# ELT221 - Circuitos Elétricos II

**Prof. Tarcísio Pizziolo**

## Aula 1

### 1) Frequência Complexa

Seja uma **função f(t) senoidal** generalizada dada por $\mathbf{f(t) = f_m e^{\sigma t} \cos(wt + \varphi^o)}$

Onde:

$$\mathbf{w} = \text{frequência angular} = \mathbf{2\pi f}\ \text{(rd/s)}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \text{Freqüência Neperiana}\ \left(\mathbf{Np}/\mathbf{s}\right)$$

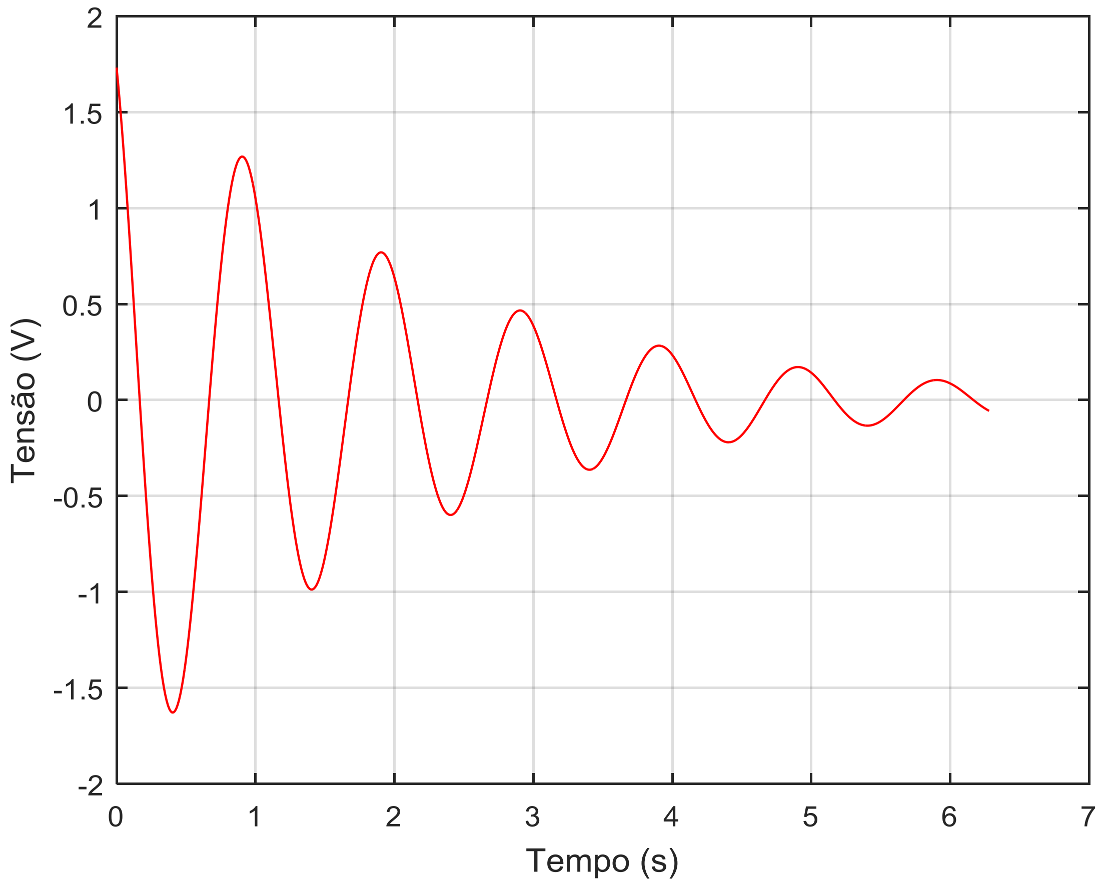
$$\mathbf{e}^{\sigma t} = \text{fator de amortecimento para } \boldsymbol{\sigma < 0}.$$

