MÉTODO DA BISSEÇÃO Número mínimo de iterações, usando o erro absoluto

MAT 271 – CÁLCULO NUMÉRICO –PER3/2021

Professor Amarísio Araújo – DMA/UFV

RELEMBRANDO: CRITÉRIO DE PARADA

O CRITÉRIO DE PARADA DO MÉTODO DA BISSEÇÃO FICA ASSIM: Se o erro (absoluto ou relativo) entre dois termos consecutivos, x_n e x_{n+1} for menor que um dado ε ($\varepsilon > 0$), então para-se o método e x_{n+1} é o valor aproximado de $\bar{x}$ ($\bar{x} \approx x_{n+1}$), com erro (absoluto ou relativo) menor que ε.

Usando o erro absoluto:

Se $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, então x_{n+1} é a aproximação da solução exata $\bar{x}$ com erro absoluto menor que ε.

Usando o erro relativo:

Se $\frac{|x_{n+1}-x_n|}{|x_{n+1}|} < \varepsilon$, então x_{n+1} é a aproximação da solução exata $\bar{x}$ com erro relativo menor que ε.

O número ε é um indicador de precisão do método e, nos métodos aqui trabalhados, será tomado como uma potência inteira negativa de 10, ou seja: $\varepsilon = 10^{-k}, k \varepsilon \mathbb{N}$ ($\varepsilon = 0.1; \varepsilon = 0.01; \varepsilon = 0.001 \ldots$) (tão pequeno quanto seja necessário, dependendo da natureza do problema).

VOLTANDO AO EXEMPLO DA AULA ANTERIOR

Solução aproximada da equação $x^3 + cosx = 0$.

Como vimos em aula anterior, esta equação possui uma única solução $\bar{x}$ no intervalo $[-1,0]$, sendo a função $f(x) = x^3 + cosx$ contínua em $[-1,0]$, com $f(-1) = -0.45469 < 0$ e $f(0) = 1 > 0$. Vamos usar o método da bisseção para encontrar uma aproximação de $\bar{x}$, com erro absoluto menor que $\varepsilon = 0.1$.

RESOLVENDO O EXEMPLO

$$f(x) = x^3 + cosx, f(-1) = -0.45469 < 0 \text{ e } f(0) = 1 > 0.$$

ATENÇÃO: CALCULADORA EM RADIANOS!!

Temos: $a_0 = -1$ e $b_0 = 0$. Então $x_1 = \frac{-1+0}{2} = -0.5$.

Decidindo sobre o novo intervalo de busca: $f(x_1) = f(-0.5) = 0.7525 > 0$, sinal contrário de $f(a_0) = f(-1) < 0$. Logo: $a_1 = a_0 = -1$ e : $b_1 = x_1 = -0.5$.

Temos: $a_1 = -1$ e $b_1 = -0.5$. Então $x_2 = \frac{-1-0.5}{2} = -0.75$. $|x_2 - x_1| = 0.25 > 0.1$

Decidindo sobre o novo intervalo de busca: $f(x_2) = f(-0.75) = 0{,}3098 > 0$, sinal contrário de $f(a_1) = f(-1) < 0$. Logo: $a_2 = a_1 = -1$ e : $b_2 = x_2 = -0.75$.

Temos: $a_2 = -1$ e $b_2 = -0.75$. Então $x_3 = \frac{-1-0.75}{2} = -0.875$. $|x_3 - x_2| = 0.125 > 0.1$

Decidindo sobre o novo intervalo de busca: $f(x_3) = f(-0.875) = -0{,}0289 < 0$, mesmo sinal de $f(a_2) = f(-1) < 0$. Logo: $a_3 = x_3 = -0.875$ e : $b_3 = b_2 = -0.75$.

RESOLVENDO O EXEMPLO

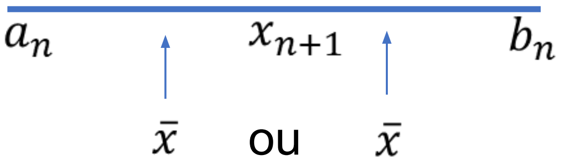
Temos: $a_3 = -0.875$ e $b_3 = -0.75$. Então $x_4 = \frac{-0.875-0.75}{2} = -0.8125$.

$\boxed{|x_4 - x_3| = 0.0625 < 0.1}$

$\boxed{\text{Portanto } \bar{x} \approx x_4 = -0.8125 \text{, com erro absoluto menor que } \varepsilon = 0.1}$

NÚMERO MÍNIMO DE ITERAÇÕES, COM O ERRO ABSOLUTO

- No método da bisseção, é possível determinar o menor valor de n para que x_{n+1} seja a aproximação da solução exata $\bar{x}$, com erro absoluto menor que um dado ε, isto é, para que $|x_{n+1} - \bar{x}| < \varepsilon$.



