

SIMON HAYKIN  
MICHAEL MOHER

# Sistemas de Comunicação

QUINTA EDIÇÃO



# Modulação Angular

## Definição

- Modulação na qual o ângulo da portadora varia de acordo com o sinal em banda base.

$$s(t) = A_c \cos[\theta_i(t)]$$

*Onda modulada angular*

Neste tipo de modulação temos:

- Modulação em frequência (FM);
- Modulação em fase (PM);

# Modulação Angular

$$s(t) = A_c \cos[\theta_i(t)]$$

*Onda modulada angular*

- ❖ Se  $\theta_i(t)$  cresce monotonicamente com o tempo, a frequência média em Hz ao longo de um intervalo  $t + \Delta t$ , será:

$$f_{\Delta t}(t) = \frac{\theta_i(t + \Delta t) - \theta_i(t)}{2\pi\Delta t}$$

- ❖ Desta forma podemos definir frequência instantânea do sinal com modulação angular como:

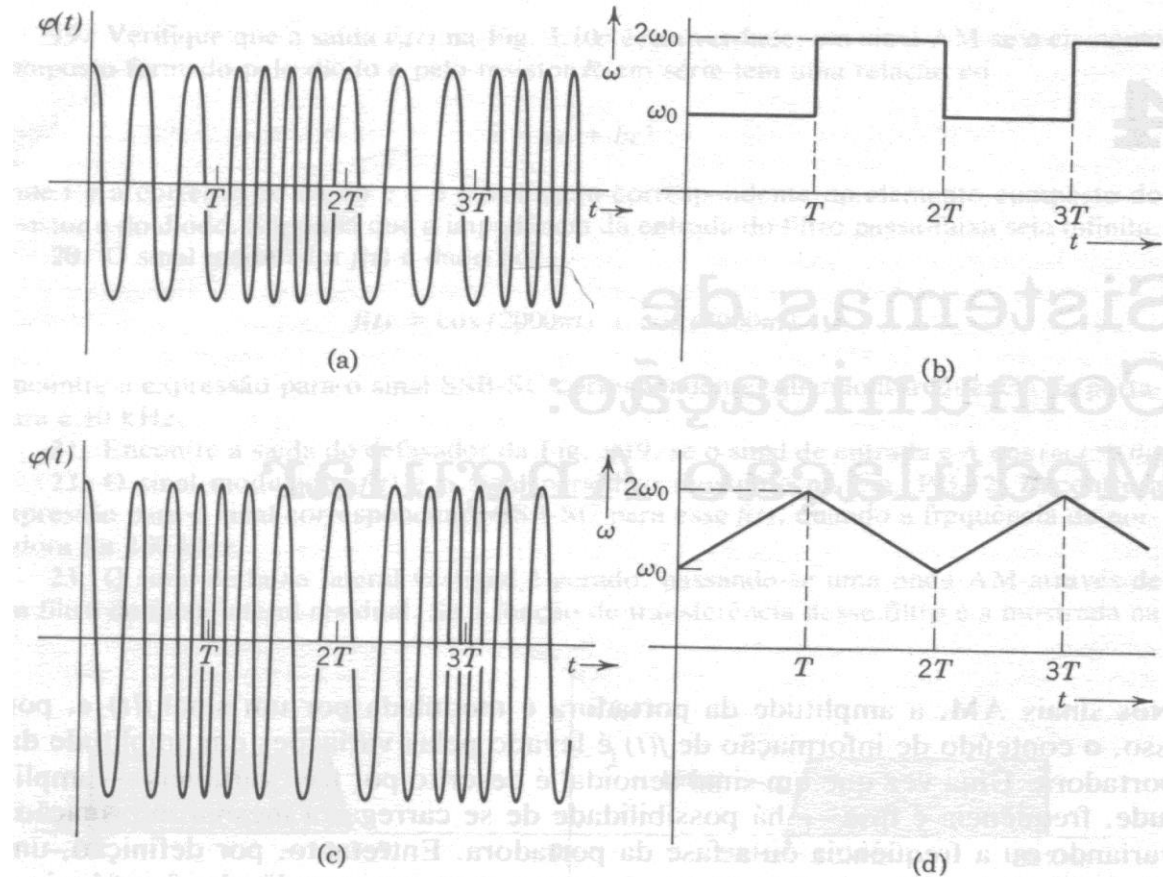
$$f_i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f_{\Delta t}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\theta_i(t + \Delta t) - \theta_i(t)}{2\pi\Delta t} \right] = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_i(t)}{dt}$$

Definição da derivada do ângulo em relação ao tempo

- ❖ Em uma portadora não modulada

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + \phi_c$$

# Frequência instantânea



$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_i(t)}{dt}$$
$$W_i(t) = \frac{d\theta_i(t)}{dt}$$

➤ É a variação de  $\theta_i(t)$  com o tempo.

➤ Em uma portadora não modulada, temos:

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + \phi_c$$

# Modulação em Fase (PM)

- Modulação em fase: O ângulo da portadora varia linearmente com o sinal de mensagem  $m(t)$ .

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + k_p m(t)]$$

$$W_i(t) = \frac{d\theta_i(t)}{dt} = 2\pi f_c + k_p \frac{dm(t)}{dt}$$

- O sinal modulado será:

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + k_p m(t)]$$

- $f_c$  é a frequência da portadora não modulada;
- $k_p$  é a sensibilidade à fase do modulador em rad/V;

# Modulação em Frequência (FM)

- Modulação em frequência: A frequência instantânea varia linearmente com a portadora.

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t)$$

- ❑  $f_c$  é a frequência da portadora não modulada;
- ❑  $k_f$  é a sensibilidade à frequência do modulador Hz/v;

# Modulação em Frequência (FM)

- ❑ A frequência instantânea de um sinal é dada por:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_i(t)}{dt}$$

- ❑ Assim, se a partir da frequência, quisermos obter a fase tem-se que:

$$\theta_i(t) = 2\pi \int f_i \cdot dt$$

# Modulação em Frequência (FM)

□ Assim, se quisermos obter um sinal FM, tem-se que:

$$s(t) = A_c \cos[\theta_i(t)] \quad (1)$$

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t) \quad (2)$$

$$\theta_i = 2\pi \int f_i \cdot dt \quad (3)$$

□ Substituindo (2) em (3), tem-se que:

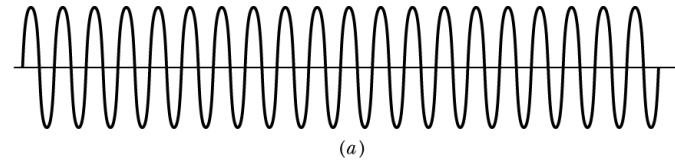
*POR COVENIÊNCIA ASSUMAMOS QUE O ÂNGULO DA ONDA PORTADORA NÃO MODULADA SEJA ZERO EM  $t=0$ .*

$$\theta_i = 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau$$

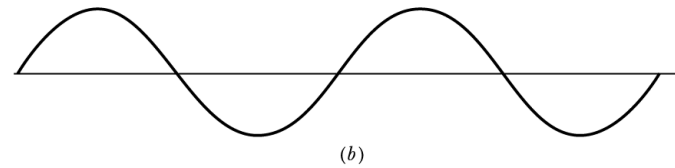
□ Finalmente, tem-se o sinal FM, dado por:

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau]$$

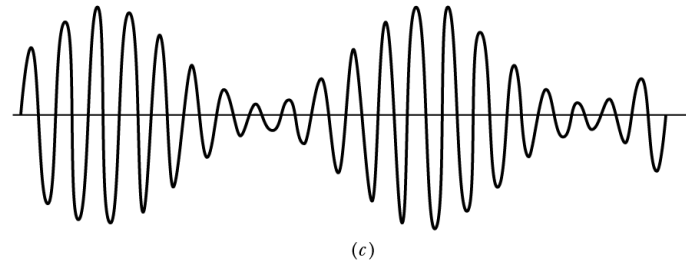




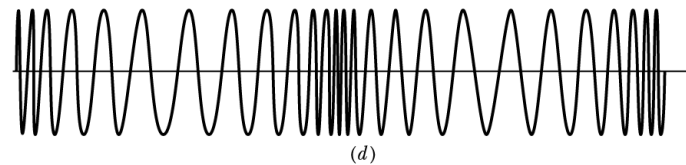
❖ PORTADORA



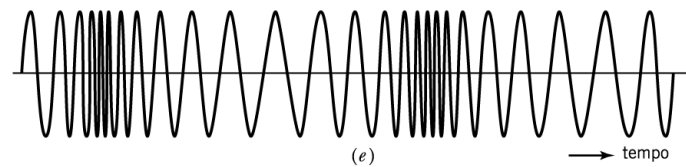
❖ MENSAGEM



❖ AM



❖ PM



❖ FM

**Figura 4.1** Ilustração de sinais AM, PM e FM produzidos por um tom único. (a) Onda portadora, (b) onda modulante senoidal, (c) sinal modulado em amplitude, (d) sinal modulado em fase, (e) sinal modulado em frequência.

# Propriedades das ondas com modulação angular

❖ PM

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + k_p m(t)]$$

❖ FM

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int m(\tau) d\tau]$$

**I. Constância da potência transmitida** – A amplitude da onda FM e PM se mantêm em um valor constante igual a amplitude da portadora  $A_c$ .

Consequentemente, assumindo a resistência de carga de  $1\Omega$ , a potência transmitida média de ondas com modulação angular é uma constante igual a:

$$P_{av} = \frac{1}{2} A_c^2$$

**II. Não linearidade do processo de modulação** –

Exemplo: Sinal de mensagem composto de duas diferentes componentes.

$$m(t) = m_1(t) + m_2(t)$$

Ondas PM produzidas:

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + k_p (m_1(t) + m_2(t))]$$

$$s_1(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + k_p m_1(t)]$$

$$s_2(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + k_p m_2(t)]$$

$$s(t) \neq s_1(t) + s_2(t)$$

Viola o princípio da superposição





## Propriedades das ondas com modulação angular

**III. Irregularidade de cruzamento em zero** – Os cruzamentos em zero de uma onda FM e PM não tem a mais perfeita regularidade em seu espaçamento ao longo da escala de tempo.

**IV. Dificuldade de visualização da forma de onda da mensagem** – Característica da não linearidade das ondas com modulação angular.

**V. Relação de compromisso entre o aumento da largura de banda de transmissão e a melhora no desempenho em relação a ruído** – O ângulo de uma onda portadora é menos sensível à presença de ruído do que a AM. Em contrapartida, na modulação angular uma largura de banda maior é requerida.

**Assim, existe a possibilidade de se trocar um aumento na largura de banda de transmissão por um melhoramento no desempenho em relação a ruído.**



## Cruzamento em zero

Consideremos uma onda modulante:  $m(t) = \begin{cases} at, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

$$f_c = \frac{1}{4} \text{ Hz} \quad a = 1 \text{ volt/s}$$

➤ Modulação em fase:

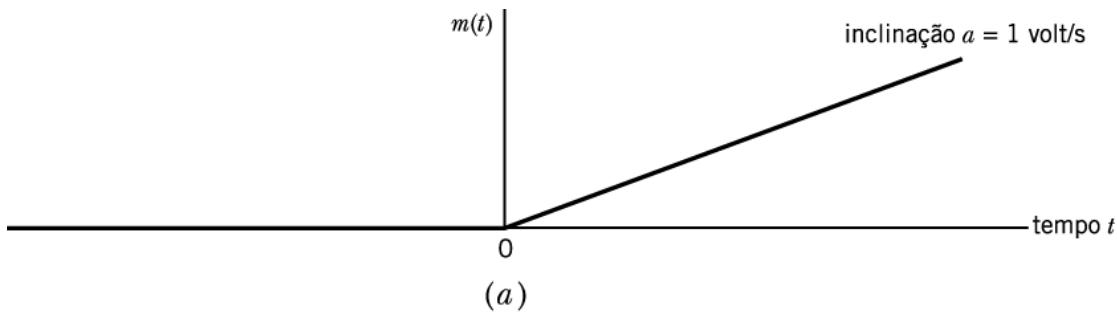
$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + k_p m(t)]$$

$$s(t) = \begin{cases} A_c \cos(2\pi f_c t + k_p at), & t \geq 0 \\ A_c \cos(2\pi f_c t), & t < 0 \end{cases}$$

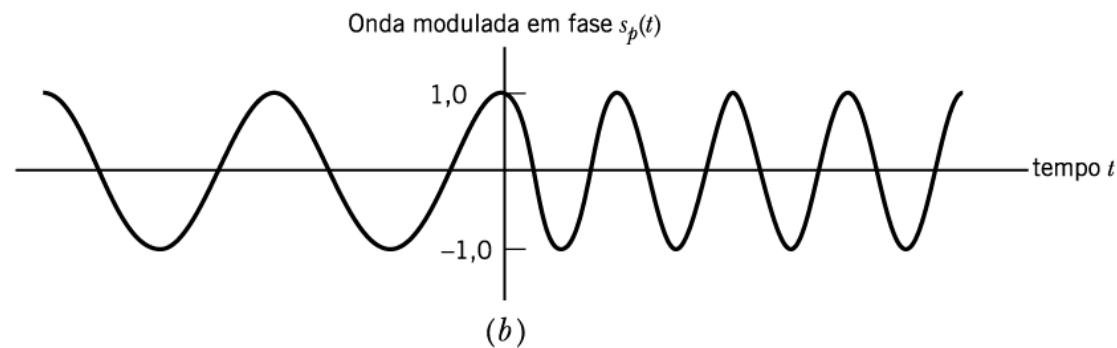
➤ Modulação em frequência:

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int m(\tau) d\tau]$$

$$s(t) = \begin{cases} A_c \cos(2\pi f_c t + \pi k_f at^2), & t \geq 0 \\ A_c \cos(2\pi f_c t), & t < 0 \end{cases}$$

