PRÁCTICA 4

Análisis en el dominio de la frecuencia (DF) del circuito serie de segundo orden R-L-C

Objetivo

El objetivo de esta práctica consiste en estudiar, en el dominio de la frecuencia, circuitos de segundo orden. Para ello se diseñará un filtro pasa-banda que nos permitirá estudiar el fenómeno de la resonancia.

4.1 Material empleado

El material necesario para la realización práctica es el siguiente:

- Generador de funciones.
- Osciloscopio.
- Regleta de conexión.
- Cables de conexión.
- Resistencia, condensador y bobina.

4.2 Fundamento teórico

Vamos a estudiar el circuito de segundo orden RLC serie.

En el circuito RLC serie, generador, resistencia, bobina y condensador constituyen una única malla. La intensidad que recorre el circuito la designaremos por $i(t)$. El voltaje suministrado por el generador se reparte entre la resistencia, la bobina y el condensador. La relación voltaje-intensidad para estos elementos es

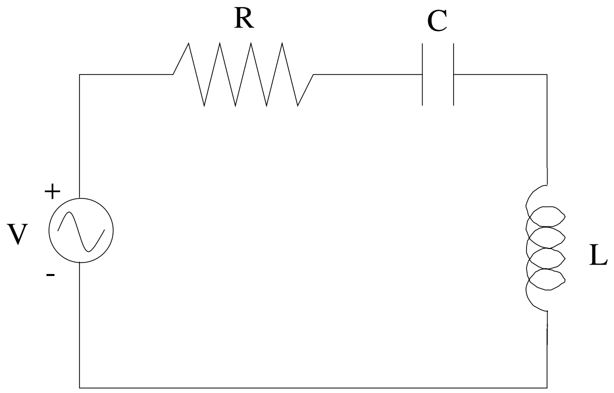

Figura 4.1: Circuito serie R-L-C.

$$v_R(t) = Ri(t) \Longleftrightarrow i(t) = \frac{1}{R}v_R(t) \tag{4.1}$$

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} \Longleftrightarrow i(t) = \int_{t_0}^{t} v_L(t)dt + i(t_0) \tag{4.2}$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)dt + v_C(t_0) \Longleftrightarrow i(t) = C\frac{dv_C}{dt} \tag{4.3}$$

Para una sola malla, $v_e(t) = v_R(t) + v_C(t) + v_L(t)$, y sustituyendo las expresiones anteriores se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes para $v_C(t)$

$$v_e(t) = LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + RC\frac{dv_C}{dt} + v_C \tag{4.4}$$

Vamos a reescribir esta ecuación para que la solución adopte la forma más sencilla. Con este objetivo se define

$$\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{4.5}$$

$$\delta \equiv \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \tag{4.6}$$

La primera definición corresponde a la frecuencia de resonancia, mientras que la segunda corresponde al factor de amortiguamiento. Posteriormente veremos qué significan. Con ello la ecuación diferencial se escribe

$$\omega_0^2 v_e(t) = \frac{d^2v_C}{dt^2} + 2\delta\omega_0\frac{dv_C}{dt} + \omega_0^2 v_C \tag{4.7}$$

Pasando las magnitudes a fasores y sustituyendo el operador diferencial por el factor $j\omega$

$$\omega_0^2 V_e = (j\omega)^2 V_C + 2\delta\omega_0 j\omega V_C + \omega_0^2 V_C \tag{4.8}$$

de donde despejando V_C se obtiene

$$V_C = Ve\frac{1}{(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}) + j2\delta\frac{\omega}{\omega_0}} \tag{4.9}$$

La función de transferencia con salida en el condensador se define como el cociente entre el fasor voltaje en el condensador y el fasor voltaje de entrada, esto es,

$$T_C(\omega) = \frac{V_C}{V_e} = \frac{1}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}) + j2\delta\frac{\omega}{\omega_0}} \tag{4.10}$$

Para obtener la función de transferencia con salida en la resistencia y en la autoinducción tenemos que reescribir las relaciones voltaje-intensidad fasoriales

$$v_R(t) = Ri(t) = RC\frac{dv_C(t)}{dt} \Rightarrow V_R = j\omega RCV_C = 2j\delta\frac{\omega}{\omega_0}V_C \tag{4.11}$$

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = LC\frac{d^2i(t)}{dt^2} \Rightarrow V_L = LC(j\omega)^2V_C = -(\frac{\omega}{\omega_0})^2V_C \tag{4.12}$$

