Universidade Federal de Viçosa
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Departamento de Engenharia Elétrica

Robótica Industrial

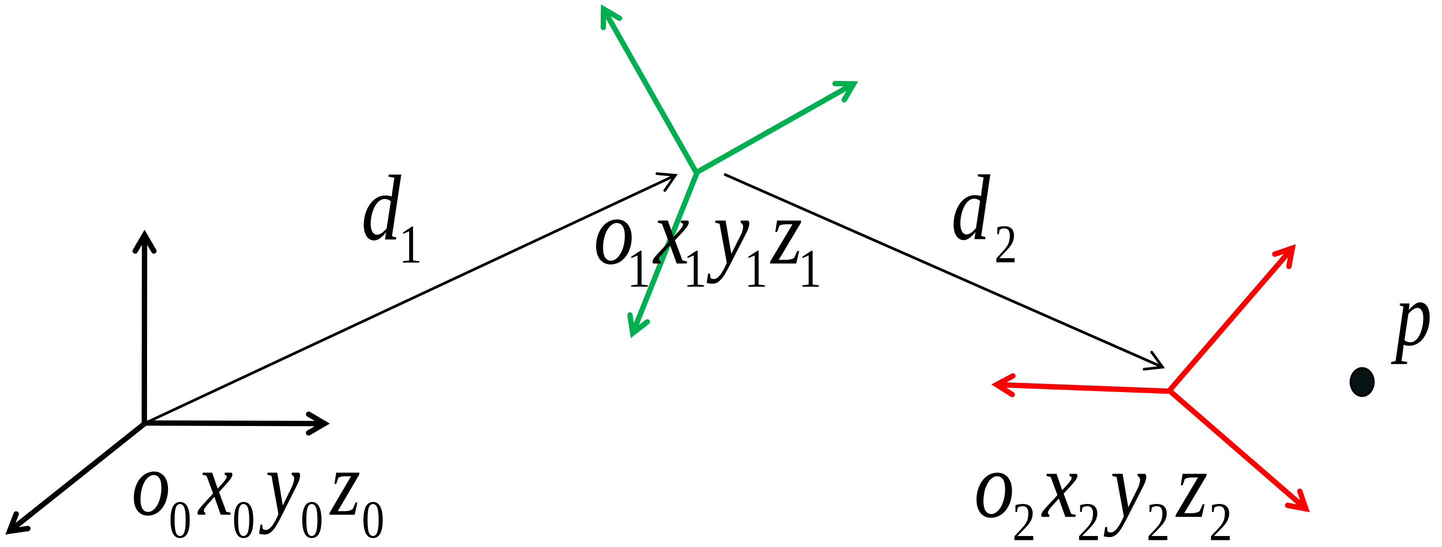
Cinemática da Posição

Notação de Devanit-Hartenberg

Prof. Dr. Alexandre S. Brandão
alexandre.brandao@ufv.br

Transformação Homogênea

- $p^1 = R_2^1 p^2 + d_2^1$
- $p^0 = R_1^0 p^1 + d_1^0$
- $p^0 = R_1^0 R_2^1 p^2 + R_1^0 d_2^1 + d_1^0$
- $p^0 = R_2^0 p^2 + d_2^0$, com $R_2^0 = R_1^0 R_2^1$ e $d_2^0 = R_1^0 d_2^1 + d_1^0$



Transformação Homogênea

$$\mathrm{Trans}_{x,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad Rot_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Trans}_{y,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad Rot_{y,\beta} = \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

