**CAP.5**

**EXERCÍCIOS: Variáveis Aleatórias Discretas**

* **Distribuição uniforme discreta**

É o caso mais simples, onde cada valor possível ocorre com a mesma probabilidade.

Seja, , uma variável aleatória, a probabilidade de qualquer é dada por:

E o valor médio, ou esperança matemática da variável X é:

E a variância é dada por:

**Exercício: Considere que você tenha em mãos um dado perfeito. Sua irmã mais nova te pede para ir à festa com você, mas você prefere ir sem ela, então para não chateá-la de cara, faz uma brincadeirinha. Se ela conseguir tirar o nº 1 em um lançamento de dado honesto, você a levará a festa, caso contrário, você não a levará.**

Sabemos que qualquer lado do dado tem a mesma chance de ocorrer, assim, considerando X o nº da face superior do dado, temos que :

=

**Qual a probabilidade dela conseguir ir à festa com você?**

**Qual a probabilidade dela não conseguir ir à festa com você?**

* **Distribuição Bernoulli**

É o caso em que uma v.a. assume apenas dois valores:

Seja, , uma variável aleatória, a probabilidade de ocorrer sucesso é dada por:

Logo, a probabilidade de fracasso é o complementar da probabilidade de sucesso. Como sabemos que a soma de probabilidades de uma variável tem que ser 1, então:

Sua distribuição é dada pela seguinte expressão:

E o valor médio, ou esperança matemática da variável X é:

E a variância é dada por:

**Exercício: Uma urna tem 30 bolas brancas e 20 verdes. Retira-se 1 bola dessa urna. Definindo X como o número de bolas verdes, encontre o parâmetro, a E[X], a Var[X].**

* **Distribuição Binomial**

É o caso em que se tem uma sequência de sucessos e fracassos, isto é, quando o ensaio de Bernoulli é repetido n vezes, considerando as repetições independentes (o resultado de um ensaio não tem nenhuma influência no outro).

Considerando qualquer sequência com k sucessos e n-k fracassos. Sua distribuição é dada pela seguinte expressão:

E o valor médio, ou esperança matemática da variável X é:

E a variância é dada por:

**Exercício: sabendo-se que determinar:**

**a)**

Sabemos que = 12, assim

, logo

**b)**

**c)**

**Exercício: Num teste tipo certo/errado, com 50 questões, qual é a probabilidade de que um aluno acerte 80% das questões, supondo que ele as responda ao acaso?**

Cada resposta é um ensaio de Bernoulli com probabilidade de sucesso 0,50. Desse modo, o número de respostas corretas, , tem distribuição binomial com n=50 e p=0,50. Acertar 80% das questões significa: . Portanto:

**Exercício: Numa criação de coelhos 40% são machos. Qual a probab. de que nasçam pelo menos 2 machos num dia em que nasceram 20 coelhos? Calcule a E[M] e a Var[M].**

Sabemos que n = 20, e considerando M = coelho macho e F = coelha fêmea, temos que:

logo ,

=

logo, espera-se que nasçam 8 coelhos machos dentre 20.

**Distribuição Hipergeométrica**

Essa distribuição é adequada quando consideramos extrações casuais feitas sem reposição de uma população dividida segundo dois atributos.

Considerando uma população de N objetos, r dos quais têm atributo A e N-r têm atributo B. Escolhendo um grupo de n elementos, ao acaso, sem reposição, a probabilidade de que esse grupo contenha k elementos com o atributo A é calculada pela seguinte expressão:

E o valor médio, ou esperança matemática da variável X é:

E a variância é dada por:

**Exercício: Uma batelada de peças contém 100 peças de um fornecedor local de tubos e 200 peças de um fornecedor de tubos de um estado vizinho.**

**a) Se quatro peças forem selecionadas, ao acaso e sem reposição, qual será a probabilidade de que elas sejam todas provenientes do fornecedor local?**

Considere X o número de peças na amostra do fornecedor local. Logo, a probabilidade requerida é dada por:

**b) Qual é a probabilidade de duas ou mais peças na amostra serem provenientes do fornecedor local?**

OBS: Lembre-se que tem combinações diferentes para se ter duas ou mais peças do fornecedor local, devido a isso soma-se todas combinações possíveis.

**c) Qual é a probabilidade de no mínimo uma peça na amostra ser proveniente do fornecedor local?**

**d) Qual a média e variância de peças de um fornecedor local?**

Sendo X= nº de peças na amostra do fornecedor local, então:

Como sabemos que

, e

**Exercício:** **Placas de circuito impresso são testados. Um lote contém 140 peças**

**e 20 são selecionadas, sem substituição, para teste.**

**a) Se 20 placas são defeituosas, qual é a probabilidade de que ao menos 1**

**placa defeituosa ocorra na amostra ?**

Considerando X o nº de placas defeituosas, temos que:

**b) Se 5 placas são defeituosas, qual é a probabilidade de que ao menos uma**

**placa defeituosa apareça na amostra?**

* **Distribuição de Poisson**

Essa distribuição é bastante empregada quando se deseja contar o número de eventos de certo tipo que ocorrem num intervalo de tempo, ou superfície ou volume.

