NÚMEROS DE MÁQUINA

MAT 271 – CÁLCULO NUMÉRICO –PER3/2021

Professor Amarísio Araújo – DMA/UFV

REPRESENTAÇÃO NUMÉRICA

- O nosso sistema convencional de representação de um número é o sistema decimal, ou seja, o sistema de base 10 (formada pelos dígitos de 0 a 9).

- Os computadores modernos usam o sistema binário, isto é, o sistema de base 2 (formada pelos dígitos 0 e 1).

BASE DECIMAL

Todo número pode ser entendido como uma combinação de potências inteiras de 10, usando como coeficientes dígitos da base {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}.

$$3657 \quad = 7 \times 10^0 + 5 \times 10^1 + 6 \times 10^2 + 3 \times 10^3$$

$$3657{,}984 \; = 3 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 7 \times 10^0 + 9 \times 10^{-1} + 8 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-3}$$

BASE BINÁRIA

Todo número pode ser entendido como uma combinação de potências inteiras de 2, usando como coeficientes dígitos da base {0,1}

$101 = 1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2$ $\longrightarrow$ 5 na base decimal

$10001 = 1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^4$ $\longrightarrow$ 17 na base decimal

CONVERSÃO DA BASE DECIMAL PARA A BINÁRIA

Como converter a representação de um número na base 10 para a sua representação na base 2? Vejamos com os exemplos ilustrados a seguir:

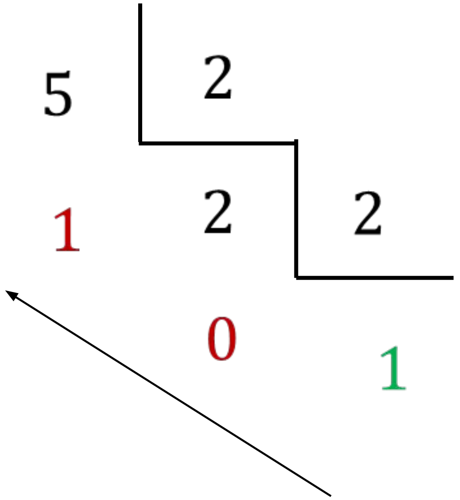
$(5)_{10} = (?)_2$

Divisões sucessivas por 2:

$5/2 = 2\ resto\ 1$

$2/2 = 1\ resto\ 0$

(não é possível mais divisão inteira)



$\boxed{\text{Logo: } (5)_{10} = (101)_2}$

CONVERSÃO DA BASE DECIMAL PARA A BINÁRIA

$(17)_{10} = (?)_2$

Divisões sucessivas por 2:

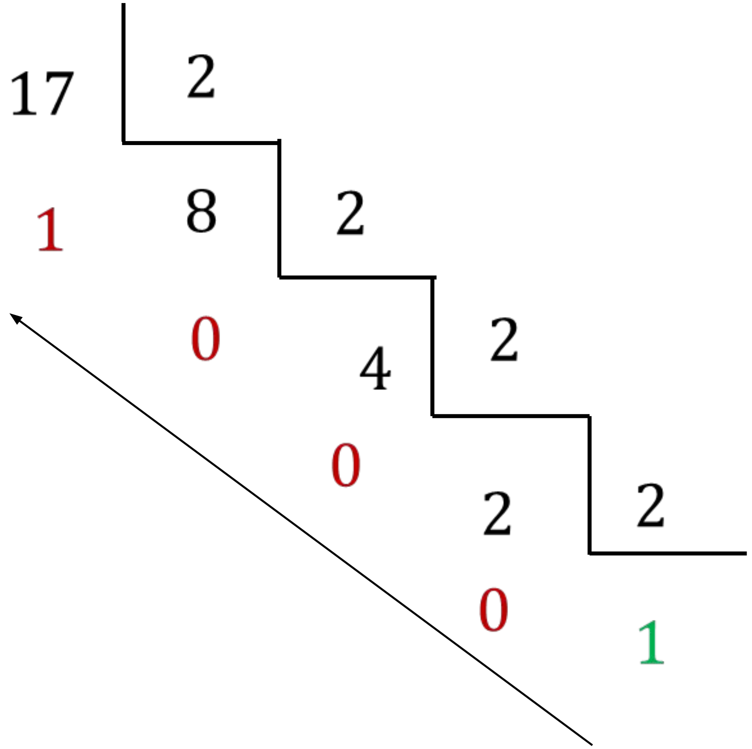
$17/2 = 8\ resto\ 1$

$8/2 = 4\ resto\ 0$

$4/2 = 2\ resto\ 0$

$2/2 = 1\ resto\ 0$

(não é possível mais divisão inteira)



$\boxed{\text{Logo: } (17)_{10} = (10001)_2}$

CONVERSÃO DA BASE BINÁRIA PARA A DECIMAL

$(5{,}25)_{10} = (?)_2$

A parte inteira, 5, já sabemos converter. $\boxed{(5)_{10} = (101)_2}$

Como converter a parte decimal 0,25?

