MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES **SUCESSIVAS:** UM EXERCÍCIO

MAT 271 – CÁLCULO NUMÉRICO –PER3/2021/UFV Professor Amarísio Araújo – DMA/UFV

EXERCÍCIO

EXERCÍCIO 1.10 DA APOSTILA (página 19):

A equação $xe^{-x}-e^{-3}=0$ possui exatamente duas soluções α_1 e α_2 , sendo que $\alpha_1\epsilon[0.01$, 1] e $\alpha_2\epsilon[4$, 5].

Considere as funções: φ_1 e φ_2 dadas por $\varphi_1(x) = e^{x-3}$ e $\varphi_2(x) = lnx + 3$.

- (a) φ_1 pode ser usada para obter uma aproximação de α_1 pelo método das aproximações sucessivas com garantia de convergência? E φ_2 ?
- (b) φ_1 pode ser usada para obter uma aproximação de α_2 pelo método das aproximações sucessivas com garantia de convergência? E φ_2 ?

RESOLVENDO O EXERCÍCIO

Temos a equação f(x) = 0, onde $f(x) = xe^{-x} - e^{-3}$.

Sejam
$$\varphi_1(x) = e^{x-3} e \varphi_2(x) = lnx + 3$$
.

Mostremos, inicialmente, que é possível obter as duas equivalências:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi_1(x)$$
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi_2(x)$

$$\boxed{ xe^{-x} - e^{-3} = 0 } \iff xe^{-x} = e^{-3} \iff \boxed{ x = e^{x-3} }$$

|
$$xe^{-x} - e^{-3} = 0$$
 $\Leftrightarrow xe^{-x} = e^{-3} \stackrel{x>0}{\iff} \ln(xe^{-x}) = \ln(e^{-3})$

$$\overset{x>0}{\iff} \ln x + \ln e^{-x} = -3 \overset{x>0}{\iff} \ln x - x = -3 \overset{x>0}{\iff} x = \ln x + 3$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi_1(x), \forall x \in \mathbb{R} \qquad \qquad f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi_2(x), \forall x \in \{0, \infty\}$$

RESOLVENDO O EXERCÍCIO

• φ derivável em [a, b]

• $|\varphi'(x)| < 1 \text{ em } [a, b]$

(a) φ_1 pode ser usada para obter uma aproximação de α_1 pelo método das aproximações sucessivas com garantia de convergência? E φ_2 ?

Verificando as condições suficientes de convergência:

- A função $\varphi_1(x)=e^{x-3}$ é derivável em [0.01,1], sendo ${\varphi_1}'(x)=e^{x-3}$.
- A função $\varphi_2(x) = lnx + 3$ é derivável em [0.01,1], sendo $\varphi_2'(x) = \frac{1}{x}$.

$$|{\varphi_1}'(x)| = |e^{x-3}| = e^{x-3}, \forall x \in [0.01,1].$$

$$0.01 \le x \le 1 \implies -2.99 \le x - 3 \le -2 \implies e^{x-3} \le e^{-2} < 1 \implies |\varphi_1'(x)| < 1, \forall x \in [0.01, 1]$$

Se φ_1 for usada para obter uma aproximação da solução α_1 , há garantia de convergência.

$$|\varphi_2'(x)| = |1/x| = 1/x, \forall x \in [0.01, 1]$$

 $0.01 \le x \le 1 \implies 1/x \ge 1 \implies |\varphi_2'(x)| \ge 1, \forall x \in [0.01, 1]$

Se φ_2 for usada para obter uma aproximação da solução α_1 , não há garantia de convergência.

RESOLVENDO O EXERCÍCIO

(b) φ_1 pode ser usada para obter uma aproximação de α_2 pelo método das aproximações sucessivas com garantia de convergência? E φ_2 ?

Verificando as condições suficientes de convergência:

- φ derivável em [a, b]
- $|\varphi'(x)| < 1 \text{ em } [a, b]$

A função
$$\varphi_1(x)=e^{x-3}$$
 é derivável em [4,5], sendo ${\varphi_1}'(x)=e^{x-3}$.

A função $\varphi_2(x) = lnx + 3$ é derivável em [4,5], sendo $\varphi_2'(x) = \frac{1}{x}$.

$$|\varphi_1'(x)| = |e^{x-3}| = e^{x-3}, \forall x \in [4,5].$$

$$4 \le x \le 5 \implies 1 \le x - 3 \le 2 \implies e^{x - 3} \ge e^1 > 1 \implies |\varphi_1'(x)| > 1, \forall x \in [4, 5]$$

Se φ_1 for usada para obter uma aproximação da solução α_2 , não há garantia de convergência.

$$|\varphi_2'(x)| = |1/x| = 1/x, \forall x \in [4,5]$$

 $4 \le x \le 5 \implies 1/x \le 1/4 < 1 \implies |\varphi_2'(x)| < 1, \forall x \in [4,5]$

Se φ_2 for usada para obter uma aproximação da solução α_2 , há garantia de convergência.

