

Trabajo Práctico N° 5

Canales para la transmisión de información

Medios de transmisión. Canales de información. Protocolos. Probabilidades asociadas a un canal. Entropías a-priori y a-posteriori. Equivocación de un canal. Información mutua. Propiedades de la información mutua.

1. Un canal recibe mensajes construidos con un alfabeto de tres símbolos $A = \{ a, b, c \}$ y genera una salida mediante un alfabeto de dos símbolos $B = \{ 0, 1 \}$. La entrada del canal se caracteriza por la siguiente secuencia: abcacaabbcacaabcacaaabcaca, que genera la siguiente secuencia de salida: 01010110011001000100010011. Determinar las probabilidades a priori y la matriz del canal.
2. Codificar una función en Python que reciba como parámetros dos cadenas de caracteres que contengan secuencias de entrada y de salida de un canal y retorne la matriz que representa dicho canal.
3. Dadas las siguientes secuencias de entrada y sus respectivas salidas, las cuales describen el comportamiento de los canales, calcular las probabilidades a priori y la matriz del canal.

	Canal 1	Canal 2
Entrada	1101011001101010010101010100011111	11010110011010101100110101100111110011
Salida	100111111100011101101010111110110	110021102110022010220121122100112011

4. Dado un canal binario con entradas equiprobables y cuyas salidas siempre son iguales a las entradas, obtener las probabilidades de salida, a posteriori y de los eventos simultáneos. Analizar los resultados obtenidos.
5. Volver a realizar los cálculos del ejercicio anterior, pero considerando las probabilidades a priori $P(0) = 0.2$ y $P(1) = 0.8$. Comparar los resultados obtenidos.
6. Considerar un canal que recibe mensajes de un alfabeto $A = \{ a, b, c \}$, con probabilidades $P = \{ 0.3, 0.3, 0.4 \}$, y entrega mensajes con un alfabeto $B = \{ 1, 2, 3 \}$, caracterizado por la siguiente matriz de probabilidades condicionales:

	1	2	3
a	0.4	0.4	0.2
b	0.3	0.2	0.5
c	0.3	0.4	0.3

- a. Calcular las probabilidades de los símbolos de salida
- b. Obtener las probabilidades a posteriori del canal
- c. Determinar las probabilidades de los eventos simultáneos

7. Realizar funciones en Python que reciban como parámetros: una lista con las probabilidades a priori y la matriz de probabilidades condicionales del canal, y devuelvan:
- Una lista con las probabilidades de los símbolos de salida
 - Una matriz con las probabilidades a posteriori del canal
 - Una matriz con las probabilidades de los eventos simultáneos
8. Obtener las probabilidades de los símbolos de salida de los canales propuestos en los ejercicios 1 y 3. Comparar los resultados obtenidos de dos maneras distintas: a partir de las secuencias de salida y utilizando las probabilidades a priori y la matriz del canal.
9. Calcular las probabilidades a posteriori y de los eventos simultáneos de los canales propuestos en los ejercicios 1 y 3.
10. Determinar las entropías a priori y a posteriori de los siguientes canales binarios:

Canal	Probabilidades a priori	Matriz del canal				
C1	{ 2/5, 3/5 }	<table border="1"> <tr> <td>3/5</td><td>2/5</td></tr> <tr> <td>1/3</td><td>2/3</td></tr> </table>	3/5	2/5	1/3	2/3
3/5	2/5					
1/3	2/3					
C2	{ 3/4, 1/4 }	<table border="1"> <tr> <td>2/3</td><td>1/3</td></tr> <tr> <td>1/10</td><td>9/10</td></tr> </table>	2/3	1/3	1/10	9/10
2/3	1/3					
1/10	9/10					

11. Desarrollar una función en Python que reciba como parámetros: una lista con las probabilidades a priori y la matriz de probabilidades condicionales del canal, y retorne una lista con las entropías a posteriori.
12. Obtener las entropías a priori y a posteriori de los canales de los ejercicios 1, 3 y 6.
13. Calcular las entropías a priori y a posteriori de los siguientes canales:

Canal	Probabilidades a priori	Matriz del canal																
C1	{ 0.14, 0.52, 0.34 }	<table border="1"> <tr> <td>0.50</td><td>0.30</td><td>0.20</td></tr> <tr> <td>0.00</td><td>0.40</td><td>0.60</td></tr> <tr> <td>0.20</td><td>0.80</td><td>0.00</td></tr> </table>	0.50	0.30	0.20	0.00	0.40	0.60	0.20	0.80	0.00							
0.50	0.30	0.20																
0.00	0.40	0.60																
0.20	0.80	0.00																
C2	{ 0.25, 0.25, 0.50 }	<table border="1"> <tr> <td>0.25</td><td>0.25</td><td>0.25</td><td>0.25</td></tr> <tr> <td>0.25</td><td>0.25</td><td>0.00</td><td>0.50</td></tr> <tr> <td>0.50</td><td>0.00</td><td>0.50</td><td>0.00</td></tr> </table>	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.00	0.50	0.50	0.00	0.50	0.00				
0.25	0.25	0.25	0.25															
0.25	0.25	0.00	0.50															
0.50	0.00	0.50	0.00															
C3	{ 0.12, 0.24, 0.14, 0.50 }	<table border="1"> <tr> <td>0.25</td><td>0.15</td><td>0.30</td><td>0.30</td></tr> <tr> <td>0.23</td><td>0.27</td><td>0.25</td><td>0.25</td></tr> <tr> <td>0.10</td><td>0.40</td><td>0.25</td><td>0.25</td></tr> <tr> <td>0.34</td><td>0.26</td><td>0.20</td><td>0.20</td></tr> </table>	0.25	0.15	0.30	0.30	0.23	0.27	0.25	0.25	0.10	0.40	0.25	0.25	0.34	0.26	0.20	0.20
0.25	0.15	0.30	0.30															
0.23	0.27	0.25	0.25															
0.10	0.40	0.25	0.25															
0.34	0.26	0.20	0.20															

14. Dados los siguientes canales:

Canal	Probabilidades a priori	Matriz del canal												
C1	{ 0.70, 0.30 }	<table border="1"> <tr><td>0.7</td><td>0.3</td></tr> <tr><td>0.4</td><td>0.6</td></tr> </table>	0.7	0.3	0.4	0.6								
0.7	0.3													
0.4	0.6													
C2	{ 0.50, 0.50 }	<table border="1"> <tr><td>0.3</td><td>0.3</td><td>0.4</td></tr> <tr><td>0.3</td><td>0.3</td><td>0.4</td></tr> </table>	0.3	0.3	0.4	0.3	0.3	0.4						
0.3	0.3	0.4												
0.3	0.3	0.4												
C3	{ 0.25, 0.50, 0.25 }	<table border="1"> <tr><td>1.0</td><td>0.0</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr> <tr><td>0.0</td><td>0.5</td><td>0.5</td><td>0.0</td></tr> <tr><td>0.0</td><td>0.0</td><td>0.0</td><td>1.0</td></tr> </table>	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0
1.0	0.0	0.0	0.0											
0.0	0.5	0.5	0.0											
0.0	0.0	0.0	1.0											
C4	{ 0.25, 0.25, 0.25, 0.25 }	<table border="1"> <tr><td>1.0</td><td>0.0</td><td>0.0</td></tr> <tr><td>0.0</td><td>1.0</td><td>0.0</td></tr> <tr><td>0.0</td><td>1.0</td><td>0.0</td></tr> <tr><td>0.0</td><td>0.0</td><td>1.0</td></tr> </table>	1.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	1.0
1.0	0.0	0.0												
0.0	1.0	0.0												
0.0	1.0	0.0												
0.0	0.0	1.0												

- a. Determinar la entropía a priori y la de la salida
- b. Obtener la equivocación o ruido y la pérdida
- c. Calcular la entropía afín a través de sus relaciones
- d. Verificar la reciprocidad de la información mutua
- e. Analizar los resultados obtenidos en cada caso

