Warszawa, 25.01.2017 r.

Politechnika Warszawska
Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych

Metody Numeryczne (MNUB) - Projekt

Zadanie #3 Rozwiązywanie równań różniczkowych

Prowadzący projekt: dr inż. Andrzej Podgórski
Prowadzący przedmiot: prof. dr hab. Roman Z. Morawski

Wykonawca: Weronika Borucka #5

Spis treści

1 Wstęp

1.1 Krótki opis środowiska pracy MATLAB

Projekt został wykonany w programie MATLAB – oprogramowaniu przystosowanym do rozwiązywania problemów obliczeniowych, zarówno inżynierskich, jak i naukowych, zintegrowanym z C/C++, Java, .NET i Python. Składnia języka w MATLABie jest zoptymalizowana do wykonywania działań na macierzach, jako zmiennej domyślnej. [M]

2 Rozwiązanie zadań

2.1 Zadanie 1.

2.1.1 Treść zadania

Zapisać równanie różniczkowe:

$$y'(t) = (r_{max} - 1)y^2(t) + (r_{min} - 1)y(t) \tag{1}$$

w postaci akceptowanej przez funkcję Matlaba ***ode45***; jako r_{max} podstawić największy pierwiastek wielomianu $w(x)$ z Zadania #2, a jako r_{min} - najmniejszy pierwiastek tego wielomianu.

2.1.2 Sformułowanie problemu

Równanie różniczkowe, to takie równanie, w którym niewiadomą jest funkcja. Przyjmuje ono postać:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0; \tag{2}$$

Dane są zależności pochodnych różnych rzędów dla szukanej funkcji, której postać nie jest znana. W matematyce stosowana jest do ich rozwiązania m.in. metoda uzmienniania stałych. Zagadnienie rozwiązywania równań różniczkowych przydaje się w praktyce inżynierskiej – można dzięki niemu policzyć m.in. parametry obwodów elektrycznych, zawierających kondensatory (np. obwody RC).

W bibliotekach Matlaba dostępna jest funkcja umożliwiająca policzenie równania różniczkowego – jest to funkcja *ode*--, gdzie w miejscu dwóch myślników użyte są liczby, do najczęściej używanych należą funkcje *ode23* oraz *ode45*. W powyższym zadaniu zostanie użyty wariant *ode45*, który liczy wolniej, ale za to dokładniej. [A]

Prawidłowe użycie funkcji *ode45* wygląda następująco:

```
[t,y] = ode45(odefun,tspan,y0)
```

Gdzie: `tspan = [t0 tf]` jest przedziałem czasu, dla którego jest liczone równanie różniczkowe $y' = f(t, y)$, zapisane jako funkcja `odefun`, dla warunku początkowego `y0`. Każdy rząd w rozwiązaniu `y`, zgadza się z wartością zwracaną w kolumnie `t`. [O]

2.1.3 Rozwiązanie

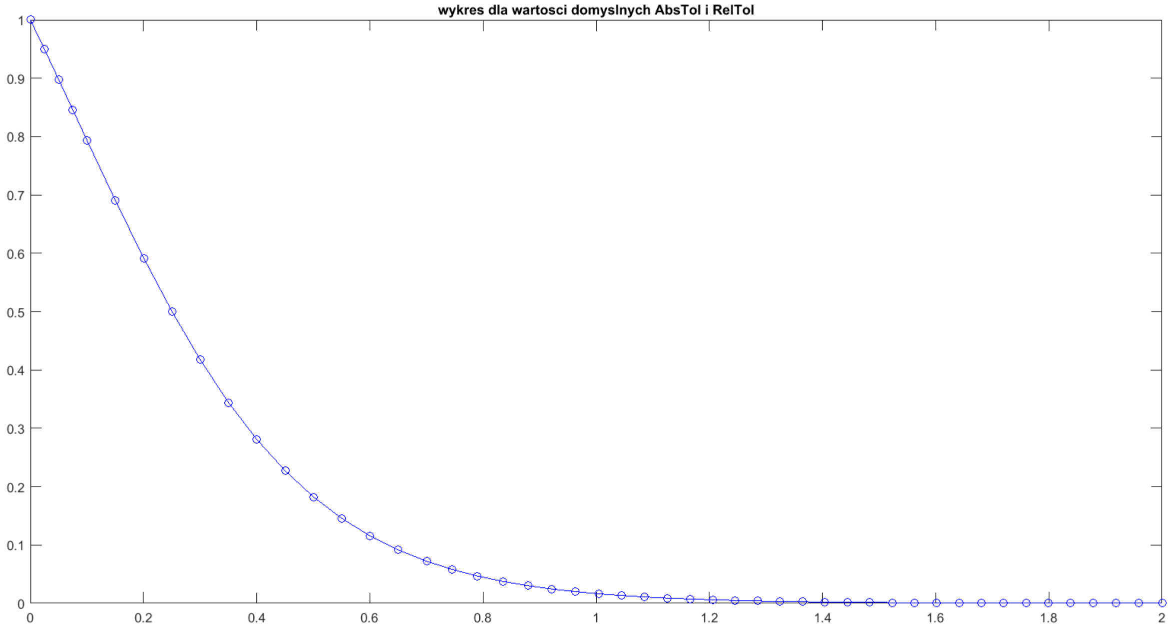
Używając wartości r_{max} oraz r_{min}, jako wartości, odpowiednio, największego i najmniejszego pierwiastka wielomianu $w(x)$ uzyskane zostało następujące równanie różniczkowe:

$y'(t) = 2{,}990852964270087 * y^2(t) - 4{,}994662460607799 * y(t),$

które zostało zaimplementowane, jako funkcja anonimowa w postaci:

```
r_max = 3.990852964270087;
r_min = -3.994662460607799;

dy = @(t,y) r_max*y.*y + r_min*y;
```



Rysunek 1. Wykres funkcji y, obliczonej z równania różniczkowego (1) za pomocą funkcji ode45