Considerando esta **função f(t) senoidal** uma tensão **v(t)** pode-se escrever,

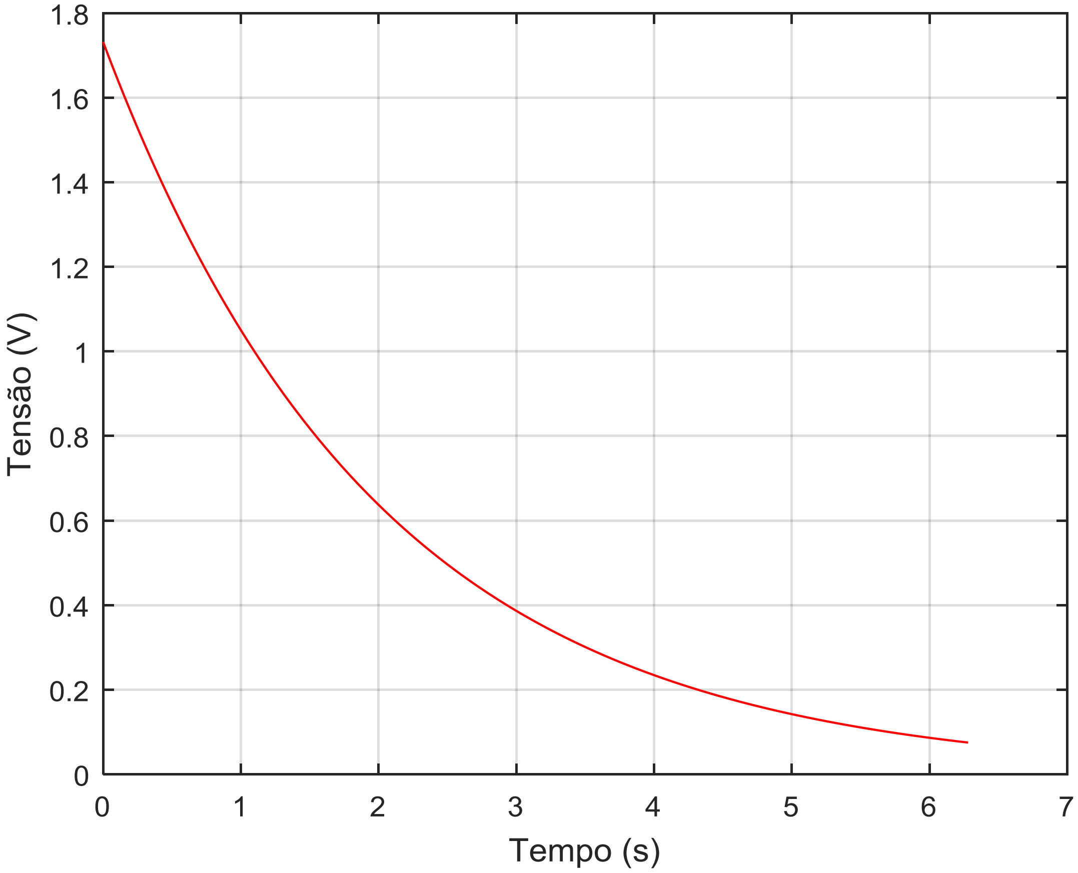
$$\mathbf{v(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(wt + \varphi^o)\ V}$$

Em função dos valores de **σ** e de **w** os gráficos de **v(t)** poderão assumir as seguintes formas a seguir.

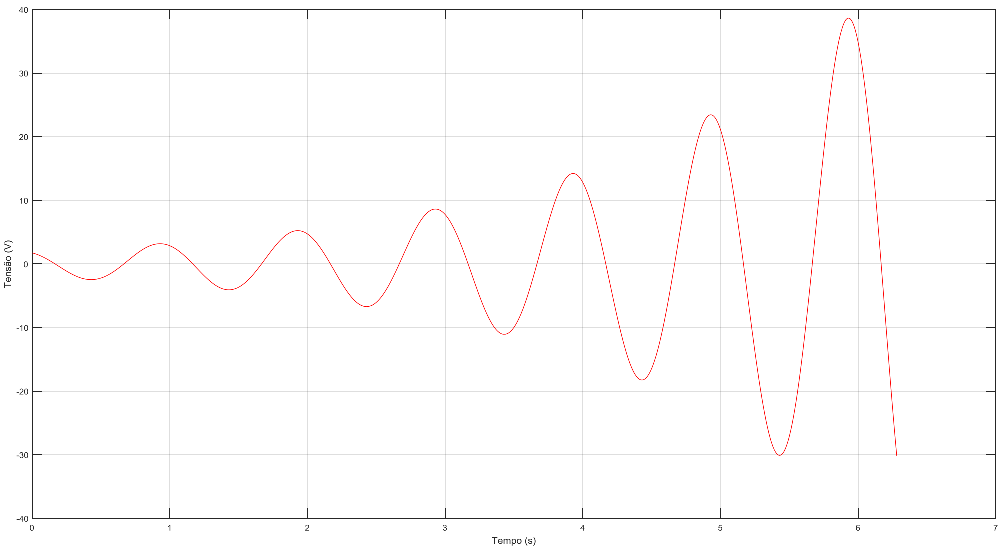
Para $\boldsymbol{\sigma < 0}$ e $\mathbf{w > 0}$:



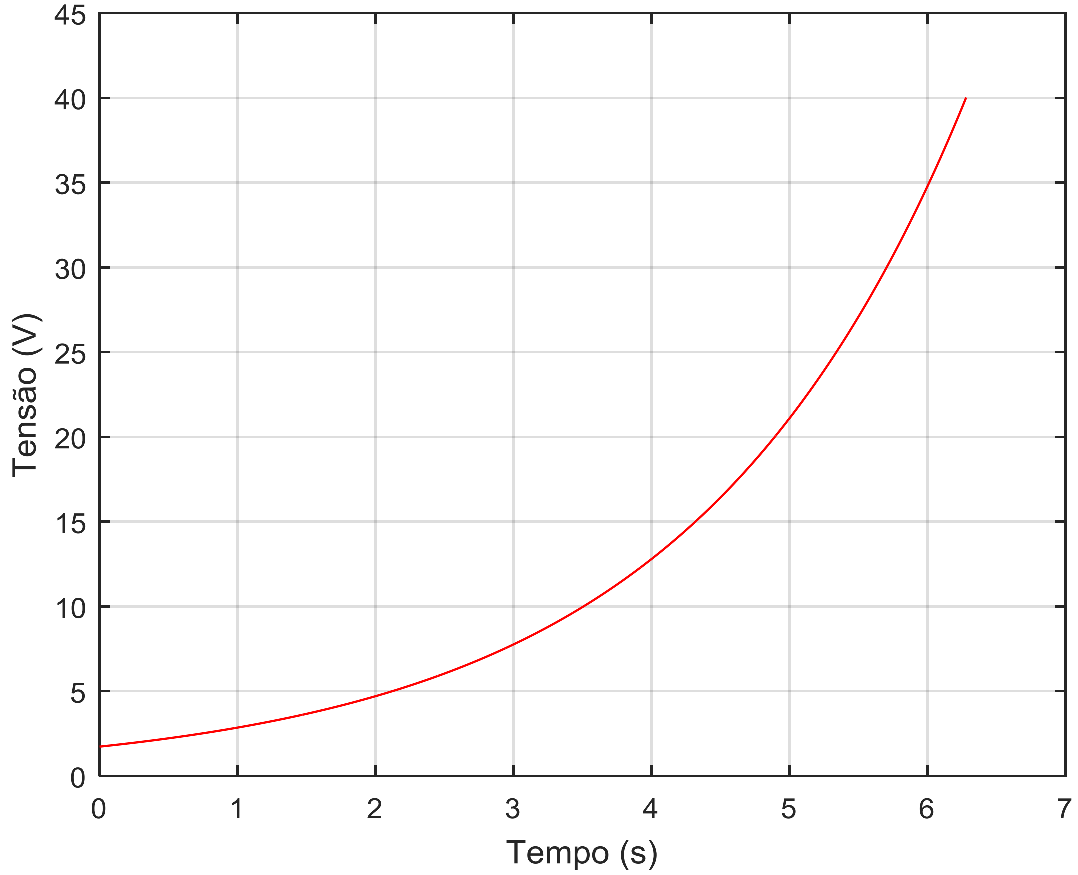
Para $\boldsymbol{\sigma} < \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$:



