Universidade Federal de Viçosa
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Departamento de Engenharia Elétrica

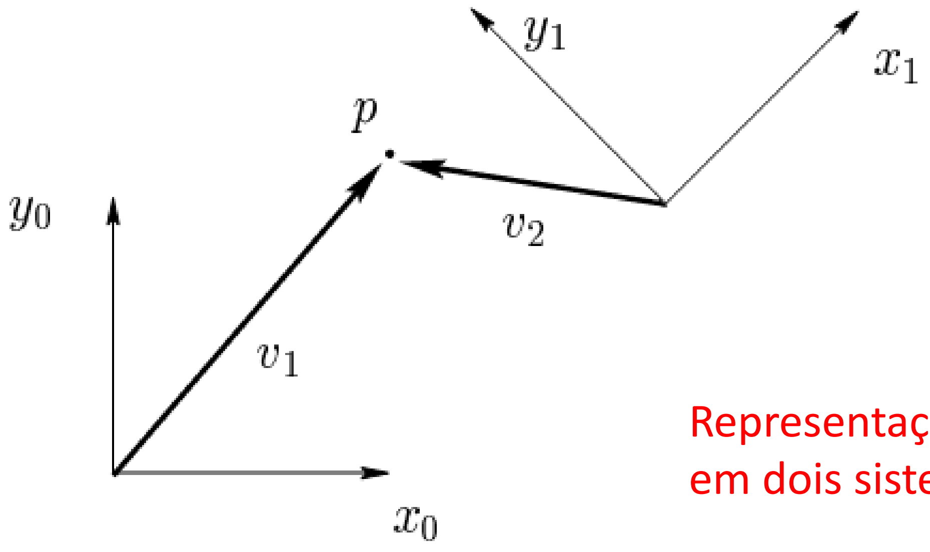
Robótica Industrial

Movimento Rígido e Transformação Homogênea

Prof. Dr. Alexandre S. Brandão
alexandre.brandao@ufv.br

Movimento Rígido

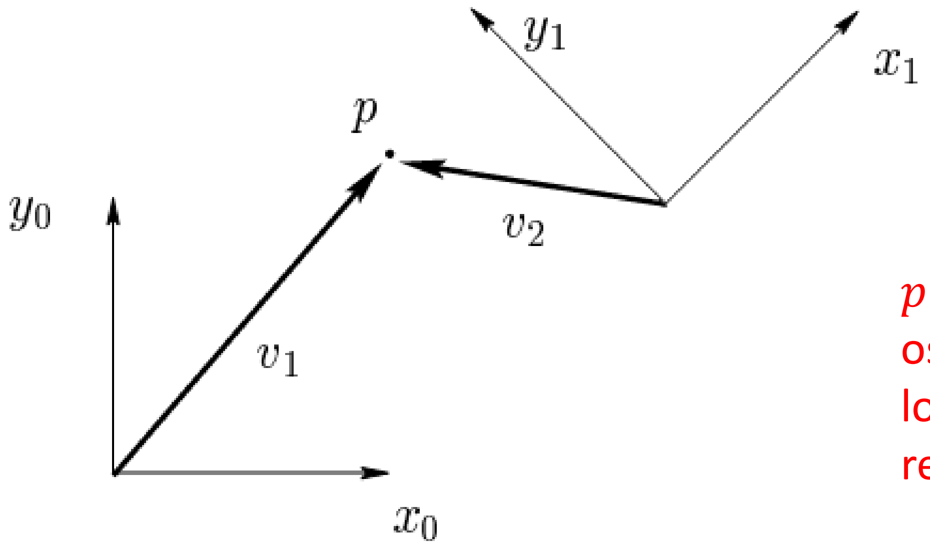
- A maior parte da cinemática de um robô envolve o estabelecimento de vários referenciais para representar a posição e a orientação de um objeto e a transformação para levar de um referencial a outro
- Representação de posição
  - Abordagem sintética: observação
  - Abordagem analítica: equacionamento



Representação de um ponto p
em dois sistemas de referência

Movimento Rígido

- Em robótica, determina-se posição no espaço Cartesiano.
- O ponto p poderia ser definido segundo o referencial $\mathrm{o}_0\mathrm{x}_0\mathrm{y}_0$ ou o referencial $\mathrm{o}_1\mathrm{x}_1\mathrm{y}_1$, respectivamente, $p^0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ e $p^1 = \begin{bmatrix} -2{,}8 \\ 4{,}2 \end{bmatrix}$.
- Geometricamente, um ponto corresponde a uma localização



