ELT330 – Sistemas de Controle I

Prof. Tarcísio Pizziolo

Aula 3 – Sistemas Análogos

1. Sistemas Análogos

Quando efetuamos a análise de um sistema linear, o procedimento matemático para obtenção das soluções, a partir de um conjunto de equações íntegro-diferenciais, não depende da natureza do sistema em si. As equações que descrevem um dado sistema descrevem sempre outros sistemas de natureza diferente, havendo, pois, uma analogia entre as equações e as soluções de um e de outro sistema.

Assim, definimos **sistemas análogos como sendo sistemas físicos, de qualquer natureza, que são descritos pela mesma equação ou conjunto de equações íntegro-diferenciais**.

Assim, os **sistemas análogos caracterizam-se por apresentarem a mesma forma de resposta quando submetidos a excitações do mesmo tipo**. Esse fato é de extrema importância, pois permite, nas fases de análise e projeto, trabalhar experimentalmente com um circuito elétrico (mais barato) análogo do sistema que está sendo projetado, antes da implementação do protótipo do mesmo.

Geralmente fazemos também distinção, apenas por conveniência, entre sistemas de 1ª ordem (definidos por equações diferenciais de 1ª ordem) e sistemas de 2ª ordem (definidos por equações diferenciais de 2ª ordem).

2. Analogia de Sistemas

A analogia de sistemas com sistemas elétricos facilita a análise e a modelagem por meio de equações diferenciais, e consequentemente, pelas funções de transferência e espaço de estados.

Estudaremos as analogias de sistemas mecânicos de translação e rotação, sistemas hidráulicos e sistemas térmicos.

3. Circuitos Elétricos Análogos aos Sistemas Mecânicos

Os sistemas mecânicos podem ser representados por circuitos elétricos denominados circuitos análogos. Esta analogia pode ser realizada pelo fato de que as equações que relacionam as forças e os torques com os deslocamentos e as velocidades nos elementos dos sistemas mecânicos são as mesmas equações que relacionam as tensões e as correntes nos elementos dos circuitos elétricos. Nesta analogia de sistemas mecânicos com circuitos elétricos o que são alteradas são as constantes das equações diferenciais ordinárias lineares. Estas constantes são determinadas em função da equação diferencial que relaciona as variáveis nos dois sistemas. O quadro a seguir apresenta estas equações.

Análogos Translacionais elétricos	
$f \sim i$	$f \sim e$
$v \sim e$	$v \sim i$
$M \sim C$	$M \sim L$
$B \sim G$	$B \sim R$
$K \sim \frac{1}{L}$	$K \sim \frac{1}{C}$

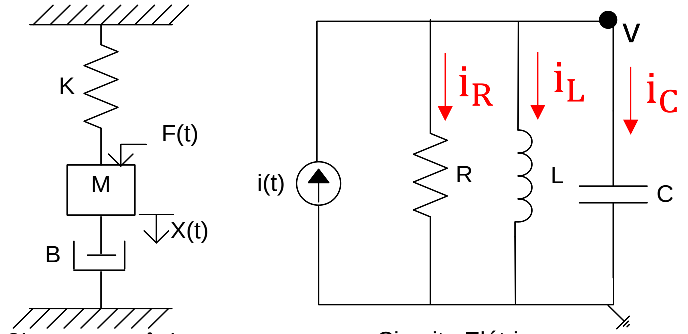
Análogos rotacionais elétricos	
$\tau \sim i$	$\tau \sim e$
$\omega_r \sim e$	$\omega_r \sim i$
$J \sim C$	$J \sim L$
$B_r \sim G$	$B_r \sim R$
$K_r \sim \frac{1}{L}$	$K_r \sim \frac{1}{C}$

3.1 Analogias para Sistemas Mecânicos de Translação

3.1.1 Analogia Força – Corrente elétrica (F~i)

Nesta analogia a **força** no sistema mecânico de translação é considerada análoga à **corrente** elétrica, e por sua vez, a **velocidade linear** (ou deslocamento linear) no sistema mecânico será considerada análoga a **tensão** elétrica no circuito análogo.

Por exemplo, vamos considerar o sistema **massa-mola-amortecedor** com um grau de liberdade (GDL) e o sistema elétrico **resistor-indutor-capacitor** paralelo (RLC paralelo) mostrados na figura a seguir.



Sistema mecânico   Circuito Elétrico

As equações matemáticas que descrevem o sistema mecânico de translação e o circuito elétrico são dadas pelas equações a seguir.

Sistema Mecânico	Sistema Elétrico
$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = F(t)$ ou em termos da velocidade V: $M\dfrac{dV}{dt} + BV + K\int Vdt = F(t)$	$C\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{v}{R} + \dfrac{1}{L}\int vdt = i(t)$, onde o v (minúsculo) é a tensão v do circuito em relação à terra.

