ELT221 - Circuitos Elétricos II

Prof. Tarcísio Pizziolo

Aula 7

7) Filtros

Filtros são circuitos elétricos (eletrônicos) que permitem que seus sinais de saída sejam limitados em função de valores de frequências previamente determinadas. Estas frequências previamente determinadas que irão limitar o sinal de saída do Filtro são denominadas **Frequência(s) de Corte**.

Os Filtros também são definidos como sendo **quadripolos** capazes de atenuar determinadas frequências do espectro do sinal de entrada e permitir a passagem das demais.

Os Filtros podem ser classificados como **Passivos** ou **Ativos**.

Os **Filtros Passivos** são constituídos de componentes elétricos passivos tais como **resistores**, **capacitores** e **indutores**, não precisando assim de alimentação para produzir o resultado desejado.

Os **Filtros Ativos** são constituídos de componentes elétricos ativos os quais necessitam de alimentação para produzir o resultado desejado juntamente com os elementos passivos. Tais componentes ativos são as **Válvulas**, os **Transistores** e os **Amplificadores Operacionais**. Os indutores são raramente utilizados em Filtros pelo fato de serem grandes e de alto custo.

Os tipos de Filtros serão especificados em função do comportamento da saída de seus sinais para a variação da frequência de pequenos a grandes valores passando pela(s) **Freqüência(s) de Corte**.

Tipos de Filtros mais Utilizados

1) **Passa – Faixa =>** O sinal de saída é l**imitado** em uma **faixa** de frequência. Existirão duas **Frequências de Corte**, uma cortando a saída do sinal para as **baixas** e outras para as **altas** frequências.
2) **Passa – Baixa** => O sinal de saída é **limitado** em **baixas** frequências. Existirá uma **Frequência de Corte** limitando a saída do sinal para **baixas f**requências e cortando-o para as **altas** frequências.
3) **Passa – Alta** => O sinal de saída é **limitado** em **altas** frequências. Existirá uma **Frequência de Corte** limitando a saída do sinal para **altas f**requências e cortando-o para as **baixas** frequências.
4) **Corta – Faixa =>** O sinal de saída é **cortado** em uma **faixa** de frequência. Existirão duas **Frequências de Corte**, uma limitando a saída do sinal para as **baixas** e outras para as **altas** frequências.

Frequência de corte w_C:

Frequência de corte $\mathbf{w_c}$ é definida como a frequência na qual a potência média de saída é igual à metade da potência média de entrada, ou seja, quando o ganho de potência for **0,5**.

Então:

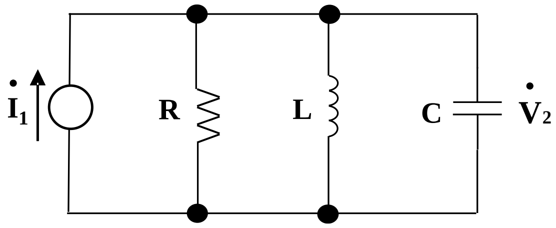
$$\mathbf{A_P = \frac{P_o}{P_i}} = \frac{1}{2}; \quad \textbf{como} \quad \mathbf{P_o = \frac{V_o^2}{R_o}} \quad \textbf{e} \quad \mathbf{P_i = \frac{V_i^2}{R_i}}$$

$$\textbf{Para} \quad \mathbf{R_o = R_i \Rightarrow V_o = \frac{V_i}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_o} \cong 0{,}707.\mathbf{V_i}$$

Daí a(s) **Frequência(s) de Corte** ocorrerá(ão) quando: $\mathbf{|H(j\omega_c)| = \frac{|H(j\omega)|_{máx}}{\sqrt{2}}}$.

1) Filtro Passa-Faixa (Passivo):

Seja o circuito:



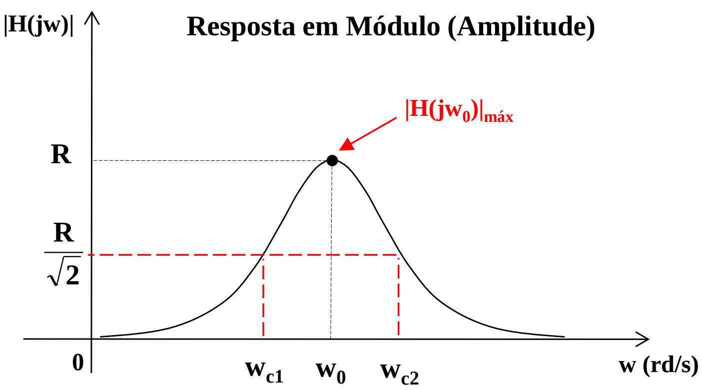
$$H(j\omega)=\frac{1}{\left(\frac{1}{R}\right)+j\left[wC-\left(\frac{1}{\omega L}\right)\right]} \quad ; \quad \begin{cases} |H(j\omega)|=\dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2+\left[wC-\left(\frac{1}{wL}\right)\right]^2}} \\ \varphi(\omega)=-tg^{-1}\left[R\left(wC-\dfrac{1}{wL}\right)\right] \end{cases}$$

