ELT 410 - Sinais e Sistemas
Aula Prática 5: Série de Fourier - Efeito Gibbs

Wérikson F. O. Alves - 96708
Departamento de Engenharia Elétrica,
Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MG Email: werikson.alves@ufv.br

***Resumo*—Este relatório trata-se sobre a representação de sinais periódicos através da série de Fourier e sua reconstrução a partir da série de Fourier truncada. Por meio do *software* MatLab foi analisado e estudado o efeito Gibbs e ao final foi desenvolvido um sintetizador de som, e em seguida, apresentando os resultados da simulação.**

I. Introdução

É possível representar uma função por meio de um somatório, sendo está a série de Fourier, Equação 1, tanto em tempo continuo quanto em tempo discreto, sendo que essas representações são utilizadas para analisar inicialmente a filtragem de sinais. Ao utilizar a série de Fourier, é utilizado funções exponenciais que são autofunções dos sistemas LIT. Devido a isto, pode-se representar vários tipos de sinais como uma soma ponderada dos exponencias complexas harmonicamente relacionada as quais compartilham um período comum com o sinal representado.

$$x(t) = \sum_{k_{min}}^{k_{max}} (a_k e^{jkw_0 t}) \tag{1}$$

Para uma boa representação, ao aumentarmos o numero de termos, nota-se que cada vez mais o sinal se aproxima do sinal original. Contudo, próximo da região de descontinuidade são percebidas certas discrepâncias sendo estas chamadas de Fenômeno de Gibbs. Porém, é possível minimizar esse efeito.

$$x(t) = \sum_{0}^{k_{max}} (2|c_k| cos(kw_0 t + \phi)) \tag{2}$$

Portanto, este relatório tem como objetivo compreender e analisar o efeito Gibbs, para então minimizá-lo. Além disto, tem por objetivo no final sintetizar o som de um instrumento musical por meio da série de Fourier.

II. Materiais e Métodos

O meio utilizado para execução desta pratica foi o *software* MatLab. Desta forma, para a execução do trabalho os seguintes comando foram essenciais: *abs*, *angle*, *sinc*, *fft*.

A. Fenômeno Gibbs

Assim, para a realização da primeira parte da prática, inicialmente, foi considerado o sinal periódico, vide Figura 1. Em seguida, foi criada uma função *"ck.m"* no qual esse sinal foi representado em forma de serie, tendo os seguintes parâmetros: A = 1, $T_0 = 6$, $T_1 = 0,5$ e $k = 10$.

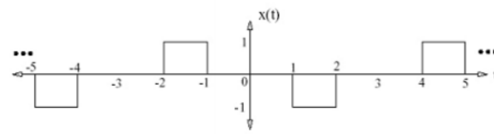

Figura 1. Sinal periódico: $x(t)$

Em seguida, foi sintetizado a serie de Fourier para esse sinal para um dado K_{max}. Para isto, construído o código referente a Equação 2, no qual |ck| e ϕ são obtidos a partir da função *"ck.m"*, $w_0 = (2\pi)/T_0$, t variando de -5 até 5 com passos de 0,01 e com k assumindo três valores sendo eles 5, 15, 30.

B. Minimização do efeito Gibbs

Para a segunda parte, como forma de demonstrar o efeito Gibbs, foram realizadas novas simulações para 2, 5, 10, 50 e 100 termos. Depois foi utilizado o janelamento *Fejer* para diminuir o efeito Gibbs.

Ao utilizar essa função se forem incluídas N harmonicas na série reconstruída, então a amplitude do k-ésimo harmônico é multiplicada por $(Nk)/N$. Em seguida, foi utilizado o janelamento *Hamming*, que consiste na multiplicação do k-ésimo harmônico por $0,54 + 0,46cos(k/N)$.

C. Sintetizador de som

Assim, pode-se dizer que a serie de Fourier pode ser usado para sintetizar outros tipos de sinais, como por exemplo instrumentos musicais.

