Lab2 - Estymacja parametrów

Mateusz Kapusta

9.03.2022

Zadanie 1. *Przypomnienie arytmetyki wektorowej.*

a) Dany jest wektor liczb zmiennoprzecinkowych `x`. Wyjaśnij, co oblicza poniższy kod:

```
v <- mean((x-mean(x))^2)
```

odp: estymator obciążony wariancji

b) Utwórz zmienną całkowitoliczbową `n` z wybraną przez siebie wartością od 100 do 5000. Wylosuj `n` obserwacji z rozkładu normalnego z wybranymi przez siebie parametrami μ i σ, korzystając z funkcji `rnorm`. Następnie, wykorzystując jedynie funkcję `sum`, oblicz nieobciążony estymator wariancji oraz estymatory największej wiarygodności wariancji i odchylenia standardowego. Twój kod powinien zająć co najwyżej 7 linijek.
Porównaj swoje wyniki z funkcjami `var` oraz `sd`. Jaki estymator wariancji jest zaimplementowany domyślnie w R?

```
n=5000
x<-rnorm(n,10,5)
e1<-sum((x-mean(x))^2)/n     # estymator największej wiarygodności
e2<-sum((x-mean(x))^2)/(n-1) # estymator nieobciążony
print(c(e1,sqrt(e1),e2,sqrt(e2)))
```

```
## [1] 25.491427  5.048904 25.496526  5.049408
```

```
print(c(var(x),sd(x)))
```

```
## [1] 25.496526  5.049408
```

odp: R korzysta z estymatora nieobciążonego.
Macierze
W następnym zadaniu skorzystamy z nowego typu danych, czyli **macierzy**.
Mając wektor `x`, możemy przekształcić go w macierz o `n` wierszach i `m` kolumnach komendą `matrix(x, nrow=n, ncol=m)`.
Wypełnianie macierzy domyślnie odbywa się kolumna po kolumnie. Możemy również wypełniać ją wiersz po wierszu podając argument `byrow=TRUE`.
Jeśli wektor ma mniej niż `nm` elementów, to nastąpi jego *recykling* - po wyczerpaniu wartości z `x` wracamy do jego początku i wypełniamy macierz dalej.
Jeśli podamy wyłącznie argument `nrow` (lub `ncol`), liczba kolumn (wierszy) zostanie dobrana automatycznie.
Przetestuj działanie komendy `matrix`, wpisując w konsolę `matrix(1:9, ncol=3)` oraz `matrix(1:6, ncol=3)`.

Mając macierz `M`, możemy przyłożyć dowolną funkcję kolejno do wszystkich wierszy lub kolejno do wszystkich kolumn.
Pozwala to na przykład w prosty sposób otrzymać średnią z każdej kolumny. W tym celu wykorzystujemy funkcję `apply(X, n, f)`, gdzie `X` to macierz wejściowa, `F` to funkcja, a `n` oznacza czy chcemy przyłożyć `F` do wierszy (`n=1`) czy kolumn (`n=2`) macierzy `X`.
Przetestuj działanie komendy `apply`, wpisując w konsolę `M <- matrix(1:9, ncol=3)`, a następnie `apply(M, 2, mean)` oraz `apply(M, 1, sum)`.

Macierze i komenda `apply` będą jednymi z najczęściej wykorzystywanych przez nas narzędzi pakietu R. Warto zatem dobrze zrozumieć ich działanie i wiedzieć, w jakich sytuacjach ich używać.

Zadanie 2. *Trzy estymatory wariancji*

Korzystając z funkcji `rnorm`, wylosuj 5000 obserwacji z rozkładu normalnego o średniej 0 i wybranym przez siebie odchyleniu standardowym σ.
Przekształć otrzymany wektor w macierz o wymiarach 10 x 500. W każdej kolumnie wyestymuj wariancję korzystając z funkcji `apply` oraz `var`. Funkcja `var` zwraca nieobciążony estymator wariancji:

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

Dodatkowo, w każdej kolumnie wyestymuj wariancję korzystając z estymatorów

$$\hat{S}_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

oraz

$$\hat{S}_2^2 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

Wskazówka. Mając wartości estymatora $\hat{S}^2$ w wektorze `S`, estymator $\hat{S}_1^2$ możesz łatwo otrzymać jako `S1 <- S*9/10`.