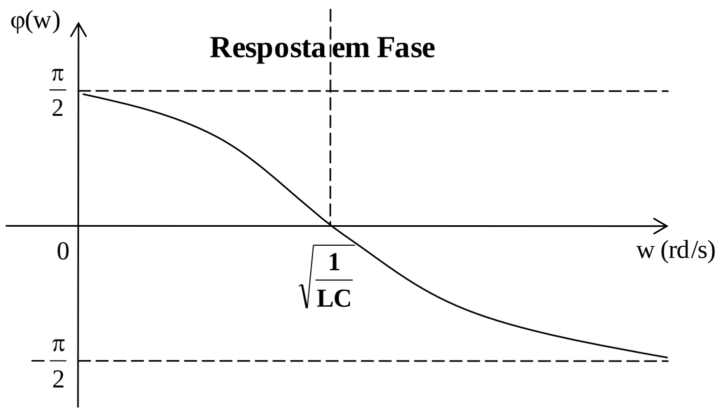
$$\text{Para } |H(jw)|_{máx} \Rightarrow w_o=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\text{Daí: } |H(jw_o)|_{máx}=R \Rightarrow \frac{|H(jw_o)_{máx}|}{\sqrt{2}}=\frac{R}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{Frequência(s) de Corte}$$

$$\begin{cases} \text{Faixa de passagem: (BANDA)} \\ w_{c_1} \le \omega \le w_{c_2} \\ B=\left(w_{c_2}-w_{c_1}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} w_o \rightarrow \text{frequência central} \\ w_{c_1} \text{ e } w_{c_2} \rightarrow \text{frequências de corte} \end{cases}$$

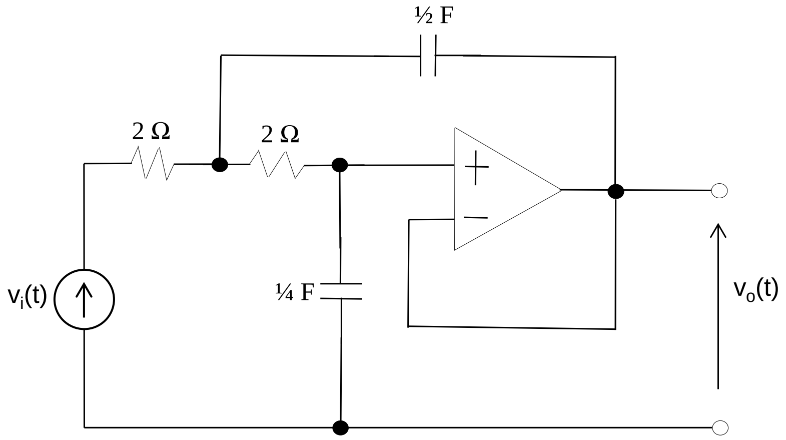
Análise da variação de **w** para esboçar os Gráficos:
Para baixas e altas frequências => |H(jw)| → 0 (Passa-Faixa!).
Para w → 0 => φ(w) → π/2 e para w → ∞ => φ(w) → -π/2.





2) Filtro Passa-Baixa (Ativo):

Seja o circuito:



$$\mathbf{H(j\omega)} = \frac{2}{\left[\left(2-\mathbf{w}^2\right)+\mathbf{j}2\mathbf{w}\right]} \quad ; \quad \left|\mathbf{H(jw)}\right| = \frac{2}{\sqrt{\left(2-\mathbf{w}^2\right)^2+4\mathbf{w}^2}}$$

$$\textbf{Simplificando:} \quad \left|\mathbf{H(jw)}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathbf{w}}{2}\right)^2}}$$

$$\textbf{Para:} \left|\mathbf{H(jw)}\right|_{\mathbf{máx}} \Rightarrow \mathbf{w_o} = 0 \quad ; \quad \textbf{Daí: } \mathbf{H(jw_o)} = 1$$

$$\left|\mathbf{H(jw_c)}\right| = \frac{\left|\mathbf{H(jw)}\right|_{\mathbf{máx}}}{\sqrt{2}}. \Rightarrow \left|\mathbf{H(jw_c)}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathbf{w_c}}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left[1+\left(\frac{\mathbf{w_c}}{2}\right)^2\right]} = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbf{w_c} = \sqrt{2} \ \ \mathbf{(rd/s)}$$

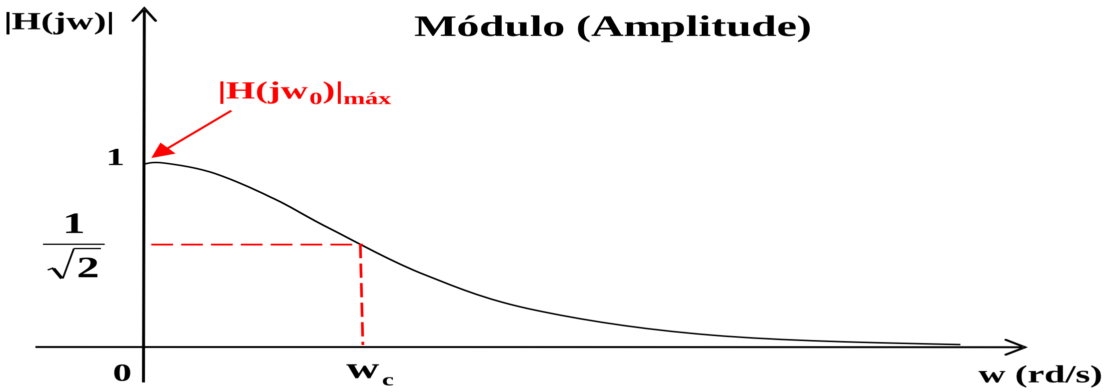
Assim, o intervalo de frequência que o sinal de saída passa é: $\mathbf{0 \le w \le \sqrt{2}}$ rd/s.

