Aula Prática 8:
Quantificação da Similaridade entre Sinais

Werikson Frederiko de Oliveira Alves - 96708
Departamento de Engenharia Elétrica,
Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG Email: werikson.alves@ufv.com

***Resumo*—O presente relatório trata-se sobre como dois sinais se parecem ao utilizar a função de correlação cruzada e a função de coerência, sendo possível realizar a comparação desses sinais. Portanto, serão abordados esses tópicos e ao final simulados dois execícios afim de demonstrar o resultado.**

I. Introdução

Ao se realizar a comparação do quanto dois sinais se parecem é possível obter diversas informações e aplica-las em processamento de sinais, dentre essas aplicações, pode-se citar o radar e o sonar. Para isto, são necessários medidas para determinar a distancia dos objetos.

A correlação cruzada trata-se de quanto um sinal se parece com sua reflexão com um determinado atraso e ruído aplicados a ele.

Outro ponto relevante é que em muitos casos as saídas de sistemas possuem uma relação sinal e ruído muito baixa, fazendo com que seja difícil a detecção da resposta a uma dada entrada sem que uma análise detalhada e que seja mais imune ao efeito do ruído. Assim, para realizar isto são utilizados duas funções sendo elas a função de correlação cruzada e a função de coerência.

Portanto, os objetivos deste relatório são analisar a função de correlação e a função de coerência, e em seguida aplicá-las em uma simulação, demonstrando-as. Além disto, por meio da correlação cruza, será analisado uma propriedade sobre sistemas LIT.

II. Materiais e Métodos

Para a realização deste trabalho foi utilizado o *software MatLab*. Dessa forma, antes de prosseguir serão apresentadas as duas funções.

A. Função de correlação cruzada - $R_{xy}(t)$

A função de correlação cruzada quantifica o grau de similaridade entre dois sinais no domínio do tempo. Considerando $x[n]$ e $y[n]$ como dois sinais, a sua correlação cruzada é definida pela Equação 1 na qual k é o numero de amostras consideradas.

$$R_{xy}(t) = \frac{1}{N-k}\sum_{n=1}^{N-k} x[n]\cdot y[n+k] \tag{1}$$

Para realizar essa comparação, foi utilizado o comando *xcorr* o qual implementa a correlação cruzada entre dois sinais. Como forma de exemplificar isto, foram simulados três correlações diferentes disponibilizadas no roteiro.

```
% Exemplo 1:
fs = 1000;
t = 0:1/fs:1;
x1 = sin(2*pi*10*t);
x2 = cos(2*pi*10*t);
[Rx1x2,lags] = xcorr(x1,x2,'coeff');
...
r1 = randn(size(t));
r2 = randn(size(t));
Rr1r2 = xcorr(r1,r2,'coeff');
...
mix = x1 + 3*r1;
Rxx = xcorr(x1,mix,'coeff');
...
```

B. Função de coerência - $\gamma^2_{xy}(f)$

A função de coerência é uma ferramenta matemática muitas vezes utilizadas na quantificação de similaridade entre sinais. Enquanto o coeficiente de correlação fornece uma medida global para esta quantificação, a coerência é discriminada em frequência, com o beneficio de que sua magnitude é independente de qualquer atraso entre os sinais.

A coerência entre os sinais $x[n]$ e $y[n]$ é obtida através da Equação 2 na qual M é o numero de janelas em que os sinais são divididos e $X_i(f)$ e $Y_i(f)$ são as transformadas de Fourier das i-ésimas janelas de cada sinal. Para isto, o comando *mscohere* foi utilizado para calcular a coerência. Como forma de exemplificar isto, foi simulado novamente o código disponibilizado no roteiro o qual cria dois sinais adicionando em seguida ruídos e calcula o espectro do sinal.

$$\gamma^2_{xy}(f) = \frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{M} X_i^*(f)\cdot Y_i(f)\right|^2}{\sum\limits_{i=1}^{M}|X_i(f)|^2\sum\limits_{i=1}^{M}|Y_i(f)|^2} \tag{2}$$

```
% Exemplo 2
fs = 1024;
t = 0:1/fs:30;
F = linspace(0,fs/2,length(t)/2);
x = sin(2*pi*3*t) + sin(2*pi*7*t) + ...
    3*randn(size(t));
y = sin(2*pi*7*t) + sin(2*pi*11*t) + ...
    3*randn(size(t));
X = abs(fft(x));
Y = abs(fft(y));
...
[Cxy,F] = mscohere(x,y,boxcar(1024),0,1024,fs);
```

C. Radar

Para este item foi considerado o sistema ilustrado na Figura 1 o qual trata-se de um radar. A operação de um radar é feita por um pulso criado o qual é transmitido ao longo de um meio. Em determinado momento atinge um objeto e parte do sinal é refletida retornando a origem. Este sinal refletido é atrasado, atenuado e possui um ruido. Um método comum de se estimar o tempo de atraso entre os dois sinais é usando a correlação cruzada dos sinais.

