# MÉTODOS ITERATIVOS PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

- JACOBI-RICHARDSON
- GAUSS-SEIDEL

- MAT 271 – Cálculo Numérico PER3/2021/UFV
- Professor Amarísio Araújo DMA/UFV

# SISTEMA LINEAR $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Suponhamos que $detA \neq 0$. Seja $\bar{x}$ a solução única do sistema.

Vamos considerá-la como uma n-upla de $\mathbb{R}^n$: $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$.

# MÉTODOS ITERATIVOS PARA RESOLVER O SISTEMA

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Suponhamos $a_{ii} \neq 0, i = 1, \ldots, n$ . Então, podemos reescrever o sistema na forma:

$$(**)\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n) \\ x_2 = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n) \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} - \dfrac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1}) \end{cases}$$

$$\boxed{(*) \Leftrightarrow (**)}$$

# SOLUÇÃO APROXIMADA DO SISTEMA

Construir uma sequência de aproximações para a solução $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ do sistema.

Os termos desta sequência serão n-uplas de $\mathbb{R}^n$.

Os índices para indicar os termos desta sequência serão colocados superiormente:

$$x^{(0)},\ x^{(1)},\ x^{(2)}, \dots,\ x^{(n)},\ x^{(n+1)}, \dots$$

onde cada $x^{(k)}, k = 0,1,2, \dots$, é uma n-upla de $\mathbb{R}^n$.

# O MÉTODO DE JACOBI-RICHARDSON

O primeiro termo da sequência, $x^{(0)}$, é uma n-upla qualquer de $\mathbb{R}^n$: $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$.

O segundo termo da sequência, $x^{(1)}$, é a n-upla $x^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\right)$ de $\mathbb{R}^n$, obtida a partir de $x^{(0)}$ e das equações (**) assim:

$$
\begin{cases}
x_1^{(1)} = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(0)} - \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(0)} - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n^{(0)} \\
x_2^{(1)} = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(0)} - \dfrac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(0)} - \cdots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} x_n^{(0)} \\
\vdots \\
x_n^{(1)} = \dfrac{b_n}{a_{nn}} - \dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1^{(0)} - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2^{(0)} - \cdots - \dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}} x_{n-1}^{(0)}
\end{cases}
$$

# O MÉTODO DE JACOBI-RICHARDSON

O terceiro termo da sequência, $x^{(2)}$, é a n-upla $x^{(2)} = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}\right)$ de $\mathbb{R}^n$, obtida a partir de $x^{(1)}$ e das equações (**) assim:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(1)} - \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(1)} - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n^{(1)} \\ x_2^{(2)} = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(1)} - \dfrac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(1)} - \cdots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} x_n^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} = \dfrac{b_n}{a_{nn}} - \dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1^{(1)} - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2^{(1)} - \cdots - \dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}} x_{n-1}^{(1)} \end{cases}$$

E, assim, de modo análogo, os demais termos da sequência serão, sucessivamente, obtidos, chegando-se às seguintes equações de iteratividade:

# MÉTODO DE JACOBI-RICHARDSON - EQUAÇÕES DE ITERATIVIDADE

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(k)} - \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k)} - \dfrac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} x_n^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{b_n}{a_{nn}} - \dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1^{(k)} - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}} x_{n-1}^{(k)} \end{cases}$$

$$\boxed{k = 0,1,2,3,\ldots}$$

$$x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) (n - upla\ qualquer\ de\ \mathbb{R}^n\ )$$

Aproximação inicial

# EXEMPLO

Seja o sistema linear: $\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases}$.

O determinante da matriz dos coeficientes é $447$. Logo o sistema tem solução única.

Vamos usar as equações de iteratividade do método de Jacobi-Richardson e construir alguns termos da sequência de aproximações para a solução do sistema, supondo que há convergência.

