UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA – UFV
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – CCE
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA - DEL

Sistemas de Controle II

ELT331

AULA 1 – Lugar das Raízes (ROOT LOCUS)

Prof. Tarcísio Pizziolo

1. Lugar das Raízes

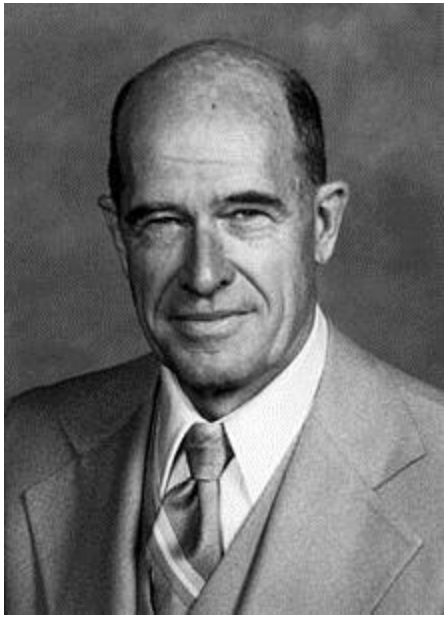
- O Lugar das Raízes foi inventado pelo Engenheiro Eletricista **Walter Richard Evans (USA)** em 1948. Evans trabalhou como engenheiro em várias empresas destacando-se a General Electric, Rockwell International e Ford Aeronautic Company.

Descrição do Lugar das Raízes:
Em um sistema de controle de **malha fechada**, o **Lugar das Raízes** representa no **Plano Complexo** a localização dos **pólos** do sistema em função da **variação do ganho de malha**.

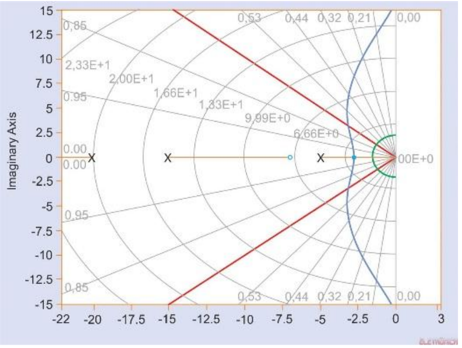
- Esta representação gráfica nos permite analisar o comportamento da estabilidade do sistema em função da variação do ganho da malha.

- A combinação **Ganho x Estabilidade** definirá o **custo** e o **desempenho** de um sistema de controle em malha fechada.

- Por isso, a análise do **Lugar das Raízes** permitirá projetar controladores para compensar o sistema de controle.

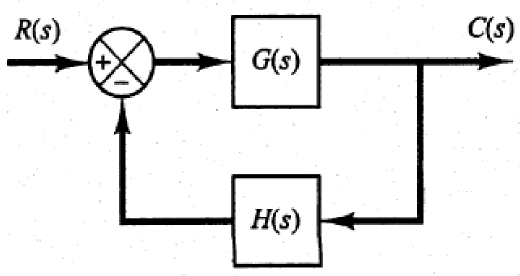


Walter Richard Evans
*** 15/01/1920**
† 10/07/1999



1. Lugar das Raízes

- Seja um sistema de controle em malha fechada com realimentação unitária negativa dado pelo Diagrama de Blocos abaixo.



Consideremos que **$G(s) = K.G_1(s)$**, onde **K** seja o ganho da Planta.
Assim, a **Função de Transferência** do sistema em malha fechada será dada por:

$$F(s) = \frac{KG_1(s)}{1 + KG_1(s)H(s)}$$

Sabe-se que se a **Equação Característica** do sistema possuir raízes no semi-plano direito do Plano Complexo o sistema é **Instável**.

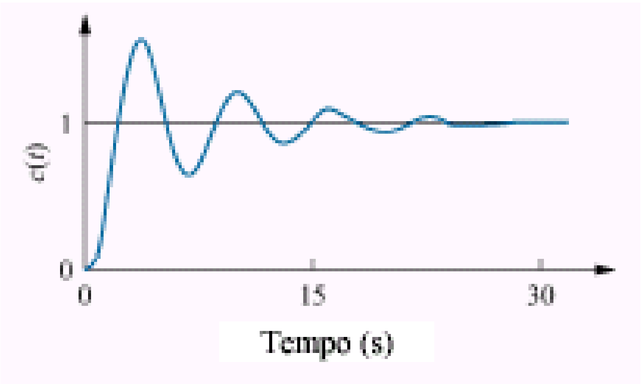
Equação Característica: $1 + KG_1(s)H(s) = 0$

Variação do Ganho:
Nota-se que ao variarmos o ganho da Planta **G(s)** este influi diretamente no cálculo das raízes da Equação Característica do sistema.

