УДК 514.113.5

НЕФЁДОВ В.Э.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ И ВЫПУКЛОГО МНОГОГРАННИКА

Проблема пересечения прямой многогранника может возникнуть при решении различных задач, связанных с 3D моделированием и геометрическим представлением, в частности в задаче нахождения конкретных конечных элементов сложной модели, через которые проходит заданная прямая либо отрезок. В докладе описан простой и относительно не требовательный к ресурсам алгоритм, позволяющий установить факт пересечения прямой и выпуклого многогранника.

The problem of intersection linear component and polyhedrons may occur while solving some geometric and 3D modeling issues, such as finding specific finite-elements in complex model intersected by definite line or segment. This article describes simple and light algorithm establishing the intersection of linear component against convex polyhedron.

Перед тем, как приступить к описанию алгоритма, необходимо вспомнить уравнения прямой и плоскости. Для удобства и возможности обобщения на n-мерное пространство мы будем использовать векторные варианты уравнений. Запишем векторно-параметрическое уравнение прямой:

$$L(t) = P + t\bar{v}, \tag{1}$$

где t – параметр;

P – точка, лежащая на прямой;

$\bar{v}$ – направляющий вектор.

Если направляющий вектор лежит на прямой, то можно записать уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$L(t) = A + t(B - A), \tag{2}$$

При ограничении $t \geq 0$ уравнение (2) определяет луч, при $0 \leq t \leq 1$ уравнение определяет отрезок.

Теперь запишем общее уравнение плоскости:

$$ax + by + cz + d = 0$$

В векторной форме:

$$\bar{n} \cdot X + d = 0, \quad (3)$$

где $\bar{n}(a, b, c)$ – нормаль;

$X(x, y, z)$ – множество точек на плоскости;

d – расстояние от плоскости до начала координат.

Прямая и плоскость, если это возможно, пересекутся в точке $Q = P + t\bar{v}$ при некотором t (рисунок 1). Подставим уравнение (1) вместо X в уравнение (3) и решим относительно t:

$$\bar{n} \cdot (P + t\bar{v}) + d = 0$$

$$\bar{n} \cdot P + \bar{n} \cdot t\bar{v} + d = 0$$

$$\bar{n} \cdot t\bar{v} = -(\bar{n} \cdot P + d)$$

$$t = \frac{-(\bar{n} \cdot P + d)}{\bar{n} \cdot \bar{v}} \quad (4)$$

Подставив t обратно в уравнение (1), можно найти точку пересечения Q.

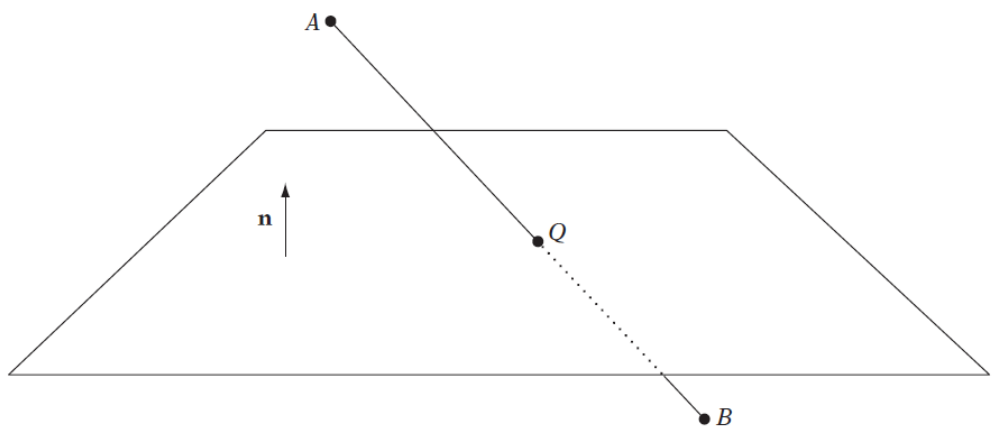

Рисунок 1 - Пересечение прямой и плоскости

Обратите внимание на знаменатель $\bar{n} \cdot \bar{v}$, который представляет собой скалярное произведение нормали и направляющего вектора. Если это значение равно нулю, то прямая и плоскость параллельны. Тогда если прямая лежит на плоскости, то получится бесконечное число пересечений, а если не лежит, то пересечений не будет.