Multiplicações sucessivas por 2:

$0{,}25 \times 2 = 0{,}5$

$0{,}5 \times 2 = 1{,}0$

$$\begin{array}{r} 0{,}25 \\ \times\ 2 \\ \hline 0{,}50 \\ \times\ 2 \\ \hline 1{,}00 \end{array}$$

(não tem mais parte decimal, é inteiro)

$\boxed{\text{Logo : } (5{,}25)_{10} = (101{,}01)_2}$

CONVERSÃO DA BASE BINÁRIA PARA A DECIMAL

- $(100)_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = (4)_{10}$
- $(100{,}1)_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} = (4{,}5)_{10}$
- $(101)_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 4 + 0 + 1 = (5)_{10}$

REPRESENTAÇÃO NUMÉRICA EM MÁQUINA

- Computadores usam o Sistema de Ponto Flutuante Normalizado (SPFN) para representar um número:

$$\pm 0, c_1 c_2 c_3 \dots c_n \times b^E$$

Onde:

- c_n são dígitos entre 0 e $b-1$ (constituem a mantissa);
- c_1 é diferente de 0;
- b é um número natural (base);
- E é um número inteiro (expoente).

REPRESENTAÇÃO NUMÉRICA EM MÁQUINA

- Em função da memória finita dos computadores, o SPFN estabelece parâmetros bem definidos em seu projeto, que são os seguintes:

  - O valor da base: b;
  - O número n de caracteres da mantissa;
  - O expoente mínimo E_1 e o expoente máximo E_2
  - $E_1 < 0$ e $E_2 > 0$.

$$\boxed{SPFN(b, n, E_1, E_2)}$$

IEEE: INSTITUTE OF ELECTRICAL ENGINEERING AND ELECTRONICS ENGINEERS

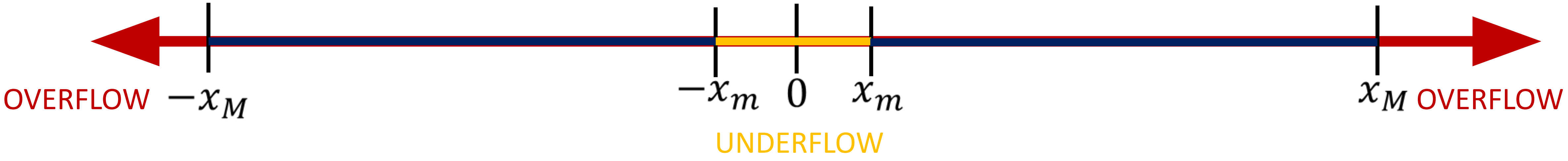
REPRESENTAÇÃO NUMÉRICA EM MÁQUINA

- Com os parâmetros definidos, $SPFN(b, n, E_1, E_2)$, temos:

  - O menor número positivo da máquina: $x_m = (0{,}10 \ldots 0) \times b^{E_1}$;

  - O maior número positivo da máquina: $x_M = (0, [b-1][b-1] \ldots [b-1]) \times b^{E_2}$;

  - Quantidade de números representáveis: $2 \times (b-1) \times b^{n-1} \times (E_2 - E_1 + 1) + 1$



EXEMPLO SIMPLES

Seja uma máquina com: $SPFN(2,3,-1,2)$, ou seja: $b = 2$, $n = 3$, $E_1 = -1$ e $E_2 = 2$.

O menor número positivo da máquina: $x_m = (0{,}100) \times 2^{-1}$;

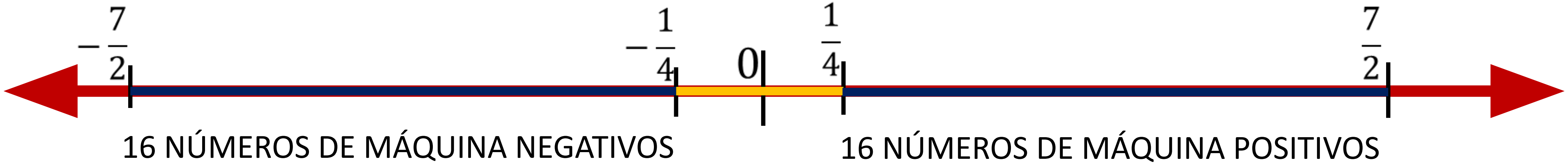
O maior número positivo da máquina: $x_M = (0{,}111) \times 2^{2}$;

Quantidade de números de máquina: $2 \times (2-1) \times 2^{3-1} \times (2-(-1)+1) + 1 = 33$

