\gamma = 1/\alpha$ do Avanço)

O termo $\left(\frac{(s + \frac{1}{T_2})}{(s + \frac{1}{\beta T_2})} \right)$ representa a parte em **Atraso de Fase**.

($\beta > 1$)

O Controlador em Atraso e Avanço de Fase atuará no estado Transitório e no estado Permanente!

16.1 Características

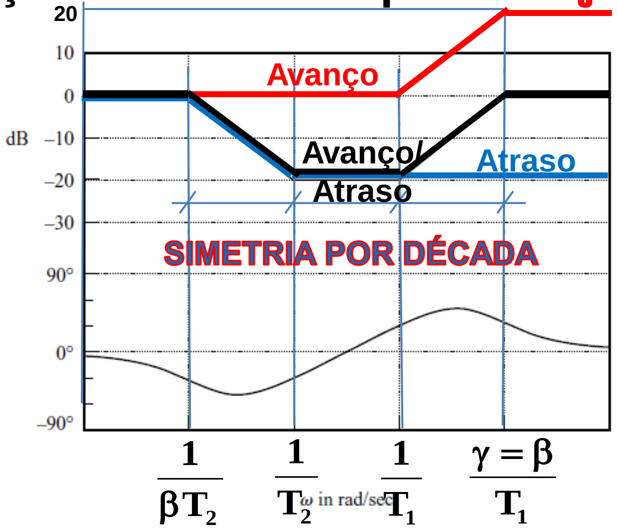
- A parte relativa ao **Avanço de Fase** altera a curva de resposta em frequência pela adição de um ângulo de avanço de fase e o aumento da Margem de Fase na frequência de cruzamneto de ganho.
- A parte relativa ao **Atraso de Fase** fornece atenuação perto e acima da frequência de cruzamento de ganho permitindo um aumento de ganho na faixa de baixa frequência para melhorar o desempenho em regime permanente.

- No Método em Resposta em Frequência pode-se utilizar $\gamma \neq \beta$ ou $\gamma = \beta$!

- Por questão de SIMETRIA nas partes em Avanço e em Atraso aplica-se $\gamma = \beta$!

$$\text{Avanço} \Rightarrow \left(\frac{(s+\frac{1}{T_1})}{(s+\frac{\gamma}{T_1})}\right) \Rightarrow \left(\frac{(s+\frac{1}{T_1})}{(s+\frac{\gamma=\beta}{T_1})}\right) \Rightarrow \left(\frac{(s+\frac{1}{T_1})}{(s+\frac{\beta}{T_1})}\right)$$

$$\text{Atraso} \Rightarrow \left(\frac{(s+\frac{1}{T_2})}{(s+\frac{1}{\beta T_2})}\right)$$

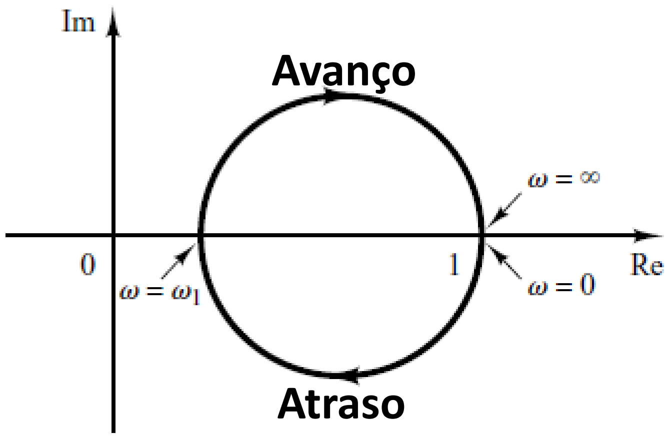


16.1 Características

Seja a Função de Transferência dada por $G_c(s)$ com $K_C = 1$ e $\gamma = \beta$:

$$G_c(s) = \left(\frac{(s + \frac{1}{T_1})}{(s + \frac{\beta}{T_1})} \right) \left(\frac{(s + \frac{1}{T_2})}{(s + \frac{1}{\beta T_2})} \right)$$

O Gráfico Polar (Nyquist) de $G_c(s)$ é dado a seguir:



A frequência w_1 é a frequência onde o ângulo de fase de $G_c(s)$ é igual a **zero**. Então:

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

Demonstração:

$$\underline{/G_c(j\omega)} = \Big/ j\omega + \frac{1}{T_1} + \Big/ j\omega + \frac{1}{T_2} - \Big/ j\omega + \frac{\beta}{T_1} - \Big/ j\omega + \frac{1}{\beta T_2}$$

$$= \tan^{-1}\omega T_1 + \tan^{-1}\omega T_2 - \tan^{-1}\omega T_1/\beta - \tan^{-1}\omega T_2\beta$$

At $\omega = \omega_1 = 1/\sqrt{T_1 T_2}$, we have

$$\underline{/G_c(j\omega_1)} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} + \tan^{-1}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - \tan^{-1}\frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - \tan^{-1}\beta\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

Since

$$\tan\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} + \tan^{-1}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\right) = \frac{\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} + \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}}{1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}} = \infty$$

or

$$\tan^{-1}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} + \tan^{-1}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = 90^\circ$$

and also

$$\tan^{-1}\frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} + \tan^{-1}\beta\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = 90^\circ$$

we have

$$\underline{/G_c(j\omega_1)} = 0^\circ$$

$\boxed{\text{Thus, the angle of } G_c(j\omega_1) \text{ becomes } 0^\circ \text{ at } \omega = \omega_1 = 1/\sqrt{T_1 T_2}.}$

16.1 Características

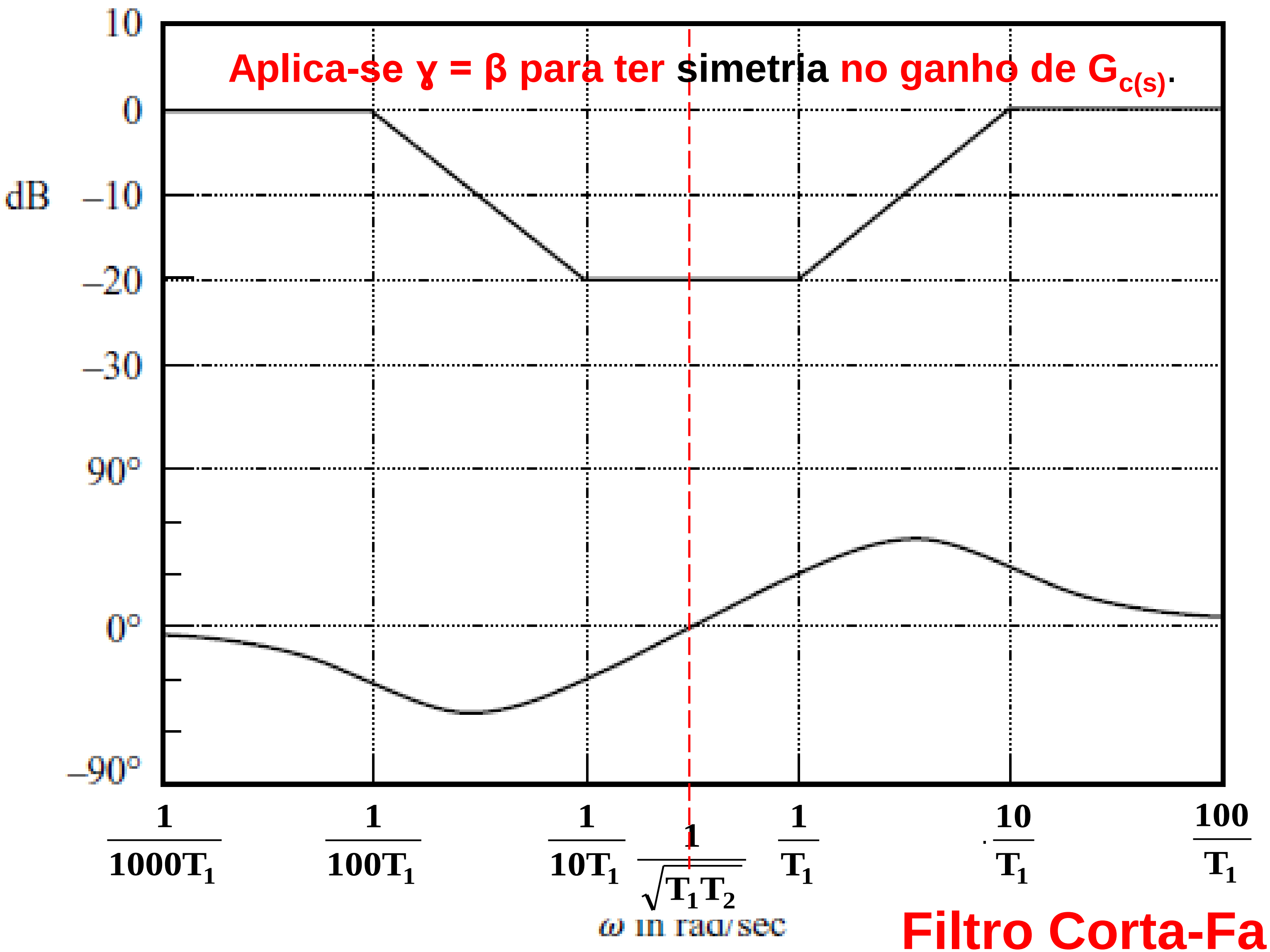
Para o Diagrama de Bode para **$G_c(s)$** com **$K_C = 1$** ; **$\gamma = \beta = 10$** e **$T_2 = 10T_1$** determinemos as frequências de canto.

