Análise de Fourier

Trabalho da disciplina Sistemas Lineares

Prof. Jean Patric da Costa

Na disciplina de sistemas lineares, no conteúdo de análise de Fourier, aprendemos diversas ferramentas matemáticas como a série e a transformada de Fourier, tanto em tempo contínuo como em tempo discreto. Essas ferramentas fornecem o conhecimento que é muito útil no processamento de sinais. Um dos principais objetivos trabalhados em aula, é encontrar uma representação no domínio da frequência de um sinal que geralmente é dado no domínio do tempo, essa representação no domínio da frequência chamamos de espectro do sinal e ela nos informa o conteúdo harmônico do sinal, ou seja, quais frequências estão superpostas no sinal.

A teoria de Fourier pode ser utilizada em diversos campos de estudo na engenharia, como por exemplo em processamento de imagens, processamento de sons etc.

Nesse trabalho, vamos analisar uma aplicação da teoria de Fourier em processamento de um sinal sonoro, uma música.

Notas Musicais

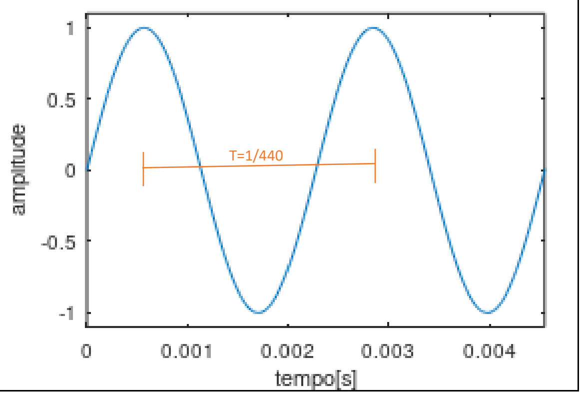
Precisamos discutir brevemente a física e a matemática por trás das notas musicais. Basicamente, cada nota musical têm uma frequência de vibração, que corresponde ao seu campo harmônico, e tem também uma amplitude, que corresponde aproximadamente ao volume do som, e podem ser modelados matematicamente pela função seno e cosseno. A figura abaixo mostra uma nota musical La (440Hz) gerada no software Octave (código disponível no material de aula).

No Octave (nota_440.m)

```
close all
clear all
clc

La=440; %frequencia da nota musical La
amp=1; %amplitude da nota musical La

fs=44100; %frequencia de amostragem
Ts=1/fs; %período de amostragem
t(1,:)=0:Ts:1; % tempo total que a nota será tocada
x=amp*sin(2*pi*La*t); % nota musical modelada por uma senoide
sound(x,fs) %toca a nota musical x
plot(t,x) %visualiza a nota musical x
ylim([-1.1*amp 1.1*amp]) %mostra apenas o intervalo de interesse do eixo y
xlim([0 2/La]) %mostra apenas o intervalo de interesse do eixo x
xlabel('tempo[s]') % unidade do eixo x
ylabel('amplitude') % unidade do eixo y
```



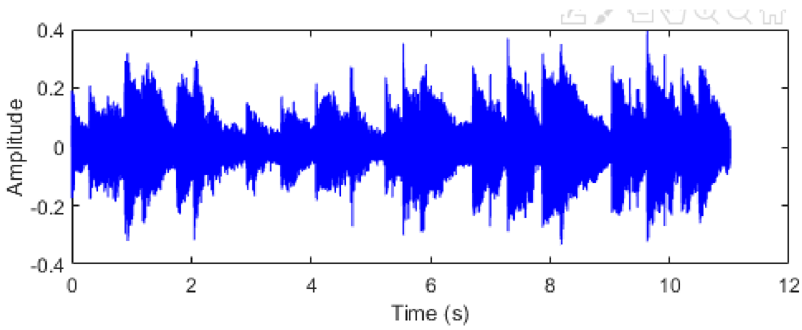
Quando se toca duas ou mais notas ao mesmo tempo, dizemos que é um acorde. Alguns acordes são agradáveis ao nosso ouvido, isto é, são consonantes. Outros são um pouco mais desagradáveis, chamados acordes dissonantes. Não é uma questão de hábito ou cultural, existe uma explicação física por trás desses acordes que é a combinação resultante da razão entre as frequências tocadas em cada nota. Uma corda fixa nos extremos, quando vibra, produz um movimento que pode ser descrito por uma soma de sinais harmônicos. Em outras palavras, quando fazemos vibrar uma corda, o que ouvimos não é um som puro, mas sim a superposição de vários sons, cujas frequências são todas elas múltiplas da frequência fundamental.