2.2 Zadanie 2.

2.2.1 Treść zadania

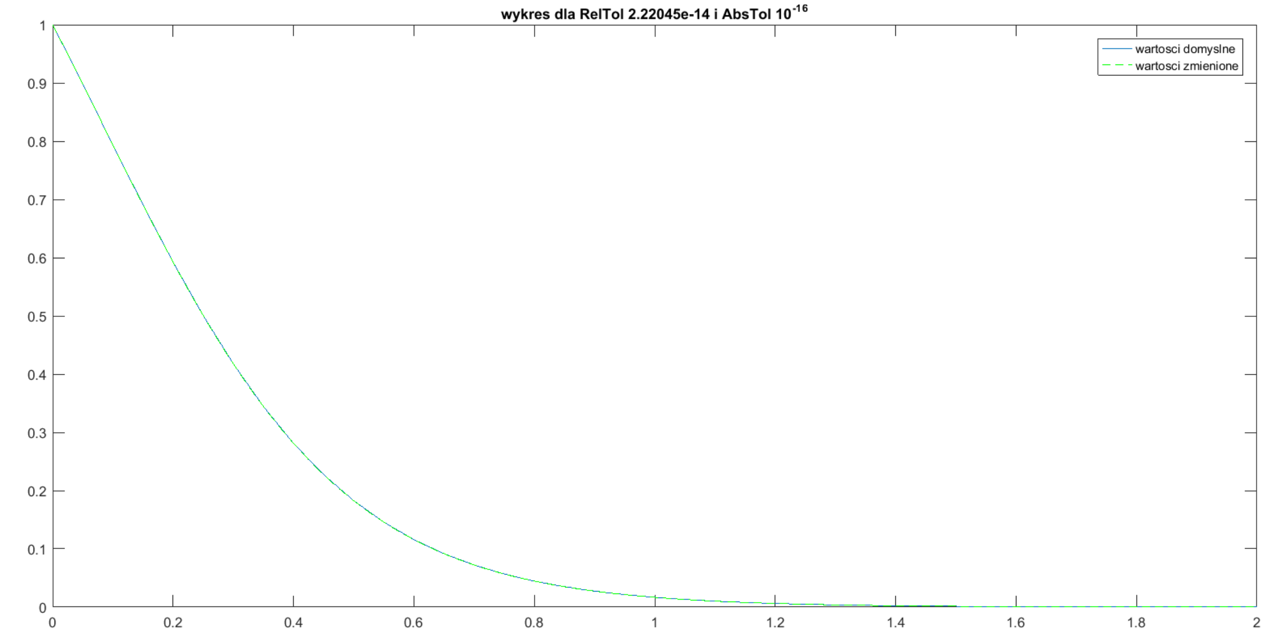
Wyznaczyć rozwiązanie równania (1) dla t∈ [0,2] przy użyciu funkcji ***ode45*** dla wartości początkowej $y(0) = 1$. Dobrać parametry ***RelTol*** i ***AbsTol*** funkcji ***ode45*** w taki sposób, aby uzyskać możliwie dokładne rozwiązanie. Wyznaczony wektor $\dot{y}(t)$ traktować jako rozwiązanie odniesienia.

2.2.2 Sformułowanie problemu

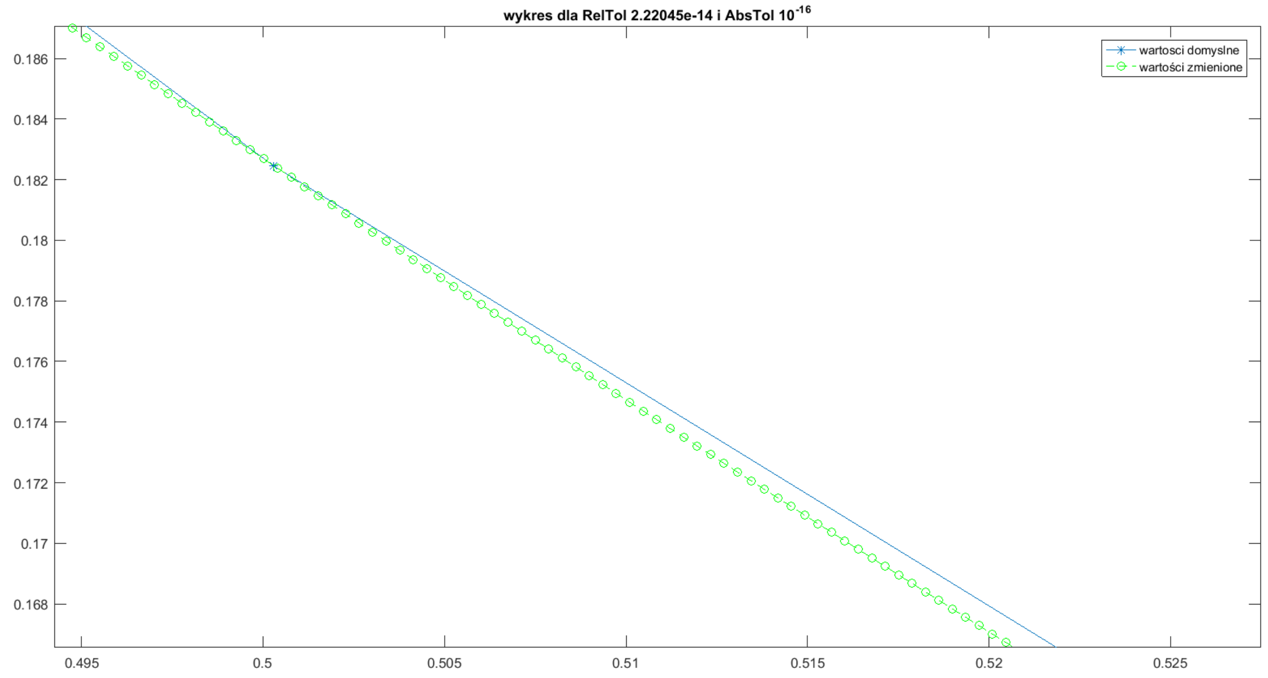
Dodatkowe opcje funkcji *ode45* można uzyskać poprzez opisanie ich jako strukturę *options*: `options = odeset(Name,Value,...)`, w zadaniu użyte zostaną parametry ***RelTol*** oraz ***AbsTol***, które opisują, odpowiednio, błąd względny oraz błąd bezwzględny, tolerowany przy użyciu funkcji ***ode45***.

2.2.3 Rozwiązanie

W zadaniu najpierw policzono wartość odniesienia dla domyślnych wartości parametrów ***RelTol*** oraz ***AbsTol*** tj. ***RelTol*** = 10^{-3} oraz ***AbsTol*** = 10^{-6}. Następnie, zmienione zostały te parametry, do wartości ***RelTol*** = 10^{-16} oraz ***AbsTol*** = 10^{-16}, po czym okazało się, że Matlab zmniejszył wartość ***RelTol*** do wartości $2.22045e^{-14}$, dlatego też, jako wartość odniesienia ustawiona została wartość ***RelTol*** = 2.22045e-14 oraz ***AbsTol*** = 10^{-16}.



