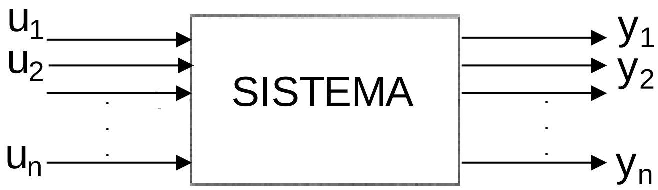
ELT330 – Sistemas de Controle I
Prof. Tarcísio Pizziolo

Aula 9 - Variáveis de Estado

1. Teoria de Controle Moderno
A teoria de controle moderno fundamenta-se na condição de que o sistema a ser controlado possua várias entradas e várias saídas, podendo então ser modelado por **Variáveis de Estado**.

O diagrama de bloco a seguir ilustra o conceito de um sistema de várias entradas e várias saídas.

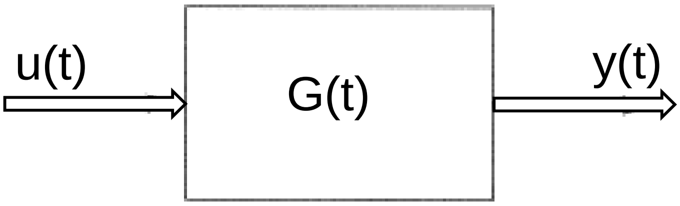


A teoria de controle moderno contrasta com a teoria de controle clássico no sentido de que a primeira é aplicável a sistemas com entradas e saídas múltiplas, lineares ou não-lineares, variantes ou invariantes no tempo, enquanto a última é aplicável apenas aos sistemas monovariáveis (uma única entrada e uma única saída), lineares e invariantes no tempo.

Também deve-se considerar que na teoria de controle moderno pode-se considerar as condições iniciais do sistema, o que na teoria de controle clássico não se pode considerar, pois trabalha-se com função de transferência onde as condições iniciais devem ser nulas.

A teoria de controle moderno é uma abordagem centrada no conceito de estado, essencialmente no domínio do tempo, enquanto a teoria de controle clássico adota um enfoque no domínio de frequência complexa.

O diagrama de bloco a seguir ilustra o conceito de um sistema de várias entradas e várias saídas apresentando um vetor u(t) de entradas e um vetor y(t) de saídas.



2. Variáveis de estado

2.1. Definições
As variáveis de estado de um sistema dinâmico são as grandezas cujo conjunto de valores determina o estado do sistema no domínio do tempo. Se forem necessárias pelo menos ***n*** variáveis, $x_1, x_2, ..., x_n$, para descrever completamente o comportamento de um sistema, então tais ***n*** variáveis são um conjunto de variáveis de estado.

2.2. Vetor de estado
Se ***n*** variáveis de estado são necessárias para descrever completamente o comportamento de um dado sistema, então estas ***n*** variáveis de estado podem ser consideradas as ***n*** componentes de um vetor ***x***. Este vetor ***x*** é denominado ***vetor de estado***.

Um vetor de estado é, portanto, um vetor que determina univocamente o ***estado x(t)*** do sistema para qualquer instante $t \geq t_0$, uma vez conhecidos o estado em $t = t_0$ e a função de entrada ***u(t)*** para $t \geq t_0$. Assim,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{x}$$

2.3. *Espaço de estados*

O espaço ***n***-dimensional cujos eixos coordenados consistem nos eixos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é chamado espaço de estados. Qualquer estado pode ser representado por um ponto no espaço de estados.

2.4. *Equações no espaço de estados*

A análise no espaço de estados envolve três tipos de variáveis na modelagem de sistemas dinâmicos: ***variáveis de entrada***, ***variáveis de estado*** e ***variáveis de saída***. A representação de um dado sistema no espaço de estados não é única, exceto que o número de variáveis de estado é o mesmo para qualquer das diferentes representações do sistema em análise.

Um sistema dinâmico deve envolver elementos que memorizem os valores da entrada para $t \geq t_1$. Os integradores em um sistema de controle contínuo servem como dispositivos de memória, as saídas destes podem ser consideradas como as variáveis que definem o estado do sistema. Assim, as saídas dos integradores servem como "**variáveis de estados**".