Y por tanto

$$T_R(\omega) = \frac{2j\delta\omega/\omega_0}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}) + j2\delta\frac{\omega}{\omega_0}} \tag{4.13}$$

$$T_L(\omega) = \frac{-(\omega/\omega_0)^2}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}) + j2\delta\frac{\omega}{\omega_0}} \tag{4.14}$$

Se ve cómo la solución en el dominio de la frecuencia se obtiene de forma inmediata con el tratamiento fasorial, puesto que los operadores se transforman en multiplicaciones por escalares (complejos), con lo que las ecuaciones diferenciales se transforman a su vez en ecuaciones algebraicas (complejas).

Ya se puede dar un significado a una de las constantes que definimos anteriormente. La frecuencia de resonancia ω_0 es una medida de lo grande o pequeña que es la frecuencia ω. La frecuencia ω se normaliza de forma natural con la frecuencia de resonancia y las funciones de transferencia quedan como funciones de $u \equiv \omega/\omega_0$.

$$T_C(u) = \frac{1}{(1-u^2) + 2j\delta u} = \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2\delta u)^2}}\angle - \arctan(\frac{2\delta u}{1-u^2}) \tag{4.15}$$

$$T_R(u) = \frac{2j\delta u}{(1-u^2) + 2j\delta u} = \frac{2\delta u}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2\delta u)^2}}\angle\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{2\delta u}{1-u^2}) \tag{4.16}$$

$$T_L(u) = \frac{-u^2}{(1-u^2) + 2j\delta u} = \frac{u^2}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2\delta u)^2}}\angle\pi - \arctan(\frac{2\delta u}{1-u^2}) \tag{4.17}$$

4.2.1 | Salida en la resistencia

$$T_R(u) = \frac{2\delta u}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2\delta u)^2}} \angle \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{2\delta u}{1-u^2}) \tag{4.18}$$

El voltaje en la resistencia es proporcional a la intensidad que recorre el circuito y es inversamente proporcional a la impedancia compleja del circuito. El máximo de voltaje en la resistencia coincide con un mínimo en la impedancia del circuito, y esto ocurre en la frecuencia de resonancia. También a esta frecuencia la impedancia se vuelve real al cancelarse las contribuciones de bobina y condensador. Ahora el máximo de la función de transferencia es 1. Según se observa en la figura 4.2, se tiene un filtro pasa banda, puesto que sólo a las frecuencias próximas a la de resonancia la función de transferencia está próxima a cero. En cuanto nos alejamos tenemos un comportamiento asintótico simétrico para altas y bajas frecuencias, y que corresponde a sendas rectas con pendientes ± 20 dB/dec.

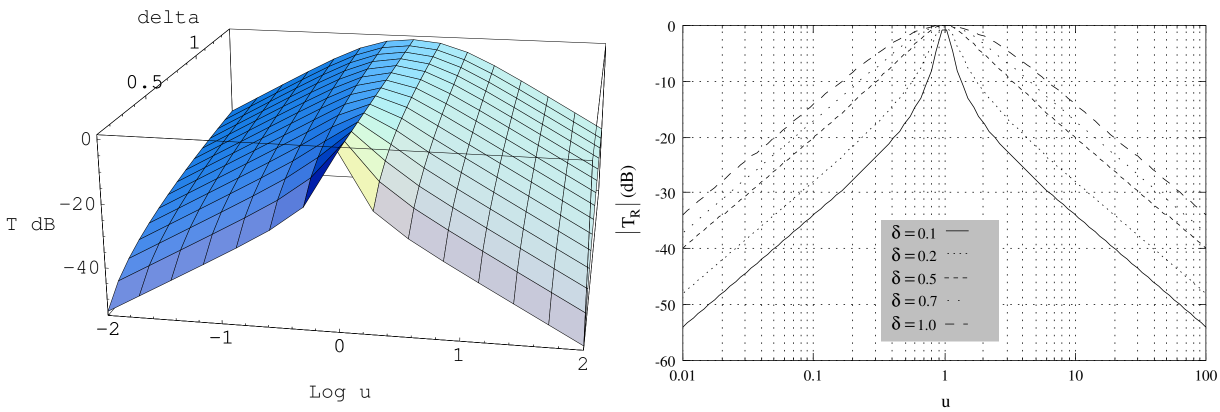

Figura 4.2: Módulo de la función de transferencia con salida en resistencia.