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{14}{10} - \frac{2}{10}x_2 - \frac{1}{10}x_3 \\ x_2 = \frac{11}{5} - \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_3 \\ x_3 = \frac{8}{10} - \frac{2}{10}x_1 - \frac{3}{10}x_2 \end{cases}$$

$$a_{ii} \neq 0, \forall\, i$$

# EXEMPLO

Equações de iteratividade:
$$\begin{cases} x_1{}^{(k+1)} = \dfrac{14}{10} - \dfrac{2}{10} x_2{}^{(k)} - \dfrac{1}{10} x_3{}^{(k)} \\ x_2{}^{(k+1)} = \dfrac{11}{5} - \dfrac{1}{5} x_1{}^{(k)} - \dfrac{1}{5} x_3{}^{(k)} \\ x_3{}^{(k+1)} = \dfrac{8}{10} - \dfrac{2}{10} x_1{}^{(k)} - \dfrac{3}{10} x_2{}^{(k)} \end{cases}$$

Vamos usar a aproximação inicial $x^{(0)} = (0{,}0{,}0\ )$.

$$k = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1{}^{(1)} = \dfrac{14}{10} - \dfrac{2}{10} \times 0 - \dfrac{1}{10} \times 0 = 1.4000 \\ x_2{}^{(1)} = \dfrac{11}{5} - \dfrac{1}{5} \times 0 - \dfrac{1}{5} \times 0 = 2.2000 \\ x_3{}^{(1)} = \dfrac{8}{10} - \dfrac{2}{10} \times 0 - \dfrac{3}{10} \times 0 = 0.8000 \end{cases} \Longrightarrow x^{(1)} = (1.4000{,}2.2000{,}0.8000\ )$$

# EXEMPLO

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{14}{10} - \dfrac{2}{10} x_2^{(k)} - \dfrac{1}{10} x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{11}{5} - \dfrac{1}{5} x_1^{(k)} - \dfrac{1}{5} x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{8}{10} - \dfrac{2}{10} x_1^{(k)} - \dfrac{3}{10} x_2^{(k)} \end{cases}$$

$$x^{(0)} = (0,0,0)$$

$$x^{(1)} = (1.4000, 2.2000, 0.8000)$$

$$k = 1 \Longrightarrow \begin{cases} x_1^{(2)} = \dfrac{14}{10} - \dfrac{2}{10} \times 2.2 - \dfrac{1}{10} \times 0.8 = 0.8800 \\ x_2^{(2)} = \dfrac{11}{5} - \dfrac{1}{5} \times 1.4 - \dfrac{1}{5} \times 0.8 = 1.7600 \\ x_3^{(2)} = \dfrac{8}{10} - \dfrac{2}{10} \times 1.4 - \dfrac{3}{10} \times 2.2 = -0.1400 \end{cases} \Longrightarrow x^{(2)} = (0.8800, 1.7600, -0.1400)$$

$$k = 2 \Longrightarrow \begin{cases} x_1^{(3)} = \dfrac{14}{10} - \dfrac{2}{10} \times 1.76 - \dfrac{1}{10} \times (-0.14) = 1.0620 \\ x_2^{(3)} = \dfrac{11}{5} - \dfrac{1}{5} \times 0.88 - \dfrac{1}{5} \times (-0.14) = 2.0520 \\ x_3^{(3)} = \dfrac{8}{10} - \dfrac{2}{10} \times 0.88 - \dfrac{3}{10} \times 1.76 = 0.0960 \end{cases} \Longrightarrow x^{(3)} = (1.0620, 2.0520, 0.0960)$$

# EXEMPLO

$$x^{(0)} = (0,0,0) \quad x^{(1)} = (1.4000, 2.2000, 0.8000) \quad x^{(2)} = (0.8800, 1.7600, -0.1400) \quad x^{(3)} = (1.0620, 2.0520, 0.0960)$$

$$k = 3 \Longrightarrow \begin{cases} x_1{}^{(4)} = \dfrac{14}{10} - \dfrac{2}{10} x_2{}^{(3)} - \dfrac{1}{10} x_3{}^{(3)} \\ x_2{}^{(4)} = \dfrac{11}{5} - \dfrac{1}{5} x_1{}^{(3)} - \dfrac{1}{5} x_3{}^{(3)} \\ x_3{}^{(4)} = \dfrac{8}{10} - \dfrac{2}{10} x_1{}^{(3)} - \dfrac{3}{10} x_2{}^{(3)} \end{cases} \Longrightarrow x^{(4)} = (0.9800, 1.9684, -0.0280)$$

$$k = 4 \Longrightarrow \begin{cases} x_1{}^{(5)} = \dfrac{14}{10} - \dfrac{2}{10} x_2{}^{(4)} - \dfrac{1}{10} x_3{}^{(4)} \\ x_2{}^{(5)} = \dfrac{11}{5} - \dfrac{1}{5} x_1{}^{(4)} - \dfrac{1}{5} x_3{}^{(4)} \\ x_3{}^{(5)} = \dfrac{8}{10} - \dfrac{2}{10} x_1{}^{(4)} - \dfrac{3}{10} x_2{}^{(4)} \end{cases} \Longrightarrow x^{(5)} = (1.0091, 2.0096, 0.0135)$$

