

# ELT221 - Circuitos Elétricos II

Prof. Tarcísio Pizziolo

## Aula 6

### 6) Diagrama de Bode

**Hendrik Wade Bode**  
(USA: 1905\* – 1982†)



Consiste em dois Gráficos com escalas *semi-log*: 1-  $|H(j\omega)|$  (em dB) *versus*  $\omega$ .

2 -  $\angle H(j\omega)$  (em Graus) *versus*  $\omega$ .

**Decibel** (A unidade Bel é em homenagem a *Alexander Graham Bell*)

O **dB** é uma unidade logarítmica muito usada em telecomunicações por pelo menos dois motivos:

1) O ouvido humano tem resposta logarítmica (sensação auditiva *versus* potência acústica).

2) Em telecomunicações são utilizados números extremamente grandes ou pequenos.

O uso de logaritmos torna estes números grandes ou pequenos fáceis de manipular e transforma produtos em somas e divisões em subtrações. O **dB** é um número relativo e permite representar relações entre duas grandezas de mesmo tipo, como relações de potências, tensões, correntes ou qualquer outra relação adimensional. Portanto, permite definir ganhos e atenuações, relação sinal/ruído, dinâmica, etc...

Assumindo como referência que o **menor** som que alguém pode ouvir é **1**, em escala exponencial com base 10 podemos chamar esse som de  $10^0 = 1$ . Assumindo também como referência que o **maior** som que alguém pode ouvir é **1.000.000.000.000** em escala exponencial com base 10 podemos chamar esse som de  $10^{12}$ .

Em termos de **potência de 10** teremos uma escala entre 0 e 12 (que correspondem ao número de zeros da potência desses sons). Logo:

$10^0 = 1$  (o **menor som audível - limiar de audibilidade**)

$10^1 = 10$

$10^2 = 100$

$10^3 = 1.000$

$10^4 = 10.000$

$10^5 = 100.000$

$10^6 = 1.000.000$

$10^7 = 10.000.000$

$10^8 = 100.000.000$

$10^9 = 1.000.000.000$

$10^{10} = 10.000.000.000$

$10^{11} = 100.000.000.000$

$10^{12} = 1.000.000.000.000$  (o **maior som que podemos ouvir - limiar da dor**)

A partir desta escala Bode criou o **Bel** (homenagem a **Alexander Graham Bell**, inventor do telefone). Assim, o **menor som que podemos ouvir é "0 Bel"**, e o **maior som que podemos ouvir é "12 Béis"**. Quanto mais próximo de "0 Bel", menos potência sonora (no sentido de volume) tem o som, e quanto mais perto de "12 Béis", mais “perto estamos de ficarmos com o ouvido doendo”.

- Mas se o menor som que alguém pode ouvir é "**zero Béis**", e zero não representa nada, como pode-se estar ouvindo alguma coisa? Outro problema é que de um valor de Bels para outro, a percepção humana dos sons é bem diferente. Por exemplo, se 6 Béis representa uma conversa normal entre duas pessoas, 7 Bels já representa o barulho típico dentro de uma fábrica, com várias máquinas ligadas. Apesar de serem números "próximos" um do outro, as potências sonoras representadas são muito diferentes (na verdade, são 10 vezes maiores - é uma potência de base 10). Passou-se então a utilizar-se casas decimais nos Béis, ou seja, 6,1; 6,3; 6,7,... Daí surgiu o "**decibel**" (**dB**). Assim, a escala passou a ser de **0 a 120 decibéis**. Escrever 65 dB é a mesma coisa que escrever 6,5 Béis, 120 dB é o mesmo que 12 Bels, e zero dB é também zero Bel. O menor som que podemos ouvir então ficou em **1 dB (1 dB equivale a 0,1 Béis)**.

### Cálculo do Decibel (dB)

Seja um ruído de potência **P<sub>o</sub> Bel**. Consideremos a referência para o menor ruído que podemos ouvir de **P<sub>i</sub> Bel**. A diferença entre estes valores pode ser escrita como sendo:

$$Q(\text{Bel}) = (P_o - P_i) = \log_{10} P_o - \log_{10} P_i = \log_{10} \left( \frac{P_o}{P_i} \right) \text{Bel}$$

A escala para o **decibel** é **10 vezes** a escala do **Bel**, então:

$$Q(\text{decibel}) = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P_o}{P_i} \right) \text{dB}$$

Como a potência  $P = \frac{V^2}{R}$  é proporcional ao quadrado da tensão e dividida pela resistência do circuito, aplicando as propriedades dos logaritmos:

$$Q(\text{dB}) = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{\frac{(V_o)^2}{R_o}}{\frac{(V_i)^2}{R_i}} \right) \text{dB}$$

Considerando na mesma resistência (**R<sub>o</sub> = R<sub>i</sub>**):

$$Q(\text{dB}) = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{V_o}{V_i} \right) \text{dB}$$

**Exemplo:** Um amplificador de sonorização produz um volume de 90 dB com uma potência de 40 w. Se dobrarmos a potência do amplificador qual será o novo volume de dB?

$$Q(\text{dB}) = 10 \cdot \log_{10} (80 \text{ w} / 40 \text{ w}) = 10 \cdot \log_{10}(2) = 10 \cdot (0,3) = 3 \text{ dB}$$

Então, se com 40 w produz-se 90 dB, com 80 w serão produzidos 93 dB.

**Obs:** - Ao dobrar a potência tem-se um incremento de 3 dB no nível de volume. Se a potência for reduzida à metade, o volume de som será diminuído de -3 dB.

## Aplicação de dB em Função de Transferência

Como a Função de Transferência  $\mathbf{H(s) = H(jw)}$  relaciona tensões e correntes de saída do circuito com tensões e correntes de entrada do mesmo, aplica-se o dB como sendo:

$$\mathbf{Q \text{ (dB)} = 20.log_{10} |H(jw)|}$$

**Exemplo:** Para  $|H(jw)| = 0,8$ ; qual o valor deste módulo em dB?

$$|H(jw)|_{dB} = 20.log_{10} (|H(jw)|) = 20.log_{10} (0,8) = -1,94 \text{ dB}$$

**Exemplo:** Para um circuito com  $|H(jw)|_{dB} = 9,64 \text{ dB}$ , qual o valor de  $|H(jw)|$ ?

$$|H(jw)|_{dB} = 20.log_{10} (|H(jw)|) \Rightarrow |H(jw)| = 10^{\left(\frac{|H(jw)|_{dB}}{20}\right)} = 3$$

## Construção do Diagrama de Bode

Em Gráficos logarítmicos as relações de frequência são expressas em termos de *oitavas* ou *décadas*.

