Geometría Euclidiana
Taller 1: Razonamientos válidos
Docente: Wilson Mutis
Marzo de 2020

Conceptos Básicos de Lógica Proposicional

Para resolver los ejercicios de este taller recuerde lo siguiente:

Definición 1 (**Proposiciones lógicamente equivalentes:**). *Se dice dos proposiciones P y Q son lógicamente equivalentes si el bicondicional $P \leftrightarrow Q$ es una tautología. Esto se expresa escribiendo $P \equiv Q$.*

Por ejemplo $p \equiv \sim (\sim p)$ y $(p \to q) \equiv (\sim p \vee q)$ porque las tablas de verdad de los respectivos bicondicionales son tautologías como se muestra a continuación

p	$\sim p$	$\sim (\sim p)$	$p \leftrightarrow \sim (\sim p)$
V	F	V	V
F	V	F	V

p	q	$p \to q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$(p \to q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

A continuación se da la lista de las equivalencias lógicas más utilizadas y se recomienda al estudiante que compruebe estas equivalencias.

1. **Identidad:** $p \equiv p$.

2. **Idempotencia:** $p \wedge p \equiv p$.

3. **Doble negación:** $p \equiv \sim (\sim p)$.

4. **Leyes conmutativas:**

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

5. **Leyes asociativas:**

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

6. **Leyes de De Morgan:**

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

7. **Leyes distributivas:**

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

8. **Equivalencias de la implicación:**
   Contrarecíproco: $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$
   Negación - disjunción: $p \to q \equiv \sim p \vee q$.

9. **Equivalencias del bicondicional:**
   Negación de la equivalencia: $(p \leftrightarrow q) \equiv (\sim p \leftrightarrow \sim q)$
   Implicación - conjunción: $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$.

Razonamientos válidos

Definición 2 (**Consecuencia lógica y razonamiento válido:**)**.** *Se dice que una proposición q es una consecuencia lógica de las proposiciones $p_1, \dots, p_n$ si la implicación $(p_1 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q$ es una tautología. En este caso también decimos que $(p_1 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q$ es un razonamiento válido, las proposiciones $p_1, \dots, p_n$ se denominan premisas y la proposición q se llama conclusión.*

Observación 1. Para verificar que la implicación $(p_1 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q$ es una tautología es suficiente considerar que las premisas son verdaderas y de ahí obtener que la conclusión es verdadera porque en los casos que alguna de las premisas sea falsa, el antecedente $p_1 \wedge \cdots \wedge p_n$ será falso y la implicación $(p_1 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q$ es verdadera.

La forma de verificar que un razonamiento es válido, mencionada en la observación anterior, se aplica en razonamientos simples (con pocas premisas) como las reglas de inferencia, sin embargo no es la forma adecuada para justificar que un razonamiento es válido cuando dicho razonamiento tiene muchas premisas, en estos casos utilizamos las reglas de inferencia como se ilustra en el siguiente ejemplo

Ejemplo 1. Justificar que el siguente razonamiento es válido

$$\begin{array}{cc}
(1) & s \\
(2) & (s \wedge p) \to r \\
(3) & t \to \sim r \\
(4) & p \\
\hline
\therefore & \sim t
\end{array}$$

Solución: Observe que podemos utilizar la regla de adjunción con las premisas (1) y (4), esto lo expresaremos así

$$\begin{array}{c} s \\ p \\ \hline \therefore \quad s \wedge p \quad \textbf{(Adj)} \end{array}$$

Ahora, $s \wedge p$ es el antecedente de la premisa (2), entonces podemos usar la regla del modus Ponens, así

$$\begin{array}{c} (s \wedge p) \rightarrow r \\ s \wedge p \\ \hline \therefore \quad r \quad \textbf{(MP)} \end{array}$$

Pero $r \equiv \sim (\sim r)$, es decir, tenemos la negación del consecuente de la premisa (3) y podemos utilizar la regla del Modus Tollens, así

$$\begin{array}{c} t \rightarrow \sim r \\ \sim (\sim r) \\ \hline \therefore \quad \sim t \quad \textbf{(MT)} \end{array}$$

De esta forma hemos justificado que el razonamiento es válido. Observe que en la solución se usó la equivalencia lógica $r \equiv \sim (\sim r)$, pero podríamos haber utilizado la equivalencia lógica $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$, de la siguiente forma

$$t \rightarrow \sim r \equiv \sim (\sim r) \rightarrow \sim t \equiv r \rightarrow \sim t$$

es decir, la premisa (3) es lógicamente equivalente a $r \rightarrow \sim t$ y de la regla Modus Ponens tenemos

$$\begin{array}{c} r \rightarrow \sim t \\ r \\ \hline \therefore \quad \sim t \quad \textbf{(MP)} \end{array}$$

Esto nos muestra que en el proceso de justificar que un razonamiento es válido, además de las reglas de inferencia, debemos utilizar las equivalencias lógicas que estudiamos en clases anteriores.

Razonamientos no válidos

Un razonamiento es no válido si existe una combinación de valores de verdad de las proposiciones atómicas para la cual todas las premisas son verdaderas y la conclusión es falsa. En los ejemplos siguientes se presentan razonamientos no válidos

1. *Si llueve, entonces iré al cine. No llueve. Luego, no iré al cine.*
   Consideremos las proposiciones atómicas

$$p : \textit{Llueve}, \quad q : \textit{Iré al cine}$$

Podemos escribir este razonamiento de la forma siguiente

$$\begin{array}{cc} (1) & p \to q \\ (2) & \sim p \\ \hline \therefore & \sim q \end{array}$$

Tomando los la combinación de valores de verdad $p = F$ y $q = V$ las premisa $p \to q$ y $\sim p$ son ambas verdadesra pero la conclusión $\sim q$ es falsa. Así el razonamiento es no válido.