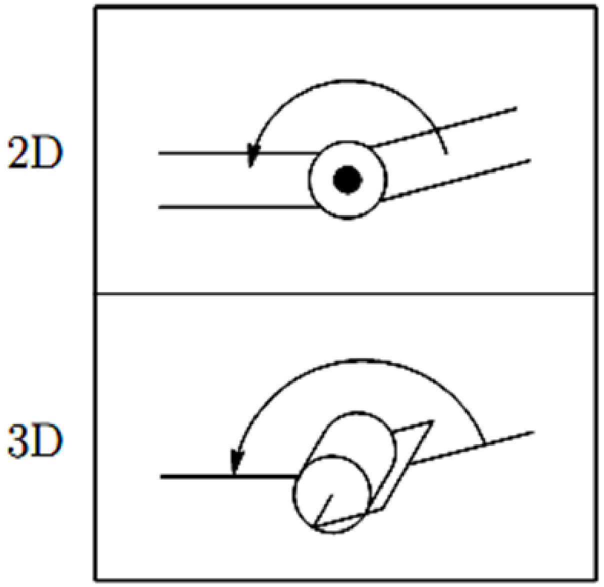
$$\mathrm{Trans}_{z,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad Rot_{x,\gamma} = \begin{bmatrix} c_\gamma & -s_\gamma & 0 & 0 \\ s_\gamma & c_\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

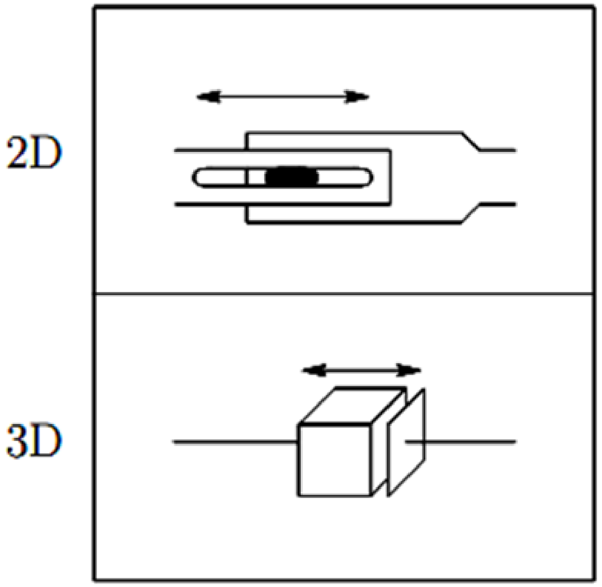
Exemplo: Encontre a matriz de transformação H que represente a rotação de α sobre o eixo corrente x seguido pela translação de b sobre o eixo corrente x, seguido de uma translação de d ao longo do eixo corrente z, seguido de uma rotação θ ao longo do eixo corrente z.

$$\begin{aligned} H &= Rot_{x,\alpha} Trans_{x,b} Trans_{z,d} Rot_{z,\theta} \\ &= \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 & b \\ c_\alpha s_\theta & c_\alpha c_\theta & -s_\alpha & -ds_\alpha \\ s_\alpha s_\theta & s_\alpha c_\theta & c_\alpha & dc_\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Cinemática Direta

- Problema da cinemática direta
  - Definir a posição (e orientação) do efetuador tomando como base o valor das variáveis das juntas individuais do manipulador
- Ângulo entre elos define uma junta rotacional
- Extensão de uma junta define uma junta prismática





Notação de Devanit-Hartenberg

- Representar uma transformação homogênea A_i para cada junta, por uma composição conjunta de quatro transformações básicas

$$A_i = Rot_{z,\theta_i}\mathrm{Trans}_{z,d_i}\mathrm{Trans}_{x,a_i}Rot_{x,\alpha_i}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