- Uma *oitava* = intervalo de frequência desde  $w_1$  até  $2w_1$ .
- Uma *década* = intervalo de frequência desde  $w_1$  até  $10w_1$ .

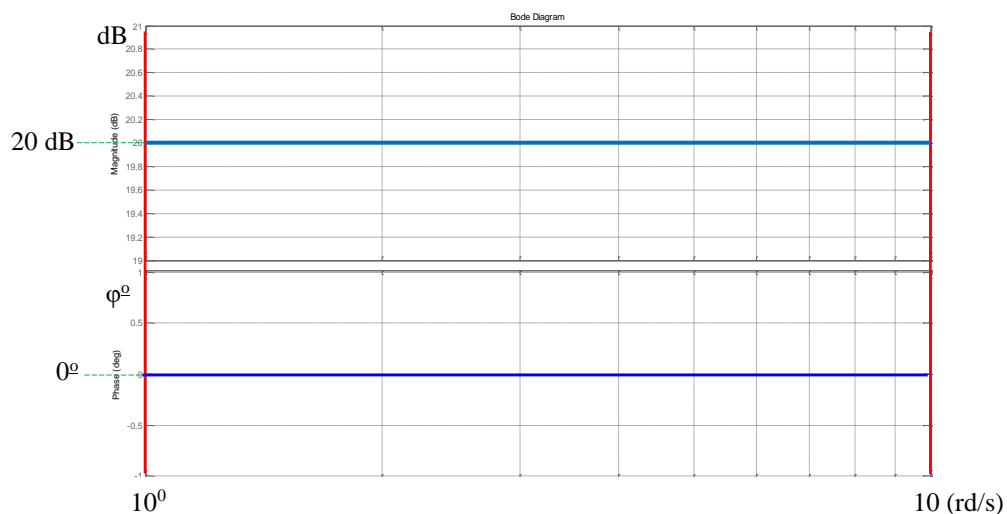
Para os Gráficos logarítmicos do Diagrama de Bode as relações de frequência são expressas em termos de *décadas*!

Fatores Básicos de  $H(jw)$ :

### 1) Ganho $K$ ( $K > 0$ )

- O Gráfico de *log-módulo* de  $K$  é uma reta horizontal  $20.log_{10}|K|$  em dB.
- O Gráfico do ângulo de fase  $\varphi(w)$  de  $K$  é  $0^\circ$ .
- A variação do ganho  $K$  desloca a curva *log-módulo* para baixo ou para cima não afetando o ângulo de fase  $\varphi(w)$ .

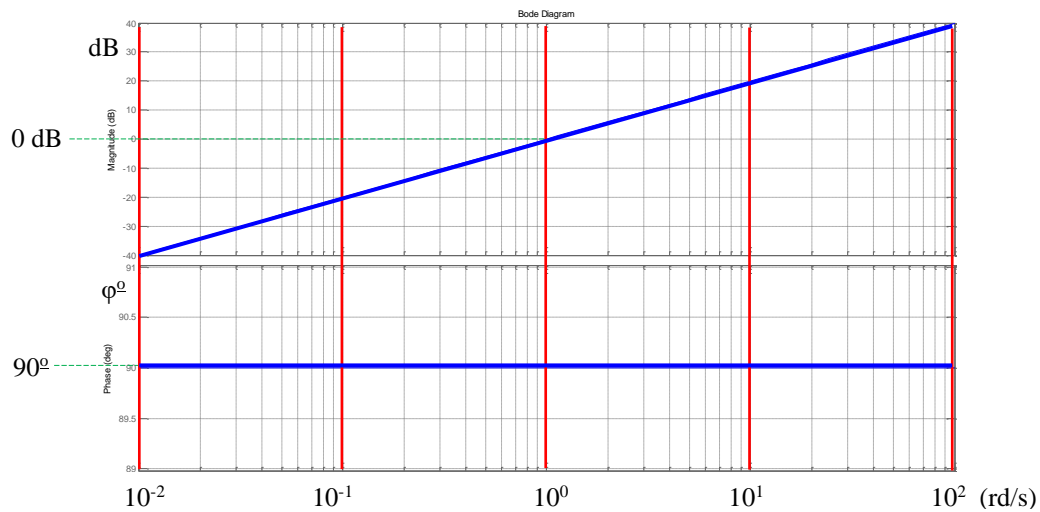
Gráfico:  $H(jw) = K = 10$



## 2) Fator Integral e Derivativo $(j\omega)^{\pm 1}$

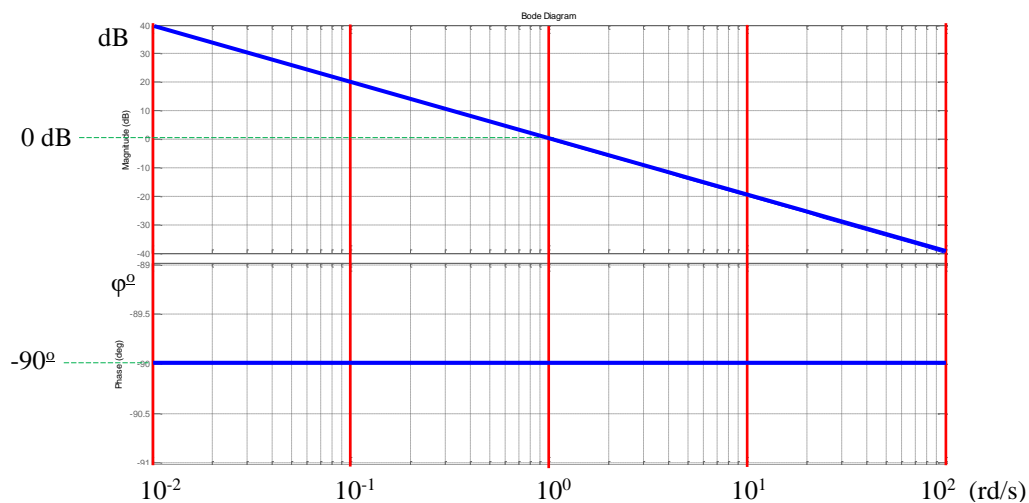
- O Gráfico de **log-módulo** de  $(j\omega)$  em dB é  $20 \cdot \log_{10}|(j\omega)^1| = 20 \cdot \log_{10}(\omega)$  dB.
- O Gráfico do ângulo de fase  $\phi(\omega)$  de  $(j\omega)$  é  $90^\circ$ .