Sua distribuição é dada pela seguinte expressão:

Em que, é o nº médio de eventos ocorrendo no intervalo considerado, e

é o número de ocorrências no intervalo

OBS: A aproximação é boa se n for grande e p pequeno.

E o valor médio, ou esperança matemática da variável X é:

E a variância é dada por:

**Exercício: Numa central telefônica, o número de chamadas chega segundo uma distribuição de Poisson, com média de oito chamadas por minuto. Determine qual a probabilidade de que num minuto se tenha:**

Temos pelo enunciado que =8, e consideremos n = nº de chamadas recebidas nessa central por min.

1. **Dez ou mais chamadas**
2. **Entre sete (inclusive) e nove (exclusive) chamadas**

**Exercício: Suponha que a probabilidade de que um item produzido por uma máquina seja defeituoso, é de 0,2. Se dez itens produzidos por essa máquina são selecionados ao acaso, qual a probabilidade de que não mais do que um defeituoso seja encontrado? Use a distribuição de Poisson e a binomial e compare os resultados.**

Sabemos pelo enunciado que e n=10

* **Poisson**

Sabemos pela distribuição Poisson que

* **Binomial**

Observamos que os resultados obtidos, apesar de diferentes, são razoavelmente próximos.

**Exercício: Num livro de 800 páginas há 1200 erros. Qual a probabilidade de que uma página contenha no máximo 2 erros?**

Primeiramente temos, pelo o que foi dado no enunciado, que a média de erros por página é:

= 1,5, então, sabemos que na distribuição Poisson.

Considerando n = nº de erros por página, temos que:

**EXERCÍCIOS: Variáveis Aleatórias Contínuas**

* **Distribuição uniforme contínua**

É o caso mais simples da distribuição contínua, onde cada valor possível ocorre com a mesma probabilidade.

Sua função de densidade é dada por:

E o valor médio, ou esperança matemática da variável X é:

E a variância é dada por:

OBS: sabendo com toda certeza que dado evento ocorre no intervalo [a,b], a probabilidade de que ele ocorra no subintervalo [c,d] é dada por:

**Exercício: Dado que o volume de um chopp num copo enchido por uma máquina post-mix, varia uniformemente entre 270 e 300 ml, pede-se a probabilidade de se ter um copo com menos de 290 ml.**

* **Distribuição Normal**

Seu modelo é o mais utilizado quando se trata de distribuição com variável aleatória contínua. É constantemente utilizada para o desenvolvimento teórico da inferência estatística.

Sua função de densidade é dada por:

E o valor médio, ou esperança matemática da variável X é:

E a variância é dada por:

**Exercício: Sendo , ache a**

**Exercício: Sendo , ache a**

**Exercício: As alturas de 10000 alunos de um colégio têm distribuição aproximadamente normal, com média 170 cm e desvio padrão 5 cm. Pede-se:**

Logo, *X* ~ *N*( 170 ; 5 ² )

**a) *P**X* 165**

*P**X* 165

Nº esperado = 10000 x 0,9413 = 9413

1. **Qual o intervalo simétrico em torno da média que conterá 75% das alturas dos alunos?**

Logo o intervalo simétrico é:

*Intervalo* = (164,25 ; 175,75)

**Exercício: Seja Y com distribuição binomial de parâmetros n=10 e p=0,4. Determine a aproximação normal para:**

Logo,

*Y* ~ *b*10 ; 0,4*X* ~ *N*( 4 ; 2,4)

1. ***P*3 *Y* 8**

*P*3 *Y* 8*P*4 *Y* 7*P*3,5 *X* 7,5*P*0,32 *Z* 2,26

0,4881 0,1255 0,6136

1. ***P*(*Y* 7)**

*P*(*Y* 7) *P**X* 6,5*P**Z* 1,610,0537

1. ***P*(*Y* 5)**

*P*(*Y* 5) *P**Y* 4*P**X* 4,5*P**Z* 0,320,6255

* **Distribuição Exponencial**

Ao contrário do processo de uma Poisson, sua variável aleatória é contínua e a unidade de medida (nº de ocorrências) é discreta.

Sua função de densidade é dada por:

E o valor médio, ou esperança matemática da variável X é:

E a variância é dada por:

**Exercício: O tempo entre as chamadas para o escritório de uma corporação é distribuído exponencialmente com uma média de 10 min.**

1. **Qual a probabilidade de que haja mais de três chamadas dentro de meia hora?**

Temos que

Agora, o objetivo é obtido através de uma distribuição de Poisson, pois a variável tornou-se discreta, logo:

**Exercício: Se o tempo médio entre um pedido e o atendimento em um restaurante é uma variável aleatória com distribuição exponencial com média 10 min, determine:**

1. **Probabilidade da espera ser inferior a 10 min.**

Logo,

1. **Probabilidade da espera ser superior a 10 min.**