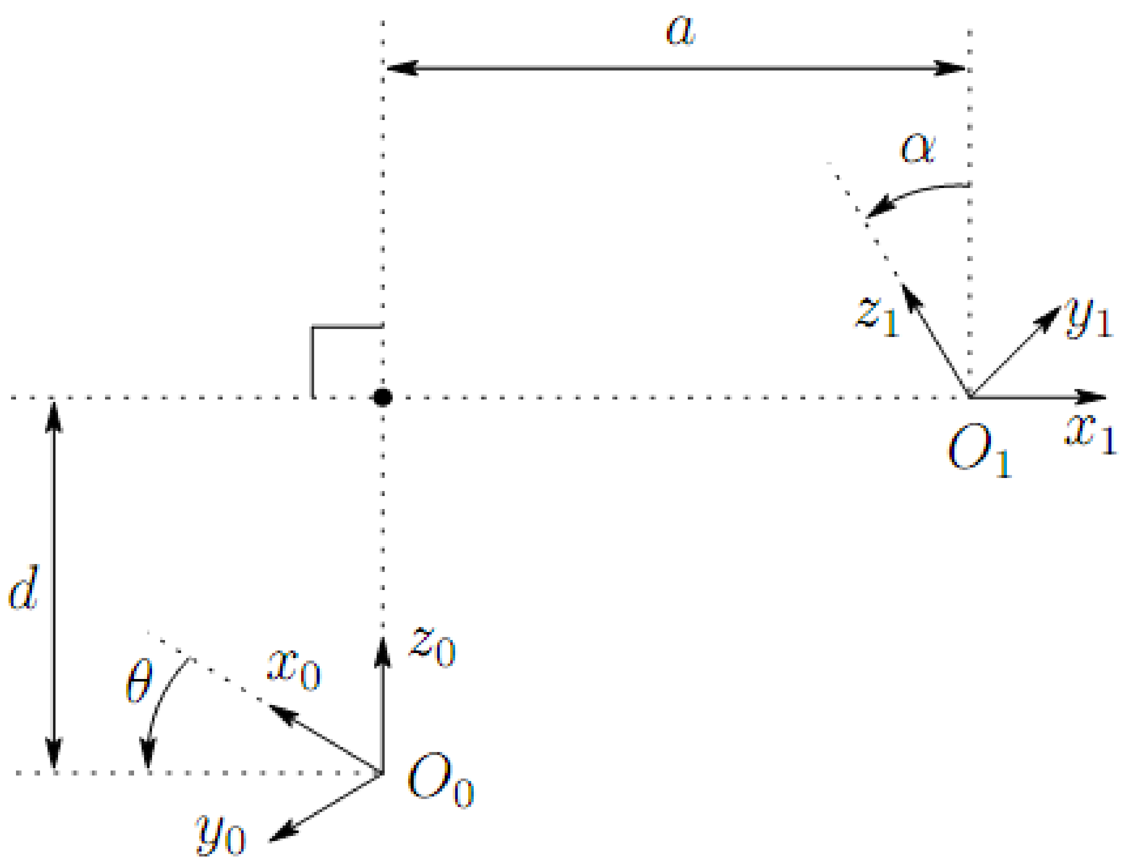
onde $a_i, d_i, \alpha_i, \theta_i$ são parâmetros de DH, que indicam o comprimento, a excentricidade, a torção e o ângulo de rotação da junta, respectivamente

Notação de Devanit-Hartenberg

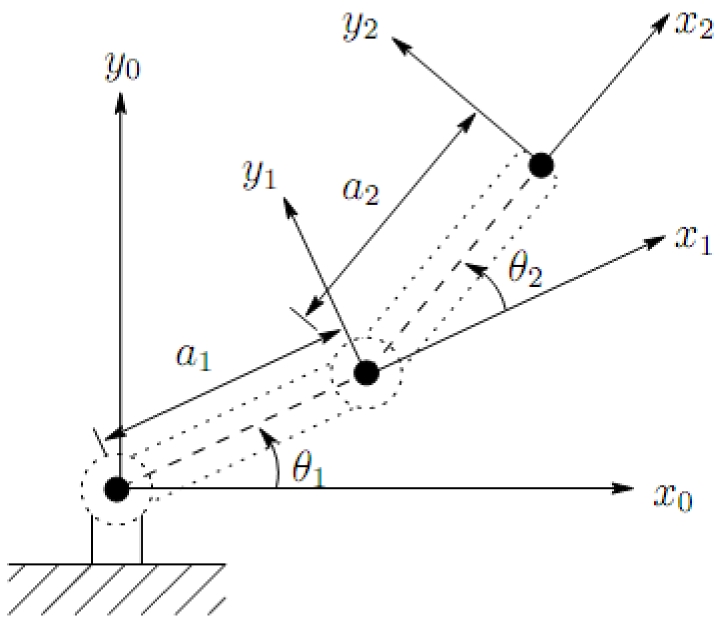
- Sabe-se que não é possível representar uma transformação homogênea arbitrária usando somente quatro parâmetros