Gráfico de  $(j\omega)$ :



- O Gráfico de **log-módulo** de  $(j\omega)^{-1}$  em dB é  $20 \cdot \log_{10}|(j\omega)^{-1}| = -20 \cdot \log_{10}(\omega)$  dB.
- O Gráfico do ângulo de fase  $\phi(\omega)$  de  $(j\omega)^{-1}$  é  $-90^\circ$ .

Gráfico de  $(j\omega)^{-1}$ :



Se a Função de Transferência possui o fator  $(j\omega)^{\pm n}$ , o **log-módulo** será:

- $20 \cdot \log_{10}|(j\omega)^{-n}| = -n \cdot 20 \cdot \log_{10}(\omega) = -20 \cdot n \cdot \log_{10}(\omega)$  dB
- $20 \cdot \log_{10}|(j\omega)^{+n}| = n \cdot 20 \cdot \log_{10}(\omega) = 20 \cdot n \cdot \log_{10}(\omega)$  dB

Conclusões:

- As inclinações das curvas dos **log-módulo** para os fatores  $(j\omega)^{-n}$  e  $(j\omega)^n$  serão  $-20n$  dB/década e  $20n$  dB/década respectivamente.
- Os ângulos de fase para os fatores  $(j\omega)^{-n}$  e  $(j\omega)^n$  serão  $-(90n)^\circ$  e  $(90n)^\circ$  respectivamente em toda a faixa de frequência.

### 3) Fator de Primeira Ordem $(1 + j\omega T)^{\pm 1}$

- O Gráfico de **log-módulo** de  $(1 + j\omega T)$  em dB varia para baixos e altos valores de  $\omega$ .

Para  $(1 + j\omega T)$  temos:  $20 \cdot \log_{10}|(1 + j\omega T)| = 20 \cdot \log_{10}(\sqrt{1 + \omega^2 T^2})$  (dB)

Assíntotas:

- Para baixas frequências ( $\omega \rightarrow 0$ ):

$$f(\omega \rightarrow 0) = 20 \cdot \log_{10}(\sqrt{1 + \omega^2 T^2}) = 20 \cdot \log_{10}(1) \cong 0 \text{ (dB)}$$

- Para altas frequências ( $\omega \rightarrow \infty$ ):

$$f(\omega \rightarrow \infty) = 20 \cdot \log_{10}(\sqrt{1 + \omega^2 T^2}) = 20 \cdot \log_{10}(\omega T) \text{ (dB)}$$

No cruzamento das assíntotas teremos:

$$20 \cdot \log_{10}(\omega T) = 0 \Rightarrow \log_{10}(\omega T) = 0 \Rightarrow \omega T = 10^0 \Rightarrow \omega T = 1 \Rightarrow \omega = \frac{1}{T} \text{ (rd/s)}$$

Esta frequência  $\omega = \frac{1}{T}$  (rd/s) é denominada **Frequência de Canto** e é denotada por:

$$\omega_n = \frac{1}{T} \text{ (rd/s)}$$

A **Frequência de Canto**  $\omega_n$  divide a curva de resposta em frequência em duas regiões, a **região de baixa frequência** ( $\omega \rightarrow 0$ ) e a **região de alta frequência** ( $\omega \rightarrow \infty$ ).

Então para  $\omega = \frac{1}{T} \Rightarrow \text{log-módulo} = 0 \text{ dB}$  e para  $\omega = \frac{10}{T} \Rightarrow \text{log-módulo} = 20 \text{ dB}$ .

Assim, o valor de  $20 \cdot \log_{10}(\omega T)$  (dB) **cresce** 20 dB/década de frequência  $\omega$ .

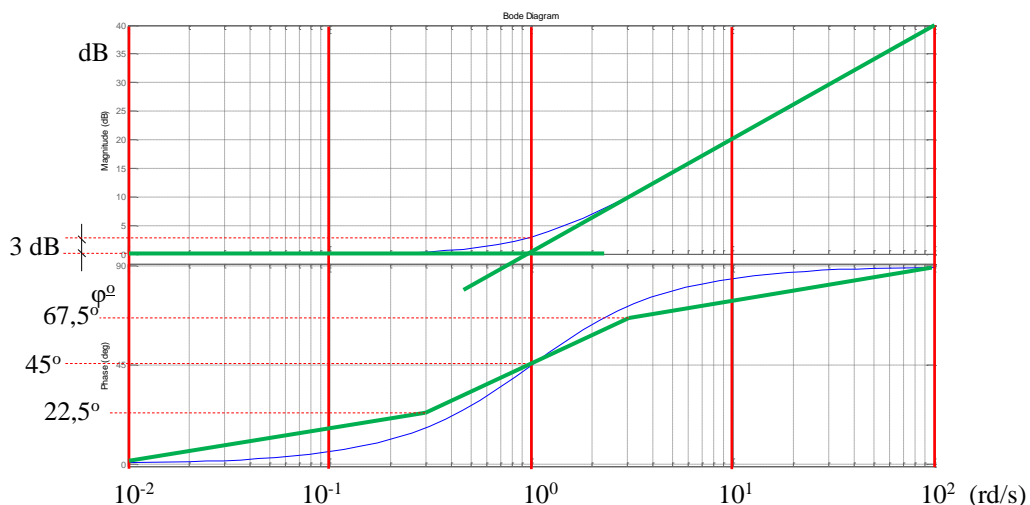
- O Gráfico do ângulo de fase  $\phi(\omega)$  de  $(1 + j\omega T)$  é dado por:  $\phi(\omega) = \text{tg}^{-1}(\omega T)$

Para  $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \phi = 0^\circ$

Para  $\omega = \frac{1}{T} \Rightarrow \phi = 45^\circ$

Para  $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \phi = 90^\circ$

Gráfico de  $(1 + j\omega T)$  com  $T = 1$ :



- O Gráfico de **log-módulo** de  $(1+j\omega T)^{-1}$  em dB varia para baixos e altos valores de  $\omega$ .

