

MÉTODO DA BISSEÇÃO

MAT 271 – CÁLCULO NUMÉRICO –PER3/2021
Professor Amarísio Araújo – DMA/UFV

MÉTODO DA BISSEÇÃO

Solução aproximada da equação:

$$f(x) = 0.$$

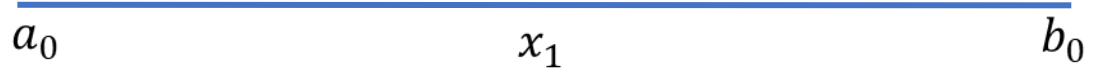
MÉTODO DA BISSEÇÃO

- ❑ Consideremos que a equação $f(x) = 0$ tem uma solução única \bar{x} em um intervalo $[a, b]$, com a função f satisfazendo as condições do TVI em $[a, b]$.
- ❑ f é contínua em $[a, b]$, com $f(a) \cdot f(b) < 0$ ($f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários).
- ❑ O Método da Bisseção é um método iterativo que consiste na construção de uma sequência de aproximações $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$, para a solução \bar{x} do seguinte modo:

MÉTODO DA BISSEÇÃO

➤ Inicialmente, renomeamos o intervalo $[a, b]$, fazendo $a = a_0$ e $b = b_0$, ou seja, o intervalo inicial de busca passa a ser denotado por $[a_0, b_0]$.

➤ O primeiro termo da sequência de aproximações, x_1 , é tomado como sendo o ponto médio do intervalo $[a_0, b_0]$, isto é: $x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$.



➤ Se $f(x_1) = 0$, então x_1 já seria a solução da equação (uma solução exata), e não teríamos mais o que fazer. Caso contrário:

i) Se $f(x_1) \cdot f(a_0) < 0$, significa que a solução \bar{x} deve estar entre a_0 e x_1 . Neste caso, consideramos um novo intervalo de busca $[a_1, b_1]$ tomando: $a_1 = a_0$ e $b_1 = x_1$.

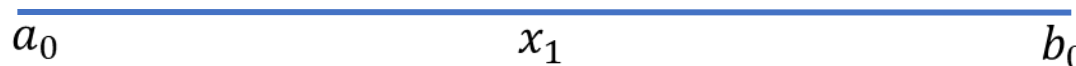


ii) Se $f(x_1) \cdot f(a_0) > 0$, significa que a solução \bar{x} deve estar entre x_1 e b_0 . Neste caso, consideramos um novo intervalo de busca $[a_1, b_1]$ tomando: $a_1 = x_1$ e $b_1 = b_0$.



MÉTODO DA BISSEÇÃO

➤ O primeiro termo da sequência de aproximações, x_1 , é tomado como sendo o ponto médio do intervalo $[a_0, b_0]$, isto é: $x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$.



➤ Se $f(x_1) = 0$, então x_1 já seria a solução da equação (uma solução exata), e não teríamos mais o que fazer. Caso contrário:

i) Se $f(x_1) \cdot f(a_0) < 0$, significa que a solução \bar{x} deve estar entre a_0 e x_1 . Neste caso, consideramos um novo intervalo de busca $[a_1, b_1]$ tomando: $a_1 = a_0$ e $b_1 = x_1$.



ii) Se $f(x_1) \cdot f(a_0) > 0$, significa que a solução \bar{x} deve estar entre x_1 e b_0 . Neste caso, consideramos um novo intervalo de busca $[a_1, b_1]$ tomando: $a_1 = x_1$ e $b_1 = b_0$.

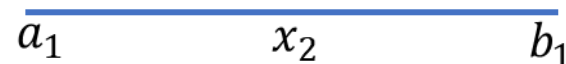


□ Seja qual for o caso (i ou ii), teremos um novo intervalo de busca $[a_1, b_1]$, contendo a solução \bar{x} e tal que $[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$ e $b_1 - a_1 = (b_0 - a_0)/2$, isto é, o novo intervalo de busca tem como comprimento a metade do comprimento do intervalo de busca anterior.

