ELT330 – Sistemas de Controle I

Prof. Tarcísio Pizziolo

Aula 17 – Análise de Resposta Permanente

1. Introdução

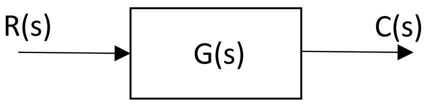
A análise de resposta no estado permanente, ou estacionário, avalia o erro que o sistema pode produzir quando não consegue seguir a entrada aplicada quando $t \rightarrow \infty$. Este erro é também denominado **Erro em Regime Permanente**, ou seja,

$$e_{ss}(t \rightarrow \infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - c(t)]$$

2. Erro em Regime Permanente em Malha Aberta

Dada a Função de Transferência de um sistema em Malha Aberta pode-se calcular o $\mathbf{e_{ss}(t)}$ para as entradas Degrau, Rampa e Parábola sem a necessidade de se calcular a resposta completa do sistema.

Por exemplo, seja um sistema em malha aberta que possua a seguinte função de transferência,



$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

Considerando r(t) a entrada degrau unitário e c(t) a saída do sistema, podemos escrever que o erro em regime permanente será,

$$e_{ss}(t \rightarrow \infty) = \lim_{t \longrightarrow \infty} [r(t) - c(t)]$$

Para esse cálculo de $e_{ss}(t)$ teríamos que determinar a saída completa c(t) do sistema. No entanto, podemos obter $e_{ss}(t)$ trabalhando no domínio da frequência **s** (aplicando a Transformada de Laplace) sem o cálculo da saída completa c(t) do sistema.

Assim,

$$C(s) = G(s)R(s)$$

O erro E(s) é a diferença entre a função de entrada R(s) e a função de saída C(s), então,

E(s) = R(s) – C(s)

Substituindo C(s) na equação do E(s),

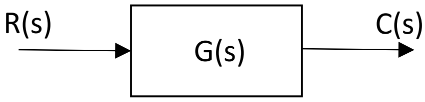
$$E(s) = R(s) - G(s)R(s) \Longrightarrow \boxed{E(s) = [1 - G(s)]R(s)}$$

O erro no domínio do tempo é então dado por,

$$e_{ss}(t \rightarrow \infty) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\underbrace{[1 - G(s)]R(s)}_{E(s)}\right\}$$

Para a determinação do erro em regime permanente faz-se $t \rightarrow \infty$ em $e_{ss}(t)$.

Exemplo: Seja a Função de Transferência de um sistema de controle em Malha Aberta dada por,



$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Considerando a entrada R(s) = 1/s, determinar o erro em estado permanente $e_{ss}(t)$.

$$e(t) = \pounds^{-1}\left\{\underbrace{\left[1 - \frac{1}{(s+1)(s+2)}\right]\frac{1}{s}}_{=E(s)}\right\} \Longrightarrow e(t) = \pounds^{-1}\left\{\underbrace{\frac{s^2+3s+1}{s(s^2+3s+2)}}_{=E(s)}\right\}$$

$$E(s) = \frac{s^2+3s+1}{s(s^2+3s+2)} = \frac{s^2+3s+1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+2)}$$

$$A = \left(\frac{s^2+3s+1}{s(s+1)(s+2)}\right)s\bigg|_{s=0} \Longrightarrow A = \frac{0+0+1}{(0+1)(0+2)} \Longrightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}}$$

$$B = \left(\frac{s^2+3s+1}{s(s+1)(s+2)}\right)(s+1)\bigg|_{s=-1} \Longrightarrow B = \frac{(-1)^2+3(-1)+1}{-1(-1+2)} \Longrightarrow \boxed{B = 1}$$

$$C = \left(\frac{s^2+3s+1}{s(s+1)(s+2)}\right)(s+2)\bigg|_{s=-2} \Longrightarrow C = \frac{(-2)^2+3(-2)+1}{-2(-2+1)} \Longrightarrow \boxed{C = -\frac{1}{2}}$$

Resolvendo a Transformada Inversa de Laplace tem-se,

$$e(t) = \pounds^{-1}\left\{\underbrace{\frac{1}{2s} + \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{2(s+2)}}_{=E(s)}\right\} \Longrightarrow \boxed{e(t) = \frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}}$$