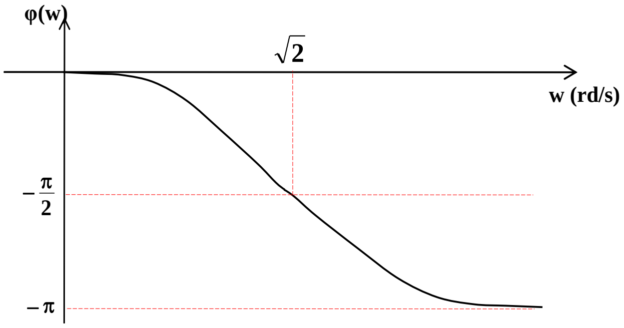
A resposta em fase é dada por: $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{(w) = -tg^{-1}}\left[\frac{\mathbf{2w}}{\left(\mathbf{2-w^2}\right)}\right]$.

Análise da variação de **w** para esboçar os Gráficos:

Para baixas frequências **w** → **0** => **|H(jw)|** → **1**.
Para altas frequências **w** → ∞ => **|H(jw)|** → **0**. } Passa-Baixas!

Para baixas frequências **w** → **0** => **φ(w)** → **0**.
Para altas frequências **w** → ∞ => **φ(w)** → **-π**.





3) Filtro Passa-Alta:

Seja um circuito representado pela Função de Transferência dada:

$$\mathbf{H(s) = \frac{2s^2}{(s^2 + 4s + 8)}; \quad então:}$$

$$\mathbf{H(jw) = \frac{2(jw)^2}{[(jw)^2 + 4(jw) + 8]} = \frac{-2w^2}{(-w^2 + j4w + 8)} \Rightarrow H(jw) = \frac{2w^2}{[(w^2 - 8) - j4w]}}$$

$$\mathbf{Assim: \quad |H(jw)| = \frac{2w^2}{\sqrt{(w^2-8)^2 + (4w)^2}} \Rightarrow |H(jw)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{16}{w^4}\right)}}}$$

$$\mathbf{Para \quad |H(jw)|_{máx} \Rightarrow w \to \infty \quad ; \quad Então: \quad |H(jw)|_{máx} = 2}$$

Determinação de $\mathbf{w_c}$ **:**

$$\mathbf{|H(jw_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |H(jw)|_{máx} \Rightarrow |H(jw_c)| = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{16}{w_c^4}}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow w_c = 2\sqrt{2}}$$

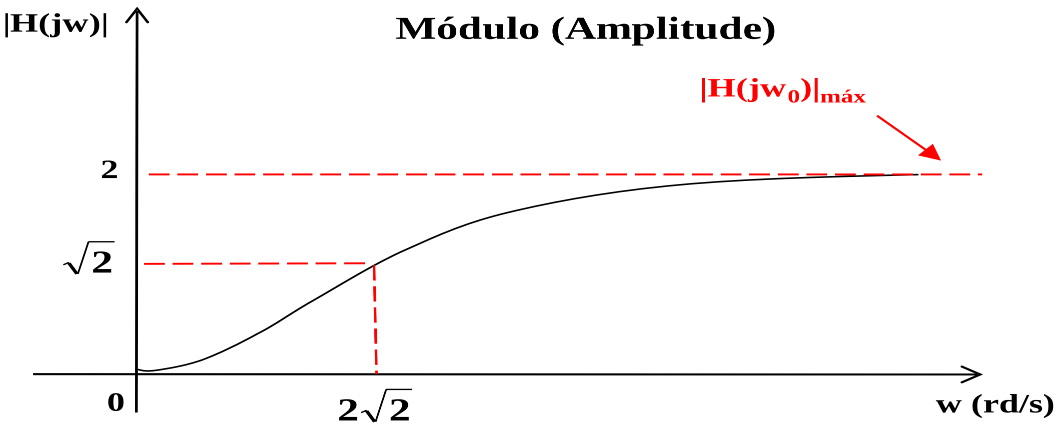
Assim, o intervalo de frequência que o sinal de saída passa é: $\mathbf{w \geq 2\sqrt{2}}$ rd/s.

