Controle de Robôs através da Função raiz quadrada

Trabalho de Robótica Móvel - ELT 472

Werikson Alves
Universidade Federal de Viçosa (UFV), Viçosa, Brasil
e-mails: werikson.alves@ufv.br

13 de novembro de 2022

1 Introdução:

Um robô móvel é uma máquina capaz de se mover em ambientes sem a necessidade de intervenção humana. Para isto, é necessário que haja a presença de sensores e atuadores a fim de possibilitar isso. O controle dos robôs pode ser dividido em várias categorias, as quais são dependentes do grau de inteligência previamente programado, e assim executando a ação em busca de um objetivo.

Este objetivo pode assumir diferentes formas, e para este trabalho, o objetivo adotado é a posição em que o robô deve chegar. Estas posições desejadas se encontram em um espaço aberto (que será montado através da simulação), sendo este considerado um ambiente estruturado sem obstáculos. Para a realização deste trabalho foi utilizado o modelo virtual do robô móvel Pioneer 3 DX, no qual o movimento do robô é dado pelo sinal de controle enviado ao ele.

Portanto, este trabalho tem por objetivo propor uma nova função de controle e compará-la com outras funções de controle, já desenvolvidas na disciplina anteriormente, e como complemento, encontrar os melhores ganhos e analisar o desempenho de cada controlador por meio da simulação. A partir disto, realizar a análise de desempenho através dos índices IAE, ITAE e IASC.

2 Metodologia

A seguir são descritos os passos para desenvolvimento da função de controlador proposta, a trajetória a ser executada e os métodos utilizados para avaliar o desempenho da mesma.

2.1 Modelo Cinemático do Robô

Para realizar o movimento do robô móvel, inicialmente é necessário montar o modelo cinemático do mesmo. Ao considerar o tipo de robô usado neste trabalho, percebe-se que o controle será feito apenas em 2D, ou seja, deslocamento em x e y e rotação em torno do próprio eixo. Dessa forma, o movimento será dado em função de v e ω, velocidade linear e angular, respectivamente. A Figura 1 apresenta o robô em relação ao sistema global (x_g, y_g) indicando todas as variáveis necessárias para realizar o controle do mesmo.

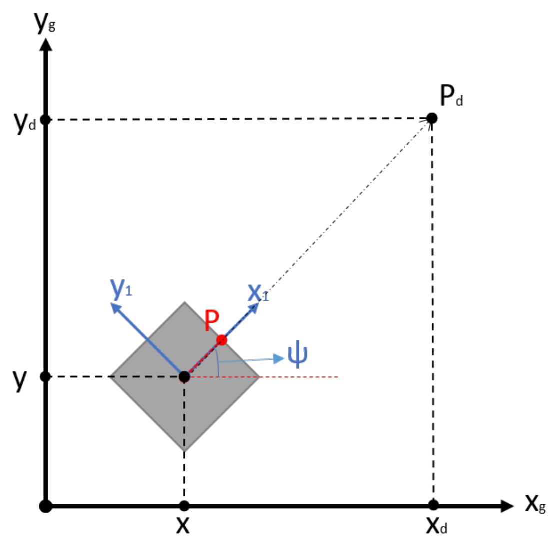

Figura 1: Sistemas de coordenadas absoluta e do robô com busca a uma postura predeterminada.

Para-se determinar o modelo cinemático do robô, considerou-se o ponto P_d como objetivo a ser alcançado e o ponto P como ponto a ser controlado Equação (1), no qual a é a distância em relação ao centro do robô e α é o angulo em relação ao eixo x do robô. Assim, quando o ponto P alcançar o ponto P_d, o objetivo estará completo, Equação (2). Dado isto, é possível determinar a matriz de rotação e a matriz cinemática já simplificadas do modelo, dada pelas Equações (3) e (4), respectivamente, em coordenadas cartesianas.

$$P = \begin{bmatrix} a\cos(\alpha) \\ a\sin(\alpha) \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X_d} - \mathbf{X} \tag{2}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \cos(\psi+\alpha) & -a\sin(\psi+\alpha) \\ \sin(\psi+\alpha) & a\cos(\psi+\alpha) \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\dot{P}^0 = \begin{bmatrix} \cos(\psi+\alpha) & -a\sin(\psi+\alpha) \\ \sin(\psi+\alpha) & a\cos(\psi+\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} \tag{4}$$