Na música, os sons são compostos de notas musicais, que somadas formam acordes (isto é, combinações lineares de notas individuais). Uma única nota soada em um instrumento é composta de uma frequência fundamental (principal) mais outras frequências, chamadas de harmônicas, cujas frequências são múltiplas de a frequência fundamental principal. Todos as amplitudes são adicionadas nesta superposição que ouvimos.

Uma música tocada "ao vivo" produz vibrações sonoras que podem ser modeladas matematicamente como sinais no domínio do tempo contínuo. Quando esse som é gravado de forma analógica, temos por exemplo o disco de vinil. Porém, quando o som é digitalizado para um CD, ou para memória de um computador em formatos de arquivos como .wav ou .mp3, é realizado uma amostragem do sinal de tempo contínuo, como por exemplo 44.100 amostras a cada segundo. O que fica oculto no processo de gravação de um som são as frequências individuais e como elas foram combinadas para formar aquele som. Uma análise com base na teoria de Fourier pode ser utilizada para descobrir as amplitudes em cada uma das frequências presentes no som como se pudéssemos descobrir a "impressão digital" e respectivamente as notas musicais do som analisado.

Matemática Forense – Análise de Fourier

Primeiramente, tomamos um trecho de 11 segundos de uma música. O arquivo dessa música pode ser investigado no software Octave. Na figura abaixo, é possível ver a forma de onda do trecho da música ao longo do tempo.



Meu objetivo é saber quais frequências (notas musicais) estão presentes nesse trecho da música.

A primeira característica do sinal a ser considerada é que ele não é periódico. Dessa forma, sabemos que uma estratégia interessante seria utilizar uma das transformadas de Fourier. A segunda característica que deve ser considerada é que o sinal está armazenado na memória do computador por amostras espaçadas igualmente ao longo do tempo. Nesse caso temos uma sequência de tempo discreto e não um sinal de tempo contínuo. Por esse motivo, poderíamos pensar em iniciar nossa análise pela transformada de Fourier de tempo discreto (sinal aperiódico de tempo discreto), conforme tabela abaixo.

ANÁLISE EM FREQUÊNCIA DE SINAIS DE TEMPO DISCRETO NÃO PERIÓDICOS		
EQUAÇÃO DE ANÁLISE	$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$	(1)
EQUAÇÃO DE SÍNTESE	$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega$	(2)

Também é importante considerar que estamos visando uma aplicação prática, a análise de frequência de sinais é, geralmente, realizada por um processador digital de sinais, como o processador embarcado em um celular por exemplo. Para o processamento dos sinais, portanto, se faz necessário uma linguagem adequada para o processador digital. Note entretanto, que a transformada de Fourier de um sinal de tempo discreto não periódico possui um espectro de frequência de tempo contínuo (em ω) o que dificulta a sua representação por processadores digitais de sinais. Adicionalmente, a equação de síntese envolve uma integral, o que também aumenta a complexidade de implementação digital conforme discutido em aula.

Dessa forma, ambas as transformadas, de tempo contínuo e tempo discreto, em suas formas teóricas clássicas, acabam sendo limitadas para aplicações em processadores digitais de sinais.

Assim, pensando na implementação computacional de um algoritmo de análise em frequência, é interessante se dispor de equações que sejam de fácil avaliação por um processador digital de sinais. Se o sinal de tempo discreto fosse periódico, o uso da série de Fourier de tempo discreto permitiria a realização da análise sem maiores problemas pois, ambas as equações de análise e de síntese são discretas, conforme discutido em aula e resumido na tabela abaixo.

ANÁLISE EM FREQUÊNCIA DE SINAIS DE TEMPO DISCRETO PERIÓDICOS		
EQUAÇÃO DE ANÁLISE	$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn}$	(3)
EQUAÇÃO DE SÍNTESE	$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn}$	(4)

Dessa forma, a implementação digital da série de Fourier de tempo discreto não é um problema.

Para sairmos desse impasse, o ponto de partida é a relação que há entre a transformada de Fourier $X(\omega)$ e os coeficientes da série de Fourier $\tilde{X}[k]$. Considere uma sequência não periódica $x[n]$ que possua transformada de Fourier $X(\omega)$. Já foi visto que a amostragem de $X(\omega)$ em frequências $\omega_k = {2\pi k}/{N}$, $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$, fornece os coeficientes da série de Fourier $\tilde{X}[k]$ de um sinal periódico obtido a partir da repetição do sinal $x[n]$ com um período N. Isto é,

$$\tilde{X}[k] = X(\omega)\big|_{\omega=(2\pi/N)k} = X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \qquad (5)$$

Para se obter uma sequência periódica $\tilde{x}[n]$ a partir da sequência de amostras $\tilde{X}[k]$ utiliza-se a equação de síntese da série de Fourier de tempo discreto (4). Isto é,