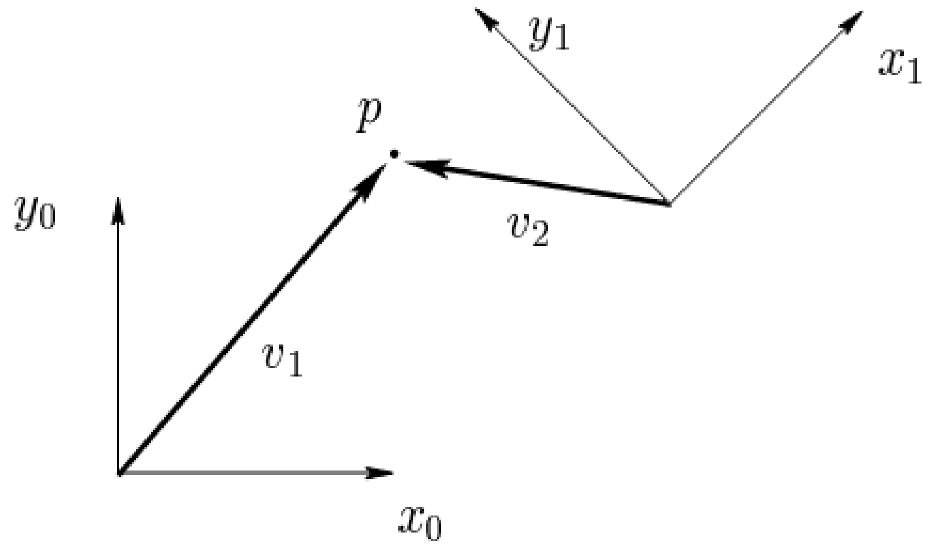
p é uma entidade geométrica p^0 e p^1 são os vetores coordenados que representam a localização do ponto do espaço com respeito a $o_o x_0 y_0$ e $o_1 x_1 y_1$

Movimento Rígido

- A origem de um sistema de coordenadas é um ponto no espaço e pode ser representada pela origem de outro sistema de coordenadas:

$$o_1^0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ e } o_0^1 = \begin{bmatrix} -10{,}6 \\ 3{,}5 \end{bmatrix}.$$

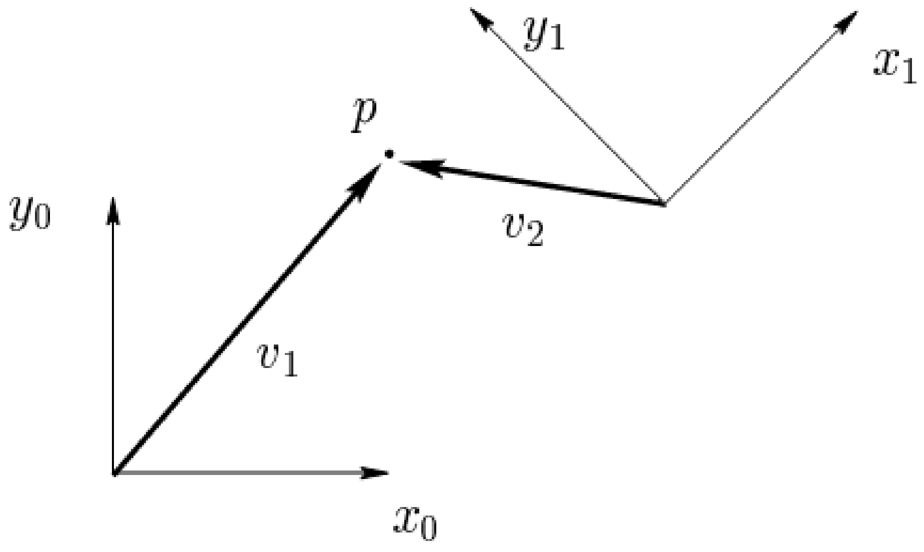
- o_1^0 representa a origem do referencial 1, representado em 0



Movimento Rígido

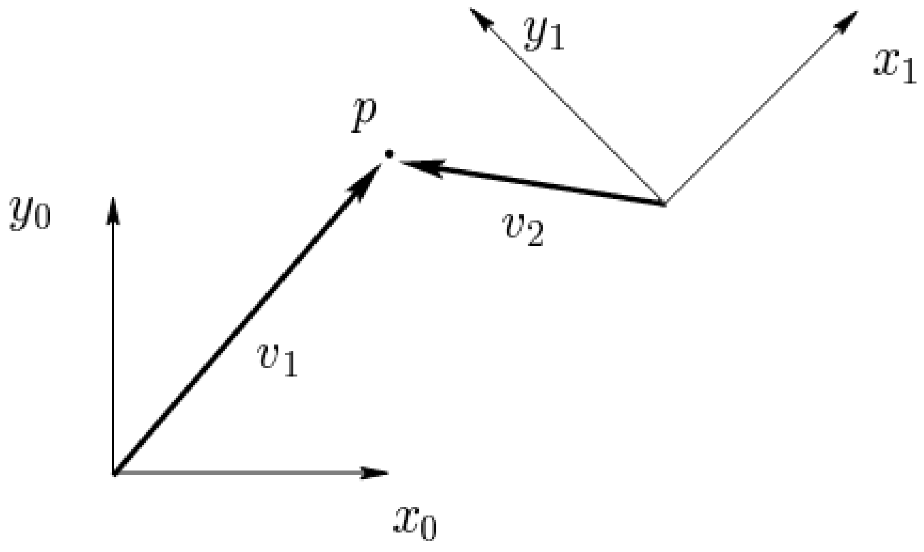
- Vetor especifica uma magnitude e uma direção.
  - Ex: Força e deslocamento
- v_1 e v_2 são entidades geométricas invariantes com respeito à escolha do sistema de coordenadas