Rysunek 2. Wykres funkcji y dla wartości domyślnych oraz zmienionych parametrów RelTol i AbsTol



Rysunek 3. Wykres funkcji y dla wartości domyślnych oraz zmienionych parametrów RelTol i AbsTol w przybliżeniu

2.2.4 Wnioski

Przy zmniejszaniu tolerowanego błędu, po osiągnięciu pewnej wartości, nie ma sensu zmniejszać parametrów ***RelTol*** i ***AbsTol*** dalej – nie powoduje to znacznego zwiększenia dokładności, różnicę natomiast widać przy wartości domyślnej tych parametrów, które zostały ustawione odgórnie w Matlabie, w porównaniu do nowo ustalonych wartości ***RelTol*** i ***AbsTol***. Jak widać, wybrane wartości opcji dla funkcji ***ode45*** są słuszne, ponieważ dalsze ich zmniejszanie nie prowadzi do zwiększenia dokładności.

2.3 Zadanie 3.

2.3.1 Treść zadania

Wyznaczyć rozwiązanie równania (1) przy użyciu metody Rungego-Kutty RK5 w wersji 7S, zdefiniowanej wzorem:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \cdot \sum_{r=1}^{6} w_r\ \mathbf{k}_r$$

gdzie:

$$w_1 = \frac{19}{200}, w_2 = 0, w_3 = \frac{3}{5}, w_4 = -\frac{243}{400},\ \ w_5 = \frac{33}{40}, w_6 = \frac{7}{80}$$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(t_n + \frac{2h}{9}, \mathbf{y}_n + \frac{2h}{9}\mathbf{k}_1\right) \quad \mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(t_n + \frac{h}{3}, \mathbf{y}_n + \frac{3}{12}(\mathbf{k}_1 + 3\mathbf{k}_2)\right)$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}\left(t_n + \frac{5h}{9}, \mathbf{y}_n + h\left(\frac{55}{324}\mathbf{k}_1 - \frac{25}{108}\mathbf{k}_2 + \frac{50}{81}\mathbf{k}_3\right)\right)$$

$$\mathbf{k}_5 = \mathbf{f}\left(t_n + \frac{2h}{3}, \mathbf{y}_n + h\left(\frac{83}{330}\mathbf{k}_1 - \frac{33}{22}\mathbf{k}_2 + \frac{61}{66}\mathbf{k}_3 + \frac{9}{110}\mathbf{k}_4\right)\right)$$

$$\mathbf{k}_6 = \mathbf{f}\left(t_n + h, \mathbf{y}_n + h\left(-\frac{19}{28}\mathbf{k}_1 + \frac{9}{4}\mathbf{k}_2 + \frac{1}{7}\mathbf{k}_3 - \frac{27}{7}\mathbf{k}_4 + \frac{22}{7}\mathbf{k}_5\right)\right)$$

oraz metody Geara zdefiniowanej wzorem:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \frac{2}{3}h \cdot \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}) + \frac{4}{3}\mathbf{y}_n - \frac{1}{3}\mathbf{y}_{n-1}$$

dla stałego kroku całkowania $h = 0.01$. Sprawdzić poprawność uzyskanego rozwiązania.

2.3.2 Sformułowanie problemu

W celu ułatwienia obliczeń komputerowych, do rozwiązywania równań różniczkowych wymyślone zostały metody iteracyjne, przybliżające ich rozwiązanie. Istnieje wiele takich metod, są to m.in. metoda Eulera, Adamsa, metoda Rungego-Kutty i wiele innych, różniących się sposobem liczenia kolejnych iteracji. Metody te można podzielić na metody zamknięte i otwarte – otwarte (przykład - wzór 3), to takie, w których kolejna iteracja zależy tylko od poprzedniej lub kilku poprzednich iteracji, natomiast wartość iteracji w metodzie zamkniętej (przykład - wzór 4) zależy też od pochodnej aktualnie liczonej iteracji, co komplikuje obliczenia.

$$y_n = y_{n-1} + h * f(t_{n-1}, y_{n-1}) \tag{3}$$

$$y_n = y_{n-1} + h * f(t_n, y_n) \tag{4}$$

W celu rozwiązania tego zadania użyta zostanie metoda Rungego-Kutty 7S, która jest metodą otwartą i wyraża się następującym wzorem

$$y_n = y_{n-1} + h * \sum_{q=1}^{Q} w_q k_q \tag{5}$$

gdzie $k_1 = f(t_{n-1}, y_{n-1})$ oraz $k_q = f(t_{n-1} + c_q * h,\ y_{n-1} + h * \sum_{j=1}^{q-1} a_{qj} k_j)$ dla q = 2, 3, …, Q, w_q oraz a_{qj} to współczynniki stablicowane (stałe), natomiast $c_q = \sum_{j=1}^{q-1} a_{qj}$ dla q = 2, 3, …, Q. [W]

Drugą z zastosowanych metod będzie metoda Geara zamknięta (wzór 5), w przypadku tego zadania metoda jest rzędu drugiego. W metodzie Geara współczynniki dla metody *K*-krokowej są zdefiniowane w tabelach – są to stałe (Tablica 1).

$$y_n = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k * y_{n-k} + h * \beta_0 * f(t_n, y_n),\ r_n \cong c_{p+1} y_n^{(p+1)} h^{p+1} \tag{6}$$

Tabela 1. Współczynniki dla zamkniętej metody Geara.

K	p	c_{p+1}	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	β_0
1	1	$\frac{1}{2}$	1						1
2	2	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$					$\frac{2}{3}$
3	3	$\frac{3}{22}$	$\frac{18}{11}$	$-\frac{9}{11}$	$\frac{2}{11}$				$\frac{6}{11}$
4	4	$\frac{12}{125}$	$\frac{48}{25}$	$-\frac{36}{25}$	$\frac{16}{25}$	$-\frac{3}{25}$			$\frac{12}{25}$
5	5	$\frac{10}{137}$	$\frac{300}{137}$	0	$\frac{200}{137}$	$-\frac{75}{137}$	$\frac{12}{137}$		$\frac{60}{137}$
6	6	$\frac{20}{343}$	$\frac{360}{147}$	0	$\frac{400}{147}$	0	$\frac{72}{147}$	$-\frac{10}{147}$	$\frac{60}{147}$

Otwarta metoda Geara:

$$y_n = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k * y_{n-k} + h * \beta_1 * f(t_{n-1}, y_{n-1}),\ r_n \cong c_{p+1} y_n^{(p+1)} h^{p+1} \tag{7}$$

Tabela 2. Współczynniki dla otwartej metody Geara.