$$A_i = Rot_{z,\theta_i} \mathrm{Trans}_{z,d_i} \mathrm{Trans}_{x,a_i} Rot_{x,\alpha_i}$$

- Daí, supõe-se que há uma única matriz de transformação A que leva o sistema de coordenadas 1 ao referencial 0, desde que
  - DH1: o eixo x_1 seja perpendicular ao eixo z_0
  - DH2: o eixo x_1 intercepte o eixo z_0



Manipulador Planar



Link	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1^*	0	a_1	0
2	θ_2^*	0	a_2	0

$$A_i = R_{z,\theta_i} T_{z,d_i} T_{x,a_i} R_{x,\alpha_i}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} c_{\alpha_i} & s_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

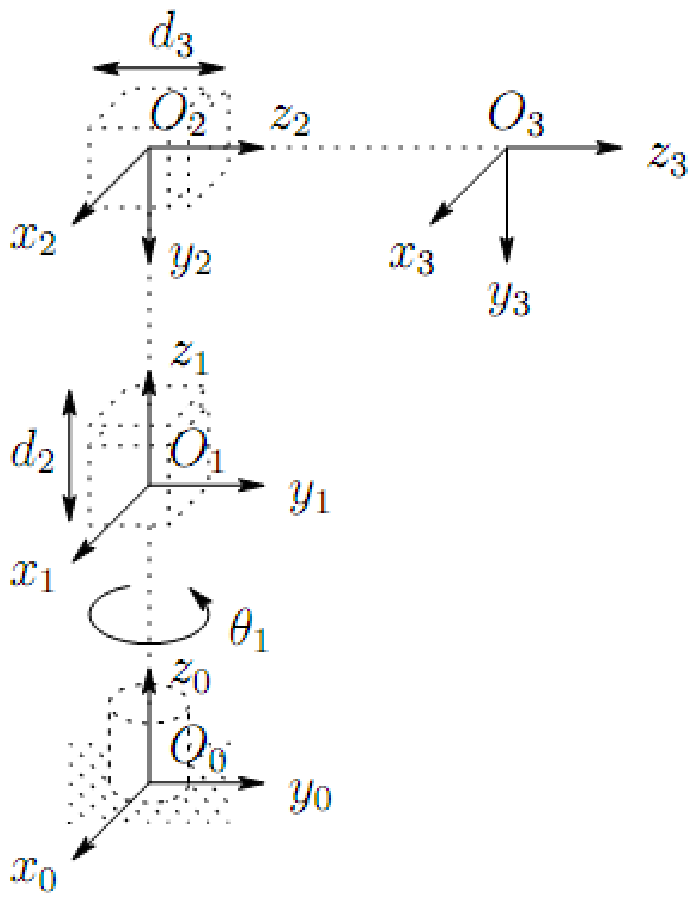
$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1^0 = A_1$$

$$T_2^0 = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipulador Planar



Link	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1^*	d_1	0	0
2	0	d_2^*	0	$-90°$
3	0	d_3^*	0	0

$$A_i = R_{z,\theta_i} T_{z,d_i} T_{x,a_i} R_{x,\alpha_i}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} c_{\alpha_i} & s_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & -s_1 d_3 \\ s_1 & 0 & c_1 & c_1 d_3 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$