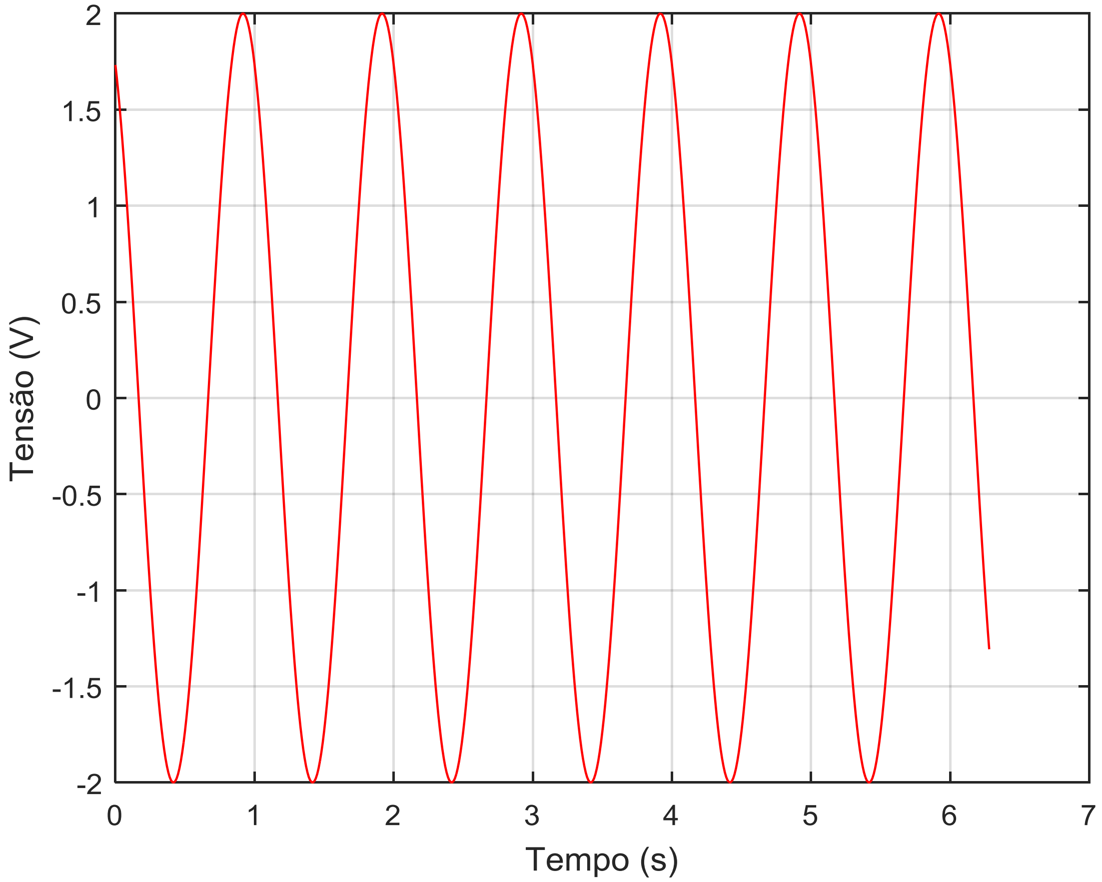

Para $\boldsymbol{\sigma} > \mathbf{0}$ e $\mathbf{w} > \mathbf{0}$:



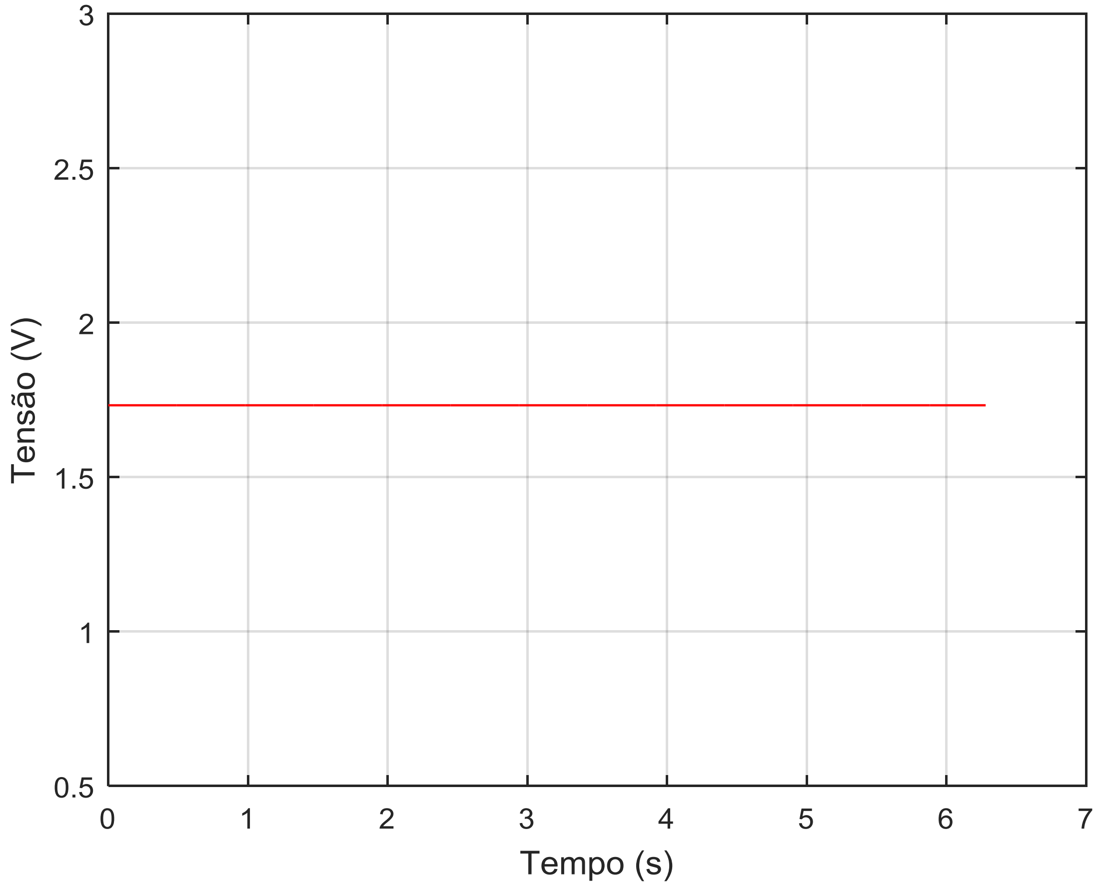
Para **σ** > **0** e **ω** = **0**:




Para **σ** = **0** e **ω** > **0**:

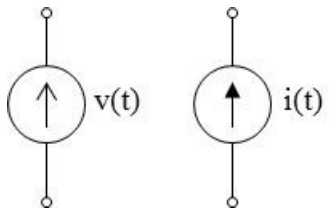


Para **σ = 0** e **ω = 0**:




Para modelar as fontes de tensões independentes estas serão representadas por setas com a **cabeça aberta** dentro (ou ao lado) de um círculo e as fontes de correntes independentes serão representadas por setas com a **cabeça fechada** também dentro (ou ao lado) de um círculo.

Então teremos as seguintes representações:

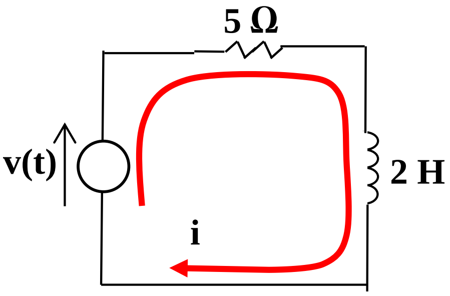



Modelos de fontes independentes de tensão **v(t)** e de corrente **i(t)**.


Modelos de fontes dependentes de tensão **v(t)** e de corrente **i(t)** controladas por tensão e por corrente.

Esta convenção de setas com **cabeça aberta** e com **cabeça fechada** também será utilizada para as tensões e correntes nos elementos do circuito respectivamente.

Para exemplificar, determinaremos a resposta forçada **i(t)** para um circuito **RL série** contendo uma fonte de tensão com este tipo de função senoidal amortecida.
Seja o circuito a seguir com **v(t) = 25e$^{-t}$cos(2t) V**.




Aplicando a **LKT**,

$$\mathbf{v(t) = v_{5\Omega} + v_{2H} \Rightarrow 5i + 2\frac{di}{dt} = 25e^{-t}\cos 2t \ldots\ldots\ldots\ldots(1)}$$

**Consideremos a solução para a EDOL :**

$$\mathbf{i(t) = e^{-t}(A\cos 2t + B\,sen 2t) \quad (A)}$$

Derivando **i(t)** e substituindo em **(1)** temos:

**A = 3** e **B = 4**

Daí:

$$\mathbf{i(t) = e^{-t}(3\cos 2t + 4\,sen 2t)\ (A) \quad ou \quad i(t) = 5e^{-t}\cos(2t - 53{,}1^{o})\ (A)}$$

**Aplicando Fasores:**

$$\mathbf{v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow v(t) = Real\,[V_m e^{j(wt+\varphi)}]}$$

A representação fasorial fornece:

$$\mathbf{\dot{V} = V_m e^{j\varphi} = V_m \angle \varphi}$$

Para uma **excitação com amortecimento** $\mathbf{v(t) = V_m e^{\sigma t}\cos(wt + \varphi)}$ tem-se que:

$$\mathbf{v(t) = Real\,[V_m e^{\sigma t} e^{j(\omega t+\varphi)}] = Real\,[V_m e^{j\varphi} e^{(\sigma + j\omega)t}]}$$

