UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA – UFV
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – CCE
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA - DEL

Sistemas de Controle II

ELT331

AULA 22 – Análise de Estabilidade no Plano z

Prof. Tarcísio Pizziolo

22. Estabilidade no Plano-z

Um sistema de controle com retroação linear e contínuo no tempo é estável se todos os polos da função de transferência a malha fechada estiverem no semiplano esquerdo do plano-s.

O plano-z se relaciona com o plano-s através da transformação: $\mathbf{z = e^{sT}}$

Daí: $z = e^{sT} = e^{(\sigma+jw)T} = e^{\sigma T}.e^{jwT} = e^{\sigma T}.[\cos(wT) + j\mathrm{sen}(wT)]$

Assim: $\mathbf{|z| = e^{\sigma T}}$ e $\mathbf{\angle z = wT}$

No semiplano esquerdo do plano-s **σ < 0** e o **módulo de z** varia entre **0 e 1**.

Então, o eixo imaginário do plano-s corresponde à circunferência do círculo de raio unitário no plano-z, o interior deste círculo corresponde ao semiplano esquerdo do plano-s e o seu exterior corresponde ao semiplano direito do plano-s.

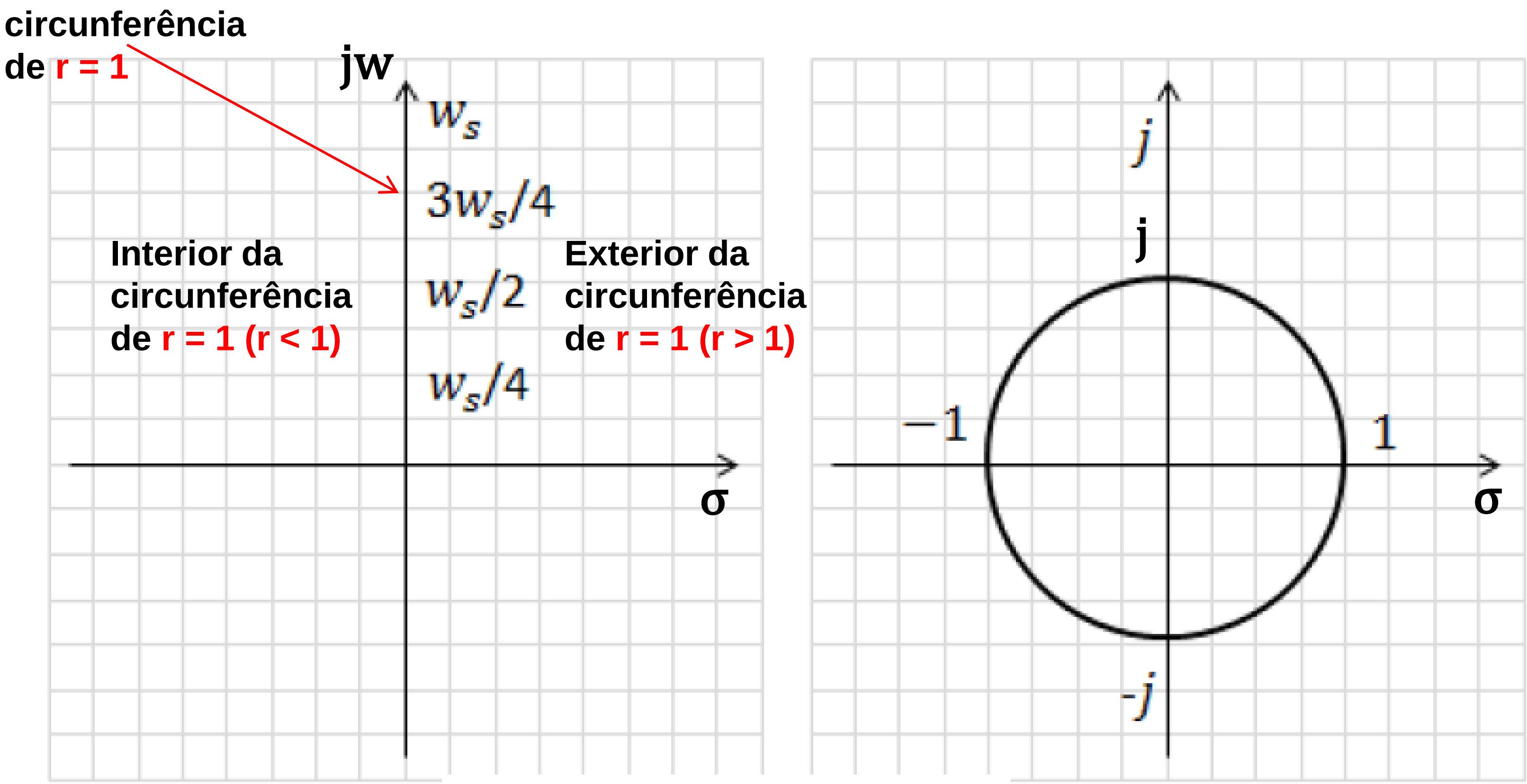
22.1. Plano s e Plano z

$$Semi\ plano\ esquerdo \rightarrow Interior\ do\ circulo\ unitário$$

$$Eixo\ imaginário \rightarrow Circuferência\ do\ circulo\ unitário$$

$$Semi\ plano\ direito \rightarrow Exterior\ do\ circulo\ unitário$$

Plano s Plano z

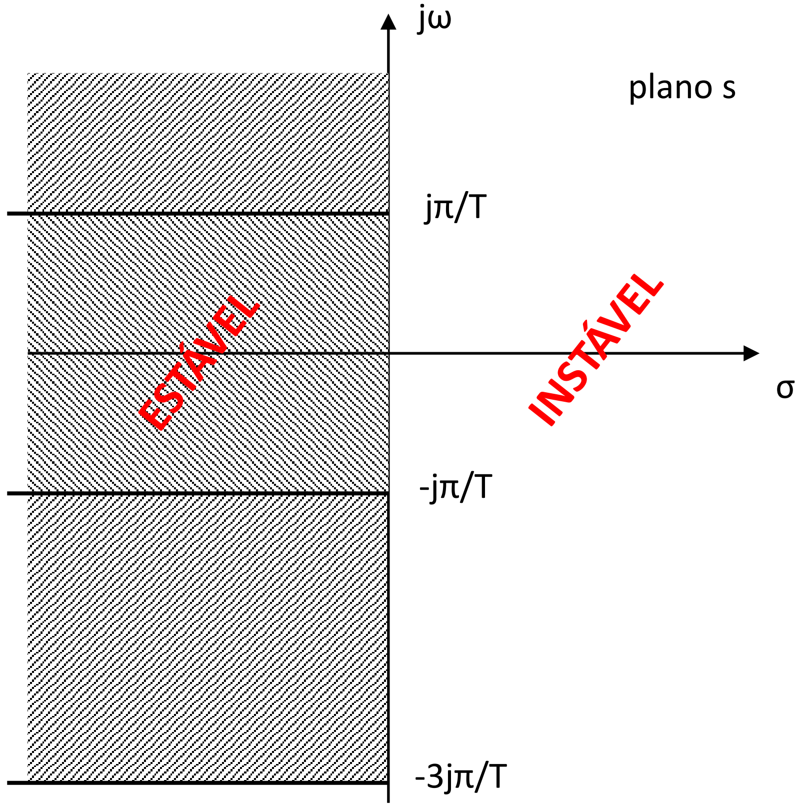


