

# ELT221 - Circuitos Elétricos II

Prof. Tarcísio Pizziolo

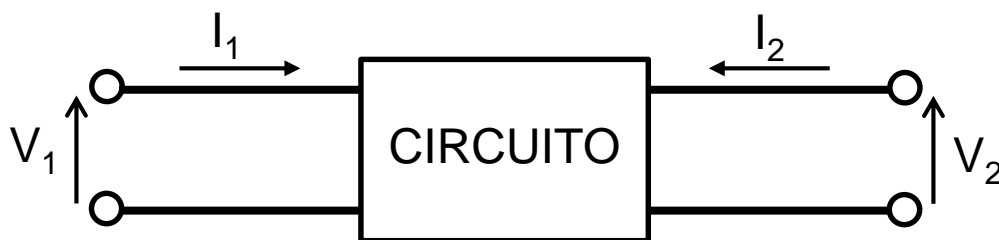
## Aula 3

### 3) Quadripolos

É uma generalização de circuitos que contém dois acessos, um par de terminais de entrada e outro de saída.

#### **Premissas:**

- 1) Não pode haver nenhuma energia armazenada no circuito.
- 2) Não pode haver fontes independentes no circuito, embora fontes dependentes sejam permitidas.
- 3) A corrente que entra em um dos terminais de uma porta tem que ser igual à corrente que deixa o outro terminal da mesma porta.
- 4) Todas as ligações externas devem ser feitas à porta de entrada ou à porta de saída.



Quadripolo Genérico

#### **Parâmetros do Quadriplo**

- Parâmetros de Impedância (**Z**)
- Parâmetros de Admitância (**Y**)
- Parâmetros Híbridos (**h** e **g**)
- Parâmetros de Transmissão (**T** - **ABCD**)
- Relações entre parâmetros (**Tabela de Conversão**)

### 3.1) Determinação dos Parâmetros dos Quadripolos

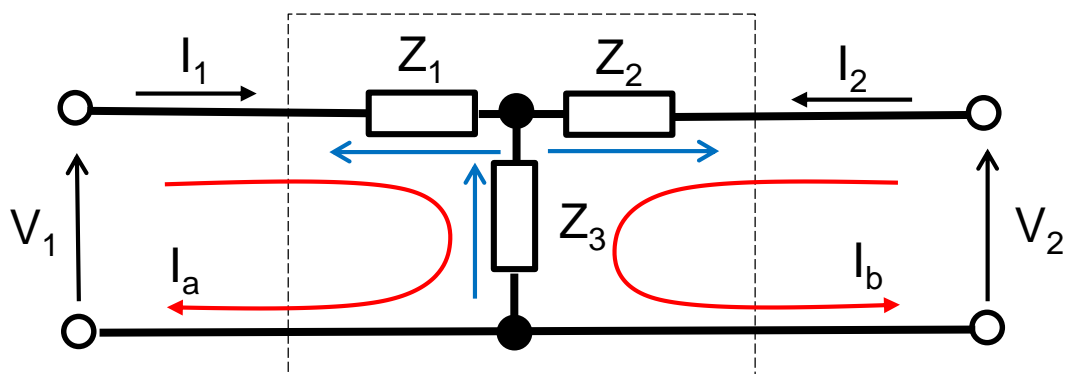
#### **a) Parâmetros de Impedâncias Z's**

##### **Modelo T (Malhas)**

- Para **I<sub>1</sub>** e **I<sub>2</sub>** como entradas e **V<sub>1</sub>** e **V<sub>2</sub>** como saídas => **Análise de Malhas** => Parâmetros de Impedâncias **Z's**.

$$V_1 = f(I_1, I_2) \text{ e } V_2 = f(I_1, I_2)$$

##### **Circuito Equivalente:**



Aplicando a LKT:

$$\begin{cases} V_1 = Z_1 I_a + Z_3 (I_a + I_b) \\ V_2 = Z_2 I_b + Z_3 (I_a + I_b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = (Z_1 + Z_3) I_a + Z_3 I_b \\ V_2 = Z_3 I_a + (Z_2 + Z_3) I_b \end{cases}$$