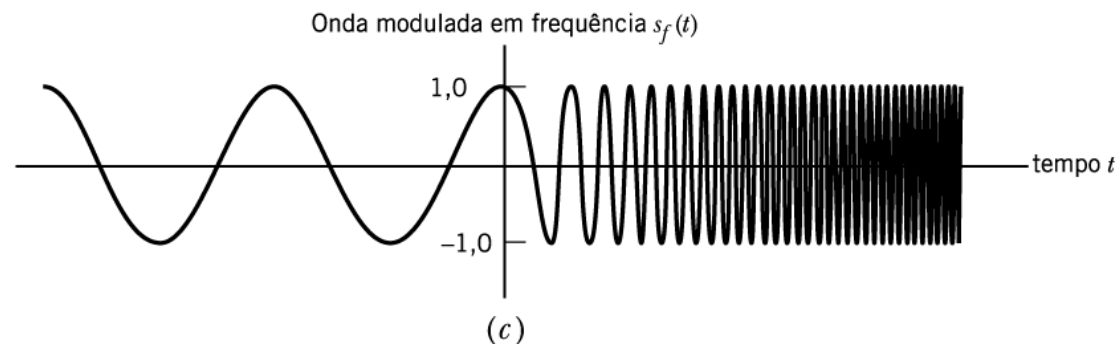


$$m(t) = \begin{cases} at, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



➤ Modulação em fase:

$$s(t) = \begin{cases} A_c \cos(2\pi f_c t + k_p at), & t \geq 0 \\ A_c \cos(2\pi f_c t), & t < 0 \end{cases}$$



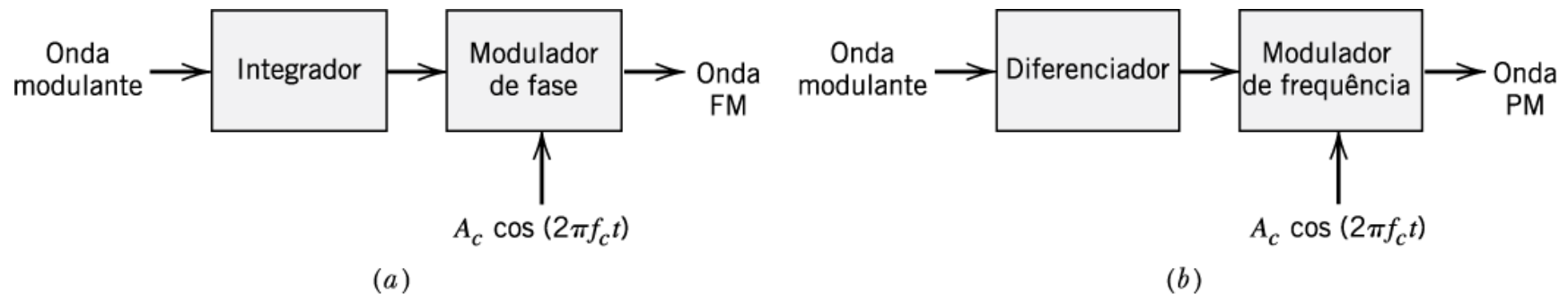
➤ Modulação em frequência:

$$s(t) = \begin{cases} A_c \cos(2\pi f_c t + \pi k_f at^2), & t \geq 0 \\ A_c \cos(2\pi f_c t), & t < 0 \end{cases}$$

**Figura 4.2** Começando no tempo  $t = 0$ , a figura mostra (a) aumento linear do sinal de mensagem  $m(t)$ , (b) onda modulada em fase, (c) onda modulada em frequência.

# Relação entre modulação FM e PM

- (a) Esquema de geração de FM usando um modulador de fase.  
 (b) Esquema de geração de PM usando um modulador de frequência.



**Figura 4.3** Ilustração da relação entre a modulação em frequência e a modulação em ângulo. (a) Esquema para a geração de uma onda FM utilizando um modulador em fase, (b) esquema para a geração de uma onda PM utilizando um modulador em frequência.

➤ Modulação em frequência:

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int m(t) dt]$$

➤ Modulação em fase:

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + k_p m(t)]$$

# Modulação em Frequência (FM)

- ❖ Observa-se que o processo de modulação FM é um processo não linear, pois o sinal  $s(t)$  é uma função não linear do sinal de mensagem  $m(t)$ .

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int m(t) dt]$$

- ❖ Isto dificulta sobremaneira a análise espectral do sinal, ao contrário do sistema de modulação em amplitude.

# Modulação em Frequência (FM)

- Consideremos um sinal senoidal como sinal modulador. Assim, tem-se que:

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$$

- Assim, a frequência instantânea do sinal modulado pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} f_i &= f_c + k_f A_m \cos(2\pi f_m t) = \\ &= f_c + \Delta f \cdot \cos(2\pi f_m t) \end{aligned}$$

- ❖ Onde  $\Delta f = k_f A_m$  é chamado de **desvio de frequência** e representa o afastamento máximo da frequência instantânea da portadora  **$f_c$** .



# Modulação em Frequência (FM)

□ Assim sendo, o sinal FM pode ser escrito como:

$$s(t) = A_c \cos[\theta_i(t)] \qquad f_i = f_c + \Delta f \cdot \cos(2\pi f_m t)$$

$$\theta_i(t) = 2\pi \int_0^t f_i(t) dt = 2\pi f_c t + \frac{\Delta f}{f_m} \cdot \text{sen}(2\pi f_m t) =$$

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + \beta \text{sen}(2\pi f_m t)$$

➤  $\beta = \Delta f / f_m$  - é chamado de **índice de modulação do sinal FM**.

# Modulação em Frequência (FM)

□ O sinal FM pode então ser escrito como:

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)]$$

- ✓ Se  $\beta$  for pequeno comparado a  $1 \text{ rad}$ , tem-se a modulação FM faixa estreita (*Narrowband FM*);
- ✓ Se  $\beta$  for grande comparado a  $1 \text{ rad}$ , tem-se a modulação FM faixa larga (*Wideband FM*);

# Modulação FM Faixa Estreita

□ Através da relação anterior tem-se que:

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)] = \\ A_c \cos(2\pi f_c t) \cdot \cos[\beta \sin(2\pi f_m t)] - A_c \sin(2\pi f_c t) \cdot \sin[\beta \sin(2\pi f_m t)]$$

□ Considerando  $\beta \ll 1 \text{ rad}$ , tem-se que:

$$\cos[\beta \cdot \sin(2\pi f_m t)] \approx 1$$

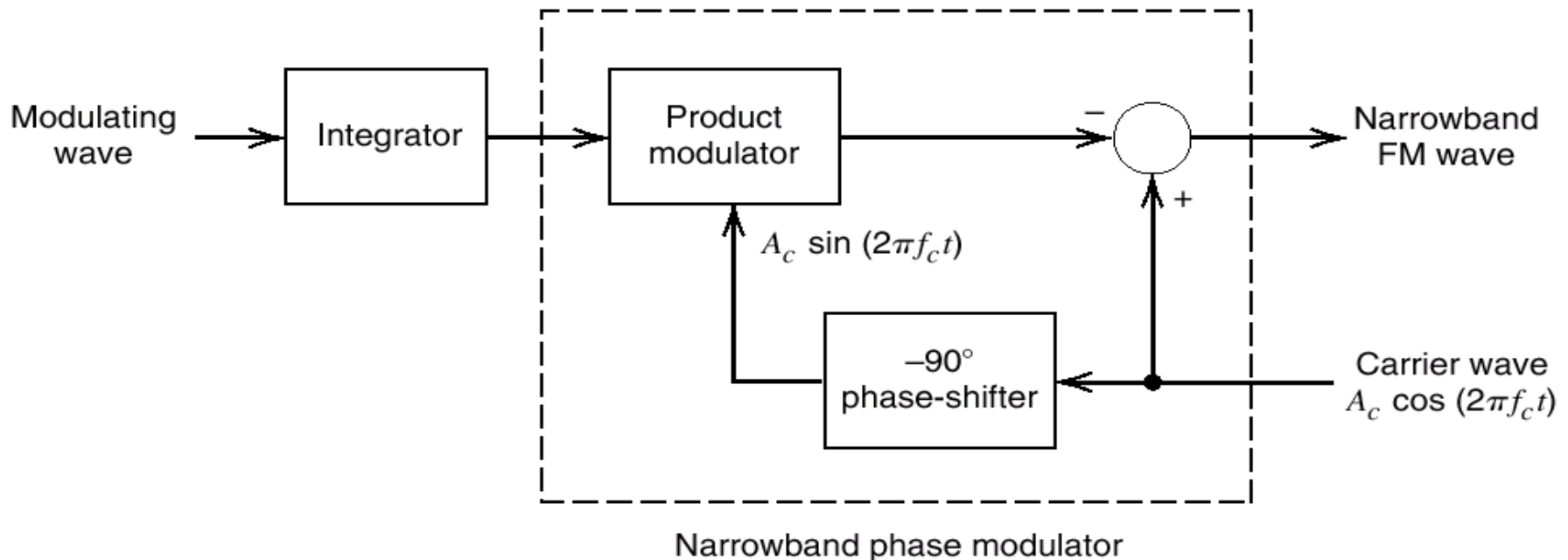
$$\sin[\beta \cdot \sin(2\pi f_m t)] \approx \beta \cdot \sin(2\pi f_m t)$$

□ Sinal FM fica assim:

$$s(t) \cong A_c \cos(2\pi f_c t) - \beta \cdot A_c \sin(2\pi f_c t) \cdot \sin(2\pi f_m t)$$

# Método de geração de FM faixa estreita - diagrama de blocos

$$s(t) \cong A_c \cos(2\pi f_c t) - \beta.A_c \sin(2\pi f_c t).\sin(2\pi f_m t)$$



❑ O sinal FM faixa estreita fica assim:

$$s(t) \cong A_c \cos(2\pi f_c t) - \beta \cdot A_c \sin(2\pi f_c t) \cdot \sin(2\pi f_m t)$$

$$\rightarrow S(f) = \frac{A_c}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + \frac{A_c \beta}{2j} [G_M(f - f_c) - G_M(f + f_c)]$$

❑ Comparemos com o sinal AM:

$$s(t) = A_c \cdot \cos(2\pi f_c t) + A_c k_a m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

$$\rightarrow S(f) = \frac{A_c}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + \frac{A_c \cdot k_a}{2} [M(f - f_c) + M(f + f_c)]$$

- ✓ Largura de faixa 2Wm;
- ✓ AM - Amplitude constante e espectro da faixa lateral em fase com a portadora;
- ✓ Ruído de fase.



## Ruído de fase:

- ✓ Uso não intencional da modulação em fase banda estreita;
  - ✓ Introduzido por osciladores em comunicação passa faixa;
  - ✓ Na modulação angular o ruído de fase tem um efeito multiplicativo.
- Supondo  $s(t)$  um sinal com modulação angular, e  $c(t)$  um oscilador receptor com ruído de fase de  $\phi_n(t)$ , então quando o sinal for transladado de  $f_c$  para  $f_b$ , a saída será:

$$s(t)c(t) = A_C \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] * \cos[2\pi(f_c - f_b)t + \phi_n(t)]$$

$$s(t)c(t) = \frac{A_C}{2} [\cos(2\pi f_b t + \phi(t) - \phi_n(t)) + \cos(2\pi(2f_c - f_b)t + \phi(t) + \phi_n(t))]$$

$$s(t)c(t) \approx \frac{A_C}{2} \cos[2\pi f_b t + \phi(t) - \phi_n(t)] \quad \text{➤ Após Filtro Passa Faixa}$$

- O ruído de fase devido a osciladores afeta diretamente a componente de informação do sinal com modulação angular.

# Modulação FM - Faixa larga

$$FM \quad s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)]$$

- O sinal FM pode ser escrito como:

$$s(t) = \text{Re}[A_c e^{j2\pi f_c t} \cdot e^{j\beta \sin(2\pi f_m t)}]$$

$$s(t) = \text{Re}[\tilde{s}(t) e^{j2\pi f_c t}]$$

$$\tilde{s}(t) = A_c e^{j\beta \sin(2\pi f_m t)}$$

- $\tilde{s}(t)$  é chamado de envoltória complexa do sinal FM.
- $\tilde{s}(t)$  é uma função periódica do tempo com uma frequência fundamental igual a frequência de modulação fm.
- Observe que a envoltória complexa é um sinal periódico, portanto é possível determinar a sua série de Fourier Complexa.

# Modulação FM - Faixa larga

❑ Série de Fourier complexa:  $\tilde{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn2\pi f_m t}$

❑ Onde os coeficientes de Fourier complexos são:  $c_n = f_m \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{s}(t) e^{-jn2\pi f_m t} dt$

❑ Envoltória complexa do sinal FM  $\tilde{s}(t) = A_c e^{j\beta \sin(2\pi f_m t)}$

$$c_n = f_m A_c \int_{-1/2 fm}^{1/2 fm} e^{[j\beta \sin(2\pi f_m t) - jn2\pi f_m t]} dt$$



# Modulação FM - Faixa larga

$$c_n = f_m A_c \int_{-1/2 f_m}^{1/2 f_m} e^{[j\beta \sin(2\pi f_m t) - jn 2\pi f_m t]} dt$$

Seja:  $x = 2\pi f_m t$

$$\frac{dx}{dt} = 2\pi f_m$$

$$c_n = \frac{A_c}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{[j\beta \sin(x) - jnx]} dx$$

Funções de Bessel de primeira espécie e n-ésima ordem e argumento  $\beta$ :

$$J_n(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{[j(\beta \sin(x) - nx)]} dx$$

