ELT330 – Sistemas de Controle I

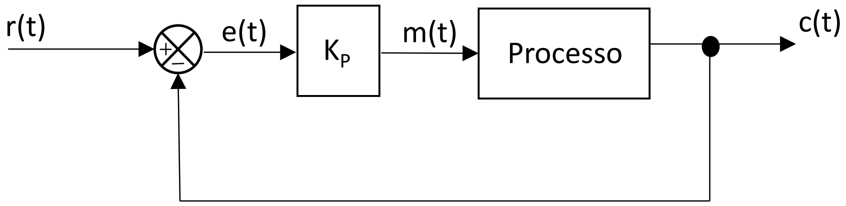
Prof. Tarcísio Pizziolo

<u>Aula 22 – Controlador Proporcional P</u>

1. Projeto de Controlador Proporcional

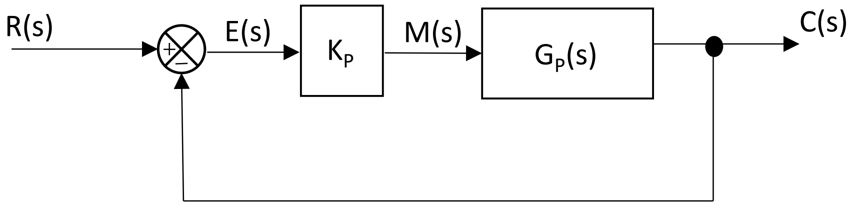
(https://www.embarcados.com.br/controlador-proporcional/)

Como o nome sugere, em um controlador proporcional a saída do mesmo, também conhecida como sinal de controle (ou ação de controle), é diretamente proporcional ao sinal de erro, ou seja, ao erro atuante.



$$m(t) = K_P.e(t)$$

No domínio da frequência (Transformada de Laplace) tem-se o seguinte diagrama de blocos para o controle proporcional e,



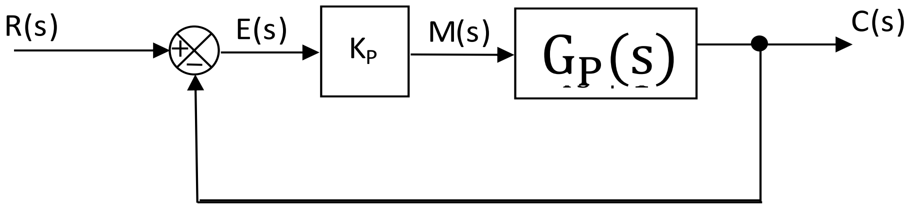
$$M(s) = K_P.E(s)$$

1. Sistemas de 1ª Ordem com realimentação unitária

Para um processo de 1ª ordem tem-se a função de transferência em malha aberta,

$$G_P(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

Conectando o controlador proporcional K_P em série com o processo $G_P(s)$ e montando a malha fechada tem-se,



A função de transferência em malha fechada será,

$$F(s) = \frac{K_P G_P(s)}{1 + K_P G_P(s)} = \frac{K_P\left(\frac{K}{Ts+1}\right)}{1 + K_P\left(\frac{K}{Ts+1}\right)} \Longrightarrow \boxed{F(s) = \frac{\frac{KK_P}{T}}{s + \left(\frac{1 + KK_P}{T}\right)}}$$

A equação característica é dada por,

$$s + \left(\frac{1 + KK_P}{T}\right) = 0 \Longrightarrow \boxed{s = -\left(\frac{1 + KK_P}{T}\right)}$$

Nota-se que a localização do polo do sistema pode variar de acordo com a variação do valor do ganho proporcional Kp.