Para  $I_a = I_1$  e  $I_b = I_2$  :

$$\begin{bmatrix} (Z_1 + Z_3) & Z_3 \\ Z_3 & (Z_2 + Z_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Denomina-se: 
$$\begin{cases} Z_{11} = (Z_1 + Z_3) \\ Z_{12} = (Z_3) \\ Z_{21} = (Z_3) \\ Z_{22} = (Z_2 + Z_3) \end{cases}$$

Então:

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases}$$

Para determinar os parâmetros de admitância  $Y$ 's nesta configuração deve-se fazer:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \text{ mas } \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix};$$

Considerando que  $\underbrace{\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}}_Y = \underbrace{\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}^{-1}}_{Z^{-1}}$

Onde:

$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{\Delta_Z} ; \quad Y_{12} = -\frac{Z_{12}}{\Delta_Z} ; \quad Y_{21} = -\frac{Z_{21}}{\Delta_Z} \quad \text{e} \quad Y_{22} = \frac{Z_{11}}{\Delta_Z}$$

$$(*) \quad Z^{-1} = \frac{1}{\det[Z]} \text{Adj}[Z] \quad \text{e} \quad \text{Adj}[Z] = [\text{cofatores } Z]^t$$

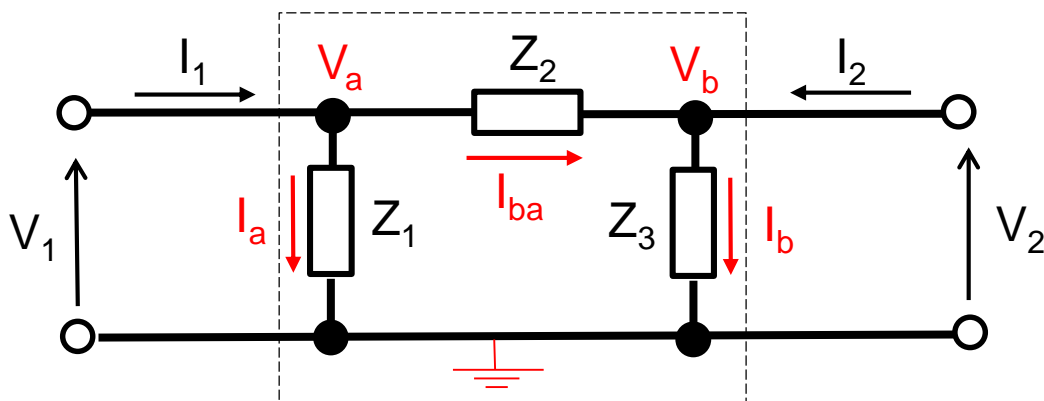
## b) Parâmetros de Admitância $Y$ 's

### Modelo $\pi$ (Nós)

- Para  $V_1$  e  $V_2$  como entradas e  $I_1$  e  $I_2$  como saídas  $\Rightarrow$  **Análise de Nós**  $\Rightarrow$  Parâmetros de Admitâncias  $Y$ 's.

$$I_1 = f(V_1, V_2) \quad \text{e} \quad I_2 = f(V_1, V_2)$$

**Circuito Equivalente:**



Aplicando a LKC:

$$\begin{cases} I_1 - I_a - I_{ba} = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{V_a}{Z_1} + \frac{(V_a - V_b)}{Z_2} \\ I_2 - I_b + I_{ba} = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{V_b}{Z_3} - \frac{(V_a - V_b)}{Z_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = (Y_1 + Y_2)V_a - Y_2 V_b \\ I_2 = -Y_2 V_a + (Y_2 + Y_3)V_b \end{cases}$$