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn} \qquad (6)$$

Substituindo da definição da transformada de Fourier (1)

$$X(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\omega m} \qquad (7)$$

em (6) e, posteriormente, em (7), resulta

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j(2\pi/N)km}\right]e^{j(2\pi/N)kn} \tag{8}$$

Alterando a ordem dos somatórios resulta em

$$\tilde{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)k(n-m)}\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\tilde{p}[n-m] \tag{9}$$

onde o termo entre colchetes é a série de Fourier de um trem de impulsos periódico, isto é,

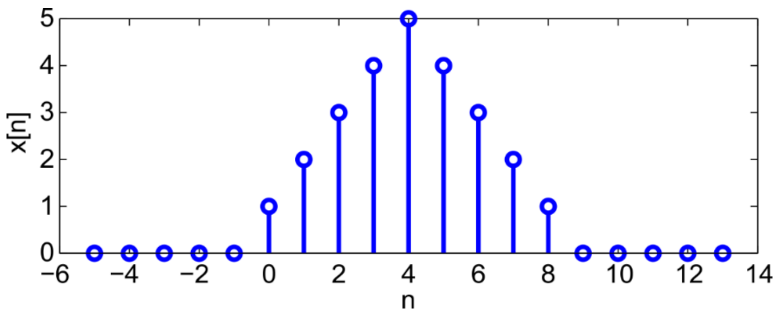
$$\tilde{p}[n-m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)k(n-m)} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-m-rN] \tag{10}$$

e, portanto,

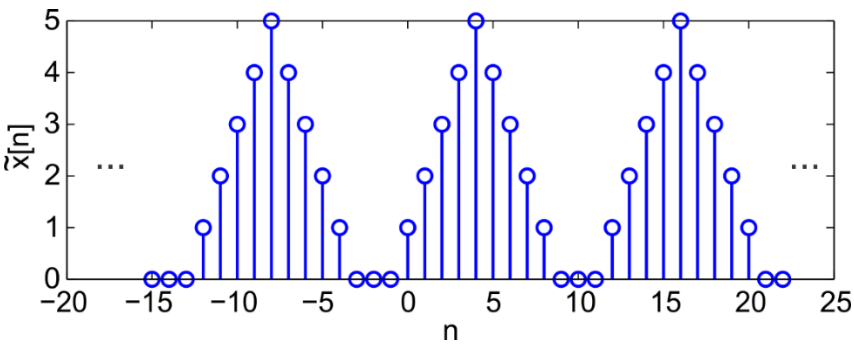
$$\tilde{x}[n] = \mathrm{x}[n] * \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-rN] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN]. \tag{11}$$

A equação (11) mostra que o sinal reconstruído a partir das amostras $\tilde{X}[k]$ obtidas a partir de $X(\omega)$ é periódico com período N e é formado por cópias da sequência $x[n]$ deslocada de múltiplos inteiros de N.

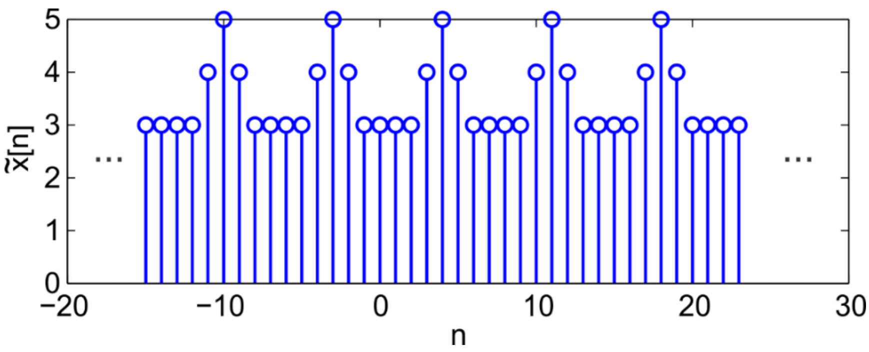
Considere o sinal abaixo que tem comprimento 9.



Usando (11) com $N = 12$ resulta em



Usando (11) com $N = 7$ tem-se



Fica evidente que para que um período do sinal periódico seja igual ao sinal não periódico original, deve-se ter N maior ou igual ao comprimento do sinal não periódico original.

