

Gesamtschule Scharnhorst

## Fundamentalsatz der Analysis

geschrieben von

Benno Schörmann

### **Thema der Facharbeit:**

Eine vollständige Definition und ein vollständiger Beweis des Fundamentalsatzes der Analysis

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>II</b>	<b>Geschichtliche Zusammenfassung</b>	<b>2</b>
<b>III</b>	<b>Alle wichtigen Begriffe erklärt</b>	<b>2</b>
III.1	Was ist Differentialrechnung? . . . . .	2
III.1.1	Wie wird eine Funktion abgeleitet? . . . . .	2
III.2	Was ist Integralrechnung? . . . . .	2
III.2.1	Wie wird eine Funktion integriert? . . . . .	2
III.3	Was ist der Mittelwertsatz? . . . . .	3
III.4	Was ist eine stetige Funktion? . . . . .	3
<b>IV</b>	<b>Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung</b>	<b>3</b>
IV.1	Erster Teil . . . . .	3
IV.2	Korollar . . . . .	5
IV.3	Zweiter Teil . . . . .	6
<b>V</b>	<b>Auswirkungen auf die Mathematik</b>	<b>7</b>

# **I Einleitung**

(Die Einteilung steht übrigens noch absolut nicht fest, habe sie gestern abend im Halbschlaf angefertigt)

In dieser Facharbeit werde ich über Den Fundamentalsatz der Analysis und die dazugehörigen Nebenpunkte schreiben.

# **II Geschichtliche Zusammenfassung**

Newton/Gauss Fight

Jahreszeiten, Semi guter Beweis am Anfang?

1

# **III Alle wichtigen Begriffe erklärt**

Anschauliche Beispiele? (Scipy Einbindung?)

## **III.1 Was ist Differentialrechnung?**

-eines der am einfachsten zu begreifenden Themen der Analysis ermöglicht dieser Teil der Analysis das finden von Extrema und das generelle Beschreiben von Funktionsverläufen.

### **III.1.1 Wie wird eine Funktion abgeleitet?**

Text

## **III.2 Was ist Integralrechnung?**

Text

### **III.2.1 Wie wird eine Funktion integriert?**

Text

---

<sup>1</sup>Omar A. Hernandez Rodriguez (University of Puerto Rico) and Jorge M. Lopez Fernandez (University of Puerto Rico), "Teaching the Fundamental Theorem of Calculus: A Historical Reflection - Integration from Cavalieri to Darboux," Convergence (Januar 2012)

### III.3 Was ist der Mittelwertsatz?

Text

### III.4 Was ist eine stetige Funktion?

Text

## IV Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist in zwei Hauptsätze und einen Nebensatz aufgeteilt.

Der erste Satz stellt den Zusammenhang zwischen Integral und Differential dar.

### IV.1 Erster Teil

#### Satz IV.1.1.

*Gegeben ist die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f$  in einem geschlossenen Intervall  $[a, b]$ . Sei  $F$  definiert für alle  $x$  im Intervall  $[a, b]$  durch*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

*Dann ist  $F$  gleichmäßig stetig auf dem Intervall  $[a, b]$  und differenzierbar auf dem offenen Intervall  $(a, b)$ , und*

$$F'(x) = f(x)$$

*Für alle  $x$  in  $(a, b)$ , sodass  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  ist.*

*Beweis.*

Für ein gegebenes  $f(t)$  sei die Funktion  $F(x)$  definiert als

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Für jegliche 2 Zahlen  $x_1$  und  $\Delta x$  im Intervall  $[a, b]$  ergibt sich

$$F(x_1) = \int_a^{x_1} f(t) dt$$

und

$$F(x_1 + \Delta x) = \int_a^{x_1 + \Delta x} f(t) dt$$

Wenn diese beiden Gleichungen nun subtrahiert werden, dann ergibt sich

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_a^{x_1 + \Delta x} f(t) dt - \int_a^{x_1} f(t) dt \quad (1)$$

Die Summe beider Flächen ist

$$\int_a^{x_1} f(t) dt + \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t) dt = \int_a^{x_1 + \Delta x} f(t) dt \quad (2)$$

Die Umformung dieser Gleichungen gibt

$$\int_a^{x_1 + \Delta x} f(t) dt - \int_a^{x_1} f(t) dt = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t) dt \quad (3)$$

Nun wird die Gleichung (1) eingesetzt.

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t) dt \quad (4)$$

Laut dem Mittelwertsatz gibt es eine Zahl  $c$  in  $[x_1, x_1 + \Delta x]$ , sodass

$$\int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t) dt = f(c) * \Delta x \quad (5)$$

Nun wird die Gleichung (4) und (5) zusammengefügt und durch  $\Delta x$  dividiert

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = f(c) * \Delta x \quad | \div \Delta x$$

$$\frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = f(c)$$

Auffallend ist, dass die linke Seite zu einem Differenzenquotienten umgeformt wurde. Wird nun  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$  ange-

wandt, dann

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c)$$

Und somit

$$F'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) \quad (6)$$

Nun fehlt nur noch  $f(c)$ .

