UEM-CCE-DMA- 5279- T1 E T2- CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III/2014.

LISTA DE EXERCÍCIOS SOBRE SÉRIES DE FOURIER

1. Obtenha a série de Fourier para cada uma das seguintes funções. Suponha que as funções tenham extensões periódicas fora do intervalo original.

a) $f(x)=\begin{cases}-1, & -1\le x<0\\ 1, & 0\le x<1\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x<\pi\end{cases}$

c) $f(x)=x,\quad -1\le x\le 1$

d) $f(x)=\operatorname{sen}^2 x\quad -\pi\le x\le\pi$

e) $f(x)=\begin{cases}1, & -2\le x<0\\ 0, & 0\le x<1\\ 1, & 1\le x<2\end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases}l+x, & -l\le x<0\\ l-x, & 0\le x<l\end{cases}$

g) $f(x)=x^2,\quad -1\le x\le 1$

h) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<-\pi/2\\ 1, & -\pi/2\le x<\pi/2\\ 0, & \pi/2\le x<\pi\end{cases}$

i) $f(x)=\begin{cases}0, & -1\le x<0\\ x^2, & 0\le x<1\end{cases}.$

2. Verifique se cada função dada abaixo é par, ímpar ou nenhum dos dois:

a) x^5 b) x^3-2x c) x^3-2x+6 d) $\tan 2x$ e) $\sec x$ f) e^x

g) $|x|^3$ h) $|\operatorname{sen} x|$ i) $\left(2x-x^3\right)^4$.

3. Em cada item abaixo ache a série de Fourier exigida para a função dada e faça o gráfico da função, para que seja par ou ímpar, sobre dois períodos simétricos, a fim de que a série convirja sobre esses dois períodos:

a) $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 1\le x\le 2\end{cases}$ série de co-senos, período 4.

b) $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1\\ 1, & 1\le x<2\end{cases}$ série de senos, período 4.

c) $f(x)=1,\quad 0\le x\le\pi,$ série de co-senos, período 2π.

d) $f(x)=1,\quad 0<x<\pi,$ série de senos, período 2π.

e) $f(x)=\begin{cases}0, & 0<x<\pi\\ 1, & \pi\le x<2\pi\\ 2, & 2\pi\le x\le 3\pi\end{cases}$ série de senos, período 6π .

f) $f(x)=x,\quad 0\le x<1,$ série de senos, período 2.

g) $f(x)=l-x,\quad 0\le x<l,$ série de co-senos, período $2l$.

h) $f(x)=l-x,\quad 0\le x<l,$ série de senos, período $2l$.

RESPOSTAS

1 a) $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}(2n-1)\pi x}{2n-1}$;

b) $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{2}{(2n-1)^2\pi}\cos(2n-1)x+\dfrac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen} nx\right]$

c) $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen} n\pi x}{n}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x$

e) $f(x)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2}\cos\dfrac{n\pi x}{2}+\left(1-\cos\dfrac{n\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{2}\right]$

f) $f(x)=\dfrac{l}{2}+\dfrac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{l}$

g) $f(x)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos n\pi x$

h) $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos(2n-1)x$

i) $f(x)=\dfrac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos n\pi x+b_n\operatorname{sen} n\pi x\right]$;

$$a_0=\tfrac{1}{3},\quad a_n=\frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2},\quad b_n=\begin{cases}-1/n\pi, & n \text{ par}\\ (1/n\pi)-(4/n^2\pi^2), & n \text{ ímpar}\end{cases}$$

2. a) ímpar b) ímpar c) nenhum dos dois d) ímpar e)par f) nenhum dos dois g) par h) par i) par.

3 a) $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2}$

b) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{2}{n\pi}\left(-\cos n\pi+\dfrac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{2}\right]$

c) $f(x)=1$

d) $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{2n-1}$

e) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{2}{n\pi}\left(\cos\dfrac{n\pi}{3}+\cos\dfrac{2n\pi}{3}-2\cos n\pi\right)\operatorname{sen}\dfrac{nx}{3}\right]$

f) $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen} 2n\pi x}{n}$

g) $f(x)=\dfrac{l}{2}+\dfrac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{l}$

h) $f(x)=\dfrac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{l}$.

ALGUMAS INFORMAÇÕES SOBRE SÉRIES DE FOURIER ESPECIAIS

Seja f um função originalmente definida em $[0, l]$. Foi mostrado que é possível representar f ou por uma série de senos ou por uma série de co-senos (vide exercícios 3). Apresentamos resultados que garantiam que isso é possível por construção de extensões periódicas ímpares ou pares de f, respectivamente.

Os resultados abaixo tratam de algumas séries de Fourier especializadas que convergem para a função dada f em $(0, l)$.

I. Dada uma função f integrável em um intervalo $[0, l]$. Estenda a função f, de modo arbitrário, ao intervalo $(l, 2l]$ .Então, estenda a função resultante em $[-2l, 0)$ de modo que a resultante seja uma função ímpar em $[-2l, 2l]$, e depois estenda a função obtida em todos os outros pontos, como uma função periódica de período $4l$. (Veja figura abaixo). Então, esta função tem uma série de Fourier de senos em termos das funções $\operatorname{sen}(n\pi x/2l)$, $n=1,2,3,\ldots$ ou seja

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x/2l)$, onde $b_n=\dfrac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{2l}\,dx.$ Esta série converge para a função original em $(0, l)$.