Con respecto al desfase tendremos que para bajas frecuencias tiende asintóticamente a $\pi/2$. A altas frecuencias tiende a $-\pi/2$. En la frecuencia de resonancia su valor es justamente 0. Para valores pequeños de δ el desfase pega un salto brusco para frecuencias próximas a la de resonancia.

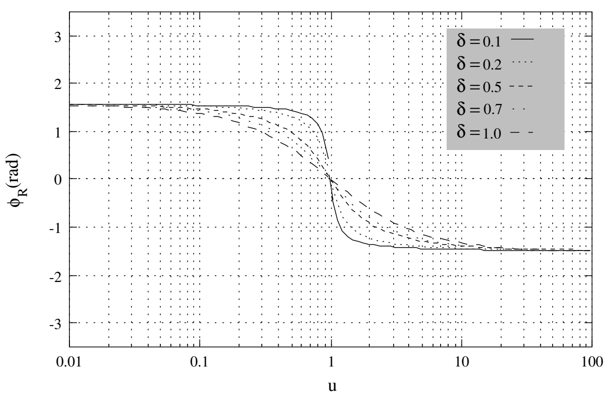

Figura 4.3: Fase de la función de transferencia con salida en resistencia para diferentes valores de δ.

4.2.2 | Salida en el condensador

En la figura 4.4 se representa el módulo de la función de transferencia en decibelios frente al logaritmo de la frecuencia normalizada a la frecuencia de resonancia y para distintos valores del factor de amortiguamiento. Se han representado la línea $T_{dB} = 0$. Vemos como para frecuencias pequeñas la

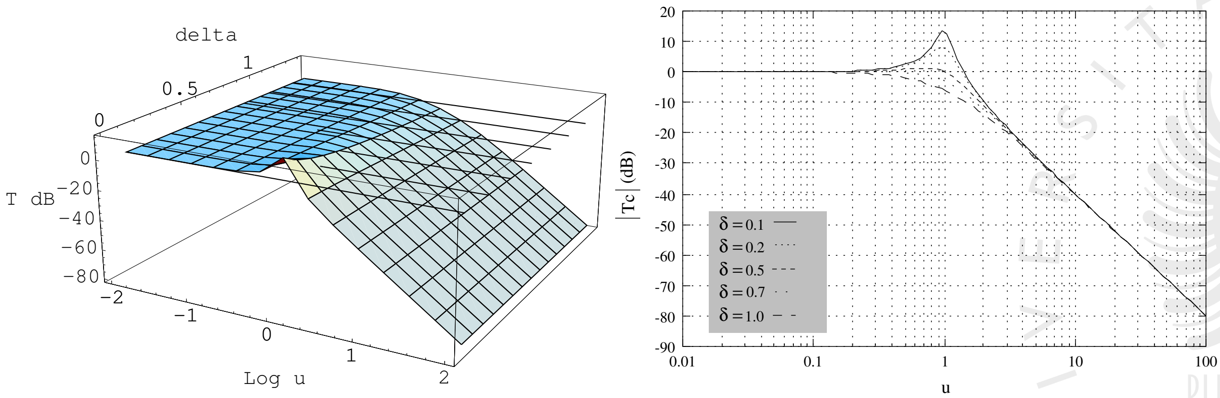

Figura 4.4: Módulo de la función de transferencia con salida en condensador.

función de transferencia tiende a cero: la salida se hace en módulo igual a la entrada. A altas frecuencias el voltaje en el condensador tiende rápidamente a cero (la pendiente de la recta asintótica es de -40 dB/dec). Para valores próximos a la frecuencia de resonancia el voltaje en el condensador se hace mayor que el voltaje de entrada cuando $\delta < 0{,}7$. Se dice que el sistema ha entrado en resonancia. Para valores de $\delta \geq 0{,}7$ la salida no supera a la entrada y el sistema no resuena.