Para  $V_a = V_1$  e  $V_b = V_2$ :

$$\begin{bmatrix} (Y_1 + Y_2) & -Y_2 \\ -Y_2 & (Y_2 + Y_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Denomina-se: 
$$\begin{cases} Y_{11} = (Y_1 + Y_2) \\ Y_{12} = (-Y_2) \\ Y_{21} = (-Y_2) \\ Y_{22} = (Y_2 + Y_3) \end{cases}$$

Então:

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{cases}$$

Para determinar os parâmetros de impedância  $Z$ 's nesta configuração deve-se fazer:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \text{ mas } \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix};$$

Considerando que  $\underbrace{\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}}_Z = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}^{-1}}_{Y^{-1}}$

Onde:

$$Z_{11} = \frac{Y_{22}}{\Delta_Y} \quad ; \quad Z_{12} = -\frac{Y_{12}}{\Delta_Y} \quad ; \quad Z_{21} = -\frac{Y_{21}}{\Delta_Y} \quad \text{e} \quad Z_{22} = \frac{Y_{11}}{\Delta_Y}$$

$$(*) \quad Y^{-1} = \frac{1}{\det[Y]} \text{Adj}[Y] \quad \text{e} \quad \text{Adj}[Y] = [\text{cofatores } Y]^t$$

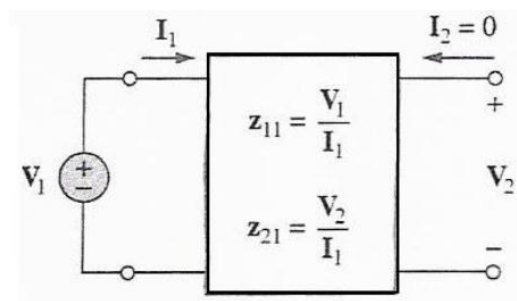
### c) Determinação Numérica dos Parâmetros $Z$ 's e $Y$ 's

Os circuitos lineares “*obedecem*” o Teorema da Superposição!

**Parâmetros  $Z$ 's:**

$$z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

$$z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

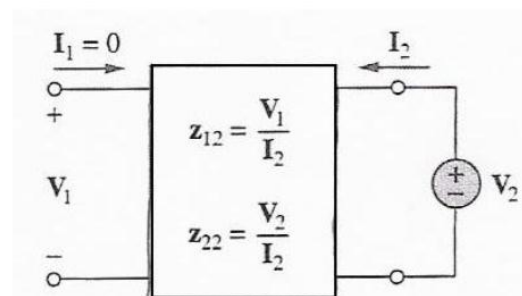


$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2$$

$$z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

$$z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$$



## Parâmetros Y's:

$$I_1 = y_{11} \cdot V_1 + y_{12} \cdot V_2$$

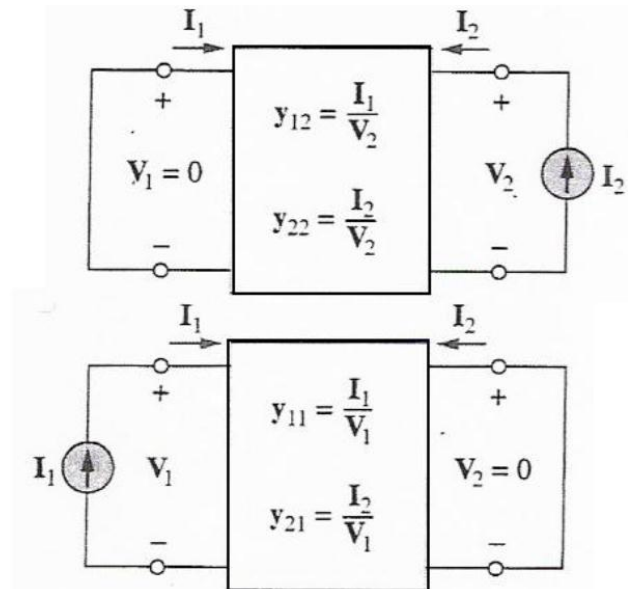
$$I_2 = y_{21} \cdot V_1 + y_{22} \cdot V_2$$