Вернемся к проблеме пересечения прямой с выпуклым многогранником. Предположим, что мы хотим узнать, пересекает ли луч P многогранник (рисунок 2). Самым простым методом будет протестировать каждую грань многогранника на пересечение с лучом. Однако, если у нас сложная фигура, состоящая из множества граней, этот метод будет неэффективным из-за того, что необходимо проверить каждую грань, даже если она находится далеко от нашего луча, а это множество лишних вычислений.

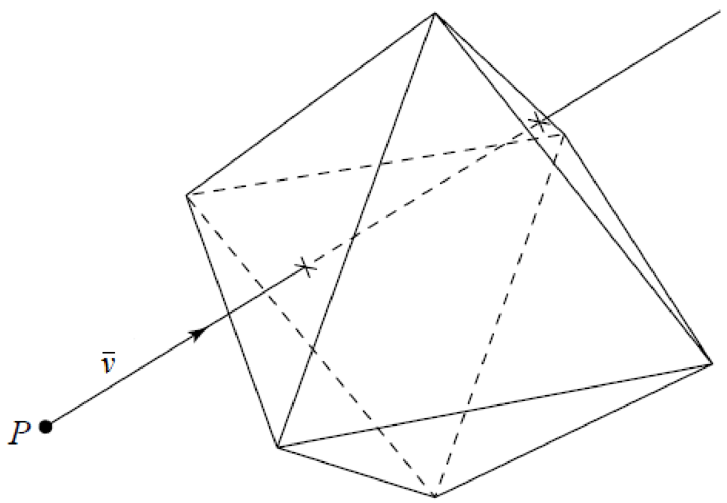

Рисунок 2 - Пересечение лучом октаэдра

Эрик Хейнс (Eric Haines) в 1991 году описал алгоритм, работающий гораздо быстрее [2]. Скорость достигается за счет того, что вместо граней используются плоскости, содержащие эти грани. Тогда расстояние от начальной точки до грани будет выражаться уравнением (4).

Если знаменатель $\bar{n} \cdot \bar{v}$ равен нулю, то прямая параллельна плоскости, в таком случае знак числителя определяет положение прямой относительно плоскости. В противном случае, знак знаменателя определяет, входит луч в переднюю либо в заднюю сторону плоскости. Чтобы понять, где находится передняя сторона, представьте, что вы смотрите сверху на горизонтальную плоскость. Вы смотрите на переднюю сторону, если вектор нормали направлен к вам, и на заднюю, если вектор нормали направлен от вас. Так, на рисунке 1 передней стороной является верхняя. Тогда, если знак знаменателя отрицателен, направляющий вектор направлен к передней стороне, а если положителен – выходит через заднюю.

Многогранник можно определить как геометрическую фигуру, получаемую множественным разрезанием пространства плоскостями. Например, куб получится, если разрезать трёхмерное пространство шестью плоскостями, включающими три пары параллельных плоскостей, каждая из которых перпендикулярна другой.