Para  $(1 + j\omega T)^{-1}$  temos:  $-20.\log_{10}|(1 + j\omega T)| = -20.\log_{10}(\sqrt{1 + \omega^2 T^2})$  (dB)

Assíntotas:

- Para baixas frequências ( $\omega \rightarrow 0$ ):

$$f(\omega \rightarrow 0) = -20.\log_{10}(\sqrt{1 + \omega^2 T^2}) = -20.\log_{10}(1) \cong 0 \text{ (dB)}$$

- Para altas frequências ( $\omega \rightarrow \infty$ ):

$$f(\omega \rightarrow \infty) = -20.\log_{10}(\sqrt{1 + \omega^2 T^2}) = -20.\log_{10}(\omega T) \text{ (dB)}$$

No cruzamento das assíntotas de baixa e de alta frequência teremos:

$$-20.\log_{10}(\omega T) = 0 \Rightarrow \log_{10}(\omega T) = 0 \Rightarrow \omega T = 10^0 \Rightarrow \omega T = 1 \Rightarrow \omega = \frac{1}{T} \text{ (rd/s)}$$

Esta frequência  $\omega = \frac{1}{T}$  (rd/s) é denominada **Frequência de Canto** e é denotada por:

$$\omega_n = \frac{1}{T} \text{ (rd/s)}$$

A **Frequência de Canto**  $\omega_n$  divide a curva de resposta em frequência em duas regiões, a **região de baixa frequência** ( $\omega \rightarrow 0$ ) e a **região de alta frequência** ( $\omega \rightarrow \infty$ ).

Então para  $\omega = \frac{1}{T} \Rightarrow \text{log-módulo} = 0 \text{ dB}$  e para  $\omega = \frac{10}{T} \Rightarrow \text{log-módulo} = -20 \text{ dB}$ .

Assim, o valor de  $-20.\log_{10}(\omega T)$  (dB) **decrece** -20 dB/década de frequência  $\omega$ .

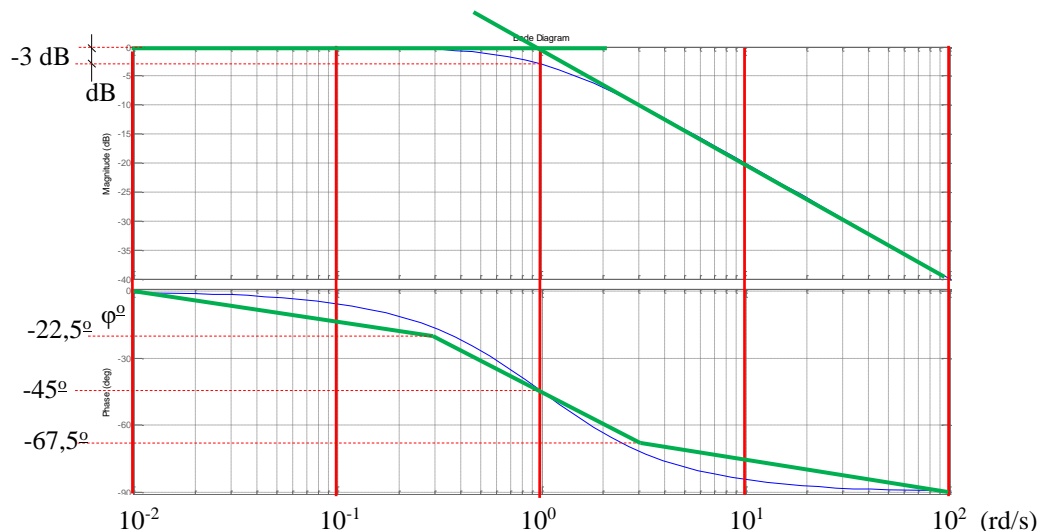
- O Gráfico do ângulo de fase  $\phi(\omega)$  de  $(1 + j\omega T)^{-1}$  é dado por:  $\phi(\omega) = -\text{tg}^{-1}(\omega T)$

Para  $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \phi = 0^\circ$

Para  $\omega = \frac{1}{T} \Rightarrow \phi = -45^\circ$

Para  $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \phi = -90^\circ$

Gráfico de  $(1 + j\omega T)^{-1}$  com  $T = 1$ :



4) Fatores Quadráticos  $\left[ 1 + 2\xi \left( \frac{jw}{w_n} \right) + \left( \frac{jw}{w_n} \right)^2 \right]^{\pm 1}$

- O Gráfico de **log-módulo** de  $\left[ 1 + 2\xi \left( \frac{jw}{w_n} \right) + \left( \frac{jw}{w_n} \right)^2 \right]^{\pm 1}$  em dB varia para baixos e altos valores de  $w$ .

Geralmente encontra-se:  $\left[ 1 + 2\xi \left( \frac{jw}{w_n} \right) + \left( \frac{jw}{w_n} \right)^2 \right]^{-1}$

- Se  $\xi > 1 \Rightarrow$  pólos reais distintos  $\Rightarrow$  dois fatores de 1ª ordem  $\Rightarrow$  idem a  $(1 + jwT)^{-1}$ !

- Se  $0 < \xi < 1 \Rightarrow$  pólos complexos conjugados  $\Rightarrow$  **log-módulo** e  $\phi(w)$  dependem de  $\xi$  e de  $w_n$ .

Então:  $20 \cdot \log_{10} \left[ \left[ 1 + 2\xi \left( \frac{jw}{w_n} \right) + \left( \frac{jw}{w_n} \right)^2 \right]^{-1} \right] = -20 \cdot \log_{10} \left[ \sqrt{\left( 1 - \frac{w^2}{w_n^2} \right)^2 + \left( 2\xi \frac{w}{w_n} \right)^2} \right]$

Assíntotas:

- Para baixas frequências ( $w \rightarrow 0$ ):

$$f(w \rightarrow 0) = -20 \cdot \log_{10} \left[ \sqrt{\left( 1 - \frac{w^2}{w_n^2} \right)^2 + \left( 2\xi \frac{w}{w_n} \right)^2} \right] = -20 \cdot \log_{10}(1) \cong 0 \text{ dB}$$

- Para altas frequências ( $w \rightarrow \infty$ ):

$$f(w \rightarrow \infty) = -20 \cdot \log_{10} \left[ \sqrt{\left( 1 - \frac{w^2}{w_n^2} \right)^2 + \left( 2\xi \frac{w}{w_n} \right)^2} \right] = -20 \cdot \log_{10} \left[ \frac{w}{w_n} \right]^2 = -40 \cdot \log_{10} \left[ \frac{w}{w_n} \right] \text{ dB}$$

No cruzamento das assíntotas teremos:

$$-40 \cdot \log_{10} \left( \frac{w}{w_n} \right) = 0 \Rightarrow w = w_n \text{ (rd/s)}.$$

Esta frequência  $w = w_n$  (rd/s) é denominada **Frequência de Canto** do Fator Quadrático.