Então:

$$c_n = A_c J_n(\beta)$$

# Modulação FM - Faixa larga

$$c_n = A_c J_n(\beta)$$

❖ Substituindo-se na representação inicial do sinal, tem-se que:

$$\tilde{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn2\pi f_m t}$$

Série de Fourier complexa

$$s(t) = \text{Re}[\tilde{s}(t) e^{j2\pi f_c t}]$$

Representação do sinal FM

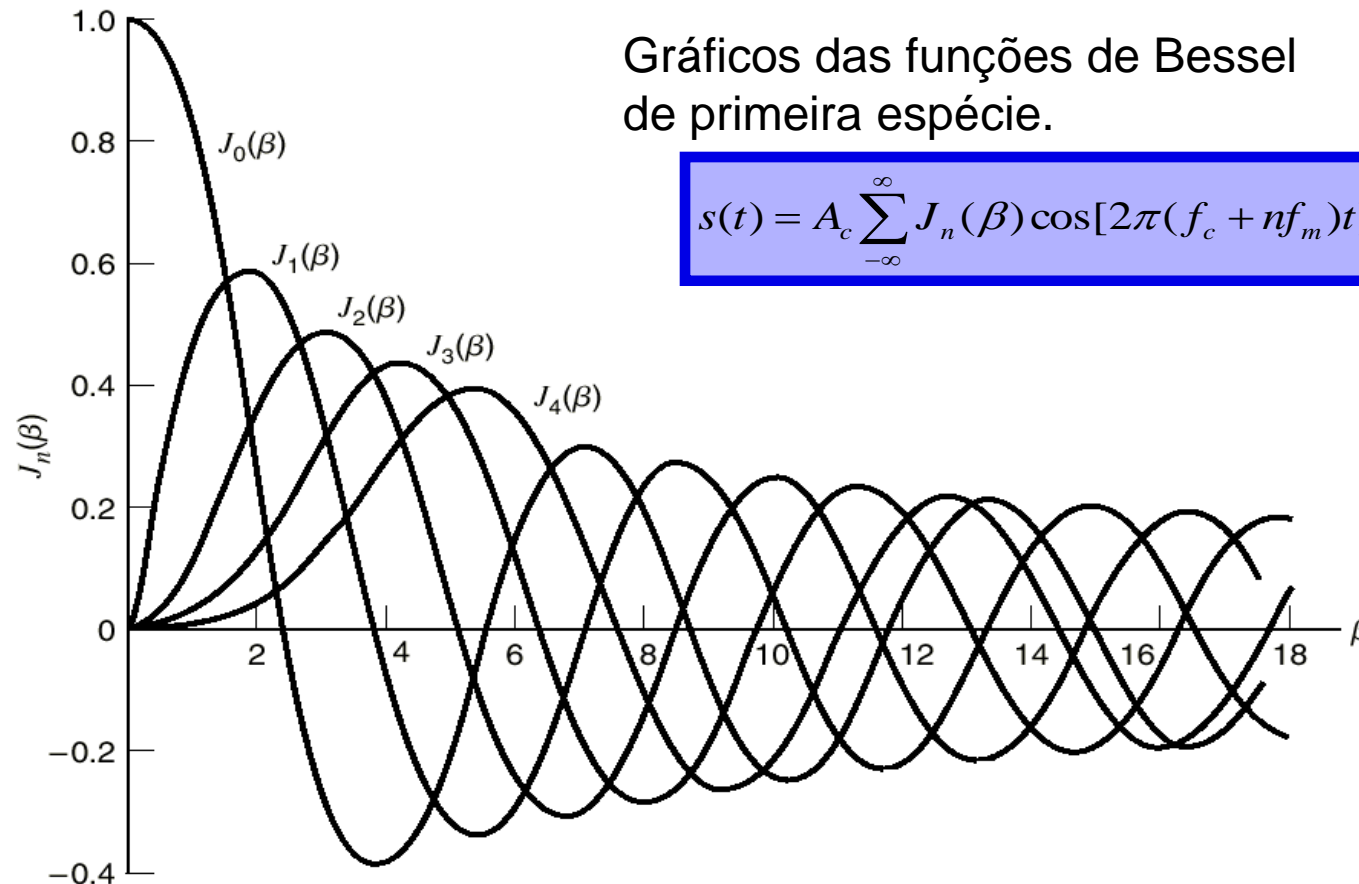
Representação da série de Fourier do sinal de FM,  $s(t)$ , para um valor arbitrário de  $\beta$

$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[2\pi(f_c + nf_m)t]$$

# Modulação FM - Faixa larga

O espectro discreto de  $s(t)$  é obtido tomando-se as Transformadas de Fourier de ambos os lados da equação:

$$S(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(\beta) [\delta(f - f_c - nf_m) + \delta(f + f_c + nf_m)]$$



$$s(t) = A_c \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[2\pi(f_c + nf_m)t]$$

$$\left. \begin{aligned} J_0(\beta) &\cong 1 \\ J_1(\beta) &\cong \beta/2 \\ J_n(\beta) &\cong 0 \end{aligned} \right\}$$

# Modulação FM - Faixa larga

- O espectro do sinal FM contém uma componente portadora e um conjunto infinito de frequências laterais localizadas simetricamente em qualquer um dos lados e em separações de  $fm$ ,  $2fm$ ,  $3fm$  ...
- $\beta \ll 1$  – Apenas os coeficientes de Bessel  $J_0(\beta)$  e  $J_1(\beta)$  têm valores significativos. Então o sinal FM será composto de uma portadora e um par de frequências laterais em  $fc \pm fm$  (caso especial de FM banda estreita).
- A amplitude da componente portadora varia com o índice de modulação ( $\beta$ ) de acordo com  $J_0(\beta)$ , pois a envoltória de um sinal FM é constante. A potência média desse sinal, desenvolvida através de um resistor de  $1\Omega$ , será:

$$P = \frac{1}{2} A_c^2$$

$$P = \frac{1}{2} A_c^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1$$

# Largura de Faixa para transmissão FM

- ✓ UM SINAL FM CONTÉM UM NÚMERO INFINITO DE FREQUENCIAS LATERAIS, LOGO SUA LARGURA DE BANDA É INFINITA.

## ❖ Regra de Carson's (empírica)

$$B_T \cong 2\Delta_f + 2f_m = 2\Delta_f \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

$$\Delta f = k_f \cdot A_m$$

- ✓ Desvio de frequência - afastamento máximo da frequência da portadora  $f_c$ .

$$\beta = \frac{\Delta_f}{f_m}$$

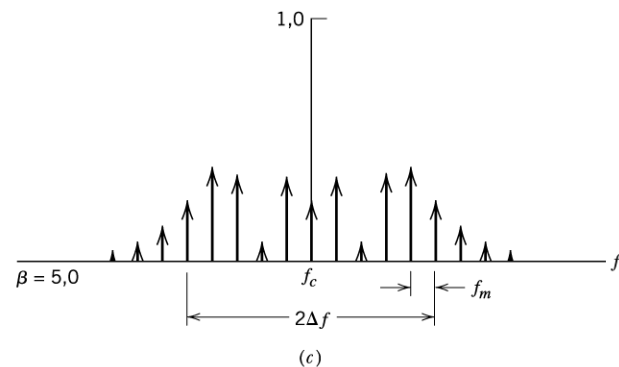
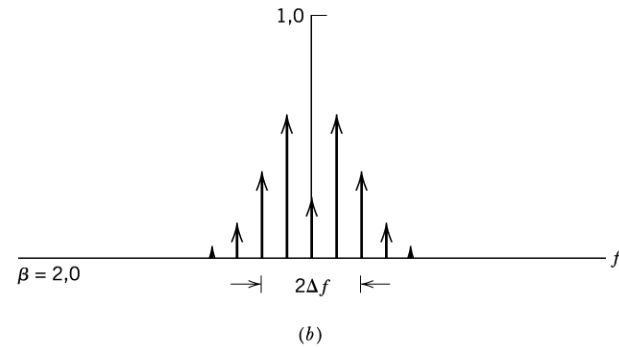
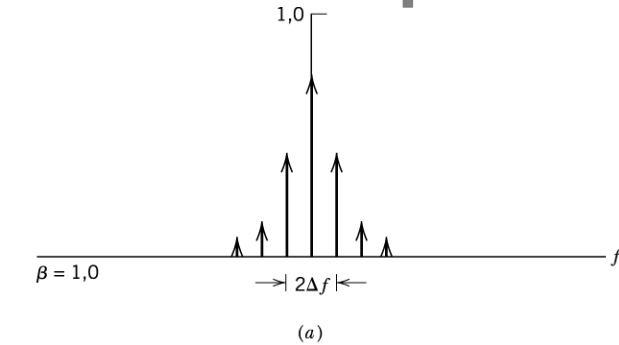
- ✓ Índice de modulação do sinal FM.

# Espectro de um sinal FM

Frequência fixa e amplitude variável

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m}$$

$\Delta f = k_f \cdot A_m$  Desvio de frequência - afastamento máximo da frequência da portadora  $f_c$ .



$$B_T \cong 2\Delta f + 2f_m = 2\Delta f \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

**Figura 4.7** Espectros de magnitude discretos para um sinal FM, normalizados em relação à amplitude da portadora, para o caso da modulante senoidal de frequência fixa e amplitude variável. Apenas os espectros correspondentes às frequências positivas são mostrados.

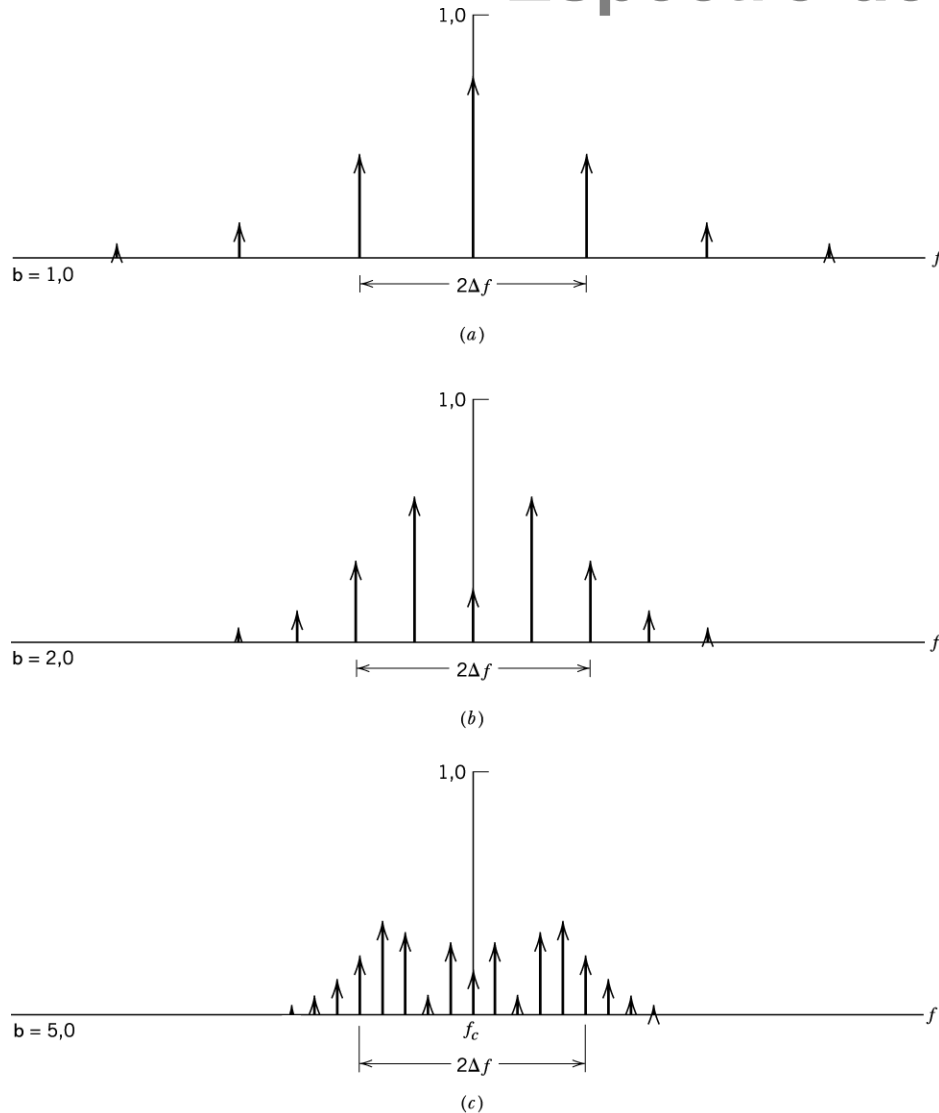
# Espectro de um sinal FM

Frequência variável e amplitude fixa

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} \quad \Delta f = k_f A_m$$

$$B_T \cong 2\Delta f + 2f_m = 2\Delta f \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

- Quando  $\beta$  se aproxima do infinito, a largura de banda da onda FM se aproxima do valor limite de  $2\Delta f$ .



**Figura 4.8** Espectros de magnitude discretos para um sinal FM, normalizados em relação à amplitude da portadora, para o caso da modulante senoidal de frequência variável e amplitude fixa. Apenas os espectros correspondentes às frequências positivas são mostrados.

# Largura de Faixa para transmissão FM

- ✓ UM SINAL FM CONTÉM UM NÚMERO INFINITO DE FREQUENCIAS LATERAIS, LOGO SUA LARGURA DE BANDA É INFINITA.

- ❖ Regra de Carson's (empírica)

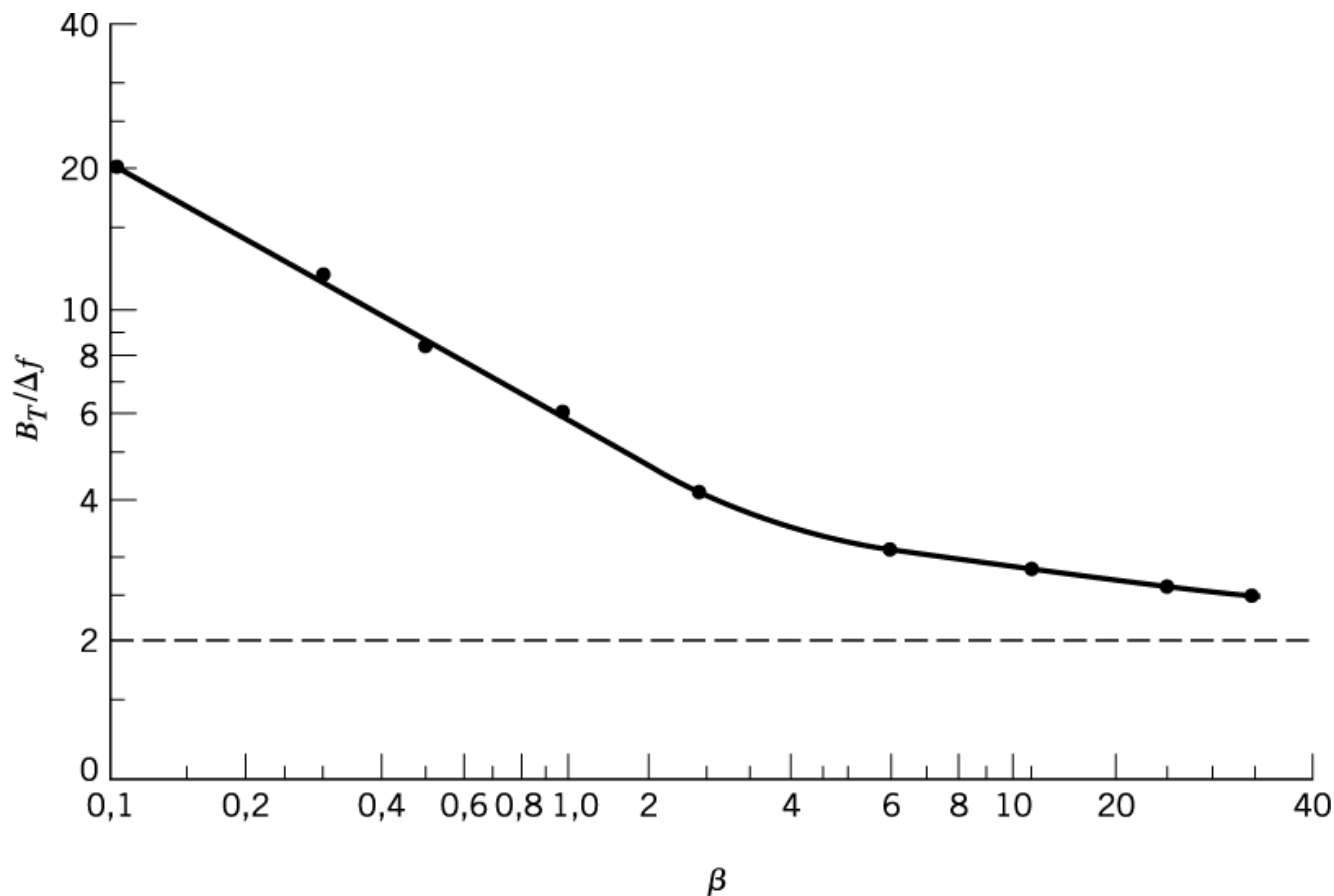
$$B_T \cong 2\Delta_f + 2f_m = 2\Delta_f \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

## ❖ Critério de 1%

Largura de Banda de transmissão de uma onda FM como a separação entre as duas frequências além das quais nenhuma das frequências laterais é maior que 1% da amplitude de portadora obtida quando a modulação é retirada.