Portanto, com base no sinal trumpet foi utilizado a serie de fourier para fazer a síntese de um som. Para isto, inicialmente foi utilizado o trecho do script disponibilizado no roteiro.

```
Fs = 11025; % Frequencia de amostragem
Y = fft(trumpet,512); % Realiza a ...
    transformada r p i d a de fourier da f u ...
    n o
Ymag = abs(Y(1:257)); % Devolve o modulo da ...
    f u n o
Yfas = angle(Y(1:257)); % Devolve o angulo ...
    de fase
f = Fs*(0:256)/512; % Devolve a frequencia ...
    do ponto
```

Os sons de instrumentos musicais podem ser sintetizados usando apenas as informações de pico. Dessa forma, foram executadas três simulações variando o numero de valores de pico selecionados em 5, 10 e 50.

Selecionando inicialmente 5 valores de picos e ordenando-os de forma crescente, foi criada uma função para calcular a serie de fourier sintetizada. Em seguida, foi criada uma nova função para se calcular a serie de fourier, contudo foi incluída a fase no cosseno. Esse procedimento foi repetido para 10 e 50 valores de pico selecionados.

III. Resultados e Discussões

A. *Fenômeno Gibbs*

Para a primeira parte, utilizando a função *ck.m* foram obtidos os gráficos do modulo e da fase, Figuras 2 e 3, respectivamente:

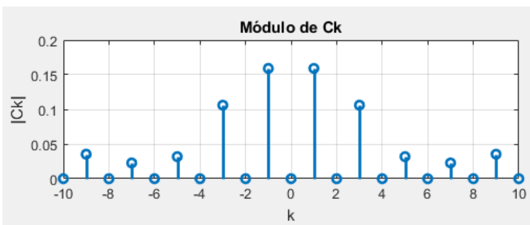

Figura 2. Módulo de ck.

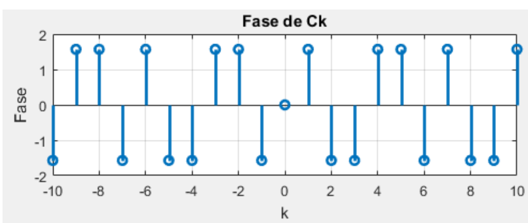

Figura 3. Ângulo de ck.

Em seguida foram obtidos os gráficos da função sintetizada considerando o valor de escolhido de k, ou seja, o numero de termos da serie, Figuras 4, 5 e 6.

B. *Minimização do efeito Gibbs*

Para a segunda parte, foram gerados os seguintes gráficos a partir da minimização, para diversos valores de k, pelo janelamento Fejer e o janelamento Hamming, Figuras 7, 8, 9, 10 e 11.

C. *Sintetizador de som*

Logo, para esta seção foi analisado o arquivo *trumpet.mat* possuindo uma frequência de amostragem Fs. Em seguida, foi plotado o sinal trumpet divido em três trechos diferentes. Com o trecho de código disponibilizado, foi obtido um gráfico com um conjunto de picos do sinal, Figuras 13.

Obtido o gráfico de picos, ao escolhendo os cinco maiores valores em ordem crescente obteve-se os seguintes resultados, apresentados na Figura 14. Em seguida, foi repetido

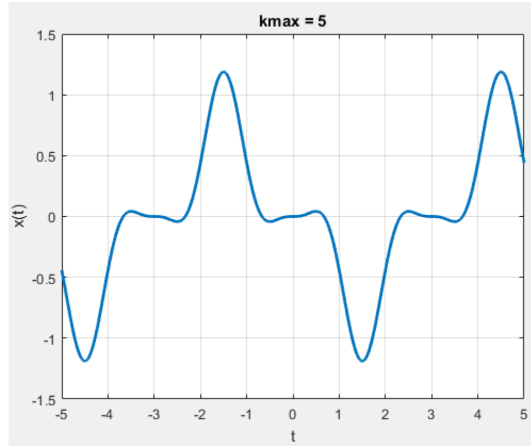

Figura 4. Serie para $k = 5$.

