Universidade Federal de Viçosa
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

$3^{\underline{a}}$ Lista - MAT 135 - Geometria Analítica e Álgebra Linear

1. Sejam $u = (2, -4, 6)$, $v = (-3, 12, -4)$ e $w = (6, 3, -1)$. Determine o vetor x tal que:

   (a) $x = u + v$, (b) $x = 3u + 2w$, (c) $x = 2u - v$, (d) $x = 2(u + v) + 3w$,
   (e) $x = 2(3u + 2w) - 3(5v)$, (f) $u + 2v = x - w$ (g) $3(u + 2x) = 4x + 2w$.

2. Determine o vetor w, tal que $w = 3u + 2v$, se $u = 3i - 2j + 5k$ e $v = -5i + 6j - 3k$.

3. O vetor $\overrightarrow{AB}$ é tal que $A = (2x + 1, 3y - 2)$ e $B = (x, y)$. Se o vetor equivalente, localizado na origem é $v = (-4, 12)$, determine os valores de x e y.

4. Dados os vetores no plano $u = 2i - 5j$ e $v = i + j$, pede-se

   (a) o vetor soma $u + v$;

   (b) $\|u + v\|$;

   (c) o vetor diferença $u - v$;

   (d) o vetor $3u - 2v$;

   (e) o produto interno $< u, v >$;

   (f) o ângulo formado pelos vetores u e v.

5. Determine o valor de m se a norma do vetor $v = (2m + 2, m - 1, 2m - 7)$ é $\|v\| = 13$.

6. Dados $u = (1, 4, 5)$, $v = (3, 3, -2)$ e $w = (-5, 7, 1)$, pede-se:

   (a) $< u, v >$, (b) $< w, u >$, (c) $< 3u, 2w >$ (d) $< 3u - 4v, 5w >$, (e) $< u, v > w$.

7. Escreva o vetor unitário na direção de:

   (a) $(3, 4)$, (b) $(-8, 6)$, (c) $(1, 2, 3)$, (d) $(-3, 12, -4)$.

8. Determine o ponto C tal que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ sendo $A = (0, -2)$ e $B = (1, 0)$.

9. Determine as coordenadas da extremidade do segmento orientado que representa o vetor $v = (3, 0, -3)$, sabendo-se que sua origem está no ponto $P = (2, 3, -5)$.

10. Quais são as coordenadas do ponto P', simétrico do ponto $P = (1, 0, 3)$ em relação ao ponto $M = (1, 2, -1)$?

11. Se $u \neq \overrightarrow{0}$, é correto cancelar u de ambos os lados da equação $u \cdot v = u \cdot w$ e concluir que $v = w$? Justifique.

12. Que condições devem satisfazer os vetores u e v para que o vetor $u + v$ divida o ângulo $\theta > 0$ formado por eles em dois ângulos iguais?

13. Que condições devem satisfazer os vetores u e v para que sejam válidas as seguintes relações:

    (a) $\|u + v\| = \|u - v\|$;

    (b) $\|u + v\| > \|u - v\|$;

    (c) $\|u + v\| < \|u - v\|$.

14. Dados os vetores $u = (2, -3, 6)$ e $v = (-1, 2, -2)$, calcule as coordenadas do vetor w bissetriz do ângulo formado pelos vetores u e v, sabendo-se que $\|w\| = 3\sqrt{42}$.

15. Determinar os ângulos internos de um triângulo ABC, sendo $A = (3, -3, 3)$, $B = (2, -1, 2)$ e $C(1, 0, 2)$.

16. Sabendo que $\|u\| = \sqrt{2}$, $\|v\| = \sqrt{3}$ e que u e v formam ângulo de $\dfrac{3\pi}{4}$, determinar:

    (a) $|(2u - v) \cdot (u - 2v)|$;

    (b) $\|u - 2v\|$.

17. Para cada um dos pares de vetores u e v, encontrar a projeção ortogonal de v sobre u e decompor v como soma de v_1 com v_2, sendo $v_1 \parallel u$ e $v_2 \perp u$.

    (a) $u = (1, 2, -2)$ e $v = (3, -2, 1)$.

    (b) $u = (1, 1, 1)$ e $v = (3, 1, -1)$.

    (c) $u = (2, 0, 0)$ e $v = (3, 5, 4)$.

    (d) $u = (3, 1, -3)$ e $v = (2, -3, 1)$.