# Modulação Faixa Larga



**Figura 4.9** Curva universal para avaliar a largura de banda de 1% de uma onda FM.

Curva universal para avaliar a largura de banda pelo critério de 1% de uma onda FM.

**Exemplo:**

## Exemplo

Nos Estados Unidos, o máximo valor do desvio de frequência  $\Delta f$  é 75 kHz para FM comercial. Se a largura em banda base é de 15 kHz, que é tipicamente a máxima frequência de áudio de interesse, qual é largura de faixa requerida.

## Exemplo


O índice de modulação é dado pela razão entre o desvio máximo de frequência e a máxima frequência do sinal de modulação, ou seja:

$$\beta = \frac{\Delta_f}{f_m} = \frac{75 \text{ kHz}}{15 \text{ kHz}} = 5$$

De acordo com o critério da regra de Carson

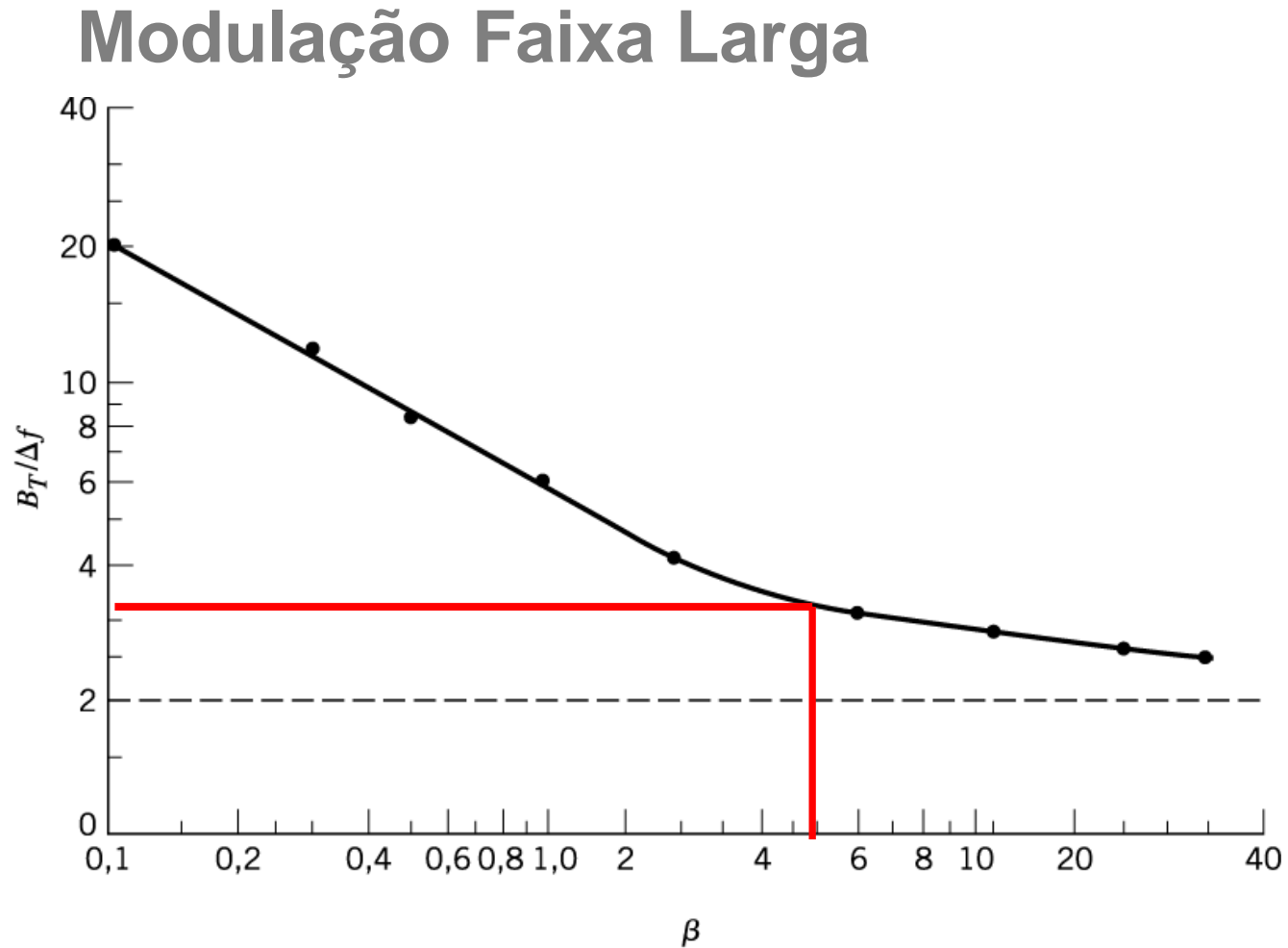
$$B_T = 2\Delta_f \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = 2 * 75k \left(1 + \frac{15k}{75k}\right) = 180k Hz \quad \beta = \frac{\Delta_f}{f_m}$$

## Exemplo

De acordo com o critério de 1%, analisando-se o gráfico dado anteriormente, tem-se que: 

$$B_T = 3.2\Delta f = 3.2(75) = 240 \text{ kHz}$$

Na prática é alocada para cada rádio FM uma largura de faixa de 200 kHz



**Figura 4.9** Curva universal para avaliar a largura de banda de 1% de uma onda FM.

# Oscilador

Circuitos eletrônicos que geram sinais de corrente alternada a partir de uma tensão contínua de alimentação, sem a necessidade da aplicação de um sinal externo.

Os osciladores são construídos a partir de amplificadores realimentados de forma a tornar o circuito instável oscilando numa frequência fixa bem determinada.

## Geração de sinais FM - direta

Frequência de oscilação do Oscilador de Hartley

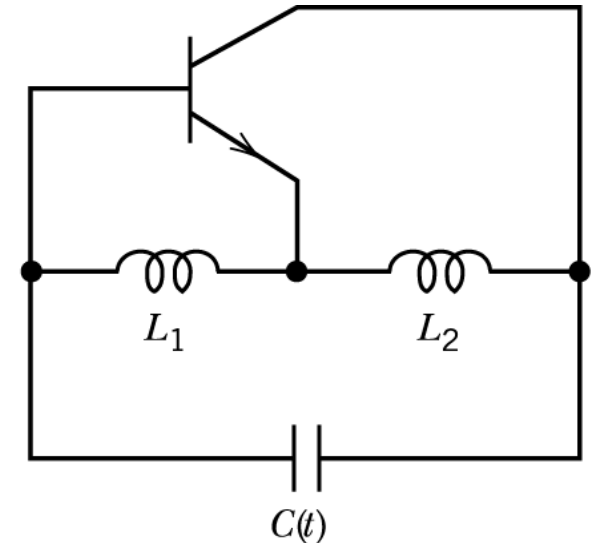
$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L_1 + L_2)C(t)}}$$

$$C(t) = C_0 + \Delta C \cos(2\pi f_m t)$$

Capacitância total = capacitor fixo + capacitor de tensão variável

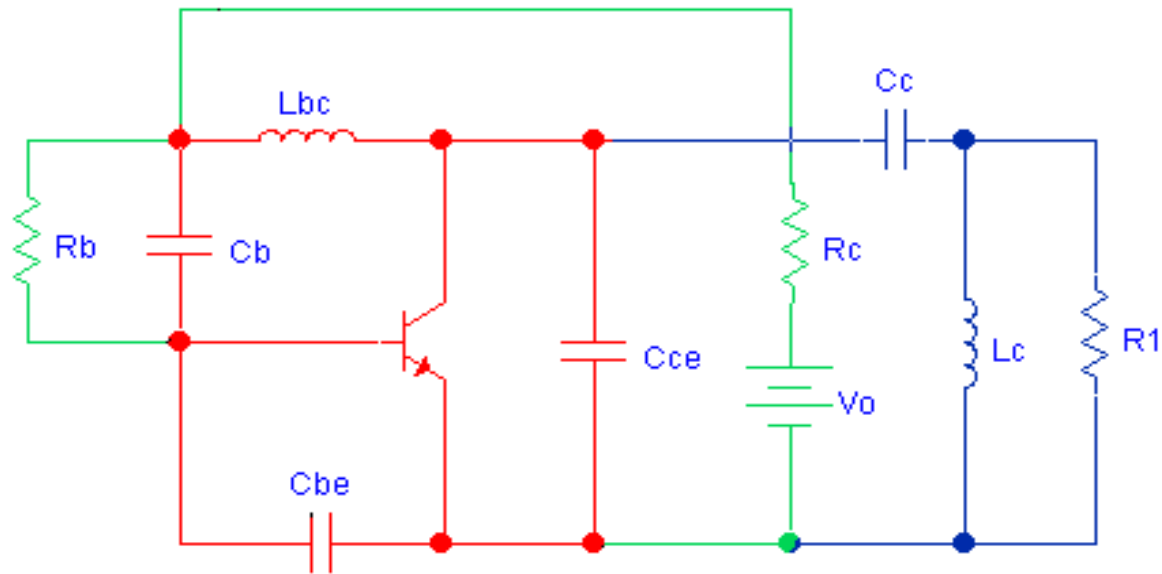
Após devidas considerações:

$$f_i(t) \cong f_0 + \Delta f \cos(2\pi f_m t)$$



**Figura 4.10** Oscilador de Hartley.

# Oscilador - Colpitts



$R_1$  - saída do oscilador

$C_c$  e  $L_c$  - realizam o casamento de impedâncias com  $R_1$

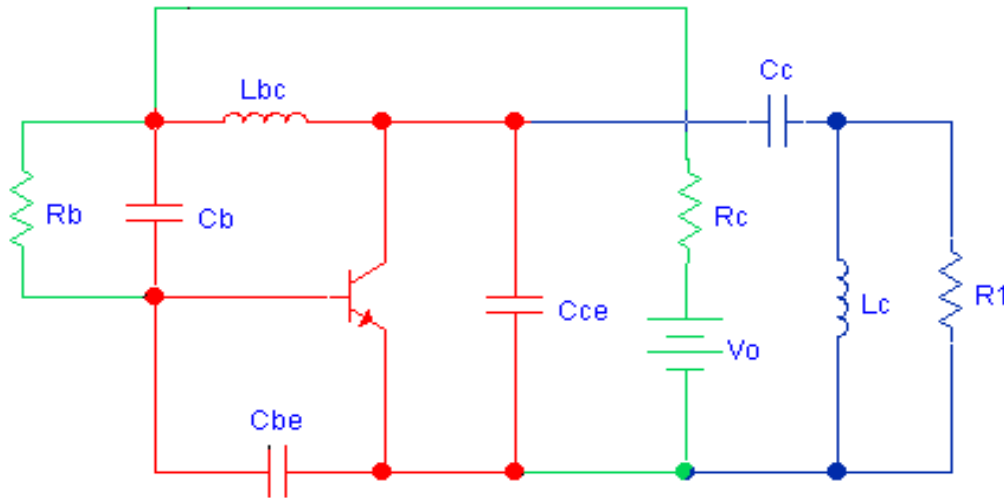
$C_b$  - comporta-se como um curto-circuito na frequência de oscilação

$R_b$  e  $R_c$  - fornecem o ponto ótimo de polarização do transistor a fim de obter o maior ganho de tensão possível a partir a fonte de tensão  $V_o$

$L_{bc}$ ,  $C_{be}$  e  $C_{ce}$  - produzem três realimentações paralelas no transistor de forma a tornar o circuito instável oscilando numa frequência determinada pelos seus valores.