Para a determinação do erro em regime permanente faz-se $t \to \infty$ em e(t), então,

$$e_{ss}(t \longrightarrow \infty) = \frac{1}{2} + 0 - 0 \Longrightarrow \boxed{e_{ss}(t \longrightarrow \infty) = \frac{1}{2}}$$

Observando a parcela que possui o denominador s, podemos concluir que não precisávamos ter calculado os coeficientes das outras frações. Só precisamos calcular o coeficiente referente a esta fração com denominador s, uma vez que as transformadas inversas das outras frações tendem a 0 (zero) quando $t \to \infty$. Ou seja, uma vez tendo a expressão para a Transformada de Laplace do erro, o valor final será o coeficiente da fração com denominador s, que podemos obter multiplicando a transformada do erro por s e fazendo s igual a 0. Note, no entanto, que os denominadores das outras frações parciais precisam ter parte real negativa, caso contrário as transformadas inversas dessas frações não tenderão a 0 e não teremos valor final para o erro, ele aumentará indefinidamente ou ficará oscilando.

2.1 Teorema do Valor Final

Seja f(t) uma função contínua e derivável a qual F(s) é sua transformada de Laplace. Se existir,

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = K$$

Então,

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)}$$

A aplicação deste teorema simplifica o cálculo do erro em regime permanente, pois conseguimos determiná-lo no domínio do tempo trabalhando com a função erro no domínio da frequência s sem a necessidade de realizar a Transformada Inversa de Laplace.

Vejamos para o exemplo anterior.

$$e_{ss}(t) = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) \Rightarrow e_{ss}(t) = \lim_{s\to 0}\left\{s\left[\frac{s^2+3s+1}{s(s+1)(s+2)}\right]\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{e_{ss}(t) = \frac{1}{2}}$$

Exemplo: Seja agora a Função de Transferência do sistema de controle anterior com um ganho igual a 2. Qual é o erro em regime permanente deste sistema para uma entrada rampa unitária?

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

Considerando $R(s) = 1/s^2$ e aplicando a fórmula do e(t),

$$e(t) = \pounds^{-1}\left\{\underbrace{\left[1-\frac{2}{(s+1)(s+2)}\right]\frac{1}{s^2}}_{=E(s)}\right\} \Rightarrow e(t) = \pounds^{-1}\left\{\underbrace{\frac{s^2+3s}{s^2(s^2+3s+2)}}_{=E(s)}\right\}$$

$$E(s) = \frac{s^2+3s}{s^2(s^2+3s+2)} = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+2)}$$

$$A = \left[\left(\frac{s+3}{s(s+1)(s+2)}\right)s\right]\Bigg|_{s=0} \Rightarrow A = \left[\frac{s+3}{(s^2+3s+2)}\right]\Bigg|_{s=0} \Rightarrow \boxed{A = \frac{3}{2}}$$

$$B = \left(\left(\frac{s+3}{s(s+1)(s+2)}\right)(s+1)\right)\Bigg|_{s=-1} \Rightarrow B = \left(\frac{-1+3}{-1(-1+2)}\right)\Bigg|_{s=-1} \Rightarrow \boxed{B = -2}$$

$$C = \left(\left(\frac{s+3}{s(s+1)(s+2)}\right)(s+2)\right)\Bigg|_{s=-2} \Rightarrow C = \left(\frac{-2+3}{-2(-2+1)}\right)\Bigg|_{s=-2} \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{2}}$$

Resolvendo a Transformada Inversa de Laplace tem-se,

$$e(t) = \pounds^{-1}\left\{\underbrace{\frac{3}{2s} - \frac{2}{(s+1)} + \frac{1}{2(s+2)}}_{=E(s)}\right\} \Rightarrow \boxed{e(t) = \frac{3}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}}$$

Para a determinação do erro em regime permanente faz-se $t \rightarrow \infty$ em $e_{ss}(t)$, então,

$$e_{ss}(t \longrightarrow \infty) = \frac{3}{4} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \Rightarrow \boxed{e_{ss}(t \longrightarrow \infty) = \frac{3}{2}}$$

No caso de uma entrada rampa unitária a saída do sistema não tem valor final, mas em regime permanente o $e_{ss}(t\rightarrow\infty) = 1{,}5$.