Чтобы обобщить это определение на n-мерное пространство введем понятие полупространства. В n-мерном пространстве существует гиперплоскости размерностью n-1. Каждая гиперплоскость делит пространство на две части, каждая из которых является полупространством. Для трёхмерного пространства гиперплоскостью является плоскость, которая делит его на две части, для двухмерного – прямая. [1]

Таким образом многогранник в n-мерном пространстве можно определить как логическое пересечение (конъюнкцию) множества полупространств, где каждая грань многогранника лежит в своей гиперплоскости. Если взять прямую, пересекающую многогранник, будет существовать такой участок прямой, который полностью находится внутри полупространств, определяющих многогранник. При пересечении прямой и плоскости (гиперплоскости) прямая делится на две части – внутреннюю и внешнюю. Тогда тот участок прямой, который полностью находится в многограннике является логическим пересечением всех участков, которые находятся «внутри». На рисунке 3 изображен процесс поиска участка внутри многогранника в двумерном измерении.

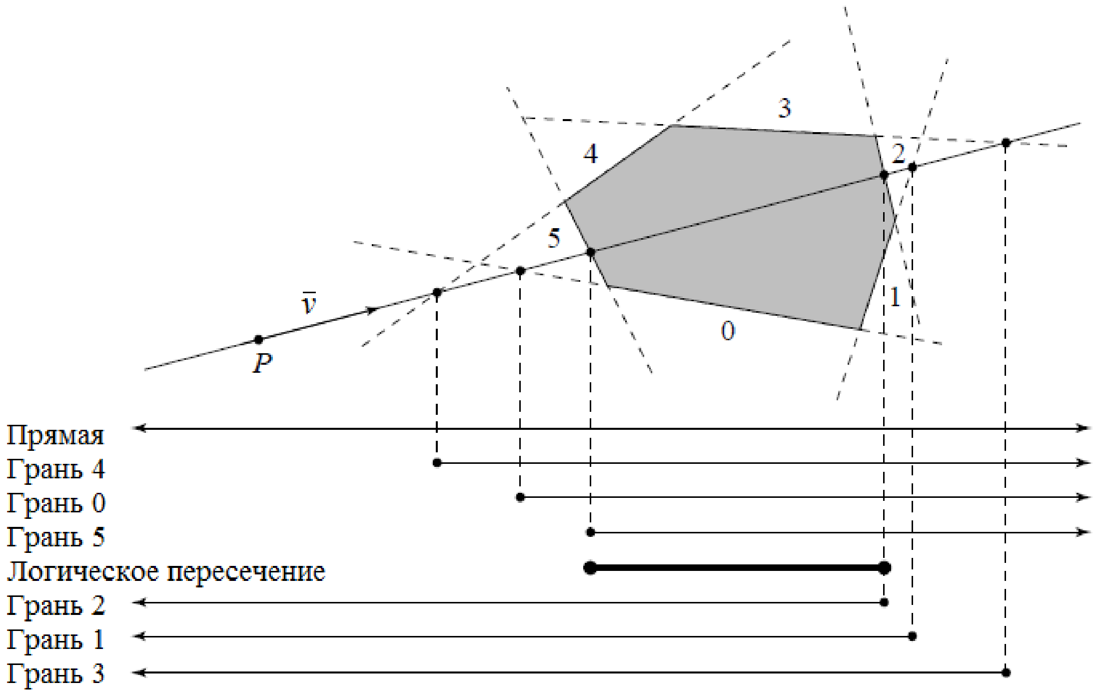

Рисунок 3 - Нахождение участка пересечения прямой и многогранника

Обратите внимание, что грани перечислены в порядке расстояния до пересечения прямой с ними. Любая прямая, пересекающая многогранник сначала пересечёт одну или несколько «передних» граней, а потом несколько «задних». Логическое пересечение будет находится между последней (дальней) «передней» и первой (ближней) «задней» гранью. Прямая не пересекает многогранник, как на рисунке 4, в случае, если прямая пересекает переднюю грань *позже*, чем заднюю.