Examinando as equações dos dois modelos matemáticos, verificamos que os elementos mecânicos podem então ser substituídos pelos elementos elétricos os quais possuam as mesmas equações diferenciais nas relações. O quadro a seguir apresenta estas relações.

Analogia Força - Corrente
$F_M = M\dfrac{dV}{dt} \quad \Rightarrow \quad i_C = C\dfrac{dv}{dt}$
$F_B = BV \quad \Rightarrow \quad i_R = Gv = \dfrac{1}{R}v$
$F_K = K\int Vdt \quad \Rightarrow \quad i_L = \dfrac{1}{L}\int vdt$

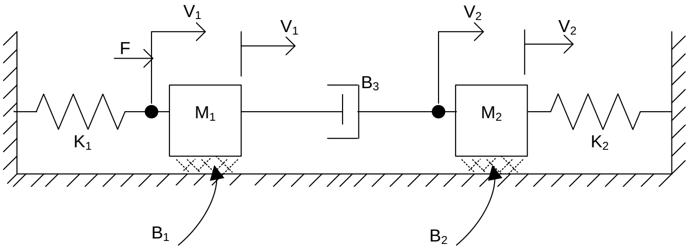
Assim, nota-se que a **Massa M** é análoga à **Capacitância C**, que o **Coeficiente de Atrito Viscoso B** é análogo à **Condutância G** e que a **Constante de Elasticidade K** da **Mola** é análoga ao **inverso da indutância L**.

Obtenção do Circuito Elétrico Análogo por Inspeção da Analogia F~i

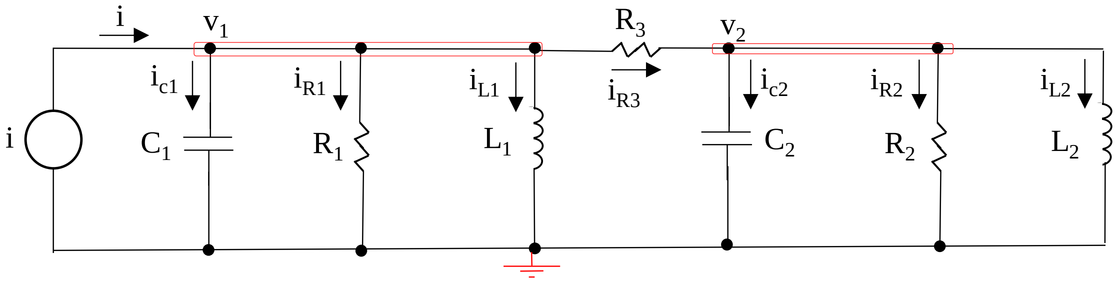
Observando a figura anterior, podemos observar que é possível construir circuitos elétricos análogos aos mecânicos de translação por inspeção.

Uma dica importante na analogia **Força – Corrente (F~i)**, é que, para construir o circuito elétrico análogo deve-se **conectar em paralelo os terminais dos elementos que possuem os mesmos deslocamentos (ou velocidades).** Escreve-se então a equação diferencial para cada nó.

Exemplo: Dado o sistema mecânico de translação abaixo, construir o circuito elétrico análogo utilizando a analogia Força-Corrente (F~i).



Circuito elétrico análogo com a analogia Força-Corrente (velocidade – tensão)



Equações elétricas análogas

$$\begin{cases} i = i_{c1} + i_{R1} + i_{L1} + i_{R3} \\ i_{R3} = i_{c2} + i_{R2} + i_{L2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = C_1 \dfrac{dv_1}{dt} + \dfrac{v_1}{R_1} + \dfrac{1}{L_1} \displaystyle\int v_1 dt + \dfrac{(v_1 - v_2)}{R_3} \\ \dfrac{(v_1 - v_2)}{R_3} = C_2 \dfrac{dv_2}{dt} + \dfrac{v_2}{R_2} + \dfrac{1}{L_2} \displaystyle\int v_2 dt \end{cases}$$

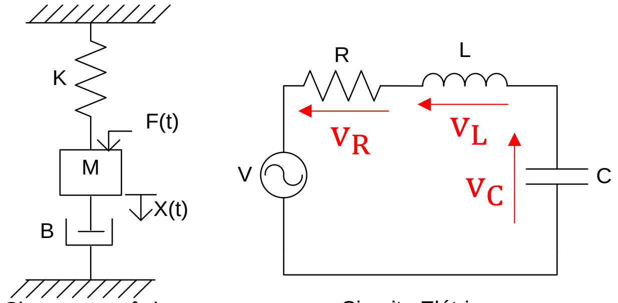
Derivando e rearranjando as equações

$$\begin{cases} C_1 \dfrac{d^2 v_1}{dt^2} + \dfrac{1}{R_1}\dfrac{dv_1}{dt} + \dfrac{1}{L_1} v_1 + \dfrac{1}{R_3}\dfrac{dv_1}{dt} - \dfrac{1}{R_3}\dfrac{dv_2}{dt} = \dfrac{di}{dt} \\ C_2 \dfrac{d^2 v_2}{dt^2} + \dfrac{1}{R_2}\dfrac{dv_2}{dt} + \dfrac{1}{L_2} v_2 = \dfrac{1}{R_3}\dfrac{dv_1}{dt} - \dfrac{1}{R_3}\dfrac{dv_2}{dt} \end{cases}$$

3.1.2 Analogia Força – Tensão elétrica (f~v)

Nesta analogia a **força** no sistema mecânico de translação é considerada análoga à **tensão** elétrica, e por sua vez, a **velocidade linear** (ou deslocamento linear) no sistema mecânico de translação será considerada análoga à **corrente** elétrica no circuito análogo.