# Oscilador



O **oscilador Colpitts** com frequência de oscilação:

$$F = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{C_{ce} + C_{be}}{L_{bc} \cdot C_{ce} \cdot C_{be}}}$$

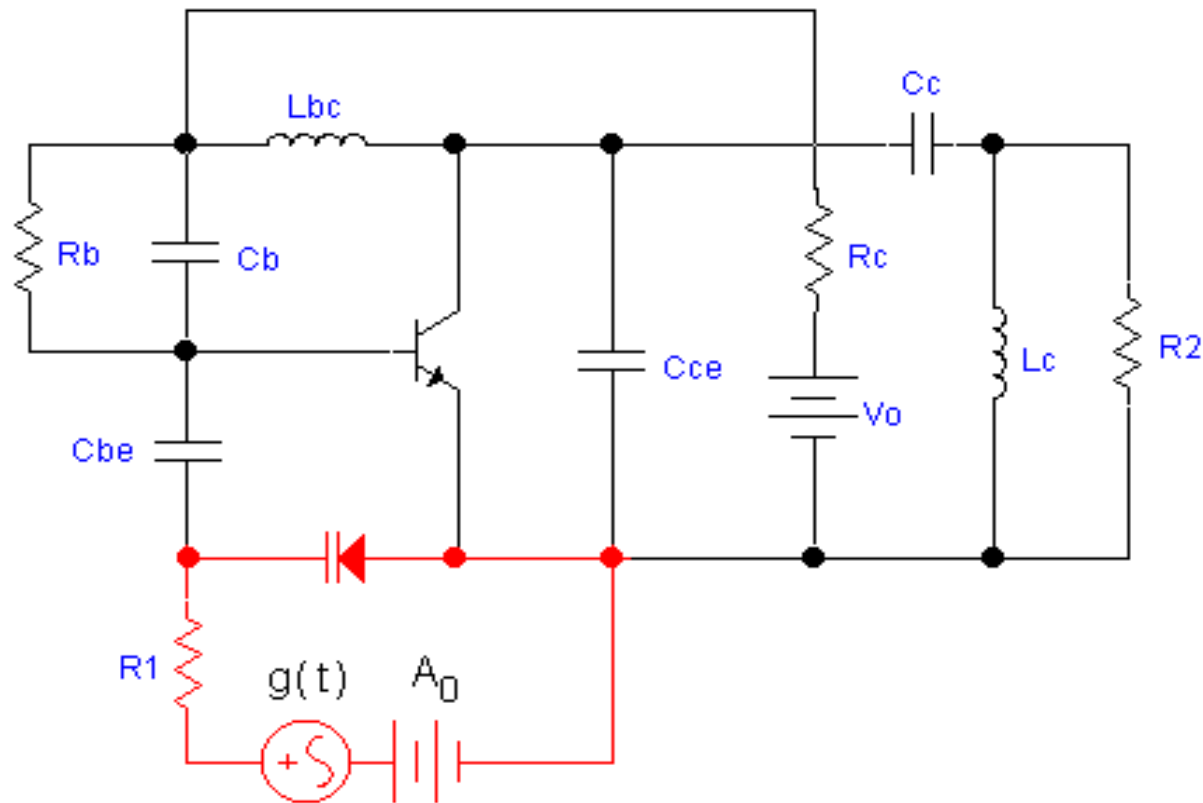
Adicionado  $C_{bc} \ll (C_{be} \text{ e } C_{ce})$  em série com o indutor  $L_{bc}$ , tem-se o **oscilador Clapp** cuja frequência de oscilação vale:

$$F = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L_{bc} \cdot C_{bc}}}$$

Substituído  $L_{bc}$  for por um cristal ressonante, tem-se o **oscilador Pierce** (XCO - cristal controlled oscillator), cuja frequência de oscilação é a própria frequência  $F$  de ressonância do cristal. ( alta estabilidade em frequência )

# Modulador FM

Um diodo varactor reversamente polarizado é utilizado para alterar a capacitância de um dos elementos que definem a frequência de oscilação do oscilador a transistor.



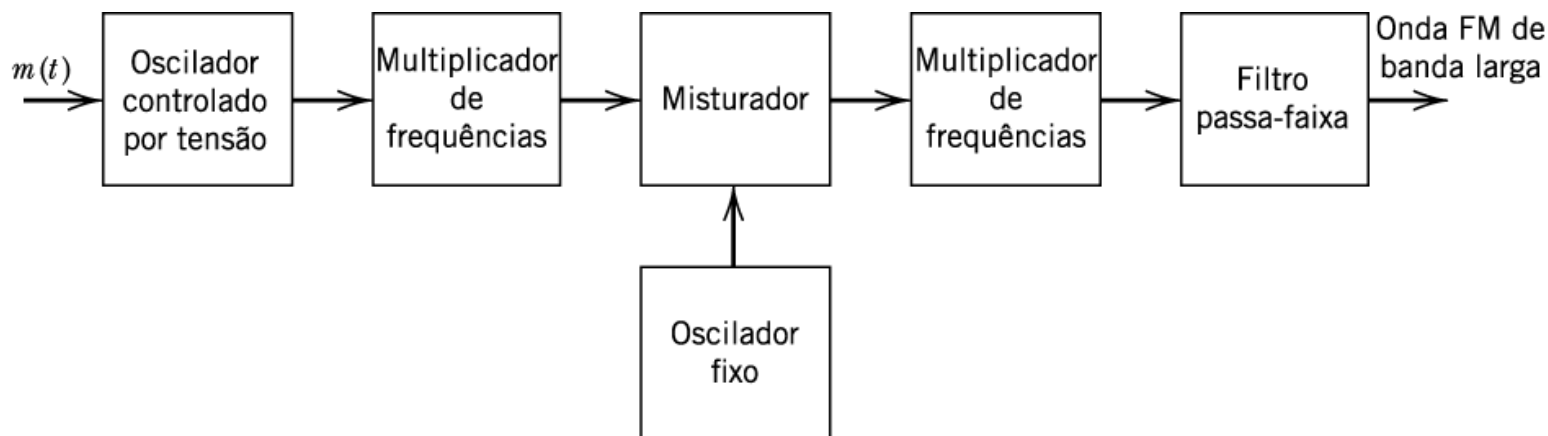
O circuito é um oscilador Colpitts no qual o valor de  $C_{be}$  é alterado pela conexão em série do diodo varactor, cuja capacitância é controlada pelo sinal modulador aplicado através de  $R1$ .

$$F(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L_{bc}}} \cdot \sqrt{1 + \frac{g(t)}{A_0} \cdot \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_{be}} + \frac{1}{C_{ce}}} = F + \frac{(F_0)^2}{4 \cdot F \cdot A_0} \cdot g(t)$$

$F(t)$  é a frequência instantânea do VCO.

Se  $g(t) \ll A_0$ , a frequência instantânea varia linearmente com o sinal modulador.

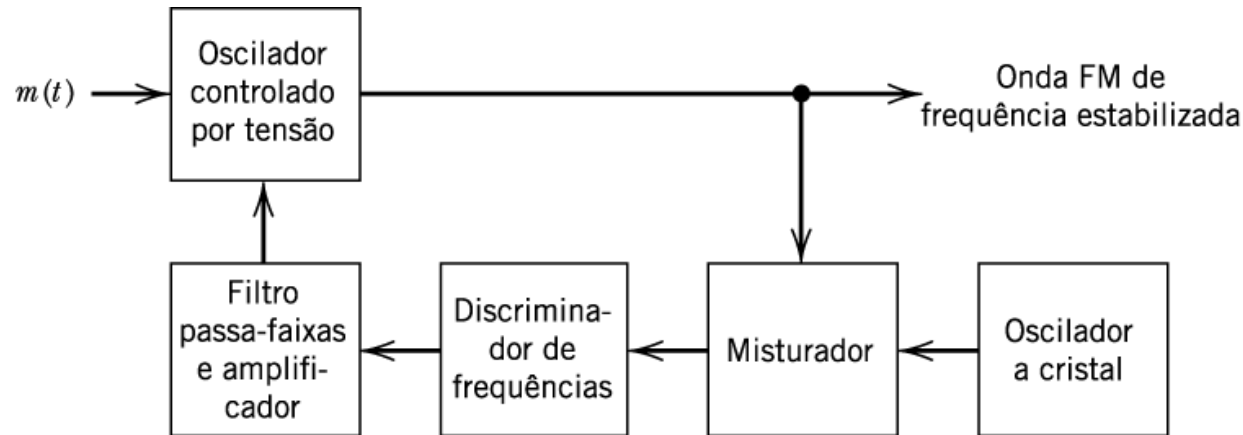
# Geração de sinais FM banda larga – Método direto



**Figura 4.11** Diagrama de blocos de um modulador de frequência de banda larga que utiliza um oscilador controlado por tensão.

Desvantagem: a frequência da portadora não é obtida de um oscilador altamente estável;

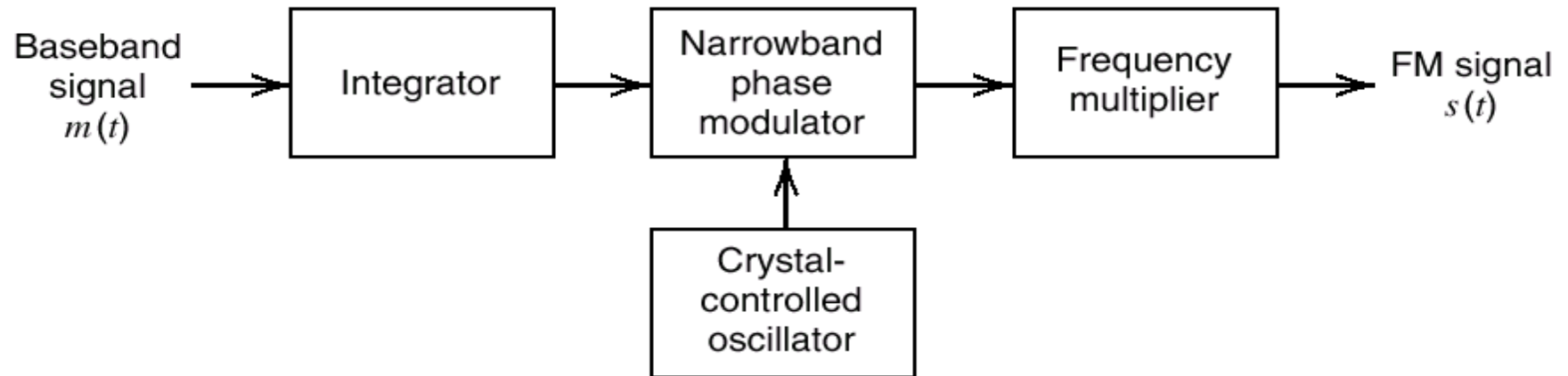
# Geração de sinais FM banda larga – Método direto



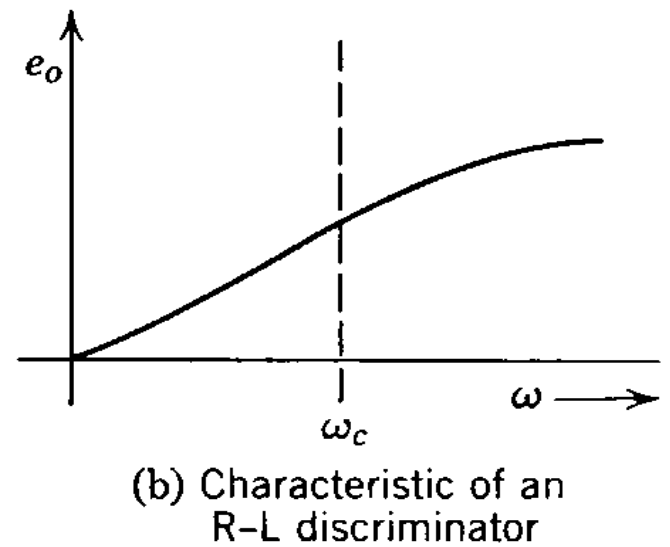
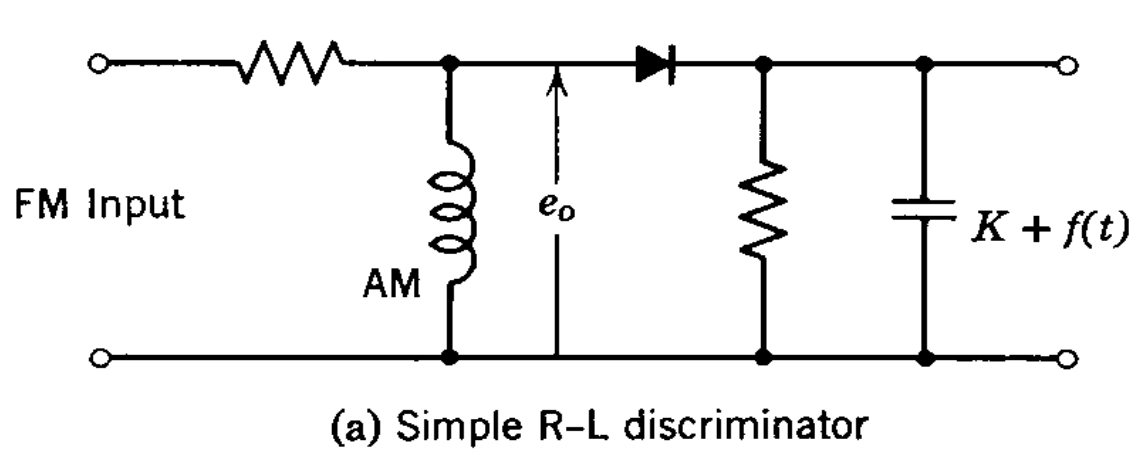
**Figura 4.12** Um esquema de realimentação para estabilização de frequência de um modulador de frequências.