$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0}$$

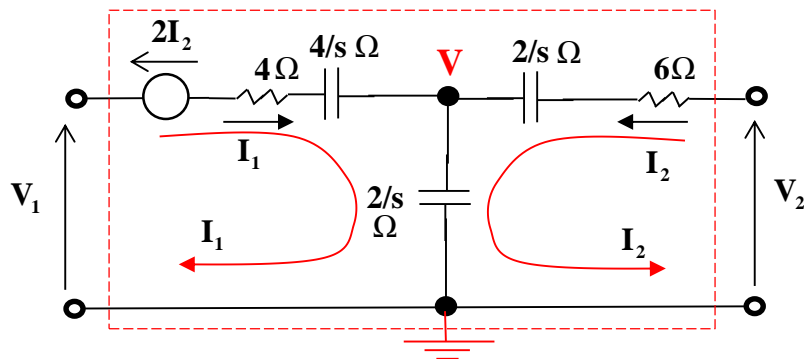
$$y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0}$$

$$y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0}$$

$$y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0}$$



**Exemplo:** Determinar os parâmetros **Z's** e **Y's** para o Quadripolo.



a) Parâmetros **Z's**:

$$\begin{cases} I_1 \text{ e } I_2 \text{ são entradas} \\ V_1 \text{ e } V_2 \text{ são saídas} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases}$$

Equação de Malhas (LKT):

$$\begin{cases} V_1 = 2I_2 + \left(4 + \frac{4}{s}\right)I_1 + \frac{2}{s}(I_1 + I_2) \\ V_2 = \left(6 + \frac{2}{s}\right)I_2 + \frac{2}{s}(I_1 + I_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = \left(4 + \frac{6}{s}\right)I_1 + \left(2 + \frac{2}{s}\right)I_2 \\ V_2 = \frac{2}{s}I_1 + \left(6 + \frac{4}{s}\right)I_2 \end{cases}$$

Então:

$$\begin{cases} Z_{11} = \left(4 + \frac{6}{s}\right) \text{ e } Z_{12} = \left(2 + \frac{2}{s}\right) \\ Z_{21} = \left(\frac{2}{s}\right) \text{ e } Z_{22} = \left(6 + \frac{4}{s}\right) \end{cases}$$

b) Parâmetros **Y's**:

$$\begin{cases} V_1 \text{ e } V_2 \text{ são entradas} \\ I_1 \text{ e } I_2 \text{ são saídas} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{cases}$$

Equação de Nó (LKC):

Partindo – se de:  $\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$ ; obtem – se:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} ; \text{ então: } \underbrace{\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}}_Y = \underbrace{\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}}_{Z^{-1}}$$

Pela igualdade de matrizes:

$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{\Delta_Z} ; Y_{12} = -\frac{Z_{12}}{\Delta_Z} ; Y_{21} = -\frac{Z_{21}}{\Delta_Z} \text{ e } Y_{22} = \frac{Z_{11}}{\Delta_Z}$$

$$(*) \quad Z^{-1} = \frac{1}{\det[Z]} \cdot \text{Adj}[Z] \text{ e } \text{Adj}[Z] = [\text{cofatores } Z]^t$$