Exemplo: Considere que $G_P(s)$ possua um polo em s = 10 e tenha ganho unitário K = 1.
Então,

$$G_P(s) = \frac{1}{s - 10}$$

A função de transferência em malha fechada será,

$$F(s) = \frac{K_P}{s + (K_P - 10)}$$

A equação característica é dada por,

$$s + (K_P - 10) = 0$$

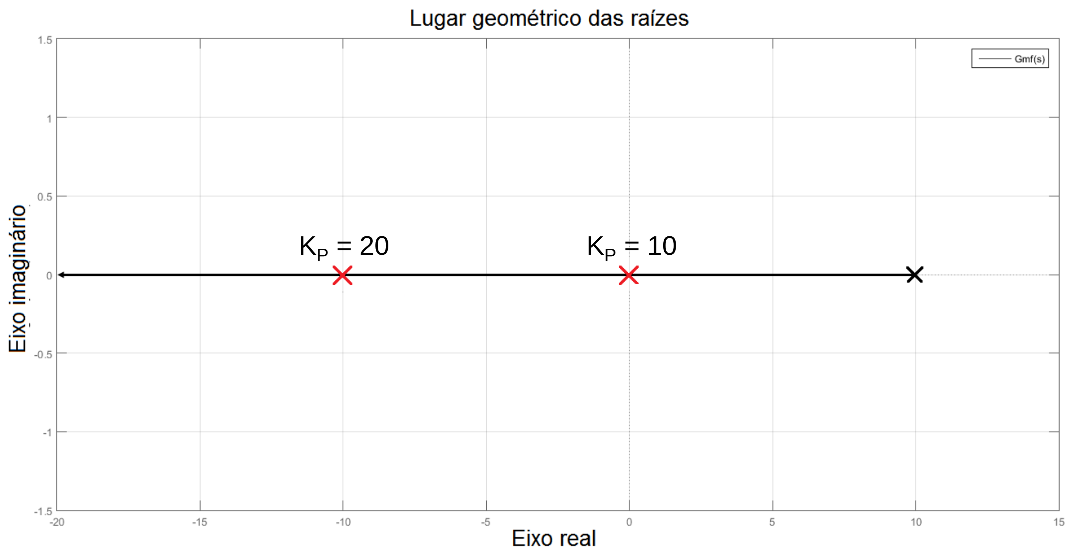
E o polo será em,

$$\boxed{s = (10 - K_P)}$$

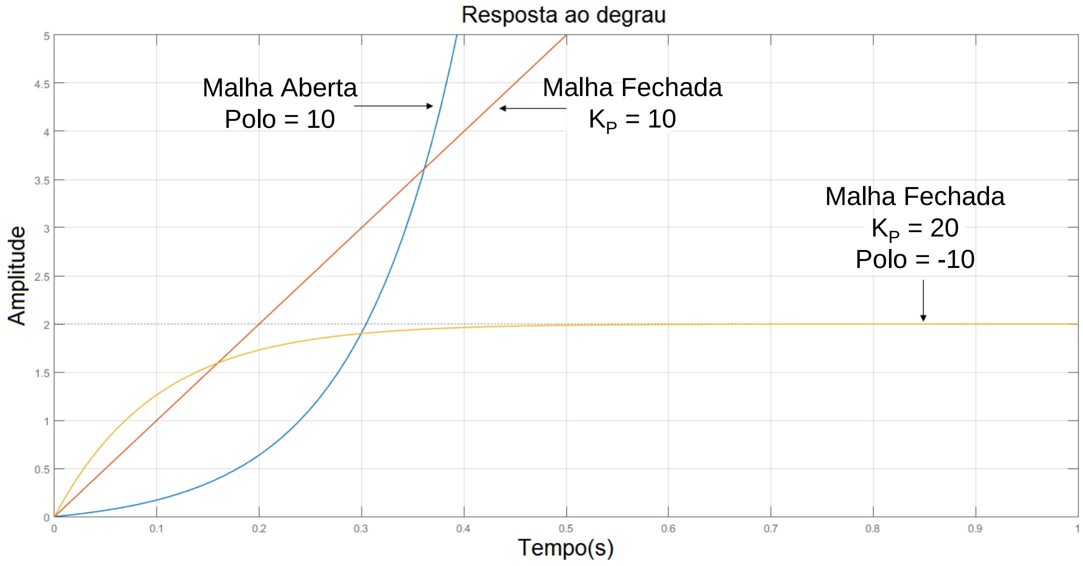
Para que o polo esteja localizado no semiplano esquerdo do plano complexo, (sistema estável), deve-se ter s < 0, então,

