UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MAT 340 - EDO - 2017/II

Terceira Lista Exercícios

1 Sistemas de Equações de Primeira Ordem Lineares

1. Transforme a equação diferencial dada em um sistema de equações de primeira ordem.

   (a) $u'' + \frac{1}{2}u' + 2u = sen(t)$.

   (b) $u^{(4)} - u = 0$.

   (c) $t^2u'' + tu" + (t^2 - \frac{1}{4})u = 0$.

2. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + p(t)y + q(t)y = g(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = \widehat{y_0}.$$

   Transforme o PVI acima para um PVI de um sistema de primeira oredem.

3. Considere o sistema linear homogêneo

$$\begin{array}{rcl} x' & = & p_{11}(t)x + p_{12}(t)y \\ y' & = & p_{21}(t)x + p_{22}(t)y. \end{array}$$

   Se $x = x_1(t), y = y_1(t)$ e $x = x_2(t), y = y_2(t)$ são duas soluções do sistema acima, mostre que $x = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ e $x = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ também é solução do sistema. Este é o princípio da superposição.

4. Em cada item abaixo, verfique que o vetor dado satisfaz a equação diferencial.

   (a)
$$x' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x, \quad x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

   (b)
$$x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{t}.$$

5. Em cada item abaixo, encontre a solução geral do sistema e descreva o comportamento da solução quando $t \to \infty$.

(a) $x' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x.$

(b) $x' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x.$

(c) $x' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} x.$

(d) $x' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} x.$

6. Em cada item abaixo, encontre a solução geral do PVI e descreva o comportamento da solução quando $t \to \infty$.

(a) $x' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

(b) $x' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

(c) $x' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2 Transformada de Laplace

7. Em cada item abaixo, esboçe o gráfico da função dada, determine se a função é contínua, seccionalmente contínua (contínua por partes) ou nenhuma delas no intervalo $0 \leq t \leq 3$.

(a) $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2+t, & 1 < t \leq 2 \\ 6-t, & 2 < t \leq 3. \end{cases}$

(b) $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ (t-1)^{-1}, & 1 < t \leq 2 \\ 1, & 2 < t \leq 3. \end{cases}$

(c) $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & 1 < t \leq 2 \\ 3-t, & 2 < t \leq 3. \end{cases}$

8. Encontre a Transformada de Laplace das seguintes funções:

(a) $cos(t)$

(b) $senh(t)$

(c) $tsen(at)$

(d) $e^{at}cos(at)$

9. **Função Gama**. A função Gama é definida por

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^p dx.$$

(a) Mostre que para $p > 0$, $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.

(b) Mostre que $\Gamma(1) = 1$.

(c) Se p é um inteiro possitivo, então $\Gamma(p+1) = p!$. Observe que faz sentido definir $0! = 1$.

10. Encontre a inversa da transformada de Laplace de:

(a) $\dfrac{3}{s^2+4}$

(b) $\dfrac{4}{(s-1)^3}$

(c) $\dfrac{3s}{s^2-s-6}$

(d) $\dfrac{2s+1}{s^2-2s+2}$

11. Use a transformada de Laplace para rsolver os seguintes PVI's.

(a) $y'' - y' - 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$

(b) $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

(c) $y'' - 2y' - 2y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$

(d) $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 1.$

(e) $y'' + k^2 y = cos(2t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

12. Seja

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt,$$

onde f satisfaz as condiçoes de ser seccionalmente contínua em todo intervalo $[0, A]$, para todo $A > 0$ e $|f(t)| \leq Ke^{at}$, quando $t > M$, onde $M > 0$, $K > 0$, $a \in \mathbb{R}$ e $s > a$. Neste caso, F é diferenciável e podemos derivar sob o sinal da integral em relação a s.

(a) Mostre que $F'(s) = \mathcal{L}(-tf(t))$.

(b) Mostre que $F^{(n)}(s) = \mathcal{L}((-t)^n f(t))$. Note que diferenciar a Transformada de Laplace corresponde a multiplicar a função original por $-t$.

13. Use o resultado obtido no problema 12 para encontrar a Transformada de Laplace das funções:

(a) $t^2 sen(bt)$

(b) t^n

(c) $t^n e^{at}$

14. Encontre a Transformada de Laplace das funçoes à seguir.

(a) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ (t-2)^2, & t \geq 2. \end{cases}$

(b) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ t^2 - 2t + 2, & t \geq 1. \end{cases}$

15. Encontre a Transformada de Laplace inversa das funçoes à seguir.

(a) $F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s^2 + s - 2}$

(b) $F(s) = \dfrac{3!}{(s-2)^4}$

(c) $F(s) = \dfrac{e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} - e^{-4s}}{s}$.

16. Suponha que $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ exista para $s > a \geq 0$.

(a) Se $c > 0$ mostre que $\mathcal{L}(f(ct)) = \frac{1}{c}F(\frac{s}{c})$.

(b) Se $k > 0$ mostre que $\mathcal{L}^{-1}(F(ks)) = \frac{1}{k}f(\frac{t}{k})$.

(c) Se $a, b \in \mathbb{R}$, com $a > 0$, mostre que $\mathcal{L}^{-1}(F(as+b)) = \frac{1}{a}e^{\frac{-bt}{a}}f(\frac{t}{a})$.

17. Use os resultados do exercício 16 para encontrar a Transformada de Laplace inversa das funçoes à seguir.

(a) $F(s) = \dfrac{2s+1}{4s^2 + 4s + 5}$

(b) $F(s) = \dfrac{1}{9s^2 - 12s + 3}$

(c) $F(s) = \dfrac{2^{n+1}n!}{s^{n+1}}$.

18. Prove que a Integral de Convolução satisfaz as propriedades, comutativa, distributiva e associativa, ou seja, satisfaz:

(a) $f * g = g * f$

(b) $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$

(c) $f * (g * h) = (f * g) * h$.

19. Dê um exemplo em que $(f * 1) \neq f$.

20. Mostre, através do exemplo $f(t) = sen(t)$, que $f * f$ não precisa ser não negativa.

21. Encontre as Transformadas de Laplace das seguintes funções:

(a) $f(t) = \displaystyle\int_0^t (t-\tau)^2 cos(2\tau)d\tau$

(b) $f(t) = \displaystyle\int_0^t (t-\tau)e^{\tau}d\tau$.

22. Encontre a Transformada de Laplace inversa das funçoes à seguir:

(a) $F(s) = \dfrac{1}{s^4(s^2+1)}$

(b) $F(s) = \dfrac{s}{(s+1)(s^2+4)}$.

23. Expresse a solução dos seguintes PVI's em termos de uma integral de convolução.

(a) $y'' + 2y' + 2y = sen(\alpha t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

(b) $y'' + 3y' + 2y = cos(\alpha t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$