$$G_c(jw) = \left(\frac{(jw + \frac{1}{T_1})}{(jw + \frac{\gamma}{T_1})}\right) \cdot \left(\frac{(jw + \frac{1}{T_2})}{(jw + \frac{1}{\beta T_2})}\right) = \left(\frac{(jw + \frac{1}{T_1})}{(jw + \frac{\beta}{T_1})}\right) \cdot \left(\frac{(jw + \frac{1}{T_2})}{(jw + \frac{1}{\beta T_2})}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_c(jw) = \left(\frac{(jw + \frac{1}{T_1})}{(jw + \frac{10}{T_1})}\right) \cdot \left(\frac{(jw + \frac{1}{10T_1})}{(jw + \frac{1}{100T_1})}\right) = \left(\frac{(1 + \frac{jw}{\boxed{\frac{1}{T_1}}})}{(1 + \frac{jw}{\boxed{\frac{10}{T_1}}})}\right) \cdot \left(\frac{(1 + \frac{jw}{\boxed{\frac{1}{10T_1}}})}{(1 + \frac{jw}{\boxed{\frac{1}{100T_1}}})}\right)$$

16.1 Características

O Diagrama de Bode para $G_c(s)$ com $K_c = 1$; $\gamma = \beta = 10$ e $T_2 = 10T_1$ é dado por:



Filtro Corta-Faixa

16.2 Procedimentos para Projeto

O Controlador **$G_c(jw)$** em **Atraso e Avanço de Fase** produz uma aumento na velocidade da resposta (Avanço) e mantém o ganho em baixas frequências (Atraso).

Procedimentos:

1. Suponha o seguinte Controlador em Avanço e Atraso de Fase:

$$G_c(s) = K_c\left(\frac{(s+\frac{1}{T_1})}{(s+\frac{\beta}{T_1})}\right)\left(\frac{(s+\frac{1}{T_2})}{(s+\frac{1}{\beta T_2})}\right) \quad ; \quad \gamma = \beta \text{ (Simetria)}$$

2. Determinar **K_c** dada a constante de erro estático.

A Função de Transferência de malha aberta do sistema compensado será:

$$G_c(s)G(s) = K_c\left(\frac{(s+\frac{1}{T_1})}{(s+\frac{\beta}{T_1})}\right)\left(\frac{(s+\frac{1}{T_2})}{(s+\frac{1}{\beta T_2})}\right)G(s) = \left(\frac{(s+\frac{1}{T_1})}{(s+\frac{\beta}{T_1})}\right)\left(\frac{(s+\frac{1}{T_2})}{(s+\frac{1}{\beta T_2})}\right)\underbrace{K_c G(s)}_{G_1(s)}$$

Plotar o Diagrama de Bode para $G_1(s)$.

16.2 Procedimentos para Projeto

3. Escolhe-se uma nova frequência de cruzamento de ganho **w_{ng}** como a frequência onde **$G_1(s)$** possui **-180^o**. Nesta frequência o sistema está no limiar da instabilidade onde deve ser requerida a nova margem de fase.

4. Escolhida a nova frequência de cruzamento de ganho **w_{ng}** pode-se determinar a **frequência de canto da parte de Atraso de Fase** uma década abaixo da nova **w_{ng}**, ou seja, **$1/T_2$** que será o **zero do Atraso de Fase**.

5. Considerando **φ_m ($+5^o$ a $+12^o$)** o ângulo da Margem de Fase requerida, **$\gamma = \beta$** e **$\gamma = 1/\alpha$** na parte em **Avanço**, calcula-se o fator **β** em:

$$\mathrm{sen}(\varphi_m) = \frac{(1-\alpha)}{(1+\alpha)} = \frac{\left(1-\frac{1}{\beta}\right)}{\left(1+\frac{1}{\beta}\right)} \Rightarrow \mathrm{sen}(\varphi_m) = \frac{(\beta-1)}{(\beta+1)}$$

6. Com o valor de **β** calcula-se a outra frequência de canto da parte em **Atraso** **$1/\beta T_2$** que será o **polo do Atraso de Fase**.

16.2 Procedimentos para Projeto

7. Para a parte em **Avanço** determina-se **$20\log_{10}|G_1(jw_{ng})|$**. Então o controlador em **Avanço e Atraso de Fase** deverá atenuar **$-20\log_{10}|G_1(jw_{ng})|$** na nova frequência de cruzamento de ganho **w_{ng}**.

8. Traça-se uma reta **R** com inclinação de **20 dB/década** passando pelo ponto **$P(w_{ng}\ ,\ -20\log_{10}|G_1(jw_{ng})|)$**.

- **zero do Avanço**: **$1/T_1$ = w onde R intercepta *$-20\log_{10}|K|$* dB**

Onde *K* é o **Fator Ganho** de **$G_1(jw)$** **!**

- **polo do Avanço**: **$\beta\ /T_1$ = w onde R intercepta 0 dB**

VER GRÁFICO DE $G_1(jw)$ A SEGUIR !!!

9. Verifique se as Margens de Ganho e de Fase são satisfatórias. Se não for, repita o processo de projeto pela modificação das localizações de polos e zeros do controlador até que um resultado satisfatório seja obtido.