K	p	c_{p+1}	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	β_1
1	1	$-\frac{1}{2}$	1						1
2	2	$-\frac{1}{3}$	0	1					2
3	3	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{2}$	3	$-\frac{1}{2}$				3
4	4	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{10}{3}$	6	-2	$\frac{1}{3}$			4
5	5	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{65}{12}$	10	-5	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{4}$		5
6	6	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{77}{10}$	15	-10	5	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{5}$	6

2.3.3 Rozwiązanie

Przedział czasu ustawiony jest jako wartości od 0 do 2, liczone co krok *h*, w tym przypadku równy 0,01.

2.3.3.1 Metoda Rungego-Kutty

Do rozwiązania równania różniczkowego metodą otwartą, potrzebne są wartości poprzednich iteracji. Obliczenia zaczynają się od wyznaczenia punktu startowego (początkowego), który, w przypadku równania (1), dla danego w zadaniu przedziału czasowego, jest równy 1. Następnie, zachodzi potrzeba wyznaczenia kolejnych współczynników k_1, k_2, …, k_6, zależnych od poprzednich wartości k, do których obliczenia użyte jest równanie różniczkowe (1) zapisane, jako zmienna globalna *dy*. Wektor wyników jest rozmiaru Powyższe działania zaimplementowano, jako funkcja Rungego.m następująco:

```
function [tr,yr] = Runge(h)
global dy;  %funkcja y' potrzebna do wyliczenia współczynników k1, k2, ..., k6
w = [19/200 0 3/5 -243/400 33/40 7/80]; %wspolczynniki potrzebne do formuly
tr = 0:h:2;

yr = 1;     %punkt startowy <- wynika on z wykresu dla dokładnego rozwiązania równania funkcją
ode

%definicja kolejnych współczynników RK6
for i = 1:(numel(tr)-1)

  k1 = dy(tr(i), yr(i));
  k2 = dy(tr(i)+(2*h)/9, yr(i)+((2*h)/9)*k1);
  k3 = dy(tr(i)+h/3, yr(i)+((3*h)/12)*(k1+3*k2));
  k4 = dy(tr(i)+(5*h)/9, yr(i) + h*((55/324)*k1 - (25/108)*k2 + (50/81)*k3));
  k5 = dy(tr(i)+(2*h)/3, yr(i) + h*((83/330)*k1 - (33/22)*k2 + (61/66)*k3 + (9/110)*k4));
  k6 = dy(tr(i)+h, yr(i) + h*((-19/28)*k1 + (9/4)*k2 + (1/7)*k3 - (27/7)*k4 + (22/7)*k5));

  yr(i+1) = yr(i) + h*(w(1)*k1 + w(2)*k2 + w(3)*k3 + w(4)*k4 + w(5)*k5 + w(6)*k6);  %formuła
Rungego-Kutty rzędu 5go
end

end
```

2.3.3.2 Metoda Geara

Metoda zamknięta różni się od otwartej tym, że do obliczenia kolejnej próbki potrzebne są nie tylko wartości poprzednich próbek, ale również wartość pochodnej dla aktualnie liczonej próbki. Takie równanie jest równaniem uwikłanym, żeby je rozwiązać, trzeba je uprzednio rozwikłać, czyli tak przekształcić, by wyrażenia zależne od elementu aktualnie liczonego (o indeksie $n+1$) były po jednej stronie równania. Stąd wynika użyta w zadaniu funkcja `fzero`. W każdym kroku wymagane będzie obliczenie równania nieliniowego. Dodatkowo, metoda Geara użyta w tym zadaniu jest rzędu drugiego – wiąże się to z koniecznością uprzedniego policzenia pierwszego przybliżenia przy użyciu metody zamkniętej Geara pierwszego rzędu (wzór (8)), a nie drugiego, (ponieważ w równaniu dla 2.go rzędu występują dwie wartości poprzednich próbek, które na początku obliczeń są nieznane), dopiero po obliczeniu pierwszego kroku można iteracyjnie (w niżej zamieszczonej pętli) używać metody Geara rzędu 2., wyrażonej wzorem (9).

Metoda rzędu 1.: $y_{n+1} = y_n + h * y'_{n+1}$ (8)

Metoda rzędu 2.: $y_{n+1} = \frac{4}{3}y_n - \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{2}{3} * h * y'_{n+1}$ (9)

Powyższe równania zostały zaimplementowane w funkcji Gear.m w następujący sposób:

```
function [tg,yg] = Gear(h)

global dy;
global r_max;
global r_min;
tg = 0:h:2;
yg = zeros(1,numel(tg));

%pierwszy krok metody Geara
yg(1) = 1;      %punkt startowy
f1 = @(y) yg(1) + h*((r_max-1)*y.^2 + (r_min-1)*y) - y; %funkcja dla Geara rzędu1, po
rozwikłaniu

%drugi krok metody Geara
yg(2) = fzero(f1, yg(1) + h*dy(yg(1),tg(1)));    %drugi punkt - Gear otwarty rzedu 1go

for i = 2: numel(tg)-1
    %równanie dla metody rzędu 3go
```

```
    f = @(y) (4*yg(i) - yg(i-1) + 2*h*((r_max-1)*y.^2 + (r_min-1)*y))/3 - y;  %zamkniety
    yg(i+1) = fzero(f, yg(i-1)+ 2*h*dy(yg(i),tg(i)));   %otwarte rzedu 2go
end
```

Do obliczenia równań nieliniowych użyta została funkcja `fzero`, do której potrzebne jest podanie formuły w oparciu o metodę otwartą Geara, rzędu pierwszego (wzór (10)) i drugiego (wzór (11))

Metoda rzędu 1.: $y_{n+1} = y_n + h * y'_n$ (10)