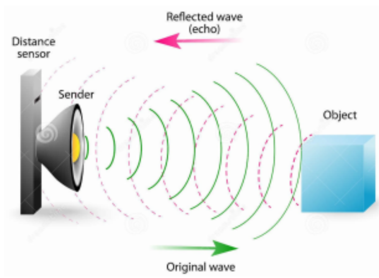

Figura 1. Ilustração de um sistema de radar.

Para demonstrar isto, na simulação, foi considerado um pulso $x(n)$ transmitido e um pulso $xd(n)$ como sinal refletido (atrasado e reduzido). O sinal refletido foi combinado com um ruído aleatório gaussiano $\omega(n)$ gerando um sinal $r(n)$ Equação 3. Os sinais $x(n)$, $xd(n)$ e $r(n)$ são mostrados na Figura 2.

$$r(n) = \alpha x(n-T) + \sigma\omega(n) \tag{3}$$

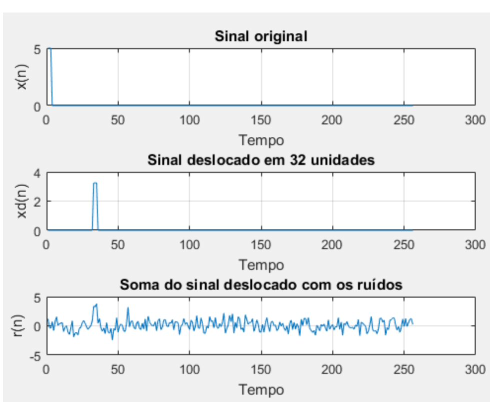

Figura 2. Sinais $x(n)$, $xd(n)$ e $\omega(n)$

D. Aplicação de funções de correlação na análise de sistemas

Como já mencionado anteriormente a correlação cruzada possui muitas aplicações e uma delas é em sistemas linearmente invariante no tempo (LIT), no qual tem-se a seguinte teorema: "A correlação cruzada entre a saída y(n) e a entrada x(n) é igual à resposta ao impulso do sistema quando a entrada é um ruído branco".

Dessa forma, para esta seção foi simulado um código no qual é analisado este teorema por meio da função de correlação. Neste, foi definido um filtro passa baixa simples e encontrado a resposta ao impulso, contudo como a entrada é aleatória a simulação teve que ser executada diversas vezes e ao final foi necessário realizar a média de todas as simulações.

III. Resultados e Discussões

Agora serão apresentados os resultados das simulações durante o trabalho.

A. Função de correlação cruzada

Conforme dito anteriormente, para ilustrar a correlação cruzada, Exemplo 1, foram obtidos os seguintes resultados os quais são apresentados nas Figuras 3, 4 e 5.

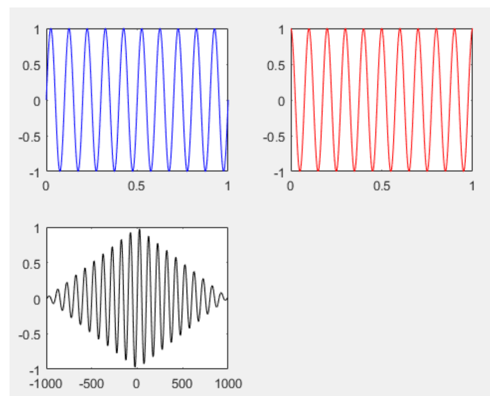

Figura 3. Correlação entre uma senoide e uma cossenoide.

É possível observar, na Figura 3, que a correlação também é periódica e possui valores próximos a unidade indicando a alta correlação entre os sinais.