1. Lugar das Raízes

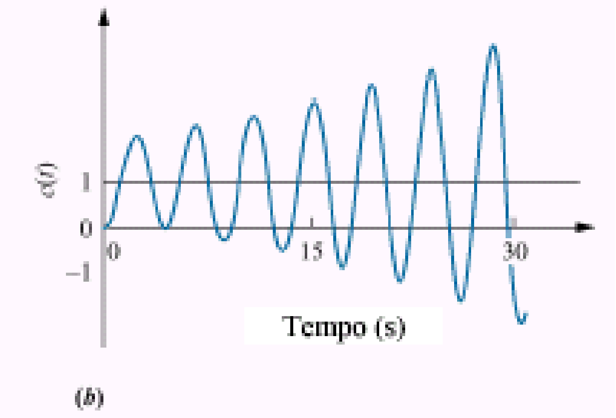
ESTABILIDADE

- SISTEMA ESTÁVEL: decrescimento da reposta, a saída decai após aplicação de uma entrada limitada.



As raízes da Equação Característica estão situadas no semi-plano **esquerdo** do Plano Complexo.

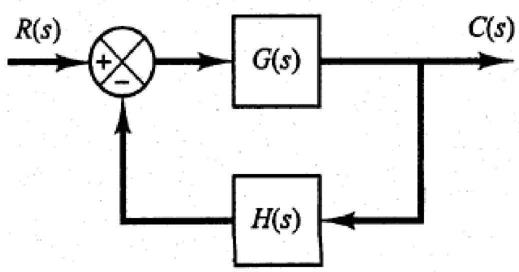
- SISTEMA INSTÁVEL: crescimento da resposta, a saída cresce após aplicação de uma entrada limitada.



A Equação Característica possui raíz(es) situada(s) no semi-plano **direito** do Plano Complexo.

1.2. Exemplos de Lugar das Raízes

1.2.1. Façamos um exemplo para apresentarmos o Lugar das Raízes de um sistema de controle de **1ª Ordem** em malha fechada com realimentação unitária negativa.
Seja o sistema dado a seguir:



$$\left.\begin{array}{l} G(s) = \dfrac{K}{(s-2)} \\ H(s) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \textbf{Malha Aberta} \Rightarrow G(s)H(s) = \frac{K}{(s-2)} \Rightarrow \textbf{Instável!}$$

Em Malha Fechada o sistema poderá se estabilizar em função de K:

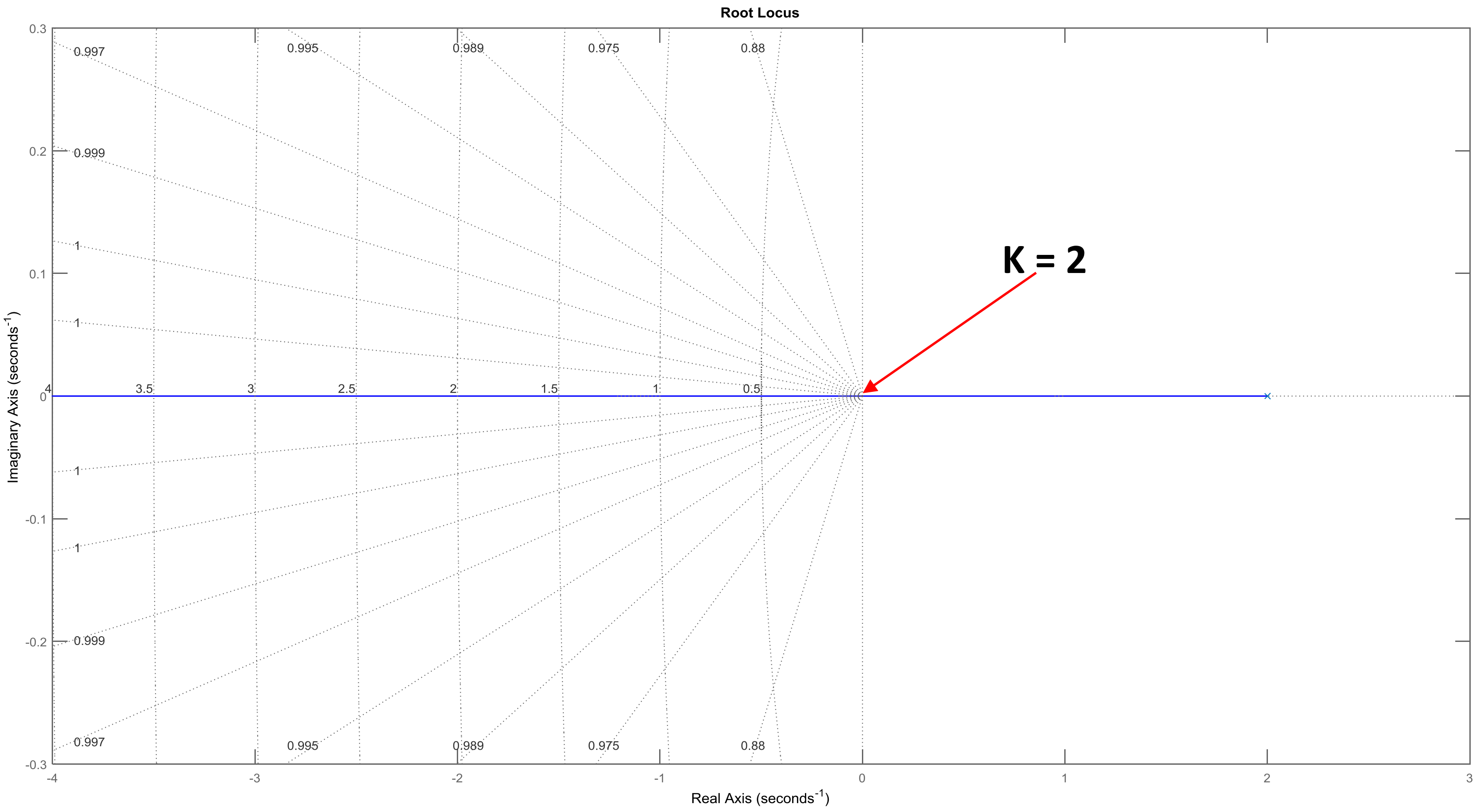
$$F(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \Rightarrow F(s) = \frac{K}{(s-2+K)}$$