Definindo a grandeza $\mathbf{s = (\sigma + j\omega)}$ pode se escrever:

$$\mathbf{\dot{V}(s) = Real\,[\dot{V} e^{st}]}$$

**Exemplos:**

a) $\mathbf{v(t) = 25e^{-t}\cos 2t \ \ (V) \quad \Rightarrow \quad \dot{V}(s) = 25\angle 0^{o} \quad e \quad s = (-1 + j2)}$

b) $\mathbf{v(t) = 6e^{-3t} sen(4t + 60^{o}) \ \ (V) \quad \Rightarrow \quad \dot{V}(s) = 6\angle 60^{o} \quad e \quad s = (-3 + j4)}$

c) $\mathbf{v(t) = 3e^{-4t}\cos(2t - 30^{o}) \ \ (V) \quad \Rightarrow \quad \dot{V}(s) = 3\angle -30^{o} \quad e \quad s = (-4 + j2)}$

## 1.1) Frequência Complexa Generalizada

Seja a função dada anteriormente:

$$v(t) = V_m e^{\sigma t}\cos(\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad v(t) = V_m e^{\sigma t}\left\{\frac{\left[e^{j(\omega t+\varphi)} + e^{-j(\omega t+\varphi)}\right]}{2}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{V_m e^{j\varphi}}{2}[e^{(\sigma+j\omega)t}] + \frac{V_m e^{-j\varphi}}{2}[e^{(\sigma-j\omega)t}] \Rightarrow v(t) = K_1 e^{(\sigma+j\omega)t} + K_2 e^{(\sigma-j\omega)t},$$

$$\textbf{Onde:}\quad K_1 = \frac{V_m e^{j\varphi}}{2} \quad \text{e} \quad K_2 = \frac{V_m e^{-j\varphi}}{2} = K_1^*$$

Os expoentes **σ ± jw** são definidos como **frequências complexas** e representados por **s.**

Então $v(t)$ possui **duas freqüências complexas**: $\begin{cases} s_1 = \sigma + j\omega \\ s_2 = \sigma - j\omega \end{cases}$

Generalizando, uma função que pode ser escrita sob a forma:

$$f(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \ldots\ldots + K_n e^{s_n t},$$

é caracterizada pelas **Freqüências Complexas** **$s_1$, $s_2$, ..., $s_n$** (**ou $\lambda_1$, $\lambda_2$,..., $\lambda_n$**)

**Importante:** Quando **s = σ ± jw** e **σ = 0**, a função torna-se **senoidal sem amorecimento**!

**Exemplo:**

Determine a frequêcia complexa **s** e o fasor $\dot{V}(s)$ para $v(t) = 6e^{-3t}\cos(4t + 10^\circ)$ (V)

$$s = -3 + j4 \quad \text{e} \quad V(s) = 6\angle 10^\circ$$

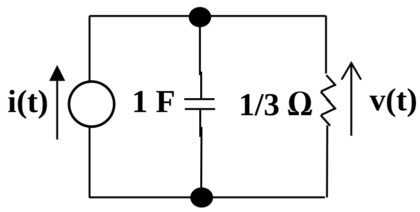
**Exemplo:**

Determine **v(t)** para $\dot{V} = 5\angle 30^\circ$ e $s = (-3 + j2)$

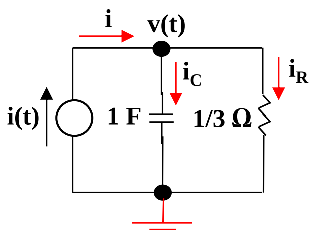
$$v(t) = 5e^{-3t}\cos(2t + 30^\circ) \quad (V)$$

**Exemplo:**

Detrminar a resposta forçada **v(t)** dado que a fonte é **i(t) = e$^{-t}$cos(t) A**.




Aplicando a LKC:




$$\text{Para } i(t) \Rightarrow \dot{I} = 1\angle 0^\circ \quad \text{com} \quad s = -1 + j1$$

$$\text{Para } v(t) \Rightarrow \dot{V} = \mathrm{Real}\,[V_m e^{j\varphi} e^{(\sigma+j\omega)t}] = \mathrm{Real}\,[V_m e^{j\varphi} e^{st}]$$

$$\text{Então:}\quad \frac{d\dot{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\mathrm{Real}\,[V_m e^{j\varphi} e^{st}]\right\} = s\{\mathrm{Real}\,[V_m e^{j\varphi} e^{st}]\} = s\dot{V}$$

$$i = i_C + i_R \Rightarrow i = \frac{dv}{dt} + 3v \Rightarrow \frac{dv}{dt} + 3v = i$$

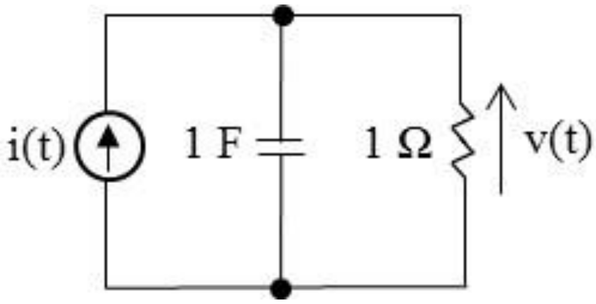
**Transformando em Fasores:**

$$\frac{d\dot{V}}{dt} + 3\dot{V} = \dot{I} \Rightarrow s\dot{V} + 3\dot{V} = \dot{I} \Rightarrow (s+3)\dot{V} = \dot{I} \Rightarrow \dot{V} = \frac{\dot{I}}{(s+3)};\ \text{substituindo } \dot{I} = 1\angle 0^\circ \text{ e } s = -1 + j1:$$