Cuando se produce la resonancia el máximo de la función de transferencia no se alcanza para u=1 sino que está desplazado hacia valores menores que la unidad. El máximo se alcanza para $u = \sqrt{1-2\delta^2}$. El valor máximo de la función de transferencia es $T_{\text{máx}} = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$

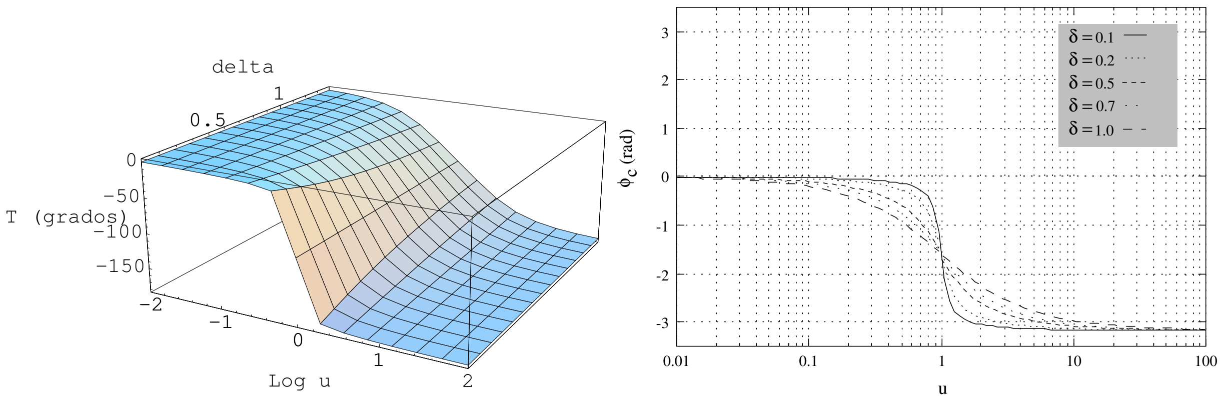

Figura 4.5: Fase de la función de transferencia con salida en condensador.

La fase, es idéntica a la obtenida para salida en la resistencia pero restándole $\pi/2$.

4.2.3 | Salida en la bobina

Las bajas frecuencias se ven eliminadas, mientras que para altas frecuencias la función de transferencia tiende a 0 dB. De nuevo para valores del factor de amortiguamiento pequeños se tiene el fenómeno de la resonancia: el voltaje en la bobina es mayor que el voltaje de entrada, con lo que la función de transferencia se hace positiva. En el caso resonante, el máximo de la función de transferencia se obtiene para frecuencias ligeramente mayores que la frecuencia de resonancia; concretamente $u = \frac{1}{\sqrt{1-2\delta^2}}$. El valor máximo de la función de transferencia es igual al caso de salida en el condensador.

La fase de T_L es igual a la fase de T_C sumándole un valor constante de π.

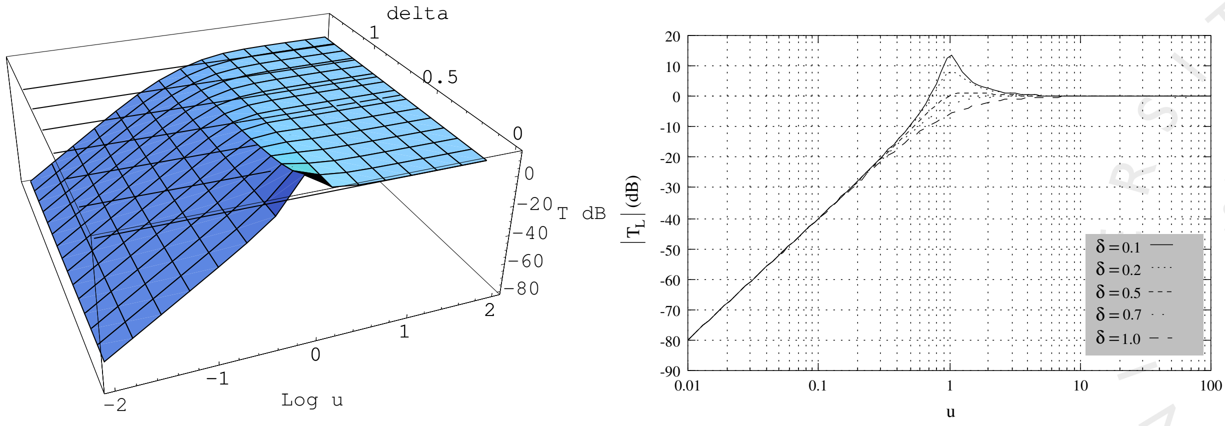

Figura 4.6: Módulo de la función de transferencia con salida en bobina.