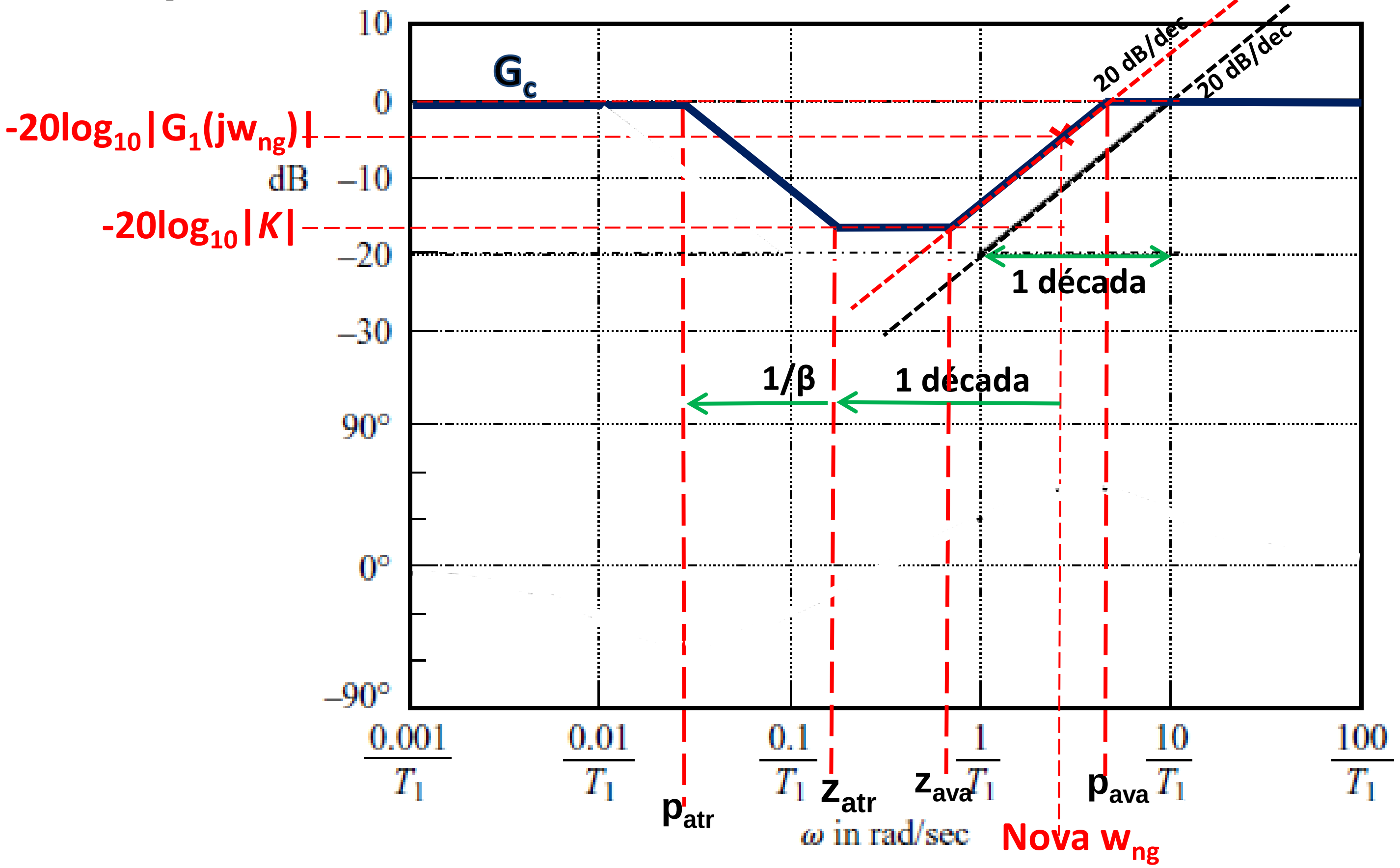
16.2 Procedimentos para Projeto

Análise no Diagrama de Bode:

- **zero do Atraso**: **$1/T_2 = w_{ng}/10$**
- **polo do Atraso**: **$1/\beta T_2 = w_{ng}/(10\beta)$**

Reta **R** com inclinação de **20 dB/década** passando pelo ponto **$P(w_{ng}, -20\log_{10}|G_1(jw_{ng})|)$**.

- **zero do Avanço**: **$1/T_1$ = w onde R intercepta $-20\log_{10}|K|$ dB**
- **polo do Avanço**: **β/T_1 = w onde R intercepta 0 dB**



Exemplo 1 – Seja o sistema de controle em malha fechada com realimentação unitária negativa que possui Função de Transferência dada por:

$$G(s)H(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

Projetar um controlador em Atraso e Avançode Fase de modo que K_v (constante de erro estático de velocidade) seja $10\ s^{-1}$, a Margem de Fase seja pelo menos 50° e a Margem de Ganho seja pelo menos 10 dB. (Somar 5° em φ_m).

$$G_c(s)=K_c\left(\frac{(s+\frac{1}{T_1})}{(s+\frac{\beta}{T_1})}\right)\left(\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}}\right)\quad ;\quad (\gamma=\beta)$$

Definindo:

$$G_1(s)=K_cG(s)=\frac{K_c}{s(s+1)(s+2)}$$

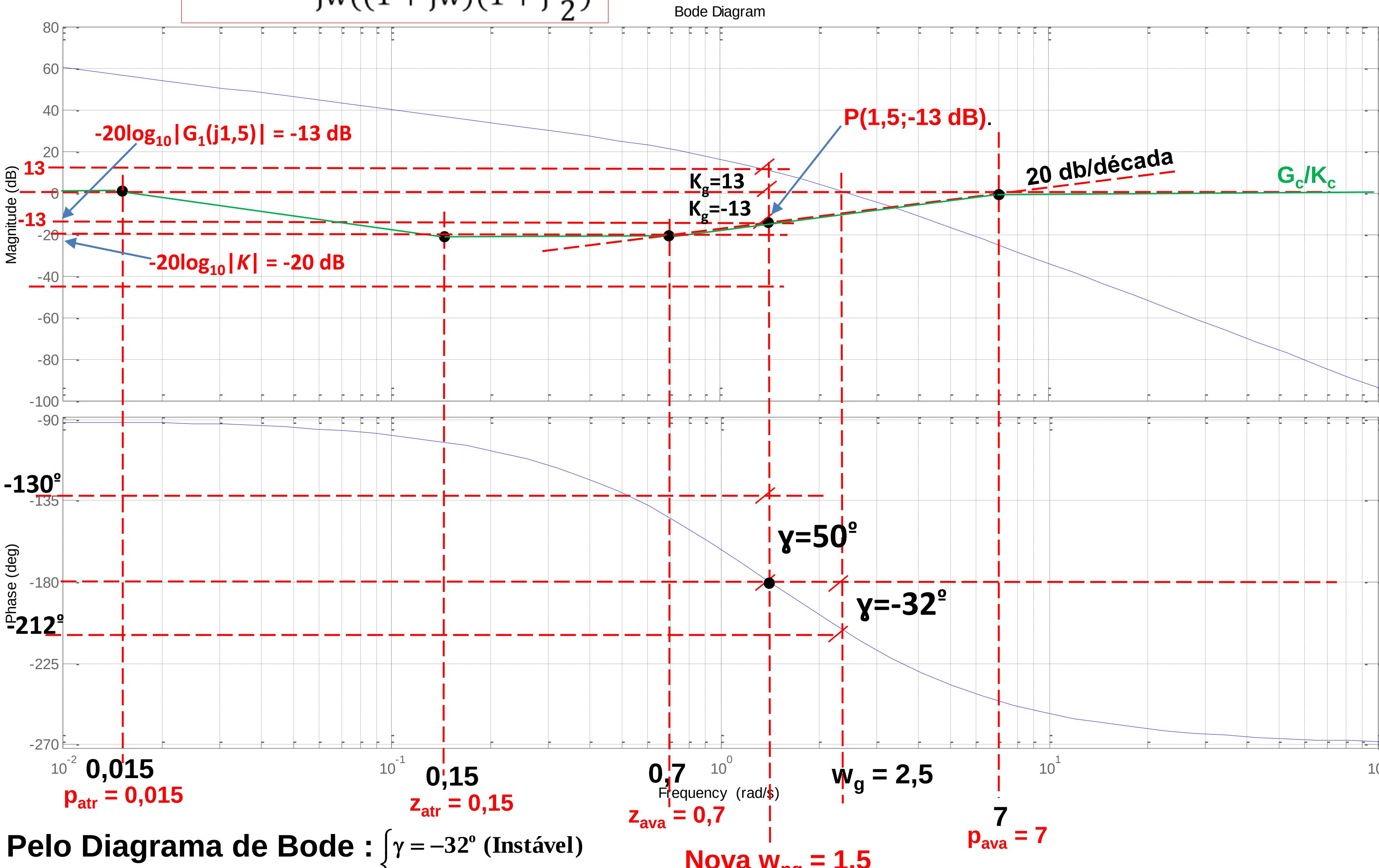
Ajuste do ganho **K_c**:

$$K_V=\lim_{s\to 0}\left\{s\left(K_c\left[\frac{(s+\frac{1}{T_1})}{(s+\frac{\beta}{T_1})}\frac{(s+\frac{1}{T_2})}{(s+\frac{1}{\beta T_2})}\right]\right)G(s)\right\}=K_c\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_V=\frac{K_c}{2}\Rightarrow 10=\frac{K_c}{2}\Rightarrow \boxed{K_c=20}$$

$$G_1(jw) = K_c G_c(jw) = 20\frac{1}{s(s+1)(s+2)} \Rightarrow G_1(jw) = \frac{20}{jw((jw+1)(jw+2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{G_1(jw) = \frac{10}{jw((1+jw)(1+j\frac{w}{2})}}$$