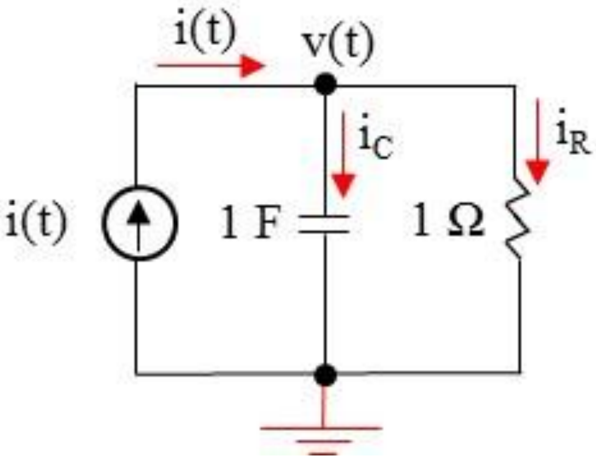
$$\dot{V} = \frac{1\angle 0^\circ}{((-1+j1)+3)} \Rightarrow \dot{V} = \frac{1\angle 0^\circ}{(2+j1)} \Rightarrow \dot{V} = \frac{1}{\sqrt{5}}\angle -26{,}5^\circ \Rightarrow \boxed{v(t) = \frac{\sqrt{5}}{5}e^{-t}\cos(t - 26{,}5^\circ)\ (V)}$$

**Exercício:**

Dado o circuito a seguir, determinar a resposta completa **v(t)** no capacitor sabendo-se que a fonte de corrente do circuito é dada por **$i(t) = 2e^{-t}\cos(t + 30^o)$ A**.




Aplicando a lei de Kirchhoff de corrente (LKC):




$$i(t) = i_R + i_C \Rightarrow i(t) = \frac{v}{1} + 1\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + v = i(t)$$

Transformando v(t), $\frac{dV}{dt}$ e i(t) em fasores :

$$V = \mathrm{Real}\left[V_m e^{j\varphi} e^{(\sigma + jw)t}\right] \Rightarrow V = \mathrm{Real}\left[V_m e^{j\varphi} e^{st}\right]$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\{\mathrm{Real}\left[V_m e^{j\varphi} e^{st}\right]\} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = s\{\mathrm{Real}\left[V_m e^{j\varphi} e^{st}\right]\} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = sV$$

$$I = 2\angle 30^o \text{ A e } s = -1 + j1$$

Substituindo os fasores em $\frac{dV}{dt} + V = I$ obtém-se:

$$\frac{dV}{dt} + V = I \Rightarrow sV + V = 2\angle 30^o \Rightarrow V = \frac{2\angle 30^o}{(s+1)}$$

Substituindo a frequência complexa s = -1 + j1 em V:

$$V = \frac{2\angle 30^o}{(s+1)} \Rightarrow V = \frac{2\angle 30^o}{[(-1 + j1) + 1)]} \Rightarrow V = \frac{2\angle 30^o}{j1} \Rightarrow V = \frac{2\angle 30^o}{1\angle 90^o} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 2\angle -60^o \text{ V}$$

A resposta **v(t)** será dada por:

**$v(t) = 2e^{-t}\cos(t - 60^o)$ V**

A transformação inversa para o domínio do tempo requer atenção no tipo de função da fonte (**cosseno** ou **seno**) e sua frequência **w**, na representação do fator de amortecimento **$e^{\sigma}$**, e na fase **φ** final resultante das operações com números complexos.

## 1.2) Impedância Complexa Generalizada

Define-se **Z(s)** = **Impedância Complexa Generalizada**

Para o **Regime Permanente** temos que **σ = 0**, ou seja, o Regime Transitório já terminou, e **s = jw**.

Então:

Elemento resistivo **R** não depende da frequência **s**: $Z_R(s) = R$

Elemento indutivo **L** depende da frequência **s**: $X_L = jwL = sL$

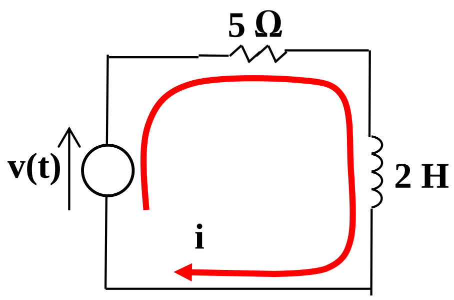
Elemento capacitivo **C** depende da frequência **s**: $X_C(s) = \dfrac{1}{jwC} = \dfrac{1}{sC}$

## 1.3) Admitância Complexa Generalizada

$$\text{Como} \quad Y(s) = \frac{1}{Z(s)} \quad \text{tem-se que:}$$

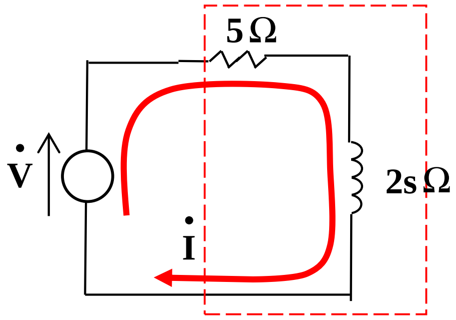
$$Y_R(s) = \frac{1}{Z_R(s)} = \frac{1}{R} = G, \quad Y_L(s) = \frac{1}{Z_L(s)} = \frac{1}{sL} \quad e \quad Y_C(s) = \frac{1}{Z_C(s)} = sC$$

**Exemplo:** Considerando o exemplo dado anteriormente determine **i(t)** no circuito **RL série** utilizando a frequência complexa **s**.