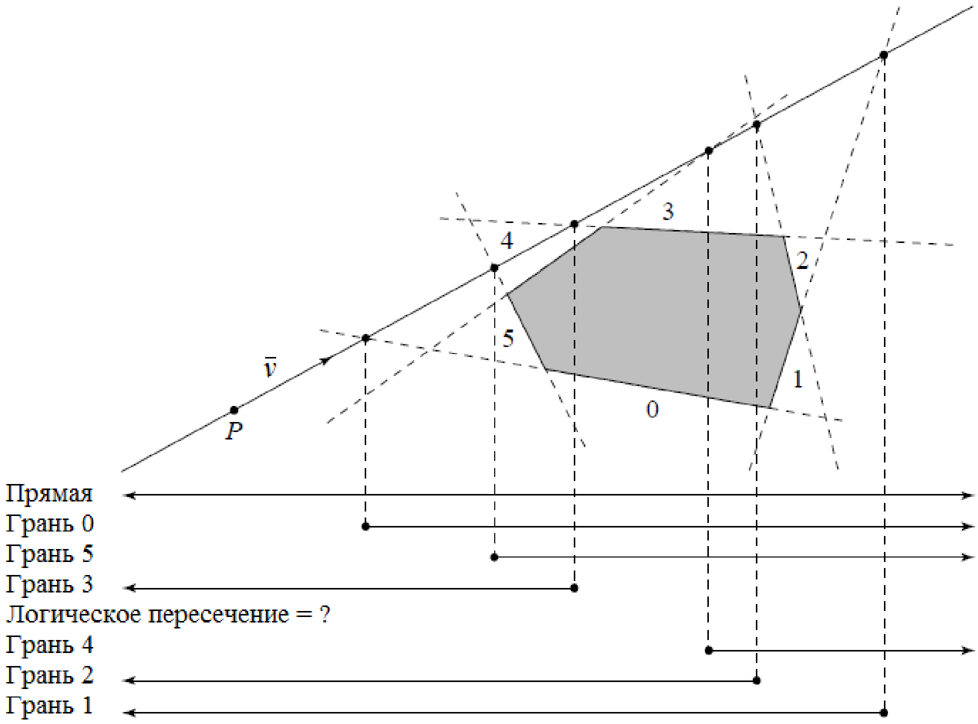

Рисунок 4 - Прямая не пересекает многогранник

Принимая во внимание всё вышесказанное можно построить простой алгоритм. В качестве входных параметров принимается массив плоскостей, содержащих грани многогранника, прямая пересечения, заданная по двум точкам с помощью формулы (2) и две точки ограничения tNear и tFar.

В цикле по плоскостям ищем числитель и знаменатель уравнения (4). Если знаменатель меньше некоего малого числа (близок к 0), то учитывая погрешность хранения в памяти чисел с плавающей точкой считаем, что знаменатель равен нулю. В таком случае проверяем знак числителя (без учета минуса перед скобками), и если знак положителен, сразу завершаем алгоритм. Если знаменатель не равен нулю, то вычисляем t по формуле (4). Если знаменатель положителен, то вектор направления выходит из задней стороны плоскости, отрезаем внешнюю часть прямой, присвоив tFar вычисленное значение t. Иначе отрезаем переднюю часть прямой, присвоив tNear значение t. Если наступит момент, когда tNear > tFar, то завершаем алгоритм с ответом «не пересекается». Если проверка пройдет через все плоскости, завершаем алгоритм с ответом «пересекается».

В общем случае изначальными значениями tNear и tFar являются минус и плюс бесконечность соответственно (для прямой). Так как бесконечность невозможно хранить в памяти, следует использовать минимальное и максимальное из возможных значений для используемого типа данных. В случае для луча и для отрезка необходимо соответственно ограничить значения t.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ericson, Christer. Real-Time Collision Detection. Morgan Kaufmann Publishers, 2005

2. Schneider P.J., Eberly D.H. Geometric Tools for Computer Graphics. Morgan Kaufmann Publishers, 2003

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Нефёдов Владимир Эдуардович
Студент
Московский Технологический Университет
Тел.: +7 (916) 617-87-94
E-mail: vacsus@gmail.com