$$10 - K_P < 0 \Longrightarrow \boxed{K_P > 10}$$

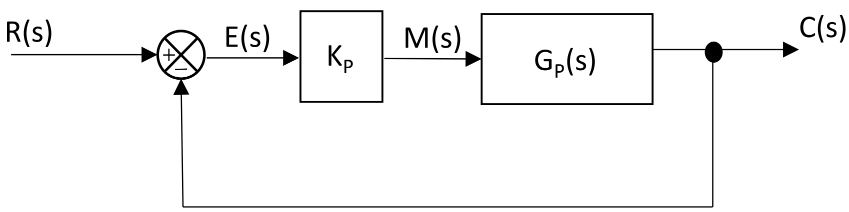
O gráfico a seguir ilustra a variação da localização dos polos do sistema de acordo com a variação do ganho proporcional Kp.



Observe que conforme Kp é incrementado, o polo do sistema é deslocado para a esquerda, de modo que, para Kp = 10, o mesmo permanece sobre a origem. Ao passo que para Kp = 20, o polo em questão pode ser localizado em -10.
Pode-se então projetar um controlador proporcional para estabilizar um determinado sistema instável em malha aberta tronando-o estável em malha fechada no regime transitório.



Exemplo: Projetar um controlador proporcional $G_C(s) = K_P$ de forma que o sistema dado pela sua função de transferência $G_P(s)$ torne-se estável quando excitado por uma entrada degrau unitário em malha fechada conforme o diagrama de blocos dado.



$$G_P(s) = \frac{4}{s-2}$$

A função de transferência $G_P(s)$ no padrão de 1ª ordem é,

$$G_P(s) = \frac{4}{s-2} \Longrightarrow G_P(s) = \frac{2}{(\frac{1}{2}s-1)}$$

Assim, K = 2 e T= 0,5.
A função de transferência $G_c(s)G_P(s) = K_PG_P(s)$,

$$K_PG_P(s) \quad = \frac{2K_P}{(\frac{1}{2}s-1)}$$

A função de transferência F(s) de malha fechada é dada por,

A função de transferência F(s) de malha fechada é dada por,

$$F(s) = \frac{\frac{2K_P}{(\frac{1}{2}s-1)}}{1+\frac{2K_P}{(\frac{1}{2}s-1)}} \Longrightarrow F(s) = \frac{8K_P}{\frac{1}{2}s-1+2K_P} \Longrightarrow \boxed{F(s) = \frac{16K_P}{s+(4K_P-2)}}$$