Wyestymuj i porównaj obciążenia i odchylenia standardowe wszystkich trzech estymatorów wariancji. Następnie wyestymuj i porównaj porównaj błędy średniokwadratowe estymatorów:

$$RMSE = \sqrt{\mathbb{E}(\hat{\theta} - \theta)^2},$$

$$R\hat{M}SE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{\theta}_i - \theta)^2}.$$

Błąd średniokwadratowy mówi nam, jak daleko, średnio rzecz biorąc, wartość wyestymowana parametru θ znajduje się od jego wartości prawdziwej.
Estymujemy go korzystając z prawdziwej wartości parametru oraz n *realizacji* estymatora, $\hat{\theta}_i$, czyli po prostu tego co wyliczamy z macierzy.
W naszym przypadku parametr θ to wariancja σ^2 naszego rozkładu normalnego.

Na podstawie przeprowadzonych symulacji, który estymator zdaje się mieć najmniejsze obciążenie? A który najmniejszy błąd średniokwadratowy?

```
od=1
x<-rnorm(5000,0,od)
x<-matrix(x,10,500)
v1=apply(x,2,var)       #pierwszy estymetor nieobciążony
v2=v1*9/10              #estymator największej wiarygodności
v3=v2*10/11             #ten trzeci
b1=sqrt(mean(v1))-od    #odpowiednie obciążenia
b2=sqrt(mean(v2))-od
b3=sqrt(mean(v3))-od
print(c(b1,b2,b3))
```

```
## [1] -0.001340123 -0.052588055 -0.096678154
```

```
sr1=sqrt(mean((v1-od)^2)) #błędy średniokwadratowe
sr2=sqrt(mean((v2-od)^2))
sr3=sqrt(mean((v3-od)^2))
print(c(sr1,sr2,sr3))
```

```
## [1] 0.4293699 0.3997656 0.3965707
```

Widzimy, że im większe obciążenie estymatora tym mniejsza jest wariancja tego estymatora.

Funkcje

W następnym zadaniu zbadamy obciążenie estymatora odchylenia standardowego w zależności od liczebności próby, z jakiej estymujemy odchylenie standardowe. W tym celu wykorzystamy kolejne ważne narzędzie pakietu R, czyli **funkcje**. Spotkaliśmy się już z gotowymi funkcjami w R, na przykład `var`.
Własne funkcje natomiast piszemy w następujący sposób:

```
S2var <- function(X){
  # Funkcja obliczajaca estymator wariancji S2 na podstawie wektora X.
  m <- mean(X)
  v <- sum((x-m)^2)/(length(X)+1)  # funkcja length(X) zwraca długość wektora X
  return(v)
}
```

Powyższy kawałek kodu utworzy funkcję o nazwie `S2var`, która przyjmuje wektor `X` i zwraca wartość estymatora wariancji $\hat{S}_2^2$. Zwróćmy uwagę, że w R przypisujemy funkcję na zmienną, tak samo jak dowolny inny typ danych.

Bardzo odradzam pisanie własnych funkcji w konsoli. Na ogół są to już nieco dłuższe kawałki kodu i zbyt łatwo popełnić w nich błąd. Funkcje należy pisać albo w skryptach, albo w notatnikach Rmarkdown. Wyjątkiem wobec tej reguły jest pisanie funkcji bezpośrednio w `apply`, na przykład:

```
M <- matrix(1:9, ncol=3)
M
apply(M, 2, function(x) x^x[1])
```

Powyższy kawałek kodu utworzy macierz M, wypisze ją w konsoli, a następnie obliczy macierz, w której każda kolumna zostanie podniesiona do potęgi o wykładniku równym pierwszemu elementowi tej kolumny. Czyli kolumna druga zostanie podniesiona do potęgi czwartej, a kolumna trzecia do potęgi siódmej.