2.2 Modelando o controlador

O controlador que será proposto neste trabalho será o controlador de posição sem orientação final, no qual enviará sinais para que o robô chegue no ponto desejado sem se importar com a sua orientação. Com isto, tem-se $[\ x \quad y\ ]^T$ como as únicas variáveis de estados e tomando como base a Figura 1 e a equação (5) como base para modelar o controlador, tem-se que:

$$V(\tilde{x},\tilde{y}) = \frac{\tilde{x}^2}{2} + \frac{\tilde{y}^2}{2} \tag{5}$$

$$\dot{V}(\tilde{x},\tilde{y}) = \tilde{x}\dot{\tilde{x}} + \tilde{y}\dot{\tilde{y}} \tag{6}$$

Assumindo $\mathbf{X_d}$ constante, tem-se um controle de posição. Logo, seguindo a análise de Lyapunov para verificar a estabilidade do sistema, deve-se determinar uma função de controle, tal que $0 \geq \dot{V}$, ao controlar u e ω. Assim, ao derivar (2) e substituir em (6), obtém-se:

$$\dot{V}(\tilde{x},\tilde{y}) = \tilde{x}(-\dot{x}) + \tilde{y}(-\dot{y}) = -\begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Levando-se em conta que a Equação (4) também pode ser escrita conforme a Equação (8), e substituindo-a na Equação (9), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\dot{V}(\tilde{x},\tilde{y}) = -\begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \end{bmatrix} \mathbf{K} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} \tag{9}$$

2.3 Função de controlador

Para se determinar a função de controle, foi aplicado o método da linearização por retroalimentação. Partindo da Equação (9), percebe-se que a função de controle deve estar em função de $\tilde{\mathbf{X}}$, conforme a Equação (10). Para este trabalho foi proposto um controlador baseado na função raiz quadrada, conforme a Equação (11).

$$\dot{V}(\tilde{x},\tilde{y}) = -\begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \end{bmatrix} \mathbf{K} \cdot F_{sqrt}(\tilde{\mathbf{X}}) \tag{10}$$

$$F_{Sqrt}(\tilde{\mathbf{X}}) = \mathbf{K}^{-1}\left(\dot{\mathbf{X}}_{\mathbf{d}} + \frac{k_1}{\sqrt{k_2^2 + ||\tilde{\mathbf{X}}||^2}}\tilde{\mathbf{X}}\right) \tag{11}$$

Para que a função $F_{sqrt}(\tilde{\mathbf{X}})$ seja valida, ela deve ser uma função impar e com saturação. Dessa forma, tomando,

$$f(\tilde{X}) = \frac{k_1}{\sqrt{k_2^2 + ||\tilde{\mathbf{X}}||^2}}\tilde{\mathbf{X}}$$

e analisando esta função observa-se:

- **Função impar:** Para esta função k_1 e k_2 são constantes definidas positivas e como a norma de um vetor retorna um número positivo, tem-se que

$$N = \frac{k_1}{\sqrt{k_2^2 + ||\tilde{\mathbf{X}}||^2}} \geq 0$$

  . Com isto, esta função pode ser dita como uma função impar.

- **Saturada:** Aplicando limite em $f(\tilde{X})$, conclui-se que a função é saturada em k_1.

$$lim_{x\to\infty}\left(\frac{k_1}{\sqrt{\frac{k_2^2}{||\tilde{\mathbf{X}}||^2} + 1}}\right) = k_1 \tag{12}$$

Portanto, dado estas condições, está função está apta para o controlador.

2.4 Trajetória

A simulação consiste no robô percorrer a trajetória duas vezes, sendo o caminho a ser percorrido durante a simulação dado pela equação da trajetória da elipse, conforme a equação abaixo, com $w = 2\pi/T$ e $T = 90$, ou seja, $t_f = 180$, com intervalos de $0,1$ segundos.

$$x = 2,5\cos(wt) \tag{13}$$

$$y = 1,5\sin(wt) \tag{14}$$

2.5 Análise de desempenho

Para se analisar se o desempenho, o controlador proposto foi comparado com outras 4 funções de controle diferente, sendo elas: a função tangente hiperbólica, inversa de x, exponencial e gaussiana, Equações (15), (16), (17), (18) e (**??**), respectivamente.

