AINDA SOBRE O MÉTODO DA BISSEÇÃO

MAT 271 – Cálculo Numérico – PER3/2021/UFV

Professor Amarísio Araújo

NÚMERO MÍNIMO DE ITERAÇÕES NO MÉTODO DA BISSEÇÃO, USANDO O ERRO ABSOLUTO

Na nossa última aula síncrona, vimos que o menor inteiro positivo n tal que

$$n > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log \varepsilon}{\log 2} - 1$$

nos garante que a aproximação x_{n+1}, no método da bisseção, corresponde a uma aproximação com erro absoluto menor que ε.

Vamos explorar mais um exemplo:

NÚMERO MÍNIMO DE ITERAÇÕES NO MÉTODO DA BISSEÇÃO, USANDO O ERRO ABSOLUTO

A equação $1 - xlnx = 0$ possui uma única solução $\bar{x}$ no intervalo $[1, 2]$. Vamos determinar o menor inteiro positivo n que garanta que, ao usar o método da bisseção, x_{n+1}, seja uma aproximação de $\bar{x}$, com erro absoluto menor que $\varepsilon = 0.01$.

Esta equação já foi discutida em uma aula assíncrona anterior, quando determinamos a aproximação de $\bar{x}$ com erro relativo menor que $\varepsilon = 0.01$, obtendo a aproximação $x_6 = 1.76563$, ou seja, correspondente a $n = 5$.

AULA ASSÍNCRONA 2 DA SEMANA DE 26 A 30 DE JULHO DE 2021 (VEJAM!!!)

Vejamos, então, o que ocorre no caso do erro absoluto!

NÚMERO MÍNIMO DE ITERAÇÕES NO MÉTODO DA BISSEÇÃO, USANDO O ERRO ABSOLUTO

Usando a relação $n > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log \varepsilon}{\log 2} - 1$ com $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ e $\varepsilon = 0.01 = 10^{-2}$:

$$n > \frac{\log(2-(1)) - \log 10^{-2}}{\log 2} - 1 \Rightarrow n > \frac{2}{\log 2} - 1 \Rightarrow n > 5.6438 \Rightarrow n \geq 6$$

Portanto $n = 6$ é o menor valor de n que garante uma aproximação da solução $\bar{x}$ da equação $1 - xlnx = 0$, usando o método da bisseção, com erro absoluto menor que $\varepsilon = 0.01$.

Ou seja, x_7 é uma aproximação de $\bar{x}$, com erro absoluto menor que $\varepsilon = 0.01$.

MAIS ITERAÇÕES COM O CRITÉRIO USANDO O ERRO ABSOLUTO DO QUE USANDO O ERRO RELATIVO!!!

NÚMERO MÍNIMO DE ITERAÇÕES NO MÉTODO DA BISSEÇÃO, USANDO O ERRO ABSOLUTO

Como também visto na referida aula assíncrona (tanto na aplicação do método da bisseção quanto no esboço do gráfico de $f(x) = 1 - xlnx$), a solução única $\bar{x}$ da equação $1 - xlnx = 0$ está no intervalo $[1.5\,, 2]$.

Vamos repetir a discussão anterior, ainda com erro absoluto menor que $\varepsilon = 0.01$, mas, agora, com o intervalo $[1.5\,, 2]$.

Usando a relação $n > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log \varepsilon}{\log 2} - 1$ com $a_0 = 1.5$, $b_0 = 2$ e $\varepsilon = 0.01 = 10^{-2}$:

$$n > \frac{\log(2-(1.5)) - \log 10^{-2}}{\log 2} - 1 \Rightarrow n > \frac{\log 0.5 + 2}{\log 2} - 1 \Rightarrow n > 4.6439 \Rightarrow n \geq 5$$

Ou seja, x_6 é uma aproximação de $\bar{x}$, com erro absoluto menor que $\varepsilon = 0.01$.

Portanto, com o intervalo $[1.5\,, 2]$ ("menor" que o intervalo $[1, 2]$), conseguimos uma mesma precisão, com erro absoluto, para a aproximação da solução $\bar{x}$ com uma iteração a menos.

ALTERNATIVAS PARA O CRITÉRIO DE PARADA NO MÉTODO DA BISSEÇÃO

Como vimos, o critério de parada no método da bisseção é baseado, geralmente, no erro (absoluto ou relativo) entre dois termos consecutivos, x_n e x_{n+1} da sequência de aproximações:

Usando o erro absoluto:

Se $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, então x_{n+1} é a aproximação da solução exata $\bar{x}$ com erro absoluto menor que ε.

Usando o erro relativo:

Se $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} < \varepsilon$, então x_{n+1} é a aproximação da solução exata $\bar{x}$ com erro relativo menor que ε.

ESTES SÃO OS MAIS USADOS

ALTERNATIVAS PARA O CRITÉRIO DE PARADA NO MÉTODO DA BISSEÇÃO

ALTERNATIVAMENTE, PODEMOS CONSIDERAR ESTES OUTROS DOIS CRITÉRIOS:

Usando o valor absoluto de $f(x_{n+1})$:
Se $|f(x_{n+1})| < \varepsilon$, então x_{n+1} é a aproximação da solução exata $\bar{x}$ precisão ε.

Como mostrado anteriormente, $|x_{n+1} - \bar{x}| < \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$. Logo um outro critério pode ser:

Se $\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} < \varepsilon$, então x_{n+1} é a aproximação da solução exata $\bar{x}$ com erro absoluto menor que ε.