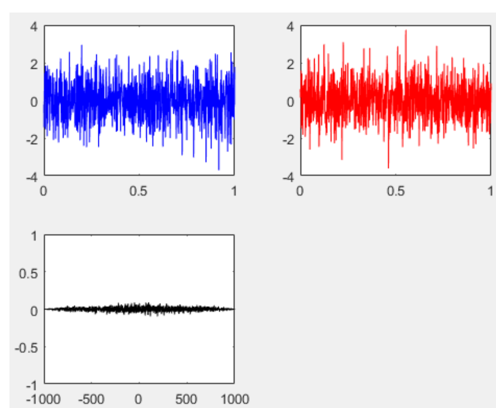

Figura 4. Correlação entre dois ruídos.

Pela figura 4, pode-se observar que a correlação entre ruídos aleatórios é aproximadamente zero, demonstrando que a correlação entre eles praticamente não existe.

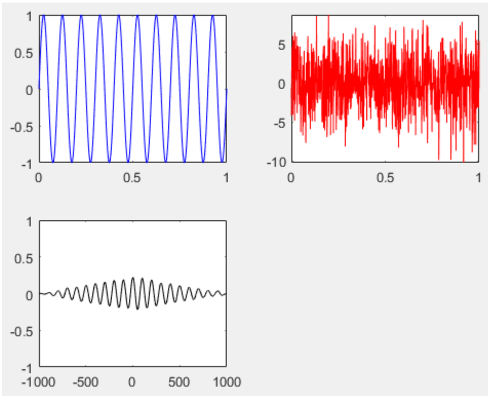

Figura 5. Correlação entre senoide pura e uma contaminado por ruído.

Por ultimo, na Figura 5, foi obtida a correlação entre uma senoide e uma versão contaminada dela mesma, no qual pode-se observar um aumento na correlação em torno de zero, contudo não é uma alta correlação. Outro ponto importante, é que a correlação possui uma certa periodicidade.

B. Função de coerência

Para o segundo exemplo foram dois sinais e somados a ruídos, os quais são apresentados na Figura 6. Além disto na mesma figura são apresentados seus espectros. Fazendo uma analise mais detalhada, é possível, a partir dos espectros, que ambos os sinais apresentam o sinal no ponto de 7 Hz.

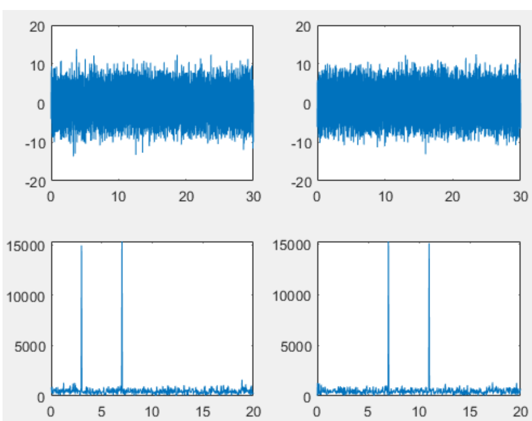

Figura 6. Sinais originais e seus respectivos espectros.

Agora, fazendo a coerência entre x e y, foi obtida o resultado apresentado na Figura 7. Nela, pôde-se observar a vantagem do uso da função de coerência, a qual evita ter que fazer uma analise detalhada e demorada de sinais com nível de complexidade elevados (ruídos).

C. Radar

Após gerados os sinais apresentados na Figura 2, foi estimado a correlação cruzada $R_{xy}(m)$, utilizando o comando

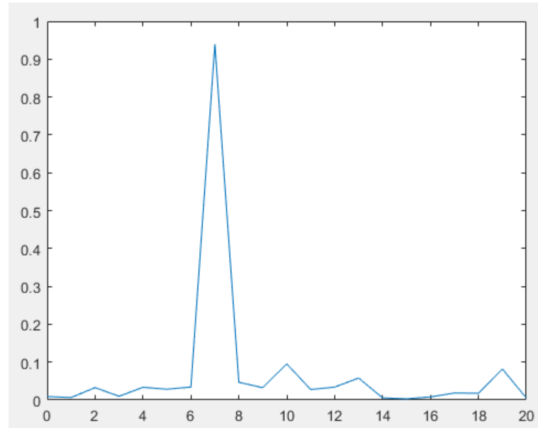

Figura 7. Coerência dos sinais criados.

xcorr e em seguida foi plotado o gráfico da Figura 8 o qual indica a correlação cruzada dos sinais $r(n)$ e $x(n)$, considerando $\alpha = 0,65$, $T = 32$ e $\sigma = 1$.

Pela figura 8 é possível perceber que a posição de pico na correlação é a estimativa do tempo de atraso o que corresponde com o valor esperado.