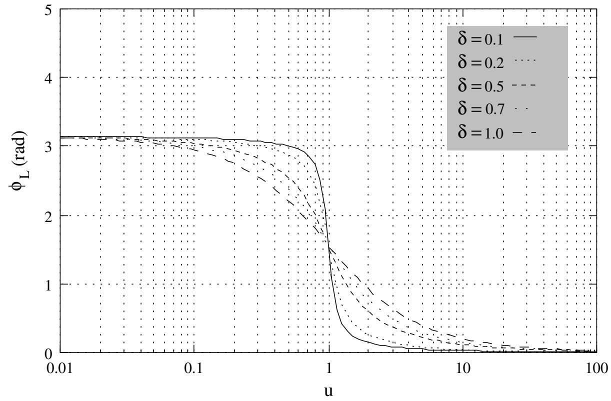

Figura 4.7: Fase de la función de transferencia con salida en bobina para diferentes valores de δ.

4.2.4 | Tabla resumen

Salida en:	$T(u)$	$\|T(u)\|$	$Arg(T(u))$	$\|T(u)\|_{\text{máx}}$	$u : \|T(u)\|_{\text{máx}}$
Condensador	$\frac{1}{(1-u^2)+j2\delta u}$	$\frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2+(2\delta u)^2}}$	-arctan$(\frac{2\delta u}{1-u^2})$	$\frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$	$\sqrt{1-2\delta^2}$
Resistencia	$\frac{j2\delta u}{(1-u^2)+j2\delta u}$	$\frac{2\delta u}{\sqrt{(1-u^2)^2+(2\delta u)^2}}$	$\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{2\delta u}{1-u^2})$	1	1
Bobina	$\frac{-u^2}{(1-u^2)+j2\delta u}$	$\frac{u^2}{\sqrt{(1-u^2)^2+(2\delta u)^2}}$	$\pi - \arctan(\frac{2\delta u}{1-u^2})$	$\frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-2\delta^2}}$

4.2.5 | Resonancia y factor de calidad

La respuesta del circuito, como se ha visto, depende de la frecuencia. Diremos que el circuito es resonante cuando el voltaje y la intensidad en el generador están en fase. Como la intensidad que circula por el circuito es proporcional al voltaje en la resistencia, para que el voltaje e intensidad en el generador estén en fase la fase de la función de transferencia en la resistencia debe ser cero. Esto se produce a la frecuencia de resonancia, definida anteriormente, $u = 1$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. A esta frecuencia la impedancia del circuito es real y la función de transferencia con salida en la resistencia alcanza su valor máximo de 1.

El carácter resonante del circuito viene determinado positivamente por su capacidad de almacenar energía y negativamente por la potencia que se disipa en cada ciclo. Según se ha visto en la forma de las funciones de transferencia, el factor de amortiguamiento determina este comportamiento. Relacionado con este parámetro vamos a definir factor de calidad, Q, como:

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energía máxima almacenada}}{\text{Energía media disipada en cada ciclo}}, \tag{4.19}$$

a la frecuencia de resonancia. Tendremos:

$$|T_C|(\omega = \omega_0) = |T_L|(\omega = \omega_0) = \frac{1}{2\delta} \tag{4.20}$$
$$|T_R|(\omega = \omega_0) = 1 \tag{4.21}$$

La energía almacenada en la bobina viene dada por $W_L(t) = 1/2Li^2(t)$, mientras que en el condensador es $W_C(t) = 1/2Cv_C^2(t)$. Como T_C está desfasada $\pi/2$ respecto T_R, cuando hay un máximo en la energía almacenada en el condensador hay un mínimo en la energía en la bobina y viceversa. La disipación de energía en el circuito se produce en la resistencia y el valor máximo se alcanza en la resonancia. Sustituyendo en la definición del factor de calidad tendremos:

$$Q = 2\pi \frac{1/2L(|V_e|/R)^2}{1/2(|V_e|/R)^2 R/f_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\delta} \tag{4.22}$$

Para diferentes valores del factor de calidad la resonancia es más o menos ancha. Se define frecuencia de corte como aquella en la que la potencia media disipada en el circuito se hace la mitad de su valor máximo. La potencia media disipada en cada ciclo viene dada por la expresión:

$$P_R(u) = \frac{1}{2}|I|^2 R = \frac{V_e^2}{R}\left(\frac{2\delta u}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2\delta u)^2}}\right)^2 \tag{4.23}$$

Igualando esta potencia a la mitad de su valor máximo y despejando la frecuencia:

$$\omega_c/\omega_0 = \sqrt{1+\delta^2} \pm \delta \tag{4.24}$$

Definimos el ancho de banda como la diferencia entre las dos frecuencias de corte anteriores:

$$BW = \omega_{c1} - \omega_{c2} = 2\delta\omega_0 = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \tag{4.25}$$

4.3 Realización práctica

Usaremos como valores de los elementos: $R \simeq 560\ \Omega$; $C \simeq 4{,}7\ nF$; $L \simeq 10\ mH$.