Os elementos mecânicos devem ser substituídos pelos elementos elétricos os quais possuam as mesmas equações diferenciais nas relações. Por exemplo, vamos considerar o mesmo sistema **massa-mola-amortecedor** com um grau de liberdade (GDL) e o sistema elétrico **resistor-indutor-capacitor** série (RLC série) mostrados na figura a seguir.



Sistema mecânico Circuito Elétrico

As equações matemáticas dos sistemas mecânicos de translação e elétrico são dadas pelas equações a seguir.

Sistema Mecânico	Sistema Elétrico
$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = F(t)$ ou em termos da velocidade V: $M\dfrac{dV}{dt} + BV + K\int Vdt = F(t)$	$L\dfrac{di}{dt} + Ri + \dfrac{1}{C}\int idt = v(t)$, onde o v (minúsculo) é a tensão do circuito e i é a corrente que circula na malha.

Pelas equações obtidas podemos facilmente estabelecer as quantidades análogas aos dois sistemas. O quadro a seguir apresenta as relações.

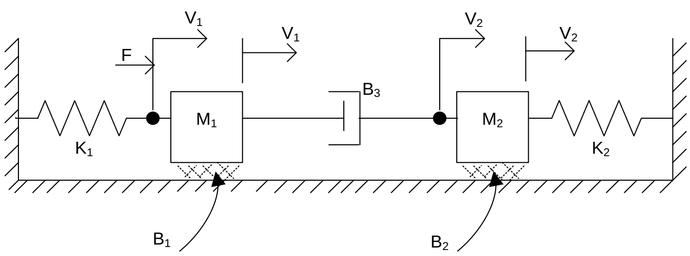
Analogia Força - Tensão
$F_M = M\dfrac{dV}{dt} \implies v_L = L\dfrac{di}{dt}$
$F_B = BV \implies v_R = Ri$
$F_K = K\int Vdt \implies v_C = \dfrac{1}{C}\int idt$

Neste caso, nota-se que a **Massa M** é análoga à **Indutância L,** que o **Coeficiente de Atrito Viscoso B** é análogo à **Resistência R** e que a **Constante de Elasticidade K** é análoga ao **inverso da capacitância C**.

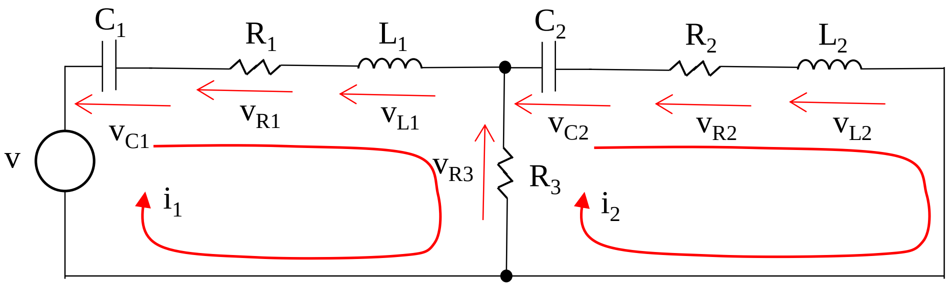
Obtenção do Circuito Elétrico Análogo por Inspeção da Analogia F~v

Uma dica importante na analogia Força – Tensão (F~v), é que, para construir o circuito elétrico análogo deve-se **conectar em série os elementos que possuem os mesmos deslocamentos (ou velocidades)**. Escreve-se então a equação diferencial para cada malha.

Exemplo: Dado o sistema mecânico de translação abaixo, construir o circuito elétrico análogo utilizando a analogia Força-Tensão.



Circuito elétrico análogo com a analogia Força-Tensão (velocidade – corrente).



