Geometría Euclidiana
Taller: Métodos de demostración
Docente: Wilson Mutis
Mayo de 2020

0.1. Definición axiomática de los números reales

0.1.1. Axiomas algebraicos

Existe un conjunto no vacío $\mathbb{R}$ cuyos elementos se denominan números reales y que satisfacen los siguientes axiomas

Axioma (Algebraicos). *Los axiomas algebraicos dan las propiedades de la suma y la multiplicación (o producto) de números reales.*

1. ***Propiedades de clausura:*** *Para todo par de números $x, y \in \mathbb{R}$ existe un número real único que denotamos $x + y$, llamado suma de x e y, también existe un número real único que denotamos xy, llamado producto de x e y.*
2. ***Propiedades asociativas:*** *Para todo los números $x, y, z \in \mathbb{R}$ se tiene*
   a) $(x + y) + z = x + (y + z)$ b) $(xy)z = x(yz)$
3. ***Propiedades conmutativas:*** *Para todo par de números $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene*
   a) $x + y = y + x$ b) $xy = yx$
4. ***Propiedades de identidad:***
   a) *Existe un número real 0, llamado cero, tal que $0 + x = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*
   b) *Existe un número real 1, llamado uno, tal que $1x = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*
5. ***Propiedades de inversos:***
   a) *Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = 0$.*
   b) *Para cada $x \in \mathbb{R}$, con $x \neq 0$, existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que $xy = 1$.*
6. ***Propiedad distributiva:*** *Para todo los números $x, y, z \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$x(y + z) = xy + xz$$

Teorema 1. *Los números cero y uno, de las propiedades de identidad, son únicos.*

Prueba: Hagamos la prueba por contradicción para el cero, la prueba para la unicidad del número uno es similar y queda como ejercicio. El teorema para el número cero lo podemos escribir así

$$\textit{Si } 0+x=x \textit{ para toda } x\in\mathbb{R}, \textit{ entonces } 0 \textit{ es único.}$$

No	Afirmaciones	Justificación
(1)	$\forall x\in\mathbb{R}, 0+x=x$	Hipótesis
(2)	El número 0 no es único	Negación de la tesis
(3)	$\exists\theta\in\mathbb{R}, \theta\neq 0,$ tal que $\forall x\in\mathbb{R}, \theta+x=x$	Interpretación de (2)
(4)	$0+\theta=\theta$	Por (1), tomando $x=\theta$
(5)	$\theta+0=0$	Por (3), tomando $x=0$
(6)	$0+\theta=\theta+0$	Propiedad conmutativa
(7)	$\theta=0$	sustituyendo (4) y (5) en (6)
(8)	$(\theta\neq 0)\wedge(\theta=0)$	Por (3) y (7) $(\rightarrow\leftarrow)$

Teorema 2. *Si* $x\in\mathbb{R}$ *entonces existe un único* $y\in\mathbb{R}$ *tal que* $x+y=0$.

Prueba: Por las propiedades de inversos ya se garantiza la existencia de un número $y\in\mathbb{R}$ tal que $x+y=0$. Demostremos la unicidad por contradicción, es decir, vamos a probar el siguiente teorema

$$\textit{Si } x\in\mathbb{R} \textit{ e } y \textit{ es un número real tal que } x+y=0, \textit{ entonces } y \textit{ es único.}$$

No	Afirmaciones	Justificación
(1)	$x \in \mathbb{R}$ e y es un número real talque $x + y = 0$	Hipótesis
(2)	El número y no es único	Negación de la tesis
(3)	$\exists z \in \mathbb{R}, z \neq y,$ tal que $x + z = 0$	Interpretación de (2)
(4)	$y = 0 + y$	Propiedad de identidad para la suma
(5)	$y = (x + z) + y$	Sustituyendo (3) en (4)
(6)	$y = z + (x + y)$	Propiedad conmutativa y asociativa
(7)	$y = z + 0$	sustituyendo (1) en (6)
(8)	$y = z$	Conmutativa e identidad para la suma
(9)	$(y \neq z) \wedge (y = z)$	Por (3) y (8) $(\rightarrow\leftarrow)$

Observación. Por el teorema anterior, para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un único $y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = 0$. Debido a la unicidad de este número real, de aquí en adelante, lo denotaremos $-x$ y lo llamaremos inverso aditivo de x, es decir, $-x$ es el único número real tal que

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

Además, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ utilizaremos la siguiente notación

$$x - y = x + (-y)$$

es decir, el número real $x - y$ denota la suma de x con el inverso aditivo de y.