Przyda się nam również funkcja `sapply`.
Jest to po prostu uproszczone `apply`, które działa nie na macierzach, a na wektorach. Na przykład, `sapply(X, function(x) x^2)` podniesie każdy element wektora `X` do kwadratu, czyli zwróci to samo, co napisanie `X^2`.

Zadanie 3. *Estymator odchylenia standardowego.* Domyślny estymator odchylenia standardowego w R to pierwiastek z nieobciążonego estymatora wariancji. Czy taki estymator jest obciążony? Dlaczego? Czy średnio rzecz biorąc zwraca wartości niższe, czy wyższe od prawdziwych?

Zbadamy empirycznie zależność obciążenia od liczebności próby z której estymujemy odchylenie. Celem tego zadania jest utworzenie wykresu punktowego, który przedstawi wartość estymowanego odchylenia standardowego w zależności od liczebności próby.

Napisz funkcję o nazwie `sample_sd`, która przyjmie dwa argumenty, `N` oraz `n`, wylosuje `N` prób rozmiaru `n` z rozkładu normalnego (o wybranym przez Ciebie prawdziwym odchyleniu standardowym) i zwróci `N` estymowanych odchyleń standardowych. Wykorzystaj funkcje `matrix` i `apply` tak jak w poprzednim zadaniu. Ciało funkcji powinno mieć co najwyżej 4 linijki kodu.

```
sample_sd <- function(N,n,my_st=1){
  x<-rnorm(N*n,0,my_st)
```

```
  x<-matrix(x,ncol=n)
  return(apply(x, 1, sd))
}
```

Następnie utwórz wektor `n <- 2:100`.
Korzystając ze swojej funkcji, dla każdej wartości z wektora `n` otrzymaj 100 estymowanych odchyleń standardowych.
Właśnie tutaj przyda Ci się funkcja `sapply`, którą możesz wykorzystać w następujący sposób: `sapply(n, sample_sd, N=100)`.
Wszystkie argumenty znajdujące się za nazwą funkcji wywoływanej w `sapply` zostaną przekazane tejże funkcji, tak jak w tym przypadku argument `N`.

```
n<-2:100
k<-sapply(n,sample_sd,N=200)
```

Korzystając w ten sposób z funkcji `sapply`, otrzymasz macierz, która w każdej kolumnie będzie zawierała po sto odchyleń standardowych (funkcja `sapply` składa otrzymane wyniki kolumna do kolumny). Żeby otrzymać wykres będący celem tego zadania, należy taką macierz przekształcić do ramki danych o dwóch kolumnach. Jedna z nich musi zawierać estymator, a druga - liczebność próby.