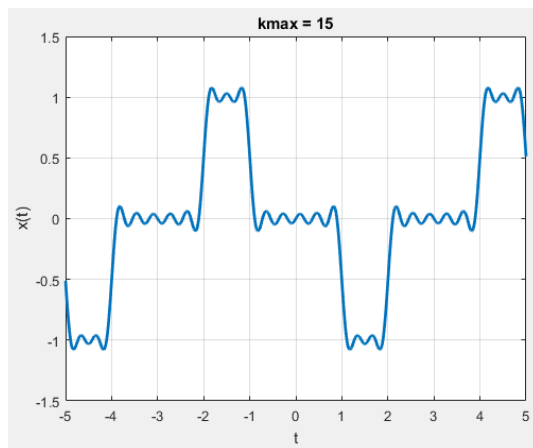

Figura 5. Serie para $k = 15$.

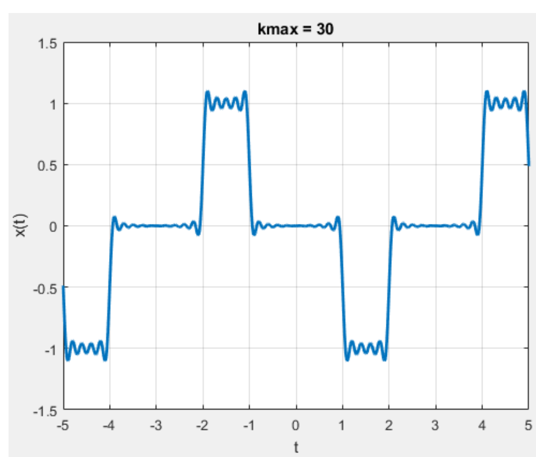

Figura 6. Serie para $k = 30$.

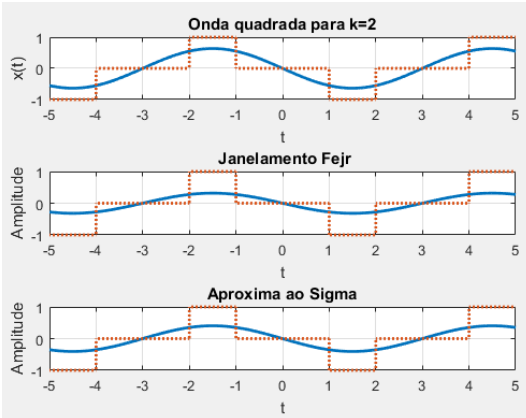

Figura 7. Serie com 2 termos.

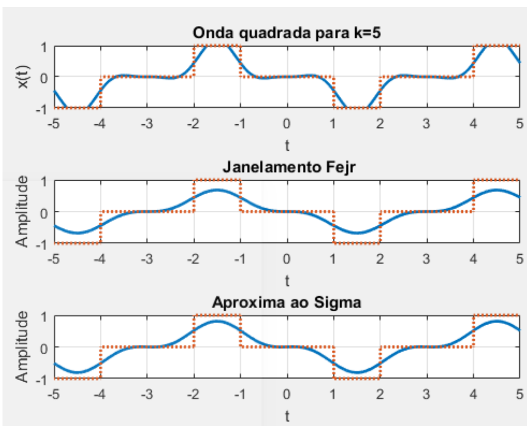

Figura 8. Serie com 5 termos.

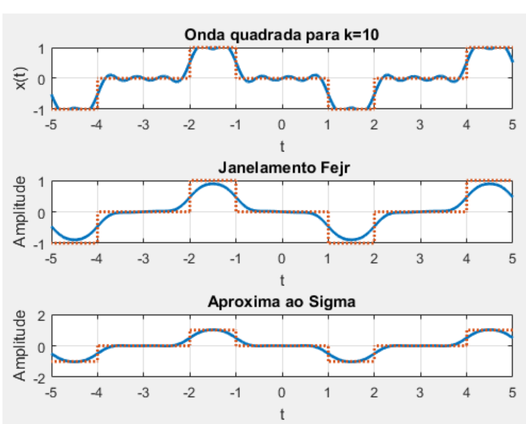

Figura 9. Serie com 10 termos.

