Lista de Exercícios III - Sistemas Lineares

MAT 271 - Cálculo Numérico - PER3/2021/UFV

Professor Amarísio Araújo

OBS.: Utilize arredondamento com 4 casas decimais após a virgula (Caso seja necessário).

1) Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 3\alpha x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$$

a) Determine para que valores de α o sistema linear tem solução única e pode ser resolvido pelo *Método da Decomposição LU*.

b) Se $\alpha = 1$, encontre a decomposição LU da matriz dos coeficientes do sistema.

c) Utilizando a decomposição encontrada no item anterior, encontre a solução do sisrema pelo *Método da Decomposição LU*.

2) Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 19 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$$

Verifique se o sistema pode ser resolvido pelo *Método da Decomposição LU* e, em caso afirmativo, encontre a sua solução por este método.

3) Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 6x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 18x_4 = 32 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 17x_4 = 28 \\ 10x_1 + 7x_2 + 22x_3 + 29x_4 = 46 \end{cases}$$

a) Mostre que é possível a decomposição LU da matriz dos coeficientes do sistema e encontre as matrizes L e U.

b) Utilizando a decomposição feita no item anterior, encontre a solução do sisrema pelo *Método da Decomposição LU*.

4) Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} -9x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

a) Verifique se há garantia de convergência caso sejam usados o *Método de Jacobi-Richardson* ou o *Método de Gauss-Seidel* para resolver o sistema.
b) Havendo ou não garantia de convergência para algum (ou ambos) dos métodos mencionados acima, use-os, com aproximação inicial $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (0.1, 0.2, 0.5)$ para encontrar os quatro próximos termos da sequência de aproximações da solução do sistema.

5) Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - 9x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - 4\alpha x_3 = 3 \end{cases}$$

a) Determine os valores de α para que haja garantia de convergência para a solução do sistema pelo *Método de Gauss-Seidel*, a partir do *Critério de Sassenfeld*.
b) Se $\alpha = 2$, resolva o sistema pelo método de Gauss-Seidel com uma precisão de $\epsilon = 10^{-1}$ e com condição inicial $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (0, 0, 0)$.

6) Seja o sistema linear:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

a) Reordene as equações do sistema de modo que o *Critério de Sassenfeld* seja satisfeito.
b) Use o *Método de Gauss-Seidel*, com aproximação inicial $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (0, 0, 0)$, para encontrar as três próximas aproximações da solução do sistema.

7) Considere o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + x_3 &= -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Caso haja garantia de convergência, resolva o sistema dado pelo *Método de Jacobi-Richardson* com $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (0.1, 0.2, 0.5)$ e erro absoluto de 0.01.

Respostas

1) a) $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, \frac{4}{3}, 5\}$ **b)** $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{19}{3} \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$

c) $\bar{x} = (-49/12, -89/12, 1/12)$

2) $\bar{x} = (1, 1, 1)$

3) **a)** Δ_1,Δ_2 e Δ_3 são não-nulos; $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\bar{x} = (1, 0, -1, 2)$

4) **a)** Não há garantia de convergência para nenhum dos dois métodos;

b) Por J-R: $x^{(1)} = (-0.7778, 1.1000, 0.7000)$; $x^{(2)} = (-0.1444, 1.6185, 1.2926)$;
$x^{(3)} = (0.5387, 0.9988, 1.2543)$; $x^{(4)} = (0.1689, 0.5561, 0.8200)$

Por G-S: $x^{(1)} = (-0.7778, 1.6852, 1.4877)$; $x^{(2)} = (0.7858, 0.3669, 0.5537)$;
$x^{(3)} = (-0.6492, 1.5816, 1.4123)$; $x^{(4)} = (0.5966, 0.4655, 0.6230)$.

Nos dois métodos, os termos encontrados levam a uma suspeita de não-convergência. Se mais termos fossem calculados, essa suspeita se confirmaria. A solução exata do sistema, que pode ser encontrada por qualquer método direto, é $\bar{x} = (0, 1, 1)$.

5) **a)** $\alpha > \frac{5}{16}$ ou $\alpha < -\frac{5}{16}$ **b)** $\bar{x} \approx x^{(3)} = (1.0427, 0.4455, -0.3003)$

6) **a)** Reordenando as equações de modo a satisfazer o critério de Sassenfeld, o sistema fica assim:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases}$$

b) $x^{(1)} = (0.5000, 0.7000, -0.0400)$; $x^{(2)} = (0.5250, 0.9450, -0.4983)$; $x^{(3)} = (0.5129, 1.0016, -0.5091)$.

7) $\bar{x} \approx x^{(11)} = (-4.0002, 3.0029, 1.9998)$