Teorema 3. *Si $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$, entonces existe un único $y \in \mathbb{R}$ tal que $xy = 1$.*

Prueba: Por las propiedades de inversos ya se garantiza la existencia de un número $y \in \mathbb{R}$ tal que $xy = 1$. La demostración se hace de forma similar a la prueba del teorema anterior y se deja como ejercicio. Es decir, deben probar el siguiente teorema

Si $x \in \mathbb{R}$ e y es un número real tal que $xy = 1$, entonces y es único.

Observación. Por el teorema anterior, para cada $x \in \mathbb{R}$, con $x \neq 0$ existe un único $y \in \mathbb{R}$ tal que $xy = 1$. Debido a la unicidad de este número real, de aquí en adelante, lo denotaremos $\frac{1}{x}$ (o x^{-1}) y lo llamaremos inverso (o recíproco) de x, es decir, $\frac{1}{x}$ es el único número real tal que

$$x\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)x = 1.$$

Además, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, con $y \neq 0$, utilizaremos la siguiente notación

$$\frac{x}{y} = x\left(\frac{1}{x}\right)$$

es decir, el número real $\frac{x}{y}$ denota el producto de x con el recíproco de y.

Teorema 4. *Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Si $x \neq y$, entonces $-x \neq -y$*

Prueba: Por contrarecíproco

No	Afirmaciones	Justificación
(1)	$-x = -y$	Negación de la tesis
(2)	$x + (-x) = 0$ $y + (-y) = 0$	Inverso aditivo
(3)	$x = 0 + x$	Propiedad de identidad de la suma
(4)	$x = (y + (-y)) + x$	Sustituyendo (2) en (3)
(5)	$x = y + ((-y) + x)$	Propiedad asociativa
(6)	$x = y + ((-x) + x)$	Sustituyendo (1) en (5)
(7)	$x = y + 0$	Sustituyendo (2) en (6)
(8)	$x = y$	Propiedad de identidad de la suma Negación de la hipótesis

Teorema 5. *Sean x e y dos números reales diferentes de cero. Si $x \neq y$, entonces $\frac{1}{x} \neq \frac{1}{y}$*

Prueba: Por contrarecíproco y se deja como ejercicio.

Ejercicios

Probar los siguientes teoremas

1. **Propiedade cancelativa de la suma:**

$$\text{Si } x, y, z \in \mathbb{R} \text{ y } x + z = y + z, \text{ entonces } x = y.$$

2. **Propiedade cancelativa del producto:**

$$\text{Si } x, y, z \in \mathbb{R},\ z \neq 0 \text{ y } xz = yz, \text{ entonces } x = y.$$

3. Para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene $0x = 0$.

4. Para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene $-(-x) = x$.

5. Para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene $(-1)x = -x$.

6. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene $-(xy) = (-x)y = x(-y)$.

0.1.2. Axiomas de orden

Axioma (Axiomas para la relación de orden). *Existe un subconjunto de $\mathbb{R}$ denominado conjunto de los reales positivos y denotado $\mathbb{R}^+$ que satisface los siguentes axiomas*

1. $0 \notin \mathbb{R}^+$

2. Para todo $x \in \mathbb{R}$, con $x \neq 0$, se tiene $x \in \mathbb{R}^+$ o $-x \in \mathbb{R}^+$ pero no ambos.

3. Para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$ se tiene $x + y \in \mathbb{R}^+$, también, $xy \in \mathbb{R}^+$

Definición (Orden en $\mathbb{R}$). *Sean x e y dos números reales distintos. Decimos que x es menor que y si $y - x \in \mathbb{R}^+$. Con $x < y$ (o $y > x$) denotamos que x es menor que y, además, con $x \leq y$ (o $y \geq x$) denotaremos que $x < y$ o $x = y$. Es decir,*

$$x \leq y \equiv (x < y) \vee (x = y) \equiv (y - x \in \mathbb{R}^+) \vee (x = y)$$

Observación. Por la definición anterior, para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene $x \leq x$.