$$\sigma = 0 \rightarrow z = e^{jwT} = e^{jw\frac{2\pi}{w_s}}$$

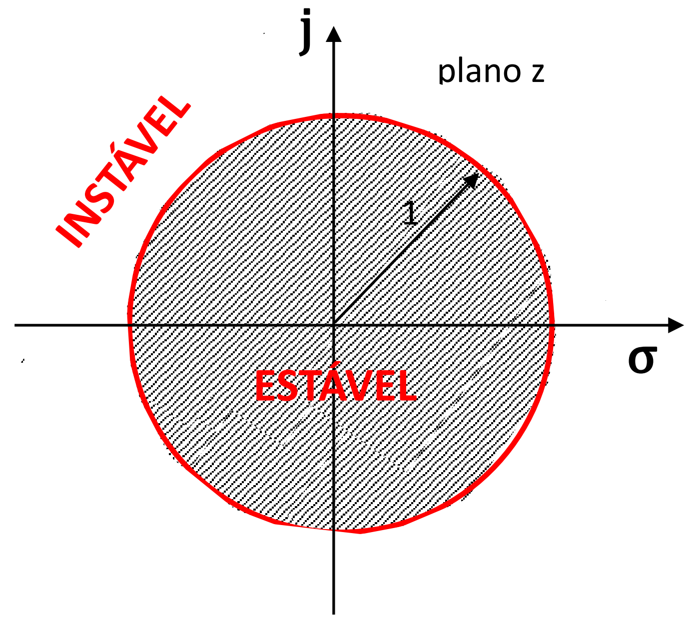
$$w = 0 \rightarrow z = 1$$

22.2. Plano s e Plano z

Comparação dos Planos **s** e **z** na localização dos polos (raízes da equação característica) da FTMF na análise da estabilidade em tempo contínuo e em tempo discreto.



Tempo contínuo

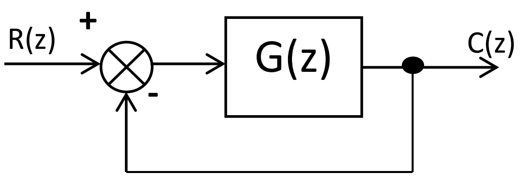


Tempo discreto

22.3. Estabilidade no Plano z

Conclusão: Um sistema amostrado é **Estável** se todos os polos da FTMF **T(z)** estiverem situados no **interior do círculo de raio unitário centrado na origem do plano-z**.

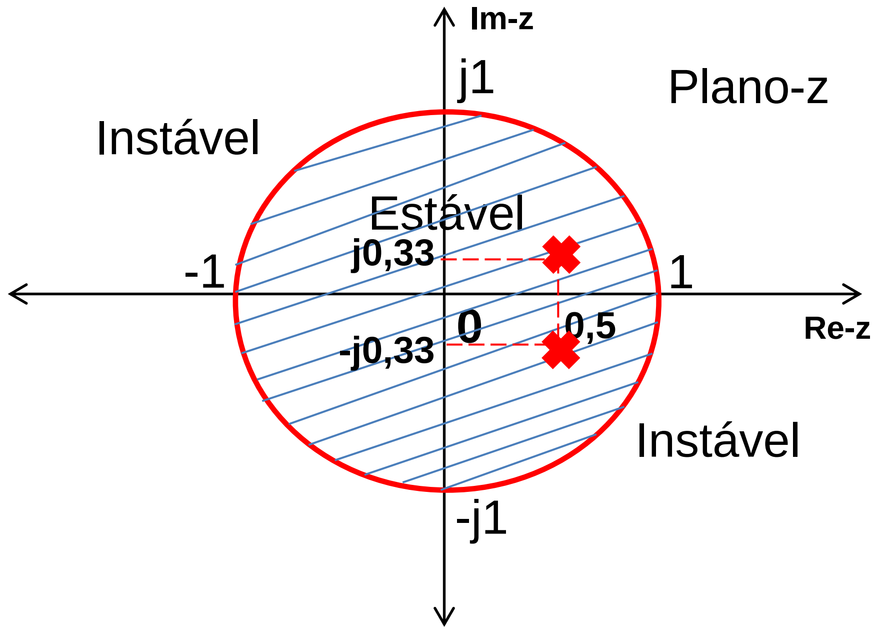
Exemplo 1: O sistema abaixo é estável?