$$v_1^0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}, v_1^1 = \begin{bmatrix} 7{,}77 \\ 0{,}8 \end{bmatrix}, v_2^0 = \begin{bmatrix} -5{,}1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } v_2^1 = \begin{bmatrix} -2{,}89 \\ 4{,}2 \end{bmatrix}$$



Movimento Rígido

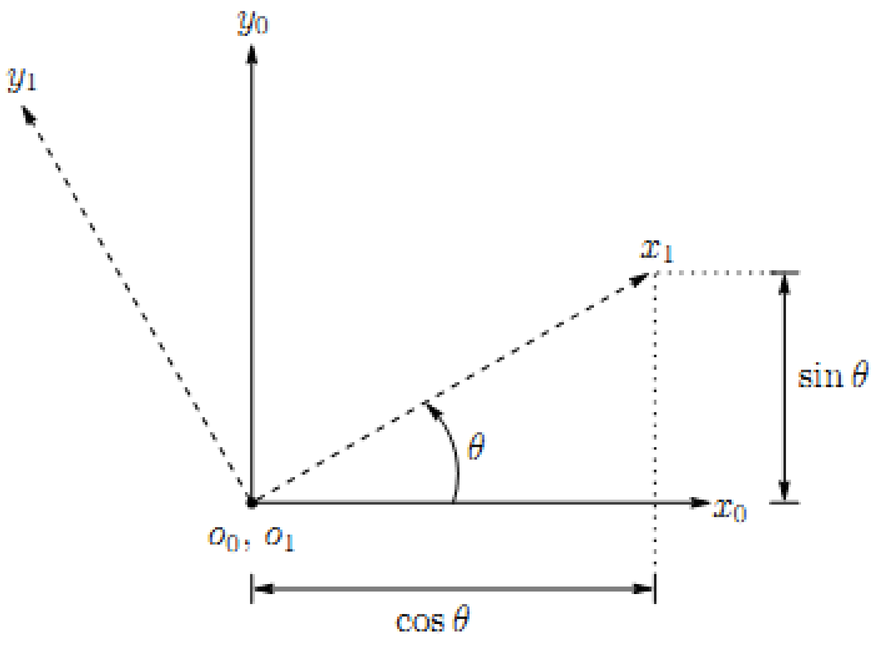
- Para realizar operações com vetores, é necessário que todos estejam no mesmo sistema de referências
- v_1^0 indica que o vetor 1 está representado no referencial 0
- $v_1^0 + v_2^1$ não será definida, desde que $o_o x_0 y_0$ e $o_1 x_1 y_1$ sejam paralelos



Rotação do Plano

- A representação de vetores de um sistema de coordenadas $o_1x_1y_1$ em outro $o_ox_0y_0$ é dada por $R_1^0 = [x_1^0 \quad y_1^0]$

$$x_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, y_1^0 = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \Longrightarrow R_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_0 & y_1 \cdot x_0 \\ x_1 \cdot y_0 & y_1 \cdot y_0 \end{bmatrix}$$