Observando o Fator  $\left[ 1 + 2\xi \left( \frac{jw}{w_n} \right) + \left( \frac{jw}{w_n} \right)^2 \right]^{-1}$ , pode-se supor uma situação de

ressonância quando  $w = w_n$ , assim:  $\left[ 1 + 2\xi \cdot (j1) + (-1) \cdot (1)^2 \right]^{-1} = (j2\xi)^{-1}$

Conclusão: no valor  $w = w_n$  a resposta sofrerá um pico de ressonância dependendo do valor de  $\xi$ , ou seja, quanto maior a amplitude de  $\xi$  menor será o pico de ressonância e quanto menor a amplitude de  $\xi$  maior será o pico de ressonância.

A **Frequência de Canto**  $w_n$  divide a curva de resposta em frequência em duas regiões, a **região de baixa frequência** ( $w \rightarrow 0$ ) e a **região de alta frequência** ( $w \rightarrow \infty$ ).

Então para  $w = w_n \Rightarrow$  **log-módulo** = 0 dB e para  $w = 10 \cdot w_n \Rightarrow$  **log-módulo** = -40 dB.

Assim, o valor de  $-40 \cdot \log_{10} \left( \frac{w}{w_n} \right)$  (dB) **decrece** -40 dB/década de frequência  $w$ .

- O Gráfico do ângulo de fase  $\varphi(\omega)$  de  $\left[ 1 + 2\xi \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right) + \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^{-1}$  é dado por:

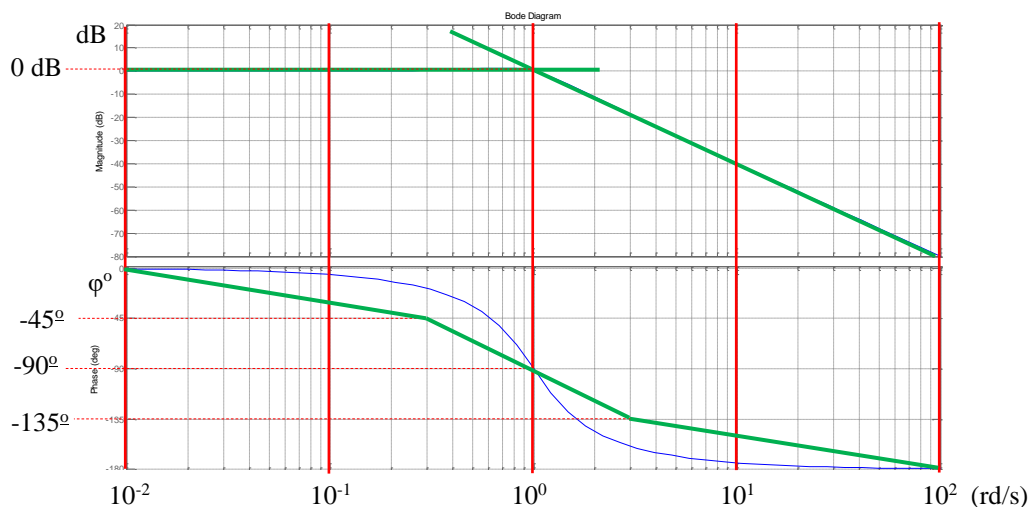
$$\varphi(\omega) = -\tan^{-1} \left[ \frac{2\xi \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)}{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right].$$

Para  $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi = 0^\circ$

Para  $\omega = \omega_n \Rightarrow \varphi = -90^\circ$

Para  $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi = -180^\circ$

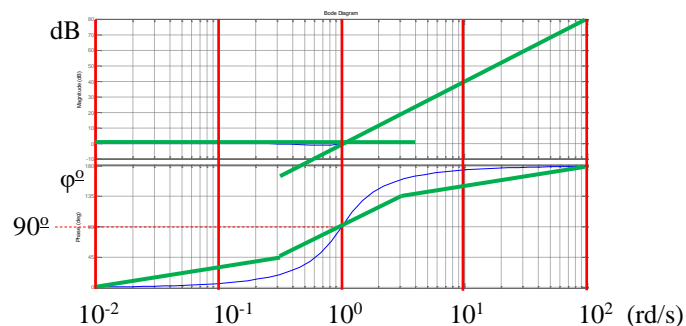
Gráfico para  $\xi = 0,5$  e  $\omega_n = 1 \text{ rd/s}$  de  $\left[ 1 + 2\xi \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right) + \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^{-1}$  :



Analogamente à análise feita para o fator de 1ª ordem, para o fator  $\left[ 1 + 2\xi \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right) + \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]$  obtém-se as curvas **log-módulo** e  $\varphi(\omega)$  invertendo-se os sinais

do **log-módulo** e do ângulo de fase  $\varphi(\omega)$  de  $\left[ 1 + 2\xi \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right) + \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^{-1}$ .

Gráfico para  $\xi = 0,5$  e  $\omega_n = 1 \text{ rd/s}$  de  $\left[ 1 + 2\xi \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right) + \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]$  :





### Frequência de Ressonância ( $w_r$ )

O módulo de  $|G(jw)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{w^2}{w_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{w}{w_n}\right)^2}}$  possui um valor de pico na frequência de ressonância.

O pico de ressonância ocorrerá quando:  $g(w) = \left(1 - \frac{w^2}{w_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{w}{w_n}\right)^2$  for mínimo!

$$\text{Então: } \frac{dg(w)}{dw} = 0 \Rightarrow w = w_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

$$\text{Como: } \frac{dg^2(w)}{dw^2} \Rightarrow 0 \Rightarrow w_r = w_n \sqrt{1 - 2\xi^2}, \text{ para } 0 \leq \xi \leq 0,707.$$

- Se  $\xi > 0,707$  não existe  $w_r$ .

### Valor do Pico de Ressonância ( $M_r$ )

Substituindo-se  $w_r$  em  $|G(jw)|$  temos que o valor do Pico de Ressonância. Assim:

$$M_r = |G(jw)|_{\text{máx}} = |G(jw_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

- Para  $\xi > 0,707 \Rightarrow M_r = 1$ .