MÉTODO DA BISSEÇÃO

- O segundo termo da sequência de aproximações, x_2 , é tomado, então, no novo intervalo $[a_1, b_1]$, de modo análogo ao primeiro termo, como ponto médio deste intervalo, isto é:

$$x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$



A horizontal line segment representing the interval $[a_1, b_1]$. The left endpoint is labeled a_1 , the right endpoint is labeled b_1 , and the midpoint is labeled x_2 .

- Se $f(x_2) = 0$, então x_2 já seria a solução da equação (uma solução exata), e não teríamos mais o que fazer. Caso contrário:

i) Se $f(x_2) \cdot f(a_1) < 0$, significa que a solução \bar{x} deve estar entre a_1 e x_2 . Neste caso, consideramos um novo intervalo de busca $[a_2, b_2]$ tomando: $a_2 = a_1$ e $b_2 = x_2$.



A horizontal line segment representing the new interval $[a_2, b_2]$. The left endpoint is labeled a_2 and the right endpoint is labeled b_2 .

ii) Se $f(x_2) \cdot f(a_1) > 0$, significa que a solução \bar{x} deve estar entre x_2 e b_1 . Neste caso, consideramos um novo intervalo de busca $[a_2, b_2]$ tomando: $a_2 = x_2$ e $b_2 = b_1$.



A horizontal line segment representing the new interval $[a_2, b_2]$. The left endpoint is labeled a_2 and the right endpoint is labeled b_2 .

- Seja qual for o caso (i ou ii), teremos um novo intervalo de busca $[a_2, b_2]$, contendo a solução \bar{x} e tal que $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$ e $b_2 - a_2 = (b_1 - a_1)/2$, isto é, o novo intervalo de busca tem como comprimento a metade do comprimento do intervalo de busca anterior.

MÉTODO DA BISSEÇÃO

- De modo análogo, é definido o terceiro termo da sequência de aproximações, x_3 , como ponto médio do intervalo $[a_2, b_2]$, seguindo o mesmo critério dos casos anteriores para se obter o próximo intervalo de busca $[a_3, b_3]$. E, assim, o processo se repete sucessivamente, gerando uma sequência de intervalos $[a_n, b_n]$ e uma sequência de aproximações para a solução \bar{x} , dada por:

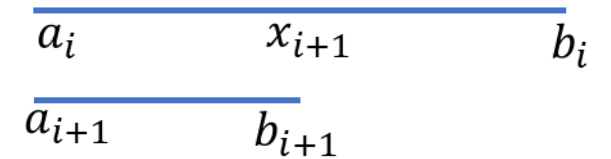
$$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$$

- Cada intervalo $[a_i, b_i]$ da sequência contém uma aproximação x_{i+1} , e o intervalo seguinte $[a_{i+1}, b_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots$, é obtido seguindo o critério (teste):

i) Se $f(x_{i+1}) \cdot f(a_i) < 0$, então: $a_{i+1} = a_i$ e $b_{i+1} = x_{i+1}$.

ii) Se $f(x_{i+1}) \cdot f(a_i) > 0$, então: $a_{i+1} = x_{i+1}$ e $b_{i+1} = b_i$.



$$\square [a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \dots \supset [a_n, b_n] \dots$$

$$\square b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}$$



$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DA BISSEÇÃO

- A sequência (x_n) de aproximações criada pelo **Método da Bisseção** converge para a solução \bar{x} da equação $f(x) = 0$. Por isso, dizemos que ele é um **método convergente**. Vejamos porque isso ocorre:

Mostremos que a sequência (x_n) converge

- (i) Da sequência de intervalos $[a_n, b_n]$ criada pelo método, temos duas sequências (a_n) , (b_n) .
- (ii) Como $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \dots \supset [a_n, b_n] \dots$, tem-se que $a_n \leq a_{n+1}$ e $b_n \geq b_{n+1}$, para todo $n = 0, 1, 2, \dots$, ou seja, (a_n) é monótona não-decrescente, e (b_n) é monótona não-crescente.
- (iii) Além disso: $a_0 \leq a_n \leq b_0$ e $a_0 \leq b_n \leq b_0$, ou seja, (a_n) e (b_n) são sequências limitadas
- (iv) De (ii) e (iii), concluímos que (a_n) e (b_n) convergem.

CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DA BISSEÇÃO

(v) De $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$, tem-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. E, como (a_n) e (b_n) convergem, segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = r, r \in \mathbb{R}$.

(vi) De $x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, segue, então que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{r+r}{2} = r$, ou seja: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r$.

(vii) Portanto, acabamos de mostrar que a sequência (x_n) converge para r . Só falta mostrar que $r = \bar{x}$.

Mostremos, agora, que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$:

(i) Lembremos, inicialmente, que a_n e b_n são tais que $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$.

(ii) Como f é contínua e a_n e b_n são convergentes, tem-se que $f(a_n)$ e $f(b_n)$ também são sequências convergentes e $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0$.

CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DA BISSEÇÃO

(iii) O fato de f ser contínua também garante que $f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) \cdot f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n\right) \leq 0$.

(iv) Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = r$, tem-se que $f(r) \cdot f(r) \leq 0$, ou seja: $[f(r)]^2 \leq 0$.

(v) Como $f(r) \in \mathbb{R}$, podemos garantir que $f(r) = 0$, ou seja: r é solução da equação $f(x) = 0$.

(vi) Mas \bar{x} é a solução única da equação $f(x) = 0$. Logo $r = \bar{x}$.

A sequência de aproximações de \bar{x} construída pelo Método da Bissecção converge para \bar{x} .

CRITÉRIO DE PARADA DO MÉTODO DA BISSEÇÃO

Como o método da bisseção estabelece uma sequência de aproximações para a solução \bar{x} da equação $f(x) = 0$, é preciso estabelecer um critério de parada do método, isto é, em qual termo da sequência podemos parar e considerá-lo como uma boa aproximação de \bar{x} . Na verdade, isso será feito em todos os métodos iterativos que veremos no curso.

Lembremos que a cada intervalo $[a_n, b_n]$ temos uma aproximação x_{n+1} , $n = 0, 1, 2, \dots$. Portanto, o que queremos saber é: para qual valor de n , o termo x_{n+1} é uma boa aproximação da solução \bar{x} .

Como “boa aproximação”, o que se quer dizer é uma aproximação que, comparada ao valor exato \bar{x} , corresponda a um erro suficientemente pequeno (que atenda a uma dada precisão).

Consideraremos dois tipos de erros entre a solução exata \bar{x} e uma aproximação x_{n+1} :

Erro absoluto: $E_{abs} = |\bar{x} - x_{n+1}|$

Erro relativo: $E_{rel} = \frac{|\bar{x} - x_{n+1}|}{|\bar{x}|}$

CRITÉRIO DE PARADA DO MÉTODO DA BISSEÇÃO

Erro absoluto: $E_{abs} = |\bar{x} - x_{n+1}|$

Erro relativo: $E_{rel} = \frac{|\bar{x} - x_{n+1}|}{|\bar{x}|}$

Como a solução \bar{x} , presume-se, é desconhecida (por isso, um método numérico para obtê-la de forma aproximada), é necessário ter uma ideia do erro (absoluto ou relativo) sem usar \bar{x} .

Observe que $a_n \leq \bar{x} \leq b_n$. Logo $|\bar{x} - x_{n+1}| \leq |x_{n+1} - x_n|$.

$$\begin{array}{c} \overline{a_n \quad x_{n+1} \quad b_n} \\ \boxed{x_n = a_n \text{ ou } x_n = b_n} \end{array}$$

Assim, no critério de parada, ao invés de usarmos o erro entre a solução exata \bar{x} e uma aproximação, usaremos o erro entre duas aproximações consecutivas x_n e x_{n+1} .