Além disto, foi observado que ao variar os parâmetros da Equação 3, houveram as seguintes mudanças:

- α: A amplitude da correlação foi alterada;
- T: O valor de pico muda sua posição;
- σ: A variação deste parâmetro altera tanto o valor de T quanto o de α.

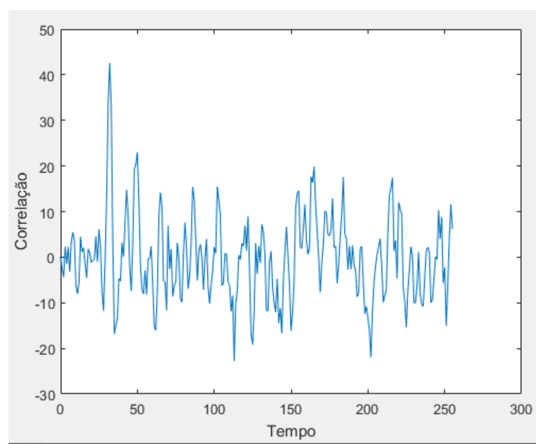

Figura 8. Correlação entre r(n) e x(n).

D. Aplicação de funções de correlação na análise de sistemas

Por ultimo, após obter a resposta ao impulso, apresentado na Figura 9, foi utilizada a correlação para o sistema LIT, obtendo a resposta ao impulso por meio da correlação, também apresentado na Figura 9.

Pela Figura, pôde-se percebe que os sinais se assemelham em muito, demonstrando a veracidade do teorema considerado.

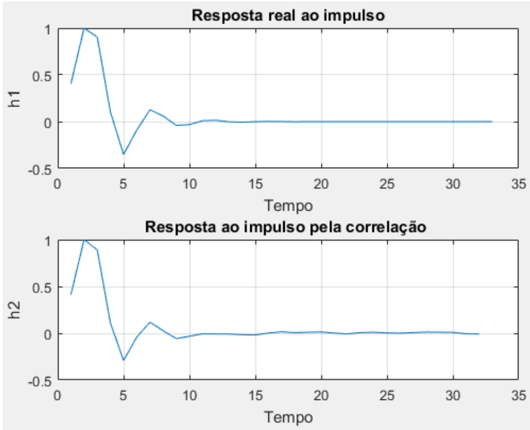

Figura 9. Comparação das respostas ao impulso.

IV. Conclusão

Portanto, foi observado que a correlação cruzada é uma ferramenta de muita importância na áreas de sinais e sistemas, possuindo diversas aplicações extremamente úteis. Com isto, foi possível atingir os objetivos deste trabalho estabelecidos inicialmente.

Referências

[1] Bhagwandas Pannalal Lathi and Roger A Green. *Linear systems and signals*, volume 2. Oxford University Press New York, 2005.

[2] Alan V Oppenheim, Alan S Willsky, and S Hamid Nawab. *Sinais e Sistemas*. Pearson Educación, 1998.

V. Apêndice

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% NOME:  Werikson Alves - 96708
% Relat rio 08 de ELT 410
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Fun  o de correla  o cruzada - Rxy(t)
% Exemplo 1:
fs = 1000;
t = 0:1/fs:1;
x1 = sin(2*pi*10*t);
x2 = cos(2*pi*10*t);
[Rx1x2,lags] = xcorr(x1,x2,'coeff');
figure;
subplot(221);plot(t,x1,'b')
subplot(222);plot(t,x2,'r')
subplot(223);plot(lags,Rx1x2,'k');
axis([-1000 1000 -1 1])
r1 = randn(size(t));
r2 = randn(size(t));
Rr1r2 = xcorr(r1,r2,'coeff');
figure
subplot(221);plot(t,r1,'b')
subplot(222);plot(t,r2,'r')
subplot(223);plot(lags,Rr1r2,'k');
axis([-1000 1000 -1 1])
mix = x1 + 3*r1;
Rxx = xcorr(x1,mix,'coeff');
figure
subplot(221);plot(t,x1,'b')
subplot(222);plot(t,mix,'r');axis tight
subplot(223);plot(lags,Rxx,'k');
axis([-1000 1000 -1 1])