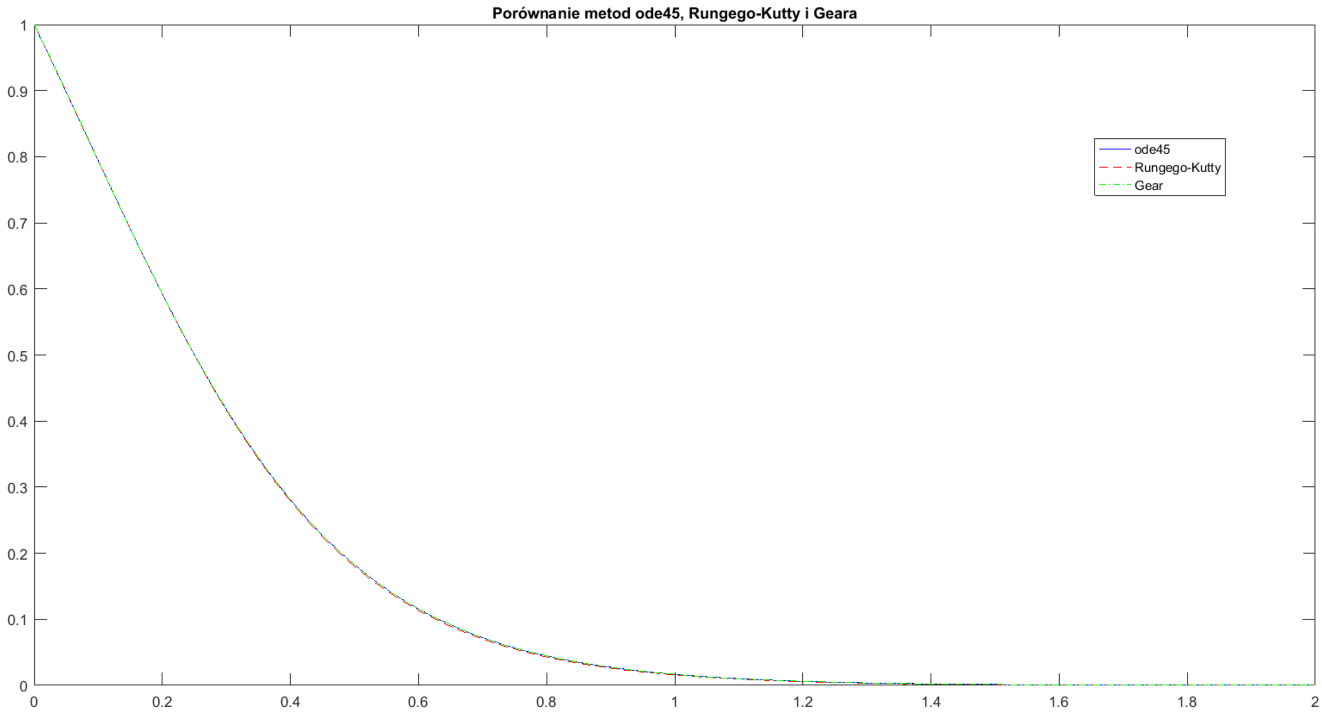
Metoda rzędu 2.: $y_{n+1} = y_{n-1} + 2 * h * y'_n$ (11)

Powyższe funkcje zostały wywołane w następujący sposób:

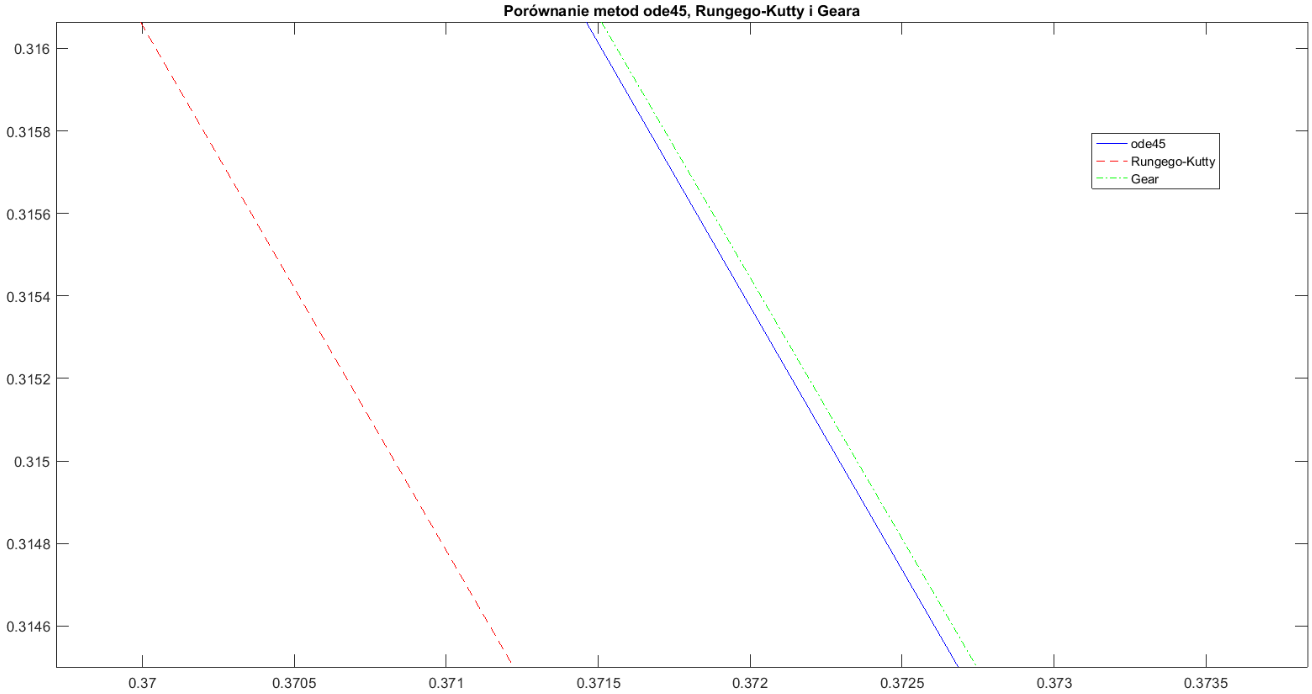
```
h = 0.01;
[Tr,Yr] = Runge(h);
[Tg,Yg] = Gear(h);
```

2.3.4 Wnioski

Jak widać na wykresie (Rysunek 4) wyniki otrzymane dwoma metodami numerycznymi zgadzają się z wynikiem odniesienia, czyli wartością rzeczywistą rozwiązania (uzyskaną metodą ***ode45***) – kształt wykresu jest taki sam. Oznacza to, że metody te zostały poprawnie zaimplementowane. Dopiero przy bliższym rozpatrywaniu danego przedziału czasowego uwidacznia się, że wartości dla tych trzech metod są różne, przy czym wykres metody Geara jest położony bliżej wyniku referencyjnego(Rysunek 5).