Pelo Diagrama de Bode : $\begin{cases} \gamma = -32^{o} \text{ (Instável)} \\ K_g = 13 \text{ dB} \end{cases}$

Parte em Atraso de Fase:

- Necessita-se de pelo menos **$\gamma = 50^\circ$**.
- Nova frequência de cruzamento de ganho **$w_{ng} = 1{,}5$ rd/s**
- Frequência de canto da parte de **Atraso de Fase** uma década abaixo de **w_{ng}**, ou seja, **$1/T_2 = 0{,}15$ rd/s** (**zero do Atraso**).
- Para **$\gamma = 50^\circ \Rightarrow \varphi_m = 50^\circ + 5^\circ = 55^\circ$**; calcula-se **$\beta$** em:

$$\mathrm{sen}(\varphi_m) = \frac{(\beta - 1)}{(\beta + 1)} \Rightarrow \beta = \frac{[1 + \mathrm{sen}(\varphi_m)]}{[1 - \mathrm{sen}(\varphi_m)]} \Rightarrow \beta = \frac{1{,}819}{0{,}181} \Rightarrow \boxed{\beta \cong 10}$$

Com o valor de **β** calcula-se a outra frequência de canto da parte em **Atraso**:

$1/\beta T_2 = 0{,}15 / 10 = 0{,}015$ rd/s (**polo do Atraso**).

Parte em Avanço de Fase:

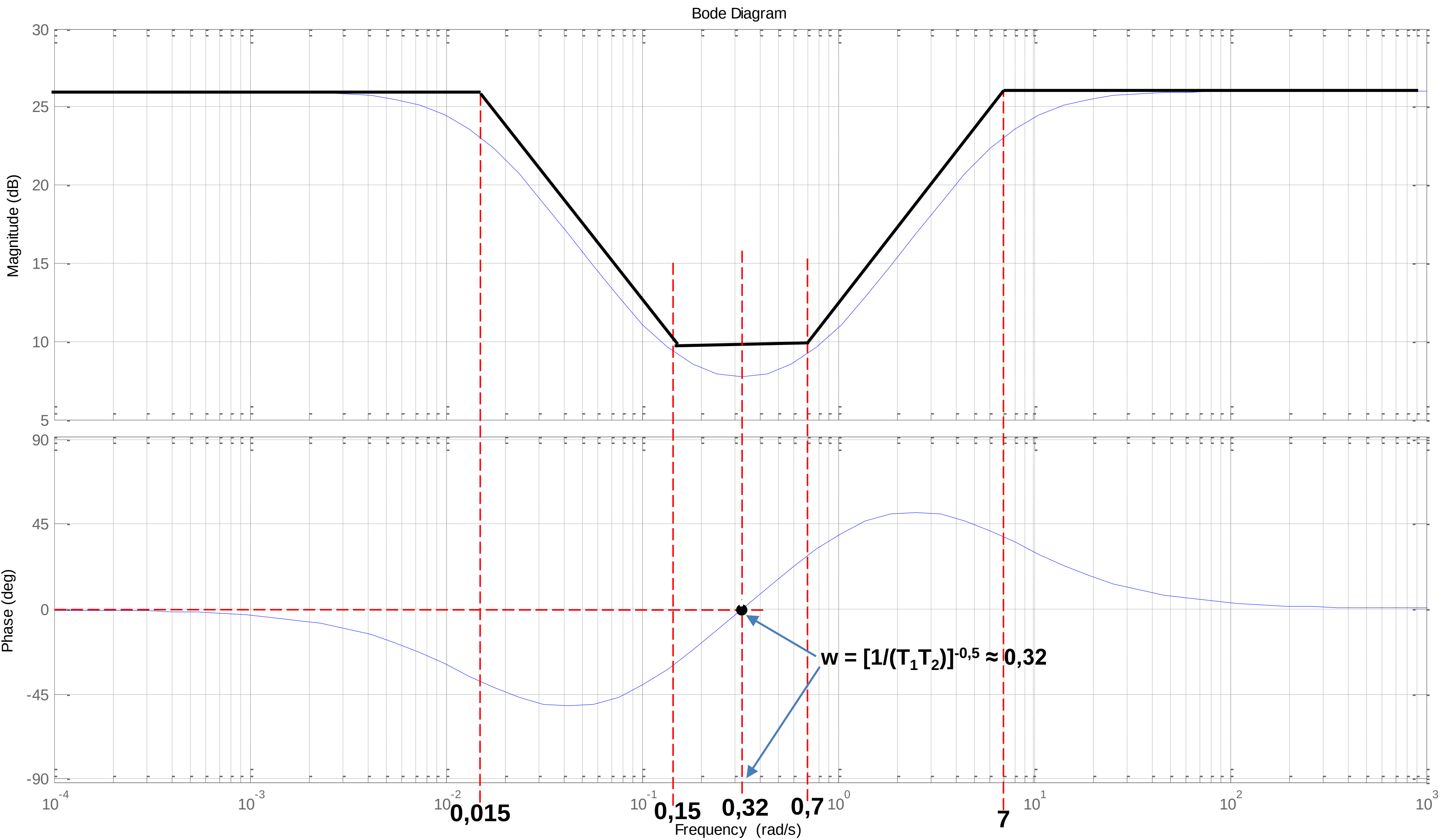
- Em **$w_{ng} = 1{,}5$ rd/s** o controlador em **Avanço e Atraso** deverá atenuar **$-20\log_{10}|G_1(j1{,}5)| = -13$ dB**.
- Traça-se uma reta **R** com inclinação de **20 dB/década** passando pelo ponto **P(1,5;-13 dB)**.

