MAIS CONSIDERAÇÕES SOBRE O MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO LU

MAT 271 – Cálculo Numérico – PER3/2021/UFV

Professor Amarísio Araújo – DMA/UFV

OS PASSOS NO MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO LU

Seja o sistema $Ax = b$, com $A = \left(a_{ij}\right), i, j = 1, \dots, n$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

Calculamos os menores principais de ordem 1 até ordem $n - 1$ de A. Se todos forem não-nulos, é possível a decomposição $A = LU$, L triangular inferior e U triangular superior.

Encontramos as matrizes L e U.

Calculamos $detA$. Se $detA \neq 0$, o sistema possui solução única.

Resolvemos o sistema triangular inferior $Ly = b$ (1) e encontramos $y = [y_1\ y_2 \dots y_n]^t$.

Com y encontrado em (1), resolvemos o sistema triangular superior $Ux = y$ e encontramos a solução $x = [x_1\ x_2, \dots x_n]^t$, que é a solução do sistema $Ax = b$.

É comum escrever a solução como uma n-upla de $\mathbb{R}^n$: $x = (x_1, x_2 \dots, x_n)$.

OBTENDO AS MATRIZES L E U:

MATRIZ U

$$U = (u_{ij}), i,j = 1, \ldots, n$$

$$u_{ij} = 0, i,j = 1, \ldots, n, i > j$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}\, , i,j = 1, \ldots, n, i \leq j$$

MATRIZ L

$$L = (l_{ij}), i,j = 1, \ldots, n$$

$$l_{ij} = 0, i,j = 1, \ldots, n, i < j \qquad l_{ii} = 1, i = 1, \ldots, n$$

$$l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}\right) \Big/ u_{jj}\, , i,j = 1, \ldots, n, i > j$$

UM POSSÍVEL AGORITMO PARA OBTER L E U:

Para $m = 1, \dots, n-1$, faça:

Para $j = m, m+1 \dots, n$, faça:

$$u_{mj} = a_{mj} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{mk} u_{kj}$$

Para $i = m+1 \dots, n$, faça:

$$l_{im} = {\left(a_{im} - \sum_{k=1}^{m-1} l_{ik} u_{km}\right)} \Big/ {u_{mm}}$$

$$l_{mm} = 1$$

Para $m = n$, faça:

$$u_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk} u_{kn}$$

$$l_{nn} = 1$$

POSSÍVEL AGORITMO PARA RESOLVER UM SISTEMA TRIANGULAR INFERIOR:

$$\begin{cases} l_{11}x_1 & = b_1 \\ l_{21}x_1 + l_{22}x_2 & = b_2 \\ \vdots & \\ l_{n1}x_1 + l_{n2}x_2 + \cdots + l_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

$x_1 = b_1/l_{11}$

Para $i = 2, \ldots, n$, faça:

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j\right) \Big/ l_{ii}$$

POSSÍVEL AGORITMO PARA RESOLVER UM SISTEMA TRIANGULAR SUPERIOR:

$$\begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad u_{22}x_2 + \cdots + u_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$x_n = b_n / u_{nn}$$

Para $i = n-1, n-2 \ldots, 1$, faça:

$$x_i = {\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j\right)}\Big/ {u_{ii}}$$

UMA ESTRATÉGIA ALTERNATIVA PARA OBTER AS MATRIZES L E U NA DECOMPOSIÇÃO LU:

$$A = LU$$

Obtém-se U por escalonamento da matriz A.

A matriz L é obtida a partir da matriz identidade, ao longo do escalonamento de A. Os elementos de L abaixo da diagonal serão obtidos assim: o primeiro elemento da linha de A a ser zerado dividido pelo pivô acima na mesma coluna.

EXEMPLO

Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$, do Exemplo 3 da Aula Síncrona 1 da semana de 30/08 a 03/09/21.

UMA ESTRATÉGIA ALTERNATIVA PARA OBTER AS MATRIZES L E U NA DECOMPOSIÇÃO LU:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}}_{A}$$

O primeiro elemento a ser zerado em A é $a_{21} = 1$, sendo o pivô $a_{11} = 4$

O segundo elemento a ser zerado em A é $a_{31} = 2$, sendo o pivô $a_{11} = 4$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{I}} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7/2 & 7/4 \\ 0 & 2 & 13/2 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}}$$

O elemento a ser zerado, agora em $\tilde{A}$, é $\tilde{a}_{32} = 2$, sendo o pivô $\tilde{a}_{22} = 7/2$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 1/2 & 4/7 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7/2 & 7/4 \\ 0 & 0 & 11/2 \end{bmatrix}}_{U}$$

Esta estratégia nos leva às matrizes *L* e *U* da decomposição de Doolittle.