• **[P4.C1]** Medir los valores de R, L y C, para el valor de L se requiere de un polímetro especial (pedir al profesor), tener en cuenta los valores de error de estas medidas, a partir de la hoja de especificaciones del polímetro. Medir también la resistencia del la bobina R_L. Anotadlo en la hoja de cálculo. Determinar el valor teórico de la frecuencia de resonancia.

• **Montaje:** Montar el circuito con salida en la resistencia. Para ello hay que dejar el elemento del que se quiere medir su voltaje conectado a misma referencia que la fuente.

• **[P4.C2]** Determinar la frecuencia de resonancia experimental del circuito, usando el modo X-Y del osciloscopio. Ver apéndice.

• **[P4.C3]** Hacer el diagrama Bode, en módulo y fase, de esta configuración. Para medir la fase usar el método X-Y descrito en el apéndice. Realizar unas 15 medidas para cada diagrama de Bode repartidas en torno a la frecuencia de resonancia y en las zonas de bajas y altas frecuencias. A partir del diagrama de bode, determinar también el ancho de banda del sistema y el factor de calidad (Ver Apéndice).

• **Montaje:** Montar el circuito con salida en el condensador. Para ello hay que dejar el elemento del que se quiere medir su voltaje conectado a misma referencia que la fuente

• **[P4.C4]** Hacer el diagrama Bode, en módulo y fase, con salida en el condensador. Para medir la fase usar el método X-Y descrito en el apéndice. Realizar unas 15 medidas para cada diagrama de Bode repartidas en torno a la frecuencia de resonancia y en las zonas de bajas y altas frecuencias.

Nota: En todo este el análisis tener en cuenta la influencia de la resistencia interna del generador que es de 50Ω en las medidas experimentales. Y la resistencia de la bobina.

Nota: Para mas detalles ver los apéndices del final.

Apéndice: Modo X-Y

Asumamos dos señales en el tiempo, $v_1(t)$, $v_2(t)$ dadas respectivamente por los canales 1 y 2 del osciloscopio. Supongamos que tienen forma sinusoidal de la siguiente manera:

$$v_1(t) = V_1 \sin(2\pi f t) \tag{4.26}$$
$$v_2(t) = V_2 \sin(2\pi f t + \Delta\phi_{12}) \tag{4.27}$$
$$\tag{4.28}$$

donde f es la frecuencia de oscilación y $\Delta\phi_{12}$ es el desfase entre ambas señales, V_1, V_2 son las amplitudes de cada una. El modo X-Y es un modo del osciloscopio donde las señales anteriores forman un sistema de ecuaciones paramétricas de forma que si $x(t) = v_1(t)$ e $y(t) = v_2(t)$, al tener la misma frecuencia, tiene como forma general la figura de una elipse.

4.3.1 | Frecuencia de resonancia usando el modo X-Y:

La resonancia ocurre cuando la reactancia inductiva y la reactancia capacitiva se cancelan entre sí, por lo tanto, la fuente solo ve una impedancia activa (real):

$$Z = R + j0$$

Esto supone que la corriente y la tensión de la fuente están en fase, por lo que no hay desfase entre la señal de la fuente y la tensión en la resistencia.

En el diagrama X-Y, al ir modificando la frecuencia, alcanzamos la frecuencia de resonancia cuando la elipse se convierte en una línea recta.