$$F_{Tanh}(\tilde{X}) = k_1\tanh(k_2\cdot\tilde{X}) \tag{15}$$

$$F_{\frac{1}{x}}(\tilde{X}) = k_1\tanh(k_2\tilde{X}) + k_3\tanh(\tilde{X}k_4\tilde{X}^T)(\tilde{X}(\tilde{X}^T\tilde{X})^T) \tag{16}$$

$$F_{Exp}(\tilde{X}) = k_1(1 - e^{-k_2||\tilde{X}||})\tilde{X} \tag{17}$$

$$F_{Gau}(\tilde{X}) = k_1\tanh(k_2\tilde{X}) + k_3e^{-\tilde{X}k_4\tilde{X}^T}\tilde{X} \tag{18}$$

As constantes citadas nas equações acima, k_i ... $i = 1,2,3\ e\ 4$ foram determinados de modo a se obter o melhor desempenho do robô, sendo elas apresentadas na Tabela 1, obedecendo as seguintes condições:

- $u \leq 0.75[m/s]$
- $\omega \leq 1,74[rad/s]$
- $||\tilde{X}|| \leq 0,1$ para $T > 90$

Tabela 1: Ganhos utilizados nos controladores.

	k_1	k_2	k_3	k_4
F_{Tanh}	1	0,41	-	-
F_{Inv}	1	0,41	0,17	0,01
F_{Exp}	2	0,06	-	-
F_{Gau}	1	0,41	0,04	2
F_{Sqrt}	0,98	2	-	-

Para se analisar o desempenho dos controladores foram realizados três tipos de teste, sendo eles:

- IAE (Erro Absoluto Integral) que fornece o acúmulo de erro ao longo do tempo, Equação (19);
- ITAE (Erro Absoluto Ponderado no Tempo Integral) que avalia o valor do erro em relação ao tempo, minimizando os erros iniciais e quantificando em maior escala os erros em regime permanente, Equação (20);
- IASC (Controle de Sinal Absoluto Integral) que permite avaliar a quantidade de sinal enviado pelo controlador ao longo do tempo, informando o grau de atuação para a tarefa a ser executada, Equação (21).

$$IAE = \int_0^T ||\tilde{X}||dt \tag{19}$$

$$ITAE = \int_T^{t_f} t||\tilde{X}||dt \tag{20}$$

$$IASC = \int_0^T ||U||dt \tag{21}$$

3 Resultados:

Os resultados obtidos, acerca da trajetória, erro de posição, velocidade e desempenho, ao realizar todas as simulações das funções de controladores propostas neste trabalho são apresentados a seguir.

3.1 Execução da Trajetória

Após executar todas as simulações, observou-se que tanto o controlador proposto quanto as outras funções de controle, executaram a trajetória corretamente, alcançando a trajetória ainda no primeiro quadrante, em todas as simulações.

Por meio das Figuras 2, 3 e 4, observou-se que o ponto em que o robô alcançou a trajetória foi praticamente o mesmo. Isto, pode ser verificado, devido ao fato das suas funções de controle possuírem termos semelhantes.

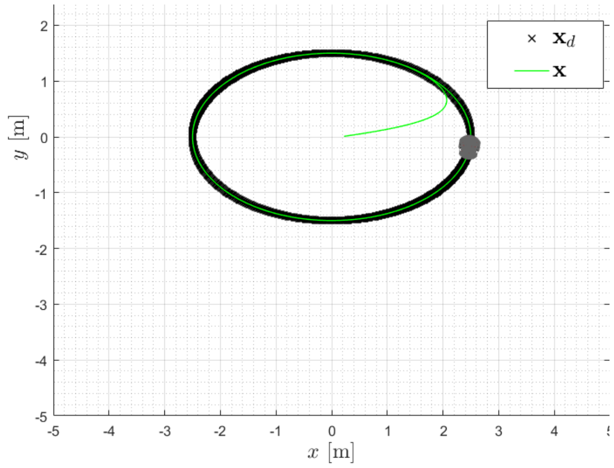

Figura 2: Trajetória executada pela função de controle F_{Tanh}.