- Uma frequência bastante estável gerada por um cristal será capaz de controlar a frequência da portadora;

# Diagrama de blocos da geração indireta do sinal de FM – Método de Armstrong

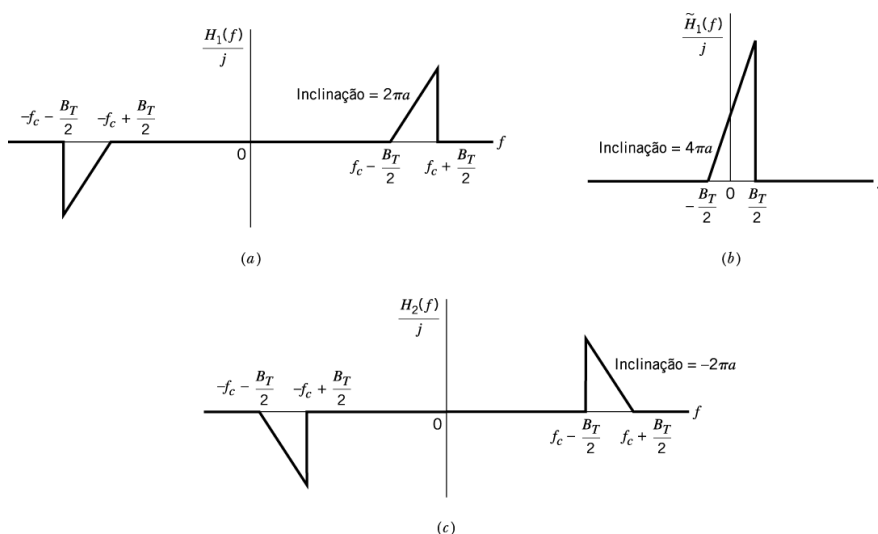
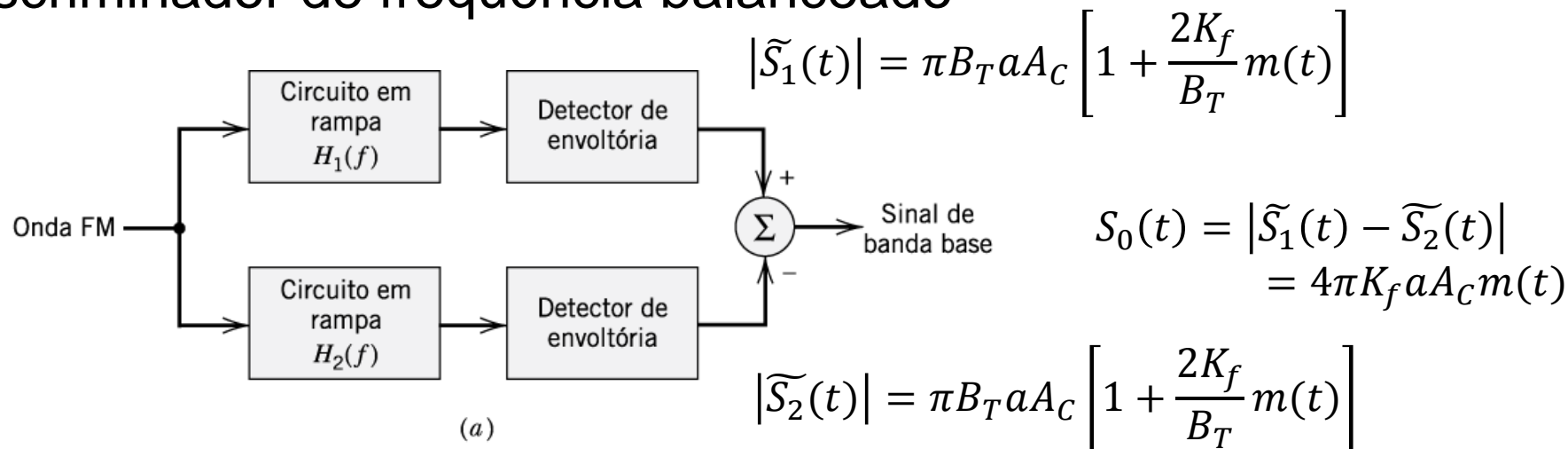


# Demodulação FM

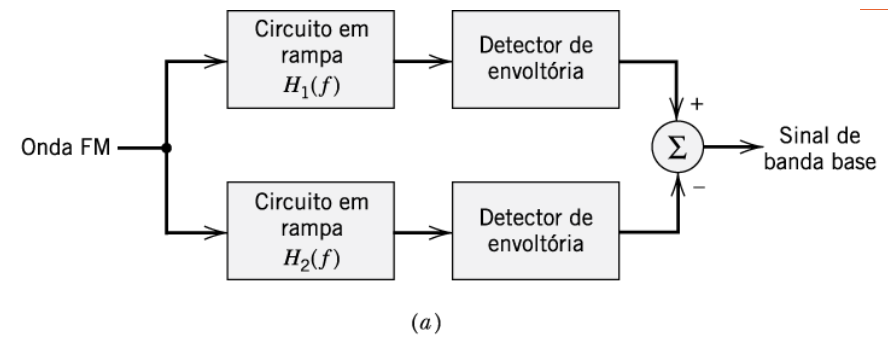
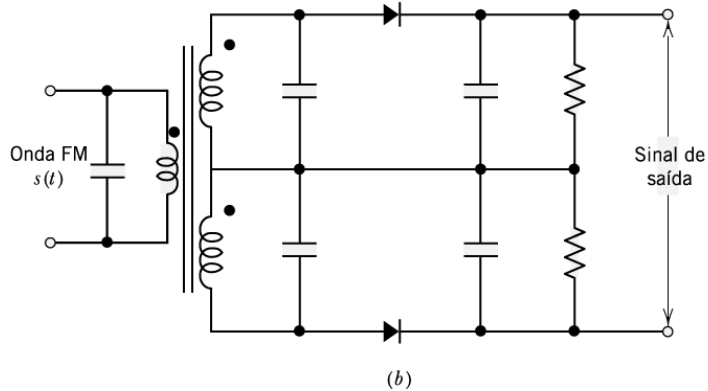


# Demodulação FM

## Discriminador de frequência balanceado

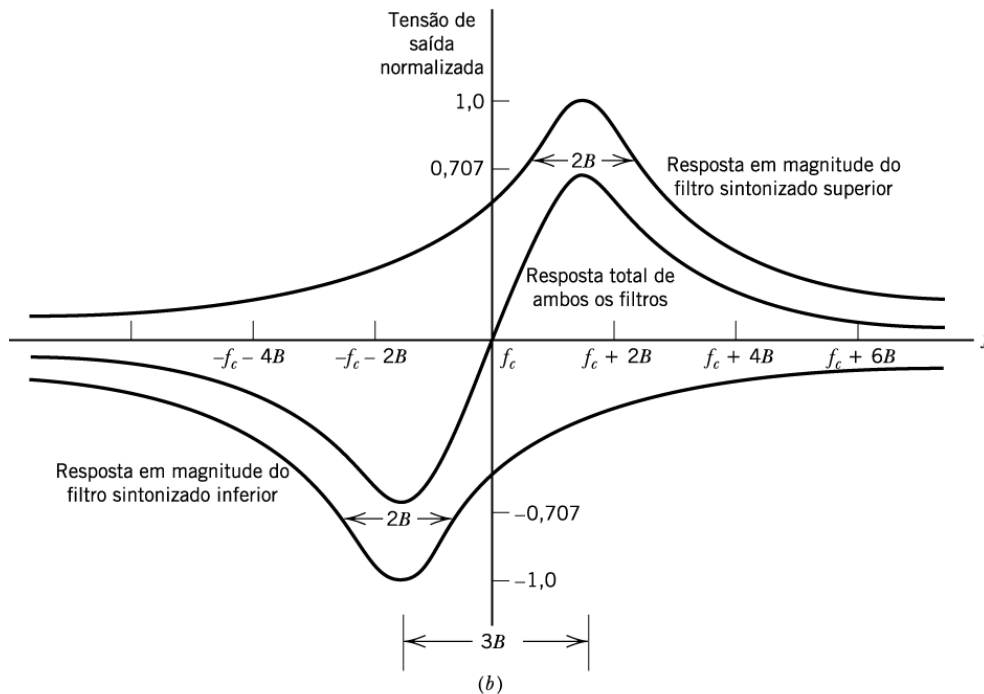


**Figura 4.13** (a) Resposta em frequência de um circuito em rampa ideal. (b) Resposta do circuito em rampa. (c) Resposta em frequência do filtro passa-baixas complexo equivalente ao circuito em rampa ideal complementar ao da parte (a).



## Demodulação FM

### Discriminador de frequência balanceado

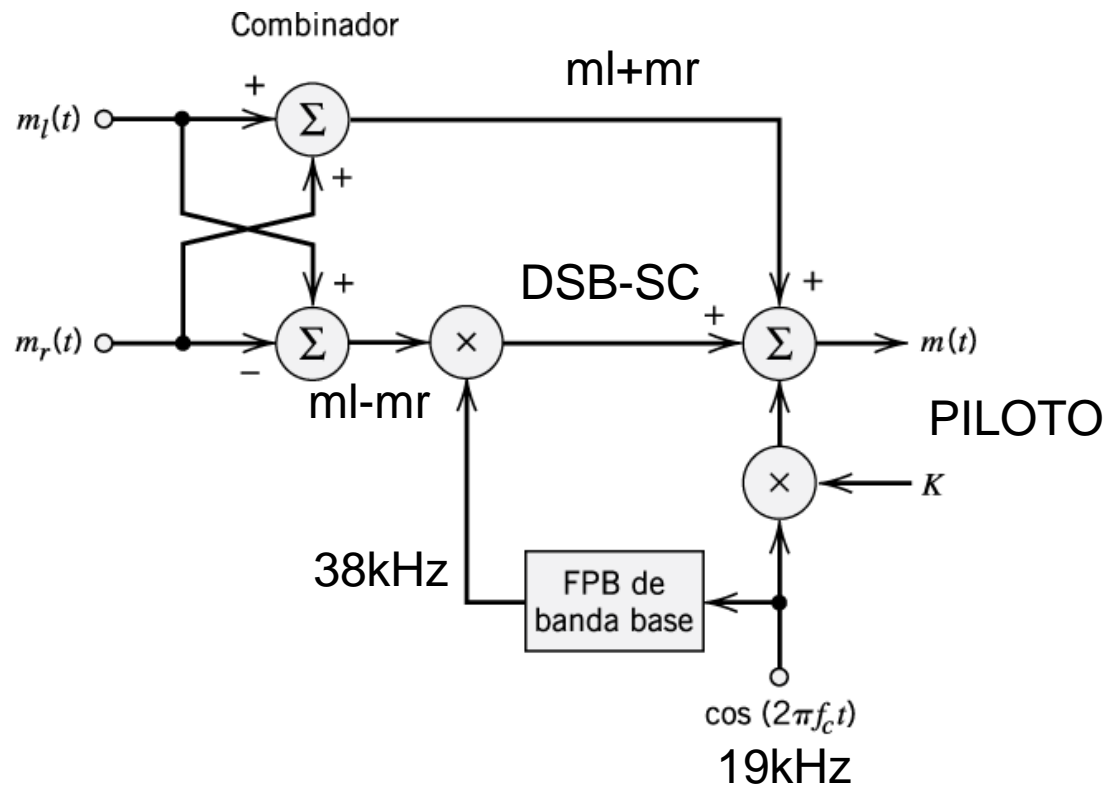


**Figura 4.14** Discriminador de frequências balanceado. (a) Diagrama de blocos. (b) Diagrama do circuito. (c) Resposta em frequência.



# Multiplexação Estereofônica de FM

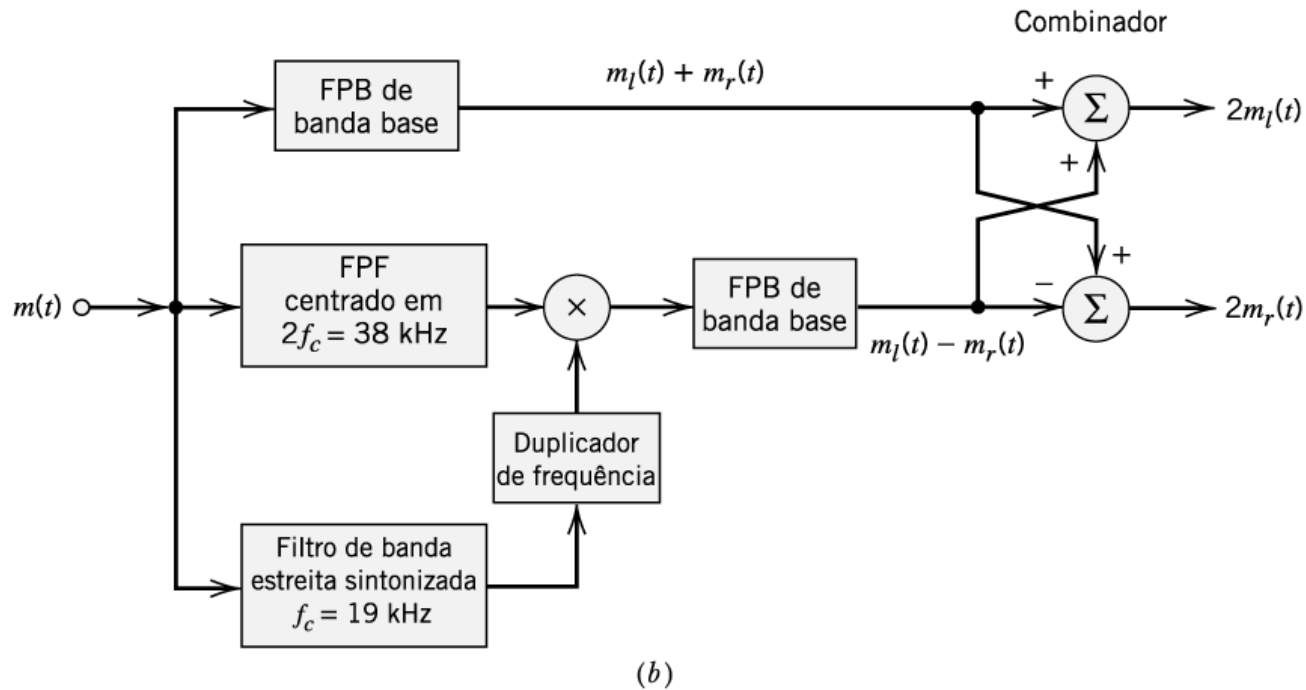
É uma forma de FDM projetado para transmitir dois sinais distintos através da mesma portadora.



$$m(t) = [m_L(t) + m_R(t)] + [m_L(t) - m_R(t)] \cos(4\pi f_c t) + k \cos(2\pi f_c t)$$

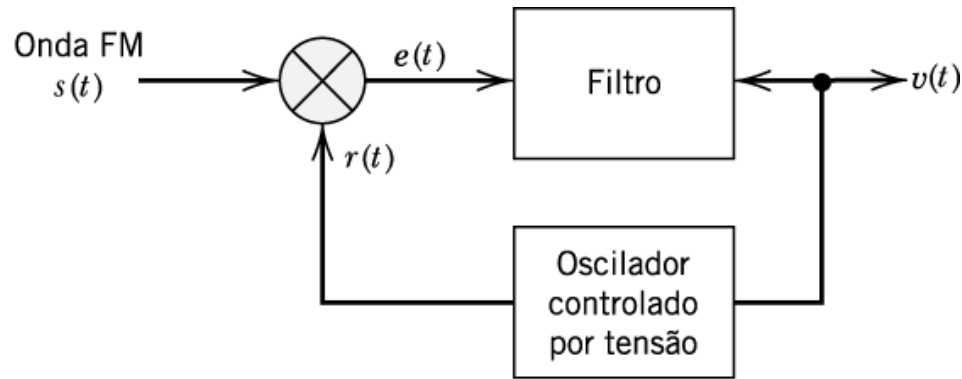
# Multiplexação Estereofônica de FM

$$m(t) = [m_L(t) + m_R(t)] + [m_L(t) - m_R(t)] \cos(4\pi f_c t) + k \cos(2\pi f_c t)$$



**Figura 4.15** (a) Multiplexador no transmissor de FM estéreo. (b) Demultiplexador no transmissor de FM estéreo.

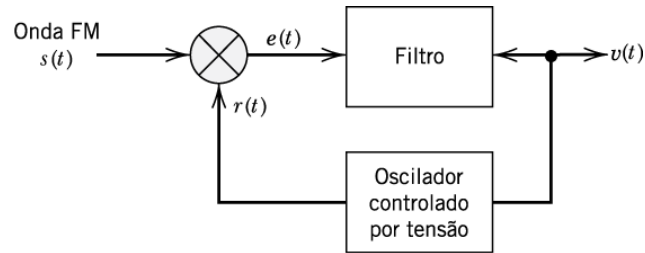
## Malha de Sincronismo de Fase PLL (*Phase-Locked Loop*)



**Figura 4.16** Malha de sincronismo de fase.

**Objetivo do PLL:** é gerar uma saída do VCO,  $r(t)$ , que tenha o mesmo ângulo de fase que o sinal FM de entrada  $s(t)$ .

