Merikson Alves - 96708 - Lista do cap 4 do livro texto

4.1| Uma oscilação pode ser gerada por $\dot{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \vec{X}$. Mostre que a solução é $X(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{bmatrix} X(0)$

Usando teorema de Cayley-Hamilton, temos que:

$$\dot{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \vec{X} = \vec{A}\vec{X} \Rightarrow d(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ +1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda = \pm j \Rightarrow \boxed{n = 2}$$

$$h(\lambda) = \beta_0 + \beta_1 \lambda \quad e \quad f(\lambda) = e^{\lambda t}$$

$$\lambda = j \Rightarrow e^{jt} = \beta_0 + j\beta_1 \Rightarrow \beta_0 = e^{jt} - j\beta_1 \Rightarrow \beta_0 = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} = \boxed{\cos t}$$

$$\lambda = -j \Rightarrow e^{-jt} = \beta_0 - j\beta_1 \Rightarrow e^{-jt} = e^{jt} - j\beta_1 - j\beta_1 \Rightarrow \beta_1 = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} = \boxed{\operatorname{sen} t}$$

$$e^{At} = \cos t\, \vec{I} + \operatorname{sen} t\, \vec{A} = \begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix}$$

Então, $X(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix}$

4.2| Use dois métodos diferentes para encontrar a resposta ao degrau unitário de $\dot{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = [2 \;\; 3] \vec{X}$

Assumindo que o estado inicial é zero, temos:

método 1) $(s\vec{I} - \vec{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{s^2 + 2s + 2} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$

$$Y(s) = \vec{C}(s\vec{I} - \vec{A})^{-1} \vec{B} U(s) = [2 \;\; 3] \left(\frac{1}{s^2 + 2s + 2} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s} \right)$$

$$Y(s) = \frac{5s}{(s+1)^2 + 1} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} = \frac{5}{(s+1)^2 + 1}$$

Fazendo a inversa, encontramos

$$\mathcal{L}^{-1}\{ Y(s) \} = y(t) = 5 e^{-t} \sin(t) \quad \text{para } t \geq 0.$$

ELT 336

Método 2) Integral de convolução

$$Y(t) = \vec{C}\int_0^t e^{\vec{A}(t-\tau)}\vec{B}\,u(\tau)\,d\tau = [2\ 3]\int_0^t e^{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -2\end{bmatrix}(t-\tau)}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u(\tau)\,d\tau$$

$$= [2\ 3]\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -2\end{bmatrix}^{-1}(e^{\vec{A}t} - e^{\vec{0}})\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = [2\ 3]\begin{bmatrix}-1 & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t}\cos t + 2e^{-t}\operatorname{sen} t - 1\\ e^{-t}\cos t - 3e^{-t}\operatorname{sen} t - 1\end{bmatrix}$$

$$= [2\ 3]\begin{bmatrix}\dfrac{-3e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\operatorname{sen}(t) + 3}{2}\\ e^{-t}\cos(t) + 2e^{-t}\operatorname{sen}(t) - 1\end{bmatrix} \Rightarrow y(t) = 5e^{-t}\operatorname{sen}(t)$$

para $t \geq 0$.

4.4 Encontre a forma companheira e forma modal das equações equivalentes de

$$\dot{\vec{X}} = \begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -2\end{bmatrix}\vec{X} + \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}u \qquad y = [1\ -1\ 0]\vec{X}$$

Forma companheira) $Q = [b\ \ Ab\ \ A^2b] = \begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\ 0 & 2 & -4\\ 1 & -2 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow P = Q^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0.5 & 0.5 & -0.5\\ 0.25 & 0 & -0.25\end{bmatrix}$

$$\dot{\overline{\vec{X}}} = Q^{-1}\vec{A}\,Q\,\overline{\vec{X}} + Q^{-1}b\,u = \begin{bmatrix}0 & 0 & -4\\ 1 & 0 & -6\\ 0 & 1 & -4\end{bmatrix}\overline{X} + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u$$

$$y = \vec{C}\,Q\,\overline{\vec{X}} = [1\ -4\ 8]\,\overline{\vec{X}}$$

Forma modal) utilizando o MATLAB para o cálculo das matrizes, temos

[ab, bb, cb, db, P] = canon(a, b, c, d)

$$ab = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} \quad bb = \begin{bmatrix}-\sqrt{12}\\ 0\\ \sqrt{2}\end{bmatrix} \quad cb = \left[0\ \ -0.577\ \ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$db = [0]$$

$$P = \begin{bmatrix}-\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3}\\ 0 & \sqrt{3} & 0\\ \sqrt{2} & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Continuação da 4.4 - Forma modal

$$\dot{\bar{\vec{X}}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} -2\sqrt{3} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} U \qquad \vec{Y} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \vec{X}$$

4.5) Encontre uma equação de estado equivalente da equação do problema 4.4 de modo que todas as variáveis de estado tenham suas maiores magnitudes aproximadamente iguais à maior magnitude da saída. Se todos os sinais devem estar dentro de ± 10 Volts e se a entrada for uma função degrau com magnitude a, qual é o maior a permitido?

$$\dot{\vec{X}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \vec{X}$$

Usando o matlab para calcular a resposta ao impulso, temos:

$$|y|_{max} = 0.55, \ |X_1|_{max} = 0.5, \ |X_2|_{max} = 1.05, \ |X_3|_{max} = 0.52$$

Sendo $\bar{X}_1 = X_1$, $\bar{X}_2 = 0.5 X_2$, $\bar{X}_3 = X_3$ $\Rightarrow \bar{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{X} = \vec{P}\vec{X} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{\bar{X}} = P A P^{-1} \bar{X} + Pb\, u \\ y = C P^{-1} \bar{X} + 0\, u \end{cases} \Rightarrow \dot{\bar{\vec{X}}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \bar{X} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \bar{X}$$

Para esta equação o maior valor de a permitido é $\frac{10}{0.55} = 18.18$

4.8) São dois conjuntos de equações de estado $\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$ $\vec{y} = [1 \ -1 \ 0]\vec{x}$ e $\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$ $\vec{y} = [1 \ -1 \ 0]\vec{x}$ equivalentes?