$$\mathbf{G(z)} = \frac{(0{,}3678z + 0{,}2644)}{(z^2 - 1{,}3678z + 0{,}3678)}$$

$$\mathbf{T(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{\dfrac{(0{,}3678z + 0{,}2644)}{(z^2 - 1{,}3678z + 0{,}3678)}}{\left[1 + \dfrac{(0{,}3678z + 0{,}2644)}{(z^2 - 1{,}3678z + 0{,}3678)}\right]} = \frac{(0{,}3678z + 0{,}2644)}{(z^2 - z + 0{,}3622)}$$

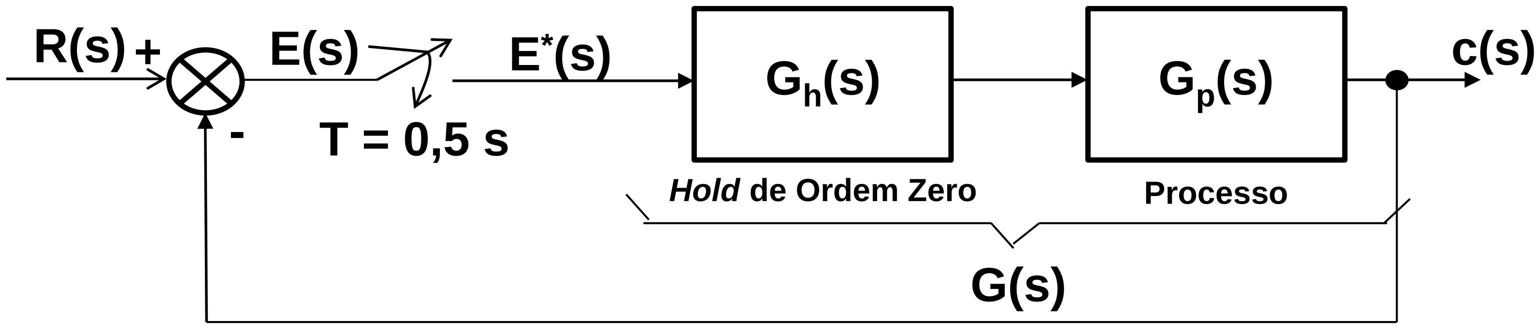
$$\mathbf{Eq.\ caract.}\ z^2 - z + 0{,}3622 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = 0{,}5 \pm j0{,}335 \Rightarrow \mathbf{ESTÁVEL\ !}$$



<u>Exemplo 2</u>: Dada a FTPMF **T(z)** abaixo, este sistema é estável?

$$\mathbf{T(z)} = \frac{(z^2 + z)}{(z^2 + 0{,}1z - 0{,}2)}$$

Exercício: O sistema de controle dado a seguir é estável?



Dados: $G_h(s) = \frac{(1 - e^{-sT})}{s}$ e $G_p(s) = \frac{5}{s(s+3)}$

$$G(s) = \frac{5(1 - e^{-sT})}{s^2(s+3)}; \quad G(z) = Z\{G(s)\}$$

$$\text{Então}: G(z) = Z\{\frac{5(1 - e^{-sT})}{s^2(s+3)}\} = Z\{(1 - e^{-sT})\left(\frac{5}{s^2(s+3)}\right)\}$$

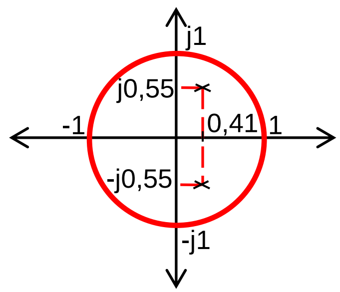
$$\text{Daí}: G(z) = (1 - z^{-1})Z\{\frac{5}{s^2(s+3)}\} = [\frac{(z-1)}{z}]Z\{\frac{5}{3s^2} - \frac{5}{9s} + \frac{5}{9(s+3)}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{5T}{3(z-1)} - \frac{5}{9} + \frac{5(z-1)}{9(z-e^{-3T})}\} = \frac{5}{6(z-1)} - \frac{5}{9} + \frac{5(z-1)}{9(z-0,22)}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{15(z-0,22) - 10(z-1)(z-0,22) + 10(z-1)^2}{18(z-1)(z-0,22)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{15z - 3,3 - 10(z^2 - 1,22z + 0,22) + 10(z^2 - 2z + 1)}{18(z^2 - 1,22z + 0,22)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(Z) = \frac{(0,4 + 0,25)}{(z^2 - 1,22z + 0,22)}$$