15. Implementar funciones en Python que reciban como parámetros: una lista con las probabilidades a priori y la matriz de probabilidades condicionales del canal, y calculen por definición (es decir, a partir de las probabilidades, no de sus relaciones):

- a. La equivocación o ruido
- b. La pérdida
- c. La entropía afín
- d. La información mutua

16. Para los canales de los ejercicios 13 y 14, calcular los siguientes valores y verificar sus relaciones:

- a. Entropía a priori
- b. Entropía de la salida
- c. Equivocación o ruido
- d. Pérdida
- e. Entropía afín
- f. Información mutua

Resultados:

1. $P(a) = 13/26$ $P(b) = 5/26$ $P(c) = 8/26$

	0	1
a	7/13	6/13
b	3/5	2/5
c	5/8	3/8

3. $P(0) = 0.44$ $P(1) = 0.56$

	0	1
0	0.40	0.60
1	0.26	0.74

Canal 1

$P(0) = 0.39$ $P(1) = 0.61$

	0	1	2
0	0.43	0.07	0.50
1	0.23	0.64	0.14

4. $P(0) = 0.5$ $P(1) = 0.5$

$P(ai/bj)$	0	1
0	1.0	0.0
1	0.0	1.0

$P(ai, bj)$	0	1
0	0.5	0.0
1	0.0	0.5

5. $P(0) = 0.2$ $P(1) = 0.8$

$P(ai/bj)$	0	1
0	1.0	0.0
1	0.0	1.0

$P(ai, bj)$	0	1
0	0.2	0.0
1	0.0	0.8

6. $P(1) = 0.33$ $P(2) = 0.34$ $P(3) = 0.33$

$P(ai/bj)$	1	2	3
a	0.36	0.35	0.18
b	0.27	0.18	0.45
c	0.36	0.47	0.36

$P(ai, bj)$	1	2	3
a	0.12	0.12	0.06
b	0.09	0.06	0.15
c	0.12	0.16	0.12

8. $P(0) = 0.5769$ $P(1) = 0.4231$

$P(0) = 0.3235$ $P(1) = 0.6765$

$P(0) = 0.3056$ $P(1) = 0.4167$ $P(2) = 0.2778$

$P(ai/bj)$	0	1
a	0.4667	0.5455
b	0.2000	0.1818
c	0.3333	0.2727

$P(ai, bj)$	0	1
a	0.2692	0.2308
b	0.1154	0.0769
c	0.1923	0.1154

$P(ai/bj)$	0	1
0	0.5455	0.3913
1	0.4545	0.6087

$P(ai, bj)$	0	1
0	0.1765	0.2647
1	0.1471	0.4118

$P(ai/bj)$	0	1	
0	0.5455	0.0667	0.7000
1	0.4545	0.9333	0.3000

$P(ai, bj)$	0	1	
0	0.1667	0.0278	0.1944
1	0.1389	0.3889	0.0833

10.

Canal 1

$$H(A) = 0.9710 \text{ bits}$$

$$H(A/b1) = 0.9940 \text{ bits}$$

$$H(A/b2) = 0.8631 \text{ bits}$$

Canal 2

$$H(A) = 0.8113 \text{ bits}$$

$$H(A/b1) = 0.2762 \text{ bits}$$

$$H(A/b2) = 0.9980 \text{ bits}$$

12.

$$H(A) = 1.4806 \text{ bits}$$

$$H(A/0) = 1.5058 \text{ bits}$$

$$H(A/1) = 1.4354 \text{ bits}$$

$$H(A) = 0.9900 \text{ bits}$$

$$H(A/0) = 0.9940 \text{ bits}$$

$$H(A/1) = 0.9656 \text{ bits}$$

$$H(A) = 0.9641 \text{ bits} \quad H(A/0) = 0.9940 \text{ bits} \quad H(A/1) = 0.3534 \text{ bits} \quad H(A/2) = 0.8813 \text{ bits}$$

$$H(A) = 1.5710 \text{ bits} \quad H(A/1) = 1.5726 \text{ bits} \quad H(A/2) = 1.4837 \text{ bits} \quad H(A/3) = 1.4949 \text{ bits}$$

13.

