ELT330 – Sistemas de Controle I

Prof. Tarcísio Pizziolo

Aula 10 – Correlação entre Eq. de Esp. de Estados e FT

Sejam as Equações de Espaço de Estados a seguir:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Aplicando a Transformada de Laplace nas equações (1) e (2) tem-se:

$$s\mathbf{X}(\mathbf{s}) - \mathbf{x}(0) = A\mathbf{X}(\mathbf{s}) + B\mathbf{U}(\mathbf{s}) \Rightarrow [sI - A]\mathbf{X}(\mathbf{s}) = \mathbf{x}(0) + B\mathbf{U}(\mathbf{s}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{s}) = [sI - A]^{-1} \underbrace{\mathbf{x}(0)}_{\substack{\textit{Condições} \\ \textit{iniciais}}} + [sI - A]^{-1}B\mathbf{U}(\mathbf{s}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = C\mathbf{X}(\mathbf{s}) + D\mathbf{U}(\mathbf{s}) \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Substituindo a equação (3) na equação (4) tem-se:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = C\mathbf{X}(\mathbf{s}) + D\mathbf{U}(\mathbf{s}) \Rightarrow \mathbf{Y}(\mathbf{s}) = C\{[sI - A]^{-1} \underbrace{\mathbf{x}(0)}_{\substack{\textit{Condições} \\ \textit{iniciais}}} + [sI - A]^{-1}B\mathbf{U}(\mathbf{s})\} + D\mathbf{U}(\mathbf{s}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = C\{[sI - A]^{-1} \underbrace{\mathbf{x}(0)}_{\substack{\textit{Condições} \\ \textit{iniciais}}}\} + \{C[sI - A]^{-1}B + D\}\mathbf{U}(\mathbf{s})}$$

CONDIÇÕES INICIAIS NULAS

Para as condições iniciais nulas temse que,

$$\mathbf{x}(0) = 0 \Rightarrow C\{[sI - A]^{-1}\mathbf{x}(0) = 0,$$

e as Equações de Espaço de Estados transformam-se em uma Função ou Matriz de Transferência **G(s)** = **Y(s)**/**U(s)**.

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \left\{C[sI - A]^{-1}B + D\right\}\mathbf{U}(\mathbf{s}) \Rightarrow \boxed{\mathbf{G}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{Y}(\mathbf{s})}{\mathbf{U}(\mathbf{s})} = C[sI - A]^{-1}B + D}$$

Daí existe uma correlação utilizando as equações (1) e (2) com uma Função ou Matriz de Transferência **G(s)** que descreve a relação entre a saída **Y(s)** e a entrada **U(s)** quando as condições iniciais forem nulas.

Esta relação torna possível a determinação da saída **Y(s)** dada uma entrada **U(s)**.

$$\mathbf{G}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{Y}(\mathbf{s})}{\mathbf{U}(\mathbf{s})} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \cdots & G_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m1}(s) & \cdots & G_{mn}(s) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \cdots & G_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m1}(s) & \cdots & G_{mn}(s) \end{bmatrix} \mathbf{U}(\mathbf{s}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \cdots & G_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m1}(s) & \cdots & G_{mn}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11}(s) \\ \vdots \\ U_{nr}(s) \end{bmatrix}}$$

De posse de **Y(s)** pode-se então determinar a saída y(t) no tempo contínuo pela Transformada Inversa de Laplace onde $y(t) = L^{-1}\{\mathbf{Y(s)}\}$.

<u>CONDIÇÕES INICIAIS NÃO NULAS</u>

Para as condições iniciais não nulas tem-se que,

$$\mathbf{x}(0) \neq 0,\ C\{[sI - A]^{-1}\mathbf{x}(0) \neq 0,$$

não obtendo-se uma Função ou Matriz de Transferência **G(s)** = **Y(s)/U(s)**.

Desta forma, deve-se determinar **X(s)** pela equação (3). Assim;

$$\mathbf{X}(\mathbf{s}) = [sI - A]^{-1} \underbrace{\mathbf{x}(0)}_{\substack{\textit{Condições}\\ \textit{iniciais}}} + [sI - A]^{-1}B\mathbf{U}(\mathbf{s}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Em seguida deve-se substituir **X(s)** na equação (4) e determinar **Y(s).**

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = C\mathbf{X}(\mathbf{s}) + D\mathbf{U}(\mathbf{s}) \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

De posse de **Y(s)** pode-se então determinar a saída y(t) no tempo contínuo pela Transformada Inversa de Laplace onde $y(t) = L^{-1}\{\mathbf{Y(s)}\}$.

Exemplo: Um sistema dinâmico linear é descrito pelas seguintes equações de espaço de estados com condições iniciais nulas.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

$$[y] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Determinar a saída y(t) quando este sistema for submetido a uma entrada u(t) = degrau unitário.