2. *Para que el candidato llegue a la presidencia es suficiente que él gane las elecciones en el departamento. Él ganará las elecciones en el departamento si defiende los derechos civiles. El candidato no defiende los derechos civiles. Por tanto, el candidato no llegará a la presidencia.*
   Consideremos las proposiciones atómicas

$$p : \textit{El candidato llega a la presidencia}$$

$$q : \textit{El candidato gana las elecciones en el departamento}$$

$$r : \textit{El candidato defiende los derechos civiles}$$

   Podemos escribir este razonamiento de la forma siguiente

$$\begin{array}{cc} (1) & q \to p \\ (2) & r \to q \\ (2) & \sim r \\ \hline \therefore & \sim p \end{array}$$

   Tomando los la combinación de valores de verdad $p = V$, $q = V$ y $r = F$ las premisa $q \to p$, $r \to q$ y $\sim r$ son todas verdadesra pero la conclusión $\sim p$ es falsa. Así el razonamiento es no válido.

3. El razonamiento

$$\begin{array}{cc} (1) & \sim s \\ (2) & (s \wedge p) \to r \\ (3) & t \to \sim r \\ (4) & p \\ \hline \therefore & \sim t \end{array}$$

   No es válido porque tomando la combinación $s = F$, $p = V$, $r = F$ y $t = V$, todas las premisas son verdaderas pero la conclusión $\sim t$ es falsa.

Ejercicios

1. En cada uno de los problemas siguientes, tradúzcase a la forma simbólica y empleando las reglas de inferencia y las equivalencias lógicas, establézcase para cada argumento si es o no válido. Intente inicialmente analizar el razonamiento sin recurrir a la representación simbólica.

   a) Si llueve, entonces iré al cine. No llueve. Luego, iré al cine.

   b) Si voy al colegio pasaré por la biblioteca. Si paso por la biblioteca consultaré el diccionario de sinónimos. Voy al colegio; luego, consulté el diccionario de sinónimos.

   c) Para que valga la pena tomarlo, es suficiente que sea un excelente curso. O las calificaciones son justas o no vale la pena tomar el curso. Las calificaciones no son justas. Luego, no es un excelente curso.

   d) Si los precios son bajos, entonces los salarios son bajos. Los precios son bajos o no hay control de precios. Si no hay control de precios, entonces hay inflación. No hay inflación; por tanto los salarios son bajos.

   e) La lógica es fácil o les gusta a los estudiantes. Si las matemáticas son difíciles entonces la lógica no es fácil. Por tanto, si a los estudiantes no les gusta la lógica, las matemáticas no son difíciles.

   f) Hoy me quedo en casa siempre que no me haga cortar el cabello me quedaré en casa. Hoy fuí al cine. Por tanto, hice cortar mi cabello.

   g) Si trabajo, entonces no estudio. Estudio o repruebo el curso de matemáticas. Aprobé el curso de matemáticas; luego, trabajo.

   h) Carlos aprobó el examen de matemáticas y ocupó el primer puesto en biología. Si Felipe no aprobó el examen de matemáticas entonces Carlos no ocupó el primer puesto en biología. Si Felipe aprobó el examen de matemáticas entonces aprobó el año. Luego: Carlos aprobó el examen de matemáticas y Felipe aprobó el año.

   i) Si deportivo Pasto ganó el campeonato, entonces Junior fue el segundo o América fue el segundo. Si Junior fue el segundo, entonces deportivo Pasto no ganó el campeonato. Si Tolima fue el segundo, entonces América no fue el segundo. deportivo Pasto ganó el campeonato. Luego Tolima no fue el segundo.

2. Utilizando las reglas de inferencia y las equivalencias lógicas que sean necesarias, justificar que los razonamientos siguientes son válidos

$a)$

$$\begin{array}{cc} (1) & r \to s \\ (2) & p \vee q \\ (3) & p \\ (4) & (p \vee q) \to r \\ \hline \therefore & s \wedge p \end{array}$$

$b)$

$$\begin{array}{cc} (1) & s \\ (2) & (s \wedge p) \to r \\ (3) & t \to \sim r \\ (4) & p \\ \hline \therefore & \sim t \end{array}$$

$c)$

$$\begin{array}{cc} (1) & \sim p \to \sim q \\ (2) & r \to q \\ (3) & \sim p \\ \hline \therefore & \sim r \end{array}$$

$d)$

$$\begin{array}{cc} (1) & r \vee q \\ (2) & p \to q \\ (3) & (q \vee w) \to s \\ (4) & p \vee \sim r \\ \hline \therefore & s \end{array}$$

$e)$

$$\begin{array}{cc} (1) & (p \to \sim q) \to (\sim r \to s) \\ (2) & q \to s \\ (3) & p \to \sim s \\ \hline \therefore & s \vee r \end{array}$$

$f)$

$$\begin{array}{cc} (1) & r \to p \\ (2) & p \to w \\ (3) & t \wedge r \\ (4) & s \to \sim w \\ (5) & \sim s \to q \\ \hline \therefore & t \wedge q \end{array}$$

$g)$

$$\begin{array}{cc} (1) & h \to \sim t \\ (2) & p \to (r \vee s) \\ (3) & \sim s \wedge p \\ (4) & r \to (\sim q \to t) \\ (5) & \sim h \to k \\ (6) & q \to \sim p \\ \hline \therefore & k \vee w \end{array}$$