Geometría Euclidiana
Taller 1: Axiomas de incidencia y orden
Docente: Wilson Mutis
Mayo de 2020

Elementos básicos de Geometría Euclidiana

Figuras convexas

Teorema 1. *La intersección no vacía de dos figuras convexas es una figura convexa.*

Este teorema se escribe en la siguiente forma equivalente

Si F y G son figuras convexas y $F \cap G \neq \emptyset$, entonces $F \cap G$ es convexa.

La prueba se hará por método directo

No	Afirmaciones	Justificación
(1)	F y G son figuras convexas y $F \cap G \neq \emptyset$	Hipótesis
(2)	Sean $A, B \in F \cap G$	Elección
(3)	$A, B \in F$ y $A, B \in G$	Definición de intersección
(4)	$\overline{AB} \subset F$ y $\overline{AB} \subset G$	Definición de figura convexa
(5)	$\overline{AB} \subset F \cap G$	Afirmación (4)
(6)	$F \cap G$ es una figura convexa	Afirmación (2) y (5)

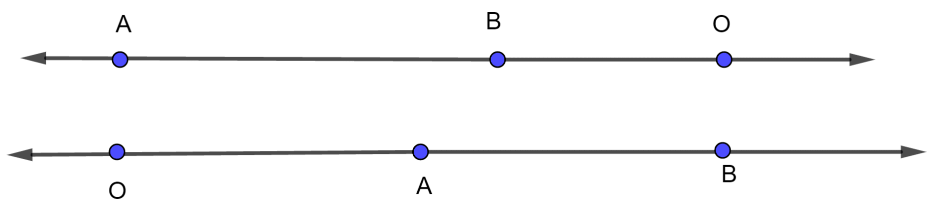
Observación 1. La unión de dos figuras convexas no necesariamente es convexa, por ejemplo, considere dos puntos distintos A y B. Los segmentos nulos $\{A\}$ y $\{B\}$ son convexos y su unión es la figura $\{A, B\}$ que no es convexa porque $\overline{AB} \not\subset \{A, B\}$.

Definición 1 (Posición con respecto a un punto). *Sean A, B y O tres puntos colineales. Diremos que los puntos A y B están en lados contrarios con respecto al punto O cuando $A - O - B$, en caso contrario diremos que los puntos A y B están del mismo lado con respecto al punto O.*

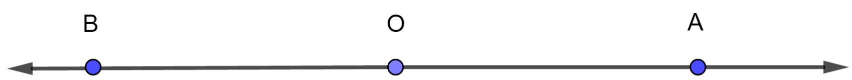
Axioma de separación de la recta

Axioma (Axioma 11). *Un punto cualesquiera O de una recta $\mathfrak{l}$ divide a ésta en dos subconjuntos no vacíos, de modo que dos puntos cualesquiera de $\mathfrak{l}$ pertenecen al mismo subconjunto cuando están del mismo lado con respecto al punto O, mientras que dos puntos de $\mathfrak{l}$ pertenecen a subconjuntos distintos cuando se encuentran en lados contrarios con respecto al punto O.*

A y B están del mismo lado con respecto al punto O



A y B están en lados contrarios con respecto al punto O



Nota 1. *Cada uno de los subconjuntos en los que el punto O divide a la recta $\mathfrak{l}$ se denomina semirrecta o rayo.*

Definición 2 (Semirrecta o rayo). *Sea $\mathfrak{l}$ una recta y sean O y A dos puntos de $\mathfrak{l}$. La semirrecta (o rayo) de origen O que pasa por A es el subconjunto de $\mathfrak{l}$ cuyos elementos son el punto A junto con todos los puntos de $\mathfrak{l}$ que estan del mismo lado de A con respecto al origen O. La simirecta de origen O que pasa por A se denota con $\overrightarrow{OA}$, es decir*

$$\overrightarrow{OA} = \{A\} \cup \{X \in \mathfrak{l} : O - X - A\} \cup \{X \in \mathfrak{l} : O - A - X\}$$

Observación 2. Sean A, B y O tres puntos colineales. Si A y B están en el mismo lado con respecto al punto O, por el axioma de separación de la recta, se tiene $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$.

Teorema 2. *Sean A, B y O tres puntos de la recta $\mathfrak{l}$. Si A y B están en lados contrarios con respecto al punto O, entonce*

$$\mathfrak{l} = \{O\} \cup \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$$

Prueba: Para mostrar esta igualdad de conjuntos se deben justificar las dos contenencias siguientes:

1. $\{O\} \cup \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB} \subset \mathfrak{l}$. Esta contenencia es inmediata por la definición de semirrecta.
2. $\mathfrak{l} \subset \{O\} \cup \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$. Esta contenencia se justifica con el axioma de separación de la recta y se deja como ejercicio.

Ejercicios 1

1. Sean A, B, C y D cuatro puntos tales que $A - B - C - D$. Responda y justifique las siguientes preguntas

   a) Son $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CD}$ rayos opuestos?[1]

   b) $C \in \overrightarrow{BA}$?

   c) Qué es $\overrightarrow{CA} \cap \overrightarrow{BD}$?

   d) Qué es $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BD}$?

   e) Es $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$ un conjunto convexo?

   f) Es $\overline{BA} \cup \overrightarrow{BC}$ un conjunto convexo?

2. Sean R y S dos puntos distintos, determine el valos de verdad de las siguientes proposiciones

   a) $\exists X, \overline{RS} - \overrightarrow{RS} = \{X\}$.

   b) $\forall X, (R - X - S) \longrightarrow \left(\overrightarrow{XR} \cap \overrightarrow{XS} = \emptyset\right)$.

   c) $\forall X, \left(X \in \overleftrightarrow{RS}\right) \longrightarrow \left(\{X\} \cap \overrightarrow{XS} = \emptyset\right)$.

   d) $\forall X, \left(X \in \overleftrightarrow{RS}\right) \longrightarrow \left(\overleftrightarrow{RS} = \{X\} \cup \overrightarrow{XR} \cup \overrightarrow{XS}\right)$.

   e) $\exists X, \left(X \in \overleftrightarrow{RS}\right) \wedge \left(\overleftrightarrow{RS} = \{X\} \cup \overrightarrow{XR} \cup \overrightarrow{XS}\right)$.

3. Demuestre los siguientes teoremas

   a) Toda semirrecta es una figura convexa.

   b) Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$son dos rayos no opuestos, entonces existe un único plano que los contiene.

   c) Sean A, B y C tres puntos distintos. Si $\overline{AC} \cup \overrightarrow{CB}$ es convexo, entonces los tres puntos son colineales.

   d) Sean A, B y C tres puntos distintos. Si $\overline{AC} \cup \overrightarrow{CB}$ no es convexo, entonces los tres puntos son no colineales.

[1] Si los puntos A y B están en lados contrarios con respecto al punto O, las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ se denominan rayos opuestos.