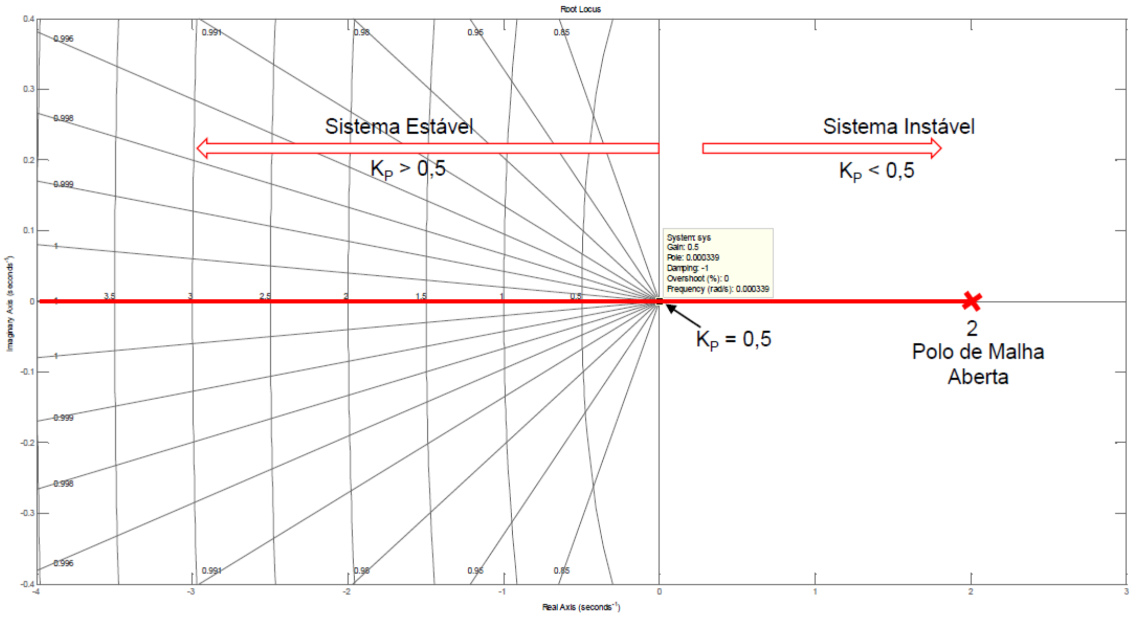
O polo de F(s) em malha fechada é,

$$s+(4K_P-2) = 0 \Longrightarrow s = -(4K_P-2)$$

Então, para que o sistema se estabilize, o polo deverá se localizar à esquerda do semiplano esquerdo do plano complexo onde s <0.

$$-(4K_P-2) < 0 \Longrightarrow (4K_P-2) > 0 \Longrightarrow \boxed{K_P > \frac{1}{2}}$$

Ou seja, para quaisquer valores de $K_P > 0{,}5$ o sistema se estabilizará.



A escolha do valor de K_P dependerá da limitação do erro em regime permanente que será abordada na próxima aula.

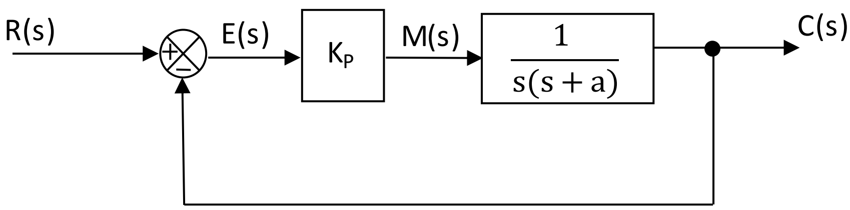
3. Sistemas de 2ª Ordem com realimentação unitária

3.1. Projeto pelo Requisito de Sobressinal Máximo (*overshoot*) M_P

Seja a seguinte função de transferência de um sistema em malha aberta,

$$G_P(s) = \frac{1}{s(s+a)}$$

Pode-se projetar um controlador proporcional de tal maneira a diminuir o sobressinal máximo (*overshoot)* da resposta do sistema a seguir.



A função de transferência em malha fechada para o sistema dado é,

$$F(s) = \frac{K_P G_P(s)}{1 + K_P G_P(s)} = \frac{K_P\left(\frac{1}{s(s+a)}\right)}{1 + K_P\left(\frac{1}{s(s+a)}\right)} \Longrightarrow \boxed{F(s) = \frac{K_P}{s^2 + as + K_P}}$$

Comparando essa função de transferência com a expressão padrão de um sistema de 2ª ordem tem-se,

$$F(s) = \frac{K_P}{s^2 + as + K_P} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

$$w_n^2 = K_P \Longrightarrow \boxed{w_n = \sqrt{K_P}}$$

$$2\xi w_n = a \Longrightarrow \left(2\xi\sqrt{K_P}\right)^2 = a^2 \Longrightarrow \left(2\xi\sqrt{K_P}\right)^2 = a^2 \Longrightarrow \boxed{K_P = \frac{a^2}{4\xi^2}}$$