ENCONTRANDO APROXIMAÇÕES DE $lpha_1$ E $lpha_2$

$$\alpha_1 \epsilon [0.01,1]$$

 $\varphi_1(x) = e^{x-3}$, $x_0 = 0.5$, com erro relativo menor que $\varepsilon = 0.001$

$$x_1 = \varphi_1(x_0) = \varphi_1(0.5) = e^{0.5-3} = 0.082085$$

$$x_2 = \varphi_1(x_1) = \varphi_1(0.082085) = e^{0.082085 - 3} = 0.054046$$

$$x_3 = \varphi_1(x_2) = \varphi_1(0.054046) = e^{0.054046-3} = 0.052552$$

$$x_4 = \varphi_1(x_3) = \varphi_1(0.052552) = e^{0.052552-3} = 0.052473$$

$$x_5 = \varphi_1(x_4) = \varphi_1(0.052473) = e^{0.052473-3} = 0.052469$$

 $\alpha_1 \cong x_5 = 0.052469$, com erro relativo menor que $\varepsilon = 0.001$.

$$\frac{|x_1 - x_0|}{|x_1|} = 5.0912 > \varepsilon$$

$$\frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = 0.5188 > \varepsilon$$

$$\frac{|x_3 - x_2|}{|x_3|} = 0.0284 > \varepsilon$$

$$\frac{|x_4 - x_3|}{|x_4|} = 0.0015 > \varepsilon$$

$$\frac{|x_5 - x_4|}{|x_5|} = 0.0001 < \varepsilon$$

ENCONTRANDO APROXIMAÇÕES DE $lpha_1$ E $lpha_2$

$$\alpha_2 \epsilon [4,5]$$

$$\varphi_2(x) = lnx + 3$$
, $x_0 = 4$, com erro relativo menor que $\varepsilon = 0.001$

$$x_1 = \varphi_2(x_0) = \varphi_2(4) = \ln(4) + 3 = 4.386294$$

$$x_2 = \varphi_2(x_1) = \varphi_2(4.386294) = \ln(4.386294) + 3 = 4.478485$$

$$x_3 = \varphi_2(x_2) = \varphi_2(4.478485) = \ln(4.478485) + 3 = 4.499285$$

$$x_4 = \varphi_2(x_3) = \varphi_2(4.499285) = \ln(4.499285) + 3 = 4.503918$$

$$x_5 = \varphi_2(x_4) = \varphi_2(4.503918) = \ln(4.503918) + 3 = 4.504947$$

 $\alpha_2 \cong x_5 = 4.504947$, com erro relativo menor que $\varepsilon = 0.001$.

$$\frac{|x_1 - x_0|}{|x_1|} = 0.0881 > \varepsilon$$

$$\frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = 0.0206 > \varepsilon$$

$$\frac{|x_3 - x_2|}{|x_3|} = 0.0046 > \varepsilon$$

$$\frac{|x_4 - x_3|}{|x_4|} = 0.00102 > \varepsilon$$

$$\frac{|x_5 - x_4|}{|x_5|} = 0.0002 < \varepsilon$$

USANDO $\varphi_2(x)$ COM $x_0 = 0.5$:

$$\varphi_2(x) = \ln x + 3, x_0 = 0.5.$$

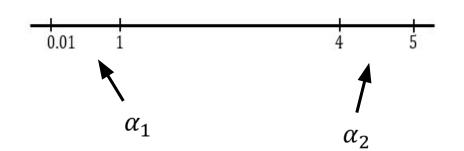
$$x_1 = \varphi_2(x_0) = \varphi_2(0.5) = \ln(0.5) + 3 = 2.30685$$

$$x_2 = \varphi_2(x_1) = \varphi_2(2.30685) = \ln(2.30685) + 3 = 3.835883$$

$$x_3 = \varphi_2(x_2) = \varphi_2(3.835883) = \ln(3.835883) + 3 = 4.344310$$

$$x_4 = \varphi_2(x_3) = \varphi_2(4.344310) = \ln(4.344310) + 3 = 4.468867$$

$$x_5 = \varphi_2(x_4) = \varphi_2(4.468867) = \ln(4.468867) + 3 = 4.497135$$



A sequência $x_{n+1} = \varphi_2(x_n)$ não está convergindo para a solução α_1

A sequência $x_{n+1} = \varphi_2(x_n)$ está convergindo para a solução α_2

USANDO $\varphi_1(x)$ COM $x_0 = 4$:

$$\varphi_1(x) = e^{x-3}, x_0 = 4$$

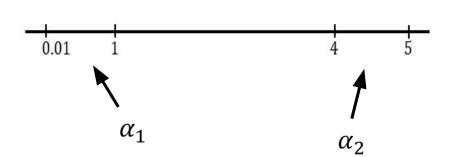
$$x_1 = \varphi_1(x_0) = \varphi_1(4) = e^{4-3} = 2.718282$$

$$x_2 = \varphi_1(x_1) = \varphi_1(2.718282) = e^{2.718282-3} = 0.754486$$

$$x_3 = \varphi_1(x_2) = \varphi_1(0.754486) = e^{0.754486-3} = 0.105873$$

$$x_4 = \varphi_1(x_3) = \varphi_1(0.105873) = e^{0.105873-3} = 0.055347$$

$$x_5 = \varphi_1(x_4) = \varphi_1(0.055347) = e^{0.055347 - 3} = 0.052620$$



A sequência $x_{n+1} = \varphi_1(x_n)$ não está convergindo para a solução α_2

A sequência $x_{n+1}=\varphi_1(x_n)$ está convergindo para a solução α_1

LOCALIZAÇÃO GRÁFICA DAS SOLUÇÕES $lpha_1$ E $lpha_2$

$$f(x) = 0$$
 $f(x) = xe^{-x} - e^{-3}$