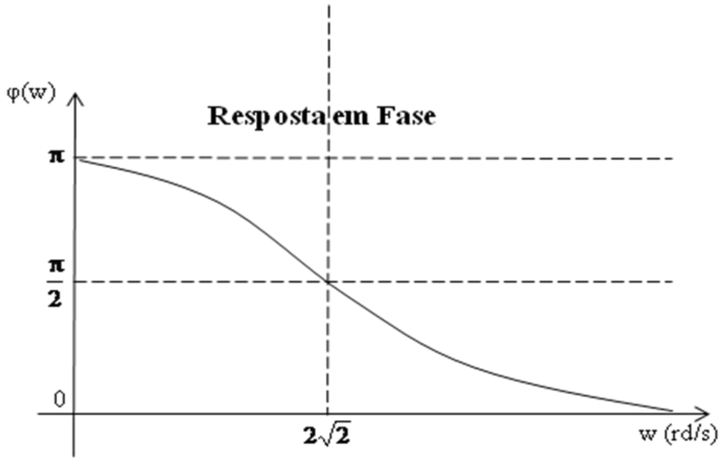
A resposta em fase é dada por: $\varphi(\mathbf{w}) = -\mathbf{tg}^{-1}\left[\frac{-4\mathbf{w}}{(\mathbf{w}^2 - 8)}\right]$.

Análise da variação de **w** para esboçar os Gráficos:

Para baixas frequências**:** **w** → **0 => |H(jw)|** → **0.**
Para altas frequências: **w** → ∞ **=> |H(jw)|** → **2.**
} Passa-Altas!

Para baixas frequências: **w** → **0 => φ(w)** → **π.**
Para altas frequências: **w** → ∞ **=> φ(w)** → **0.**





4) Filtro Corta-Faixa:

Seja um circuito representado pela Função de Transferência dada:

$$\mathbf{H(s)=\frac{3(s^2+25)}{(s^2+s+25)}} \quad ; \quad \mathbf{H(jw)=\frac{3\left[(jw)^2+25\right]}{\left[(jw)^2+(jw)+25\right]}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H(jw)=\frac{3\left(25-w^2\right)}{\left[\left(25-w^2\right)+jw\right]}}$$

Então :

$$\mathbf{\left|H(jw)\right|=\frac{3}{\sqrt{1+\left(\frac{w}{25-w^2}\right)^2}}} \quad ; \quad \mathbf{\left|H(jw)\right|_{máx} \Rightarrow w=0 \text{ e } w\to\infty \text{ , } \left|H(jw)\right|_{máx}=3}$$

Determinação de $\mathbf{w_c}$ **:**

$$\mathbf{\left|H\left(jw_c\right)\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left|H\left(jw\right)\right|_{máx}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\left|H\left(jw_c\right)\right|=\frac{3}{\sqrt{2}}}$$

$$\mathbf{\text{Mas qual } w \Rightarrow \left|H\left(jw_c\right)\right|=0 \quad \Rightarrow \quad 25-w^2=0 \quad \Rightarrow \quad w=5\,rd/s}$$

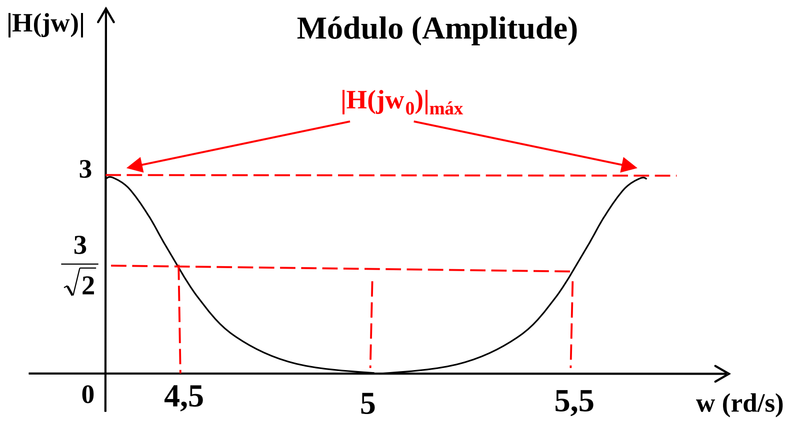
Daí :

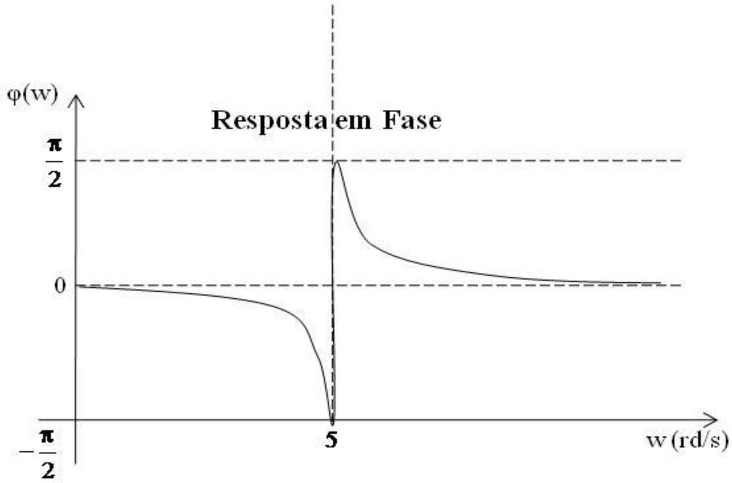
$$\mathbf{\left|H\left(jw_c\right)\right|=\frac{3}{\sqrt{2}}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{w_{c_1}=4{,}525} \\ \mathbf{w_{c_2}=5{,}525} \end{cases}$$

Assim, o intervalo de frequência que o sinal de saída passa é: $\mathbf{w<4{,}5 \text{ e } w>5{,}5\ rd/s}$.