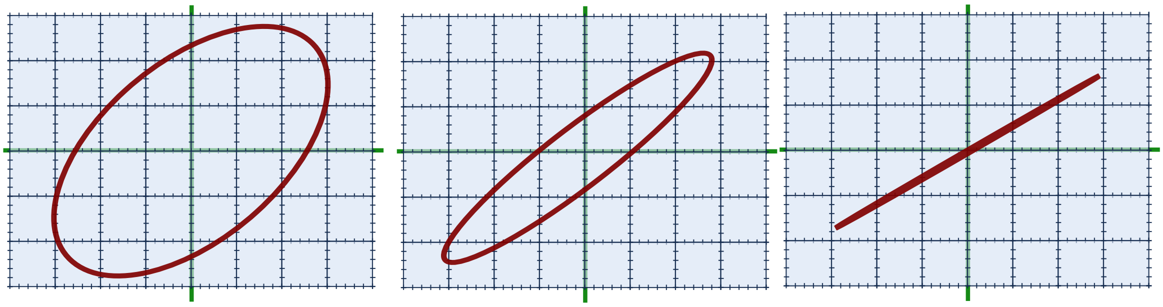

Figura 4.8: Medida frecuencia de resonancia usando modo X-Y.

4.3.2 | Medida Fase usando el modo X-Y:

El desfase de ambas señales vendrá dado por:

$$\sin(\Delta\phi_{12}) = \frac{a}{b},$$

donde a y b son los parámetros mostrados en la figura 4.10. El valor de b es más sencillo de medir, ya que se puede desplazar el diagrama para ver los cortes con la tangente. El valor de a es más complicado y requiere que la figura esté perfectamente centrada en los ejes. Para ello, se puede hacer manualmente desplazando la figura en ambas direcciones x e y de forma que quede simétrica, o también de forma mas precisa colocando las sondas en el punto de referencia de forma que la elipse se reduzca a un punto, centramos dicho punto, y devolvemos las sonda a sus posiciones de medida.

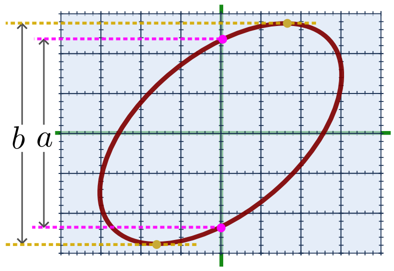

Figura 4.9: Medida de la fase usando modo X-Y.

Justificación: asumamos el punto $t = 0$, para este tenemos que: $x(t=0) = 0$ y por tanto $y(t=0) = a$,

$$v_2(t) = V_2 \sin(2\pi f t + \Delta\phi_{12}) \overset{t=0}{\Rightarrow} a = b \sin(\Delta\phi_{12}) \Rightarrow \sin(\Delta\phi_{12}) = \frac{a}{b}$$

Apéndice: Ancho de Banda y Factor de calidad

En un circuito RLC en resonancia, la impedancia es mínima y la corriente es máxima. Las frecuencias de corte f_1, f_2 son los puntos donde la potencia entregada al circuito cae al $50\,\%$ de su valor máximo en resonancia. Esto corresponde a una caída de $3\,\text{dB}$ en la potencia, lo que equivale a una reducción de la amplitud de la señal a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ de su valor máximo. El ancho de banda se calcula como la diferencia de entre las frecuencias de corte

$$BW_\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1} = 2\pi(f_{c2} - f_{c1}) \tag{4.29}$$

y el factor de calidad:

$$Q = \frac{\omega_0}{BW_\omega} = \frac{f_0}{f_{c2} - f_{c2}} \tag{4.30}$$

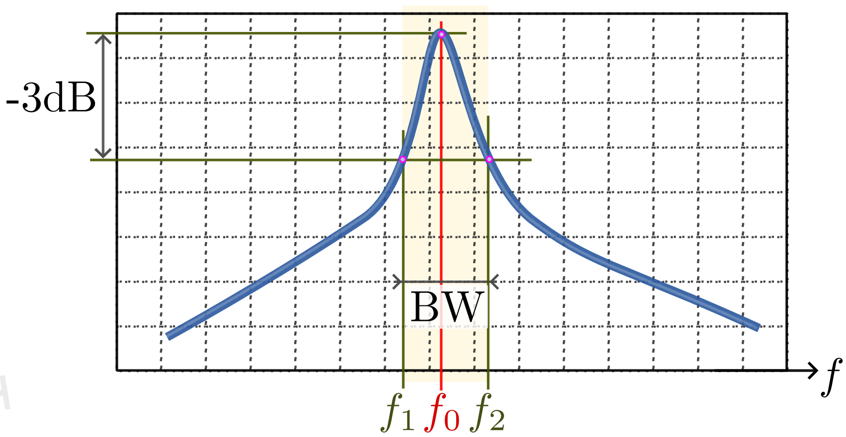

Figura 4.10: Medida de la fase usando modo X-Y.