Como temos um sistema SISO e as condições iniciais são nulas obtemos uma Função de Transferência que será:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ -\frac{2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1-s}{(s+1)(s+2)}$$

Aplicando um degrau unitário na entrada tem-se:

$$Y(s) = \frac{1-s}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+2)}$$

$$A = \frac{1-s}{s(s+1)(s+2)} s \bigg|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$B = \frac{1-s}{s(s+1)(s+2)} (s+1) \bigg|_{s=-1} = -2$$

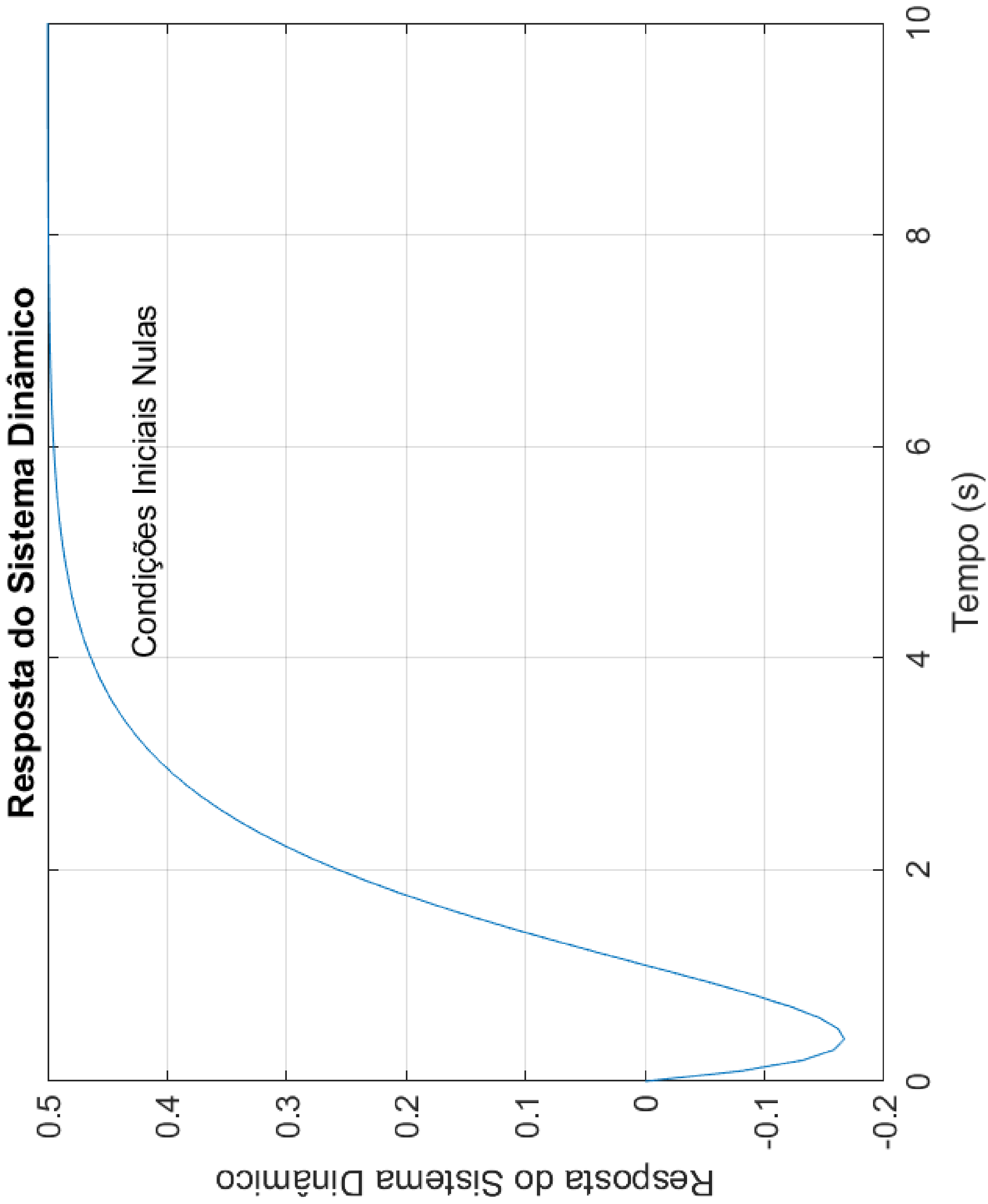
$$C = \frac{1-s}{s(s+1)(s+2)} (s+2) \bigg|_{s=-2} = \frac{3}{2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{2s} - \frac{2}{(s+1)} + \frac{3}{2(s+2)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} \Longrightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s} - \frac{2}{(s+1)} + \frac{3}{2(s+2)}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{2} - 2e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}}$$

Gráfico:


Resposta do Sistema Dinâmico
Condições Iniciais Nulas
Resposta do Sistema Dinâmico
Tempo (s)
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
0
2
4
6
8
10

Exemplo: Idem ao exemplo anterior, mas com as condições não nulas.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}[u]$$

$$[y] = [1 \quad -1] \times \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