A resposta em fase é dada por: $\mathbf{\varphi(w)=-tg^{-1}\left[\frac{w}{\left(25-w^2\right)}\right]}$.

Para baixas e altas frequências => |H(jw)| → 3 (Corta-Faixa!).
Para baixas freqüências w → 0 => φ(w) → 0.
Para altas freqüências w → ∞ => φ(w) → 0.

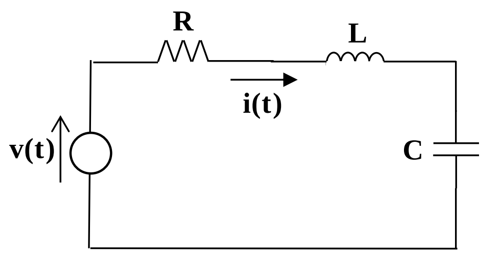




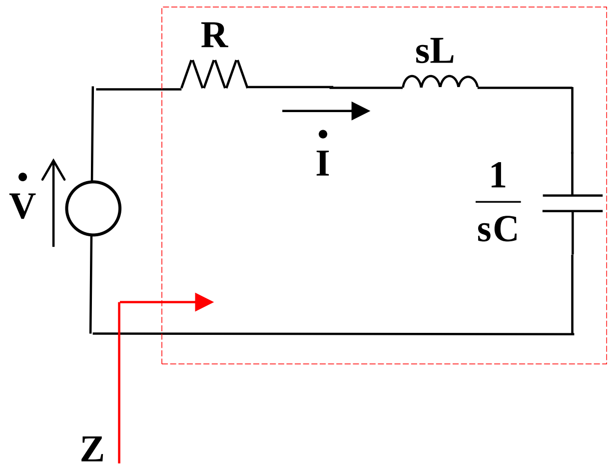
<u>Fatores de Escala na H(s)</u>

<u>Fator de Escala de Frequência</u> $(\mathbf{K_f})$**:**

Seja o circuito no domínio do tempo:



O circuito fasorial será dado por:



Onde: $\mathbf{Z(s) = R + sL + \dfrac{1}{sC}}$

A impedância **Z** pode ser alterada para $\mathbf{Z'=K_f Z}$ por um **Fator de Escala de Frequência** $\mathbf{K_f}$ para alterar a **frequência de corte w**$_c$ do filtro.

Então:

$$\mathbf{s'=K_f s \Rightarrow s=\frac{s'}{K_f}}$$

Assim:

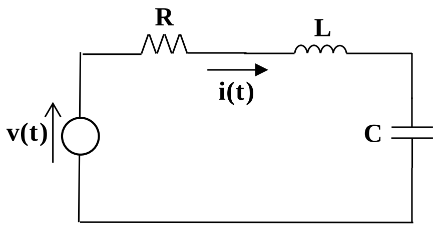
$$\mathbf{Z'(s)=Z\left(\frac{s'}{K_f}\right)=R+\left(\frac{L}{K_f}\right)s'+\frac{1}{\left(\frac{C}{K_f}\right)s'}}$$

Daí:

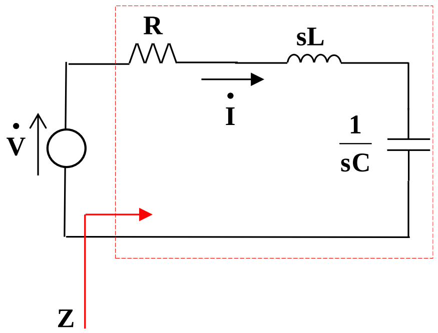
$$\boxed{\mathbf{R'=R}}\;\;\mathbf{;}\;\;\boxed{\mathbf{L'=\frac{L}{K_f}}}\;\;\mathbf{e}\;\;\boxed{\mathbf{C'=\frac{C}{K_f}}}$$

<u>Fator de Escala de Impedância</u> $\mathbf{(K_i):}$

Seja o circuito no domínio do tempo:



O circuito fasorial será dado por:



Onde: $\mathbf{Z(s)=R+sL+\frac{1}{sC}}$

A impedância **Z** pode ser alterada para $\mathbf{Z'=K_i Z}$ por um **Fator de Escala** $\mathbf{K_i}$ para alterar a **amplitude** do filtro.