Convertendo para a base decimal, temos os correspondentes na reta dos reais:

$$x_m = (0{,}100) \times 2^{-1} = ((1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3}) \times 2^{-1})_{10} = \left(\frac{1}{4}\right)_{10}$$

$$x_M = (0{,}111) \times 2^{2} = ((1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}) \times 2^{2})_{10} = \left(\frac{7}{2}\right)_{10}$$



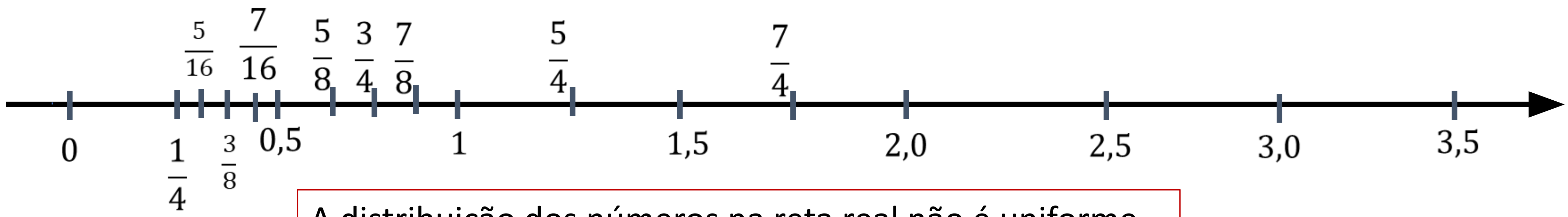
REPRESENTAÇÃO NUMÉRICA EM MÁQUINA

Vejamos quais são os números de máquina positivos ($b = 2, n = 3, E_1 = -1$ e $E_2 = 2$):

E	b^E
-1	1/2
0	1
1	2
2	4

100	101	110	111
1/4	**5/16**	**3/8**	**7/16**
1/2	5/8	3/4	7/8
1	5/4	3/2	7/4
2	5/2	3	7/2

NÚMEROS NA RETA



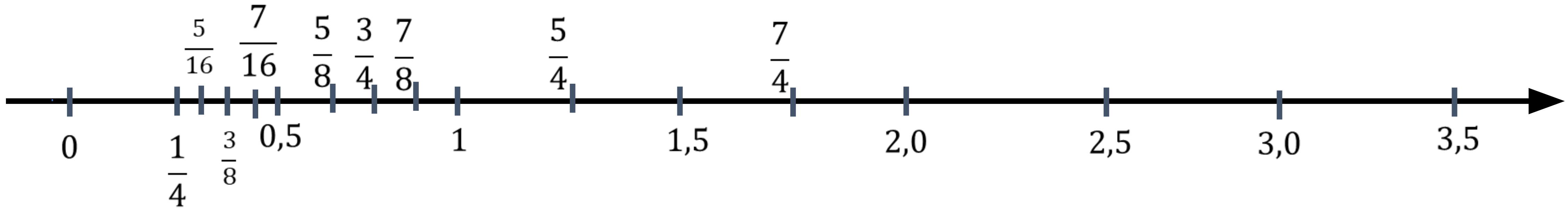
A distribuição dos números na reta real não é uniforme.

ERRO DE APROXIMAÇÃO EM MÁQUINA

Se $x := \frac{7}{8}$ e $y := \frac{7}{4}$, então $x, y \in SPFN(2,3,-1,2)$.

Mas $x + y := \frac{21}{8} = 2,625 \notin SPFN(2,3,-1,2)$.

Como $\frac{21}{8}$ está no intervalo $[\frac{1}{4}, \frac{7}{2}]$, ele será substituído pelo número de máquina mais próximo, que corresponde ao $\frac{5}{2} = 2.5$.



REPRESENTAÇÃO DO NÚMERO EM MÁQUINA (CONSIDERANDO BASE BINÁRIA)

UMA ILUSTRAÇÃO

0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

SINAL | MANTISSA | SINAL | EXPOENTE

SINAL:

0, SE O NÚMERO É POSITIVO

1, SE O NÚMERO É NEGATIVO

14

UM CASO INTERESSANTE:DÍZIMA PERIÓDICA BINÁRIA

Vamos converter o número 0,1 da base decimal para a base binária:

$$\begin{array}{r} 0{,}1 \\ \times\ 2 \\ \hline 0{,}2 \\ \times\ 2 \\ \hline 0{,}4 \\ \times\ 2 \\ \hline 0{,}8 \\ \times\ 2 \\ \hline 1{,}6 \end{array}$$

(A)

$$\begin{array}{r} 0{,}6 \\ \times\ 2 \\ \hline 1{,}2 \end{array}$$

(B)

$$\begin{array}{r} 0{,}2 \\ \times\ 2 \\ \hline 0{,}4 \\ \times\ 2 \\ \hline 0{,}8 \\ \times\ 2 \\ \hline 1{,}6 \end{array}$$

(C)

O processo se repete infinitamente

$$\boxed{(0{,}1)_{10} = (0{,}0001100110011\ldots)_2}$$