As condições iniciais são:

$$\left.\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\right|_{\substack{x_1=x_{10}\\ x_2=x_{20}}} = \begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$$

$$X(s) = [sI - A]^{-1}x(0) + [sI - A]^{-1}BU(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(s) = \left[s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\right]^{-1}\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix} + \left[s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\right]^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}[s^{-1}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(s) = \begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & (s+3)\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & (s+3)\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ s^{-1}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{s(s+3)+2}\begin{bmatrix}(s+3) & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix} + \frac{1}{s(s+3)+2}\begin{bmatrix}(s+3) & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ s^{-1}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(s) = \begin{bmatrix}\dfrac{2s^2+5s+1}{s(s+1)(s+2)}\\ -\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

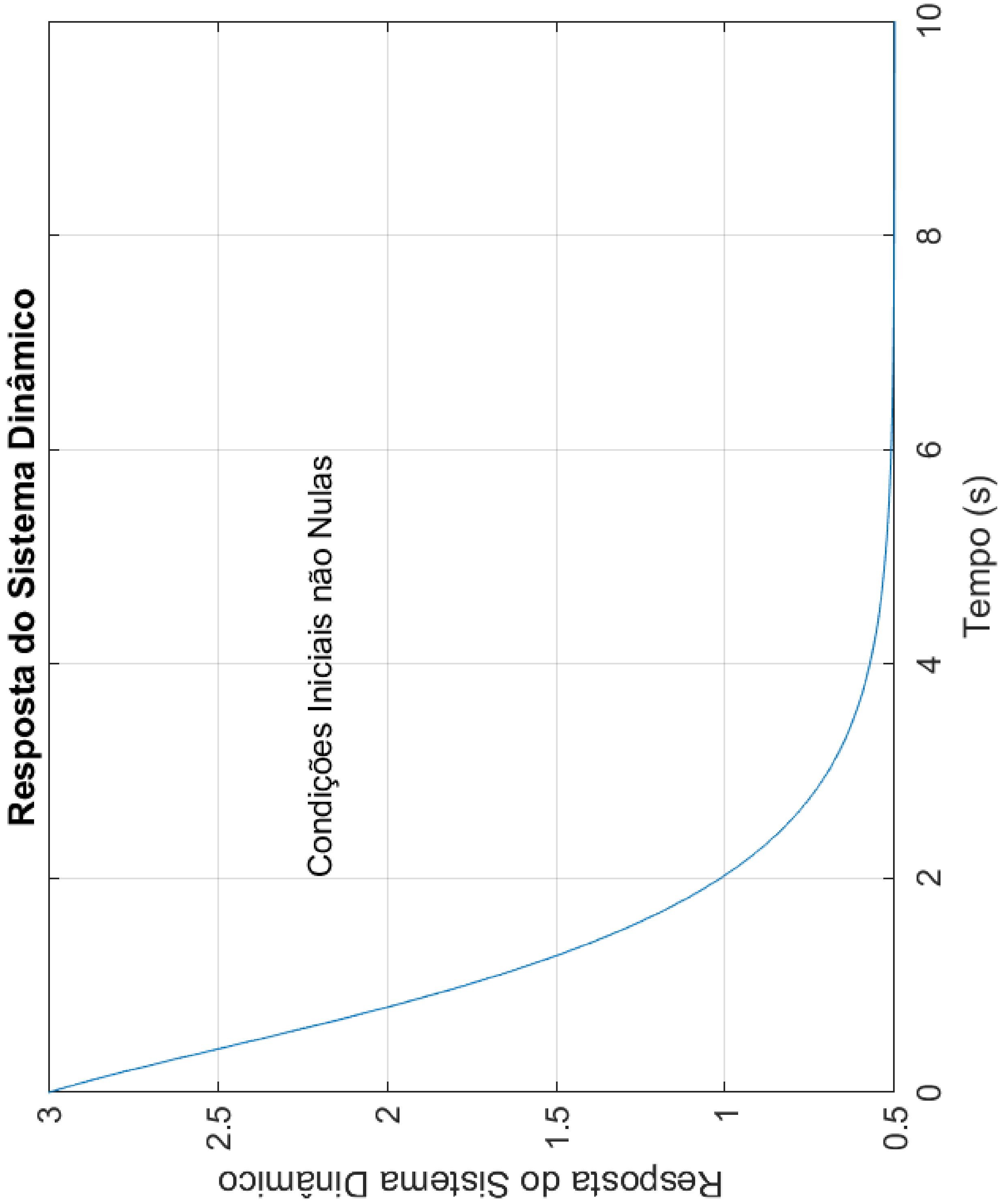
Determinando a saída Y(s);

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \Rightarrow Y(s) = [1 \quad -1]\begin{bmatrix}\dfrac{2s^2+5s+1}{s(s+1)(s+2)}\\ -\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix} \Rightarrow Y(s) = \frac{3s^2+8s+1}{s(s+1)(s+2)}$$

A saída y(t) será dada pela Transformada Inversa de Laplace de Y(s).
Assim;

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s^2+8s+1}{s(s+1)(s+2)}\right\} \Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{2} + 4e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}; \quad \text{para } t \geq 0}$$

Gráfico:



Resposta do Sistema Dinâmico
Condições Iniciais não Nulas
Resposta do Sistema Dinâmico
Tempo (s)
0
2
4
6
8
10
0.5
1
1.5
2
2.5
3