#### d) Parâmetros Híbridos $h$ e $g$ dos Quadripolos (Eletrônica)

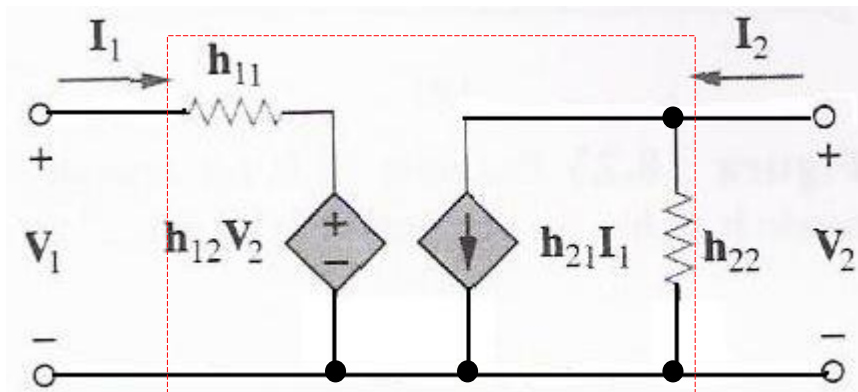
- Relacionam as correntes e tensão de forma mesclada (*cruzamento entre entrada e saída*).

**Parâmetros híbridos  $h$ :**

$$\begin{cases} \text{Entradas : } I_1 \text{ e } V_2 \\ \text{Saídas : } V_1 \text{ e } I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{cases}$$

$$V_1 = f(I_1, V_2) \text{ e } I_2 = f(I_1, V_2)$$

**Circuito Equivalente:**



Onde:

$h_{11}$  = impedância de entrada de circuito aberto.

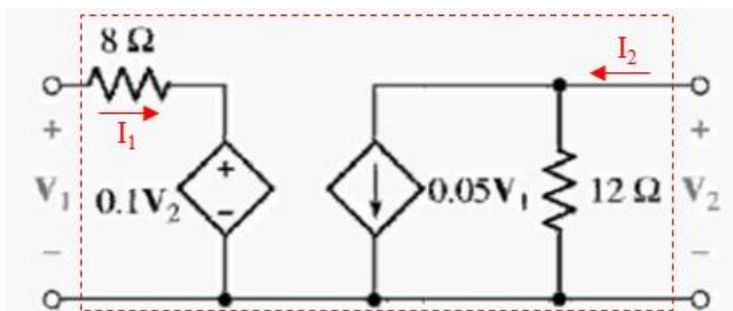
$h_{12}$  = ganho de tensão reverso de circuito aberto.

$h_{21}$  = ganho de corrente direto de curto-circuito.

$h_{22}$  = admitância de saída de circuito aberto.

**Exemplo:** a) Determinar os parâmetros de impedância do seguinte quadripolo.

b) Se  $I_1 = I_2 = 1$  A, determine o ganho de tensão  $G_v = V_2/V_1$ .



**Resposta:**

$$\begin{aligned} z_{11} &= \frac{400}{53} \Omega & z_{12} &= \frac{60}{53} \Omega \\ z_{21} &= \frac{-240}{53} \Omega & z_{22} &= \frac{600}{53} \Omega \\ G_v &= \left. \frac{v_2}{v_1} \right|_{i_1=i_2=1} = \frac{18}{23} \end{aligned}$$

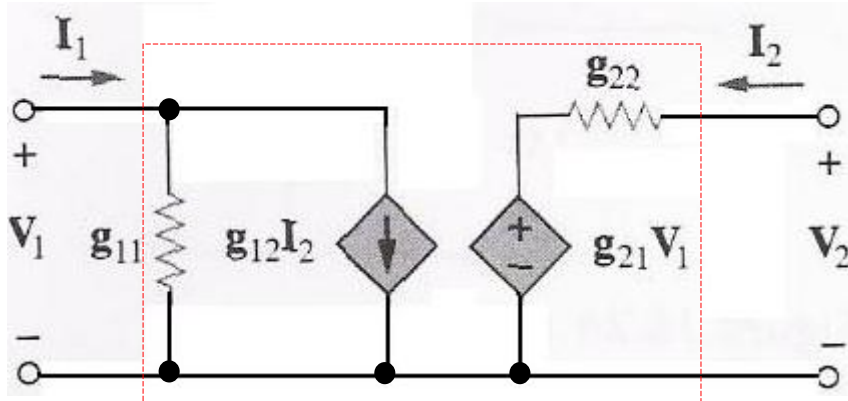
$$V_1 = 8I_1 + 0,1V_2 \text{ e } I_2 = 0,4I_1 + (0,005 + 1/12)V_2$$