Nesse caso, $x[n]$ pode ser obtido a partir da sequência $\tilde{x}[k]$, isto é,

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

Dessa forma, a partir de uma sequência não periódica $x[n]$, pode-se formar uma sequência periódica $\tilde{x}[k]$ e utilizar a série de Fourier de tempo discreto para representá-la. Posto de outra forma, pode-se a partir da sequência de coeficientes de Fourier $\tilde{X}[k]$, se obter a sequência periódica $\tilde{x}[k]$, utilizando-se as equações da série de Fourier, para, finalmente, se determinar $x[n]$ utilizando

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

Assim, como o sinal não periódico a ser analisado tem N termos, a relação dos coeficientes de Fourier e a reconstrução do sinal a partir de uma sequência periódica é dada por

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn}, & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j(2\pi/N)kn}, & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

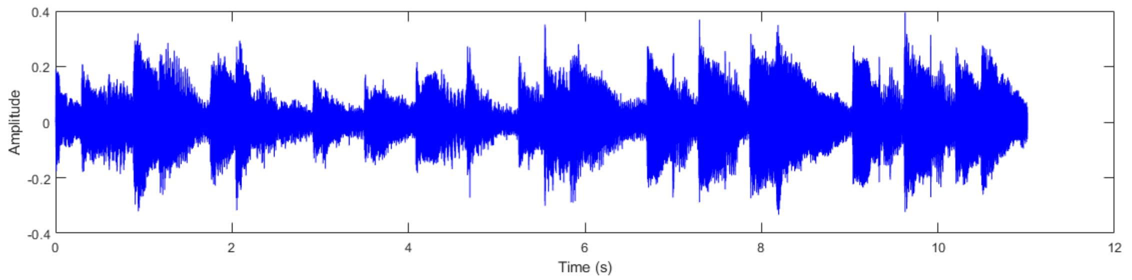
Quando a série de Fourier de tempo discreto é empregada para a representação de sequências não periódicas ela é chamada de Transformada Discreta de Fourier (DFT).

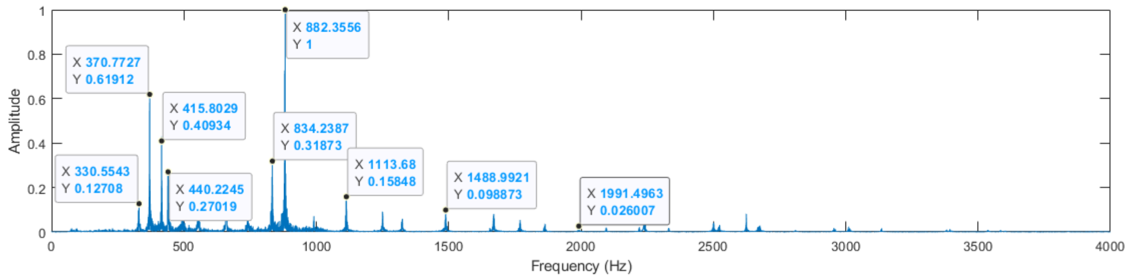
ANÁLISE EM FREQUÊNCIA DE SINAIS DE TEMPO DISCRETO PERIÓDICOS	
EQUAÇÃO DE ANÁLISE	$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn}$
EQUAÇÃO DE SÍNTESE	$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j(2\pi/N)kn}$

Por fim, vamos utilizar um algoritmo chamado Transformada rápida de Fourier (em inglês fast Fourier transform, ou FFT) que é um algoritmo para se calcular a Transformada discreta de

Fourier (DFT). Uma Transformada rápida de Fourier calcula rapidamente essa transformação fatorizando a matriz da Transformada discreta de Fourier em um produto de fatores esparsos. Como resultado, ele consegue reduzir o tempo de processamento necessário para calcular a Transformada discreta de Fourier. Esse algoritmo está disponível na biblioteca da maioria dos microcontroladores e DSPs.

No octave vamos utilizar a função “fft”. Sendo assim, finalmente encontramos as frequências (notas musicais) do trecho da música em questão e as respectivas amplitudes.





Tarefa para entregar

1 – Escolha um trecho de 2 segundos uma música de sua preferência. (eu baixei do youtube utilizando o site https://mp3-youtube.download/pt/easy-audio-converter)

2 – Converta para um arquivo .ogg ou .mp3 ou .wav com uma frequência de amostragem de no mínimo 32kHz. (utilizei um aplicativo grátis https://www.audacityteam.org/)

3 – Estude a teoria de Fourier e utilize o software de simulação para descobrir as principais frequências presentes no trecho da música que você escolheu. (notas de aula, exemplo de código e livro texto)

4 – Apresente um relatório com o resultado obtido (envie pelo moodle conforme agenda da atividade)

Referencias

https://www.youtube.com/watch?v=vI_oKwS1_oc

http://www.mat.ufrgs.br/~brietzke/music/music.html

https://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/F809/F809_sem1_2003/991828Giorgia-MansanaresF809_RF09_0.pdf

https://www.audacityteam.org/

http://www2.eca.usp.br/prof/iazzetta/tutor/acustica/introducao/tabela1.html