CRITÉRIO DE PARADA DO MÉTODO DA BISSEÇÃO

O CRITÉRIO DE PARADA DO MÉTODO DA BISSEÇÃO FICA ASSIM: Se o erro (absoluto ou relativo) entre dois termos consecutivos, x_n e x_{n+1} for menor que um dado ε ($\varepsilon > 0$), então para-se o método e x_{n+1} é o valor aproximado de \bar{x} ($\bar{x} \approx x_{n+1}$), com erro (absoluto ou relativo) menor que ε .

Usando o erro absoluto:

Se $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, então x_{n+1} é a aproximação da solução exata \bar{x} com erro absoluto menor que ε .

Usando o erro relativo:

Se $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < \varepsilon$, então x_{n+1} é a aproximação da solução exata \bar{x} com erro relativo menor que ε .

O número ε é um indicador de precisão do método e, nos métodos aqui trabalhados, será tomado como uma potência inteira negativa de 10, ou seja: $\varepsilon = 10^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$ ($\varepsilon = 0.1$; $\varepsilon = 0.01$; $\varepsilon = 0.001 \dots$) (tão pequeno quanto seja necessário, dependendo da natureza do problema).

EXEMPLO

Solução aproximada da equação $x^3 + \cos x = 0$.

Como vimos em aula anterior, esta equação possui uma única solução \bar{x} no intervalo $[-1,0]$, sendo a função $f(x) = x^3 + \cos x$ contínua em $[-1,0]$, com $f(-1) = -0.45469 < 0$ e $f(0) = 1 > 0$. Vamos usar o método da bisseção para encontrar uma aproximação de \bar{x} , com erro absoluto menor que $\varepsilon = 0.1$.

RESOLVENDO O EXEMPLO

$$f(x) = x^3 + \cos x, f(-1) = -0.45469 < 0 \text{ e } f(0) = 1 > 0.$$

ATENÇÃO: CALCULADORA EM Radianos!!

Temos: $a_0 = -1$ e $b_0 = 0$. Então $x_1 = \frac{-1+0}{2} = -0.5$.

Decidindo sobre o novo intervalo de busca: $f(x_1) = f(-0.5) = 0.7525 > 0$, sinal contrário de $f(a_0) = f(-1) < 0$. Logo: $a_1 = a_0 = -1$ e $b_1 = x_1 = -0.5$.

Temos: $a_1 = -1$ e $b_1 = -0.5$. Então $x_2 = \frac{-1-0.5}{2} = -0.75$. $|x_2 - x_1| = 0.25 > 0.1$

Decidindo sobre o novo intervalo de busca: $f(x_2) = f(-0.75) = 0.3098 > 0$, sinal contrário de $f(a_1) = f(-1) < 0$. Logo: $a_2 = a_1 = -1$ e $b_2 = x_2 = -0.75$.

Temos: $a_2 = -1$ e $b_2 = -0.75$. Então $x_3 = \frac{-1-0.75}{2} = -0.875$. $|x_3 - x_2| = 0.125 > 0.1$

Decidindo sobre o novo intervalo de busca: $f(x_3) = f(-0.875) = -0.0289 < 0$, mesmo sinal de $f(a_2) = f(-1) < 0$. Logo: $a_3 = x_3 = -0.875$ e $b_3 = b_2 = -0.75$.

RESOLVENDO O EXEMPLO

Temos: $a_3 = -0.875$ e $b_3 = -0.75$. Então $x_4 = \frac{-0.875 - 0.75}{2} = -0.8125$. $|x_4 - x_3| = 0.0625 < 0.1$

Portanto $\bar{x} \approx x_4 = -0.8125$, com erro absoluto menor que $\varepsilon = 0.1$