Então:

$$\mathbf{Z'=K_i Z}$$

Assim:

$$\mathbf{Z'=K_i\underbrace{\left(R+sL+\frac{1}{sC}\right)}_{Z}=K_iR+(K_iL)s+\frac{1}{\left(\frac{C}{K_i}\right)s}\Rightarrow}$$

$$\mathbf{\Rightarrow Z'=R'+L's+\frac{1}{C's}}$$

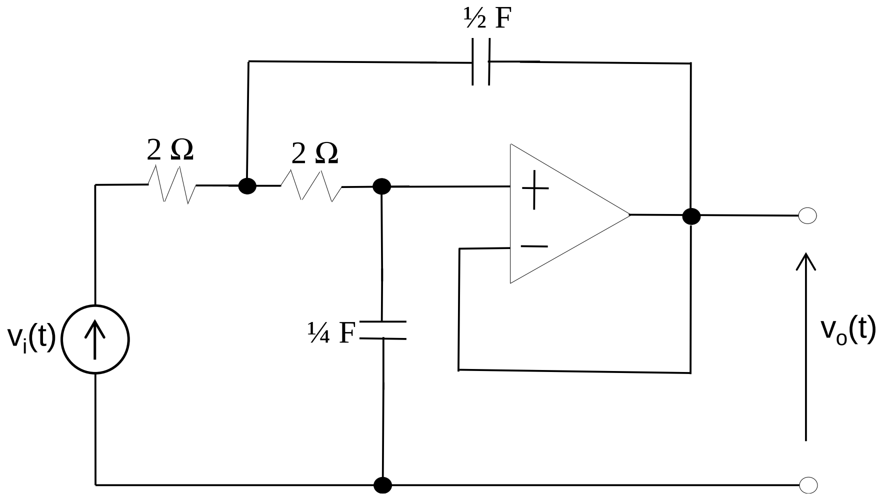
Daí:

$$\boxed{\mathbf{R'=K_iR}}\;\;\mathbf{;}\;\;\boxed{\mathbf{L'=K_iL}}\;\;\mathbf{e}\;\;\boxed{\mathbf{C'=\frac{C}{K_i}}}$$

NOTA:

Para obter um circuito com uma aplicação prática <u>deve-se primeiramente alterar em escala a freqüência</u>, em seguida, para obter-se valores dos elementos, deve-se alterar em escala as impedâncias.

Exemplo: Utilizando capacitores de **10 nF** e **5 nF** altere em **escala** o circuito do filtro dado para se obter $\mathbf{w_c = 2000\pi\ (rd.s^{-1})}$ **(ou** $\mathbf{f_c = 1\ KHz}$**)**.



A frequência de corte deste filtro é $\mathbf{w_c = \sqrt{2}\ \ (rd.s^{-1})}$ e caracteriza-se por ser um **Filtro Passa-Baixas**.

A Função de Transferência deste filtro é: $\mathbf{H(s) = \dfrac{V_o(s)}{V_i(s)} = \dfrac{2}{(s^2 + 2s + 52)}}$

Fazendo **s' = Kf.s** determinamos **Kf** pois $\mathbf{w_c}$**' = Kf** $\mathbf{w_c}$, então:

$$\mathbf{w_c{}' = K_f w_c \Rightarrow 2000\pi = K_f\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{K_f = 1000\sqrt{2}\pi}}$$

Com o fator **Kf** obtemos as novas capacitâncias aplicando $\mathbf{C' = \dfrac{C}{K_f}}$. Em seguida podemos obter o fator **Ki** com a alteração das capacitâncias em amplitude (impedância) pela transformação $\mathbf{C' = \dfrac{C''}{K_i}}$. Substituindo **C''** temos:

$$\mathbf{C' = \frac{C}{K_i K_f}}$$

Daí:

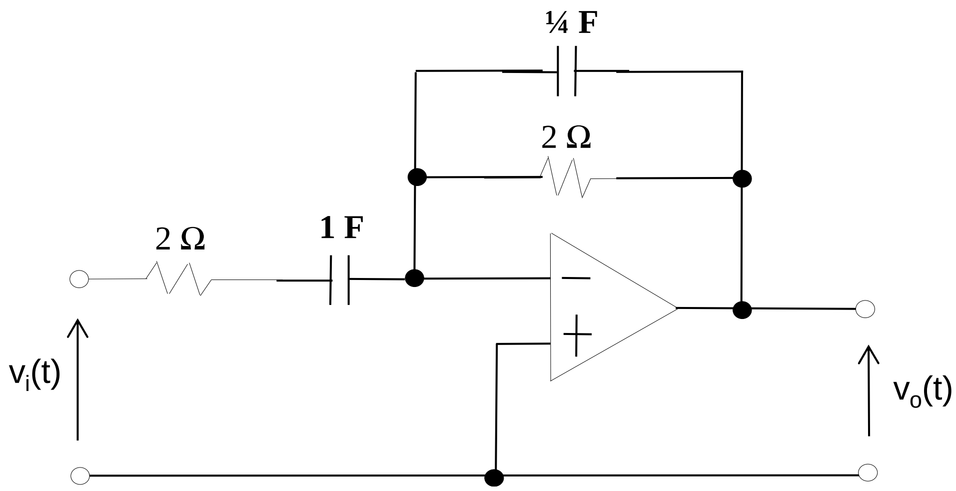
$$\mathbf{Para\quad C' = 10nF \quad\Rightarrow\quad 10\times10^{-9} = \frac{\frac{1}{2}}{K_i(10^3\sqrt{2}\pi)} \quad\Rightarrow\quad \boxed{K_i = \frac{10^5}{2\sqrt{2}\pi}}}$$

$$\mathbf{Para\quad C' = 5nF \quad\Rightarrow\quad 5\times10^{-9} = \frac{\frac{1}{4}}{K_i(10^3\sqrt{2}\pi)} \quad\Rightarrow\quad \boxed{K_i = \frac{10^5}{2\sqrt{2}\pi}}}$$