- **zero do Avanço:** **$1/T_1 = 0{,}7$ rd/s (onde R intercepta $-20\log_{10}|K|$ dB)**

- polo do Avanço: $\beta/T_1 = 7$ rd/s (onde R intercepta 0 dB)

O controlador por **Atraso e Avanço de Fase** determinado é:

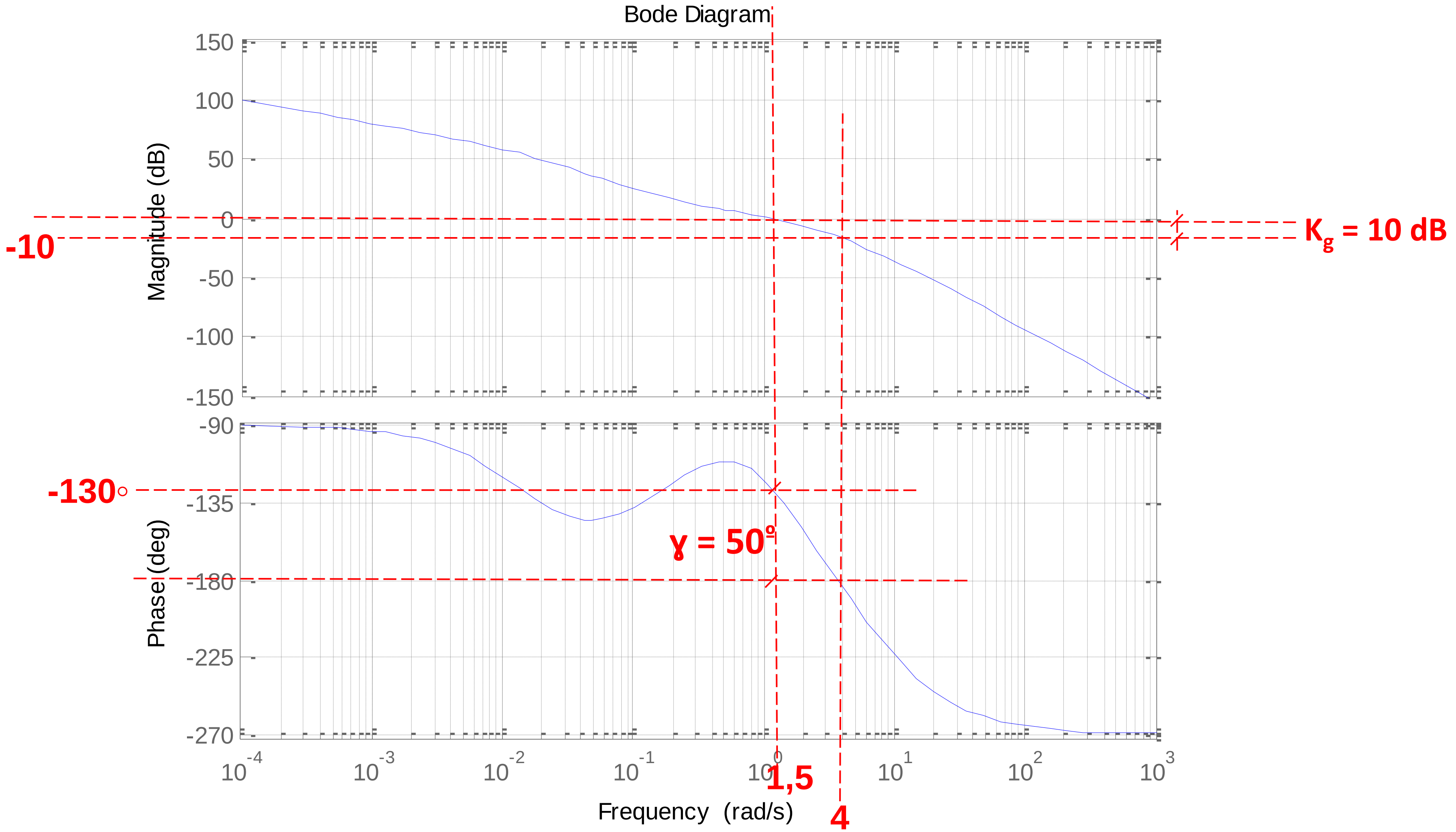
$$G_C(s) = 20\,\frac{(s+0{,}7)}{(s+7)}\,\frac{(s+0{,}15)}{(s+0{,}015)} \Longrightarrow G_c(s) = \frac{20s^2+17s+2{,}1}{s^2+7{,}015s+0{,}105}$$



O sistema compensado em malha aberta é:

$$G_c(s)G(s) = \frac{(s^2 + 0{,}85s + 0{,}105)}{(s^2 + 7{,}015s + 0{,}105)} \frac{20}{s(s+1)(s+2)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{G_c(s)G(s) = \frac{20s^2 + 17s + 2{,}1}{s^5 + 10{,}015s^4 + 21{,}15s^3 + 14{,}345s^2 + 0{,}21s}}$$

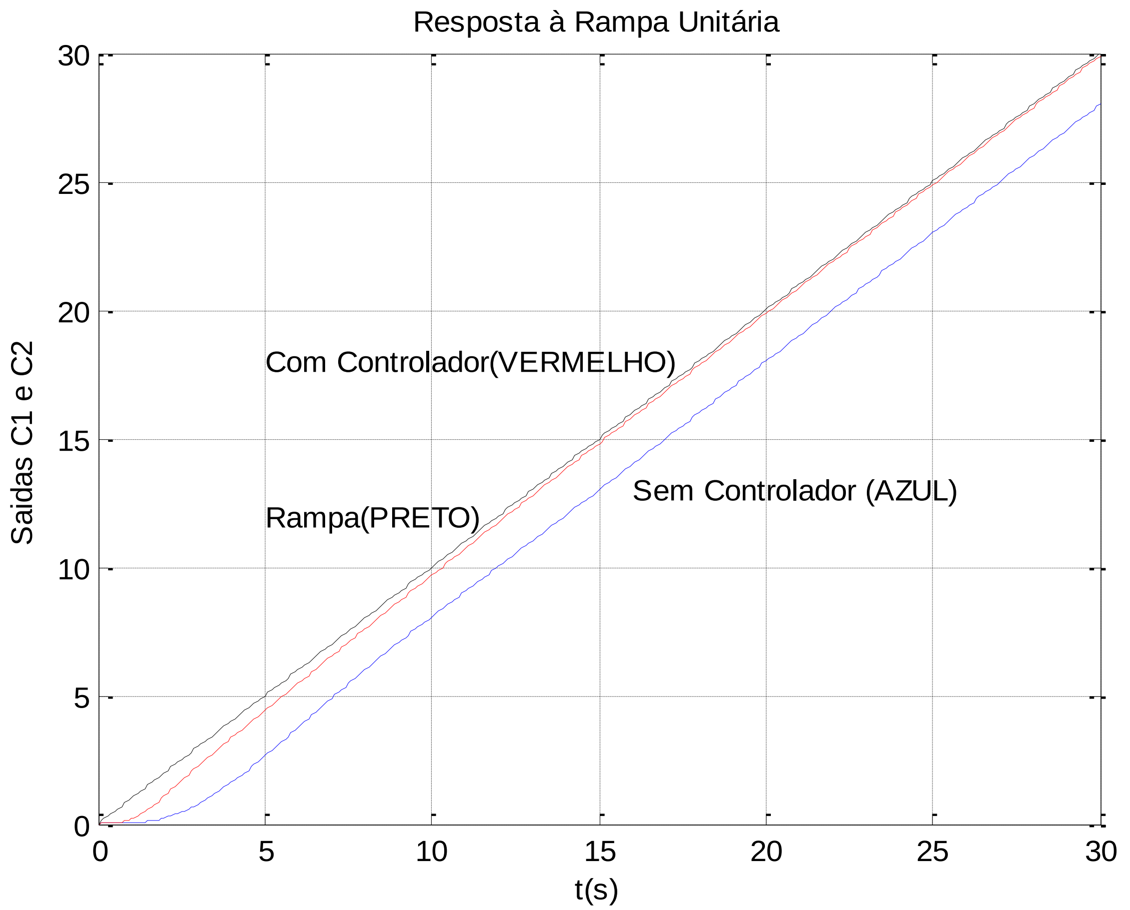


Função de Transferência em malha fechada sem o controlador:

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{(s^3 + 3s^2 + 2s + 1)}}$$

Função de Transferência em malha fechada com o controlador:

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(95{,}381s^2 + 81s + 10)}{(4{,}7691s^5 + 47{,}7287s^4 + 110{,}3026s^3 + 163{,}724s^2 + 82s + 10)}}$$