2.5. Equações de estado

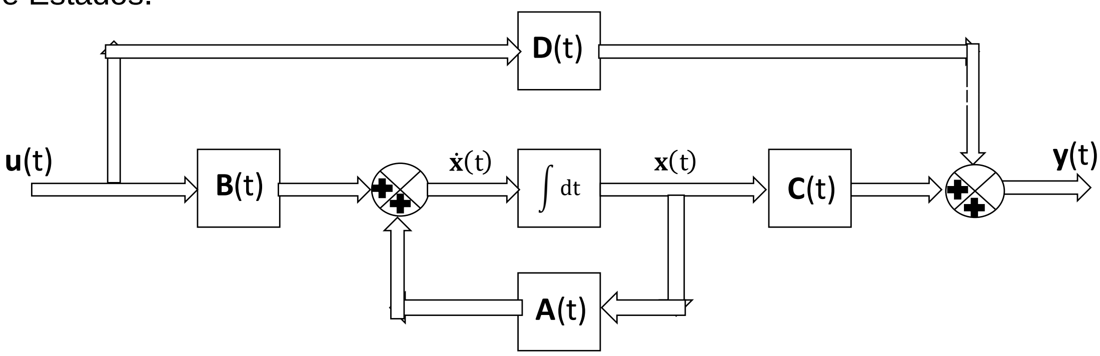
As equações de estado de um sistema são um conjunto de ***n*** equações diferenciais de primeira ordem, onde ***n*** é o número de variáveis de estado independentes.

As equações de estado são expressas em notação matricial como,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Onde **A** é dita matriz de estado, **B** é a matriz de entrada, **C** é a matriz de saída e **D** é a matriz de transmissão direta.

O Diagrama de Blocos a seguir ilustra um sistema modelado em Espaço de Estados.



No diagrama acima as setas significam que os sinais são grandezas vetoriais. Neste sistema a saída **y**(t) para $t \geq t_1$ depende do valor **y**(t_1) e da entrada **u**(t) para $t \geq t_1$.

Seja um sistema de múltiplas entradas e múltiplas saídas envolvendo **n** integradores. Assim tem-se,

r entradas sendo o vetor $\mathbf{u_r}(t) = [u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t)]^t$

m saídas sendo o vetor $\mathbf{y_m}(t) = [y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)]^t$

n saídas dos integradores sendo o vetor $\mathbf{x_n}(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]^t$

Para avaliar a dinâmica de um sistema deve-se determinar a variação de cada variável de estado $x_n(t)$ no tempo. Então faz-se,

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = \dot{x}_n(t)$$

Utilizando a notação anterior pode-se escrever,

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \end{cases}$$

As saídas $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)$ serão

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ y_2(t) = g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ \vdots \\ y_m(t) = g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \end{cases}$$

Definindo-se,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} ; \quad f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} ; \quad g(x, u, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ \vdots \\ fg_m(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

Pode-se simplificar e escrever

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \Longrightarrow \text{Equação de Estados}$$
$$\mathbf{y}(t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \Longrightarrow \text{Equação de Saída}$$

Para sistemas invariantes no tempo pode-se escrever,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$
$$\mathbf{y}(t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

Linearizando-se as equações obtemos,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

Onde:

A = Matriz de estado
B = Matriz de entrada
C = Matriz de saída
D = Matriz de transmissão direta

Deve-se então escolher as variáveis de estado que irão representar as variáveis a serem analisadas no sistema.

Por exemplo, o vetor de estado **x**(t) em um circuito onde se quer avaliar a variação no tempo da corrente e da tensão em determinados elementos pode ser,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

Por meio das equações diferenciais ordinárias lineares que descrevem as relações tensão/corrente no circuito, determinam-se as matrizes A, B, C e D. Assim, pode-se ter,

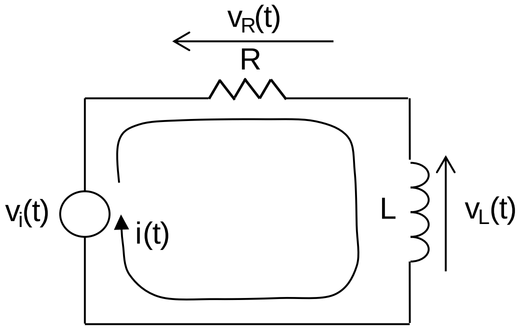
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{31} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{31} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{bmatrix}$$