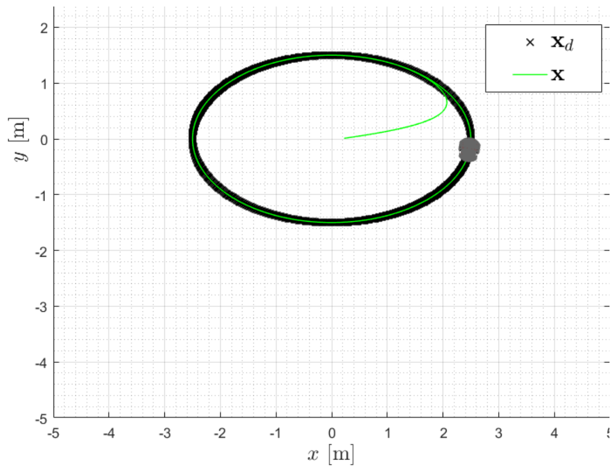

Figura 3: Trajetória executada pela função de controle F_{Inv}.

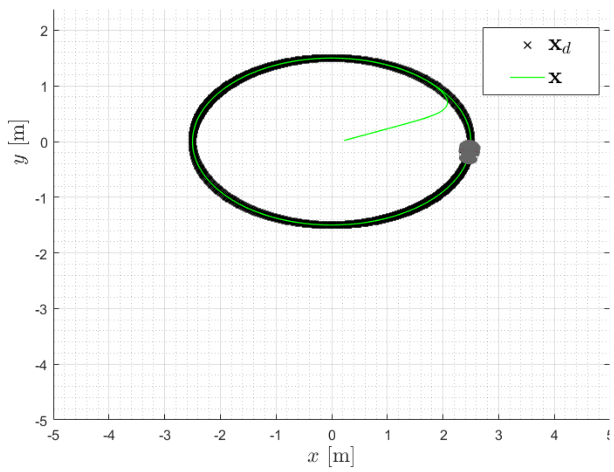

Figura 4: Trajetória executada pela função de controle F_{Gau}.

Já a simulação baseada na função F_{Exp}, Figura 5, observou-se que demorou mais para alcançar a trajetória, e diferentemente das outras, o robô se afastou um pouco ao cruzar o eixo y.

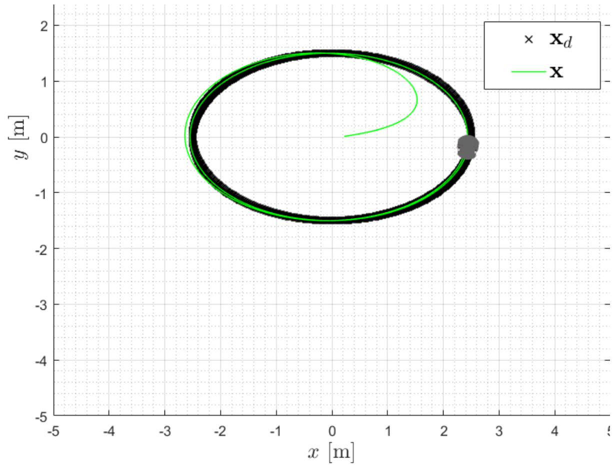

Figura 5: Trajetória executada pela função de controle F_{Exp}.

Por fim, na Figura 6, percebe-se que em termos de alcançar o objetivo e velocidade, a função F_{Sqrt} teve o melhor desempenho em relação aos outros.

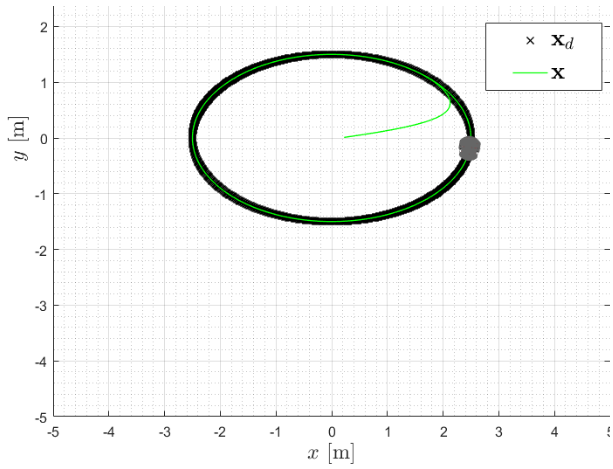

Figura 6: Trajetória executada pela função de controle F_{Sqrt}.