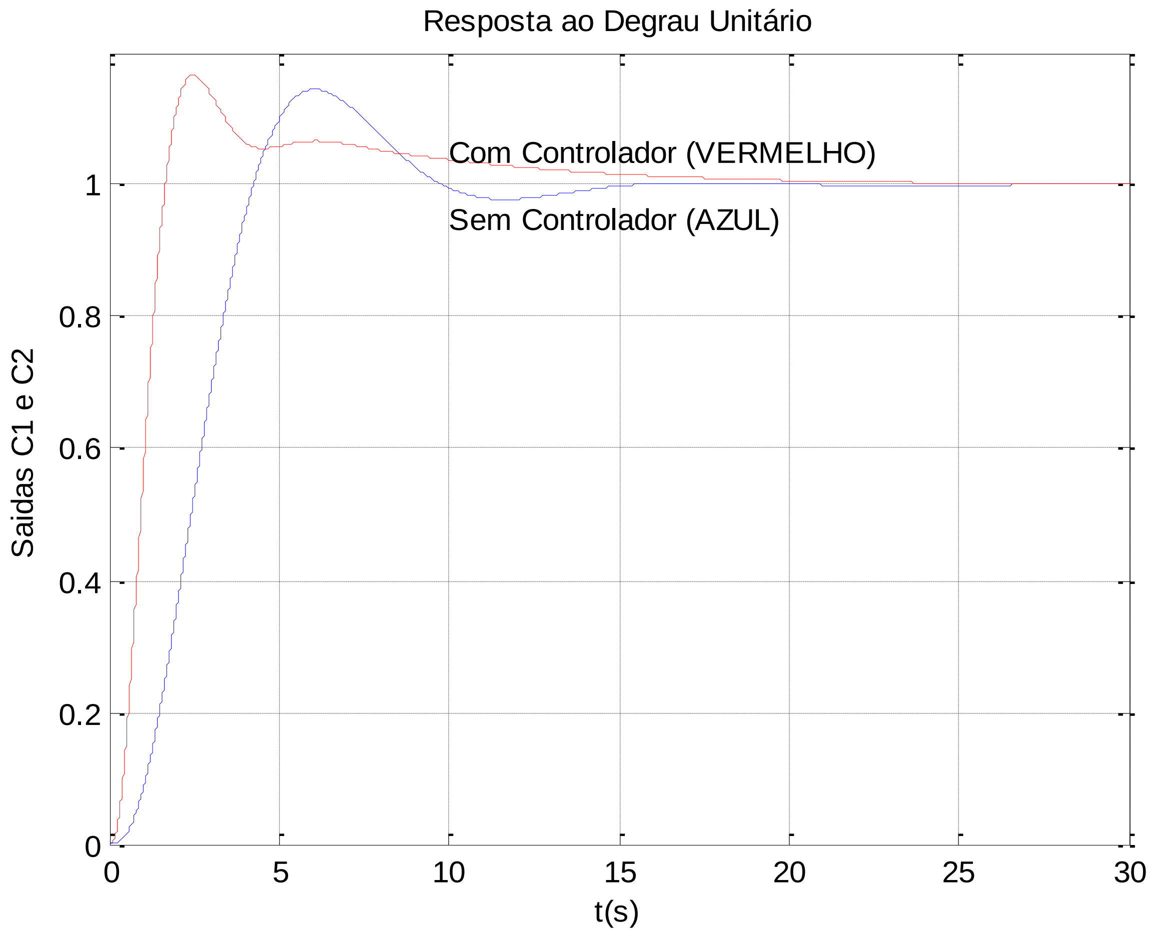


Função de Transferência em malha fechada sem o controlador:

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{(s^3 + 3s^2 + 2s + 1)}}$$

Função de Transferência em malha fechada com o controlador:

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(95{,}381s^2 + 81s + 10)}{(4{,}7691s^5 + 47{,}7287s^4 + 110{,}3026s^3 + 163{,}724s^2 + 82s + 10)}}$$



Exercício 2 – Seja o sistema de controle em malha fechada com realimentação unitária negativa que possui Função de Transferência dada por:

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)}$$

Projetar um controlador em Atraso e Avanço de fase de modo que K_v (constante de erro estático de velocidade) seja $20\ s^{-1}$, a margem de fase seja pelo menos 60° e a margem de ganho seja pelo menos 8 dB. (Somar 5° em φ_m).

$$G_c(s) = K_c\left(\frac{(s+\frac{1}{T_1})}{(s+\frac{\beta}{T_1})}\right)\left(\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}}\right) \quad ; \quad (\gamma=\beta)$$

Definindo:

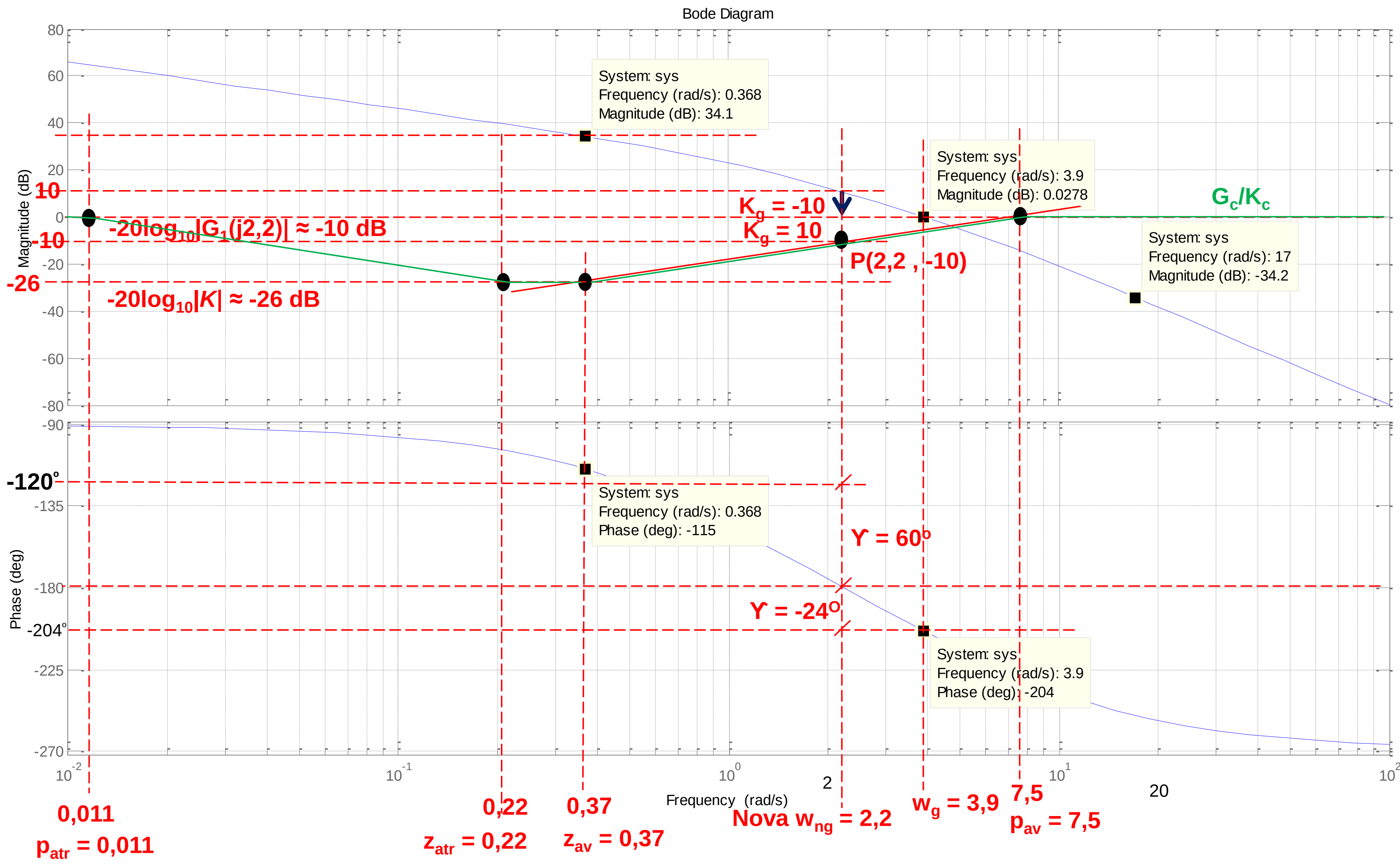
$$G_1(s) = K_c G(s) = \frac{K_c}{s(s+1)(s+5)}$$