# EXEMPLO

$$x^{(0)} = (0,0,0)$$

$$x^{(1)} = (1.4000, 2.2000, 0.8000)$$

$$x^{(2)} = (0.8800, 1.7600, -0.1400)$$

$$x^{(3)} = (1.0620, 2.0520, 0.0960)$$

$$x^{(4)} = (0.9800, 1.9684, -0.0280)$$

$$x^{(5)} = (1.0091, 2.0096, 0.0135)$$

$$\vdots$$

A solução exata do sistema $\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases}$

é $x = (1,2,0)$.

Observa-se, então, que $x^{(5)} = (1.0091, 2.0096, 0.0135)$ é uma aproximação para esta solução.

SOBRE A CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DE JACOBI-RICHARDSON, FALAREMOS MAIS TARDE.

# UMA JUSTIFICATIVA PARA O MÉTODO DE JACOBI-RICHARDSON

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n) \\ x_2 = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n) \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} - \dfrac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1}) \end{cases}$$

$$(a_{ii} \neq 0, i = 1, \ldots, n)$$

# UMA JUSTIFICATIVA PARA O MÉTODO DE JACOBI-RICHARDSON

Sejam as funções reais de $n$ variáveis $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$: $\phi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, i = 1,2, \ldots, n$.

Para $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\phi_1(x) = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n)$$

$$\phi_2(x) = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n)$$

$$\vdots$$

$$\phi_n(x) = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1})$$

# UMA JUSTIFICATIVA PARA O MÉTODO DE JACOBI-RICHARDSON

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n) \\
x_2 = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n) \\
\vdots \\
x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} - \dfrac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1})
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{array}{c}
x_1 = \phi_1(x) \\
x_2 = \phi_2(x) \\
\vdots \\
x_n = \phi_n(x)
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_1(x) &= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n) \\
\phi_2(x) &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n) \\
&\vdots \\
\phi_n(x) &= \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1})
\end{aligned}
$$

# UMA JUSTIFICATIVA PARA O MÉTODO DE JACOBI-RICHARDSON

Considere, agora, a função $\Phi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, tal que, para cada $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\Phi(x) = \big(\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)\big).$$

Assim:

$$\begin{matrix} x_1 = \phi_1(x) \\ x_2 = \phi_2(x) \\ \vdots \\ x_n = \phi_n(x) \end{matrix} \Leftrightarrow x = \Phi(x)$$

Assim, chegamos à seguinte equivalência:

$$Ax = b \Leftrightarrow x = \Phi(x).$$

Isto nos sugere uma analogia com o método das aproximações sucessivas para equações reais $f(x) = 0$ ($f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x)$).

# UMA JUSTIFICATIVA PARA O MÉTODO DE JACOBI-RICHARDSON

$$Ax = b \Leftrightarrow x = \Phi(x).$$

A sequência de aproximações para a solução do sistema $Ax = b$ é, então, construída a partir de uma aproximação inicial $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$, sendo os demais termos da sequência obtidos através da função $\Phi$ assim:

$$x^{(k+1)} = \Phi\left(x^{(k)}\right), k = 0,1,2, \ldots$$

E, pela definição de $\Phi(x)$, chegamos às equações de iteração do Método de Jacobi-Richardson.

# UMA JUSTIFICATIVA PARA O MÉTODO DE JACOBI-RICHARDSON

$$x^{(k+1)} = \Phi\left(x^{(k)}\right) \Leftrightarrow \left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}\right) = \left(\phi_1\left(x^{(k)}\right), \phi_2\left(x^{(k)}\right), \dots, \phi_n\left(x^{(k)}\right)\right)$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(k)} - \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k)} - \dfrac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} x_n^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{b_n}{a_{nn}} - \dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1^{(k)} - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}} x_{n-1}^{(k)} \end{cases}$$

$$(k = 0,1,2,3, \dots)$$

$$x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right) (n - upla\ qualquer\ de\ \mathbb{R}^n\ )$$