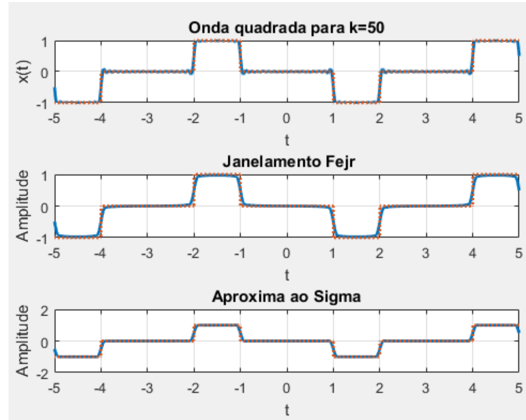

Figura 10. Serie com 50 termos.

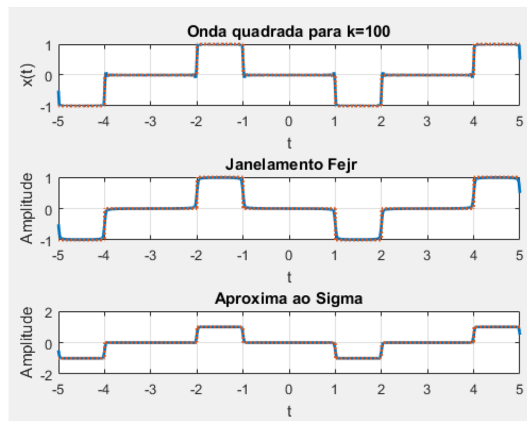

Figura 11. Serie com 100 termos.

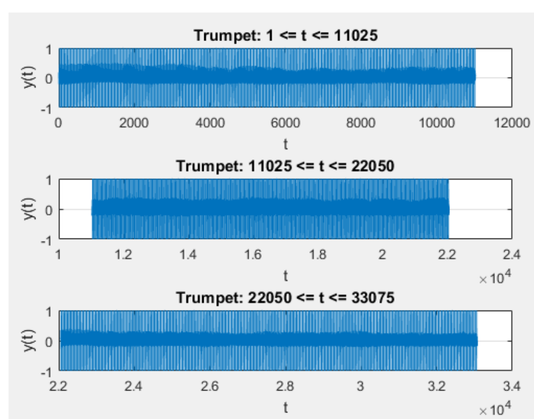

Figura 12. Trechos do sinal trumpet.

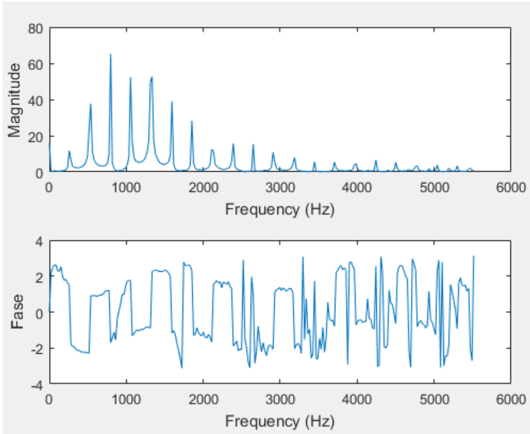

Figura 13. Gráficos de picos.

o experimento para dez valores, obtendo os resultados da Figura 15. E por ultimo foi simulado para 50 valores, obtendo a resposta mostrada na Figura 16.

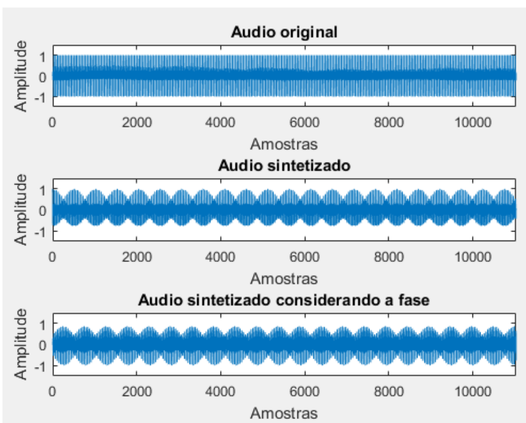

Figura 14. Áudios para 5 valores.

