# title

author

2022 年 7 月 31 日

# 目录

# Chapter 1

# FDM

## 1.1 有限差分格式

通常 FDM 有离散记号:

时域:

$$
\begin{aligned}
n &= 0, 1, ..., N_t \\
t &= n\Delta t \\
t_{max} &= T = N_t \Delta t
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

总之, 有 $N_t$ 个 space, $N_t + 1$ 个 node.

空间:

$$
\begin{aligned}
i &= 0, 1, ..., N_x \\
x_i &= i\Delta x
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

总之, 有 $N_x$ 个 space, $N_x + 1$ 个 node.

最后, 有通用的 FDM 格式记号:

$$
\begin{aligned}
& u'\left(t_n\right) \approx \left[D_t u\right]^n = \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \\
& u'\left(t_n\right) \approx \left[D_{2t} u\right]^n = \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} \\
& u'\left(t_n\right) = \left[D_t^- u\right]^n = \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} \\
& u'\left(t_n\right) \approx \left[D_t^+ u\right]^n = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \\
& u'\left(t_{n+\theta}\right) = \left[\bar{D}_t u\right]^{n+\theta} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \\
& u'\left(t_n\right) \approx \left[D_t^{2-} u\right]^n = \frac{3u^n - 4u^{n-1} + u^{n-2}}{2\Delta t} \\
& u''\left(t_n\right) \approx \left[D_t D_t u\right]^n = \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} \\
& u\left(t_{n+\frac{1}{2}}\right) \approx \left[\bar{u}^t\right]^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(u^{n+1} + u^n\right) \\
& u\left(t_{n+\frac{1}{2}}\right)^2 \approx \left[\overline{u^2}^{t,g}\right]^{n+\frac{1}{2}} = u^{n+1} u^n \\
& u\left(t_{n+\frac{1}{2}}\right) \approx \left[\bar{u}^{t,h}\right]^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{u^{n+1}} + \frac{1}{u^n}} \\
& u\left(t_{n+\theta}\right) \approx \left[\bar{u}^{t,\theta}\right]^{n+\theta} = \theta u^{n+1} + (1-\theta) u^n \\
& t_{n+\theta} = \theta t_{n+1} + (1-\theta) t_{n-1}
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

# 附录 A

# 算法通用概念

## A.1 CFL

对于波动方程, 有关键参数 Courant number $C$:

$$C = u\frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{A.1}$$

CFL (Courant–Friedrichs–Lewy) condition 的定义基于 Courant number:

$$C = u\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq C_{max} \tag{A.2}$$

## A.2 convergence rate

收敛率 (convergence rate) 是基于误差定义的。为了测试收敛率, 我们需要构造一系列的算例, 让每个算例的时间或者空间网格都比上一个算例的网格更精细。收敛率的测试依赖于假设:

$$E = C_t\Delta t^r + C_x\Delta x^p \tag{A.3}$$

其中 $E$ 是数值误差, $C_t, C_x, r$ 和 $p$ 是常数。$r$ 是时间上的收敛率, $p$ 是空间上的收敛率。比如当我们采用中心差分的离散方法, 我们期待 $r = p = 2$ (根据截断误差的推导)。并且, 通常来说, $C_t$ 和 $C_x$ 的值的大小, 我们是不关心的。

当我们计算误差的时候, 首先, 定义一个初始的空间步长 $h_0$, 然后定义随后的 $h$:

$$h_i = 2^{-i}h_0, \quad i = 0, 1, 2, ..., m \tag{A.4}$$

一共有 $0, 1, ..., m : m + 1$ 这么多个算例。

对于每一个算例, 我们都记录 $E$ 和 $h$。常见的 $E$ 有两种选择方法, $\ell^2$ norm 或者 $\ell^\infty$ norm:

$$\begin{aligned} E &= \|e_i^n\|_{\ell^2} = \left(\Delta t\Delta x\sum_{n=0}^{N_t}\sum_{i=0}^{N_x}\left(e_i^n\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad e_i^n = u_{\mathrm{e}}\left(x_i, t_n\right) - u_i^n \\ E &= \|e_i^n\|_{\ell^\infty} = \max_{i,n}\left|e_n^i\right| \end{aligned} \tag{A.5}$$