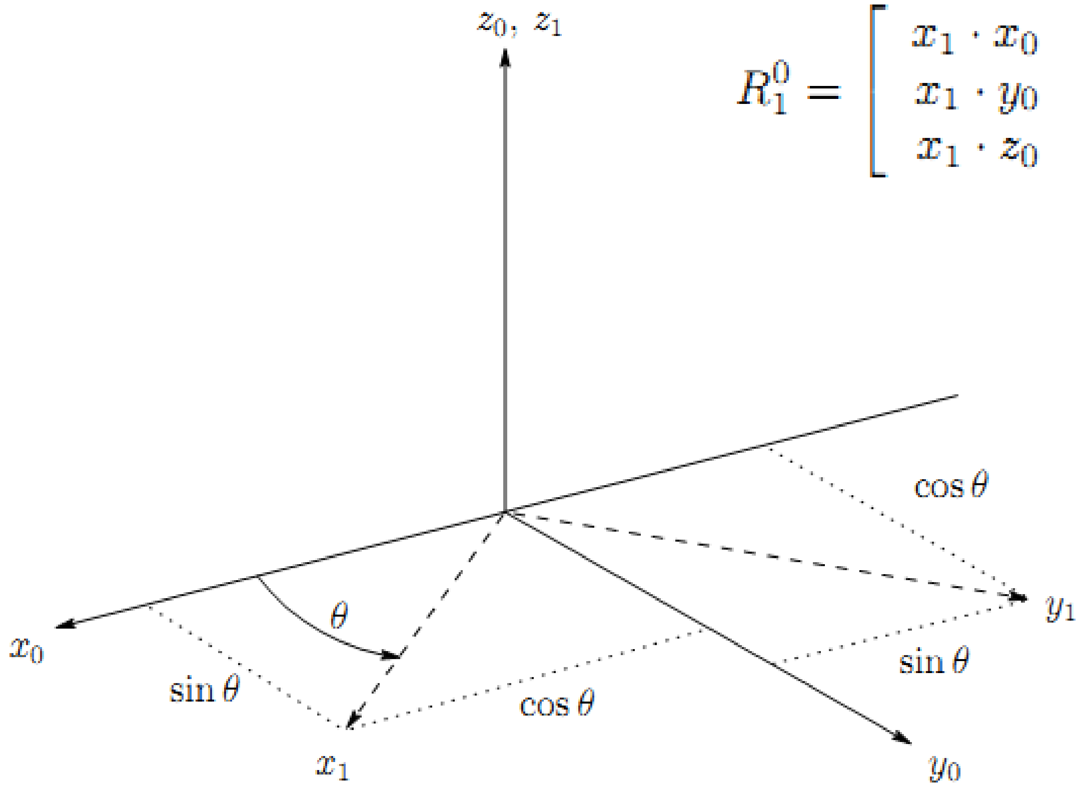
R_1^0 é denominada matriz de rotação

Propriedades:
- $R \in SO(n), R^{-1} = R^T, R^{-1} \in SO(n), \det R = 1$

Linhas (ou colunas) de R são mutuamente ortogonais e são vetores unitários

Rotação do Plano

- Sequência de rotações para representar um sistema de referência em outro sistema no espaço tridimensional



$$R_1^0 = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_0 & y_1 \cdot x_0 & z_1 \cdot x_0 \\ x_1 \cdot y_0 & y_1 \cdot y_0 & z_1 \cdot y_0 \\ x_1 \cdot z_0 & y_1 \cdot z_0 & z_1 \cdot z_0 \end{bmatrix}$$

Rotação em torno de z_0

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação em torno de y_0

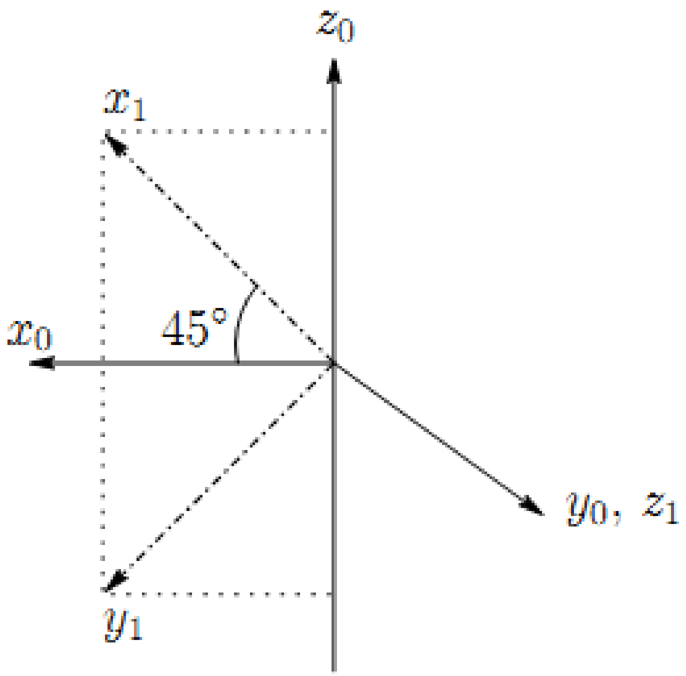
$$R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Rotação em torno de x_0

$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Rotação Tridimensional

- Exemplo: Indicar a matriz de rotação entre os referenciais $o_o x_0 y_0 z_0$ e $o_1 x_1 y_1 z_1$.