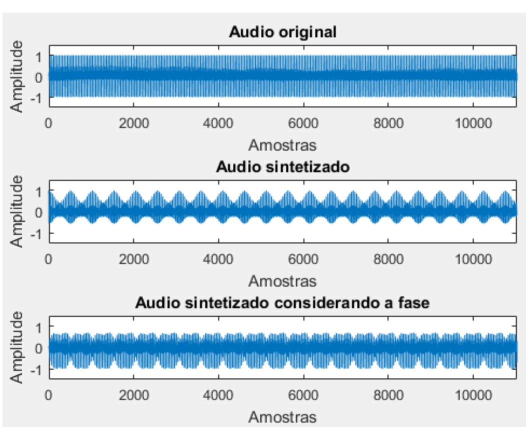

Figura 15. Áudios para 10 valores.

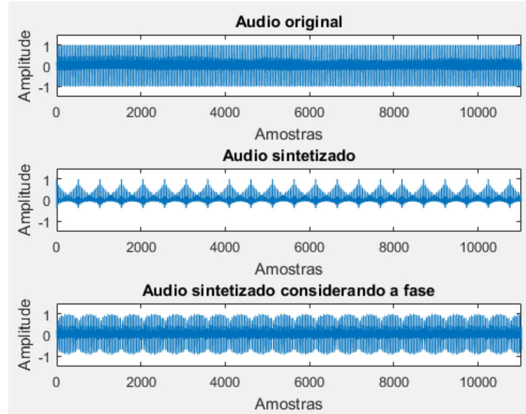

Figura 16. Áudios para 50 valores.

IV. Conclusão

Portanto, por meio deste relatório pôde-se observar que o efeito Gibbs está presente sempre que ha variações muito abruptas do sinal. Contudo, foi visto que esse problema pode ser minimizado através de determinadas ferramentas. Além disto, foi observado que quanto mais termos houver na serie, mais o sinal ficará próximo do sinal original, porém mesmo com um numero elevado de termos, ainda haverá um pequeno erro no sinal. Outro ponto também analisado foi a sintetização de um som instrumental, o qual foi obtido sua serie de Fourier.

Referências

[1] FELIX L. B. *AULA PRÁTICA 01 - MATLAB. ELT410 - Sinais e Sistemas Roteiro da aula prática. Universidade Federal de Viçosa, MG.* 2021.

[2] Bhagwandas Pannalal Lathi and Roger A Green. *Linear systems and signals*, volume 2. Oxford University Press New York, 2005.

V. Apêndice

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% NOME:  Werikson Alves - 96708
% Relat rio 05 de ELT 410
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Exerc cio 1 (Gibbs): Item 1,2 e 3
clear all; close all; clc

kmax = 10;
k = -kmax : kmax; %Vetor k
a = Ck(k);        %Fun  o Ck
Mod = abs(a);     %M dulo de a
Ang = angle(a);   % ngulo de a

figure();
subplot(2,1,1);
stem(k,Mod);
title('M dulo de Ck'); ylabel('|Ck|'); xlabel('k');
subplot(2,1,2);
stem(k,Ang);
title('Fase de Ck'); ylabel('Fase'); xlabel('k');

% Exerc cio 1: Item 4
for L = [5 15 30];
    kmax = L;
    T = 6;                % Per odo observado de x(t)
    f = (1/T);            % Frequ ncia observada de x(t)
    t1 = [-5:0.01:5];      % Varia  o do tempo
    wo = 2*pi*f;          % Frequ ncia angular
    x10 = zeros(1,1001); % Iniciando o somat rio
    t=-5;
    for j = 1:1001
        for i = 1:kmax       % Somat rio de 1 a kmax
            F = 4*abs(Ck(i))*cos( i*wo*t + angle(Ck(i)) );
            x10(j) = x10(j) + F;
        end
        t = t +0.01;
    end
    figure
    plot(t1,x10,'linewidth',2);
    title(['kmax = ',num2str(L)]); ylabel('x(t)'); xlabel('t');
    grid on
end