## Parâmetros híbridos g:

$$\begin{cases} \text{Entradas : } V_1 \text{ e } I_2 \\ \text{Saídas : } I_1 \text{ e } V_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} I_2 \\ V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2 \end{cases}$$

$$V_2 = f(I_2, V_1) \text{ e } I_1 = f(I_2, V_1)$$

## Circuito Equivalente:



Onde:

$g_{11}$  = admitância de entrada de circuito aberto.

$g_{12}$  = ganho de corrente reverso de curto-circuito.

$g_{21}$  = ganho de tensão direto de circuito aberto.

$g_{22}$  = impedância de saída de circuito aberto.

## e) Determinação Numérica dos Parâmetros h e g:

$$\begin{cases} h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} ; h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0} ; h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0} \text{ e } h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0} \\ g_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{I_2=0} ; g_{12} = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_1=0} ; g_{21} = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{I_2=0} \text{ e } g_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{V_1=0} \end{cases}$$

**Exemplo:** Determinar os parâmetros  $h$ 's e  $g$ 's em função dos parâmetros de impedância  $Z$ 's.

Partindo de:  $\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases}$ , e considerando que:

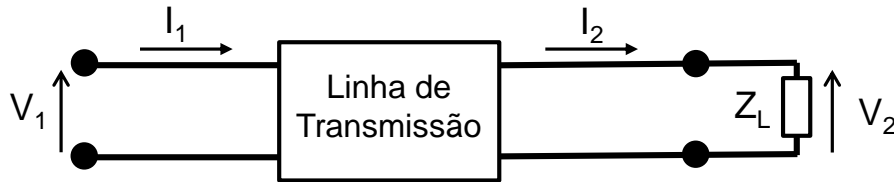
$$\begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = \left( Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22}} \right) I_1 + \left( \frac{Z_{12}}{Z_{22}} \right) V_2 \\ I_2 = \underbrace{-\frac{Z_{21}}{Z_{22}}}_{h_{21}} I_1 + \underbrace{\frac{1}{Z_{22}}}_{h_{22}} V_2 \end{cases}$$

$$h_{11} = \frac{\Delta Z}{Z_{22}} ; h_{12} = \frac{Z_{12}}{Z_{22}} ; h_{21} = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} ; h_{22} = \frac{1}{Z_{22}}$$

$$\text{Analogamente: } g_{11} = \frac{1}{Z_{11}} ; g_{12} = -\frac{Z_{12}}{Z_{11}} ; g_{21} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}} \text{ e } g_{22} = \frac{\Delta Z}{Z_{11}}$$

## f) Parâmetros de Transmissão T (ABCD) dos Quadripolos (SEP)

Seja o Quadripolo representando uma *Linha de Transmissão* de energia elétrica:



Devem-se relacionar as “*variáveis de entrada*”  $V_2$  e  $I_2$  com as de saída  $V_1$  e  $I_1$ .  
Parâmetros de Transmissão T:

$$\begin{cases} \text{Entradas : } V_2 \text{ e } I_2 \\ \text{Saídas : } V_1 \text{ e } I_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = A V_2 - B I_2 \\ I_1 = C V_2 - D I_2 \end{cases}$$

$$V_1 = f(I_2, V_2) \text{ e } I_1 = f(I_2, V_2)$$

(\*) O sinal negativo em  $I_2$  é pelo fato da corrente estar indo para a carga.