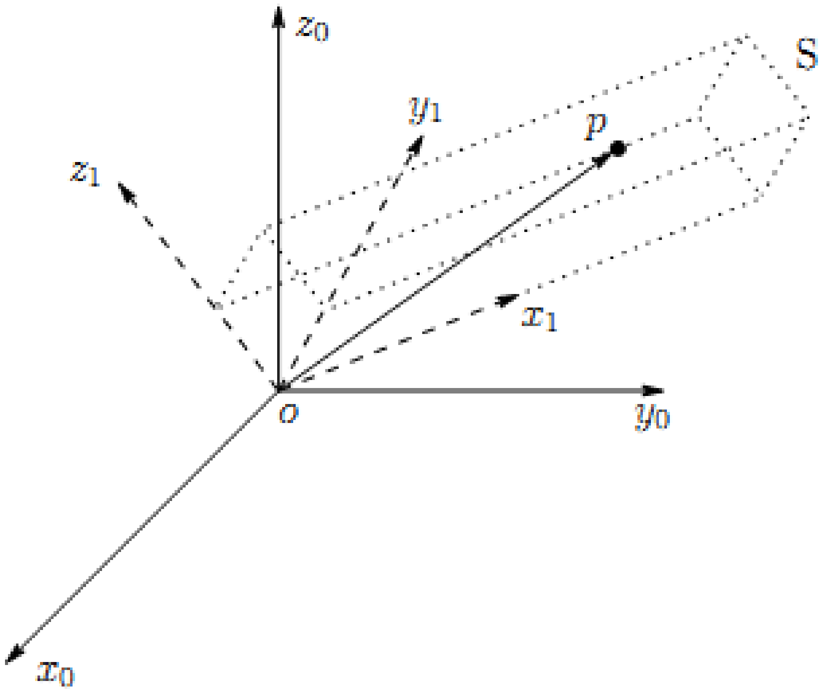


$$R_1^0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Verifique os eixos y_0 e z_1 são coincidentes, conforme demonstrado na matriz de rotação

Transformação Rotacional

- p^1 indica a representação do ponto p no sistema de referência $o_1x_1y_1$ e deseja-se representá-lo em $o_ox_0y_0$
- Considere as coordenadas $p^1 = (u, v, w)^T$ que satisfaçam $p = ux_1 + vy_1 + wz_1$. Então,



$$p^0 = \begin{bmatrix} p \cdot x_0 \\ p \cdot y_0 \\ p \cdot z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (ux_1 + vy_1 + wz_1) \cdot x_0 \\ (ux_1 + vy_1 + wz_1) \cdot y_0 \\ (ux_1 + vy_1 + wz_1) \cdot z_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_0 & y_1 \cdot x_0 & z_1 \cdot x_0 \\ x_1 \cdot y_0 & y_1 \cdot y_0 & z_1 \cdot y_0 \\ x_1 \cdot z_0 & y_1 \cdot z_0 & z_1 \cdot z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

$$p^0 = R_1^0 p^1$$

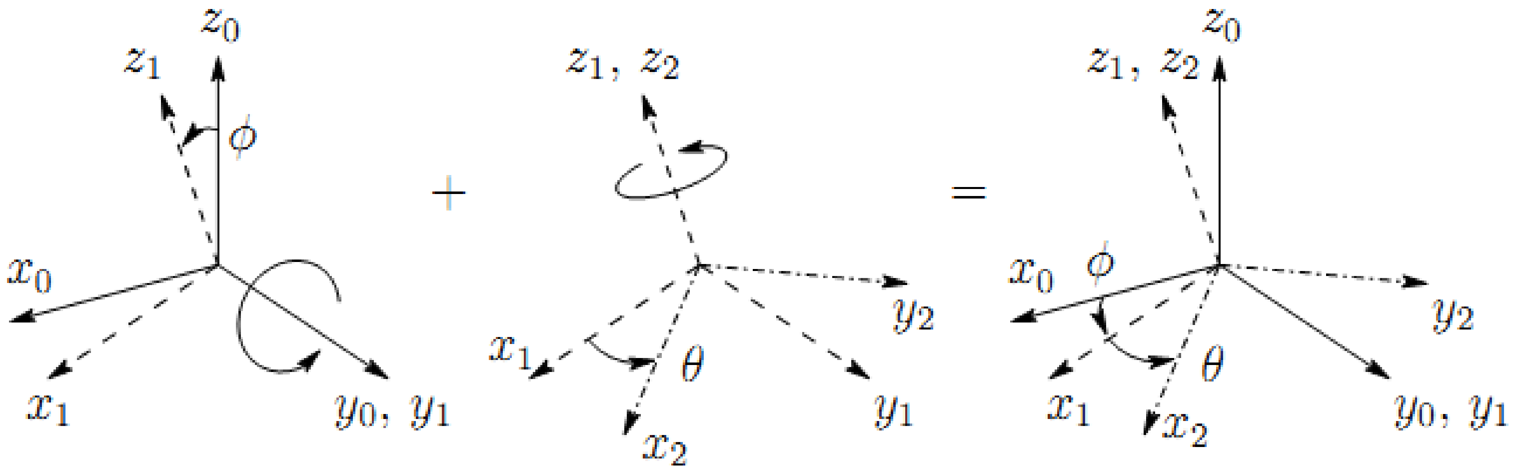
Composição de Rotações

Composição de Rotações

- Seja uma matriz de rotação entre $o_o x_0 y_0 z_0$ e $o_1 x_1 y_1 z_1$. Suponha que um terceiro sistema de referências seja adotado $o_2 x_2 y_2 z_2$. Sabendo que um ponto p pode ser representado em qualquer referencial, i.e., p_0, p_1 e p_2. Tem-se, portanto,