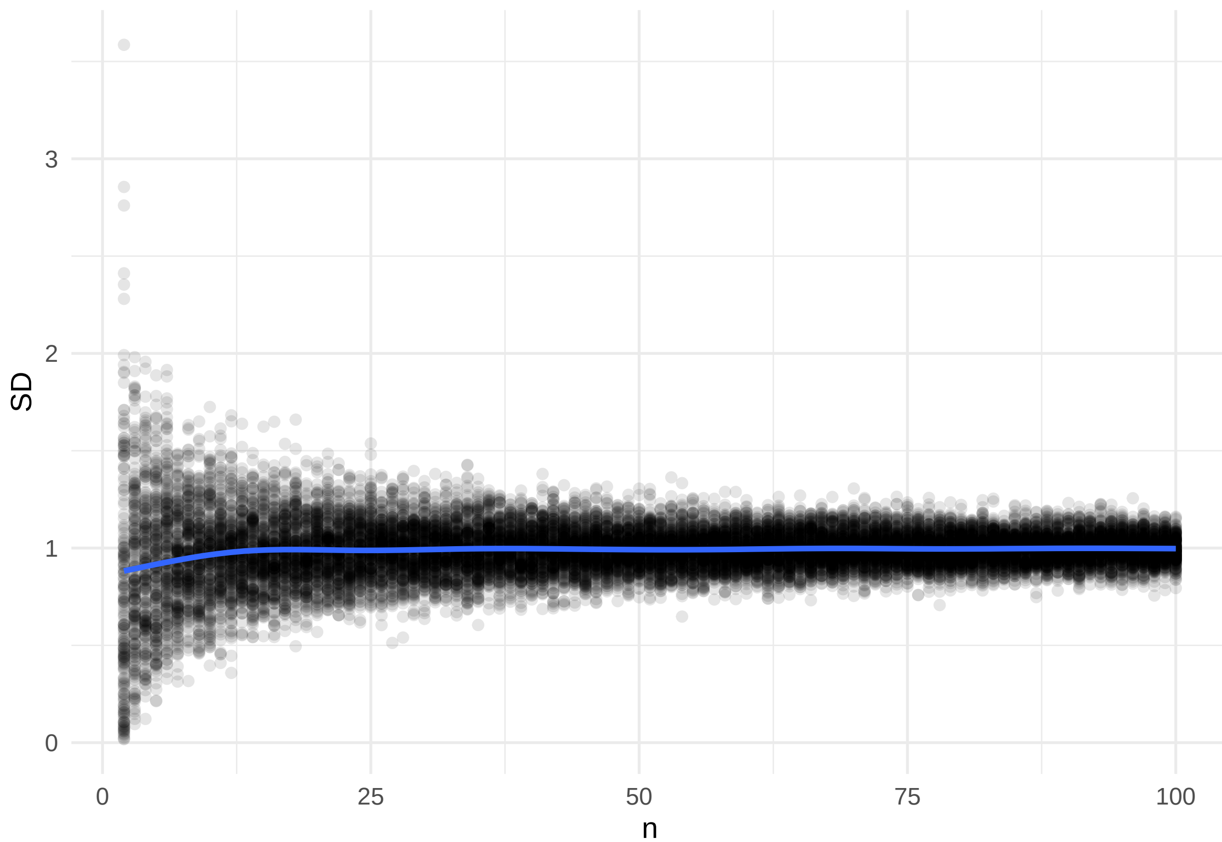
Żeby otrzymać pierwszą kolumnę, musimy „spłaszczyć'' naszą macierz.
Najprostszy sposób żeby spłaszczyć macierz `M` to wywołać komendę `c(M)`, która połączy kolejne kolumny jedna za drugą (dla przypomnienia, funkcja `c` służy do łączenia wektorów).
W ten sposób na pierwszych stu współrzędnych otrzymamy odchylenia estymowane z 2 obserwacji, na następnych stu z 3 obserwacji itd.

Wektor zawierający liczebności próby odpowiadajace kolejnym obserwacjom otrzymamy komendą `rep(n, each=100)`.
Funkcja `rep` służy do powtarzania wartości z pewnego wektora. Wywołanie `rep(1:3, 3)` powtórzy trzykrotnie cały wektor `1:3`, a wywołanie `rep(1:3, each=3)` powtórzy trzykrotnie każdą z wartości wektora `1:3`. Porównaj oba wyniki, wywołując te dwie komendy w konsoli.