% Exercicio 2 - Minimiza  o
u = linspace(-5,5,5000); % Gera um vetor esp ado
fq = [-1*ones(1,500),zeros(1,1000),ones(1,500),zeros(1,1000),-1*ones(1,500),zeros(1,1000), ...
    ones(1,500)];
kmax=[2,5,10,50,100]; % numero de termos

for q=1:1:5 % Loop para plotagem
    figure(q+4)
    T = 6;
    f = (1/T);
    t = -5:0.01:5;
    wo = 2*pi*f;
    x20 = zeros(1, length(t));
    t1 = -5;
    for L=1:1:length(t) % Percorre o vetor t
        for i=1:1:kmax(q) % Varia o termo do somat rio
             x20(L)= x20(L)+4*abs(Ck(i))*cos(i*wo*t1 + angle(Ck(i)));
        end
        t1 = t1 + 0.01;
    end

    % Plotagem
    subplot(311)
    plot(t,x20,'linewidth',2)
    xlabel('t')
```

```
    ylabel('Amplitude')
    hold on;
    plot(u,fq,':','linewidth',2)
    xlabel('t')
    ylabel('x(t)')
    axis([-5 5 -1 1])
    title(['Onda quadrada para k=',num2str(kmax(q))])
    grid on

    %Janelamento Fejr
    wo = 2*pi*f;
    x20 = zeros(1, length(t));
    t1 = -5;
    x30 = zeros(1,length(t));
    for L=1:1:length(t) % Percorre o vetor t
        for i=1:1:kmax(q) % Varia o termo do somatorio
            wk = (kmax(q)-i)/(kmax(q));
            x30(L)= x30(L)+4*abs(Ck(i))*cos(i*wo*t1 + angle(Ck(i)))*wk;
        end
        t1 = t1 + 0.01;
    end
    subplot(312)
    plot(t,x30,'linewidth',2)
    title(' Janelamento Fejr')
    xlabel('t')
    ylabel('Amplitude')
    hold on
    plot(u,fq,':','linewidth',2)
    grid on
    %Janelamento Hamming
    wo = 2*pi*f;
    x20 = zeros(1, length(t));
    t1 = -5;
    x40 = zeros(1,length(t));
    for L=1:1:length(t) % Percorre o vetor t
        for i=1:1:kmax(q)
            wk1 = sinc(i/kmax(q));
            x40(L)= x40(L)+4*wk1*abs(Ck(i))*cos(i*wo*t1 + angle(Ck(i))); % Realiza o somat rio
        end
        t1 = t1 + 0.01;
    end
    subplot(313)
    plot(t,x40,'linewidth',2)
    title('Aproxima ao Sigma')
    xlabel('t')
    ylabel('Amplitude')
    hold on
    plot(u,fq,':','linewidth',2)
    grid on
end

% Exercicio 3: Itens 1, 2 e 3
load('trumpet');
sound(trumpet,11025);

n1 = 11025;
n2 = 22050;
n3 = 33075;
t1 = 1:11024;
t2 = 11025:22049;
t3 = 22050:33075;

figure()
subplot(311)
plot(t1,trumpet(1:11024));
title(['Trumpet: 1 ≤ t ≤ ',num2str(n1)]);
ylabel('y(t)');xlabel('t');
grid on;
subplot(312)
plot(t2,trumpet(11025:22049));
title(['Trumpet: ',num2str(n1),' ≤ t ≤ ',num2str(n2)]);
ylabel('y(t)');xlabel('t');
grid on;
subplot(313)
```

```
plot(t3,trumpet(22050:33075));
title(['Trumpet: ',num2str(n2),' ≤ t ≤ ',num2str(n3)]);
ylabel('y(t)');xlabel('t');
grid on;