Para a FTMF tem-se que:

$$\Rightarrow T(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{\dfrac{(0,4z+0,25)}{(z^2-1,22z+0,22)}}{1+\dfrac{(0,4z+0,25)}{(z^2-1,22z+0,22)}} = \frac{\dfrac{(0,4z+0,25)}{(z^2-1,22z+0,22)}}{\dfrac{(z^2-1,22z+0,22)+(0,4z+0,25)}{(z^2-1,22z+0,22)}} \Rightarrow$$

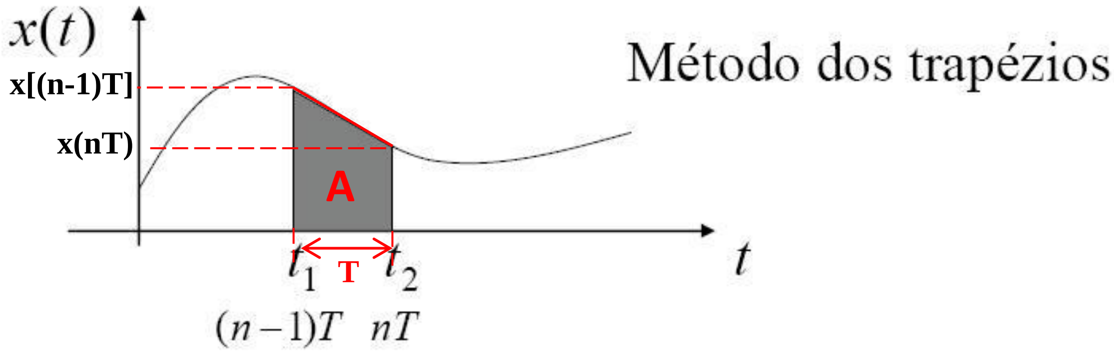
$$\Rightarrow T(z) = \frac{(0,4z+0,25)}{(z^2-1,22z+0,22)+(0,4z+0,25)} \Rightarrow \boxed{T(z) = \frac{(0,4z+0,25)}{(z^2-0,82z+0,47))}}$$

Equação característica: $z^2-0,82z+0,47=0 \rightarrow$ **$z_{1,2}=0,41 \pm j0,55$**

Da equação característica conclui-se que o sistema é **ESTÁVEL**!

22.4. Transformação Bilinear (Método de Tustin)

Seja o gráfico ao lado:



$$A_{\text{sob a curva}} = \int_{[(n-1)T]}^{nT} x(t)dt = y(nT) - y[(n-1)T]; \quad (\int x(t)dt = y(t) + c)$$

$$A_{\text{Trapézio}} = \frac{T}{2}\{x(nT) + x[(n-1)T]\}; \quad (\text{aproximação da } A_{\text{sob a curva}})$$

Para um valor muito pequeno de **T** pode-se igualar as áreas. Assim:

$$A_{\text{sob a curva}} = A_{\text{Trapézio}} \Rightarrow y(n) - y(n-1) = \frac{T}{2}\left[x(n) + x(n-1)\right]$$

Aplicando a Z{.} em ambos os lados da equação obtemos:

$$Z\{y(n) - y(n-1)\} = Z\{\frac{T}{2}\left[x(n) + x(n-1)\right]\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(z) - z^{-1}Y(z) = \frac{T}{2}[X(z) + z^{-1}X(z)] \Rightarrow \boxed{Y(z) = \frac{T}{2}[\frac{(z+1)}{(z-1)}]X(z)} \Rightarrow \text{Área no Plano} - z!$$