Na koniec, utwórz wykres punktowy obrazujący zależność estymowanego odchylenia od liczności próby. Zaraz za estetykami dodaj argument `alpha=0.1`, aby punkty były nieco przezroczyste. Wykres stanie się w ten sposób bardziej czytelny.
Dodatkowo, nałóż na wykres warstwę `geom_smooth(aes(x=n, y=SD))`, która wykreśli krzywą obrazującą (w pewnym sensie) typowe wartości na wykresie. Na tym przedmiocie niestety nie mamy czasu aby dokładnie omówić w jaki sposób wyliczana jest ta krzywa.

```
library(ggplot2)
data_plot<-data.frame('SD'=c(k),'n'=rep(n,each=200))
ggplot(data_plot,aes(x=n,y=SD))+geom_point(alpha=0.1)+theme_minimal()+geom_smooth()
```

```
## `geom_smooth()` using method = 'gam' and formula 'y ~ s(x, bs = "cs")'
```



Jakie wnioski możesz wyciągnąć z otrzymanego wykresu?

Zadanie 4. Załaduj dane `iris`. Wybierz dane dotyczące gatunku *setosa*. W tym celu najlepiej skorzystać z jeszcze jednego typu indeksowania, czyli *indeksowania logicznego* (a jakie dwa inne typy poznaliśmy na poprzednich zajęciach?).
Indeksowanie logiczne wygląda następująco: `setosa_data <- iris[iris$Species == 'setosa', ]`. To, co tu się dzieje, to po kolei:

- Komenda `iris$Species` wybiera kolumnę o nazwie `Species`.
- Komenda `iris$Species == 'setosa'` porównuje wartości w tej kolumnie z napisem 'setosa' i zwraca wektor logiczny. Jeżeli chcemy, to możemy wynik tej komendy przypisać na nową zmienną: `is_this_setosa <- iris$Species == 'setosa'`.
- Komenda `iris[iris$Species == 'setosa', ]` wybiera wszystkie kolumny tabeli `iris` oraz te wiersze, w których w wektorze logicznym z poprzedniego punktu znajduje się wartość `TRUE`.

Po wybraniu danych dotyczących gatunku *setosa*, oblicz średnią oraz odchylenie standardowe zmiennych `Sepal.Width` oraz `Sepal.Length`.
Następnie oblicz korelację tych zmiennych korzystając z funkcji `cor`. Porównaj ją z korelacją zmiennych `Petal.Length` oraz `Sepal.Length`.

Korelacja zmiennych losowych mierzy, na ile silna jest zależność liniowa pomiędzy tymi zmiennymi. Korelacja pomiędzy zmiennymi X, Y jest równa ± 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $X = aY + b$ dla pewnych liczb rzeczywistych a, b.
Co możesz wywnioskować o zależności pomiędzy zmiennymi `Sepal.Width` a `Sepal.Length` na podstawie ich korelacji? A pomiędzy `Petal.Length` a `Sepal.Length`?
Korzystając z biblioteki `ggplot2`, utwórz wykresy punktowe obrazujące zależność pomiędzy `Sepal.Width` a `Sepal.Length` oraz pomiędzy `Petal.Length` a `Sepal.Length` i sprawdź, czy Twoje wnioski były poprawne.

Zadania dodatkowe.

Zadanie 1. Rozegraj jedną rundę w Guess the Correlation. Jeśli zamierzasz wykonać to zadanie w laboratorium, wyłącz głośniki.

Zadanie 2. Wyestymuj pole koła o promieniu 1 metodą Monte Carlo. W tym celu:

- Wylosuj n punktów z kwadratu [0, 1] x [0, 1]. Ustaw je w macierz o wymiarach $2 \times n$.
- Napisz funkcję, która przyjmie punkt (wektor długości 2) i sprawdzi, czy należy on do koła o promieniu 1.
- Wykorzystaj tę funkcję, funkcję `apply` oraz funkcję `mean` do sprawdzenia, jaka proporcja wylosowanych punktów należy do koła.
- Wykorzystaj obliczoną proporcję do estymacji pola koła.
- Porównaj wyniki dla różnych wartości `n`.

Wskazówka. Całe to zadanie można zrealizować w 8 linijkach kodu.

Zadanie 3.. Zbadaj obciążenie estymatora z poprzedniego zadania.