## g) Determinação Numéricas dos Parâmetros ABCD:

$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} ; B = \left. \frac{V_1}{-I_2} \right|_{V_2=0} ; C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} ; \text{ e } D = \left. \frac{I_1}{-I_2} \right|_{V_2=0}$$

**Exemplo:** Determinar os parâmetros de Transmissão T (ABCD) em função dos parâmetros de impedância  $Z$ 's.

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} V_1 = A V_2 - B I_2 \\ I_1 = C V_2 - D I_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{C}_{\text{C}} \quad \underbrace{-D}_{-D} \\ I_1 = \frac{1}{Z_{21}} V_2 - \frac{Z_{22}}{Z_{21}} I_2 \quad ; \quad V_1 = Z_{11} \left( \frac{1}{Z_{21}} V_2 - \frac{Z_{22}}{Z_{21}} I_2 \right) + Z_{12} I_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow V_1 = \underbrace{\frac{Z_{11}}{Z_{21}}}_{A} V_2 + \underbrace{\left( Z_{12} - \frac{Z_{11} Z_{22}}{Z_{21}} \right)}_{-B} I_2 \end{aligned}$$

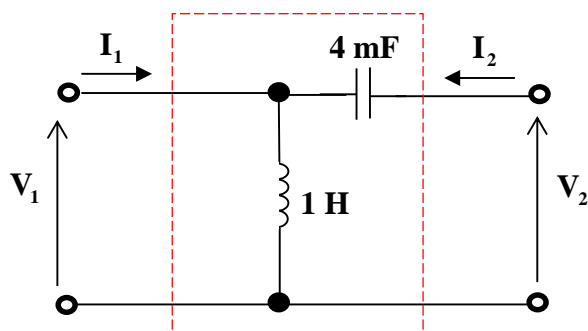
Então:  $A = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} ; B = \frac{\Delta Z}{Z_{21}} ; C = \frac{1}{Z_{21}} \text{ e } D = \frac{Z_{22}}{Z_{21}}$

### 3.2) Tabela de Conversão dos Parâmetros dos Quadripolos

$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{y_{22}}{\Delta_y} & -\frac{y_{12}}{\Delta_y} \\ -\frac{y_{21}}{\Delta_y} & \frac{y_{11}}{\Delta_y} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{A}{C} & \frac{\Delta_T}{C} \\ 1 & D \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\Delta_H}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ -\frac{h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \frac{z_{22}}{\Delta_z} & -\frac{z_{12}}{\Delta_z} \\ -\frac{z_{21}}{\Delta_z} & \frac{z_{11}}{\Delta_z} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{D}{B} & -\frac{\Delta_T}{B} \\ -\frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{h_{11}} & -\frac{h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta_H}{h_{11}} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \frac{z_{11}}{\Delta_z} & \frac{\Delta_z}{z_{21}} \\ \frac{z_{21}}{\Delta_z} & \frac{z_{22}}{\Delta_z} \\ 1 & \frac{z_{22}}{z_{21}} \\ z_{21} & z_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{y_{22}}{y_{21}} & -\frac{1}{y_{21}} \\ \frac{y_{21}}{-\Delta_y} & -\frac{y_{11}}{\Delta_y} \\ y_{21} & y_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{\Delta_H}{h_{21}} & -\frac{h_{11}}{h_{21}} \\ \frac{h_{21}}{-h_{22}} & \frac{-1}{h_{21}} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \frac{\Delta_z}{z_{22}} & \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ \frac{z_{22}}{-z_{21}} & \frac{1}{z_{22}} \\ z_{22} & z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{y_{11}} & -\frac{y_{12}}{y_{11}} \\ \frac{y_{21}}{\Delta_y} & \frac{\Delta_y}{y_{11}} \\ y_{11} & y_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{B}{D} & \frac{\Delta_T}{D} \\ -\frac{1}{D} & \frac{C}{D} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$

**Exercício:** Determinar os parâmetros  $Z$ 's,  $Y$ 's,  $g$ 's,  $h$ 's e  $T$ 's para os circuitos dados considerando-os quadripolos.

a)



b)