Primeiro deve-se transformar o circuito do domínio do tempo **t** para o domíno da frequência **s**.

$$v(t) = 25e^{-t}\cos(2t)\ (V) \Rightarrow \dot{V} = 25\angle 0^\circ \ \text{ e } \ s = (-1 + j2)$$



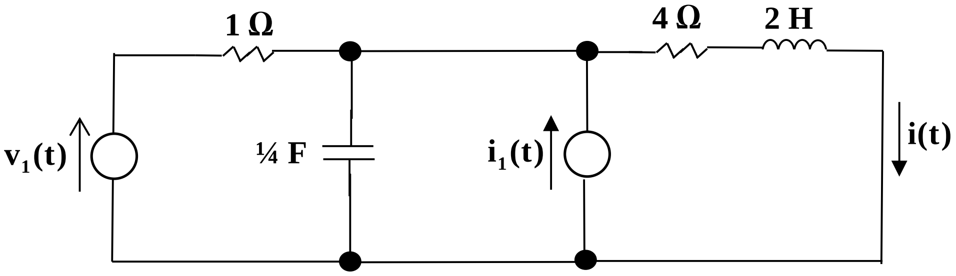

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z} = \frac{25\angle 0^\circ}{(2s+5)} \Rightarrow \dot{I} = \frac{25\angle 0^\circ}{[2(-1+j2)+5]} \Rightarrow \dot{I} = 5\angle -53{,}1^\circ\ (A)$$

$$\text{No domínio do tempo:} \quad \boxed{i(t) = 5e^{-t}\cos(2t - 53{,}1^\circ)\ (A)}$$

**Exemplo:** Para o circuito abaixo é dado:

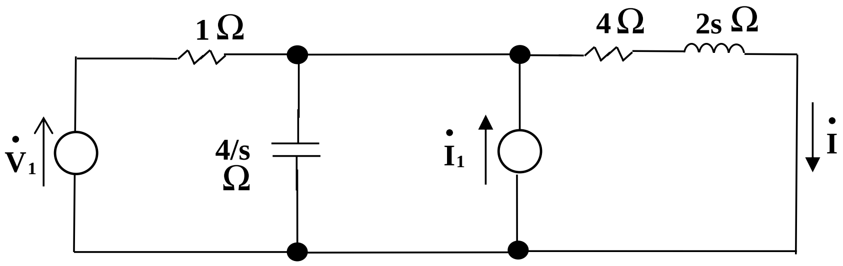
$$\begin{cases} v_1(t) = 8e^{-t}\cos(t)\ (V) \quad e \quad s_v = (-1 + j1) \\ i_1(t) = 2e^{-5t}\ (A) \quad e \quad s_i = (-5 + j0) \end{cases}$$

Calcular a corrente **i(t)**.



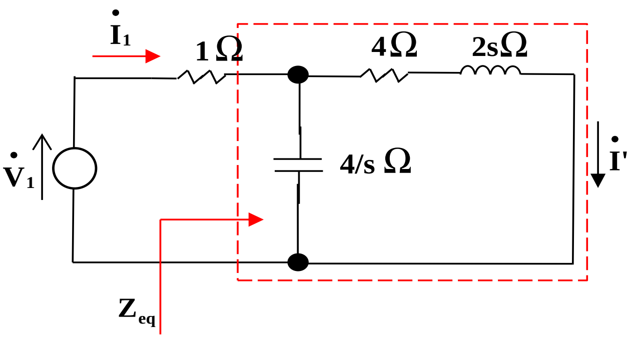

Primeiro deve-se transformar o circuito do domínio do tempo **t** para o domíno da frequência **s**.

$$\textbf{Fontes}: \begin{cases} \dot{V}_1 = 8\angle 0^\circ \quad (V) \\ \dot{I}_1 = 2\angle 0^\circ \quad (A) \end{cases}$$




As fontes possuem **frequências diferentes** $s_v = (-1 + j1)$ **e** $s_i = (-5 + j0)$ o que implica em aplicar o **Teorema da Superposição**.

Circuito com fonte de tensão ativa e com fonte de corrente desativada.



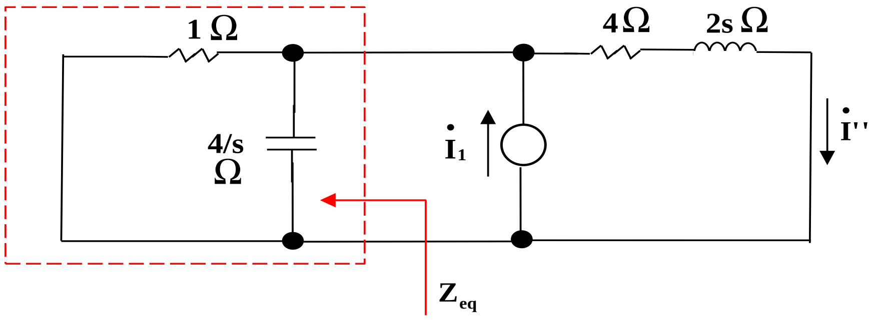

$$\dot{I}' = \frac{\frac{4}{s}}{\left(2s + 4 + \frac{4}{s}\right)} \times \dot{I}_1 \Rightarrow \dot{I}' = \frac{\frac{4}{s}}{\left(2s + 4 + \frac{4}{s}\right)} \times \frac{\dot{V}_1}{(1 + Z_{eq})} \Rightarrow \dot{I}' = \frac{\frac{4}{s}}{\left(2s + 4 + \frac{4}{s}\right)} \times \frac{8\angle 0^\circ}{(1 + Z_{eq})}$$