Equações elétricas análogas

$$\begin{cases} v = v_{c1} + v_{R1} + v_{L1} + v_{R3} \\ v_{R3} = v_{c2} + v_{R2} + v_{L2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \dfrac{1}{c_1}\displaystyle\int i_1 dt + R_1 i_1 + L_1 \dfrac{di_1}{dt} + R_3(i_1 - i_2) \\ R_3(i_1 - i_2) = \dfrac{1}{c_2}\displaystyle\int i_2 dt + R_2 i_2 + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$

Derivando e rearranjando as equações

A destreza em transformar circuitos mecânicos em seus análogos elétricos dependerá da resolução de um número razoável de exercícios.

$$\begin{cases} L_1 \dfrac{d^2 i_1}{dt^2} + (R_1 + R_3)\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{1}{c_1} i_1 - R_3 \dfrac{di_2}{dt} = \dfrac{dv}{dt} \\ L_2 \dfrac{d^2 i_2}{dt^2} + (R_2 + R_3)\dfrac{di_2}{dt} + \dfrac{1}{c_2} i_2 - R_3 i_1 = 0 \end{cases}$$

3.2 Analogias para Sistemas Mecânicos de Rotação

3.2.1 Analogia Torque – Corrente elétrica (t~i)

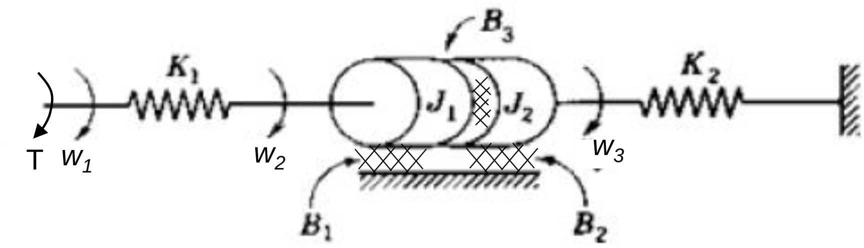
Nesta analogia o **torque de inércia** no sistema mecânico de rotação é considerado análogo à **corrente** elétrica, e por sua vez, a **velocidade angular** (ou deslocamento angular) no será considerada análoga a **tensão** elétrica no circuito análogo.

Os elementos mecânicos devem ser substituídos pelos elementos elétricos os quais possuam as mesmas equações diferenciais nas relações. O quadro a seguir apresenta estas relações.

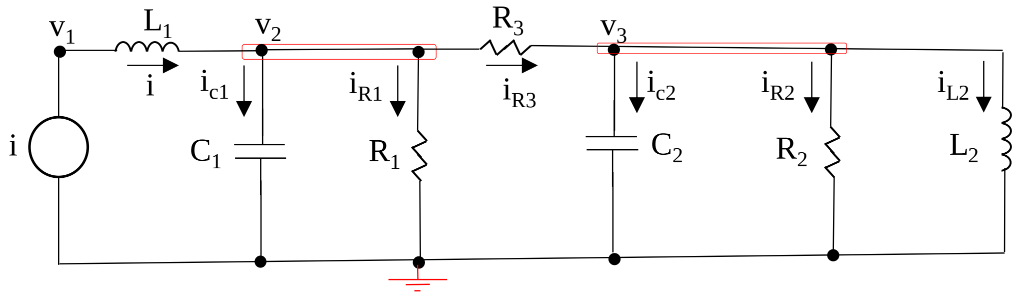
Analogia Torque - Corrente
$T_J = J\dfrac{dw}{dt} \Rightarrow i_C = C\dfrac{dv}{dt}$
$T_B = Bw \Rightarrow i_R = Gv = \dfrac{1}{R}v$
$T_K = K\displaystyle\int wdt \Rightarrow i_L = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int vdt$

Para construir o circuito elétrico análogo deve-se **conectar em paralelo os terminais dos elementos que possuem os mesmos deslocamentos angulares** (ou velocidades angulares). Escreve-se então a equação diferencial para cada nó.

Exemplo: Dado o sistema mecânico de rotação abaixo, construir o circuito elétrico análogo utilizando a analogia Torque-Corrente.



Circuito elétrico análogo com a analogia Torque-Corrente (velocidade - tensão).



Equações elétricas análogas

$$\begin{cases} i = i_{c1} + i_{R1} + i_{R3} \\ i_{R3} = i_{c2} + i_{R2} + i_{L2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{L_1}\displaystyle\int (v_1 - v_2)dt = C_1\dfrac{dv_2}{dt} + \dfrac{v_2}{R_1} + + \dfrac{(v_2 - v_3)}{R_3} \\ \dfrac{(v_2 - v_3)}{R_3} = C_2\dfrac{dv_3}{dt} + \dfrac{v_3}{R_2} + \dfrac{1}{L_2}\displaystyle\int v_3\,dt \end{cases}$$

Derivando e rearranjando as equações

$$\begin{cases} \dfrac{(v_1 - v_2)}{L_1} = C_1\dfrac{d^2v_2}{dt^2} + \dfrac{1}{R_1}\dfrac{dv_2}{dt} + + \dfrac{1}{R_3}\dfrac{d(v_2 - v_3)}{dt} \\ \dfrac{1}{R_3}\dfrac{d(v_2 - v_3)}{dt} = C_2\dfrac{d^2v_3}{dt^2} + \dfrac{1}{R_2}\dfrac{dv_3}{dt} + \dfrac{v_3}{L_2} \end{cases}$$