Considerando as duas expressões de cálculo de **Área** sob a curva:

$$\underbrace{Y(z) = \frac{T}{2}\frac{(z+1)}{(z-1)}X(z)}_{\text{Área no domínio discreto}} \quad e \quad y(t) = \int_0^{KT} f(t)dt \Rightarrow \underbrace{Y(s) = \frac{1}{s}F(s)}_{\text{Área no domínio contínuo}}$$

Por comparação, obtém-se uma aproximação pelo **Método Trapezoidal** da variável **s** como:

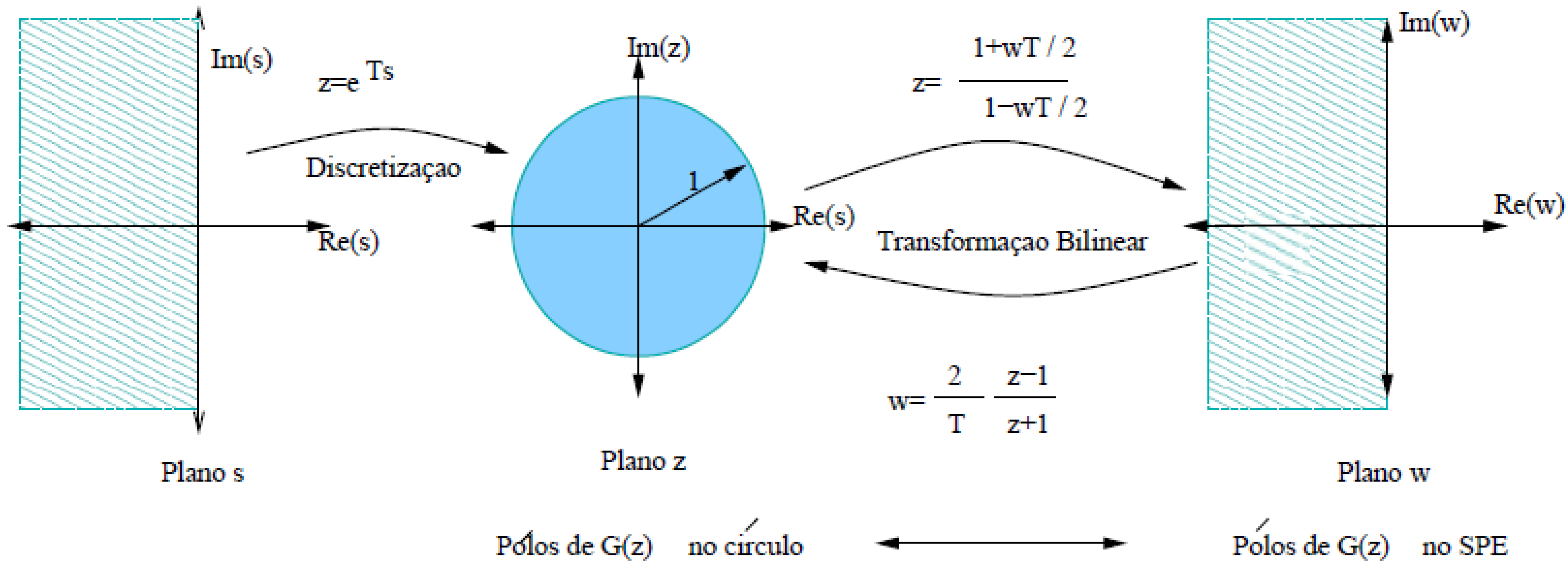
$$\frac{T}{2}\frac{(z+1)}{(z-1)} \cong \frac{1}{s} \Rightarrow \boxed{s \cong \frac{2}{T}\frac{(z-1)}{(z+1)}}$$