# Malha de Sincronismo de Fase – PLL (*Phase-Locked Loop*)



**Figura 4.16** Malha de sincronismo de fase.

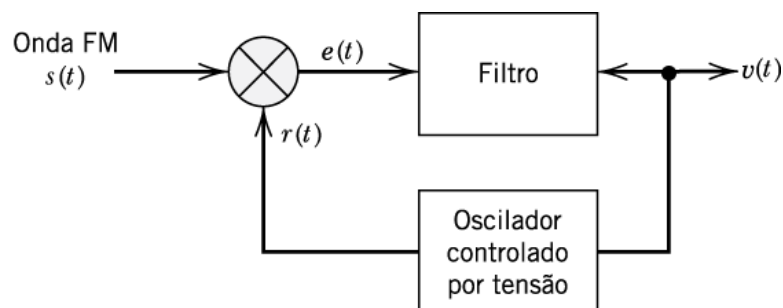
Suposição para o ajuste inicial de VCO, quando a tensão de controle for zero:

- A frequência do VCO é definida de maneira precisa na frequência da portadora não modulada  $f_c$ ;
- A saída VCO tem um deslocamento de fase de  $90^\circ$  em relação a portadora não modulada;

No VCO é gerador senoide cuja a frequência é determinada por uma fonte externa.

$k_v$  - É A SENSIBILIDADE À FREQUENCIA DO VCO MEDIDA EM HZ/V.

# Malha de Sincronismo de Fase – PLL (*Phase-Locked Loop*)

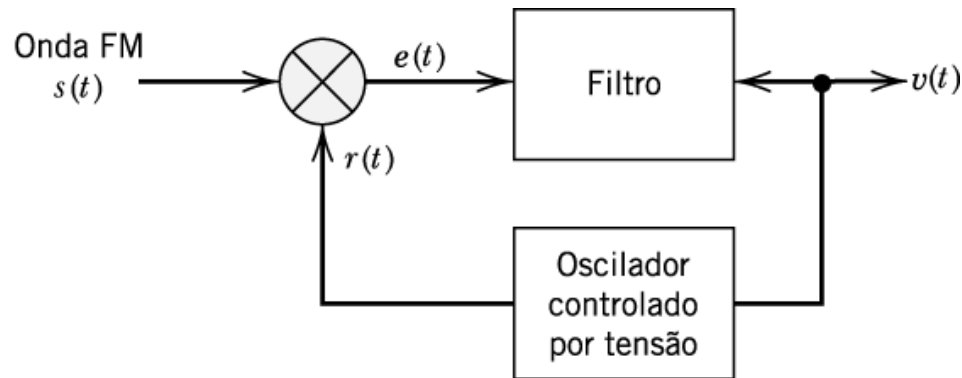


**Figura 4.16** Malha de sincronismo de fase.

O ângulo de fase  $\phi_1$  variante no tempo, que caracteriza  $s(t)$ , pode ser devido:

- à modulação por um sinal de mensagem  $m(t)$ ;
  - ❖ Recupera  $\phi_1$  a fim de estimar  $m(t)$ .
- a um deslocamento de fase indesejável causado por flutuações no canal de comunicação;
  - ❖ Rastreia  $\phi_1$  de forma a produzir um sinal que tenha o mesmo ângulo de fase para servir na **deteccção coerente**.

# Malha de Sincronismo de Fase – PLL (*Phase-Locked Loop*)



**Figura 4.16** Malha de sincronismo de fase.

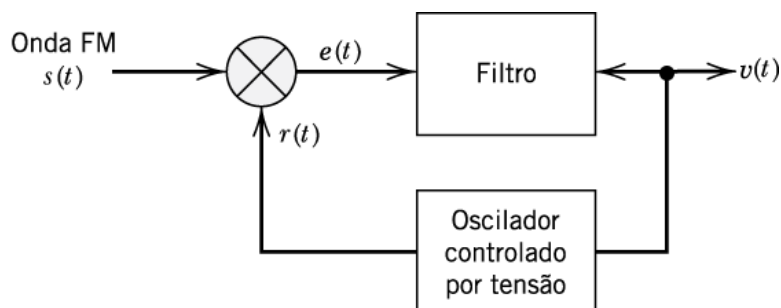
Suponha a entrada aplicada ao PLL, seja um sinal FM definido por:

$$s(t) = A_c \sin[2\pi f_c t + \phi_1(t)] \quad \phi_1(t) = 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau$$

Seja a saída do VCO no PLL definida por:

$$r(t) = A_v \cos[2\pi f_c t + \phi_2(t)] \quad \phi_2(t) = 2\pi k_v \int_0^t v(t) dt$$

# Malha de Sincronismo de Fase – PLL (*Phase-Locked Loop*)



**Figura 4.16** Malha de sincronismo de fase.

➤  $s(t)$  e  $r(t)$  são aplicados ao multiplicador, produzindo:

I. Uma componente em alta frequência:  $k_m A_C A_v \sin[4\pi f_C t + \phi_1(t) + \phi_2(t)]$

II. Uma componente em baixa frequência:  $k_m A_C A_v \sin[\phi_1(t) - \phi_2(t)]$

onde  $k_m$  é o ganho do multiplicador.

A componente em alta frequência é atenuada pelo VCO, resultando na entrada do filtro:  $e(t) = k_m A_C A_v \sin[\phi_e(t)]$

Ⓒ O erro de fase será:  $\phi_e(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t) = \phi_1(t) - 2\pi k_V \int_0^t v(\tau) d\tau$



# Malha de Sincronismo de Fase – PLL (*Phase-Locked Loop*)

- O filtro opera sobre o erro para produzir uma saída  $v(t)$  definida pela integral de convolução:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t - \tau) d\tau \quad h(t) - \text{Resposta ao impulso do filtro}$$

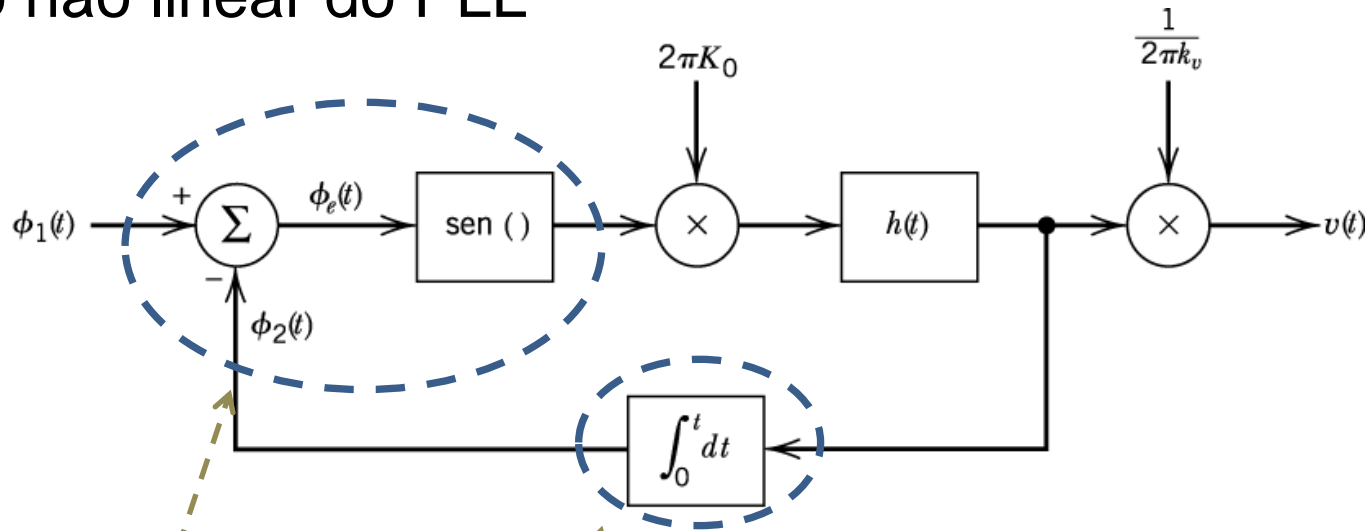
- Descrevendo o comportamento dinâmico do PLL por meio da eq. Diferencial não linear:

$$\frac{d\phi_e(t)}{dt} = \frac{d\phi_1(t)}{dt} - 2\pi k_0 \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}[\phi_e(\tau)]h(t - \tau) d\tau$$

$$k_0 = k_m k_v A_c A_v \quad \text{Parâmetro de ganho de malha}$$



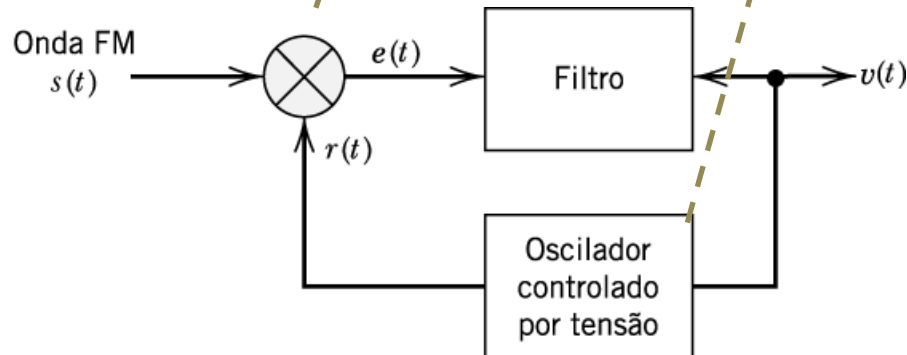
# Modelo não linear do PLL



**Figura 4.17** Modelo não linear do PLL.

$$\frac{d\phi_e(t)}{dt} = \frac{d\phi_1(t)}{dt} - 2\pi k_0 \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}[\phi_e(\tau)] h(t - \tau) d\tau$$

$$k_0 (\text{Hz}) = k_m (1/V) k_v (\text{Hz}/V) A_c (V) A_v (V)$$



**Figura 4.16** Malha de sincronismo de fase.

Quando o erro de fase é próximo de 0 (fase bloqueada) e a não linearidade pode ser desconsiderada.

## Modelo linear do PLL

$$\phi_e(t) < 0,5 \text{ rad}$$

$$\text{sen}[\phi_e(t)] \cong \phi_e(t)$$

- Comportamento dinâmico do PLL por meio da eq. Diferencial linear:

$$\frac{d\phi_e(t)}{dt} + 2\pi k_0 \int_{-\infty}^{\infty} \phi_e(\tau) h(t-\tau) d\tau = \frac{d\phi_1(t)}{dt}$$

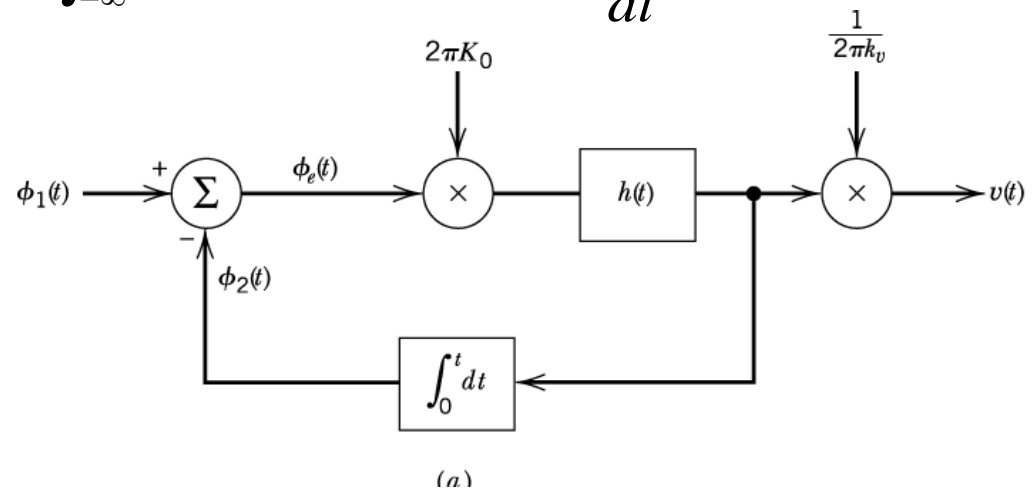
- Domínio da frequência (T. F.):

$$\phi_e(f) = \frac{1}{1 + L(f)} \phi_1(f)$$

- Sendo a função  $L(f)$  definida por:

$$L(f) = K_0 \frac{H(f)}{jf}$$

- $L(f)$  - função de transferência de malha aberta do PLL.  
 ➤  $H(f)$  - função de transferência do filtro.