Como $\bar{x}$ está entre a_n e x_{n+1} ou entre x_{n+1} e b_n podemos concluir que: $|x_{n+1} - \bar{x}| < |x_{n+1} - a_n|$

Como $x_{n+1} - a_n > 0$, $x_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ e $b_n - a_n = \frac{b_0-a_0}{2^n}$, tem-se que:

$$|x_{n+1} - \bar{x}| < |x_{n+1} - a_n| = x_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$$

$$\boxed{|x_{n+1} - \bar{x}| < \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}}$$

Então, se queremos $|x_{n+1} - \bar{x}| < \varepsilon$, basta exigir que $\frac{b_0-a_0}{2^{n+1}} < \varepsilon$.

NÚMERO MÍNIMO DE ITERAÇÕES, COM O ERRO ABSOLUTO

Então, se queremos $|x_{n+1} - \bar{x}| < \varepsilon$, basta exigir que $\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} < \varepsilon$.

$$\boxed{\log x = \log_{10} x}$$

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} < \varepsilon \Rightarrow \log\left(\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}\right) < \log \varepsilon$$

$$\Rightarrow \log(b_0 - a_0) - \log 2^{n+1} < \log \varepsilon$$

$$\Rightarrow \log(b_0 - a_0) - (n+1)\log 2 < \log \varepsilon$$

$$\Rightarrow n > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log \varepsilon}{\log 2} - 1$$

NÚMERO MÍNIMO DE ITERAÇÕES NO MÉTODO DA BISSEÇÃO, USANDO O ERRO ABSOLUTO

$\boxed{\text{Portanto } n \text{ deve ser o menor inteiro positivo tal que } n > \dfrac{\log(b_0 - a_0) - \log \varepsilon}{\log 2} - 1}$

EXEMPLO

Considerando o exemplo anterior da equação $x^3 + cosx = 0$, se quisermos encontrar uma aproximação da solução $\bar{x}$ em $[-1,0]$, com erro absoluto menor que $\varepsilon = 0.01$, podemos saber qual o valor mínimo de n para que x_{n+1} seja esta aproximação.

Lembremos que, no exemplo, determinamos a aproximação com erro absoluto menor que $\varepsilon = 0.1$, obtendo a aproximação $x_4 = -0.8125$, ou seja, correspondente a $n = 3$.

Usando a relação $n > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log \varepsilon}{\log 2} - 1$ com $a_0 = -1$, $b_0 = 0$ e $\varepsilon = 0.01 = 10^{-2}$:

$$n > \frac{\log(0-(-1)) - \log 10^{-2}}{\log 2} - 1 \Rightarrow n > \frac{2}{\log 2} - 1 \Rightarrow n > 5.6438 \Rightarrow n \geq 6$$

Portanto $n = 6$ é o menor valor de n para garantir uma aproximação da solução da equação $x^3 + cosx = 0$, usando o método da bisseção, com erro absoluto menor que $\varepsilon = 0.01$. Ou seja, na resolução anterior do exemplo, bastariam mais três iterações para chegar a essa aproximação $\bar{x} \approx x_7$.

USANDO TABELA (COMO NA APOSTILA)

Aproximação da solução $\bar{x}$ da equação $x^3 + cosx = 0$ no intervalo $[-1,0]$, com erro absoluto menor que $\varepsilon = 0.01$.

$$f(x) = x^3 + cosx, a_0 = -1,\ b_0 = 0.$$

n	a_n	b_n	x_{n+1}	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(x_{n+1})$	$\|x_{n+1} - x_n\|$	
0	-1	0	-0.5	-0.45469	1	0.75258		
1	-1	-0.5	-0.75	-0.45469	0.75258	0.309813	0.25	
2	-1	-0.75	-0.875	-0.45469	0.309813	-0.02892	0.125	
3	-0.875	-0.75	-0.8125	-0.02892	0.309813	0.15131	0.0625	
4	-0.875	-0.8125	-0.84375	-0.02892	0.15131	0.06398	0.03125	
5	-0.875	-0.84375	-0.859375	-0.02892	0.06398	0.018241	0.015625	
6	-0.875	-0.859375	-0.8671875	-0.02892	0.018241	-0.005163	0.00781	< 0.01

$\boxed{\bar{x} \approx x_7}$

$\boxed{|f(x_7)| = 0.005163 \approx 0}$

USANDO TABELA (COMO NA APOSTILA)

$$f(x) = x^3 + cosx,\ a_0 = -1,\ \ b_0 = 0.$$

n	a_n	b_n	x_{n+1}	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(x_{n+1})$	$\|x_{n+1} - x_n\|$
0	-1	0	-0.5	-0.45469	1	0.75258	
1	-1	-0.5	-0.75	-0.45469	0.75258	0.309813	0.25
2	-1	-0.75	-0.875	-0.45469	0.309813	-0.02892	0.125
3	-0.875	-0.75	-0.8125	-0.02892	0.309813	0.15131	0.0625
4	-0.875	-0.8125	-0.84375	-0.02892	0.15131	0.06398	0.03125
5	-0.875	-0.84375	-0.859375	-0.02892	0.06398	0.018241	0.015625
6	-0.875	-0.859375	-0.8671875	-0.02892	0.018241	-0.005163	0.00781

ATENÇÃO: ERRO NESTES VALORES NA APOSTILA

$$|f(x_7)| = 0.005163 < 0.01$$

Obs: Um critério de parada poderia ser também: parar o método quando $|f(x_{n+1})| < \varepsilon$