Pode-se então obter a transformação do **plano s** em **plano z** pela relação:

$$z \cong \frac{(1+\frac{Ts}{2})}{(1-\frac{Ts}{2})}$$

Assumindo que **s = jw => |s| = w**, podemos então obter a transformação do **plano z** em **plano w** pela relação:

$$\boxed{z = \frac{(1+\frac{Tw}{2})}{(1-\frac{Tw}{2})}}$$


Im(s)
$z = e^{Ts}$
Discretizaçao
Re(s)
Plano s
Im(z)
1
Re(s)
Plano z
$z = \frac{1 + wT/2}{1 - wT/2}$
Transformaçao Bilinear
$w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$
Im(w)
Re(w)
Plano w
Pólos de G(z) no círculo
Pólos de G(z) no SPE

22.5. Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz no plano z

Para a análise de estabilidade de sistemas em tempo discreto aplica-se a **Transformação Bilinear** onde:

$$\boxed{z = \frac{\left(1 + \frac{T}{2}w\right)}{\left(1 - \frac{T}{2}w\right)}}$$

Procedimentos para aplicação do Critério de Routh-Hurwitz

1 - Determinar **G(w)** a partir de **G(z)**.

2 - Determinar a equação característica:

1 + KG(w) = 0 (realimentação unitária negativa!).

$$F(w) = b_n w^n + b_{n-1} w^{n-1} + \cdots + b_1 w + b_0 = 0$$

3 – Montar a **Matriz de Routh** com segue:

$$\begin{array}{c} w^n \\ w^{n-1} \\ w^{n-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w^1 \\ w^0 \end{array} \begin{bmatrix} b_n & b_{n-2} & b_{n-4} & \cdots \\ b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots \\ & & & \\ & & & \\ j_1 & & & \\ k_1 & & & \end{bmatrix}$$

Onde:

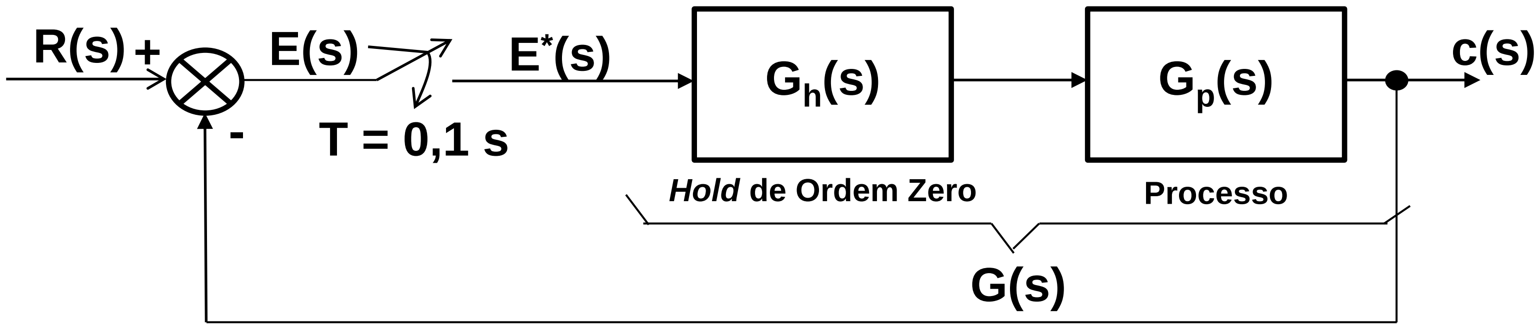
$$c_1 = \frac{b_{n-1} b_{n-2} - b_n b_{n-3}}{b_{n-1}} \qquad d_1 = \frac{c_1 b_{n-3} - b_{n-1} c_2}{c_1}$$

$$c_2 = \frac{b_{n-1} b_{n-4} - b_n b_{n-5}}{b_{n-1}} \qquad d_2 = \frac{c_1 b_{n-5} - b_{n-1} c_3}{c_1}$$

$$c_3 = \frac{b_{n-1} b_{n-6} - b_n b_{n-7}}{b_{n-1}} \qquad \vdots$$

4 – Aplica-se o **Critério de Routh-Hurwitz** semelhantemente aos sistemas contínuos, ou seja, o número de troca de sinal na primeira coluna da Matriz de Routh determina a quantidade de polos da FTMF fora do círculo unitário centrado na origem do plano z.