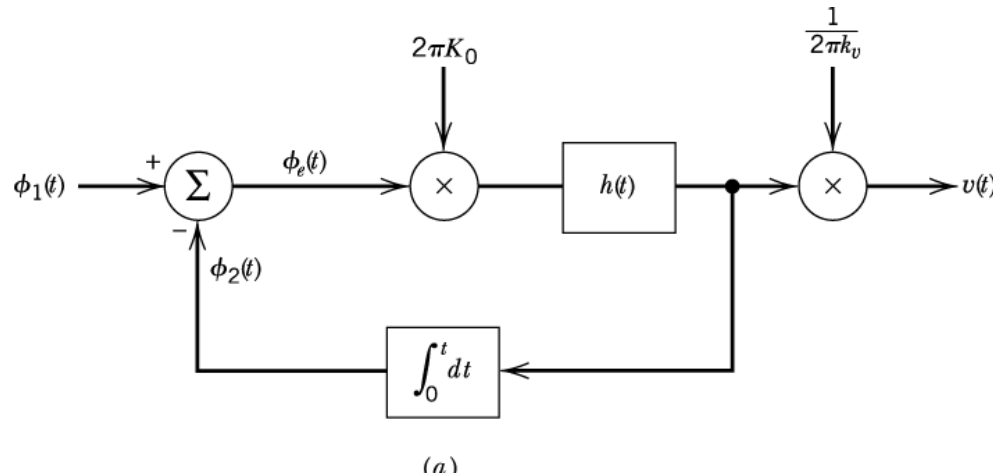


# Modelo linear do PLL

- ❖ Considerando a magnitude de  $L(f)$  muito grande em comparação com a unidade, para todos valores de  $f$  dentro da banda base.

$$\phi_e(f) = \frac{1}{1 + L(f)} \phi_1(f) \cong 0$$

- O PLL é estabilizado pois a fase do VCO se torna assintoticamente igual à fase do sinal de entrada.



$$V(f) = \frac{K_0}{k_v} H(f) \phi_e(f)$$

$$L(f) = K_0 \frac{H(f)}{jf}$$

$$V(f) = \frac{jf}{k_v} L(f) \phi_e(f)$$

$$\phi_e(f) = \frac{1}{1 + L(f)} \phi_1(f)$$

$$V(f) = \frac{(jf / k_v) L(f)}{1 + L(f)} \phi_1(f)$$

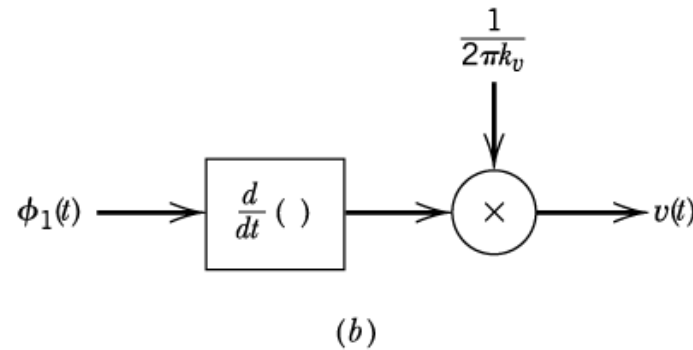
- $L(f) \gg 1$  para banda de frequência de interesse:

$$V(f) \cong \frac{jf}{k_v} \phi_1(f)$$

$$V(t) \cong \frac{1}{2\pi k_v} \frac{d\phi_1(t)}{dt}$$

Domínio do tempo

# Método indireto da utilização do PLL como demodulador de frequência



$$V(t) \cong \frac{1}{2\pi k_v} \frac{d\phi_1(t)}{dt}$$

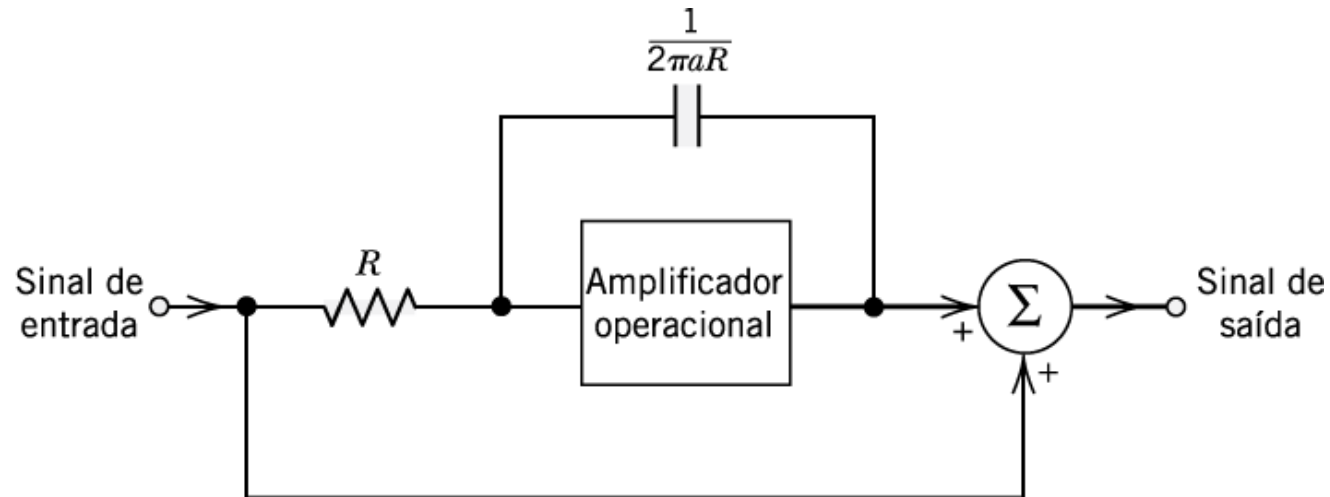
**Figura 4.18** Modelos do PLL. (a) Modelo linearizado. (b) Modelo simplificado quando o ganho de malha é muito grande em comparação com a unidade.

$$\phi_1(t) = 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau$$

$$V(t) \cong \frac{k_f}{k_v} m(t)$$

PLL de segunda ordem que utiliza um filtro com a função de transferência:

$$H(f) = 1 + \frac{a}{jf}$$



**Figura 4.19** Filtro para o PLL de segunda ordem.

# Receptor super-heteródino

Supera a dificuldade de se construir um filtro altamente seletivo e variável. Ex. receptores de rádio e TV

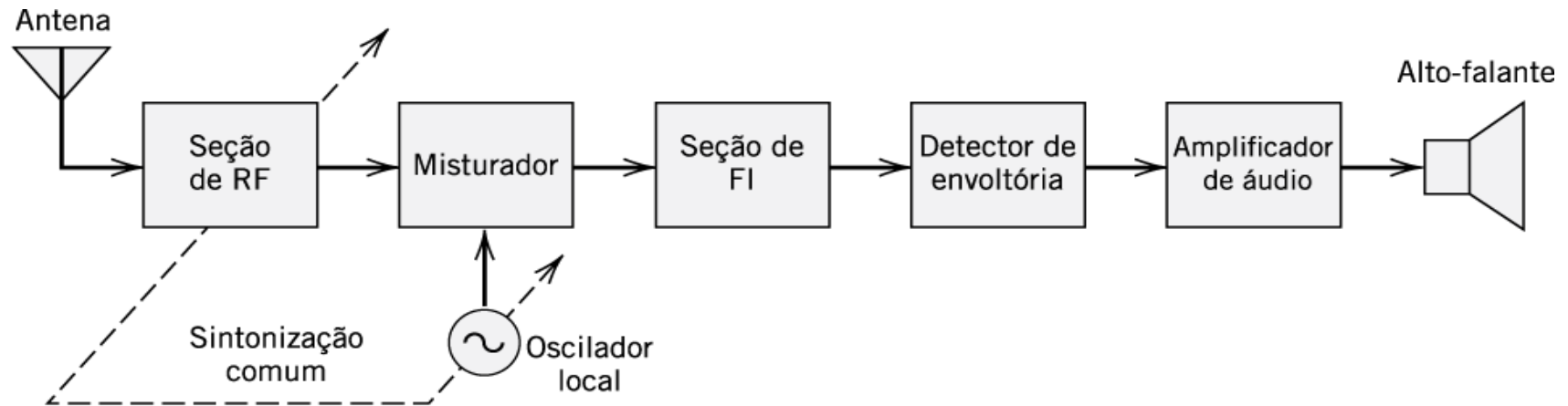
- Sintonização de frequência;
- Filtragem;
- Amplificação;

**Heterodinização** – O sinal é convertido para uma frequência intermediária fixa predeterminada, produzindo uma frequência definida por:

$$f_{FI} = f_{OL} - f_{RF}$$

**Interferência de imagem**

# Receptor super-heteródino



**Figura 4.21** Elementos básicos de um receptor AM do tipo super-heteródino.

	<i>Rádio AM</i>	<i>Rádio FM</i>
Banda da portadora de RF	0,535–1,605 MHz	88–108 MHz
Frequência de banda intermediária da seção de FI	0,455 MHz	10,7 MHz
Largura de banda de FI	10 kHz	200 kHz

## Etapa de F.I.

Principal responsável pela seletividade e pelo ganho do receptor.

# Exemplo temático – Telefone celulares analógicos e digitais

O **AMPS** (Advanced Mobile Phone System) utiliza múltiplo acesso por divisão de frequência (**FDMA**).

Canal (Transmissão e Recepção) com **30 kHz** de banda cada.

Os canais no AMPS utilizam **modulação FM** para transmissão de voz e **modulação FSK (chaveamento em frequência)** para transmissão de dados.

No AMPS, um canal de voz é alocado e permanece dedicado a uma chamada durante toda a sua duração.

❖ Regra de Carson's (empírica) 
$$B_T \cong 2\Delta_f + 2f_m = 2\Delta_f \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$
$$= 2 * (12 + 3) = 30kHz$$



# GSM (*Global System for Mobile Communications*)

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau\right]$$

$$m(t) = \sum_{k=0}^K b_k p(t - kT)$$

❑  $b_k$  são os bits que representam uma fonte de áudio.

❑  $p(t)$  – forma de pulso com espectro:

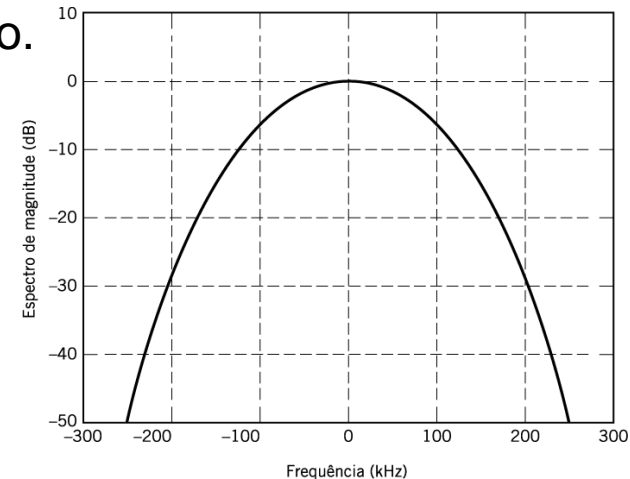


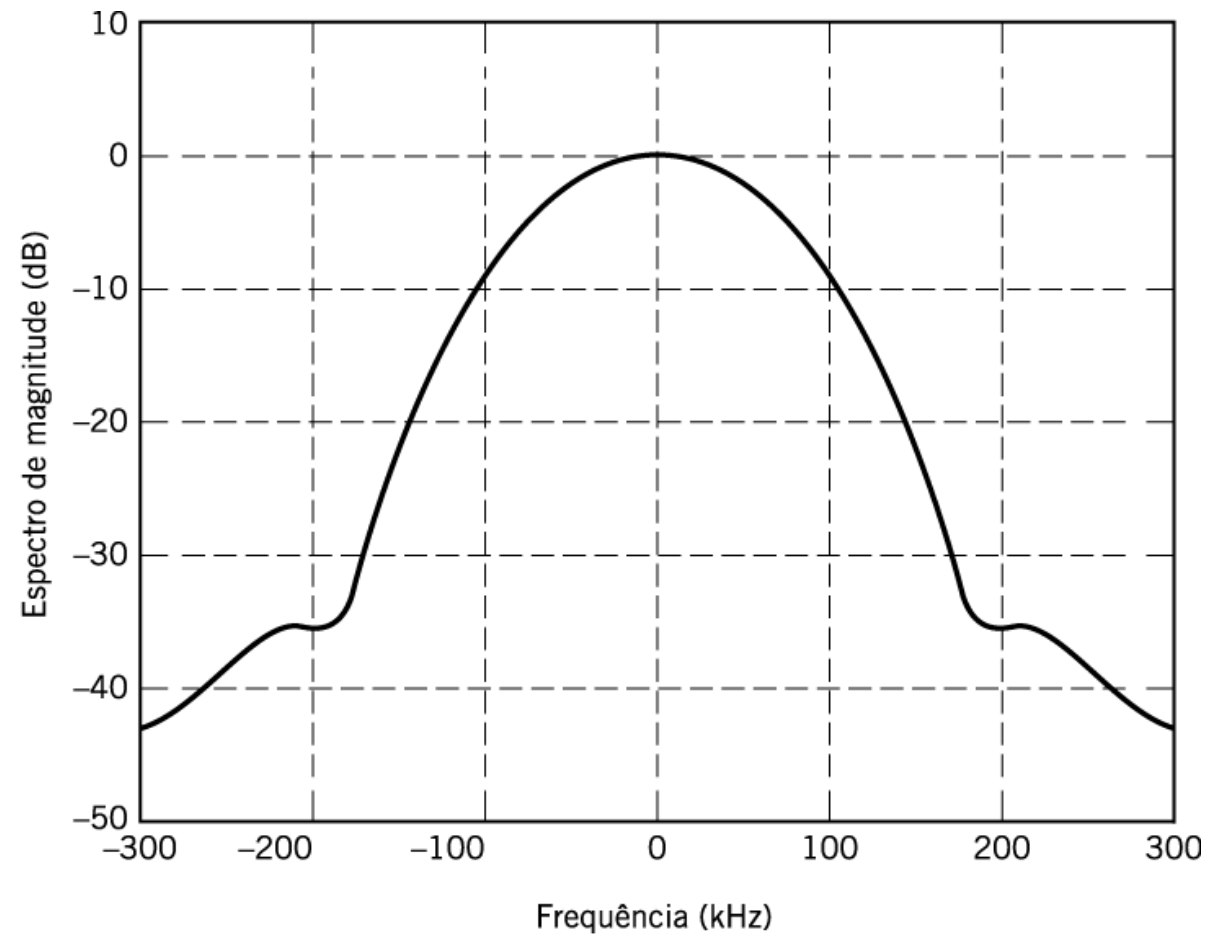
Figura 4.22 Espectro do pulso de banda base utilizado em GSM.

Canais **200kHz**

Modulação: **0,3GMSK** (Gaussian Minimum Shift Keying)

0,3G descreve a Banda do filtro Gaussiano

**Quando MSK (Minimum Shift Keying)** tipo de modulação FSK onde a taxa de bits do sinal modulante é quatro vezes o deslocamento da portadora, para minimizar o espectro da portadora. (Taxa de dados: 273,33kb/s e deslocamento de frequência de RF 67,708 kHz)



**Figura 4.23** Espectro de um sinal GSM.