Equação Característica: $s - 2 + K = 0 \rightarrow s = (2 - K)$
Para estabilidade do sistema temos que obter raízes no semiplano esquerdo do plano complexo. Daí $s < 0 \rightarrow s = (2 - K) < 0 \rightarrow -K < -2 \rightarrow$ **$K > 2$**

É de se notar que para K = 0 a raiz da Equação Característica situa-se no Pólo S = 2 !!!

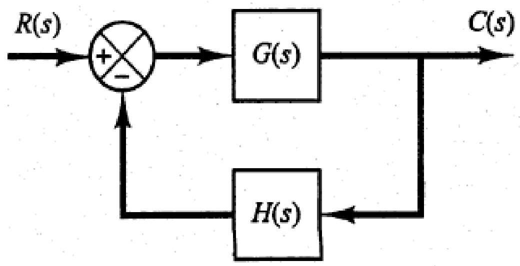
O que isso significa?

Os valores do ganho **K** deverão ser miores que **2** para que o sistema em malha fechada seja **ESTÁVEL**.
Outros valores para o ganho **K** tornam o sistema **INSTÁVEL**!



1.2. Exemplos de Lugar das Raízes

1.2.2. Façamos um exemplo para apresentarmos o Lugar das Raízes de um sistema de controle de **2ª Ordem** em malha fechada com realimentação unitária negativa.
Seja o sistema dado a seguir:



$$\left.\begin{aligned} G(s) &= \frac{K}{(s-1)(s+2)} \\ H(s) &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \textbf{Malha Aberta} \Rightarrow G(s)H(s) = \frac{K}{(s-1)(s+2)} \Rightarrow \textbf{Instável !}$$

Em Malha Fechada o sistema poderá se estabilizar em função de K:

$$F(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \Rightarrow F(s) = \frac{K}{[(s-1)(s+2)+K]} \Rightarrow F(s) = \frac{K}{(s^2+s-2+K)}$$