3.2 Análise do erro de posição

Com relação ao erro de posição, observa-se que funções F_{Tanh}, F_{Inv} e F_{Gau}, Figuras 7, 8 e 9 respectivamente, alcançaram um valor de erro abaixo de $0,1$ próximo aos 20 segundos de simulação. Vale ressaltar que somente a função F_{Gau} apresentou um erro negativo.

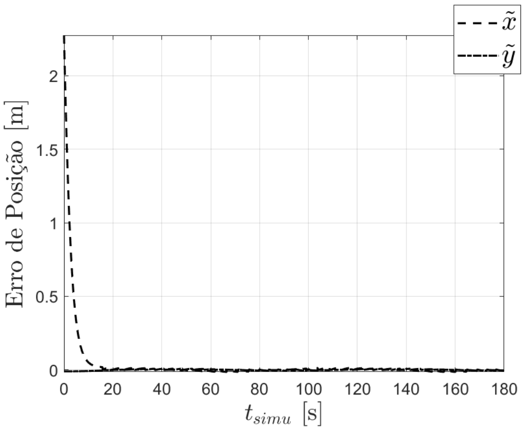

Figura 7: Trajetória executada pela função de controle F_{Tanh}.

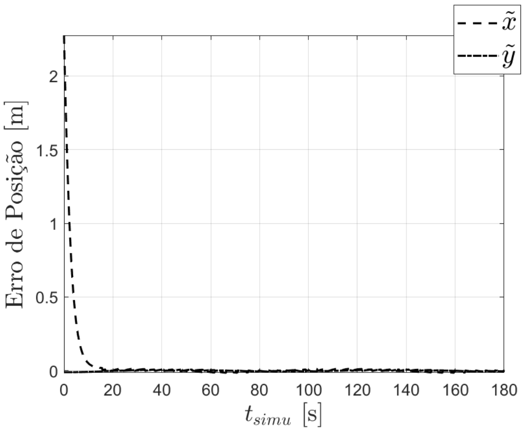

Figura 8: Trajetória executada pela função de controle F_{Inv}.

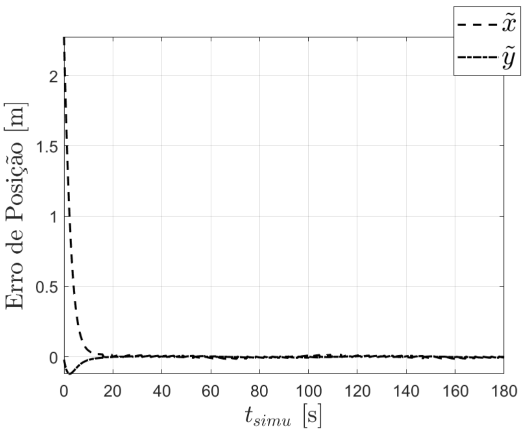

Figura 9: Trajetória executada pela função de controle F_{Gau}.

Além disto, pela Figura 10 observa-se que a função F_{Exp} foi a que mais demorou para atingir um erro abaixo de $0,1$, sendo este alcançado próximo aos 90 segundos.

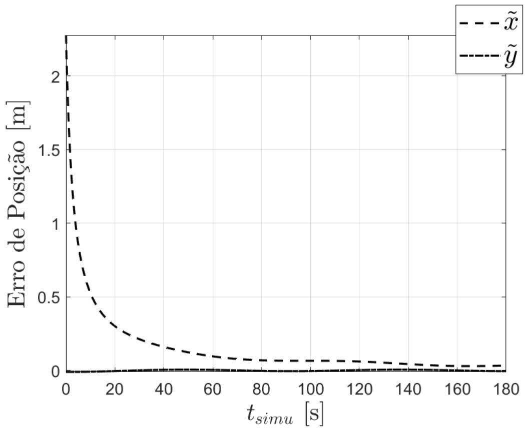

Figura 10: Trajetória executada pela função de controle F_{Exp}.

Por fim, a função F_{Sqrt} foi a que atingiu um erro abaixo de $0,1$ mais rápido, ante dos 20 segundos, conforme pode ser visto na Figura 11, reforçando os resultados obtidos na seção anterior.

