Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Хайбулаев Глеб Сергеевич
625 группа
11 вариант

Численное интегрирование многомерных функций методом Монте-Карло

Москва, 2022

1. Введение

В качестве модельной задачи предлагается задача вычисления многомерного интеграла методом Монте-Карло.

Программная реализация должна быть выполнена на языке С или С++ с использованием библиотеки параллельного программирования MPI.

Требуется исследовать масштабируемость параллельной MPI-программы на параллельной вычислительной системе ВМК МГУ: IBM Polus

2. Математическая постановка задачи

Функция $f(x, y, z)$ – непрерывна в ограниченной замкнутой области $G \subset \mathbb{R}^3$. Требуется вычислить определенный интеграл:

$$I = \iiint_G \sqrt{x^2 + y^2} dxdydz$$

Где область G ограниченна поверхностями $x^2 + y^2 = z^2, z = 1$

Вычислим значение интеграла аналитически. Перейдем в полярные координаты:

$$\begin{cases} x = r * \cos(\theta) \\ y = r * \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

Получим интеграл:

$$\iiint_G r^2 dzdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dz \int_0^z r^2 dr = \frac{\pi}{6}$$

3. Численный метод решения задачи

Пусть область G ограниченна параллелепипедом: $\prod : \begin{cases} a_1 \le x \le b_1 \\ a_2 \le x \le b_2, \\ a_3 \le x \le b_3 \end{cases}$

$a_1 = a_2 = -1,\ a_3 = 0, b_1 = b_2 = b_3 = 1$

Рассмотрим функцию: $\mathrm{F}(x, y, z) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2}, & (x, y, z) \in G \\ 0, & (x, y, z) \notin G \end{cases}$

Преобразуем искомый интеграл:

$$I = \iiint_G \sqrt{x^2 + y^2} dxdydz = \iiint_\Pi F(x, y, z) dxdydz$$

Пусть $p_1(x_1, y_1, z_1), p_2(x_2, y_2, z_2), \ldots$ - случайные точки, равномерно распределенные в П. Возьмем n таких случайных точек. В качестве приближенного значения интеграла предлагается использовать выражение:

$$I \approx |\Pi| * \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F(p_i)$$

Где $|\Pi|$ - объем параллелепипеда П. $|\Pi| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$ = 4.

4. Программная реализация

Программа принимает на вход точность результата. Один из процессов «Мастер» начинает генерировать точки для других процессов «Рабочие» и передавать их на обработку. Каждую итерацию мастер генерирует 1024 точек, после чего разбивает их на части и передает рабочим.

Каждый рабочий считает значение функции в точке, суммирует полученные значения и передает обратно мастеру. После получения всех значений мастер суммирует их и вычисляет результат по формуле из пункта 3. Если полученное значение достаточно близко к аналитическому, то программа выводит полученные значения и завершается, в противном случае, генерируются новые 1024 точки, обрабатываются и результаты обработки добавляются к полученным ранее.

Процесс повторяется пока разница между вычисляемым значением и аналитическим решением не будет меньше заданной точности.

После выполнения программа выводит:

- Число итераций
- Полученный результат
- Ошибка (разница между полученным результатом и аналитическим решением)
- Время работы

Время работы программы измеряется следующим образом. Каждый MPI-процесс измеряет своё время выполнения, затем среди полученных значений берётся максимум.

5. Результаты тестирования

Точность ε	Число MPI-процессов	Время работы программы (с)	Ускорение	Ошибка
$3.0 * 10^{-5}$	2	0.0329с	1	2.50*10^-5
	4	0.0129с	2.55	2.57*10^-5
	16	0.0083с	3.96	2.32*10^-5
	32	0.0029с	11.34	1.80*10^-5
$5.0 * 10^{-6}$	2	0.1125с	1	2.10*10^-6
	4	0.0813с	1.38	3.11*10^-6
	16	0.0376с	2.99	1.52*10^-6
$1.5 * 10^{-6}$	2	0.1179с	1	8.30*10^-7
	4	0.0409с	2.88	2.93*10^-7
	16	0.0363с	3.24	1.12*10^-6

6. Вывод

Удалось получить существенное ускорение для метода Монте-Карло. Во время сбора результатов после множества запусков заметил, что результат очень сильно зависит от сгенерированных точек. Если использовать разный seed для генератора, то два разных запуска могут давать кардинально различный по времени и ошибке результат.