Partindo da fórmula de cálculo do valor da especificação de sobressinal máximo da resposta de sistemas de 2ª ordem subamortecido dada uma entrada degrau unitário, pode-se determinar ξ. Assim,

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Rightarrow \ln(M_p) = -\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \left[\ln(M_p)\right]^2 = \frac{(\xi\pi)^2}{1-\xi^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\ln(M_p)\right]^2(1-\xi^2) = (\xi\pi)^2 \Rightarrow \left[\ln(M_p)\right]^2 - \xi^2\left[\ln(M_p)\right]^2 = (\xi\pi)^2 \Rightarrow$$

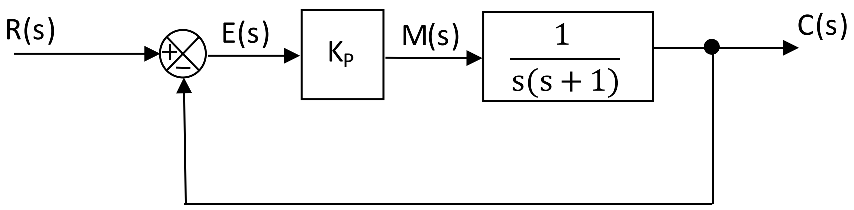
$$\Rightarrow (\xi\pi)^2 + \xi^2\left[\ln(M_p)\right]^2 = \left[\ln(M_p)\right]^2 \Rightarrow \xi^2\left\{\pi^2 + \left[\ln(M_p)\right]^2\right\} = \left[\ln(M_p)\right]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\xi = \sqrt{\frac{\left[\ln(M_p)\right]^2}{\pi^2 + \left[\ln(M_p)\right]^2}}}$$

Então, dado M_P desejado pode-se calcular o valor de ξ.
Substituindo ξ^2 determina-se K_P tem-se,

$$\boxed{K_P = \frac{a^2\left\{\pi^2 + \left[\ln(M_p)\right]^2\right\}}{4\left[\ln(M_p)\right]^2}}$$

Exemplo: Projetar um controlador proporcional para satisfazer a um sobressinal máximo de 10% para o sistema dado.



A função de transferência em malha fechada com o controlador proporcional é dada por,

$$F(s) = \frac{K_P\left(\frac{1}{s(s+1)}\right)}{1 + K_P\left(\frac{1}{s(s+1)}\right)} \Rightarrow \boxed{F(s) = \frac{K_P}{s^2 + s + K_P}}$$

Substituindo os valores de a = 1 e de M_P = 0,1 obtemos,

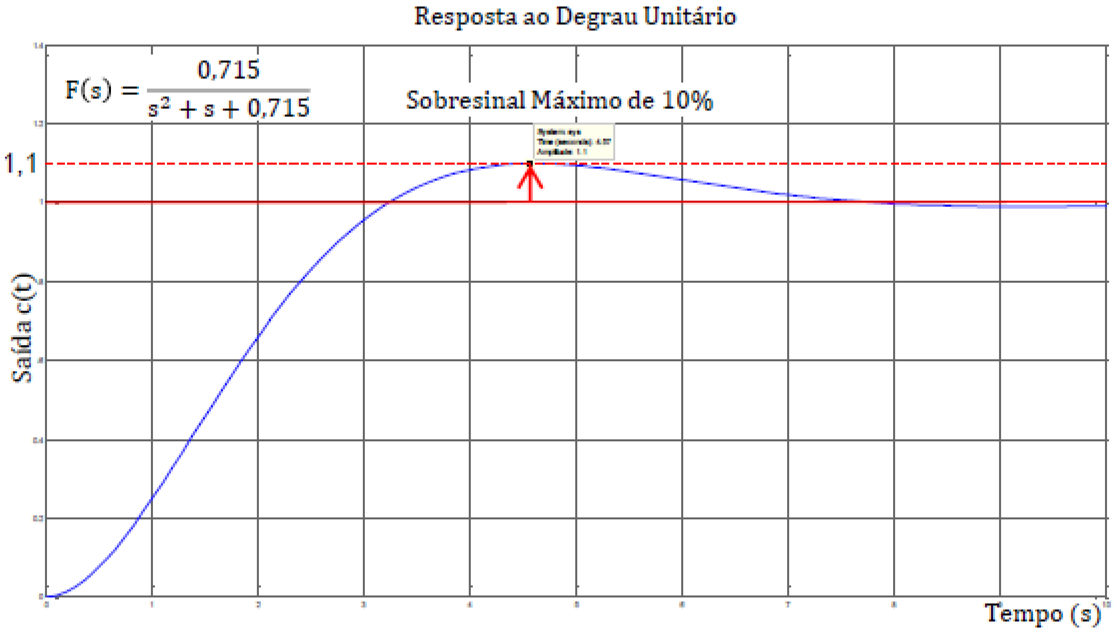
$$K_P = \frac{a^2\left\{\pi^2 + \left[\ln(M_p)\right]^2\right\}}{4\left[\ln(M_p)\right]^2} \Rightarrow K_P = \frac{1^2\{\pi^2 + [\ln(0{,}1)]^2\}}{4[\ln(0{,}1)]^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_P = \frac{15{,}171}{21{,}208} \Rightarrow \boxed{K_P = 0{,}715}$$