Teorema 6. *Si $x \in \mathbb{R}$, entonces la proposición $x < x$ es falsa.*

Prueba: Por contradicción

No	Afirmaciones	Justificación
(1)	$x \in \mathbb{R}$	Hipótesis
(2)	La proposición $x < x$ es verdadera	Negación de la tesis

No	Afirmaciones	Justificación
(3)	$x - x \in \mathbb{R}^+$	Definición de orden en $\mathbb{R}$
(4)	$0 \in \mathbb{R}^+$	Inverso aditivo en (3)
(5)	$0 \notin \mathbb{R}^+$	Axioma de orden en $\mathbb{R}$
(6)	$(0 \in \mathbb{R}^+) \wedge (0 \notin \mathbb{R}^+)$	Afirmaciones (4) y (5) $(\rightarrow\leftarrow)$

Teorema 7 (Ley de tricotomia). *Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces una y sólo una de las siguientes afirmaciones es verdadera*

$$(1)\ x = y \qquad (2)\ x < y \qquad (3)\ y < x$$

Prueba: Por método directo

No	Afirmaciones	Justificación
(1)	$x, y \in \mathbb{R}$	Hipótesis
(2)	**Caso 1:** $x = y$	Primera opción
(3)	$x < x$ es falsa	Teorema 4
(4)	$x < y$ es falsa	Sustituyendo (2) en (3)
(5)	$y < x$ es falsa	Sustituyendo (2) en (3)
(6)	**Caso 2:** $x \neq y$	Opción restante
(7)	$-x \neq -y$	Teorema 4
(8)	$-x = -y$ es falsa	Negación de (7)
(8)	$x = y$ es falsa	Primera lista de ejercicios
(9)	$x < y$ es o bien verdadera o bien falsa	valor de verdad de una proposición

No	Afirmaciones	Justificación
(10)	**Caso 2.1:** $x < y$ es verdadera	Primera opción
(11)	$y - x \in \mathbb{R}^+$	Definición de orden en $\mathbb{R}$
(12)	$-(y - x) \notin \mathbb{R}^+$	Axioma 2 de orden en $\mathbb{R}$
(13)	$-y - (-x) \notin \mathbb{R}^+$	Propiedad distributiva y lista de ejercicios
(14)	$-(-x) - y \notin \mathbb{R}^+$	Propiedad conmutativa
(15)	$x - y \notin \mathbb{R}^+$	Lista de ejercicios
(16)	$\sim (x - y \in \mathbb{R}^+)$	Equivalencia lógica
(17)	$\sim (y < x)$	Definición de orden en $\mathbb{R}$
(18)	$y < x$ es falsa	Negación de (17)
(19)	**Caso 2.2:** $x < y$ es falsa	Opción restante
(20)	$y - x \in \mathbb{R}^+$ es falsa	Definición de orden en $\mathbb{R}$
(21)	$\sim (y - x \in \mathbb{R}^+)$ es verdadera	Negación de (20)
(22)	$y - x \notin \mathbb{R}^+$ es verdadera	Equivalencia lógica
(23)	$-(y - x) \in \mathbb{R}^+$ es verdadera	Axioma 2 de orden en $\mathbb{R}$
(24)	$x - y \in \mathbb{R}^+$ es verdadera	Afirmación (13), (14), (15)
(25)	$y < x$ es verdadera	Definición de orden en $\mathbb{R}$

Ejercicios

Probar los siguientes teoremas

1. Si $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x = y$.
2. Si $x < y$ e $y < z$, entonces $x < z$.
3. Si $x \in \mathbb{R}^+$ e $y \notin \mathbb{R}^+$, entonces $xy \notin \mathbb{R}^+$.
4. Si $x, y \notin \mathbb{R}^+$, entonces $xy \in \mathbb{R}^+$.
5. Si $w, x, y, z \in \mathbb{R}$, $w < x$ e $y < z$, entonces $w + y < x + z$.
6. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ y $x < y$, entonces $x + z < y + z$.
7. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ y $x + z < y + z$, entonces $x < y$
8. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Si $x < y$ y $z \in \mathbb{R}^+$, entonces $xz < yz$
9. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Si $x < y$ y $z \notin \mathbb{R}^+$, entonces $yz < xz$
10. Si $x \neq 0$ y $x \in \mathbb{R}^+$, entonces $\dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}^+$.
11. Si $x \neq 0$ y $x \notin \mathbb{R}^+$, entonces $\dfrac{1}{x} \notin \mathbb{R}^+$.
12. Si $0 < x < y$, entonces $0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$.