3.2.2 Analogia Torque – Tensão elétrica (T~v)

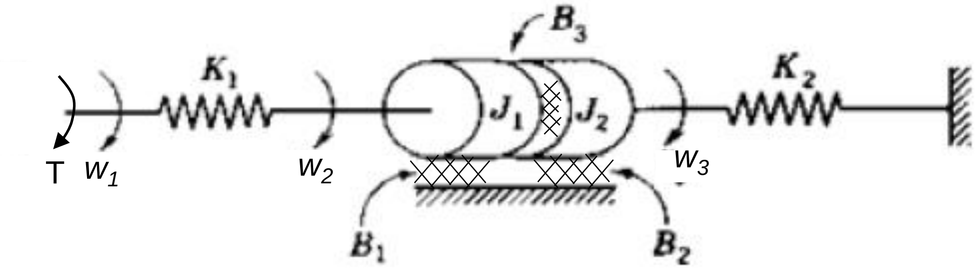
Nesta analogia o **torque de inércia** no sistema mecânico de rotação é considerado análogo à **tensão** elétrica, e por sua vez, a **velocidade angular** (ou deslocamento angular) será considerada análoga à **corrente** elétrica no circuito análogo.

Os elementos mecânicos devem ser substituídos pelos elementos elétricos os quais possuam as mesmas equações diferenciais nas relações. O quadro a seguir apresenta estas relações.

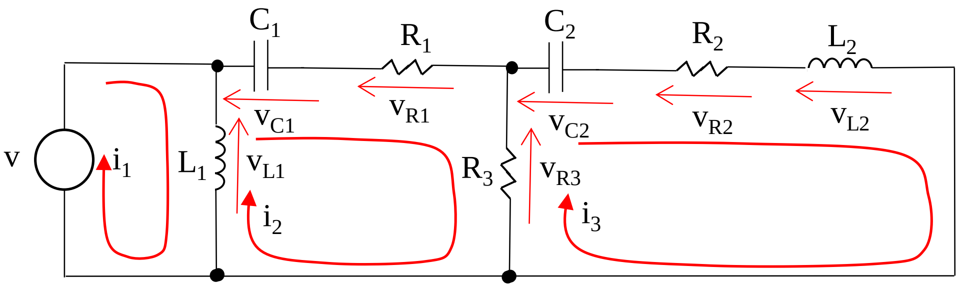
Analogia Torque - Tensão
$T_J = J\dfrac{dw}{dt} \quad \Longrightarrow \quad v_L = L\dfrac{di}{dt}$
$T_B = Bw \quad \Longrightarrow \quad v_R = Ri$
$T_K = K\displaystyle\int wdt \quad \Longrightarrow \quad v_C = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int idt$

Para construir o circuito elétrico análogo deve-se **conectar em série os elementos que possuem os mesmos deslocamentos angulares** (ou velocidades angulares). Escreve-se então a equação diferencial para cada malha.

Exemplo: Dado o sistema mecânico de rotação abaixo, construir o circuito elétrico análogo utilizando a analogia Torque-Tensão.



Circuito elétrico análogo com a analogia Torque-Tensão (velocidade – corrente).



Equações elétricas análogas

$$\begin{cases} v = v_{L1} = v_{c1} + v_{R1} + v_{R3} \\ v_{R3} = v_{c2} + v_{R2} + v_{L2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = L_1\dfrac{d(i_1 - i_2)}{dt} = \dfrac{1}{c_1}\displaystyle\int i_2 dt + R_1 i_2 + R_3(i_2 - i_3) \\ R_3(i_2 - i_3) = \dfrac{1}{c_2}\displaystyle\int i_3 dt + R_2 i_3 + L_2\dfrac{di_3}{dt} \end{cases}$$

Derivando e rearranjando as equações

$$\begin{cases} L_1\dfrac{d^2 i_1}{dt^2} - L_1\dfrac{d^2 i_2}{dt^2} = \dfrac{dv}{dt} \\ L_1\dfrac{d^2 i_1}{dt^2} - L_1\dfrac{d^2 i_2}{dt^2} = (R_1 + R_3)\dfrac{di_2}{dt} + \dfrac{1}{c_1} i_2 - R_3\dfrac{di_3}{dt} \\ L_2\dfrac{d^2 i_2}{dt^2} + (R_2 + R_3)\dfrac{di_2}{dt} + \dfrac{1}{c_2} i_2 - R_3 i_1 = 0 \end{cases}$$

4. Circuitos Elétricos Análogos aos Sistemas Hidráulicos

Iremos apresentar agora a analogia entre sistemas hidráulicos e elétricos. Mais uma vez, é importante frisar que esse tipo de analogia facilita a análise dos sistemas hidráulicos, visto que é mais barato trabalhar na prática com sistemas elétricos para testes antes da implementação real.

