UFV - Universidade Federal de Viçosa

CCE - Departamento de Matemática

3^a Lista de exercícios de MAT 143 - Cálculo Integral e Diferencial II

2017-2

1. Ache o raio e o intervalo de convergência da série de potências:

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$;

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{n+1}$;

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n6^n} (2x-1)^n$;

2. Prove as igualdades abaixo:

   (a) $\frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \cdots (-1)^n \frac{1}{3^n(2n+1)} \cdots \right) = \frac{\pi}{6}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} = 4$;

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} = ln \frac{3}{2}$;

   (d) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} \frac{1}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/2}$;

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3$;

3. Enccontre uma série de potências, centrada em $a = 0$, e determine seu raio e intervalo de convergência.

   (a) $f(x) = ln \frac{1}{1-x}$

   (b) $f(x) = ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

   (c) $f(x) = \frac{3x}{1+x-2x^2}$

   (d) $f(x) = \frac{x^2}{2-x^3}$

   (e) $f(x) = (1+x)ln(1+x)$

   (f) $f(x) = senh(-5x)$

   (g) $f(x) = x^2 cosh(x^3)$

   (h) $f(x) = cos^2 x$

   (i) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$

4. Encontre a série de potências da função $f(x) = arcsenx$ e determine seu raio de convergência.

5. Use a série de potências da função $f(x) = arctgx$ para representar π como a soma de uma série infinita.

6. Encontre uma série de potências para representar a função $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ e, por derivação termo a termo, prove que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$.

7. Encontre a soma da série.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n}}{n!}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n n!}$

(e) $3 + \frac{9}{2!} + \frac{27}{3!} + \frac{81}{4!} + \cdots$

(f) $1 - ln2 + \frac{ln^2 2}{2!} - \frac{ln^3 2}{3!} + \cdots$

(g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{2^{3n}}$

(h) $1 - e + \frac{e^2}{2!} - \frac{e^3}{3!} + \frac{e^4}{4!} - \cdots$

8. Calcule $\int \frac{e^x}{x} dx$ como uma série finita.

9. Mostre que $cosh(x) \geq 1 + \frac{1}{2}x^2$, para todo x real.

10. Para quais valores de x a série $\sum_{n=0}^{\infty}(lnx)^n$ converge?

11. Em estatística a função $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$ é denominada função Erro. Encontre a série de Maclaurin da função Erro,

12. Achar a série de potências em torno dos pontos indicados das funções dadas, fornecendo o intervalo onde estas estão representadas pelas correspondentes séries.

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = -1$

(b) $f(x) = sen(x)$, $a = \frac{\pi}{6}$

(c) $f(x) = cos(x)$, $a = \frac{\pi}{2}$

(d) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 9$

13. Usando séries de potências, prove que:

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - cosx - \frac{1}{2}x^2}{x^4} = \frac{1}{24}$

(c) $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)senx - x}{xsenx} = 1$

(d) $\lim_{x \to 1} \frac{lnx - x + 1}{x - 1} = 0$

14. Determine o domínio da função f sendo:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{ln(n)}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+1}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+3}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} e^n x^n$

(g) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(ln(n))^2}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{n^3}(x-2)^n$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} senh(2n)x^n$

15. Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ tem raio de convergência R, $R > 0$ ou $R = +\infty$. Prove que o raio de convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ é, também R.

16. Se $f^{(n)}(0) = (n+1)!$, para $n = 0, 1, 2, \cdots$, encontre a série de Maclaurin e seu raio de convergência.

17. Encontre a série de Taylor de f, centrada em $a = 4$, se $f^{(n)}(4) = \dfrac{(-1)^n n!}{3^n(n+1)}$.

18. Use a série binomial para expandir a função como uma série de potências. Diga qual é o raio de convergência.

    (a) $f(x) = \sqrt{1+x}$

    (b) $f(x) = \dfrac{1}{(4+2x)^3}$

    (c) $f(x) = (4-x)^{2/3}$

19. As afirmações a seguir são verdadeiras ou falasas? Justifique sua resposta.

    (a) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge em $x = 1$, então converge em $x = -1$.