A função de transferência em malha fechada com o controlado proporcional será,

$$\boxed{F(s) = \frac{0{,}715}{s^2 + s + 0{,}715}}$$

Gráfico de resposta ao degrau unitário com sobresinal máximo (*overshoot*) de 10%.

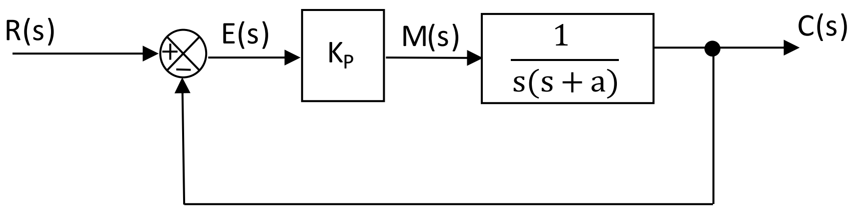


3.2. Projeto pelo Requisito de Instante e Pico t_P

Seja a mesma função de transferência de um sistema em malha aberta,

$$G_P(s) = \frac{1}{s(s+a)}$$

Pode-se projetar um controlador proporcional para se obter um valor de instante de pico desejado na resposta do sistema a seguir.



A função de transferência em malha fechada para o sistema dado é,

$$F(s) = \frac{K_P G_P(s)}{1 + K_P G_P(s)} = \frac{K_P\left(\frac{1}{s(s+a)}\right)}{1 + K_P\left(\frac{1}{s(s+a)}\right)} \Longrightarrow \boxed{F(s) = \frac{K_P}{s^2 + as + K_P}}$$

Comparando essa função de transferência com a expressão padrão de um sistema de 2ª ordem tem-se,

$$F(s) = \frac{K_P}{s^2 + as + K_P} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

$$w_n^2 = K_P \Longrightarrow \boxed{w_n = \sqrt{K_P}}$$

$$2\xi w_n = a \Longrightarrow 2\xi\sqrt{K_P} = a \Longrightarrow \boxed{\xi = \frac{a}{2\sqrt{K_P}}}$$

Partindo da fórmula de cálculo do valor da especificação de instante de pico da resposta de sistemas de 2ª ordem subamortecido dada uma entrada degrau unitário, tem-se,

$$\boxed{t_P = \frac{\pi}{w_d} \Rightarrow w_d = \frac{\pi}{t_P}}$$

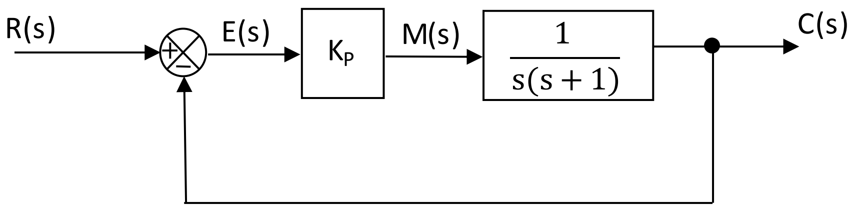
Então, dado t_P desejado pode-se calcular o valor de w_d.
Substituindo w_n e ξ em w_d determina-se K_P,