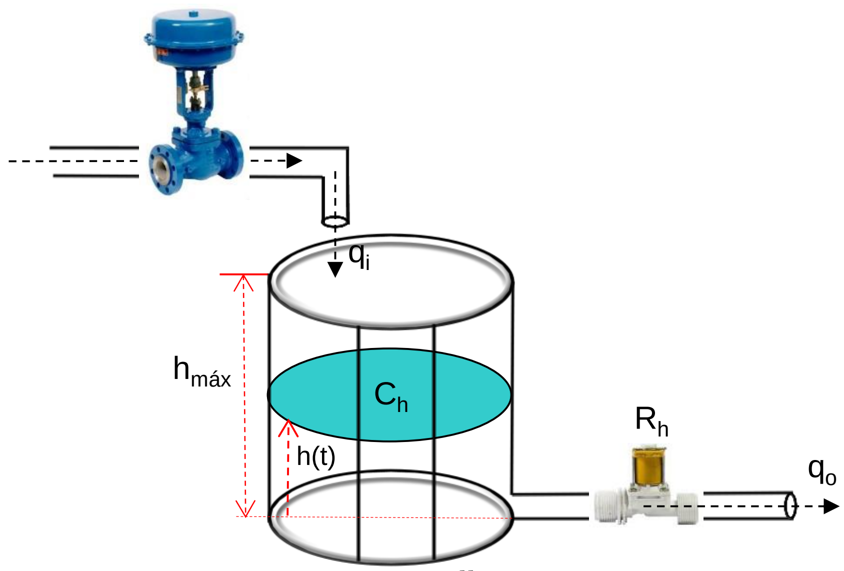
4.1. Analogia Vazão Hidráulica – Corrente elétrica (q~i)

Nesta analogia a **vazão hidráulica** q é considerada análoga à **corrente** elétrica i no circuito elétrico análogo. Por sua vez, o **nível** h é considerada análoga à queda de **tensão** elétrica v no circuito elétrico análogo. A analogia Vazão Hidráulica – Tensão (q~v) não é muito utilizada nestas análises pela facilidade na comparação de vazão hidráulica com corrente elétrica.

Conecta-se em paralelo os terminais dos elementos que possuem as mesmas alturas h de nível. Escreve-se então a equação diferencial para cada nó, igualando-se a zero a soma das vazões em cada nó (LCK).

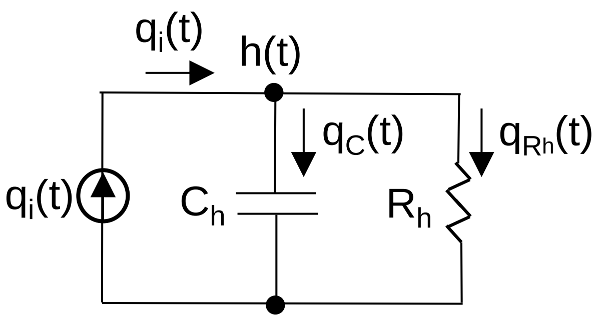
Analogia Vazão - Corrente
$q_C = C\dfrac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \quad i_C = C\dfrac{dv}{dt}$
$q_0 = \dfrac{h}{R_h} \Rightarrow i_R = Gv = \dfrac{1}{R}v$

Exemplo: Construir o circuito análogo elétrico para o sistema hidráulico abaixo utilizando a analogia vazão-corrente.



$$\underbrace{q_i}_{\text{vazão de entrada}} = \underbrace{C_h\frac{dh}{dt}}_{\text{quantidade adicional armazenada no reservatório}} + \underbrace{q_o}_{\text{vazão de saída}}$$

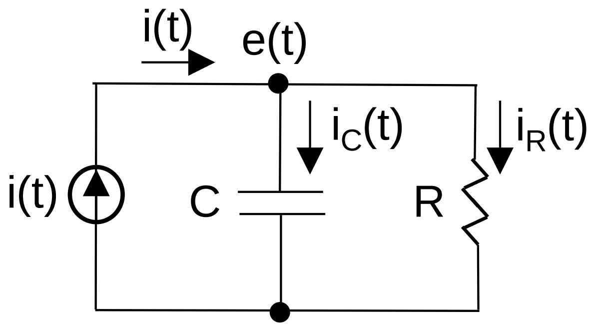
Circuito hidráulico:



Equações:

$$q_i(t) = q_C(t) + q_{R_h}(t) \Rightarrow \boxed{C_h\frac{dh(t)}{dt} + \frac{h(t)}{R_h} = q_i\ (t)}$$