    (b) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge em $x = 2$, então converge em $x = -1$.

    (c) Se o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é R, então o raio de convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ é $\sqrt{R}$.

20. Encontre uma expansão em série de potências de x para $x^2 e^{-x}$. usando isto, prove que $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(n+2)2^{n+1}}{n!} = 8$.

21. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências, com raio de convergência 2. Diga, justificando, quais das seguintes afirmações são necessariamente verdadeiras e quais são necessariamente falsas.

    (a) ( ) 1 pertence ao intervalo de convergência da série;

    (b) ( ) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ é convergente;

    (c) ( ) $a_n \to 0$;

    (d) ( ) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{5^n}$ é divergente;

    (e) ( ) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_n$ é divergente;

    (f) ( ) $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n a_n$ é divergente.

22. (a) Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$

        i. Desenvolva a função em série de potências de x;

        ii. Desenvolva a função em série de potências de $x+5$;

    (b) Para a função $g(x) = ln(2-x)$, determine os desenvolvimentos seguintes e indique os respectivos intervalos de convergência:

        i. em série de potências em torno de $c = 1$;

        ii. em série de potências em torno de $c = -5$.

23. Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-2)^n$.

   (a) Determine o domínio da função f.

   (b) Calcule $f(3/2)$

24. (a) Utilize a série de potências da função $h(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $|x| < 1$, para determinar uma série de potências para $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-x^3)^2}$, encontrando o raio de convergência.

   (b) Utilize o item a) para provar que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(-1)^{3n-1}}{2^{3n-1}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^4$.

25. (a) Utilize a série de potências da função $h(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $|x| < 1$, para determinar uma série de potências para $f(x) = \dfrac{4}{4+t}$, encontrando o raio de convergência.

   (b) Determine uma série de potências para $f(x) = ln(4+x)$ e seu raio de convergência.

   (c) Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n2^n} = ln2$.

26. Determine a série de Fourier da função dada.

   (a) $f(x) = \begin{cases} 1 & se \quad 0 \le x \le \pi \\ 0 & se \quad -\pi \le x < 0 \end{cases}$

   (b) $f(x) = |x|$, $-\pi \le x \le \pi$

   (c) $f(x) = \begin{cases} 1 & se \quad 0 \le x \le \pi \\ -1 & se \quad -\pi \le x < 0 \end{cases}$

   (d) $f(x) = x^3$, $-\pi \le x \le \pi$

   (e) $f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad -\pi \le x \le -1 \\ x+1 & se \quad -1 < x < 0 \\ 1 & se \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$

27. Suponha que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n cos(nx) + b_n sen(nx)].$$

   Prove que F é periódica de período 2π.

28. Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nx)$$

   onde a série do segundo membro é a série de Fourier da função $f(x) = x^2$, $-\pi \le x \le \pi$.

   (a) Prove que F é contínua.

   (b) Verifique que F é periódica de período 2π.

   (c) Esboce o gráfico de F.

29. Seja $f : [\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ uma função par, contínua e de classe C^2 por partes. Prove que, para todo $x \in [-\pi, \pi]$,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nx)$$

   que a convergência é uniforme neste intervalo, onde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-pi}^{\pi} f(x) cos(nx) dx, \ n \ge 0$$

.

30. Seja $f : [\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ uma função par, contínua e de classe C^2 por partes e tal que $f(\pi) =$. Prove que, para todo $x \in [-\pi, \pi]$,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(nx)$$

que a convergência é uniforme neste intervalo, onde

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-pi}^{\pi} f(x) sen(nx) dx,\ n \geq 0$$

.

31. Esboce o gráfico da função $F\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n cos(nx) + b_n sen(nx)].$$

onde a série do segundo membro é a série de Fourier da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periódica de período 2π, dada por

(a) $f(x) = \begin{cases} 1 & se \quad -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ 2 & se \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & se \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1 & se \quad -\pi \leq x < 0 \\ 2 & se \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$

GABARITO

1. (a) Raio=$+\infty$, Intervalo de convergência=$(-\infty, +\infty)$
   (b) Raio=1, Intervalo de Convergência $=[2, 4]$
   (c) Raio=3, Intervalo de Convergência $=\left(\frac{-5}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

2.