Da  $x_1 \leq c \leq x_1 + \Delta x$  ist und  $\Delta x$  gegen 0 läuft wird sich  $c \rightarrow x_1$  nähern bis bei  $\Delta x = 0$  auch  $c = x_1$  ist, beziehungsweise  $x_1 \leq c \leq x_1 + 0$  oder  $x_1 = c = x_1$  ist.

Zusammenfassend ist also

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = f(x_1) \quad (7)$$

Und somit, wenn man (6) und (7) zusammenfügt

$$F'(x_1) = f(x_1)$$

Eine andere Schreibweise wäre

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

Damit ist der erste Satz der Differential- und Integralrechnung bewiesen. □

## IV.2 Korollar

### Satz IV.2.1.

*Gegeben ist die in  $\mathbb{R}$  definierte, auf dem Intervall  $[a, b]$  stetige Funktion  $f$  und  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  im Intervall  $[a, b]$ , dann gilt*

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

*Das Korollar erfordert Stetigkeit auf dem ganzen Intervall.*

*Beweis.*

Sei  $F$  ein Stammfunktion von  $f$  mit Stetigkeit auf dem Intervall  $[a, b]$ , dann sei

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Durch den ersten Beweis ist bewiesen, dass  $G(x)$  eine Stammfunktion von  $f$  ist. Da  $F'(x) - G'(x) = 0$  ist der

Mittelwertsatz impliziert, dass  $F(x) - G(x)$  eine konstante Funktion ist, das heißt es gibt eine Zahl  $c$ , so dass  $G(x) = F(x) + c$  für alle  $x$  in  $[a, b]$ . Es gilt also

$$F(a) + c = G(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

Das bedeutet, dass  $c = -F(a)$ . In anderen Worten,  $G(x) = F(x) - F(a)$ , und somit

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) = F(b) - F(a)$$

□

### IV.3 Zweiter Teil

#### Satz IV.3.1.

*Dieser Teil wird manchmal Zweiter Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung oder das Newton-Leibniz-Axiom genannt.*

*Gegeben ist die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f$  auf dem geschlossenen Intervall  $[a, b]$  und  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  auf dem Intervall  $(a, b)$*

$$F'(x) = f(x)$$

*Wenn  $f$  auf dem Intervall  $[a, b]$  Riemann-integrierbar ist, dann*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

*Der zweite Teil ist aussagekräftiger als das Korollar, da er nicht voraussetzt, dass  $f$  eine stetige Funktion ist. Wenn eine Stammfunktion  $F$  von  $f$  existiert, dann gibt es unendlich viele unterschiedliche Stammfunktionen die erlangt werden, indem eine Konstante, oftmals  $c$  genannt, an  $F$  addiert wird. Außerdem existiert laut dem ersten Teil eine Stammfunktion  $F$ , sobald  $f$  kontinuierlich ist, was durch das nicht Vorhandensein einer Stammfunktion von Funktionen, wie  $e^{-x^2}$  widerlegt ist.*

*Beweis.*

Dies ist ein Grenzbeweis durch die Riemann-Summe. Sei  $f$  Riemann-integrierbar auf dem Intervall  $[a, b]$  und

lasse  $f$  eine Stammfunktion  $F$  auf dem Intervall  $[a, b]$  zu.  $F(b) - F(a)$ . Seien  $x_0 \cdots x_n$ , sodass

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b$$

Daraus lässt sich erschließen, dass

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0)$$

Nun wird jedes  $F(x_k)$  zusammen mit seinem negativen gegenpart addiert, sodass die daraus ergebende menge folgendes ergibt

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) + [-F(x_{n-1}) + F(x_{n-1})] + [-F(x_{n-2}) + F(x_{n-2})] + \cdots + \\ &\quad [-F(x_2) + F(x_2)] + [-F(x_1) + F(x_1)] - F(x_0) \\ &= [F(x_n) - F(x_{n-1})] + [F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})] + \cdots + [F(x_2) - F(x_1)] + [F(x_1) - F(x_0)] \end{aligned}$$

Die obere Menge kann folgendermaßen zusammengefasst werden

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n [F(x_k) - F(x_{k-1})]$$

Als nächstes wird der Mittelwertsatz benötigt. Kurz zusammengefasst:

Sei  $F$  stetig auf dem geschlossenen Intervall  $[a, b]$  und differenzierbar auf dem offenen Intervall  $(a, b)$ , dann existiert ein  $c$  im Intervall  $(a, b)$ , sodass [Lee2009a]

$$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

Daraus folgt

$$F'(c)(b - a) = F(b) - F(a)$$

□

## V Auswirkungen auf die Mathematik