Rysunek 4. Porównanie metod ode45, Rungego-Kutty 6.go rzędu oraz Geara.



Rysunek 5. Porównanie metod ode45, Rungego-Kutty 6.go rzędu oraz Geara w przybliżeniu.

2.4 Zadanie 4.

2.4.1 Treść zadania

Zbadać wpływ długości kroku całkowania na wartość błędu maksymalnego oraz błędu średniokwadratowego uzyskiwanego rozwiązania.

2.4.2 Sformułowanie problemu

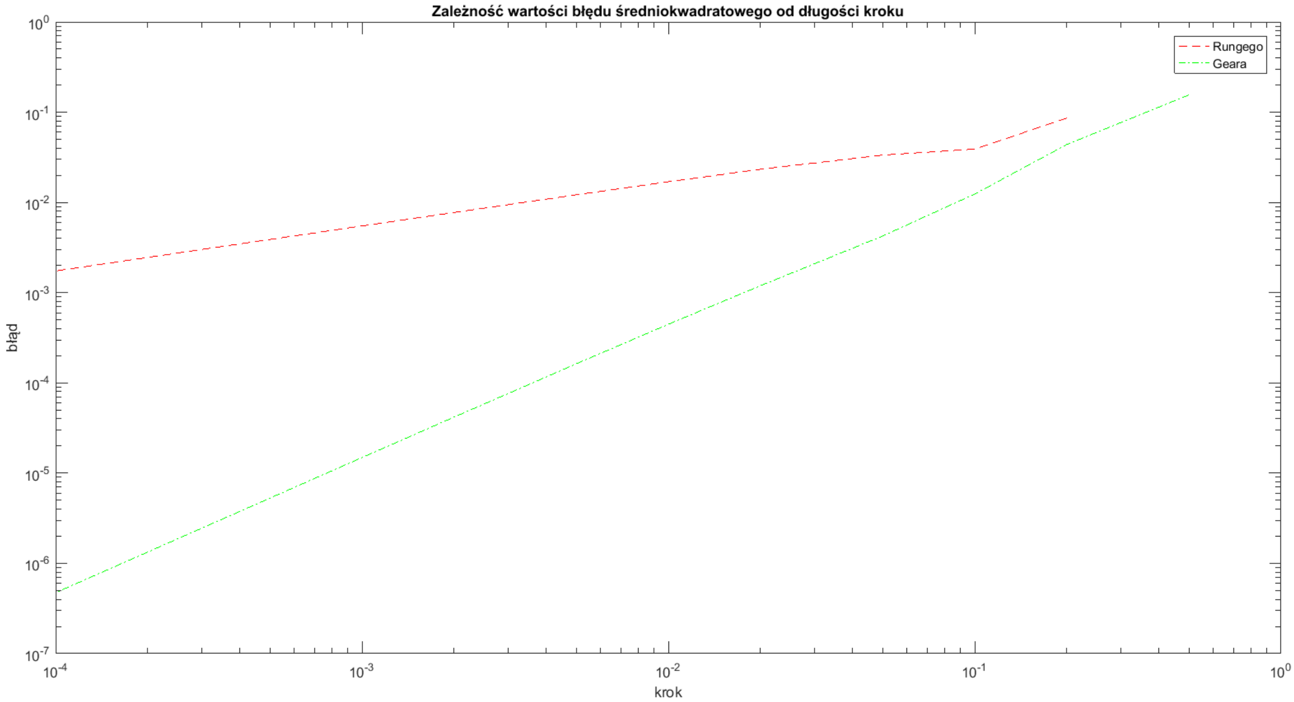
Błąd średniokwadratowy to średnia różnica kwadratów odchyleń, wyrażona niekiedy wzorem:

$$s(X) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}, \qquad (12)$$

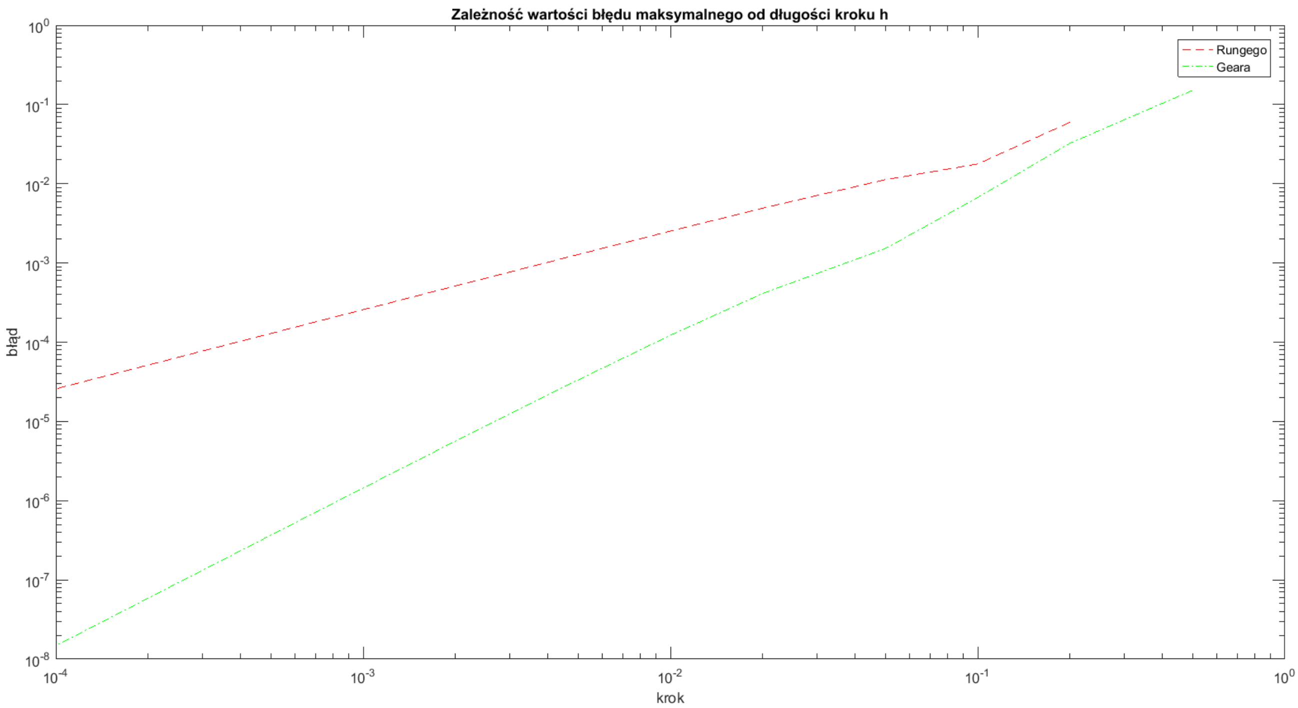
gdzie $\bar{x}$ to średnia arytmetyczna wyników pomiarów, n – liczba pomiarów, a x_i to wartość w danym punkcie.
Błąd maksymalny to wartość maksymalnego odstępstwa wyniku pomiaru od wielkości poprawnej, gwarantowana przez zastosowanie określonej metody pomiarowej.
W zadaniu zbadane zostaną właściwości błędów średniokwadratowego oraz maksymalnego, dla obu użytych metod: Geara oraz Rungego-Kutty.
Dla różnych wartości kroku błąd różni się znacznie wartością.