$$\text{Então}: \quad \dot{I}' = \frac{\frac{4}{s}}{\left(2s + 4 + \frac{4}{s}\right)} \times \frac{8\angle 0^\circ}{\left\{1 + \left[\frac{(2s+4)\left(\frac{4}{s}\right)}{\left(2s + 4 + \frac{4}{s}\right)}\right]\right\}} \Rightarrow \dot{I}' = \frac{32}{(2s^2 + 4s + 4)\left[\frac{\frac{2s^2 + 4s + 4}{s} + \left(\frac{8s + 16}{s}\right)}{\left(\frac{2s^2 + 4s + 4}{s}\right)}\right]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{I}' = \frac{16s}{s^2 + 6s + 10}; \quad \text{para } s = (-1 + j1) \Rightarrow \dot{I}' = \frac{16(-1 + j1)}{(-1 + j1)^2 + 6(-1 + j1) + 10} \Rightarrow \dot{I}' = \frac{4(-1 + j1)}{(1 - j1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{I}' = 2\sqrt{2}\angle -45^\circ\ A \quad \Rightarrow \quad \boxed{i'(t) = 2\sqrt{2}e^{-t}\cos(t - 45^\circ)\ \ (A)}$$

Circuito com fonte de corrente ativa e com fonte de tensão desativada




$$\dot{I}''=\left[\frac{Z_{eq}}{Z_{eq}+(2s+4)}\right]\times\dot{I}_1\Rightarrow\dot{I}''=\left[\frac{\dfrac{(1)(\frac{4}{s})}{\left(1+\frac{4}{s}\right)}}{\left[\dfrac{(1)(\frac{4}{s})}{\left(1+\frac{4}{s}\right)}\right]+(2s+4)}\right]\times(2\angle 0^\circ)\Rightarrow\dot{I}''=\left[\frac{\dfrac{4}{(s+4)}}{\left[\dfrac{4}{(s+4)}\right]+(2s+4)}\right]\times(2\angle 0^\circ)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\dot{I}''=\left[\frac{2}{(s^2+6s+10)}\right]\times(2\angle 0^\circ)\Rightarrow\dot{I}''=\frac{4}{(s^2+6s+10)};\quad \text{para } s=-5+j0\Rightarrow\dot{I}''=\frac{4}{(-5)^2+6(-5)+10}\Rightarrow$$

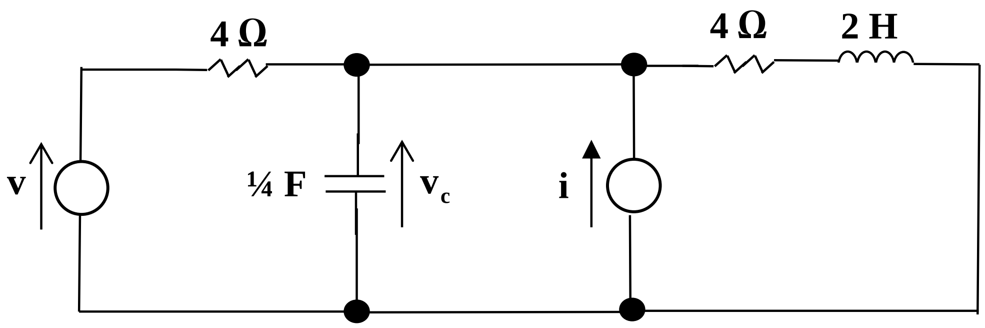
$$\Rightarrow\dot{I}''=\frac{4}{5}\angle 0^\circ\Rightarrow\dot{I}''=0{,}8\angle 0^\circ\Rightarrow\boxed{i''(t)=0{,}8e^{-5t}\ (A)}$$

$$\textbf{Finalmente:}\quad i(t)=i'(t)+i''(t)\Rightarrow\boxed{i(t)=2\sqrt{2}e^{-t}\cos(t-45^o)+0{,}8e^{-5t}\quad(A)}$$

**Exercício 1:** Dado que

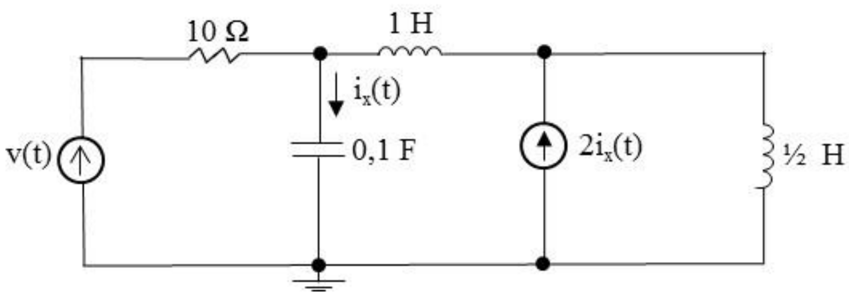
$$\begin{cases} v(t)=4e^{-2t}\cos(t-45^o)\ (V)\\ i(t)=2e^{-t}\ (A)\end{cases}$$

Calcule a resposta forçada para $\mathbf{v_c(t)}$.




$$\textbf{R.:}\quad v_c(t)=2\sqrt{2}e^{-2t}\cos(t+90^o)+4e^{-t}\quad(V)$$

**Exercício 2:** Para **v(t) = 20cos(4t)** V, determine a corrente $\mathbf{i_x(t)}$ no circuito abaixo.




**R.:** $\mathbf{i_x(t) = 7{,}59\cos(4t + 108{,}4^o)}$ **A**