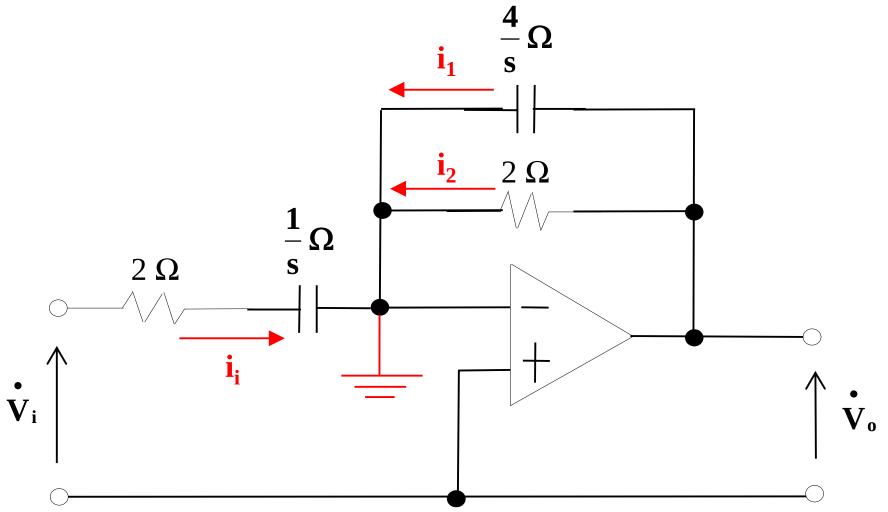
Finalmente determinamos o valor da resistência:

$$\mathbf{R' = K_i R \quad\Rightarrow\quad R' = \left(\frac{10^5}{2\left(\sqrt{2}\right)\pi}\right).(2) \quad\Rightarrow\quad \boxed{R' = 22{,}5\ K\Omega}}$$

Exemplo: Dado o circuito de um filtro, altere-o em escala para obter-se a **frequência central** $\mathbf{w_o = 1000\ rd.s^{-1}}$ utilizando-se capacitores de **1 μF e 4 μF** .



Circuito Fasorial:



$$\mathbf{i_i + i_1 + i_2 = 0 \quad \therefore \quad \frac{V_i}{\left(2+\frac{1}{s}\right)} + \frac{V_o}{s} + \frac{V_o}{2} = 0 \quad \therefore \quad \frac{sV_i}{(2s+1)} + \frac{sV_o}{4} + \frac{V_o}{2} = 0}$$

$$\mathbf{\frac{sV_i}{(2s+1)} = -\left(\frac{s+2}{4}\right)V_o \quad \therefore \quad \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{4s}{\left(2s^2+5s+2\right)}}$$

$$\mathbf{H(jw) = \frac{-j4w}{\left(-2w^2+j5w+2\right)} \quad \Rightarrow \quad H(jw) = \frac{-j4w}{\left(2-2w^2\right)+j5w} = \frac{1}{\left[-\frac{5}{4}+j\left(\frac{1-w^2}{2w}\right)\right]}}$$

$$\mathbf{Daí: \quad |H(jw)| = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}+\left(\frac{1-w^2}{2w}\right)^2}} \quad ; \quad |H(jw)|_{máx} \quad \Rightarrow \quad w_o = 1\,(rd/s)}$$

$$\mathbf{\begin{cases} w \to 0 \quad \Rightarrow \quad |H(jw)| \to 0 \\ w \to \infty \quad \Rightarrow \quad |H(jw)| \to 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Filtro Passa-Faixa!}}$$

$$\mathbf{Então: \quad |H(jw_o)| = \frac{4}{5} = 0{,}8 \Rightarrow \frac{|H(jw_o)|_{máx}}{\sqrt{2}} = \frac{0{,}8}{\sqrt{2}} \Rightarrow w_{c_1}\ e\ w_{c_2}!}$$

Fator de escala:

$$\text{Para } s = w_o \Rightarrow s' = K_f.s \quad \Rightarrow \quad 10^3 = K_f.(1) \quad \therefore \quad \boxed{K_f = 10^3}$$

$$C'_1 = 10^{-6} = \frac{C_1}{K_i.K_f} \quad \Rightarrow \quad 10^{-6} = \frac{0{,}25}{K_i 9.(10^3)} \quad \therefore \quad \boxed{K_i = 250}$$

$$C'_2 = 4.(10^{-6}) = \frac{1}{K_i.K_f} \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_i = 250}$$

Então :

$$R' = K_i.R \quad \Rightarrow \quad R' = 250.(2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{R' = 500\,\Omega}$$