Equação Característica: $s^2 + s - 2 + K = 0$

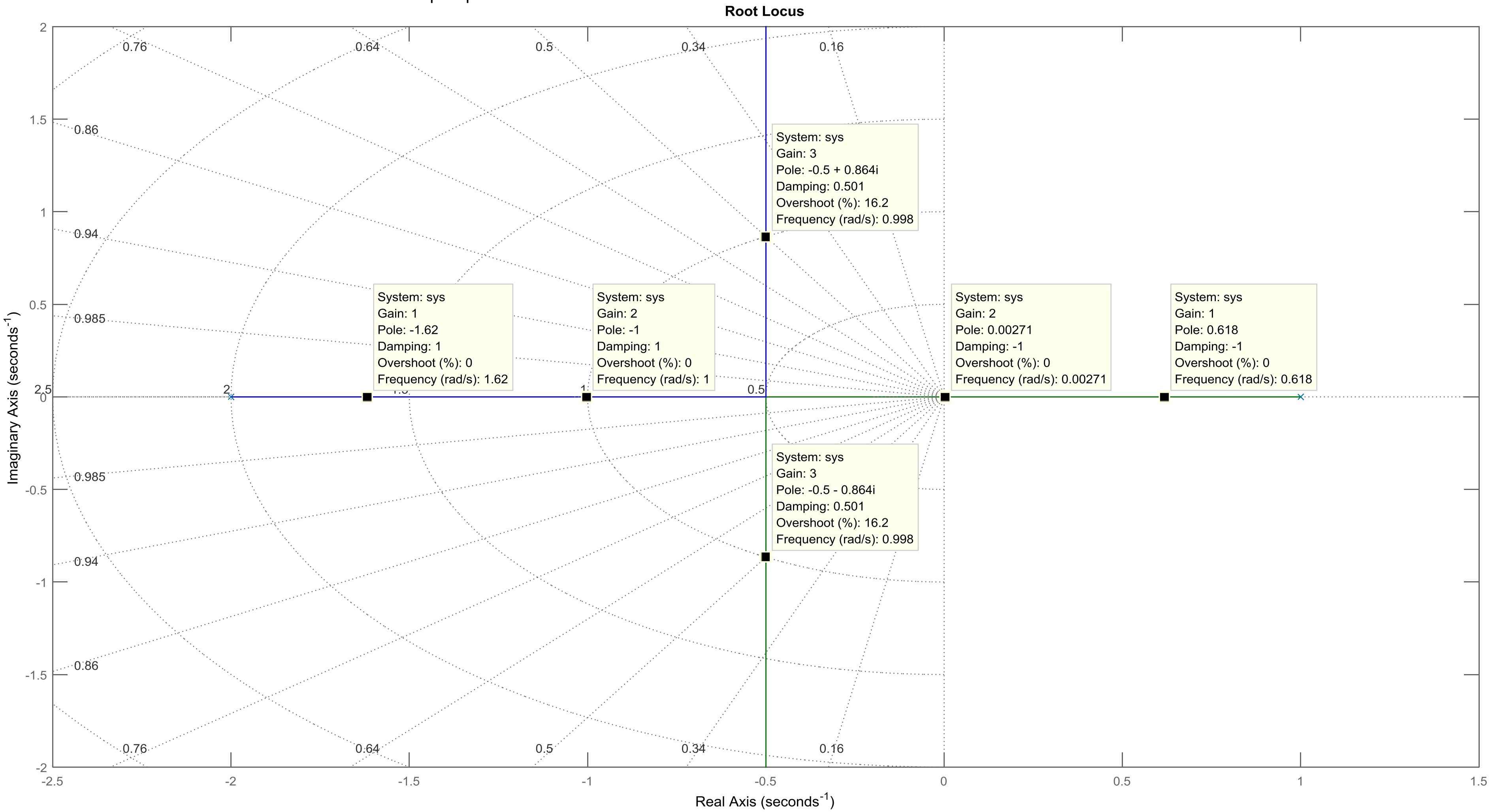
Para estabilidade do sistema temos que obter raízes no semiplano esquerdo do plano complexo → Critério de Routh !

Daí: $s^2 + s + (-2 + K) = 0$;

$$s = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(K-2)}}{2} \Rightarrow s = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{9-4K}}{2}$$

O que isso significa?

Pelo Critério de Routh: $\begin{array}{c|c} s^2 & \\ s & \\ s^0 & \end{array}\begin{bmatrix} 1 & (K-2) \\ 1 & 0 \\ (K-2) & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow K-2>0 \Rightarrow K>2 \Rightarrow$ **Estável !**



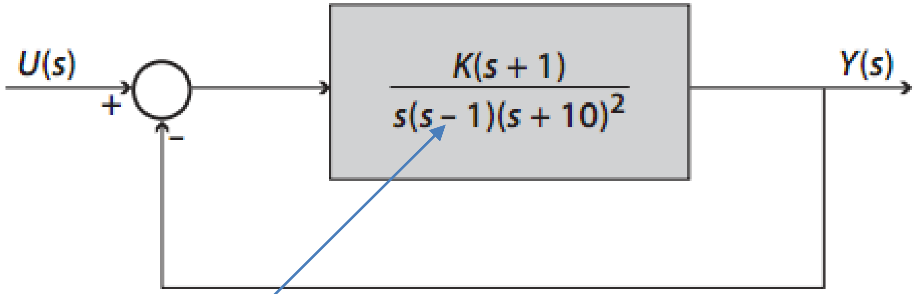
Site de um simulador de Lugar das Raízes para 2ª Ordem:

http://www.wiley.com/college/nise/0471794759/swf/SOcalculator.swf

1.2. Exemplos de Lugar das Raízes

1.2.3. Façamos um exemplo para apresentarmos o Lugar das Raízes de um sistema de controle de **Ordem Superior** em malha fechada com realimentação unitária negativa.