Desta forma pode-se ter as seguintes Equações de Espaço de Estados,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overbrace{\begin{bmatrix} i(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix}}^{\dot{\mathbf{x}}(t)} = \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{31} \end{bmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{bmatrix} i(t) \\ v(t) \end{bmatrix}}^{\mathbf{x}(t)} + \overbrace{\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}}^{B} \overbrace{[u(t)]}^{\mathbf{u}(t)} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{31} \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} i(t) \\ v(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{[u(t)]}_{\mathbf{u}(t)} \end{cases}$$

Exemplo: Obter as Equações de Espaço de Estados do circuito RL série dado. Considerar como entrada a tensão $v_i(t)$ da fonte e a saída como sendo a corrente i(t) no circuito.



$$v_R(t) = Ri(t)$$

$$v_L = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$v_i(t) = v_R(t) + v_L(t) \Longrightarrow v_i(t) = Ri(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} \Longrightarrow \boxed{\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) + \frac{1}{L}v_i(t)}$$

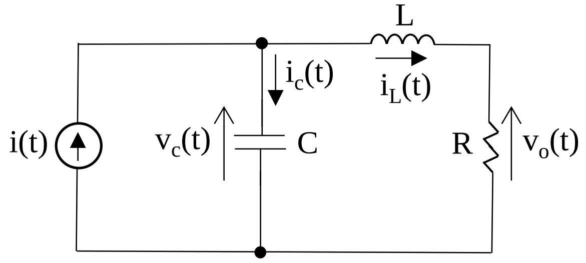
Definindo as variáveis de estado como sendo $x_1(t) = i(t)$ e a entrada $u(t) = v_i(t)$,

$$\left[\frac{di_L(t)}{dt}\right] = \left[-\frac{R}{L}\right][i_L(t)] + \left[\frac{1}{L}\right][v_i(t)]$$

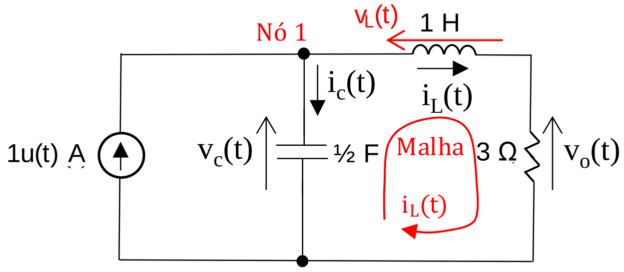
ou

$$[\dot{x}_1(t)] = \left[-\frac{R}{L}\right][x_1(t)] + \left[\frac{1}{L}\right][u(t)]$$

Exemplo: Seja o circuito RLC com R = 3 Ω, L = 1 H e C = ½ F. A entrada é a fonte de corrente i(t) = 1u(t) A (degrau unitário), portanto, as condições iniciais para o circuito são nulas, ou seja, $i_L(0) = 0$ e $v_c(0) = 0$,



Obter as Equações de Espaço de Estados considerando $v_o(t)$ como a saída do circuito.
Aplicando as Leis de kirchhoff (LKC e LKT)



LKC no Nó 1:

$$1 = i_c(t) + i_L(t) \Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt} + i_L(t) = 1$$

LKT na Malha:

$$v_c(t) = v_L(t) + v_R(t) \Longrightarrow v_c(t) = 1\frac{di_L(t)}{dt} + 3i_L(t)$$

Entrada: $u(t) = i(t) = 1u(t)$ A
Variáveis de estado: $x_1(t) = v_c(t)$ e $x_2(t) = i_L(t)$
Saída: $y(t) = v_o(t) = 3i_L(t)$ V

Substituindo as variáveis de estado, a entrada e a saída nas equações de Kirchhoff tem-se,

LKC no Nó 1:

$$\frac{dv_c}{dt} = 2 - 2i_L(t) \Longrightarrow \boxed{\dot{x}_1 = 0x_1 - 2x_2 + 2u(t)}$$