$$\begin{aligned} p^0 &= R_1^0 p^1 \\ p^1 &= R_2^1 p^2 \\ p^0 &= R_2^0 p^2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad p^0 = R_1^0 R_2^1 p^2 \quad \Longrightarrow \quad R_2^0 = R_1^0 R_2^1$$

Composição de rotação para eixos correntes



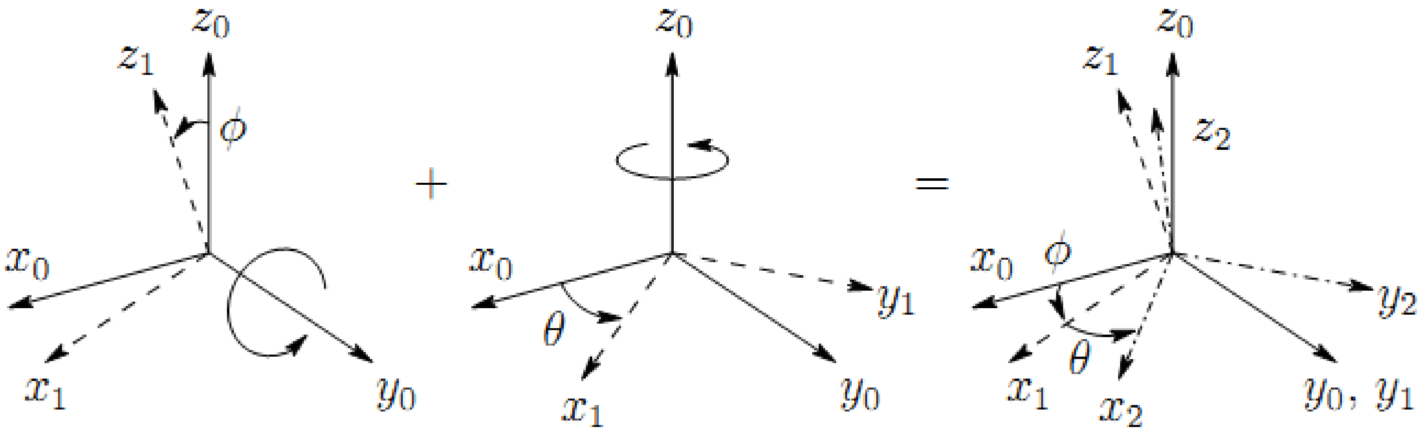
Composição de Rotações

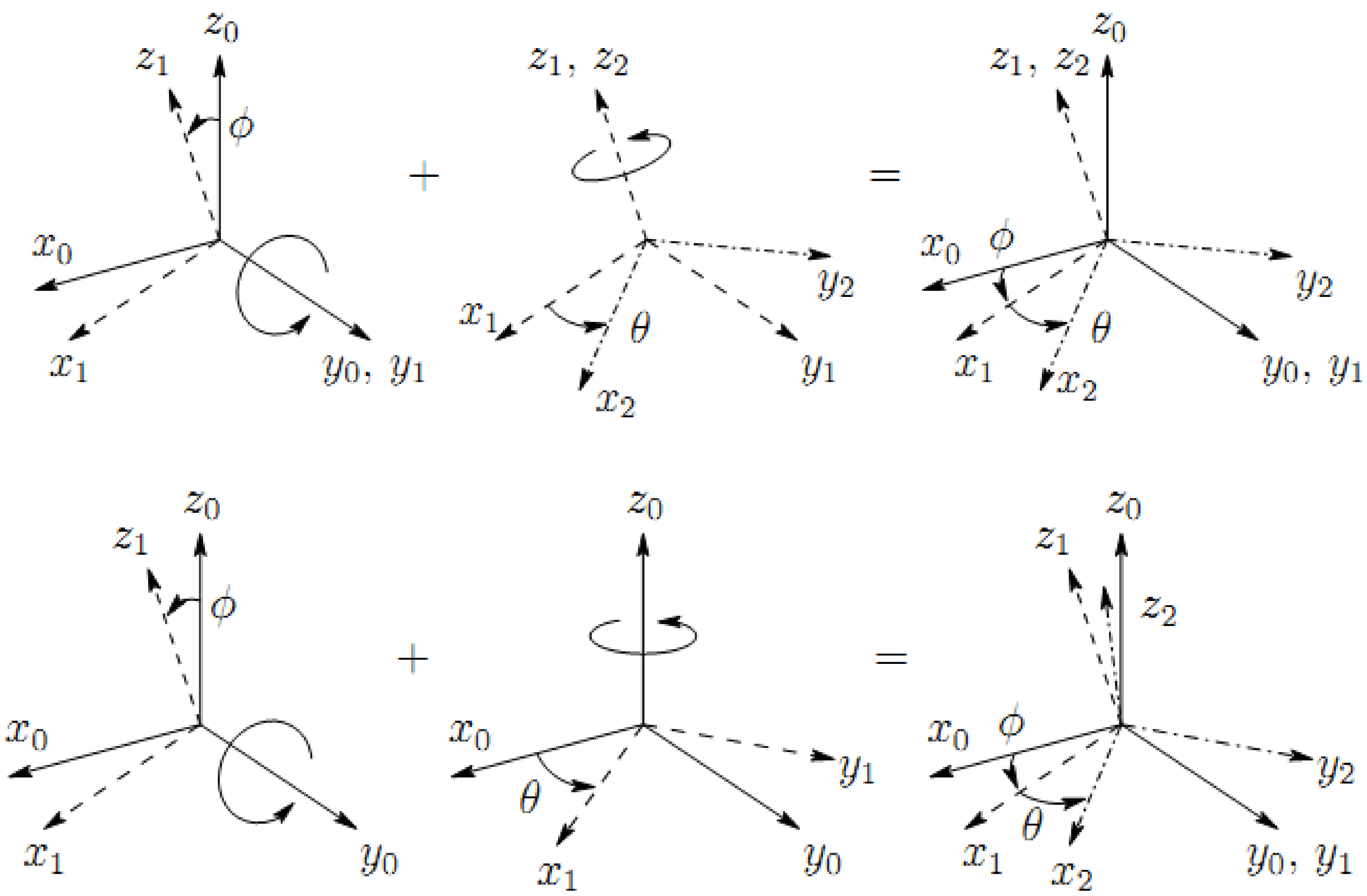
- Quando uma sequência de rotações ocorre sobre os eixos fixos de um sistema de referências, tem-se

$$R_2^0 \quad = \quad R_1^0\left[(R_1^0)^{-1}RR_1^0\right] = RR_1^0$$

- Em outras palavras, a composição de rotações ocorre na ordem inversa da composição em eixos correntes