Atenuação ou Perda

Em um **Filtro**, a **Atenuação** (**ou perda**) varia de acordo com a freqüência e é definida pela fórmula:

$$\alpha(w) = -20\log|H(jw)| \Rightarrow \alpha(w) = -20\log\left|\frac{V_2(jw)}{V_1(jw)}\right| \text{ dB} \Rightarrow \alpha(w) = 20\log\left|\frac{V_1(jw)}{V_2(jw)}\right| \text{ (dB)}$$

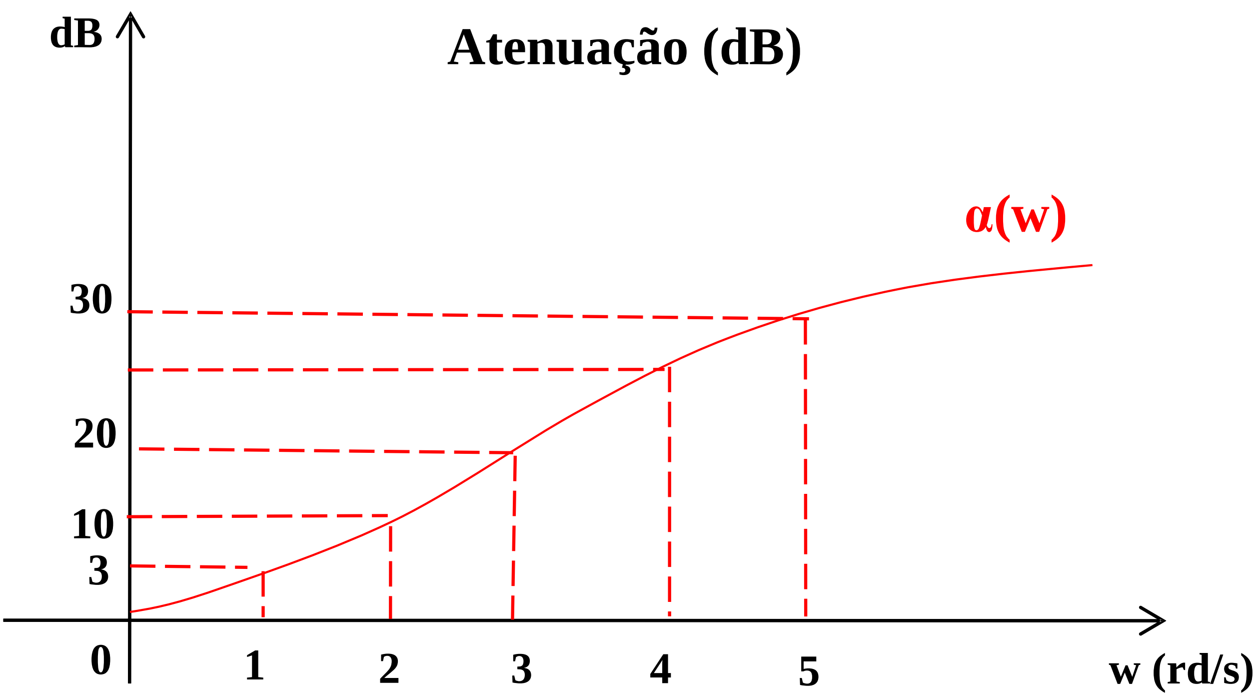
Exemplo: Dado um Filtro com $H(s) = \dfrac{1}{(s^2 + \sqrt{2}s + 1)} \quad \Rightarrow \quad |H(jw)| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + w^4}}$

Esboçar o gráfico de Atenuação do sinal.

Filtro Passa-Baixas $\Rightarrow \quad w_c = 1 \; (rd/s)$

A atenuação em decibéis será dada por: $\alpha(w) = 20\log\left(\sqrt{1 + w^4}\right) \quad \Rightarrow \quad 10\log\left(1 + w^4\right)$

Gráfico:



<u>Exercício:</u> Dado um Filtro com $\mathbf{H(s)=\dfrac{0{,}2s}{(s^2+0{,}2s+1)}}$ calcule as perdas em **dB** em **w = 0,905 rd/s**.

$$\alpha(w)=-20\log\left|H(jw)\right|\ (dB)$$

$$H(jw)=\frac{j0{,}2w}{\left(-w^2+j0{,}2w+1\right)}\ \Rightarrow\ H(jw)=\frac{j0{,}2w}{\left[\left(1-w^2\right)+j0{,}2w\right]}=\frac{1}{\left[1-j\left(\dfrac{1-w^2}{0{,}2w}\right)\right]}$$

$$\text{Daí :}\quad \left|H(jw)\right|=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{1-w^2}{0{,}2w}\right)^2}}$$

$$\alpha(w)=-20\log|H(jw)|=-20\log\left[\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{1-w^2}{0{,}2w}\right)^2}}\right]=10\log\left[1+\left(\frac{1-w^2}{0{,}2w}\right)^2\right]$$

Para **w = 0,905** => $\alpha(w)=10\log\left[1+\left(\dfrac{1-(0{,}905)^2}{(0{,}2).(0{,}905)}\right)^2\right]$ = **3 (dB) (de perda!)**.