% Exercicio 3: Itens 4
Fs = 11025; % Frequencia de amostragem
Y = fft(trumpet,512); % Realiza a transformada r p i d a de fourier da f u n o
Ymag = abs(Y(1:257)); % Devolve o modulo da f u n o
Yfas = angle(Y(1:257)); % Devolve o angulo de fase
f = Fs*(0:256)/512; % Devolve a frequencia do ponto
figure()
subplot(211)
plot(f, Ymag(1:257));
xlabel('Frequency (Hz)');
ylabel('Magnitude');
subplot(212)
plot(f, Yfas(1:257));
xlabel('Frequency (Hz)');
ylabel('Fase');

% Exercicio 3: item 5,6,7, ...
[m n]= sort(Ymag,'descend'); % Pontos ordenados do maior para o menor
mag = m(1:5); % Escolhe os 5 maiores valores
fas = Yfas(n(1:5)); % Pega os angulos desses valores
frq = f(n(1:5)); % Pega as frequencias desses valores
t = 0:1/Fs:1; % Vetor de tempo
A=fourier(t,frq,mag); % F u n   o para serie de fourier

% Plota o grafico do audio original
figure();
subplot(311)
plot(trumpet);(axis([0 11025 -1.5 1.5]));
title('Audio original')
xlabel('Amostras')
ylabel('Amplitude')

% Plota o audio sintetizado
subplot(312)
plot(A);
(axis([0 11025 -1.5 1.5]));
title('Audio sintetizado')
xlabel('Amostras')
ylabel('Amplitude')

% Plota o grafico considerando a fase
B=fourier2(t,frq,mag,fas); % F u n   o de Fourier considerando o angulo de fase
subplot(313)
plot(B);
(axis([0 11025 -1.5 1.5]));
title('Audio sintetizado considerando a fase')
xlabel('Amostras')
ylabel('Amplitude')

% A seguir,    repetido o script anterior para 10 valores
mag = m(1:10);
fas = Yfas(n(1:10));
frq = f(n(1:10));
t = 0:1/Fs:1;

A=fourier(t,frq,mag);
figure();
subplot(311)
plot(trumpet);
(axis([0 11025 -1.5 1.5]));
title('Audio original')
xlabel('Amostras')
ylabel('Amplitude')

subplot(312)
plot(A);
(axis([0 11025 -1.5 1.5]));
title('Audio sintetizado')
xlabel('Amostras')
```

```
ylabel('Amplitude')

B=fourier2(t,frq,mag,fas);
subplot(313)
plot(B);(axis([0 11025 -1.5 1.5]));
title('Audio sintetizado considerando a fase')
xlabel('Amostras')
ylabel('Amplitude')

% A seguir,    repetido o script anterior para 50 valores
mag = m(1:50);
fas = Yfas(n(1:50));
frq = f(n(1:50));
t = 0:1/Fs:1;

A=fourier(t,frq,mag);
figure();
subplot(311)
plot(trumpet);
(axis([0 11025 -1.5 1.5]));
title('Audio original')
xlabel('Amostras')
ylabel('Amplitude')

subplot(312)
plot(A);
(axis([0 11025 -1.5 1.5]));
title('Audio sintetizado')
xlabel('Amostras')
ylabel('Amplitude')

B=fourier2(t,frq,mag,fas);
subplot(313)
plot(B);(axis([0 11025 -1.5 1.5]));
title('Audio sintetizado considerando a fase')
xlabel('Amostras')
ylabel('Amplitude')

% Fun   o de Fourier 1:
function F=fourier(t,frq,mag)
% Fun   o para sintese de Fourier
x1 = zeros(1, length(t));
for i=1:length(mag)
    x1 = x1 + 2*abs(mag(i))*cos(2*pi*frq(i)*t);
end
F = x1 / (max(abs(x1)));
return

% Funcao de Fourier 2:
function F2 = fourier2(t,frq,mag,fase)

% Funcao para sintese de Fourier combase na fase
x2 = zeros(1, length(t));
for i=1:length(mag)
    x2 = x2 + 2*abs(mag(i))*cos(2*pi*frq(i)*t + fase(i));
end
F2 = x2 / max(abs(x2));

return
```