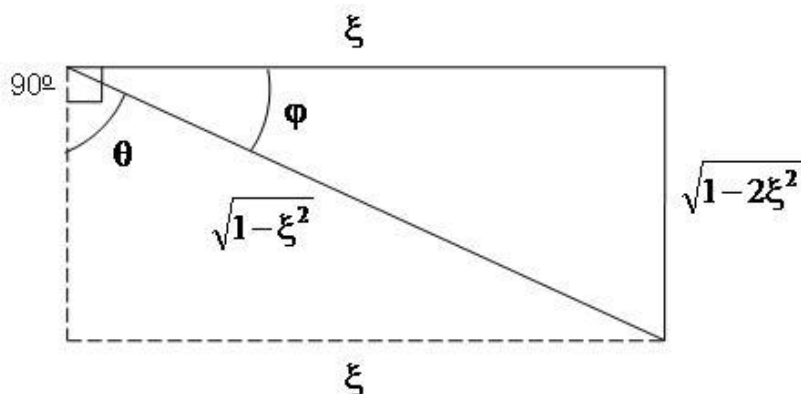
- Para  $\xi \rightarrow 0 \Rightarrow M_r \rightarrow \infty$ .

O ângulo de fase  $\varphi(w)$  onde ocorre o pico de ressonância pode ser obtido substituindo o

$$\text{valor de } w_r = w_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \text{ em } \varphi(w) = -\text{tg}^{-1} \left[ \frac{2\xi \cdot \left(\frac{w}{w_n}\right)}{1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2} \right] \text{ resultando:}$$

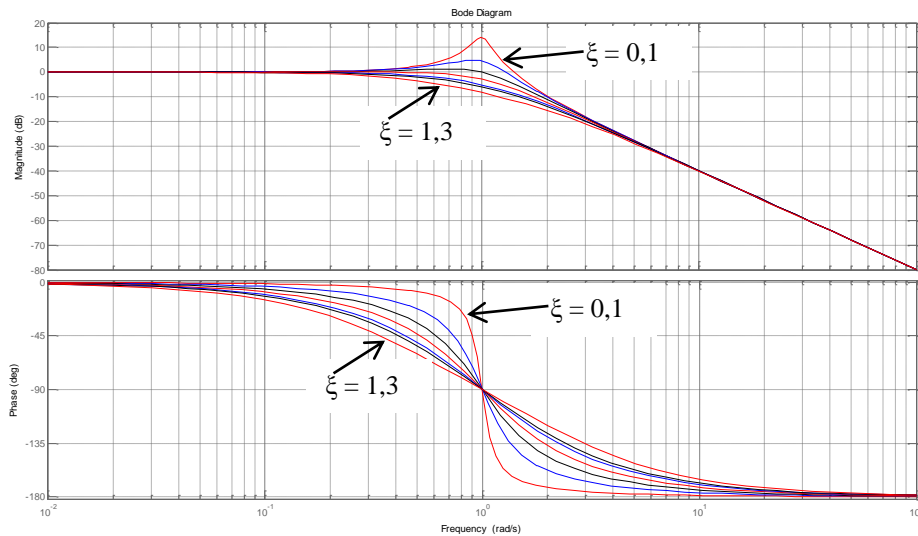
$$\varphi(w_r) = -\text{tg}^{-1} \left[ \frac{\sqrt{1 - 2\xi^2}}{\xi} \right] = -90^\circ + \text{sen} \left( \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right)$$

Geometricamente:



### Exemplo de Picos de Ressonância

Gráficos de  $\left[ 1 + 2\xi \left( \frac{jw}{w_n} \right) + \left( \frac{jw}{w_n} \right)^2 \right]^{-1}$  para  $w_n = 1 \text{ rd/s}$  e  $\xi$  variando de **0,1** até **1,3** em intervalos de 0,3.



### Importante:

Utilizando o **Diagrama de Bode**, a partir da Função de Transferência  $H(s)$  de um circuito e dada sua entrada, pode-se obter a sua saída em **estado permanente** ( $s = jw$ ) para qualquer valor de frequência  $w$ .

Por exemplo, se  $H(s = jw) = \frac{V_o(jw)}{V_i(jw)}$  é a Função de Transferência  $H(jw)$

de um circuito e dado que a sua entrada seja  $v_i(t) = V_m \cdot \cos(w_i t + \theta)$ , sendo  $w_i$  a frequência da fonte, a saída  $v_o(t)$  é obtida de:

$$V_o(jw_i) = H(jw_i) \cdot V_i(jw_i)$$

Onde:  $H(jw_i) = |H(jw_i)| \angle H(jw_i)$  e  $V_i(jw_i) = |V_i(jw_i)| \angle V_i(jw_i)$ .

No entanto, esta saída (ou resposta) do circuito é determinada apenas para a frequência  $w_i$  da fonte de entrada necessitando de novos cálculos de  $H(jw) = |H(jw)| \angle H(jw)$  e de  $V_o(jw) = |V_i(jw)| \angle V_i(jw)$  para qualquer outra frequência da fonte.

Como o **Diagrama de Bode** nos fornece  $|H(jw)|$  e  $\angle H(jw)$  para quaisquer valores de  $w$  variando de  $0$  a  $\infty$ , pode-se então determinar a saída (ou resposta) do circuito, dada a entrada  $v_i(t)$  para qualquer valor de frequência  $w$  desejada sem a necessidade de novos cálculos apenas utilizando os valores dados no **Diagrama de Bode**.

## Exercício de Aplicação - Construção do Diagrama de Bode

Para esboçar o **Diagrama de Bode** para uma **Função de Transferência** tal como

$$H(s) = \frac{K \cdot \prod_{n=1}^k (s + z_n)}{\prod_{r=1}^j (s + p_r)} ; \text{ onde: } k = \text{n}^\circ \text{ de zeros e } j = \text{n}^\circ \text{ de polos.}$$

deve-se fazer:

- 1) Reescrever a **Função de Transferência** como produto de **Fatores Básicos**.
- 2) Identificar a **Frequência de Canto**  $w_n$  da cada Fator Básico.
- 3) Esboçar as **assíntotas** do **log-módulo** com as inclinações apropriadas entre Frequência de Canto.
- 4) A curva  $\phi(w)$  é esboçada adicionando-se as curvas dos ângulos de fase dos Fatores Básicos.
- 5) A curva exata do Diagrama de Bode pode ser obtida efetuando-se as correções necessárias (inserindo erros).