Canal 1

$$H(A) = 1.4169 \text{ bits}$$

$$H(A/b1) = 0.9998 \text{ bits}$$

$$H(A/b2) = 1.3115 \text{ bits}$$

$$H(A/b3) = 0.4104 \text{ bits}$$

Canal 2

$$H(A) = 1.5000 \text{ bits}$$

$$H(A/b1) = 1.2516 \text{ bits}$$

$$H(A/b2) = 1.00000 \text{ bits}$$

$$H(A/b3) = 0.7219 \text{ bits}$$

$$H(A/b4) = 0.9183 \text{ bits}$$

Canal 3

$$H(A) = 1.7583 \text{ bits}$$

$$H(A/b1) = 1.4621 \text{ bits}$$

$$H(A/b2) = 1.7343 \text{ bits}$$

$$H(A/b3) = 1.8585 \text{ bits}$$

$$H(A/b4) = 1.8585 \text{ bits}$$

14.

Canal 1

a. $H(A) = 0.8813 \text{ bits}$ $H(B) = 0.9648 \text{ bits}$

b. $H(A/B) = 0.8247 \text{ bits}$ $H(B/A) = 0.9082 \text{ bits}$

c. $H(A, B) = 1.7895 \text{ bits}$

d. $I(A, B) = I(B, A) = 0.0566 \text{ bits}$

Canal 2

a. $H(A) = 1.0000 \text{ bits}$ $H(B) = 1.5710 \text{ bits}$

b. $H(A/B) = 1.0000 \text{ bits}$ $H(B/A) = 1.5710 \text{ bits}$

c. $H(A, B) = 2.5710 \text{ bits}$

d. $I(A, B) = I(B, A) = 0.0000 \text{ bits}$

Canal 3

- | | | |
|----|-----------------------------------|------------------------|
| a. | $H(A) = 1.5000$ bits | $H(B) = 2.0000$ bits |
| b. | $H(A/B) = 0.0000$ bits | $H(B/A) = 0.5000$ bits |
| c. | $H(A, B) = 2.0000$ bits | |
| d. | $I(A, B) = I(B, A) = 1.5000$ bits | |

Canal 4

- | | | |
|----|-----------------------------------|------------------------|
| a. | $H(A) = 2.0000$ bits | $H(B) = 1.5000$ bits |
| b. | $H(A/B) = 0.5000$ bits | $H(B/A) = 0.0000$ bits |
| c. | $H(A, B) = 2.0000$ bits | |
| d. | $I(A, B) = I(B, A) = 1.5000$ bits | |

16.

Canal 1

- | | | |
|---------------------------|----------------------------|----------------------------|
| a. $H(A) = 1.4169$ bits | b. $H(B) = 1.4130$ bits | c. $H(A/B) = 0.9621$ bits |
| d. $H(B/A) = 0.9583$ bits | e. $H(A, B) = 2.3752$ bits | f. $I(A, B) = 0.4547$ bits |

Canal 2

- | | | |
|---------------------------|----------------------------|----------------------------|
| a. $H(A) = 1.5000$ bits | b. $H(B) = 1.8829$ bits | c. $H(A/B) = 0.9921$ bits |
| d. $H(B/A) = 1.3750$ bits | e. $H(A, B) = 2.8750$ bits | f. $I(A, B) = 0.5079$ bits |

Canal 3

- | | | |
|---------------------------|----------------------------|----------------------------|
| a. $H(A) = 1.7583$ bits | b. $H(B) = 1.9958$ bits | c. $H(A/B) = 1.7184$ bits |
| d. $H(B/A) = 1.9559$ bits | e. $H(A, B) = 3.7142$ bits | f. $I(A, B) = 0.0399$ bits |