Exemplo 3: Para quais valores do ganho **K** o sistema abaixo é estável?



Dados: $G_h(s) = \dfrac{(1-e^{-s})}{s}$ e $G_p(s) = \dfrac{K}{s(s+1)}$

$$G(z) = K.Z\{\frac{(1-e^{-s})}{s^2(s+1)}\} = K.(1-z^{-1}).Z\{\frac{1}{s^2(s+1)}\} \Rightarrow G(z) = K.[\frac{(z-1)}{z}].[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(z) = K.[\frac{T(z-e^{-T}) - (z-1)(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}] \Rightarrow G(z) = K.[\frac{0{,}1(z-e^{-0{,}1}) - (z-1)(1-e^{-0{,}1})}{(z-1)(z-e^{-0{,}1})}]$$

$$\Rightarrow G(z) = K.\frac{(0{,}1z - 0{,}1e^{-0{,}1} - z + e^{-0{,}1}z + 1 - e^{-0{,}1})}{(z-1)(z-0{,}905)} \Rightarrow G(z) = K.\frac{(0{,}00484z + 0{,}00468)}{(z-1)(z-0{,}905)}$$

$$\text{Então}: K.G(w) = K.G(z)\Big|_{z=\{[1+(T/2)w]/[1-(T/2)w]\}} = K.G(z)\Big|_{z=[(1+0{,}05w)/(1-0{,}05w)]}$$

$$\text{Daí}: \boxed{K.G(w) = K.\frac{(-0{,}00016w^2 - 0{,}1872w + 3{,}81)}{(3{,}81w^2 + 3{,}80w)}}$$

A equação característica é dada por:

$$1 + K.G(w) = 0$$

Portanto:

$$(3{,}81 - 0{,}00016K)w^2 + (3{,}80 - 0{,}1872K)w + 3{,}81K = 0$$

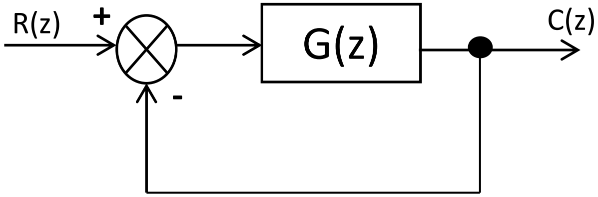
A **Matriz de Routh** será dada por:

$$\begin{array}{c|l} w^2 & \\ w^1 & \\ w^0 & \end{array}\begin{bmatrix} (3{,}81 - 0{,}00016K) & 3{,}81K \\ (3{,}80 - 0{,}1872K) & 0 \\ 3{,}81K & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow K < 23.812{,}5 \\ \Rightarrow K < 20{,}3 \\ \Rightarrow K > 0 \end{array}$$

Desta forma, a estabilidade do sistema será para os valores de:

$$0 < K < 20{,}3$$

<u>Exercício:</u> Seja o sistema de controle dado a seguir.



$$G(z) = \frac{K(z+0{,}9)}{(z-1)(z-0{,}7)}$$

Determine os valores de **K** para que o sistema seja estável pelo Critério de Routh-Hurwitz.

Equação característica no **plano w**:

$$(0{,}0085 - 0{,}00025K)w^2 + (0{,}03 - 0{,}1K)w + 1{,}9K = 0$$

Matriz de Routh-Hurwitz:

$$\begin{array}{c|c} w^2 & \\ w^1 & \\ w^0 & \end{array} \begin{bmatrix} (0{,}085 - 0{,}00025K) & 1{,}9K & 0 \\ (0{,}03 - 0{,}1K) & 0 & 0 \\ 1{,}9K & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para o sistema ser Estável: **0 < K < 3**