$$\begin{aligned} p^0 &= R_{y,\phi}p^1 \\ &= R_{y,\phi}\left[R_{y,-\phi}R_{z,\theta}R_{y,\phi}\right]p^2 \\ &= R_{z,\theta}R_{y,\phi}p^2 \end{aligned}$$




z_0
z_1
ϕ
x_0
x_1
$y_0,\ y_1$
$+$
$z_1,\ z_2$
x_1
θ
x_2
y_2
y_1
$=$
z_0
$z_1,\ z_2$
x_0
ϕ
x_1
x_2
θ
y_2
$y_0,\ y_1$
z_0
z_1
ϕ
x_0
x_1
y_0
$+$
z_0
x_0
θ
x_1
y_1
y_0
$=$
z_0
z_1
z_2
x_0
ϕ
x_1
θ
x_2
y_2
$y_0,\ y_1$

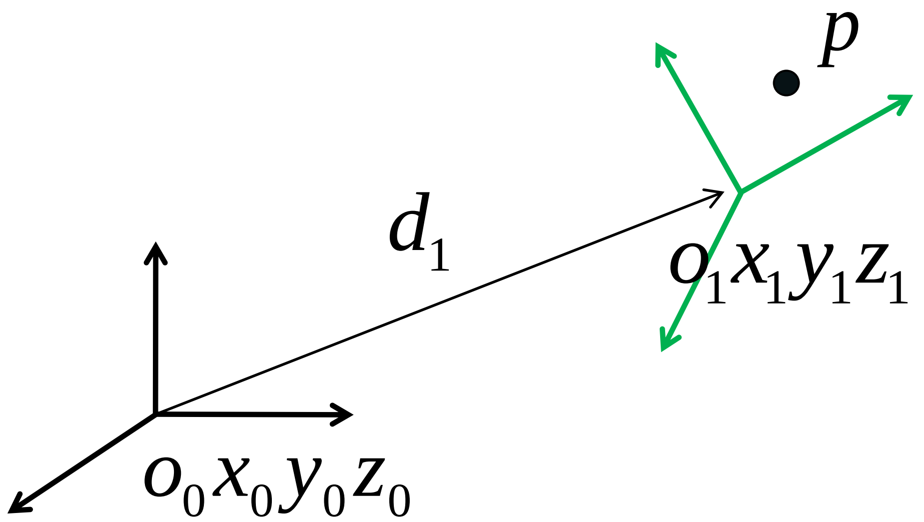
Composição de Rotações

- Definir a matriz de rotação final, após a sequência de rotações a seguir:
  - Rotação θ em torno do eixo corrente x
  - Rotação ϕ em torno do eixo corrente z
  - Rotação α em torno do eixo fixo z
  - Rotação β em torno do eixo corrente y
  - Rotação δ em torno do eixo fixo x