Aplicando o Teorema do Valor Final,

$$e_{ss}(t) = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) \Rightarrow$$

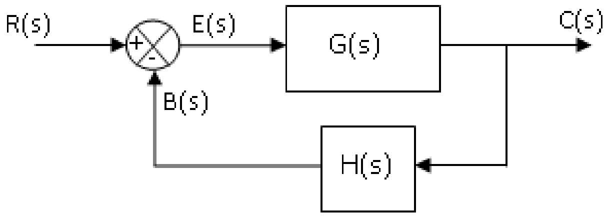
$$\Rightarrow e_{ss}(t) = \lim_{s\to 0}\left\{s\left[\frac{3}{2s} - \frac{2}{(s+1)} + \frac{1}{2(s+2)}\right]\right\} \Rightarrow \boxed{e_{ss}(t) = \frac{3}{2}}$$

O Teorema do Valor Final pode ser aplicado desde que o sinal realmente tenda a um valor constante quando $t \to \infty$. O fato de acharmos valor finito quando usamos o Teorema do Valor Final não garante que o erro tenda a um valor constante uma vez que ele pode conter outras componentes que vão divergir ou oscilar indefinidamente

Agora, dada a FT de um sistema em MA, você saberá calcular o erro em regime permanente para entradas degrau, rampa e parábola.

3. Erro em Regime Permanente em Malha Fechada

Seja um sistema em MF dado pelo seu diagrama de blocos,



A expressão do erro é E(s) = [R(s) – B(s)], e substituindo B(s) tem-se,

$$E(s) = R(s) - C(s)H(s) = R(s) - E(s)G(s)H(s) \Longrightarrow$$

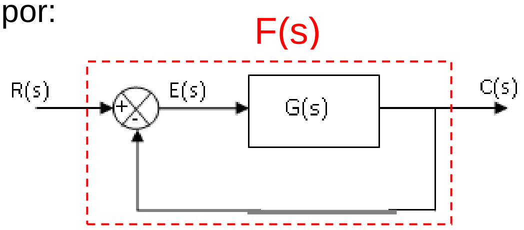
$$E(s)[1 + G(s)H(s)] = R(s) \Longrightarrow \boxed{E(s) = \frac{1}{[1 + G(s)H(s)]} R(s)}$$

Podemos usar o Teorema do Valor Final para obter o erro regime permanente. Então,

$$e_{ss}(t) = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow e_{ss}(t) = \lim_{s \to 0} \left\{ s \left[\frac{1}{[1 + G(s)H(s)]} R(s) \right] \right\}$$

Exemplo: Uma Função de Transferência de malha fechada com realimentação unitária negativa é dada por:



$$F(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{96(s + 3)}{(s + 8)(s^2 + 8s + 36)}$$

Determinar o erro de estado permanente para uma entrada em degrau unitário.

$$e_{ss}(t) = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \left\{ s \left[\frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s) \right] \right\}$$

Como H(s) = 1, a determinação de $e_{ss}(t)$ fica;

$$e_{ss}(t) = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \left\{ s \left[\frac{1}{1 + G(s)} R(s) \right] \right\}$$

Rearranjando:

$$\frac{1}{1 + G(s)} = \frac{1 + G(s) - G(s)}{1 + G(s)} = \frac{1 + G(s)}{1 + G(s)} - \frac{G(s)}{1 + G(s)} = 1 - F(s)$$

Então:

$$e_{ss}(t) = \lim_{s \to 0} \left\{ s \left[\frac{1}{1 + G(s)} R(s) \right] \right\} = \lim_{s \to 0} \{ s[1 - F(s)]R(s) \} = \lim_{s \to 0} \left\{ s[1 - F(s)] \frac{1}{s} \right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow e_{ss}(t) = \lim_{s \to 0} [1 - F(s)] \Longrightarrow e_{ss}(t) = [1 - F(0)] \Longrightarrow e_{ss}(t) = [1 - 1] \Longrightarrow \boxed{e_{ss}(t) = 0}$$