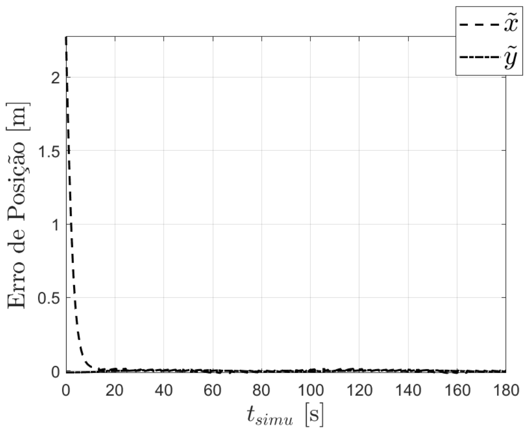

Figura 11: Trajetória executada pela função de controle F_{Sqrt}.

3.3 Análise da velocidade

Com relação às velocidades, observa-se que com os ganhos utilizados todos os controladores obedeceram às condições estabelecidas de limitação de velocidade. Além disso, em termos de valores iniciais, as simulações baseadas nas funções F_{Tanh}, F_{Inv}, F_{Exp} e F_{Sqrt}, Figuras 12, 13, 14 e 15 respectivamente, tiveram velocidades linear e angular iniciais semelhantes, com valores próximos a $0,7$ para ambas. Para a função F_{Gau}, Figura 16, a velocidade angular inicial teve um valor mais alto, em trono de 1.

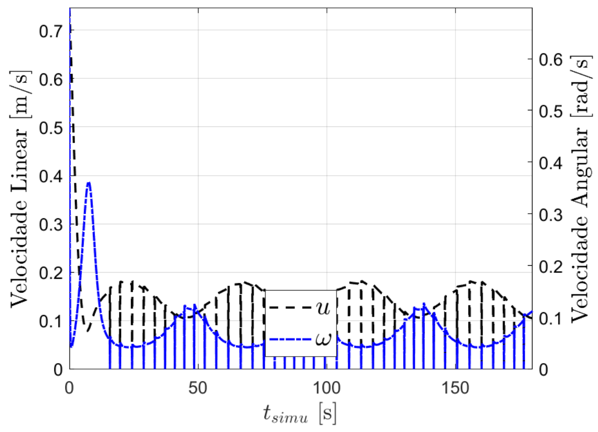

Figura 12: Trajetória executada pela função de controle F_{Tanh}.

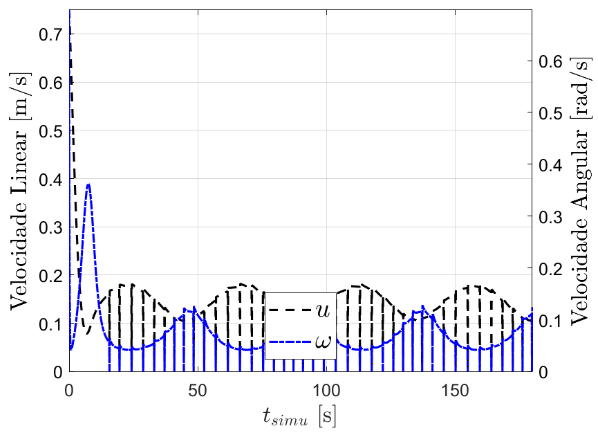

Figura 13: Trajetória executada pela função de controle F_{Inv}.

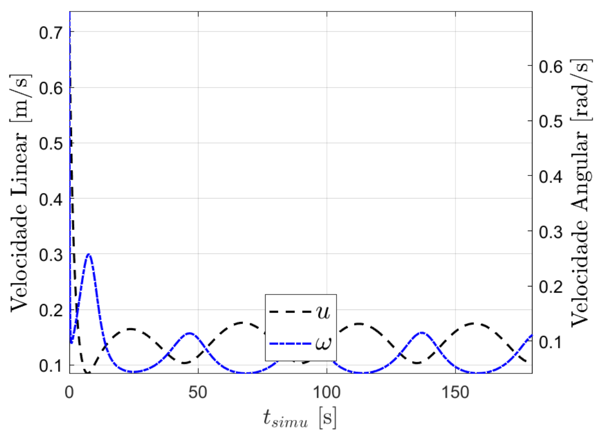

Figura 14: Trajetória executada pela função de controle F_{Exp}.