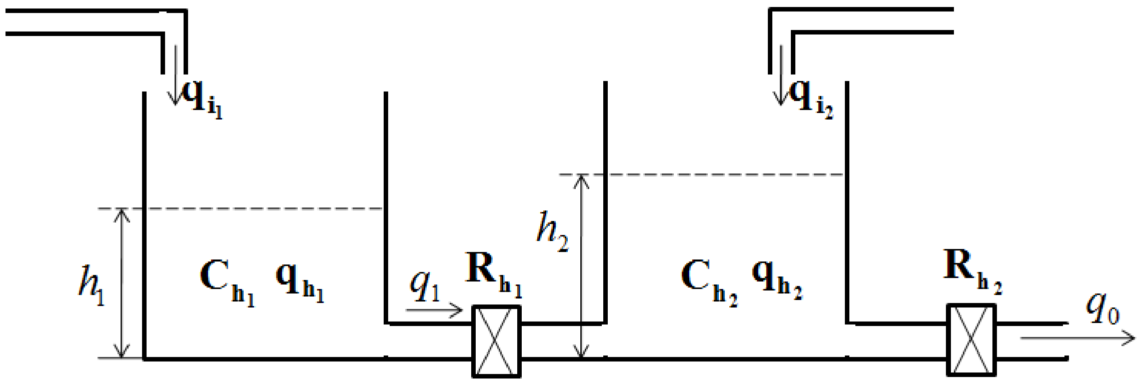
LKT na Malha:

$$\frac{di_L(t)}{dt} = -3i_L(t) + v_c(t) \Longrightarrow \boxed{\dot{x}_2 = x_1 - 3x_2 + 0u(t)}$$

Daí,

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} [u(t)] \\ [y(t)] = [0 \quad 3] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u(t)] \end{cases}$$

Exemplo: Seja o sistema de controle de nível dado a seguir.



Considere que $h_1(0) = 0$, $h_2(0) = 0$, $R_{h1} = 1\ s/m^2$, $R_{h2} = 2\ s/m^2$, $C_{h1} = 0{,}5\ m^2$ e $C_{h2} = 0{,}5\ m^2$. Determine as Equações de Espaço de Estados para o sistema.

Equações para o sistema:

$$\begin{cases} q_{i1} = C_{h1}\dfrac{dh_1}{dt} + q_1 \quad e \quad q_1 = \dfrac{(h_1 - h_2)}{R_{h1}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Tanque} \quad 1 \\ q_{i2} = C_{h2}\dfrac{dh_2}{dt} + q_1 + q_0) \quad e \quad q_0 = \dfrac{h_2}{R_{h2}} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Tanque} \quad 2 \end{cases}$$

Realizando as devidas substituições e rearranjando as equações temos que:

$$\begin{cases} \dfrac{dh_1}{dt} = -\dfrac{1}{R_{h1}.C_{h1}}.h_1 + \dfrac{1}{R_{h1}.C_{h1}}.h_2 + \dfrac{1}{C_{h1}}.q_{i1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I) \\ \dfrac{dh_1}{dt} = \dfrac{1}{R_{h1}.C_{h2}}.h_1 - \left(\dfrac{1}{R_{h_1}.C_{h2}} + \dfrac{1}{R_{h_2}.C_{h2}}\right).h_2 + \dfrac{1}{C_{h2}}.q_{i2} \ldots\ldots\ldots (II) \end{cases}$$

- Definindo as variáveis de estado como sendo: $x_1 = h_1$ e $x_2 = h_2$.
- Definido as entradas com sendo: $u_1 = q_{i1}$ e $u_2 = q_{i2}$.
- Definido as saídas com sendo: $y_1 = h_1$ e $y_2 = h_2$.

As Equações de Espaço de Estados serão:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_{h1}C_{h1}} & \dfrac{1}{R_{h1}C_{h1}} \\ \dfrac{1}{R_{h1}C_{h2}} & -\left(\dfrac{1}{R_{h1}C_{h2}} + \dfrac{1}{R_{h2}C_{h2}}\right) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C_{h1}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{C_{h2}} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Substituindo os valores de R_{h1}, R_{h2}, C_{h1} e C_{h2}:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$