2.4.3 Rozwiązanie:

Powyższe błędy można policzyć za pomocą funkcji `norm(X,Inf)` – zwracającej największej wartości błędu ABS(X) oraz `norm(X,2)` czyli normę 2 dla wektora X, zdefiniowaną jako SUM(ABS(X).^2)^(1/2). Na początku został utworzony wektor kroków, o wartościach pozwalających zobaczyć błędy w skali logarytmicznej, po czym dla każdego z kroków zostały wyliczone wartości funkcji y. Następnie został narysowany wykres zależności błędów średniokwadratowego (Rysunek 6) oraz maksymalnego (Rysunek 7) w zależności od długości kroku.



Rysunek 6. Wykres zależności błędu średniokwadratowego dla metody Geara oraz Rungego-Kutty 6.go rzędu.



Rysunek 7. Wykres zależności błędu maksymalnego dla metody Geara oraz Rungego-Kutty 6.go rzędu.

2.4.4 Wnioski

Jak widać, metody otwarte powodują zacznie większe błędy niż metody otwarte rozwiązywania równań różniczkowych. Wykres błędu, zarówno w przypadku błędu średniokwadratowego, jak i maksymalnego, rośnie wolniej dla metody Rungego-Kutty, jednak błąd przyjmuje dużo większe wartości (przy najmniejszym kroku jest to różnica nawet 4 rzędów). Wykres błędu dla metody Rungego urywa się przy wartości około 10^{-1}, co jest spowodowane tym, że metoda ta nie jest w stanie dobrze przybliżyć wyniku dla takich długości kroku. Różnica między wartościami błędów zmniejsza się wraz z rosnącym krokiem. Błąd w przypadku metody Geara rośnie szybciej wraz ze wzrostem długości kroku całkowania, jednak wartości błędu są mniejsze niż w przypadku metody Rungego-Kutty. Dlatego, gdy zachodzi potrzeba użycia dużej wartości kroku, ze względu m.in. na szybkość obliczeń (dla krótszego kroku obliczeń jest więcej, dlatego też czas potrzebny do uzyskania wyniku jest dłuższy) lepiej sprawdza się metoda Geara. Dodatkowym jej atutem jest fakt, że błąd przy odpowiednio małym kroku jest znikomy.

3 Literatura

[K] Krupka J., Miękina A., Morawski R. Z., Opalski L. J.: *Wstęp do metod numerycznych dla studentów elektroniki i technik informatycznych*, OWPW, Warszawa 2009

[T] Tatjewski P.: *Metody numeryczne*, OWPW, Warszawa 2013

[W] Morawski Roman Z.: *Metody numeryczne. Materiały do wykładu prowadzone w semestrze zimowym 2016/2017*

Strony internetowe:

[M] https://www.mathworks.com/products/matlab/features.html

[A] http://home.agh.edu.pl/~lukomski/Instrukcja_1.pdf

[O] https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/ode45.html

4 Kod programu

```
%PROJEKT NR.3 Weronika Borucka #5
clear

%% zadanie 1
projekt2_cz1;
global r_max;
global r_min;
global dy;

r_max = max_x0;
r_min = min_x0;
dy = @(t,y) (r_max-1)*y.^2 + (r_min-1)*y;

clear a a_transp_ max_x0 mid_x0 min_x0 n x0 S
%% zadanie 2

[Tp,Yp] = ode45(dy,[0,2],1);
figure
plot(Tp,Yp,'bo-')
title('wykres dla wartosci domyslnych AbsTol i RelTol')
%domyślne wartości RelTol: 10^(-3), AbsTol10^(-6)

%zmiana RelTol i AbsTol
options = odeset('RelTol',2.22045e-14,'AbsTol',10^(-16));
[T,Y] = ode45(dy, [0,2], 1, options);

figure
plot(Tp,Yp,'*-',T,Y,'go--')
legend('wartosci domyslne','wartości zmienione');
title('wykres dla RelTol 2.22045e-14 i AbsTol 10^{-16}')

%wartością odniesienia mają być jak najdokładniejsze wartości:
```

```
Tp = T;
Yp = Y;

%% zadanie 3
h = 0.01;

[Tr,Yr] = Runge(h);
[Tg,Yg] = Gear(h);

figure
plot(Tp,Yp,'b-',Tr,Yr,'r--',Tg,Yg,'g-.')
title('Porównanie metod ode45, Rungego-Kutty i Geara')
legend('ode45','Rungego-Kutty','Gear')

%% zadanie 4
kroki = [0.5,0.2,0.1,0.05,0.02,0.01,0.005,0.002,0.001,0.0005,0.0002,0.0001]; %wartości dobrane
by było widac w skali log
options1 = odeset('RelTol',2.22045e-014,'AbsTol',1e-16);
for i = 1:numel(kroki)
    hi = kroki(i);
    %wywolanie kazdej metody dla kroku obecnie sprawdzanego
    [~,Y] = ode45(dy,(0:hi:2),1,options1);
    [~,yr1] = Runge(hi);
    [~,yg1] = Gear(hi);
%wyliczenie bledow dla metod Rungego-Kutty i Geara
bl_maks_r(i)= norm(Y-yr1',inf);
bl_maks_g(i)= norm(Y-yg1',inf);
bl_sredniokwadr_r(i)= norm(yr1'-Y);
bl_sredniokwadr_g(i)= norm(yg1'-Y);
end

figure
loglog(kroki,bl_maks_r,'r--')
hold on
loglog(kroki,bl_maks_g,'g-.')
xlabel('krok');
ylabel('błąd');
legend('Rungego','Geara')
title('Zależność wartości błędu maksymalnego od długości kroku h');
hold off

figure
loglog(kroki,bl_sredniokwadr_r,'r--')
hold on
loglog(kroki,bl_sredniokwadr_g,'g-.')
xlabel('krok');
ylabel('błąd');
legend('Rungego','Geara')
title('Zależność wartości błędu średniokwadratowego od długości kroku');
hold off
```