另外一种方式是记录单一时间步骤上的误差 $\ell^2$ 或 $\ell^\infty$, 比如在最后一个时间步上 ($n = N_t$):

$$
\begin{aligned}
E &= \|e_i^n\|_{\ell^2} = \left(\Delta x \sum_{i=0}^{N_x} \left(e_i^n\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad e_i^n = u_{\mathrm{e}}\left(x_i, t_n\right) - u_i^n, \\
E &= \|e_i^n\|_{\ell^\infty} = \max_{0 \le i \le N_x} |e_i^n|.
\end{aligned}
\tag{A.6}
$$

有了误差的定义, 我们就可以计算收敛率了。令 $E_i$ 和 $h_i$ 对应于相应算例的误差和 step, 则: $E_i = Dh_i^r$, 针对两次连续的算例, 有:

$$
\begin{aligned}
E_{i+1} &= Dh_{i+1}^r \\
E_i &= Dh_i^r
\end{aligned}
\tag{A.7}
$$

两次算例的 $E_i$ 相除以消去 $D$, 有收敛率:

$$
r_i = \frac{\ln\left(\frac{E_{i+1}}{i}\right)}{\ln\left(\frac{h_{i+1}}{h_i}\right)}
\tag{A.8}
$$

对于 $0, 1, ..., m$ 这样 $m + 1$ 个算例, 一共有 $m$ 个 $r_i, \quad i = 0, 1, ..., m - 1$。对于一些方程, 收敛率是可以解析的算出来的, 从而方便 benchmark. 比如对于的波动方程, 中心差分, 我们期待随着 $i$ 的增加 $r_i$ 收敛到 2.

## A.3 Accuracy

当我们说一种离散格式具有 $p$ 阶精度 (accuracy) 的时候, 我们在说这种格式的误差有:

$$
E \propto h^p
\tag{A.9}
$$

其中 $h$ 是网格步长。

所以对于一种数值格式, 当用 log-log plot 画出误差 vs 步长时, 我们可以发现直线的斜率就是精度 $p$:

$$
\begin{aligned}
E(h) &\approx Ch^p \\
\mathrm{lg}|E(h)| &\approx \mathrm{lg}C + p\mathrm{lg}h
\end{aligned}
\tag{A.10}
$$

这就是为什么描述精度的时候喜欢用 log-log plot:

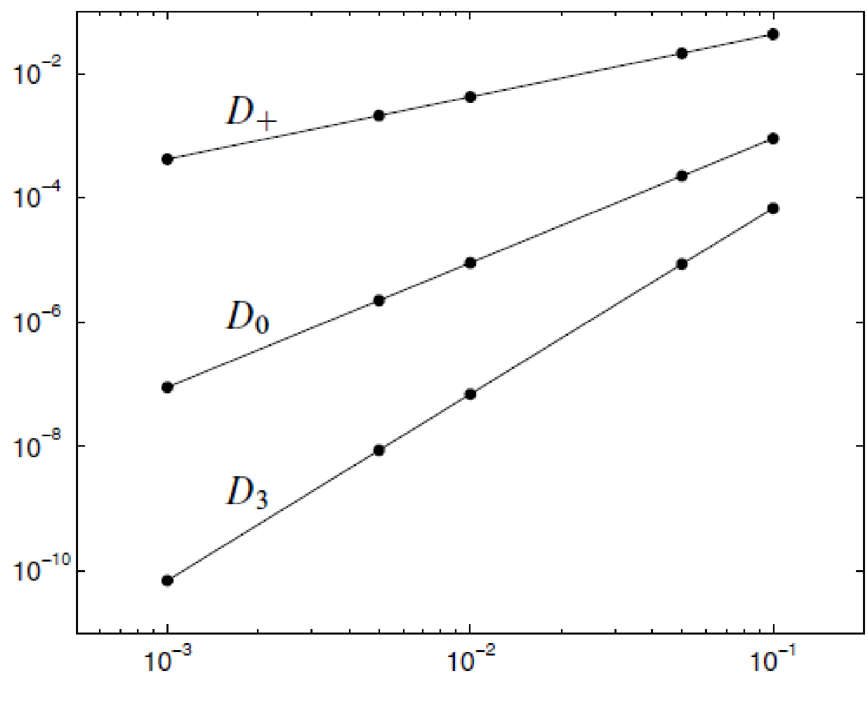


图 A.1: 描述精度示意图