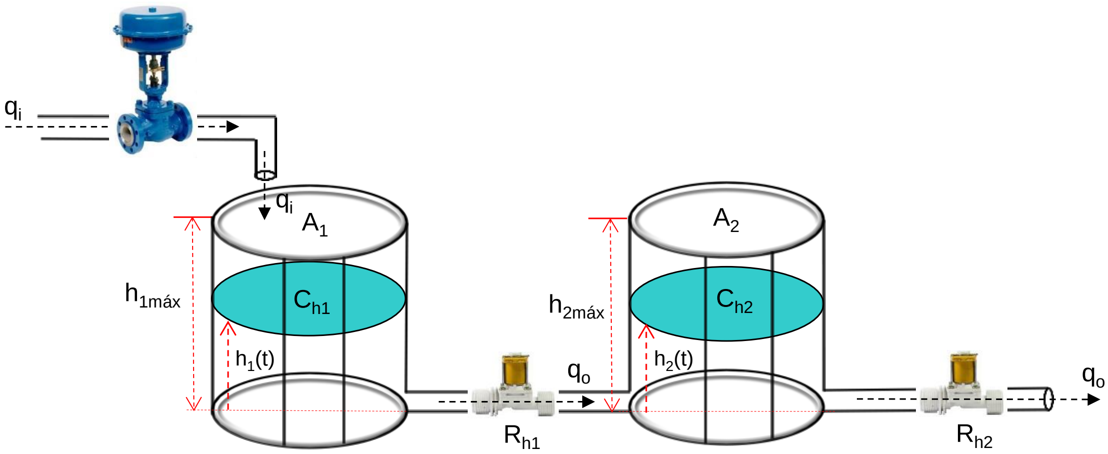
Circuito análogo elétrico pela analogia vazão-corrente:



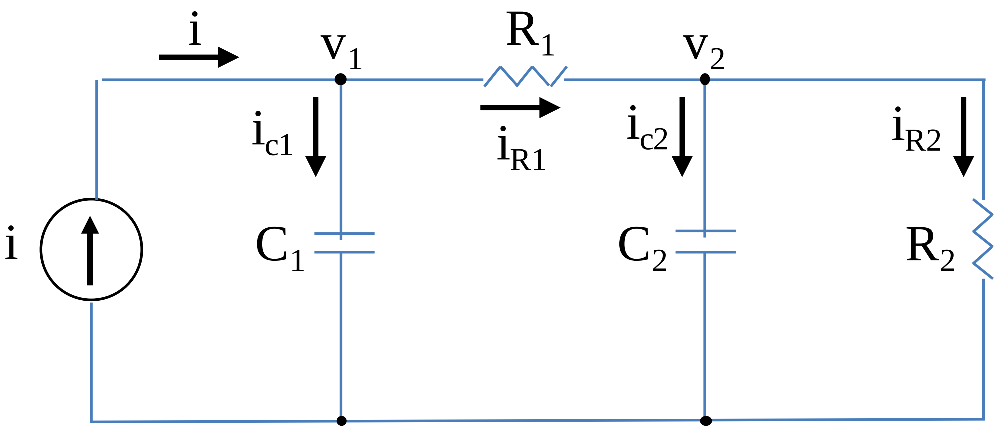
Equações:

$$i(t) = i_C(t) + i_R(t) \Longrightarrow \boxed{C\frac{de(t)}{dt} + \frac{e(t)}{R} = i\,(t)}$$

Exemplo: Construir o circuito análogo elétrico para o sistema hidráulico abaixo utilizando a analogia vazão-corrente.



Circuito elétrico análogo pela analogia vazão hidráulica – corrente.



Equações que descrevem o circuito:

$$\begin{cases} i = i_{C_1} + i_{R_1} \\ i_{R_1} = i_{C_2} + i_{R_2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1\dfrac{dv_1}{dt} + \dfrac{v_1 - v_2}{R_1} = i \\ C_2\dfrac{dv_2}{dt} + \dfrac{v_2}{R_2} = \dfrac{v_1 - v_2}{R_1} \end{cases}$$

5. Circuitos Elétricos Análogos aos Sistemas Térmicos

Mais uma vez, é importante frisar que esse tipo de analogia facilita a análise dos sistemas térmicos, visto que é mais barato trabalhar na prática com sistemas elétricos para testes antes da implementação real.

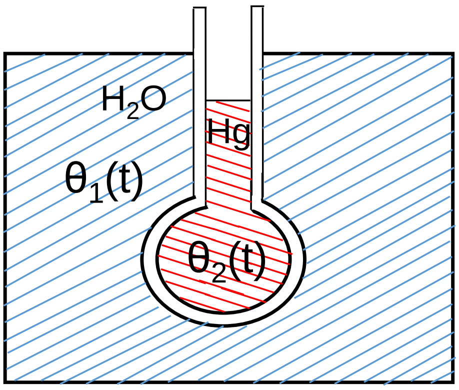
5.1. Analogia Fluxo de Calor – Corrente elétrica (q~i)

Nesta analogia o **fluxo de calor q** é considerado análogo à **corrente** elétrica no circuito elétrico análogo. Por sua vez, a **temperatura T (ou θ)** é considerada análoga à queda de **tensão** elétrica no circuito elétrico análogo.

Conecta-se em paralelo os terminais dos elementos que possuem as mesmas temperaturas.