3. (a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$; Raio=1, Intervalo=$[-1, 1)$
   (b) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; Raio=1, Intervalo=$[-1, 1)$
   (c) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-(-2)^n)x^n$; Raio=1, Intervalo=$(-1, 1)$
   (d) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{2^{n+1}}$; Raio=$\sqrt[3]{2}$, Intervalo=$(-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$
   (e) $f(x) = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$; Raio=1, Intervalo=$[-1, 1]$
   (f) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; Raio=$+\infty$, Intervalo=$(-\infty, +\infty)$
   (g) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{6n+2}}{(2n)!}$; Raio=$+\infty$, Intervalo=$(-\infty, +\infty)$
   (h) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+2)}$; Raio=$+\infty$, Intervalo=$(-\infty, +\infty)$
   (i) $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n^2-n)x^{n-2}}{2}$ Raio=1, Intervalo=$(-1, 1)$

4. $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) x^{2n+1}}{n! 2^n (2n+1)}$; Raio=1

5. $\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4}{2n+1}$

6. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$

7. (a) e^{-x^4}
   (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
   (c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
   (d) $e^{\frac{3}{5}}$
   (e) $e^3 - 1$
   (f) $\frac{1}{2}$
   (g) $\frac{1}{11}$
   (h) e^{-e}

8. $\int \frac{e^x}{x} dx = ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n! n} + C$

9.

10. Intervalo de Convergência=$\left(\frac{1}{e}, e\right)$

11. $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$

12. (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}-(x+1)^n$; Intervalov=$(-2,0)$

    (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n(x-\frac{\pi}{6})^{2n}}{(2n)!2}+\dfrac{(-1)^n\sqrt{3}(x-\frac{\pi}{6})^{2n+1}}{(2n+1)!2}\right)$; Intervalo= $\mathbb{R}$

    (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(x-\frac{\pi}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!}$; Intervalo=$\mathbb{R}$

    (d) $3+\dfrac{1}{6}(x-9)\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}3\cdot5\cdots(2n-3)(x-9)^n}{2^n n!3^{2n-1}}$; Raio de Convergência= 9

13.

14. (a) $D_f=(-1,1)$
    (b) $D_f=[-1,1)$
    (c) $D_f=(-1,1)$
    (d) $D_f=[-1,1]$
    (e) $D_f=\mathbb{R}$
    (f) $D_f=(\frac{-1}{2},\frac{1}{2})$
    (g) $D_f=[-1,1]$
    (h) $D_f=2$
    (i) $D_f=(\frac{-1}{e^2},\frac{1}{e^2})$

15.

16. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$; Raio=1

17. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x-4)^n}{3^n(n+1)}$

18. (a) $1+\dfrac{1}{2}x+\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(1)^{n-1}3\cdot5\cdots(2n-3)x^n}{2^n n!}$; Raio=1

    (b) $\dfrac{1}{64}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1)^n3\cdot4\cdot5\cdots(n+2)x^n}{2^n n!}$; Raio=1

    (c) $2\sqrt[3]{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1)^n2\cdot4\cdot7\cdots(3n-5)x^n}{12^n n!}$; Raio=1

19. a)F, b)V, c)V

20. $x^2e^{-x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{n+2}}{n!}$, para todo x real

21. a)V, b)V, c) V, d)F, e)F, f)V

22. (a) i. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^{n+1}}$

        ii. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+5)^n}{7^{n+1}}$

    (b) i. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$; Intervalo=$[0,2)$

        ii. $ln7+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)(x+5)^{n+1}}{7^{n+1}(n+1)}$; Intervalo=$[-12,2)$

23. (a) $D_f=(1,3)$
    (b) $f(3/2)=2$

24. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{3n-1}$, Raio=1

    (b)

25. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} x^n$; Raio=4

    (b) $ln4 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)}$; Raio=4

    (c)

26. (a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(2n-1)x}{2n-1}$

    (b) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

    (c) $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(2n-1)x}{2n-1}$

    (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n} \right] sen(nx)$

27.

28.

29.

30.

31.