Seja o sistema dado a seguir:



Instável em Malha Aberta !

Solução:

O polinômio característico do sistema de malha fechada é:

$$Q(s) = s(s-1)(s+10)^2 + K(s+1)$$

ou

$$Q(s) = s^4 + 19s^3 + 80s^2 + (K-100)s + K$$

Pelo critério de Routh, temos

s^4	1	80	K	
s^3	19	$K-100$		
s^2	$1.620-K$	$19K$		$\rightarrow$ multiplicada por 19
s	y			
1	K			

com

$$y = \frac{(1.620-K)(K-100)-361K}{1.620-K}$$

ou

$$y = \frac{-K^2+1.359K-162.000}{1.620-K}$$

Analisemos a Estabilidade:

Para que o sistema seja estável, devemos ter, simultaneamente:

$$1.620 - K > 0 \qquad \text{ou} \qquad K < 1.620$$
$$K > 0 \qquad \text{e} \qquad y > 0$$

ou seja

$$-K^2 + 1.359K - 16.2000 > 0$$

A equação

$$y = -K^2 + 1.359K - 162.000 > 0$$

representa uma parábola no plano (K, y), com a concavidade para baixo, devido ao sinal negativo em $-K^2$. Para que se tenha $y > 0$, os valores de K devem situar-se entre as raízes K_1 e K_2 da equação

$$K^2 - 1.359K + 162.000 = 0$$

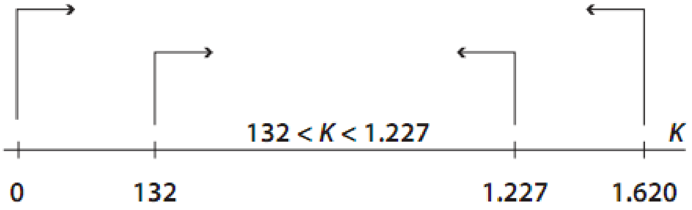
Tais raízes são:

$$K_1 = 132 \qquad \text{e} \qquad K_2 = 1.227$$

Logo, pela condição anterior, resulta que:

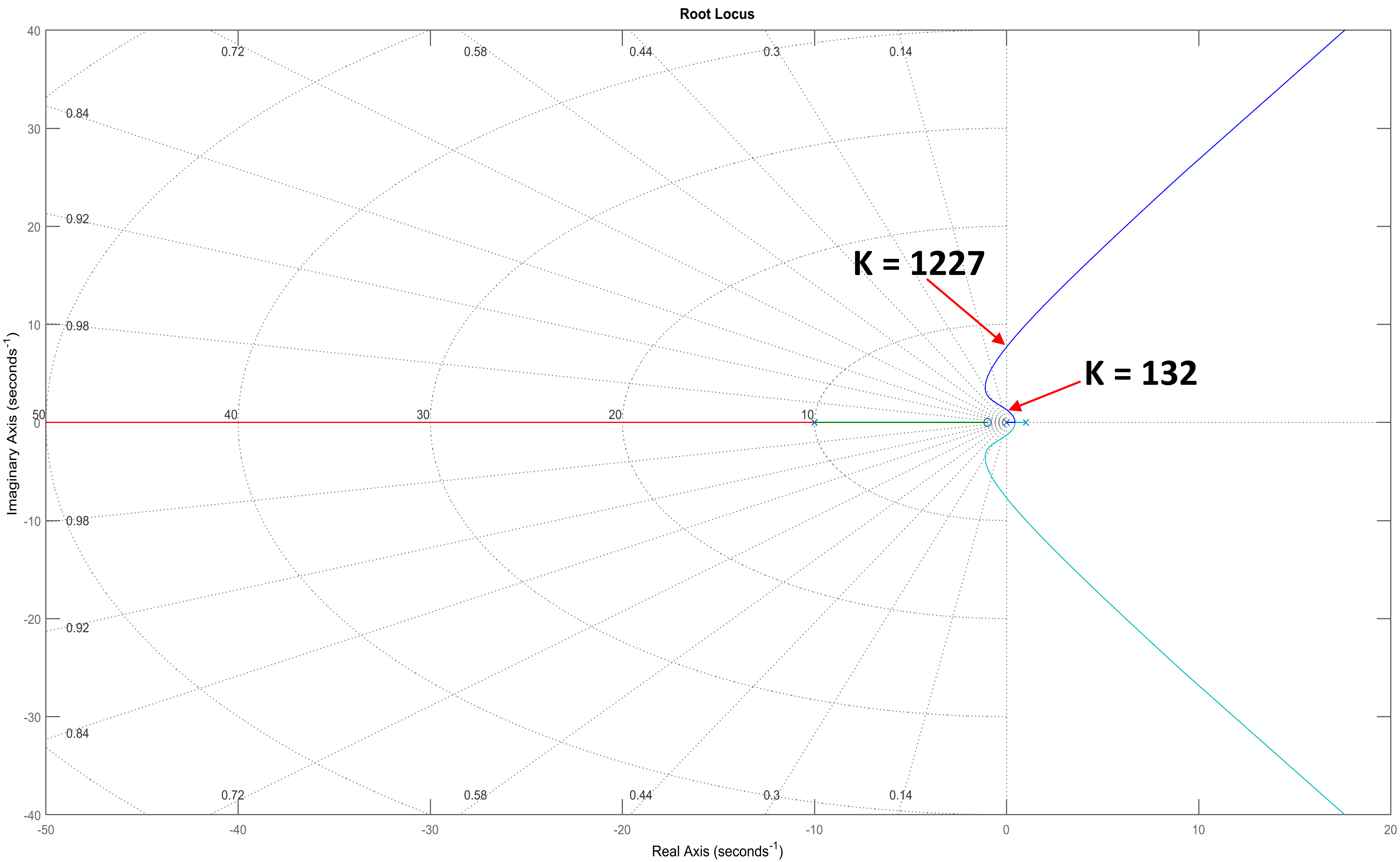
$$132 < K < 1.227$$

representamos as condições simultâneas a que o valor de K deve satisfazer.



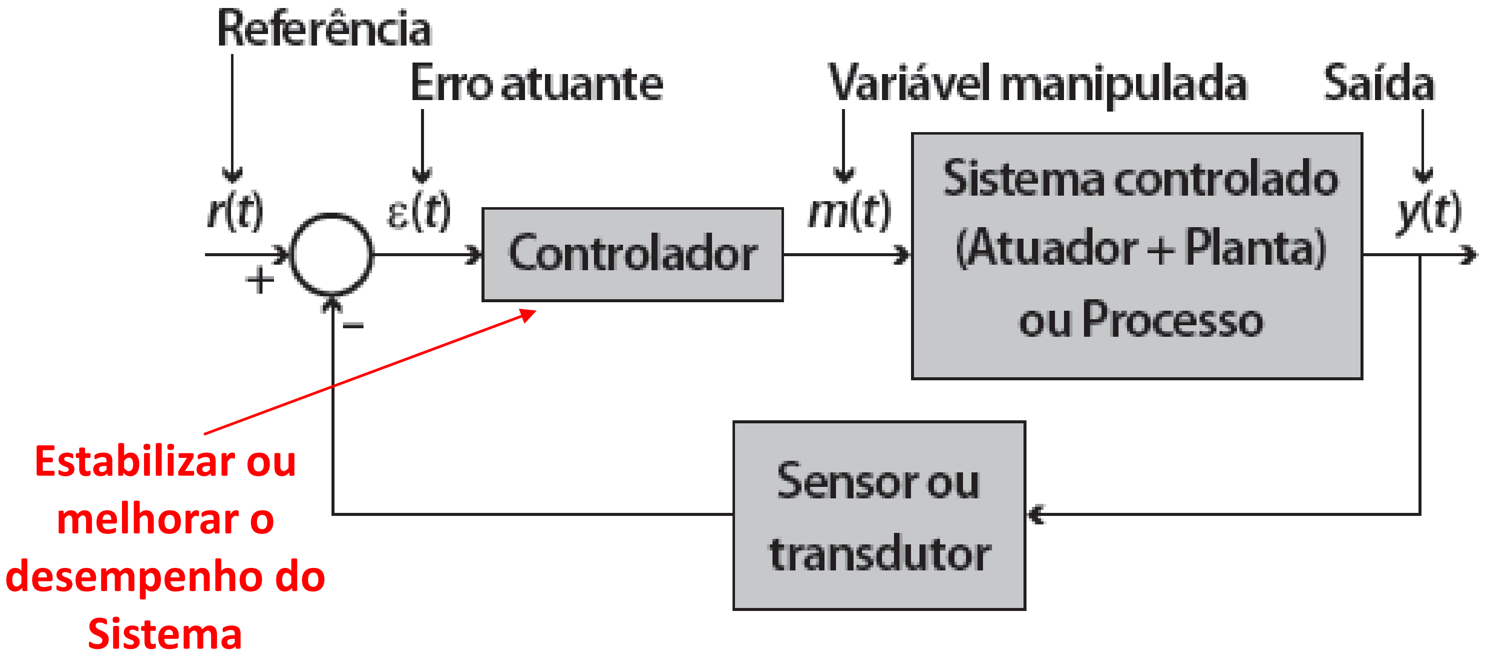
O que isso significa?