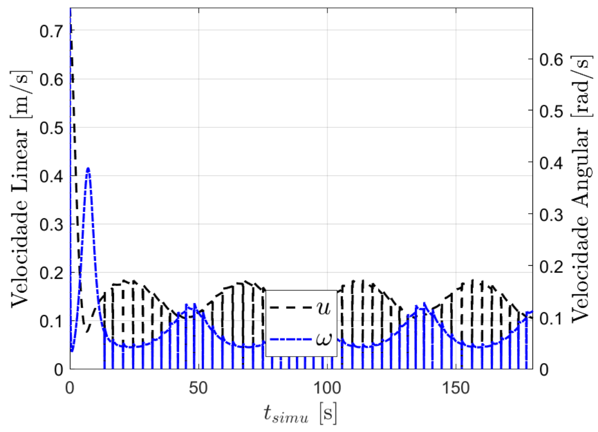

Figura 15: Trajetória executada pela função de controle F_{Sqrt}.

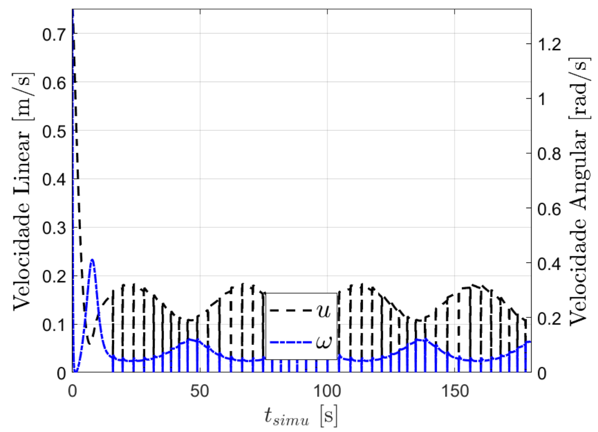

Figura 16: Trajetória executada pela função de controle F_{Gau}.

Outro ponto observado através dos gráficos das funções F_{Tanh}, F_{Inv}, F_{Gau} e F_{Sqrt}, foi que ambas as velocidades dos robôs variavam rapidamente, de forma que quando o robô estava muito longe do ponto desejado, as velocidades davam um pulso e em seguida retornavam para um valor mais baixo. Já a função F_{Exp} não teve estas oscilações nas suas curvas de velocidade, durante a simulação.

3.4 Análise do desempenho

A Tabela 2 apresenta os índices calculados em cada simulação. Através dela, é possível observar que durante o regime transitório (antes de 90 segundos), a função com melhor desempenho foi a F_{Sqrt} e a pior função foi a F_{Exp}, reforçando os resultados apresentados na seção 3.2, em termos de erro de posição. Entretanto, em relação ao sinal de controle, a melhor função foi F_{Exp} o qual pode ser visto através da curva da função, que diferentemente das outras, continham sinais em forma de pulsos e obtiveram índices muito próximos. Já para o regime permanente, a pior função foi a F_{Exp} onde, por meio da Figura 10, observa-se que após os 90 segundos, o erro ainda possui um valor relativamente maior, em relação às outras funções, enquanto as outras funções obtiveram valores para o índice relativamente próximo.

Tabela 2: Índices de desempenho obtidos.

	IAE	ITAE	IASC
F_{Tanh}	6,9034	97,8258	16,8294
F_{Inv}	6,8738	97,6780	16,8341
F_{Exp}	23,4109	567,5177	15,9682
F_{Gau}	6,9023	98,1845	16,9499
F_{Sqrt}	6,3758	98,0362	16,9574

4 Conclusão

Portanto, a partir das análises feitas anteriormente, conclui-se que a função proposta no trabalho está adequada para o uso e possui um bom desempenho para os ganhos encontrados, tendo esta função uma boa resposta para o regime transitório. Todas as funções tiveram uma resposta rápida, de forma que erro diminuiu rapidamente, sendo apenas a função F_{Exp} que demorou para atingir o valor do erro estabelecido. Além disso, nenhuma das funções tiveram sues valores de velocidade saturados ou descontinuidades em suas curvas.

Referências

[1] V. E. Neto, R. H. Fonseca, and A. S. Brandão, “Proposal and comparison of trajectory tracking strategies for mobile robots,” in *2017 Latin American Robotics Symposium (LARS) and 2017 Brazilian Symposium on Robotics (SBR)*, pp. 1–6, IEEE, 2017.