$$w_d = \frac{\pi}{t_P} \Rightarrow w_n\sqrt{1-\xi^2} = \frac{\pi}{t_P} \Rightarrow \sqrt{K_P}\sqrt{1-\left(\frac{a}{2\sqrt{K_P}}\right)^2} = \frac{\pi}{t_P} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\sqrt{K_P}\sqrt{1-\left(\frac{a}{2\sqrt{K_P}}\right)^2}\right]^2 = \left(\frac{\pi}{t_P}\right)^2 \Rightarrow K_P\left[1-\left(\frac{a}{2\sqrt{K_P}}\right)^2\right] = \left(\frac{\pi}{t_P}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_P\left[1-\frac{a^2}{4K_P}\right] = \frac{\pi^2}{t_P^2} \Rightarrow K_P - \frac{a^2}{4} = \frac{\pi^2}{t_P^2} \Rightarrow \boxed{K_P = \frac{\pi^2}{t_P^2} + \frac{a^2}{4}}$$

Exemplo: Projetar um controlador proporcional para satisfazer a um instante de pico $t_P = \pi$ s para o sistema dado.



A função de transferência em malha fechada com o controlador proporcional é dada por,

$$F(s) = \frac{K_P\left(\frac{1}{s(s+1)}\right)}{1 + K_P\left(\frac{1}{s(s+1)}\right)} \Rightarrow \boxed{F(s) = \frac{K_P}{s^2 + s + K_P}}$$

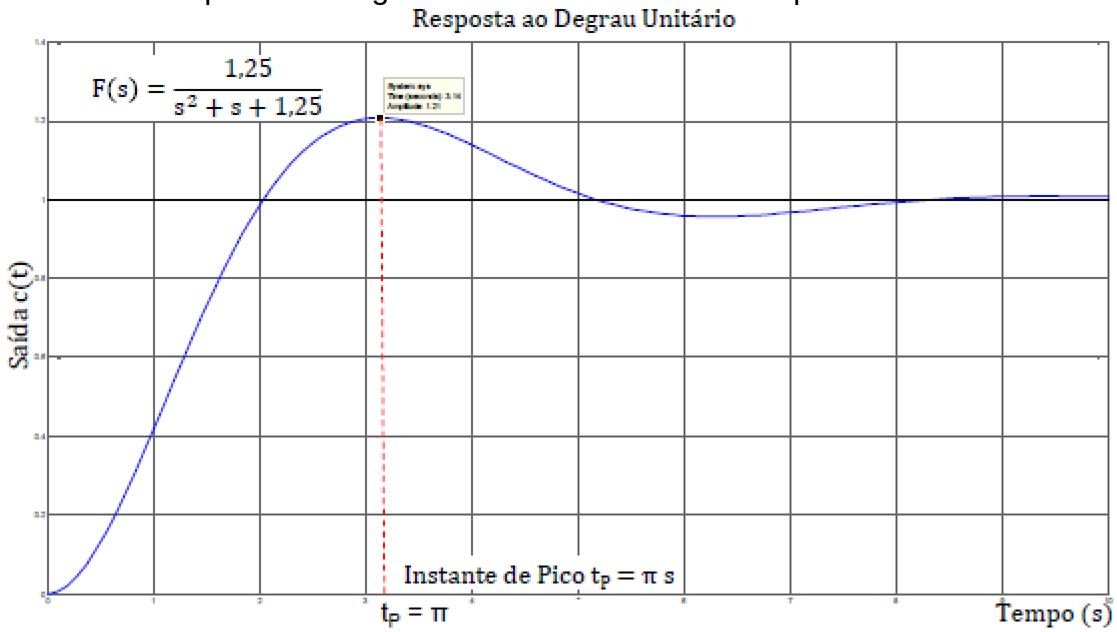
Substituindo os valores de a = 1 e de $t_P = \pi$ s obtemos,