Os valores do ganho **K** deverão estar entre **132** e **1227** para que o sistema em malha fechada seja **ESTÁVEL**.
Outros valores para o ganho **K** tornam o sistema **INSTÁVEL**!



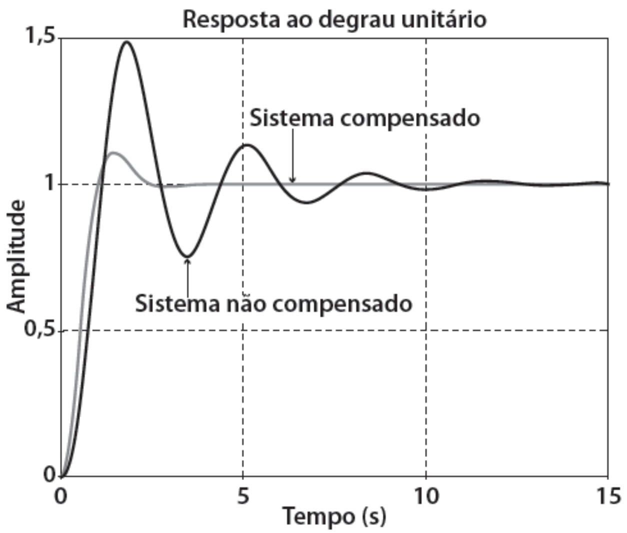
1.3. Aplicação do Lugar das Raízes

A aplicação mais objetiva do Lugar das Raízes em controle de sistemas lineares em malha fechada é a possibilidade de se projetar uma controlador tal que este estabilize, ou minimize a instabilidade, de sistemas instáveis.



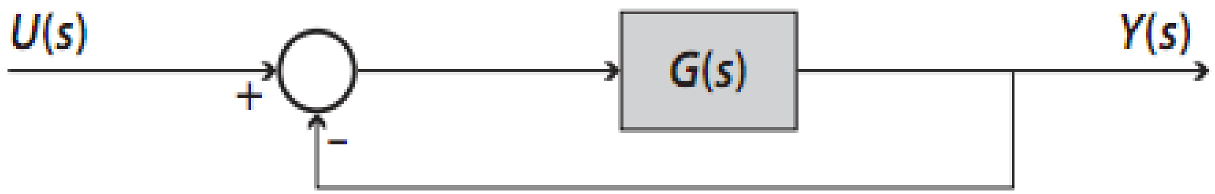
A inserção do Controlador em série com a Planta permitirá o deslocamento do Lugar das Raízes de tal forma que o ganho poderá ser alterado até o valor pretendido sem que o sistema se instabilize ou, se for um sistema instável, este passe a se comportar com estabilidade.

A inserção de um Controlador também poderá melhorar a resposta do sistema mediante uma entrada pré-estabelecida.



1.4. Exercícios sobre Lugar das Raízes

1.4.1. Seja um sistema dado pelo diagrama de blocos a seguir.



$$G(s) = \frac{K}{(s+5)}$$

a) Determine o Lugar das Raízes para este sistema em malha fechada.

b) Para quais valores de **K > 0** este sistema é Estável?

Solução

Neste caso, a função de transferência de malha fechada é

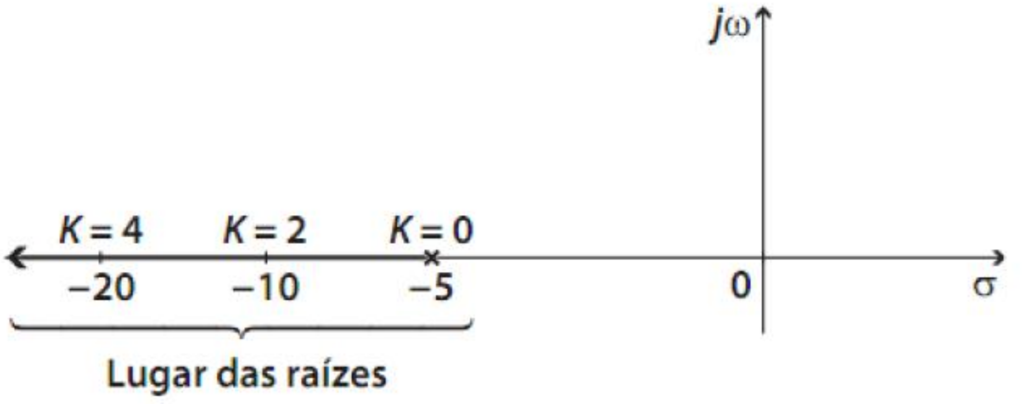
$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s + 5 + K}$$