Analogia Fluxo - Corrente
$q = K\frac{dT}{dt} \quad \Rightarrow \quad i = C\frac{dv}{dt}$
$q_0 = \frac{T_1 - T_2}{R_T} \quad \Rightarrow \quad i = \frac{v_1 - v_2}{R}$

Exemplo: Um termômetro é frequentemente usado para medir a temperatura de um fluido em contato com ele. Uma coluna de mercúrio encerrada em um recipiente de vidro e imersa em um fluido é mostrada a seguir. O calor pode ser transferido do fluido ao mercúrio tanto por convecção na superfície do recipiente como por condução através dele, e a corrente térmica é proporcional à diferença de temperatura [$\theta_1(t)$ - $\theta_2(t)$]. Escreva uma equação para o sistema e construa o circuito equivalente e os análogos elétricos.



O fluxo de calor q(t) transferido por condução para o mercúrio (Hg) através da parede do recipiente de vidro é dado por:

$$q(t) = \frac{1}{R_T}[\theta_1(t) - \theta_2(t)]$$

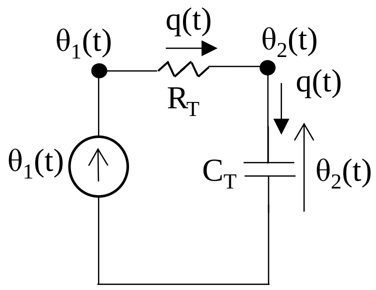
onde R_T = resistência térmica do recipiente de vidro

O fluxo de calor q(t) transferido por convecção através do mercúrio (Hg) é dado por:

$$q(t) = C_T\frac{d\theta_2(t)}{dt}$$

onde C_T é a capacitância térmica do mercúrio (Hg).

Para tais equações o circuito térmico é dado por,



Como os fluxos são iguais nas transferências de calor,

$$\frac{1}{R_T}[\theta_1(t) - \theta_2(t)] = C_T\frac{d\theta_2(t)}{dt}$$

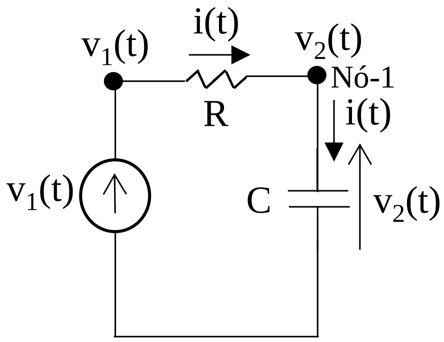
Rearranjando a equação anterior,

$$\frac{d\theta_2(t)}{dt} + \frac{1}{R_T C_T}\theta_2(t) = \frac{1}{R_T C_T}\theta_1(t)$$

A grandeza $\theta_1(t)$ atua como a fonte de calor e $\theta_2(t)$ é a resposta desejada.

5.2. Analogia Temperatura – Tensão elétrica (T~v)

O circuito elétrico análogo com analogia Temperatura-Tensão (Fluxo de Calor-Corrente Elétrica) é apresentado abaixo.



Equação do nó-1;

$$\frac{1}{R_T}[v_1(t) - v_2(t)] = C_T\frac{dv_2(t)}{dt}$$

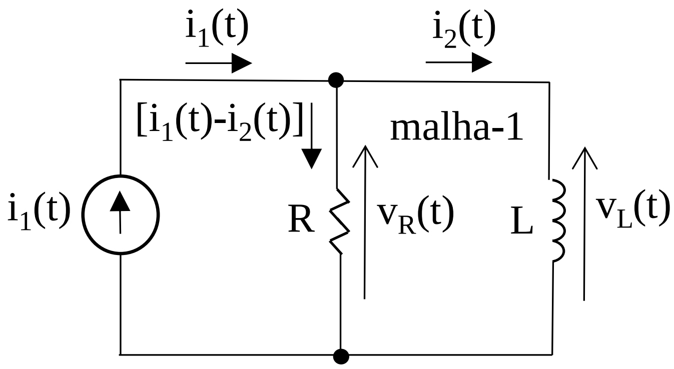
Rearranjando a equação anterior,

$$\frac{dv_2(t) +}{dt}\left(\frac{1}{R_T C_T}\right)v_2(t) = \frac{1}{R_T C_T}v_1(t)$$

A grandeza $v_1(t)$ atua como a fonte de tensão e $v_2(t)$ é a resposta desejada.

5.3. Analogia Temperatura – Corrente elétrica (T~i)

O circuito elétrico análogo com analogia Temperatura-Corrente (Fluxo de Calor-Tensão) é apresentado abaixo.



Equação da malha-1;

$$v_R(t) - v_L(t) = 0$$
$$R[i_1(t) - i_2(t)] - L\frac{di_2(t)}{dt} = 0$$

Rearranjando a equação anterior;

$$L\frac{di_2(t)}{dt} + R[i_2(t) - i_1(t)] = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{di_2(t)}{dt} + \frac{R}{L}i_2(t) = \frac{R}{L}i_1(t)}$$

A grandeza $i_1(t)$ atua como a fonte de corrente e $i_2(t)$ é a resposta de