Eles são equivalentes no estado zero?

$$g_1(s) = \vec{C}(s\vec{I} - \vec{A})^{-1}\vec{B} = [1 \ -1 \ 0] \begin{bmatrix} s-2 & -1 & -2 \\ 0 & s-2 & -2 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{[1 \ -1 \ 0]}{(s-2)^2(s-1)} \begin{bmatrix} (s-2)(s-1) & (s-1) & 2(s-1) \\ 0 & (s-2)(s-1) & 2(s-2) \\ 0 & 0 & (s-2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$g_1(s) = \frac{[1 \ -1 \ 0]}{(s-2)^2(s-1)} \begin{bmatrix} (s-1)(s-1) \\ (s-2)(s-1) \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{(s-1)^2 - (s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)^2} = \frac{s-1-s+2}{(s-2)^2} = \frac{1}{(s-2)^2}$$

$$g_2(s) = \vec{C}(s\vec{I} - \vec{A})^{-1}\vec{B} = [1 \ -1 \ 0] \begin{bmatrix} s-2 & -1 & -1 \\ 0 & s-2 & -1 \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{[1 \ -1 \ 0]}{(s-2)^2(s+1)} \begin{bmatrix} (s-2)(s+1) & (s+1) & (s-1) \\ 0 & (s-2)(s+1) & (s-2) \\ 0 & 0 & (s-2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$g_2(s) = \frac{[1 \ -1 \ 0]}{(s-2)^2(s+1)} \begin{bmatrix} (s+1)(s-1) \\ (s-2)(s+1) \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{(s+1)(1)}{(s-2)^2(s+1)} = \frac{1}{(s-2)^2}$$

Como $g_1(s) = g_2(s)$, temos que as equações são equivalentes no estado zero, porém elas não são equivalentes.

4.9) Verifique se a matriz de transferência em (4.33) tem a seguinte realização:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 \vec{I}_q & \vec{I}_q & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_2 \vec{I}_q & 0 & \vec{I}_q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1} \vec{I}_q & 0 & 0 & \cdots & I_q \\ \alpha_n \vec{I}_q & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \\ \vdots \\ \vec{N}_{n-1} \\ \vec{N}_n \end{bmatrix} \vec{u} \qquad \vec{y} = [\vec{I}_q \ 0 \ 0 \cdots 0]\vec{x}$$

Isso é chamado de realização de forma canonica observável, tem dimensão nq. É dual de 4.34.

Definindo, $\vec{C}(s\vec{I} - \vec{A})^{-1} = [Z_1 \ Z_2 \ldots Z_n]$, então $\vec{C} = [Z_1 \ Z_2 \ldots Z_n](s\vec{I} - \vec{A})$

obtemos, $sZ_i = AZ_{i-1}$, $i = 2 \ldots n \Rightarrow Z_i = \frac{Z_{i-1}}{s}$, $i = 2 \ldots n$

$sZ_1 = I_q - \sum_{i=1}^{n} Z_i \alpha_i = I_q - \sum_{i=1}^{n} \frac{Z_1 \alpha_i}{s^{i-1}}$ então $Z_1 = \frac{s^{n-1}}{d(s)} I_q$, $Z_2 = \frac{s^{n-2}}{d(s)} I_q, \ldots, Z_n = \frac{1 I_q}{d(s)}$

então $\vec{C}(s\vec{I} - \vec{A})^{-1}\vec{B} = \frac{1}{d(s)}(s^{n-1}N_1 + \cdots + N_n) \rightarrow$ Satisfazendo a eq. 4.33

4.11 Encontre uma realização para a matriz racional adequada

$$\vec{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{2s-3}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{s-2}{s+1} & \frac{s}{s+2} \end{bmatrix} \quad G(\infty) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow G(s) = \underbrace{G(\infty)}_{D} + \underbrace{G_{sp}(s)}_{C(sI-A)^{-1}B}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{2s-3}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-3}{s+1} & \frac{-2}{s+2} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad d(s) = (s+2)(s+1) = s^2+3s+2$$

$$= \frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} 2(s+2) & 2s-3 \\ -3(s+2) & -2(s+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\left(s\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\dot{\vec{X}} = \left[\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]\vec{X} + \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]\vec{U} \quad e \quad \vec{y}(t) = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 4 & -3 \\ -3 & -2 & -6 & -2 \end{array}\right]\vec{X} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\vec{U}$$

4.14 Encontre a realização para $G(s) = \begin{bmatrix} \frac{-(12s+6)}{3s+34} & \frac{22s+23}{3s+34} \end{bmatrix}$

$$G(\infty) = D = \begin{bmatrix} -4 & \frac{22}{3} \end{bmatrix} \qquad d(s) = 3s+34$$

$$G_{sp}(s) = C(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{130}{3s+34} & \frac{-679}{3(3s+34)} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1}{s+\frac{34}{3}}\begin{bmatrix} \frac{130}{3} & -\frac{679}{9} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & \frac{22}{3} \end{bmatrix} =$$

$$\dot{\vec{X}} = \begin{bmatrix} -\frac{34}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{34}{3} \end{bmatrix}\vec{X} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\vec{U}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{130}{3} & -\frac{679}{9} \end{bmatrix}\vec{X} + \begin{bmatrix} -4 & \frac{22}{3} \end{bmatrix}\vec{U}$$