O polinômio característico é $Q(s) = s + 5 + K$. Os polos do sistema são as raízes de $Q(s)$:

$$s = -(5 + K)$$

A posição desse polo no plano s depende do valor do parâmetro K. Fazendo-se variar K de 0 a infinito, o polo descreve no plano s uma trajetória que se inicia no ponto -5 do eixo real e se dirige para $-\infty$, à medida que o valor de K aumenta

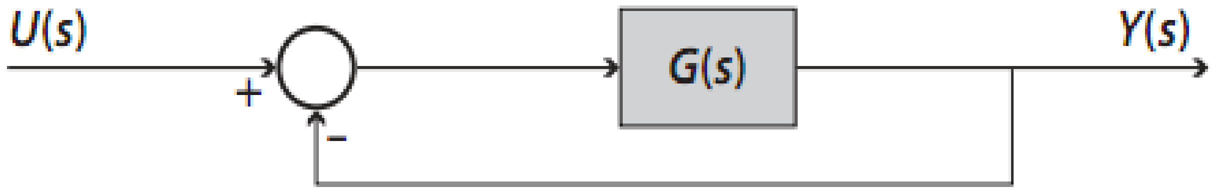
Essa trajetória é o lugar (geométrico) das raízes (no caso uma só) do polinômio característico $Q(s)$.



Para **K > 0** e **s < 0** => s = - (5 + K) < 0 => **K > - 5**
Então => **K > 0 para o sistema ser Estável** !

1.4. Exercícios sobre Lugar das Raízes

1.4.2. Seja um sistema dado pelo diagrama de blocos a seguir.



$$G(s) = \frac{K}{(s-2)(s+8)}$$

a) Determine o Lugar das Raízes para este sistema em malha fechada.

b) Para quais valores de **K > 0** este sistema é Estável?

Solução

Em malha fechada, teremos

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s^2 + 6s - 16 + K}.$$

Então, os polos do sistema são as raízes do polinômio $Q(s) = s^2 + 6s - 16 + K$:

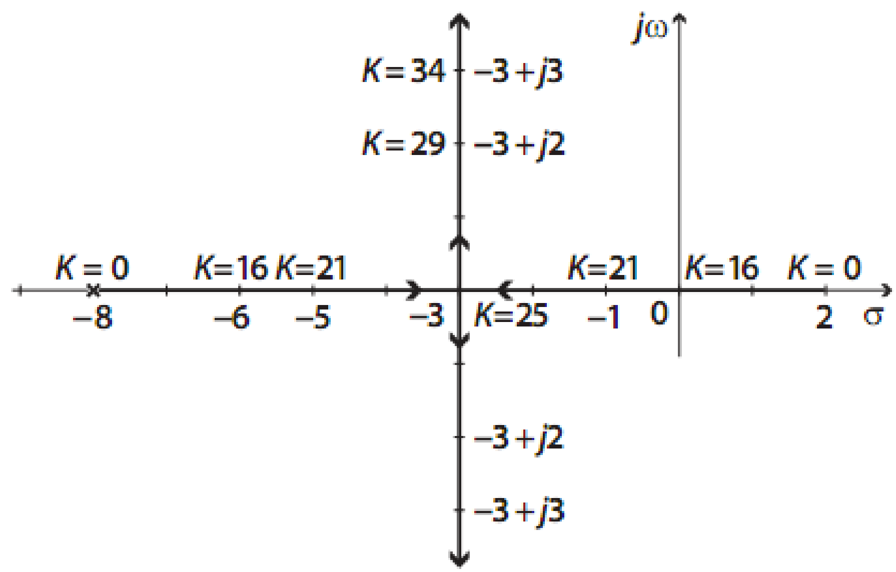
$$s_{1,2} = -3 \pm \sqrt{25 - K}$$

A Figura mostra a trajetória descrita pelos polos s_1 e s_2 quando K varia de 0 a infinito. As trajetórias nascem nos polos de malha aberta e se dirigem para os zeros de malha aberta ou, na falta desses, vão para o infinito. Essas trajetórias são chamadas de ramos do lugar das raízes.

A Tabela indica as raízes para diversos valores de K:

K	0	16	21	25	29	34
s_1	2	0	-1	-3	$-3+j2$	$-3+j3$
s_2	-8	-6	-5	-3	$-3-j2$	$-3-j3$

Trajetória dos polos (lugar das raízes).



Aplicando o Critério de Routh:

$$\begin{array}{c|c} s^2 & \\ s & \\ s^0 & \end{array}\begin{bmatrix} 1 & (-16+K) \\ 6 & 0 \\ (-16+K) & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \; -16+K>0 \;\Rightarrow\; K>16 \;\Rightarrow\; \textbf{Estável !}$$