% Fun  o de coer ncia -  2xy (f)
fs = 1024;
t = 0:1/fs:30;
F = linspace(0,fs/2,length(t)/2);
x = sin(2*pi*3*t) + sin(2*pi*7*t) + 3*randn(size(t));
y = sin(2*pi*7*t) + sin(2*pi*11*t) + 3*randn(size(t));
X = abs(fft(x));
Y = abs(fft(y));
figure;
subplot(221);plot(t,x)
subplot(222);plot(t,y)
subplot(223);plot(F,X(1:length(F)))
axis([0 20 0 max(X)])
subplot(224);plot(F,Y(1:length(F)))
axis([0 20 0 max(Y)])
[Cxy,F] = mscohere(x,y,boxcar(1024),0,1024,fs);
figure;plot(F,Cxy)
axis([0 20 0 1])

%% Exercicio 1:
clear all
close all
clc

n = 0:255; % Vetor discreto
x0 = @(n) n ≥ 0; % Define o degrau unit rio
x1 = @(n) n ≥ 3; % Define o degrau unit rio deslocado
h = 5*(x0(n)-x1(n)); % Pulso transmitido
subplot(3,1,1) % Plota o grafico na mesma figura
plot(h); % Plota o grafico
title('Sinal original') % Titulo: grafico
xlabel('Tempo') % Titulo: eixo
ylabel('x(n)') % Titulo: eixo
grid on % Grade do grafico

x2 = @(n) n ≥ 32; % Define o degrau unitorio deslocado em n=32
```

```
x3 = @(n) n ≥ 35; % Define o degrau unit rio deslocado em n=35
xdn = 0.65*5*(x2(n) - x3(n)); % Desloca o sinal em 32 unidades
subplot(3,1,2) % Plota o grafico na mesma figura
plot(xdn); % Plota o grafico
title('Sinal deslocado em 32 unidades') % Titulo: grafico
xlabel('Tempo') % Titulo: eixo
ylabel('xd(n)') % Titulo: eixo
grid on % Grade do grafico

w = randn(1,256); % Cria um ruido gaussiano aleatorio
sig = 1; % Amplitude
r = xdn + sig*w; % Sinal refletido
subplot(3,1,3) % Plota o grafico na mesma figura
plot(r); % Plota o grafico
title('Soma do sinal deslocado com os ru dos') % Titulo: grafico
xlabel('Tempo') % Titulo: eixo
ylabel('r(n)') % Titulo: eixo
grid on % Grade do grafico

Y = xcorr(h,r); % Faz a correla  o entre os sinais
R = Y(1:256); % Define o intervalo de tempo da correla  o
Rrx=fliplr(R); % Inverte o resultado no tempo.
figure % Plota a figura
plot(n,Rrx); % Plota o resultado da correla  o
xlabel('Tempo') % Titulo: eixo
ylabel('Correla  o') % Titulo: eixo

% Exercicio 2:
% Definindo um filtro passa-baixa simples:
FS=2500;
fHz=[0 250 500 750 1000 1250];
m0=[1 1 1 0 0 0];
FH=fHz/(FS/2);
[b,a]=yulewalk(4,FH,m0);
[h,f]=freqz(b,a,1024);

% Encontrando a resposta ao impulso
N=32;
Δ=[1,zeros(1,N)]; % define o impulso
h=filter(b,a,Δ); % inpulso como entrada
figure()
subplot(2,1,1);
plot(h/max(h)); % Plot resposta normalizada
title('Resposta real ao impulso'); % Titulo: Grafico
xlabel('Tempo') % Titulo: eixo
ylabel('h1') % Titulo: eixo
grid on % Grade do grafico

i = 1; % Contador: Itera  o de 150 vezes
C0 = 0; % Valor inicial nulo para a correla  o
q0 = 0; % Valor inicial nulo para o vetor de correla  o invertido

% Repeti  o do codigo e media do resultao final
while i ≤ 150
    r = randn(1,32); % Cria ruido aleatorio gaussiano
    h = filter(b,a,r); % Aplica o filtro
    C0 = xcorr(h,r); % Correla  o entre a saida do filtro e o ruido
    R = C0(32:end); % Desloca o vetor da correla  o
    q0 = R +q0; % Vetor nulo b recebe a correla  o invertida
    i = i+1; % Aumenta o contador em uma unidade
end

q0 = q0./150; % Realiza a media das 150 itera  es
subplot(2,1,2) % Plota o grafico na mesma figura
plot(q0/max(q0)) % Plota a correla  o normalizada
title('Resposta ao impulso pela correla  o ')
xlabel('Tempo')
ylabel('h2')
grid on
```