Runge.m

```
%metoda Rungego-Kutty rzędu 6go

function [tr,yr] = Runge(h)
global dy;  %funkcja y' potrzebna do wyliczenia współczynników k1, k2, ..., k6
w = [19/200 0 3/5 -243/400 33/40 7/80]; %wspolczynniki potrzebne do formuly
tr = 0:h:2;

yr = 1;     %punkt startowy <- wynika on z wykresu dla dokładnego rozwiązania równania funkcją
ode

%definicja kolejnych współczynników RK6
for i = 1:(numel(tr)-1)

  k1 = dy(tr(i), yr(i));
  k2 = dy(tr(i)+(2*h)/9, yr(i)+((2*h)/9)*k1);
  k3 = dy(tr(i)+h/3, yr(i)+((3*h)/12)*(k1+3*k2));
  k4 = dy(tr(i)+(5*h)/9, yr(i) + h*((55/324)*k1 - (25/108)*k2 + (50/81)*k3));
  k5 = dy(tr(i)+(2*h)/3, yr(i) + h*((83/330)*k1 - (33/22)*k2 + (61/66)*k3 + (9/110)*k4));
  k6 = dy(tr(i)+h, yr(i) + h*((-19/28)*k1 + (9/4)*k2 + (1/7)*k3 - (27/7)*k4 + (22/7)*k5));
```

```
  yr(i+1) = yr(i) + h*(w(1)*k1 + w(2)*k2 + w(3)*k3 + w(4)*k4 + w(5)*k5 + w(6)*k6);  %formuła
Rungego-Kutty rzędu 5go
end

end
```

Gear.m

```
%metoda Geara

function [tg,yg] = Gear(h)

global dy;
global r_max;
global r_min;
tg = 0:h:2;
yg = zeros(1,numel(tg));

%pierwszy krok metody Geara
yg(1) = 1;       %punkt startowy
f1 = @(y) yg(1) + h*((r_max-1)*y.^2 + (r_min-1)*y) - y; %funkcja dla Geara zamkniętego rzędu
1go, po rozwikłaniu

%drugi krok metody Geara
yg(2) = fzero(f1, yg(1) + h*dy(yg(1),tg(1)));    %drugi punkt - Gear otwarty rzedu 1go

for i = 2: numel(tg)-1
    %równanie dla metody rzędu 3go
    f = @(y) (4*yg(i) - yg(i-1) + 2*h*((r_max-1)*y.^2 + (r_min-1)*y))/3 - y;  % Gear zamkniety
rzedu 2go
    yg(i+1) = fzero(f, yg(i-1)+ 2*h*dy(yg(i),tg(i)));   %Gear otwarte rzedu 2go
end
```

projekt2_cz1.m

```
%PROJEKT NR.2 Weronika Borucka #5


%% zadanie 1
%sprawdzamy wiersz w-ty orginalnej macierzy z wierszem w-tym w macierzy
%zmienionej i patrzymy w którym wierszu najwięcej elementów się różni
clear;
format long;

%sudoku
S = [ 9 1 5 3 7 8 6 2 4;...
      6 3 4 2 9 1 8 5 7;...
      2 8 7 5 4 6 3 1 9;...
      5 6 9 8 3 7 2 4 1;...
      8 7 3 4 1 2 5 9 6;...
      4 2 1 6 5 9 7 8 3;...
      7 4 6 1 2 5 9 3 8;...
      1 5 8 9 6 3 4 7 2;...
      3 9 2 7 8 4 1 6 5];

km = zeros(1,9); %macierz liczby zmian dla wierszy macierzy

for w = 1:9
       for k=1:8
            km(1,w) = abs(S(w,k)-S(w,k+1)) + km(1,w);
       end
end

[~,Imax] = max(km);

x = [1:9]-5;
y = [S(Imax,:) - 5];

X = zeros(9); %macierz x-ow przemnozona przez odpowiednie potegi
a = zeros(1,9); %macierz wspolczynnikow wielomianu
n = 8; %stopien wielomianu
```

```
for i = 1:9
    for j = 1:9
        X(i,j) = x(i)^(9-j);
    end
end

a = X\y';

%WYKRES WIELOMIANU
w1 = [-4:0.01:4];

%wielomian interpolujący - linia ciagla
W = polyval(a,w1);

clear w1 W i j wl km kz k w

%% zadanie 2

n = [8:-1:0]; %potegi wielomianu
a_transp = a';

%wielomian w postaci funkcji zaleznej tylko od x
f = @(x)  sum(a_transp .* x .^ n);

%wyznaczenie przyblizonych miejsc występowania miejsc zerowych
x_0r = roots(a);

otocz_x = x_0r + 0.1;
x_0fz = zeros(1,8);

for i = 1:size(x_0r)
    x_0fz(i) = fzero(f,otocz_x(i));
end

%wybieranie najdokładniejszego miejsca zerowego z wyników fzero i roots
for i = 1:size(x_0r)
    if abs( f(x_0r(i)) ) >= abs( f(x_0fz(i)) )
        x0(i) = x_0fz(i);
    else
        x0(i) = x_0r(i);
    end
end

clear x_0r x_0fz i otocz_x y x X Imax

%% zadanie 3

%wybor pierwiastka najmniejszego, bliskiego zeru i największego
min_x0 = min(x0);
mid_x0 = fzero(f,0);
max_x0 = max(x0);
```