Ajuste do ganho **K_c**:

$$K_V = \lim_{s\to 0}\left\{s\left(K_c\left[\frac{(s+\frac{1}{T_1})}{(s+\frac{\beta}{T_1})}\frac{(s+\frac{1}{T_2})}{(s+\frac{1}{\beta T_2})}\right]\right)G(s)\right\} = K_c\frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_v = \frac{K_c}{5} \Rightarrow 20 = \frac{K_c}{5} \Rightarrow \boxed{K_c = 100}$$

$$G_1(jw) = \frac{100}{jw(jw+1)(jw+5)} = \frac{K = 20}{jw(1+jw)(1+j\frac{w}{5})}$$



Parte em Atraso de Fase:

- Necessita-se de pelo menos **$\gamma = 60^\circ$**.
- **Nova frequência** de cruzamento de ganho **$w_{ng} = 2{,}2$ rd/s**
- Frequência de canto da parte de Atraso de Fase uma década abaixo de **w_{ng}**, ou seja, **$1/T_2 = 0{,}22$ rd/s** (**zero do Atraso**).
- Para **$\gamma = 60^\circ \Rightarrow \varphi_m = 60^\circ + 5^\circ = 65^\circ$**; calcula-se **$\beta$** em:

$$\operatorname{sen}(\varphi_m) = \frac{(\beta - 1)}{(\beta + 1)} \Rightarrow \beta = \frac{[1 + \operatorname{sen}(\varphi_m)]}{[1 - \operatorname{sen}(\varphi_m)]} \Rightarrow \beta = \frac{1{,}91}{0{,}094} \Rightarrow \boxed{\beta \cong 20}$$

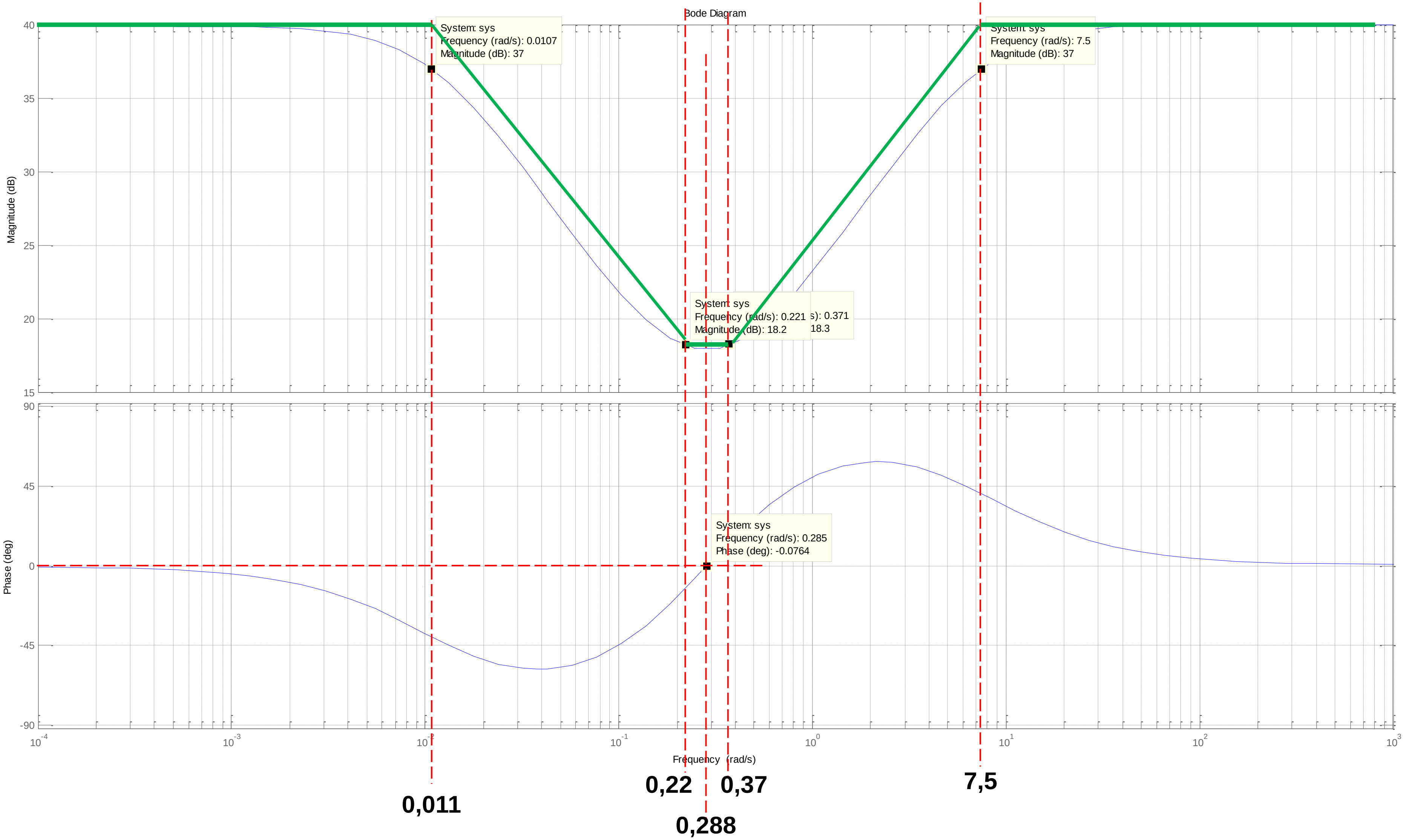
Com o valor de **β** calcula-se a outra frequência de canto da parte em Atraso **$1/\beta T_2 = 0{,}22 / 20 = 0{,}011$ rd/s** (**polo do Atraso**).

Parte em Avanço de Fase:

- Em **$w_{ng} = 2{,}2$ rd/s** o controlador em Avanço e Atraso deverá atenuar **$-20\log_{10}|G(j2{,}2)| \approx -10$ dB**.
- Traça-se uma reta **R** com inclinação de **20 dB/década** passando pelo ponto **(2,2;-10 dB)**.
  - **zero do Avanço: $1/T_1 = 0{,}37$ rd/s (onde R intercepta $-20\log_{10}|K|$ dB)**
  - **polo do Avanço: $\beta/T_1 = 7{,}5$ rd/s (onde R intercepta 0 dB)**

O controlador por **Atraso e Avanço de Fase** determinado é:

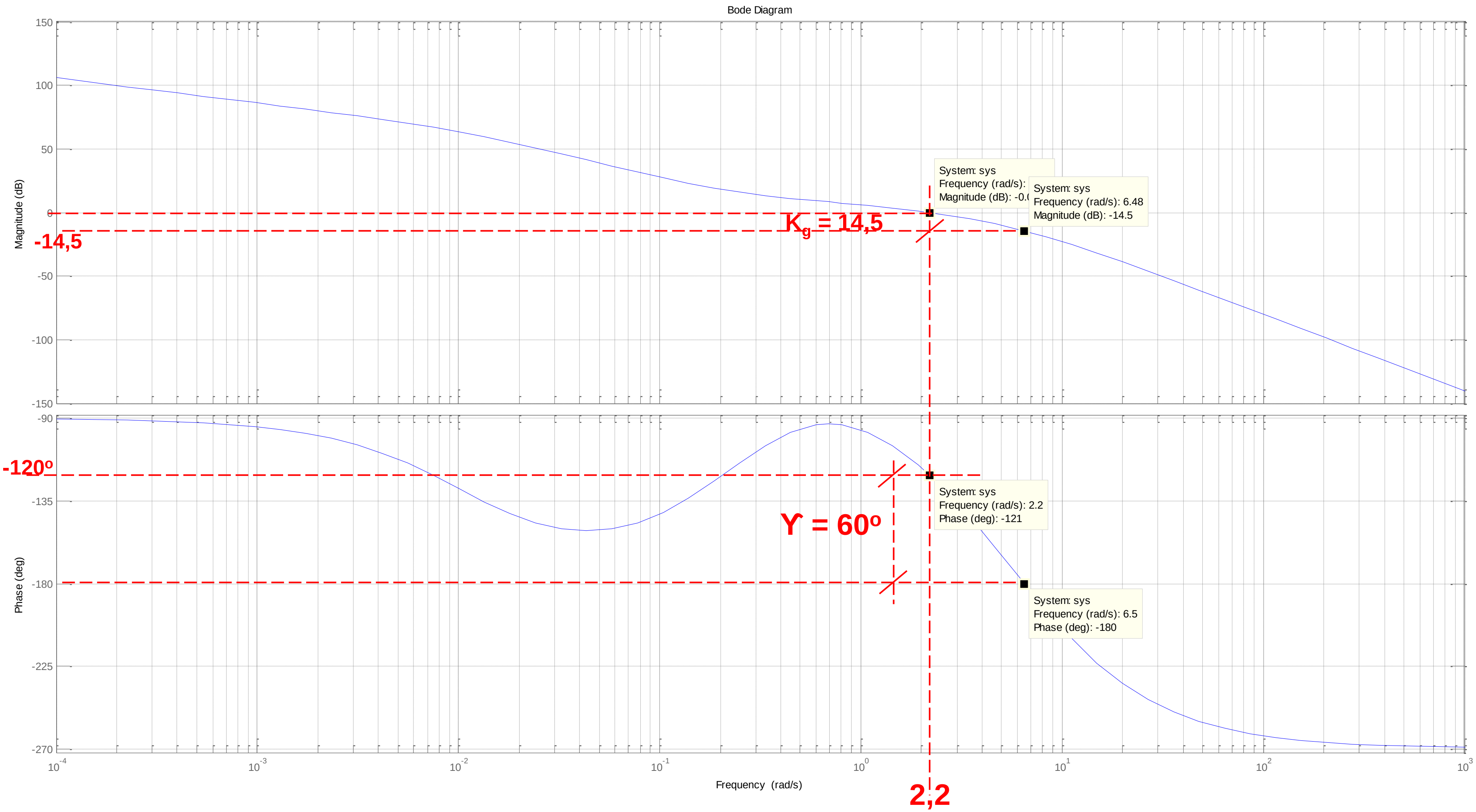
$$G_c(s) = 100\frac{(s+0{,}37)}{(s+7{,}5)}\,\frac{(s+0{,}22)}{(s+0{,}011)} \Rightarrow \boxed{G_c(s) = \frac{100s^2 + 59s + 8{,}14}{s^2 + 7{,}51s + 0{,}0825}}$$



A Função de Transferência de $G_c(s)G(s)$ será:

$$G_c(s)G(s) = 100\frac{(s+0{,}37)}{(s+7{,}5)}\,\frac{(s+0{,}22)}{(s+0{,}011)}\,\frac{1}{s(s+1)(s+5)} \Rightarrow \boxed{G_c(s)G(s) = \frac{1199{,}90s^2 + 714{,}42s + 100}{12s^5 + 161{,}0239s^4 + 595{,}1434s^3 + 451{,}1195s^2 + 5s}}$$

Diagrama de Bode para $G_c(s)G(s)$

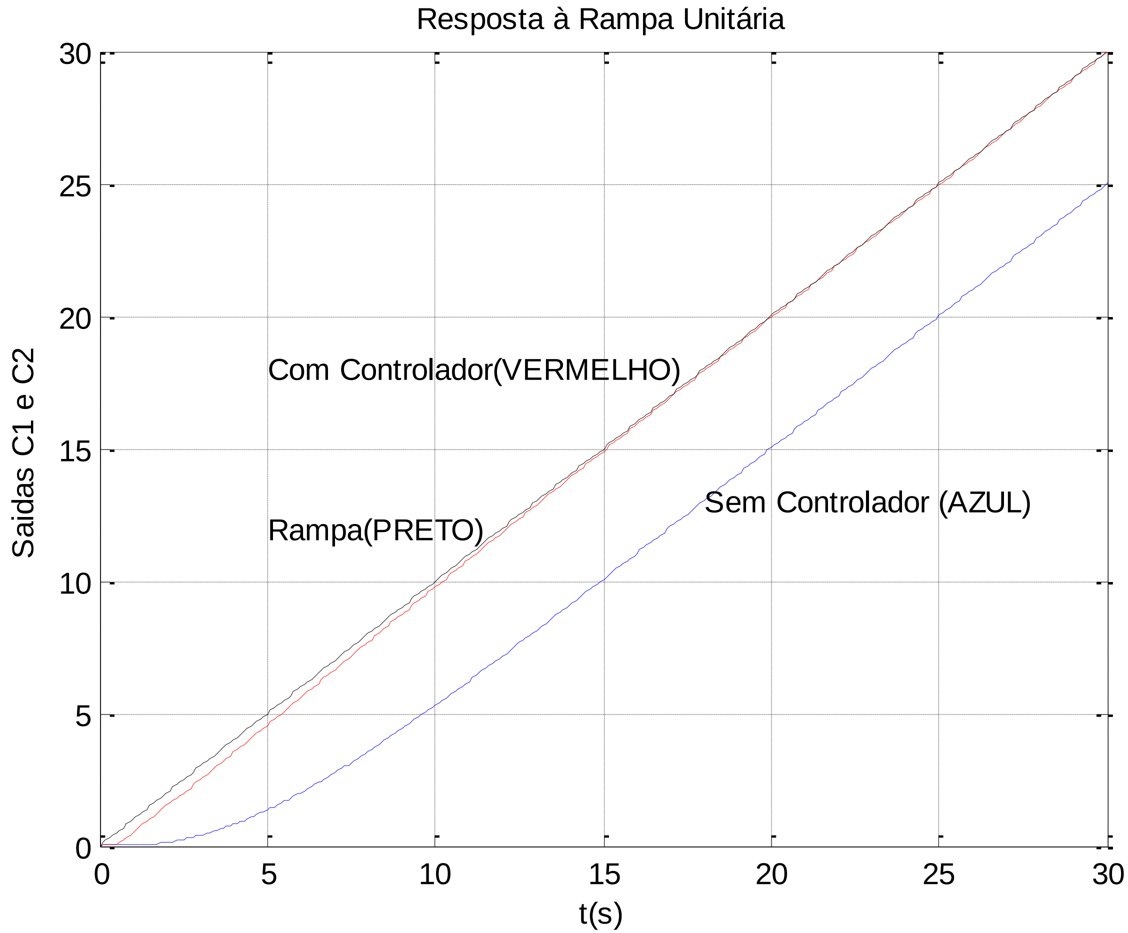


A Função de Transferência de malha fechada sem $G_c(s)$ será:

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 5s + 1}}$$

A Função de Transferência de malha fechada com $G_c(s)$ será:

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1199{,}90s^2 + 714{,}42s + 100}{12s^5 + 161s^4 + 595{,}1s^3 + 1651s^2 + 719{,}4s + 100}}$$



A Função de Transferência de malha fechada sem $G_c(s)$ será:

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 5s + 1}}$$

A Função de Transferência de malha fechada com $G_c(s)$ será:

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1199{,}90s^2 + 714{,}42s + 100}{12s^5 + 161s^4 + 595{,}1s^3 + 1651s^2 + 719{,}4s + 100}}$$