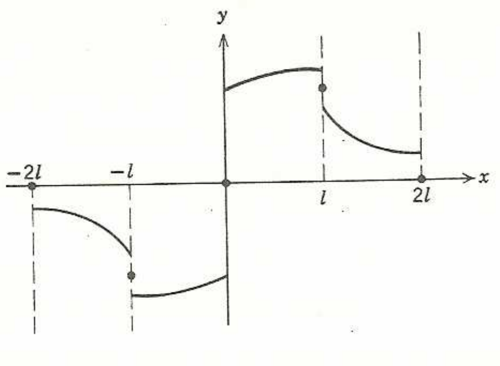


Fig. 10.10

II. Dada uma função f integrável em um intervalo $[0, l]$. Estenda a função f ao intervalo $(l, 2l]$, de modo que ela seja simétrica em torno da reta $x = l$; isto é, de modo a satisfazer $f(2l - x) = f(x)$ para $0 \leq x < l.$ Então, estenda a função resultante em $[-2l, 0)$ de modo que a resultante seja uma função ímpar em $[-2l, 2l]$, e depois estenda a função obtida em todos os outros pontos, como uma função periódica de período $4l.$ (Veja figura abaixo). Então, esta função tem uma série de Fourier em termos das funções $\operatorname{sen}(\pi x / 2l)$, $\operatorname{sen}(3\pi x / 2l)$, $\operatorname{sen}(5\pi x / 2l), \ldots$; ou seja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad \text{onde} \qquad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2l}\, dx.$$

Esta série converge para a função original em $(0, l)$.

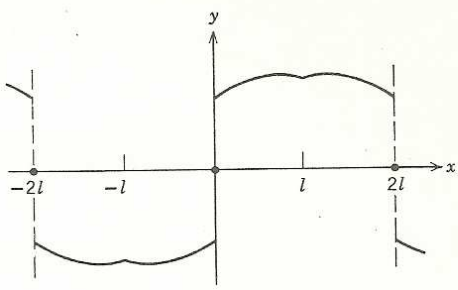
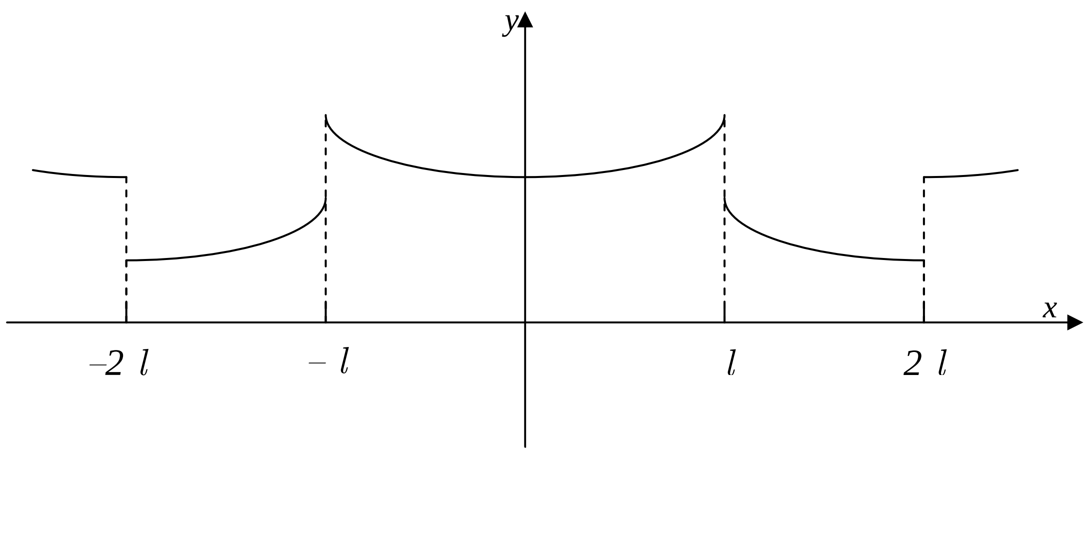


Fig. 10.11

III. Dada uma função f integrável em um intervalo $[0, l]$. Estenda a função f, de modo arbitrário, ao intervalo $(l, 2l]$ .Então, estenda a função resultante em $[-2l, 0)$ de modo que a resultante seja uma função par em $[-2l, 2l]$, e depois estenda a função obtida em todos os outros pontos, como uma função periódica de período $4l.$ (Veja figura abaixo). Então, esta função tem uma série de Fourier de co-senos em termos das funções $\cos(n\pi x / 2l)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ou seja

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x / 2l) \text{ , onde} \qquad a_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{2l}\, dx; \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Esta série converge para a função original em $(0, l)$.



IV. Dada uma função f integrável em um intervalo $[0, l]$. Estenda a função f ao intervalo $(l, 2l]$, de modo que ela seja antissimétrica em torno da reta $x = l$; isto é, de modo a satisfazer $f(2l - x) = -f(x)$ para $0 \leq x < l$. Então, estenda a função resultante em $[-2l, 0)$ de modo que a resultante seja uma função par em $[-2l, 2l]$, e depois estenda a função obtida em todos os outros pontos, como uma função periódica de período $4l$. (Veja figura abaixo). Então, esta função tem uma série de Fourier em termos das funções $\cos(\pi x / 2l)$, $\cos(3\pi x / 2l)$, $\cos(5\pi x / 2l), \ldots$; ou seja

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l},$$

onde $a_0 = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\, dx$, $\qquad a_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\, dx; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

Esta série converge para a função original em $(0, l)$.