$$R = R_{x,\delta}\, R_{z,\theta}\, R_{x,\theta}\, R_{z,\phi} R_{y,\beta}$$

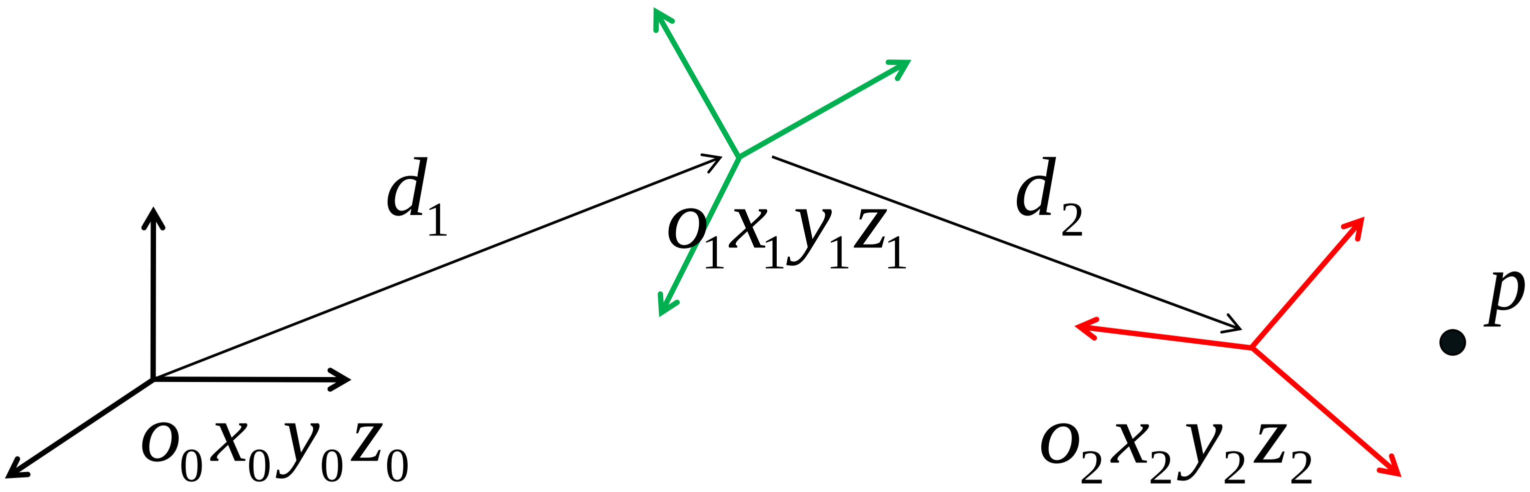
Transformação Homogênea

- Movimento de um corpo rígido
  - Composição de rotação e translação
- Seja R_1^0 a matriz de rotação que especifica a orientação do referencial $o_1x_1y_1z_1$ em relação a $o_0x_0y_0z_0$ e d seja o vetor com origem em $o_0x_0y_0z_0$ e fim em $o_1x_1y_1z_1$
- Supondo que p é representado no referencial $o_1x_1y_1z_1$, então sua representação no referencial $o_0x_0y_0z_0$ é dada por $p^0 = R_1^0 p^1 + d_1^0$



Transformação Homogênea

- Se um terceiro referencial é considerado, então
- $p^1 = R_2^1 p^2 + d_2^1$
- $p^0 = R_1^0 p^1 + d_1^0$
- $p^0 = R_1^0 R_2^1 p^2 + R_1^0 d_2^1 + d_1^0$
- Daí, $p^0 = R_2^0 p^2 + d_2^0$, com $R_2^0 = R_1^0 R_2^1$ e $d_2^0 = R_1^0 d_2^1 + d_1^0$.



Transformação Homogênea

- Representação na forma matricial

$$p^0 = R_1^0 R_2^1 p^2 + R_1^0 d_2^1 + d_1^0$$

$$H = \begin{bmatrix} R_1^0 & d_1^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2^1 & d_2^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^0 R_2^1 & R_1^0 d_2^1 + d_1^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R \in SO(3), d \in \mathrm{R}^3$$

- Propriedades

H é uma matriz quadrada

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$