18. Prove que se u é ortogonal a $v - w$ e v é ortogonal a $w - u$, então w é ortogonal a $u - v$.

19. Mostre que se u e v são dois vetores tais que $u + v$ é ortogonal a $u - v$, então $\|u\| = \|v\|$.

20. Demonstrar que o vetor $w = v - \dfrac{< u, v >}{< u, u >} u$ é perpendicular ao vetor u.

21. Dados os pontos $A = (-2, 3, 4)$, $B = (3, 2, 5)$, $C = (1, -1, 2)$ e $D = (3, 2, -4)$, calcular $\text{proj}_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.

22. Dado $v_1 = (1, -2, 1)$, determine vetores v_2 e v_3, de modo que os três sejam simultaneamente ortogonais.

23. Determine o valor de x para o qual os vetores $v = xi + 3j + 4k$ e $w = 3i + j + 2k$ são perpendiculares.

24. Demonstre que não existe x tal que os vetores $v = xi + 2j + 4k$ e $w = xi - 2j + 3k$ são perpendiculares.

25. Ache o ângulo entre os seguintes pares de vetores:

    (a) $2i + j$ e $j - k$; (b) $i + j + k$ e $-2j - 2k$; (c) $3i + 3j$ e $2i + j - 2k$.

26. Dados vetores $v = 2i - 3j + 2k$ e $w = 4i - j + 2k$, determinar:

    (a) $v \times w$.

    (b) O seno do ângulo entre v e w.

27. Determine a área do paralelogramo $ABCD$ sendo $\overrightarrow{AC} = -i + j$ e $\overrightarrow{AB} = j + 3k$.

28. Verifique se os seguintes pontos pertencem a um mesmo plano:

    (a) $A = (2, 2, 1)$, $B = (3, 1, 2)$, $C = (2, 3, 0)$ e $D = (2, 3, 2)$;

    (b) $A = (2, 0, 2)$, $B = (3, 2, 0)$, $C = (0, 2, 1)$ e $D = (10, -2, 1)$.

29. Calcule o volume do paralelepípedo que tem um dos vértices no ponto $A = (2, 1, 6)$ e os três vértices adjacentes nos pontos $B = (4, 1, 3)$, $C = (1, 3, 2)$ e $D = (1, 2, 1)$.

30. Prove que $\|v \times w\| = < v, w >$ se, e somente se, o ângulo entre v e w é $\theta = 45^o$ ou $\theta = 135^o$

31. Demonstre que, se v e w são vetores quaisquer, então:

    (a) $< v, w > = \dfrac{1}{4}\left(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 \right)$;

    (b) $\|v\|^2 + \|w\|^2 = \dfrac{1}{2}\left(\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 \right)$.

32. Demonstre que, se v e w são vetores quaisquer, então:

   (a) $| < v, w > | \ \leq \ \|v\| \, \|w\|$;

   (b) $\|v + w\| \ \leq \ \|v\| + \|w\|$;

   (c) $\left| \|v\| - \|w\| \right| \ \leq \ \|v - w\|$.

33. O produto vetorial é associativo? Justifique a sua resposta.

34. Se $v \times w = v \times u$ e $v \neq 0$, então $w = u$? Justifique.

35. Demonstre que se v e w são vetores quaisquer no espaço, então

$$\|v \times w\| \ \leq \ \|v\| \, \|w\|.$$

36. Prove a identidade de Lagrange

$$\|v \times w\|^2 \ = \ \|v\|^2 \, \|w\|^2 - \ < v, w >^2 .$$

37. Mostre que as diagonais de um paralelogramo se interseptam ao meio.

38. Considere o paralelogramo $ABCD$ e sejam M e N os pontos médios dos lados AB e AD, respectivamente. Mostre que

$$\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{CM} \ = \ \frac{3}{2} \overrightarrow{CA}.$$

39. Seja $ABCD$ um quadrilátero qualquer e P, Q, R e S os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente. Mostre que $PQRS$ é um paralelogramo.

40. No triângulo equilátero ABC, sejam M e N os pontos médios dos lados AB e BC, respectivamente. Mostre que MBN também é um triângulo equilátero.

41. Em um triângulo ABC sejam M, N e P os pontos médios dos lados AB, AC e BC, respectivamente. Mostre que

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BN} \ = \ 0.$$