$$K_P = \frac{\pi^2}{t_P^2} + \frac{a^2}{4} \Rightarrow K_P = \frac{\pi^2}{\pi^2} + \frac{1^2}{4} \Rightarrow K_P = \frac{5}{4} \Rightarrow \boxed{K_P = 1{,}25}$$

A função de transferência em malha fechada com o controlado proporcional será,

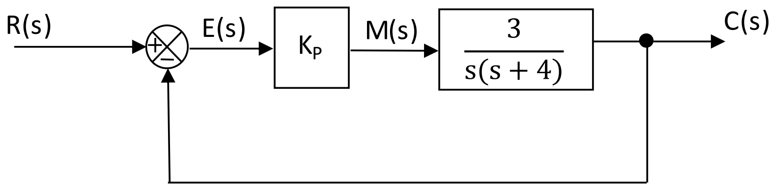
$$\boxed{F(s) = \frac{1{,}25}{s^2 + s + 1{,}25}}$$

Gráfico de resposta ao degrau unitário com instante de pico em $t_P = \pi$ s.



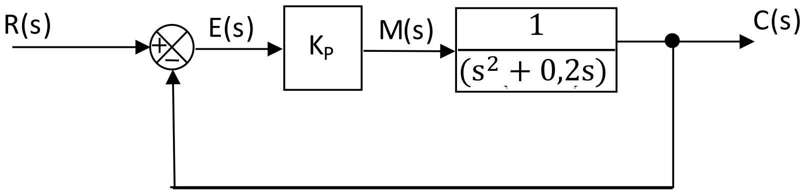
Exercícios

Exercício 1) Projetar um controlador proporcional $\mathbf{K_P}$ para que a resposta do sistema de controle em malha fechada a seguir tenha um *overshoot* de 6% para uma entrada degrau unitária.



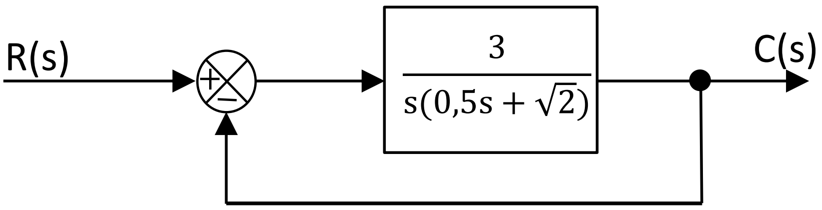
R.: $K_P = 3$

Exercício 2) Projetar um controlador proporcional $\mathbf{K_P}$ para que a resposta do sistema de controle em malha fechada a seguir tenha um tempo de pico igual a 31,4 s para uma entrada degrau unitária.



R.: $K_P = 0,02$

Exercício 3) Seja o sistema de controle dado pelo diagrama de blocos a seguir. A entrada é um degrau unitário.



a) Traçar o gráfico de resposta c(t) com suas especificações M_P e t_P.
R.: M_P = 10,8 % e T_P = 1,57 s

b) Projetar um controlador Proporcional K_P a ser instalado em série com a planta para obter um sobressinal máximo M_P igual à metade do atual na resposta c(t) em malha fechada para uma entrada degrau unitário.
R.: K_p = 0,72

c) Traçar o gráfico de resposta c(t) com o controlador projetado no item b) assinalando M_P.

d) Projetar um controlador Proporcional K_P a ser instalado em série com a planta para obter um o tempo de pico t_p 50% menor que o atual na resposta c(t) em malha fechada para uma entrada degrau unitário.
R.: K_P = 3

e) Traçar o gráfico de resposta c(t) com o controlador projetado no item d) assinalando t_P.