**Exemplo:** Esboçar o Diagrama de Bode para a Função de Transferência dada a seguir:

$$H(s) = \frac{100.(s + 10)}{s.(s + 1).(s^2 + s + 100)}$$

Primeiramente devemos fatorar a  $H(jw)$  em **Fatores Básicos**:

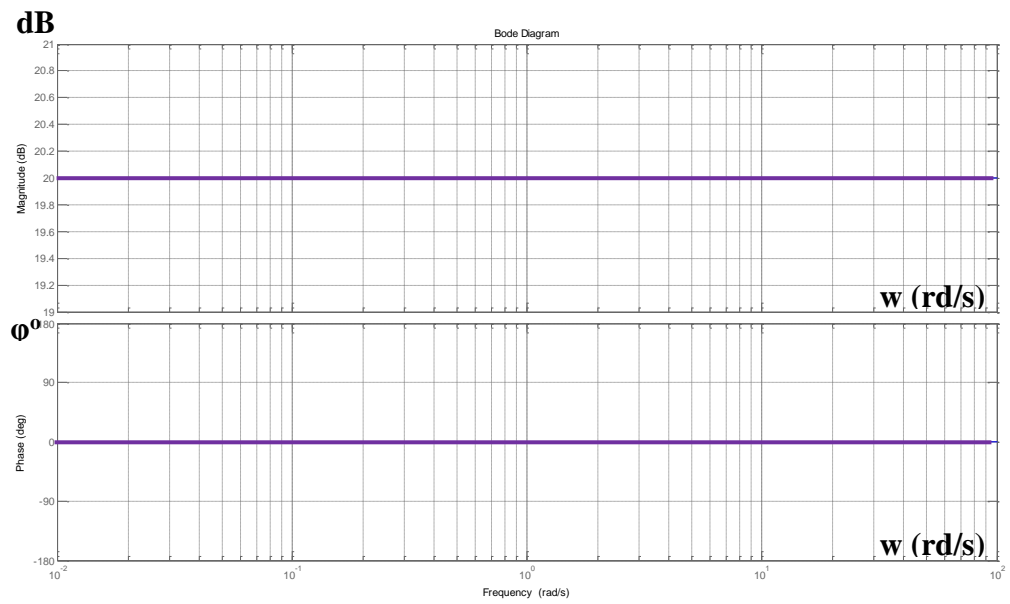
$$H(jw) = \frac{100.(jw + 10)}{(jw).(jw + 1).100.[(j\frac{w}{10})^2 + (j\frac{w}{100}) + 1]} = \frac{100.10.(1 + j\frac{w}{10})}{(jw).(1 + jw).100.[1 + (2\xi j\frac{w}{10}) + (j\frac{w}{10})^2]} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow H(jw) = \frac{10.(1 + j\frac{w}{10})}{(jw).(1 + jw).[1 + (2\xi j\frac{w}{10}) + (j\frac{w}{10})^2]} ; \text{ onde : } 2\xi j(\frac{w}{w_c}) = j(\frac{w}{100}); w_c = 10 \text{ rd/s} \Rightarrow \xi = \frac{1}{20}$$

Os **Fatores Básicos** serão:

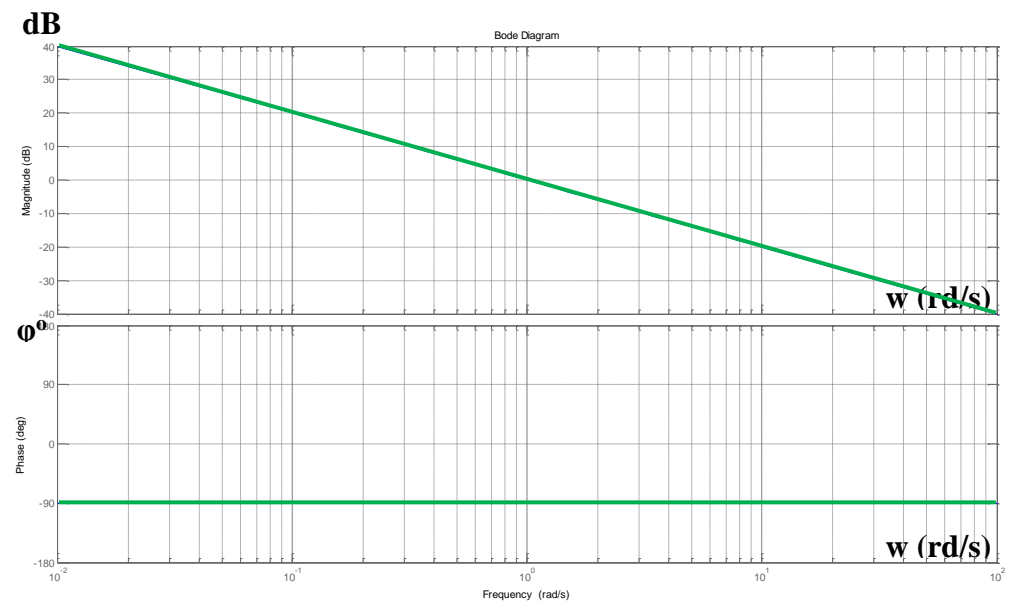
- 1 – Fator Ganho:  $K = 10$ .
- 2 – Fator Integral:  $(jw)^{-1}$  com  $w_n = 1 \text{ rd/s}$ .
- 3 – Fatores de Primeira Ordem:  $(1 + jw/10)$  com  $w_n = 10 \text{ rd/s}$  e  $(1 + jw)^{-1}$  com  $w_n = 1 \text{ rd/s}$ .
- 4 – Fator Quadrático:  $[1 + 2\xi(jw/w_n) + (jw/w_n)^2]^{-1}$  com  $w_n = 10 \text{ rad/s}$ .

**Deve-se esboçar os gráficos para cada Fator Básico e em seguida efetuar a soma destes gráficos originando o gráfico final de  $H(jw)$ .**

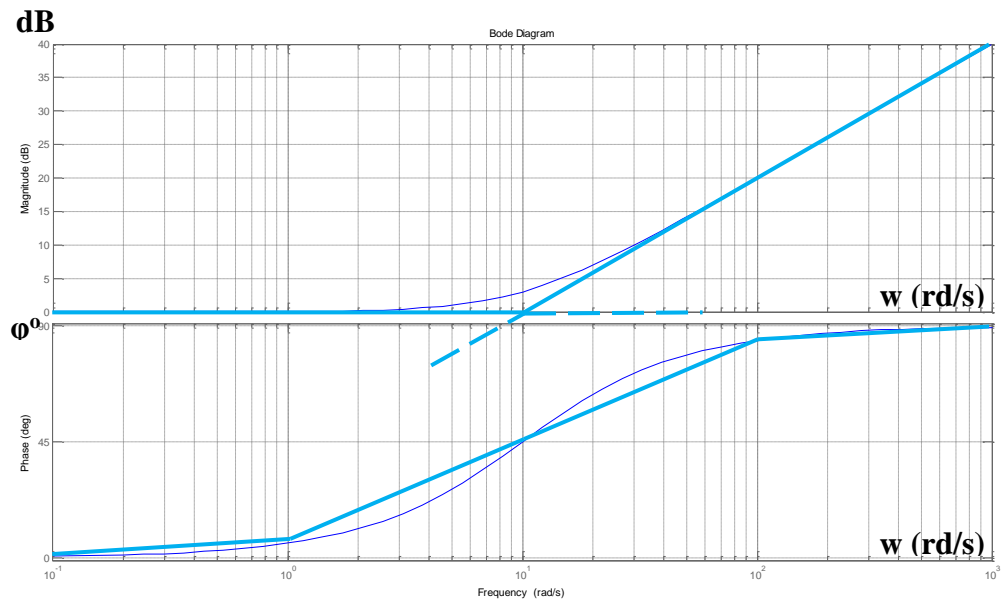
1 – Fator Ganho: **K = 10**.



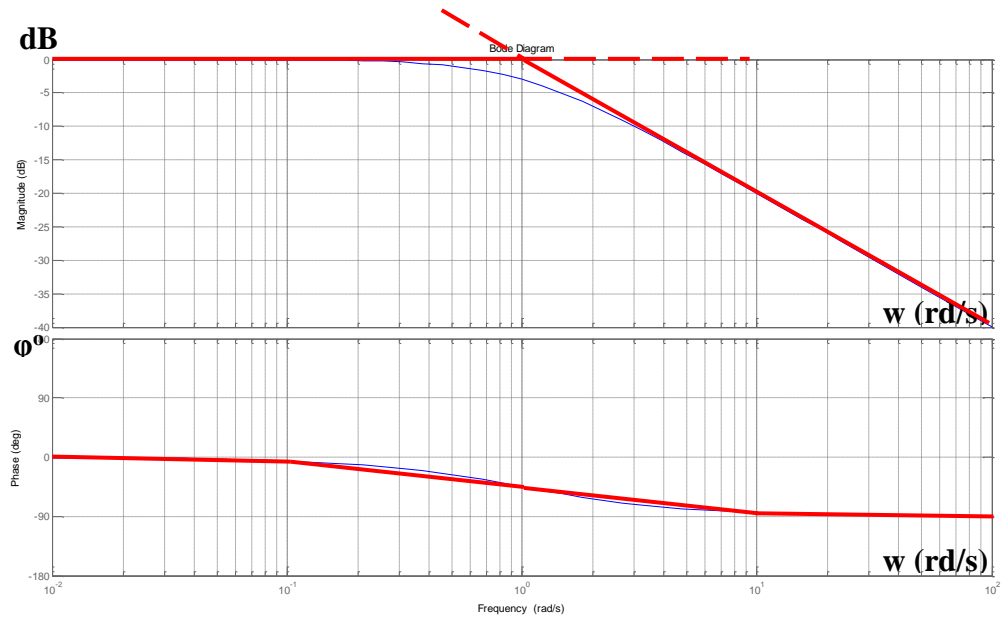
2 – Fator Integral:  $(j\omega)^{-1}$  com  $\omega_n = 1$  rd/s.



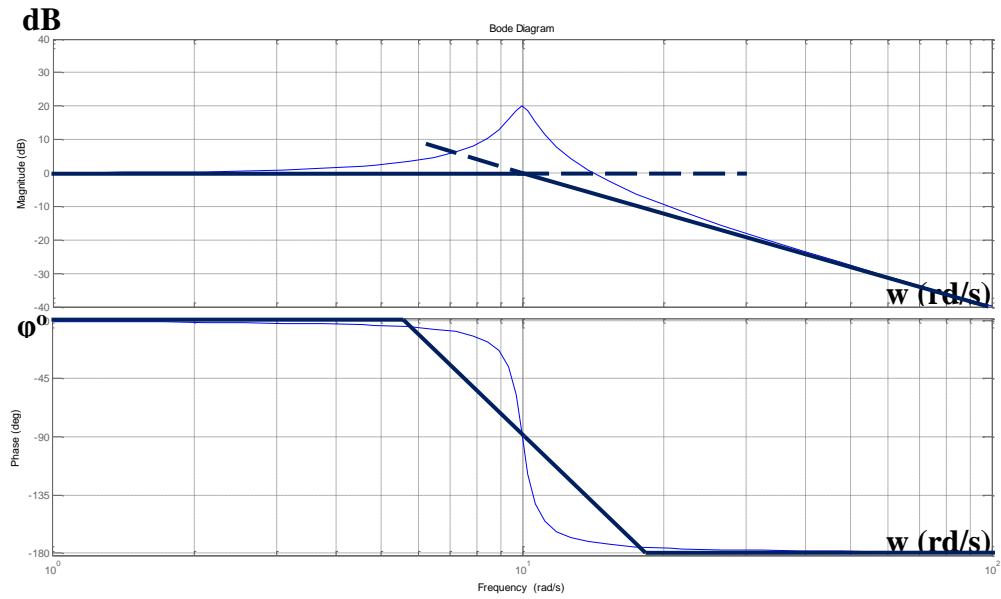
3 – Fatores de Primeira Ordem:  $(1 + j\omega/10)$  com  $\omega_n = 10 \text{ rd/s}$ .



4 – Fator de Primeira Ordem:  $(1 + j\omega)^{-1}$  com  $\omega_n = 1 \text{ rd/s}$ .



5 – Fator Quadrático:  $[1 + 2\xi(jw/10) + (jw/10)^2]^{-1}$  com  $w_n = 10 \text{ rad/s}$ .



$$H(s) = \frac{100.(s + 10)}{s.(s + 1).(s^2 + s + 100)}$$

O Diagrama de Bode para  $H(s)$  é construído somando-se as declinações de cada Fator Básico entre as Frequência de Canto. Assim:

