SUBÁLGEBRAS DE MISHCHENKO-FOMENKO EN $sl(4)$

BRAYAN STIVEN FLÓREZ BURBANO
NEYER FARLEY GAVIRIA GARCÉS

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
SAN JUAN DE PASTO
2019

SUBÁLGEBRAS DE MISHCHENKO-FOMENKO EN $sl(4)$

BRAYAN STIVEN FLÓREZ BURBANO
NEYER FARLEY GAVIRIA GARCÉS

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Asesor
Wilson Fernando Mutis Cantero
Doctor en Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
SAN JUAN DE PASTO
2019

Nota de Responsabilidad

Todas las ideas y conclusiones aportadas en el siguiente trabajo son responsabilidad exclusiva de los autores.

Artículo 1^{ro} del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1996 emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de Aceptación

Wilson Fernando Mutis
Presidente de Tesis

Germán Benitez Monsalve
Jurado

Luis Enrique Ramirez
Jurado

Este trabajo está dedicado a:

...

Brayan.

Este trabajo está dedicado a:

...

Neyer.

Agradecimientos

Al término de este trabajo de grado debo agradecer a todos aquellos profesionales que guiaron mi trayectoria universitaria, en especial a mi asesor, Wilson Fernando Mutis, quien demostró ser un gran profesor y un gran ser humano por la menara como motivó y trabajó más de lo normal para poder lograr este objetivo. A mi familia, por ser la motivación e inspiración, por siempre creer en mi, porque a pesar de los momentos difíciles, nunca dejaron de insistir en verme como un profesional. A mis compañeros y amigos de la carrera en donde debo resaltar a Johana y Edwin, quienes se convirtieron en personas indispensables en todo este tiempo. Por último, pero no por eso menos importante, a Jeniffer, que de una manera u otra, me exigió para ser de mi una mejor persona.

Yamith Fernando Aguanary Gallardo

Universidad de Nariño
Diciembre 2018.

Le agradezco a Dios por permitirme terminar esta etapa de mi vida y haber alcanzado este triunfo. Le doy gracias a mis padres Miltón y Yolanda por ser los principales promotores de mis sueños, por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación en el transcurso de mi vida, por los valores que me han enseñado y el gran apoyo que he tenido en cada momento. A mis hermanos por ser parte importante en mi vida, por ayudarme cuando más lo he necesitado y a todos los profesores por sus consejos y conocimientos, en especial quiero agradecer al Dr. Wilson Mutis por aceptarnos para realizar este trabajo, el trato recibido, por su parte la paciencia y comprensión mostrados en todo momento, gracias por su amistad que nos permitió aprender mucho más que lo estudiado en el proyecto.
Quiero agradecer a todos mis compañeros, en especial a Yamith no solo por ser mi compañero de tesis sino por su gran amistad. A mi novia Johana Jackeline, por ser una de persona más importantes en mi vida, por estar conmigo en las buenas y en las malas, por sus valores aprendidos, sobre todo por ser parte de mi vida y todo su amor, y por último gracias a todas las personas que a lo largo de mi carrera han estado ahí, porque de una u otra manera me ayudaron a poder cumplir esta meta. A todos ellos muchas gracias..

Edwin Hernán Bolaños

Universidad de Nariño
Diciembre 2018.

Resumen

Un tema de mucha importancia dentro de la teoría de las álgebras de Lie es el estudio de los módulos sobre un álgebra de Lie. En el caso de el álgebra de Lie gl_n se conocen unas subálgebras conmutativas denominadas subálgebras de Mishchenko-Fomenko y además un resultado importante en esta teoría garantiza que un módulo irreducible sobre estas subálgebras es también irreducible sobre su envolvente universal si la suálgebra de Mishchenko-Fomenko es generada por una secuencia regular. En este documento empleando conceptos de geometría algebraica, como lo son las variedades algebraicas, se presentan la prueba de tres teoremas que permiten garantizar que las subálgebras de Mishchenko-Fomenko en gl_2 , gl_3 y en algunos casos de gl_4 son generadas por una secuencia regular sobre anillo de polinomios con 4, 9 y 16 variables, respectivamente.

Palabras Clave: Álgebra de Lie, Variedad, Módulo, Secuencia Regular.

Abstract

A topic of great importance within the theory of Lie algebras is the study of modules on a Lie algebra. In the case of Lie gl_n algebra, some commutative subalgebras known as Mishchenko-Fomenko subalgebras are known and also an important result in this theory guarantees that an irreducible module on these subalgebras is also irreducible on its universal envelope if the Mishchenko-Fomenko subalgebra It is generated by a regular sequence. In this document using concepts of algebraic geometry, such as algebraic varieties, we present the proof of three theorems that allow us to guarantee that Mishchenko-Fomenko subalgebras in gl_2, gl_3 and in some cases of gl_4 is generated by a regular sequence on polynomial ring with 4, 9 and 16 variables, respectively.

Keywords: Lie Algebra, Variety, Module, Regular Sequence.

Índice general

Introducción

En el año de 1873, Sophus Lie dio inicio a las ideas que conformaron, la hoy denominada teoría de Lie. Esta teoría abarca una gran cantidad de contenidos, algunos propios de la matemática y otros que se relacionan con diferentes ramas de la ciencia contemporánea. El estudio de los módulos sobre una álgebra de Lie es el problema más importante de esta teoría y un posible camino de solución a esta problemática es estudiar subálgebras conmutativas de la álgebra envolvente universal de la álgebra de Lie. En este sentido, para la álgebra de Lie gl_n por el teorema de Futorny-Molev [2], se conoce que existe una colección de subálgebras conmutativas de la álgebra $U(gl_n)$ denominadas subálgebras de Mishchenko-Fomenko y denotadas con $\overline{\mathcal{A}_\mu}$, y por el teorema principal de Futorny-Ovsienko [3], todo módulo irreducible sobre $\overline{\mathcal{A}_\mu}$ será un módulo irreducible sobre $U(gl_n)$ si la subálgebra $\overline{\mathcal{A}_\mu}$ es generada por una secuencia regular en la álgebra simétrica $S(gl_n)$. Según lo anterior, en este trabajo, se hace un estudio detallado del artículo de Futorny y Molev [2] y de la tesis doctoral de Wilson Mutis [11] con el fin de escribir una monografía en la cual se presente ordenada y detalladamente el hecho de que las subálgebras de Mishchenko-Fomenko en gl_2, gl_3 y en algunos casos de gl_4 son generadas por una secuencia regular en la álgebra simétrica $S(gl_n)$. Para el desarrollo de este trabajo fue necesario hacer un estudio sobre la teoría general de las álgebras de Lie y los resultados básicos de la Geometría Algebraica.

Este trabajo está conformado por cuatro capítulos, en el primero se estudian definiciones y teoremas de la teoría de anillos y cuerpo, además se hace un estudio de los conceptos y resultados básicos de la teoría de álgebras de Lie. En el segundo capítulo se abordan temas de la geometría algebraica, principalmente aquellos que se relacionan con variedades algebraicas y secuencias regulares en anillos de polinomios. El tercer capítulo está enfocado en el estudio del articulo Futorny y Molev [2], del cual se estudia la forma de obtener los generadores de las subálgebras de Mishchenko-Fomenko en gl_n, en el estudio de este articulo los autores lograron diseñar un algoritmo que permite obtener dichos generadores de una forma más ágil y efectiva. Finalmente, el cuarto capítulo es el más importante, ya que en él se presenta de forma detallada los procesos realizados por el doctor Wilson Mutis en su tesis doctoral [11] para presentar las pruebas de los teoremas que garantizan que las subálgebras de Mishchenko-Fomenko en gl_2, gl_3 y en algunos casos de gl_4 son generadas por una secuencia regular sobre el anillo de polinomios en 4, 9 y 16 variables respectivamente.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan algunas definiciones y teoremas de la teoría de anillos, cuerpos, álgebra lineal y álgebras de Lie, que se necesitan para el desarrollo del documento. Sin embargo, se asume que el lector conoce las definiciones y teoremas básicos de estas teorías. Para una mayor documentación de estos temas se recomienda consultar las referencias [4], [6], [5].

1.1. Teoría de Anillos y Cuerpos

En esta sección R denota un anillo conmutativo con identidad y R^* denota el conjunto de todos los elementos de R distintos de cero. Todas las proposiciones y teoremas presentados en esta sección son elementos básicos de la teoría de anillos y cuerpos, por esta razón se recomienda al lector consultar las referencias [4] y [5] para recordar las definiciones y las pruebas que no se presentan en este trabajo.

Definición 1.1. (Divisor de Cero y Dominio Entero). Un divisor de cero es un elemento $a \in R^*$, tal que existe un elemento $b \in R^*$ que satisface $ab = 0$. Se dice que el anillo R es un dominio entero si R no tiene divisores de cero.

Definición 1.2. (Ideal, Ideal Primo e Ideal Máximal). Un subconjunto no vacío I de R es un ideal de R si para toda $a \in R$ y toda $b \in I$ se tiene $ab \in I$. El ideal I se denomina ideal primo de R si $I \neq R$ y para cada $a, b \in R$ tales que $ab \in I$, se tiene $a \in I$ ó $b \in I$. El ideal I se denomina ideal maximal de R si $I \neq R$ y para cada ideal J de R tal que $I \subseteq J \subseteq R$, se tiene $J = I$ o $J = R$.

Observación 1.3. Todo anillo R tiene por lo menos dos ideales, $\{0\}$ y R, estos ideales se denominan triviales. Todo ideal maximal es primo pero existen ideales primos que no son maximales. Por otro lado, el ideal trivial $\{0\}$ es primo si y solamente si el anillo R no tiene divisores de cero. Además, el anillo R es un cuerpo si y solamente si los únicos ideales de R son los triviales si y solamente si el ideal trivial $\{0\}$ es maximal.

Proposición 1.4. *Para el anillo R se satisfacen los siguientes enunciados*

1. *Si I y J son ideales de R, entonces $I + J = \{a + b : a \in I, b \in J\}$ es un ideal de R.*
2. *Si $\{I_j\}_{j\in J}$ es una colección de ideales de R, entonces $I = \bigcap_{j\in J} I_j$ es un ideal de R.*
3. *Si $S \subseteq R$ y $\mathcal{F} = \{I : I$ es ideal de R y $S \subseteq I\}$, entonces el ideal generado por S está dado por $\langle S\rangle = \bigcap_{I\in\mathcal{F}} I$, además $\langle S\rangle = \{a_1s_1 + \cdots + a_ns_n : a_i \in R,\ s_i \in S,\ n \in \mathbb{Z}^+\}$*
4. *Si I es un ideal de R, entonces el conjunto de clases laterales $R/I = \{a + I : a \in R\}$ es un anillo definiendo la suma y multiplicación de la siguiente forma*

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$$
$$(a + I)(b + I) = ab + I$$

para todo $a, b \in R$. Este anillo se denomina anillo cociente módulo I.

Proposición 1.5. *Sea I un ideal propio del anillo R, se tiene que I es un ideal primo, si y solamente si, R/I es un dominio entero. Además R/I es un cuerpo si y solamente si I es un ideal maximal.*

Demostración. Suponga que I es un ideal primo, y sean $a + I,\ b + I$ dos elementos de R/I tales que $(a + I)(b + I) = I$, entonces $ab + I = I$, luego $ab \in I$, ya que I es primo, se tiene $a \in I$ ó $b \in I$, es decir, $a + I = I$ ó $b + I = I$, lo cual demuestra que R/I es un dominio entero. Ahora suponga que R/I es un dominio entero, y sea $ab \in I$, entonces $ab + I = I$, luego $(a + I)(b + I) = I$ y por la definición de dominio entero se tiene que $a + I = I$ ó $b + I = I$, esto implica que $a \in I$ ó $b \in I$, es decir, I es un ideal primo. La segunda parte de este teorema se demuestra de forma similar y su prueba se puede consultar en [4]. ■

Definición 1.6. (Anillo Noetheriano). El anillo R es noetheriano si toda cadena creciente de ideales en R estaciona, es decir, si $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$ es una cadena de ideales en R, entonces existe $m \in \mathbb{Z}^+$, tal que $I_n = I_m$ para toda $n \geq m$.

Teorema 1.7. *R es un anillo noetheriano si y solamente si todo ideal de R es finitamente generado, es decir, para cada ideal I de R existe un subconjunto finito $S \subseteq I$ tal que $\langle S\rangle = I$.*

Demostración. Sean R un anillo noetheriano y suponga que existe un ideal I de R que no es finitamente generado. Sea $x_1 \in I$ y considere el ideal $I_1 = \langle x_1\rangle \subseteq I$. Dado que I no es finitamente generado existe $x_2 \in I \setminus I_1$. Sea $I_2 = \langle x_1, x_2\rangle \subseteq I$. Siguiendo con este proceso, para cada $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, existe $x_n \in I \setminus I_{n-1}$ y el ideal $I_n = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \subsetneq I$. Así, se tiene la cadena

$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \subset \cdots$$

la cual no estaciona, esto implica que R no es un anillo noetheriano. Para el recíproco, suponga que todo ideal de R es finitamente generado y sea $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$ una cadena de ideales en R. Observe que $I = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}^+} I_j$ es un ideal de R, luego I es finitamente generado, es decir, existen $x_1, \ldots, x_n \in R$ tal que $I = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Para $j = 1, \ldots, n$ sea $k_j \in \mathbb{Z}^+$ tal que $x_j \in I_{k_j}$ y sea $m = \text{máx}\{k_1, \ldots, k_n\}$, se tiene, $x_j \in I_{k_j} \subseteq I_m$ para toda $j = 1, \ldots, n$, luego, $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq I_m$, entonces $I = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \subseteq I_m \subseteq I$, por tanto $I_n = I_m = I$ para toda $n \geq m$, por tanto, la cadena de ideales de R estaciona y así R es un anillo noetheriano. ■

Ejemplo 1.8. Si K es un cuerpo, entonces K es noetheriano. En efecto, dado que K es cuerpo, sus únicos ideales son $\{0\}$ y K. Pero claramente $\{0\} = \langle 0 \rangle$ y $K = \langle 1 \rangle$, es decir, todos los ideales de K son finitamente generados, luego por el teorema 1.7 K es noetheriano.

Teorema 1.9. *R es un anillo noetheriano si y solamente si toda colección no vacía de ideales en R tiene un elemento máximal.*

Demostración. Suponga que R es un anillo noetheriano y sea $\mathcal{F}$ una colección no vacía de ideales de R. Suponga que $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$ es una cadena de ideales en $\mathcal{F}$, entonces la unión $I = \bigcup I_j$ es un ideal de R. Dado que R es un anillo noetheriano, por el teorema 1.7 todo ideal de R es finitamente generado, luego I es finitamente generado. Con una argumentación similar a la utilizada en la segunda parte de la prueba del teorema 1.7 se tiene que $I = I_n$ para algún entero positivo n. Por el lema de Zorn [1] $\mathcal{F}$ tiene un máximo. Recíprocamente, suponga que R es un anillo no noetheriano, entonces, por el teorema 1.7 existe un ideal I de R tal que I no es finitamente generado. Sea $a_1 \in I$ y considere el ideal $I_1 = \langle a_1 \rangle$, como I no es finitamente generado, existe $a_2 \in I \setminus I_1$ y sea $I_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$. Continuando de esta forma, para cada $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ existe $a_n \in I \setminus I_{n-1}$ y considere el ideal $I_n = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$. Así, se tiene la colección $\mathcal{F} = \{I_1, I_2, \ldots\}$ de ideales de R y $\mathcal{F}$ es una colección no vacía de ideales de R que no tiene un elemento maximal. ■

Definición 1.10. (Polinomio en la variable x). Un polinomio en la variable x con coeficientes en el anillo R es una expresión de la forma

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

donde $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ y $a_i \in R$ para toda $i = 0, 1, \ldots, n$. Se dice que el polinomio $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ tiene grado n si $a_n \neq 0$, esto se denota $\text{gra}(f(x)) = n$ y el polinomio 0 no tiene grado. El conjunto de todos los polinomios en la variable x con coeficientes en el anillo R se denota $R[x]$.

[1] **Lema de Zorn:** Sea S un conjunto parcialmente ordenado. Si toda cadena en S tiene una cota superior, entonces S contiene un elemento maximal.

Definición 1.11. (Igualdad de polinomios). Dos polinomios $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ y $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ de $R[x]$ son iguales si y solamente si $n = m$ y $a_i = b_i$ para toda $i = 1, \dots, n$.

Teorema 1.12. ***(Anillo de Polinomios).*** *El conjunto $R[x]$ es un anillo conmutativo con identidad definiendo la suma y multiplicación de polinomios de la siguiente manera:*

1. $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) + \left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right) = \sum_{k=0}^{s} (a_k + b_k)x^k$, *donde* $s = \max\{m,\ n\}$. *Además se define* $a_k = 0$ *para* $k > n$ *y* $b_k = 0$ *para* $k > m$.
2. $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k$, *donde* $c_k = a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{k-1} + a_0 b_k$.

Definición 1.13. (Anillo de Polinomios en n Variables). Teniendo en cuenta el teorema 1.12 se puede definir recursivamente el anillo de polinomios en n variables con coeficientes en el anillo R, de la siguiente manera: El anillo de polinomios en las variables x_1 y x_2 está dado por:

$$R[x_1, x_2] = R[x_1][x_2] = \left\{ \sum_{i=0}^{m} a_i x_2^i : a_i \in R[x_1], m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$$

De forma análoga, el anillo de polinomios en las variables $x_1, \dots, x_n$ está dado por:

$$R[x_1, ..., x_n] = R[x_1, ..., x_{n-1}][x_n] = \left\{ \sum_{i=0}^{m} a_i x_n^i : a_i \in R[x_1, ..., x_{n-1}], m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$$

Teorema 1.14. ***(Teorema de la Base de Hilbert).*** *Si R es un anillo noetheriano, entonces el anillo de polinomios $R[x]$ también es noetheriano.*

Demostración. Sea $I \neq \{0\}$ un ideal de $R[x]$, se probará que I es finitamente generado. Para $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, sea I_j el subconjunto de R formado por $\{0\}$ y los coeficientes principales de todos los polinomios de grado j en I, es decir

$$I_j = \{0\} \cup \{a_j \in R^* : a_0 + a_1 x + \cdots + a_j x^j \in I\}$$

Primero se demostrará que I_j es un ideal de R y que $I_j \subseteq I_{j+1}$. En efecto, sean $r, t \in I_j$, si $r - t = 0$, se tiene $r - t \in I_j$, en caso contrario, no se pierde generalidad en suponer que $r \neq 0$, luego r es el coeficiente principal de algún polinomio $f(x)$ de grado j en I. Si $t = 0$, claramente $r - t \in I_j$, de lo contrario, t es el coeficiente principal de algún polinomio $f(x)$ de grado j en I. Luego, $r - t$ es el coeficiente principal del polinomio $f(x) - g(x) \in I$ y $\mathrm{gra}(f(x) - g(x)) = j$, por lo tanto $r - t \in I_j$. Ahora, sean $r \in I_j$ y $a \in R$. Si $r = 0$, claramente $ar \in I_j$, de lo contrario, r es el coeficiente principal de algún polinomio $f(x)$ de grado j en I y se tiene $ar = 0 \in I_j$ o ar es el coeficiente principal del polinomio $af(x) \in I$, además, $\mathrm{gra}(af(x)) = \mathrm{gra}(f(x)) = j$, por lo tanto $ar \in I_j$, luego I_j es un ideal de R. Para ver que $I_j \subseteq I_{j+1}$, sea $r \in I_j$, con $r \neq 0$ y sea $f(x) \in I$ un polinomio de grado j cuyo coeficiente principal es r. Dado que I es un ideal de $R[x]$, se tiene que el polinomio $xf(x)$ es un polinomio de grado $j+1$ en I con coeficiente principal r, luego $r \in I_{j+1}$. De lo anterior, se tiene la siguiente cadena de ideales en R

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$$

Como R es noetheriano, existe $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $I_h = I_m$, para toda $h \geq m$ y los ideales $I_0, I_1, \ldots, I_m$ son finitamente generados. Para $i = 0, \ldots, m$, sean $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in_i} \in R$ tales que $I_i = \langle a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in_i} \rangle$. Ahora, para $j = 0, 1, 2, \ldots, n_i$, cada a_{ij} es el coeficiente principal de un polinomio $f_{ij}(x)$ en I de grado i. Sea $S = \{f_{ij}(x) : i = 0, 1, \ldots, m,\ j = 0, 1, \ldots, n_i\} \subseteq I$, a continuación se demostrará por inducción que $I = \langle S \rangle$, para esto, sea $f(x)$ un polinomio no cero en I de grado $d = \text{mín}\{\text{gra}(f(x)) : f(x) \in I^*\}$ y sea $b \in R^*$ el coeficiente principal de $f(x)$, luego $b \in I_d = \langle a_{d1}, a_{d2}, \ldots, a_{dn_d} \rangle$, entonces existen $c_1, c_2, \ldots, c_{n_d} \in R$ tal que $b = c_1 a_{d1} + c_2 a_{d2} + \cdots + c_{n_d} a_{dn_d}$. Así, $h(x) = f(x) - (c_1 f_{d1}(x) + c_2 f_{d2}(x) + \cdots + c_{n_d} f_{dn_d}(x))$, es un polinomio en I y dado que todo polinomio no nulo en I tiene grado por lo menos d, se deduce que $h(x) = 0$, entonces $f(x) = c_1 f_{d1}(x) + c_2 f_{d2}(x) + \cdots + c_{n_d} f_{dn_d}(x) \in \langle S \rangle$, esto demuestra el primer paso de inducción. Ahora, suponga que todo polinomio no nulo en I de grado menor o igual que $t-1$ está en $\langle S \rangle$ y $f(x)$ en I un polinomio de grado t con coeficiente principal b, luego $b \in I_t = \langle a_{t1}, a_{t2}, \ldots, a_{tn_t} \rangle$, entonces existen $c_1, c_2, \ldots, c_{n_t} \in R$ tal que $b = c_1 a_{t1} + c_2 a_{t2} + \cdots + c_{n_t} a_{tn_t}$. Claramente $g(x) = f(x) - (c_1 f_{t1}(x) + c_2 f_{t2}(x) + \cdots + c_{n_t} f_{tn_t}(x))$, es un polinomio en I de grado menor que t, entonces por la hipótesis de inducción, $g(x) \in \langle S \rangle$ y dado que $f(x) = g(x) + (c_1 f_{t1}(x) + c_2 f_{t2}(x) + \cdots + c_{n_t} f_{tn_t}(x))$, se tiene que $f(x) \in \langle S \rangle$, por lo tanto $I = \langle S \rangle$, es decir, I es finitamente generado. Por el teorema 1.7 $R[x]$ también es un anillo noetheriano. ■

Corolario 1.15. *Si R es un cuerpo, entonces $R[x_1, ..., x_n]$ es un anillo noetheriano.*

Definición 1.16. (Dimension de Krull de un Anillo). Una cadena de longitud n de ideales primos en el anillo R es una sucesión finita de ideales primos de R incluidos propiamente uno en otro, es decir, es una cadena de la forma:

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n$$

donde los P_i son ideales primos de R. La dimension de Krull del anillo R, denotada $\dim\ \text{Krull}(R)$, es el supremo de las longitudes de las cadenas de ideales primos de R.

Ejemplo 1.17. Si K es un cuerpo, entonces el único ideal primo de K es el ideal trivial $\{0\}$ (ver observación 1.3), por lo tanto $\dim\ \text{Krull}(K) = 0$. Además $\dim\ \text{Krull}(K[x_1, \ldots, x_n]) = n$ porque

$$\{0\} \subsetneq \langle x_1 \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$$

es una cadena de ideales primos de longitud maximal en $K[x_1, \ldots, x_n]$.

1.2. Álgebras de Lie

En esta sección se describe las definiciones y resultados básicos de la teoría de álgebras de Lie. Para un estudio mas detallado de esta teoría se recomienda consultar [6], [1]. En lo que sigue, $\mathbb{F}$ denota un cuerpo de característica cero.

Definición 1.18. (Álgebra de Lie). Una álgebra de Lie sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ consiste de un espacio vetorial L junto con una función $\mathbb{F}$-bilineal $[,] : L \times L \to L$, denominado corchete o conmutador que asigna a cada par ordenado $(x, y) \in L \times L$ el vector $[x, y] \in L$ y que satisface las siguientes propiedades:

1. **Anticomutatividad:** $[x,\ x] = 0$ *para todo* $x \in L$.

2. **Identidad de Jacobi:** $[x,\ [y,\ z]] + [y,\ [z,\ x]] + [z,\ [x,\ y]] = 0$ para todo $x, y, z \in L$.

Dos elementos $x,\ y$ de una álgebra de Lie L se dice que conmutan si $[x,\ y] = 0$.

Observación 1.19. Si L es una álgebra de Lie y $x, y \in L$,

$$0 = [x + y,\ x + y] = [x,\ y] + [y,\ x], \text{ por tanto, } [x,\ y] = -[y,\ x].$$

Ejemplo 1.20. Se puede probar que:

1. Todo espacio vectorial V tiene estructura de álgebra de Lie definiendo el conmutador por $[x, y] = 0$ para todo $x, y \in V$. En este caso, se dice que V es una *álgebra de Lie abeliana.*

2. El espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ tiene estructura de $\mathbb{R}$-álgebra de Lie definiendo el corchete de la siguiente forma

$$[(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)] = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

3. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$, el $\mathbb{C}$-espacio vectorial gl_n de las matrices cuadradas de orden $n \times n$ con componentes en los números complejos, tiene estructura de álgebra de Lie definiendo el corchete como sigue:

$$[A, B] = AB - BA, \text{ para toda } A, B \in gl_n.$$

Definición 1.21. (Subálgebra e Ideal). Sea L una $\mathbb{F}$-álgebra de Lie. Un subespacio B de L es una subálgebra de L si $[x, y] \in B$, para toda $x, y \in B$. Un subespacio I de L es un *ideal de* L si $[x, y] \in I$, para toda $x \in L$, y toda $y \in I$.

Observación 1.22. Toda álgebra de Lie L tiene dos ideales triviales $\{0\}$ y L. Además, todo ideal de L es una subálgebra de L y existen ejemplos de subálgebras de L que no son ideales de L.

Ejemplo 1.23. Sea $gl_2 = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix} : z_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, 3, 4 \right\}$, y considere los siguientes subespacios de gl_2: $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}$ e $I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{C}, a + d = 0 \right\}$.

1. S es una subálgebra de gl_2 porque dados $A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$ dos elementos de S, se tiene

$$[A,\ B] = AB - BA = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 - b_1a_1 & 0 \\ 0 & a_2b_2 - b_2a_2 \end{bmatrix}$$

   Por lo tanto, $[A,\ B] \in S$, es decir, S es una subálgebra de gl_2. Por otro lado, sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in gl_2$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S$, luego

$$[A,\ B] = AB - BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \notin S$$

   Por lo tanto, S no es un ideal de gl_2.

2. I es un ideal de gl_2, en efecto, sean $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \in gl_2$ y $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \in I$, luego

$$[A,\ B] = AB - BA = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

   Donde $c_1 = a_1b_1 + a_2b_3 - b_1a_1 - b_2a_3$, $c_2 = a_1b_2 + a_2b_4 - b_1a_2 - b_2a_4$, $c_3 = a_3b_1 + a_4b_3 - b_3a_1 - b_4a_3$, y $c_4 = a_3b_2 + a_4b_4 - b_3a_2 - b_4a_4$. Luego, $c_1 + c_4 = 0$ y por lo tanto $[A,\ B] \in I$, es decir, I es un ideal de gl_2.

3. Sea n un entero positivo, se puede probar que $sl_n = \{A \in gl_n : tr(A) = 0\}$ es un ideal de gl_n. Así, el ejemplo anterior es el caso particular $n = 2$, una base de sl_2 es el conjunto $\{e,\ f,\ h\}$, donde $e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Definición 1.24. (Álgebra de Lie simple). Sea L una álgebra de Lie. Se dice que L es *simple* si L es no abeliana y los únicos ideales de L son los triviales.

Ejemplo 1.25. Existen, a menos de isomorfismo, nueve familias de álgebras de Lie simple de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los complejos, a saber, las álgebras de Lie clásicas A_n, B_n, C_n

y D_n, además de las cinco álgebras excepcionales E_6, E_7, E_8, F_4 y G_2. Las álgebras de Lie simples de dimensión finita son clasificados por los *diagramas de Coxeter-Dynkin* (Ver [6] para los detalles sobre esta clasificación).

Teorema 1.26. *Si A es una $\mathbb{F}$-álgebra asociativa, entonces A tiene estrutura de álgebra de Lie definiendo el corchete por*

$$[x,\ y] = xy - yx, \text{ para todo } x, y \in A.$$

Esta álgebra se denomina álgebra de Lie subyacente sobre A, y se denota por $\mathcal{L}(A)$. Por ejemplo, si V es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial, entonces $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$[2] es una álgebra asociativa con la composición de funciones, en este caso, la álgebra de Lie subyacente se denota con $gl(V)$. Si $\dim V = n < \infty$ también se denota $gl(V)$ por gl_n.

Definición 1.27. (Homomorfismo de álgebras de Lie). Sean L y L' dos álgebras de Lie sobre $\mathbb{F}$. Una transformación lineal $\varphi : L \to L'$ es un homomorfismo de álgebras de Lie (o simplemente homomorfismo) si

$$\varphi([x,\ y]) = [\varphi(x),\ \varphi(y)], \text{ para todo } x, y \in L.$$

Monomorfismo es un homomorfismo inyectivo, epimorfismo es un homomorfismo sobreyectivo e isomorfismo es un homomorfismo biyectivo. Si $\varphi : L \to L'$ es un homomorfismo, se puede probar que $\mathrm{Ker}\varphi$ es un ideal de L e $\mathrm{Im}\varphi$ es una subálgebra de L'.

Ejemplo 1.28. Sea L una álgebra de Lie de dimensión n y sea B una base ordenada de L. Para cada $x \in L$ denote con $(\mathrm{ad}_x)_B$ a la matriz en la base B de la transformación lineal $\mathrm{ad}_x : L \to L$ definida por $\mathrm{ad}_x(y) = [x,\ y]$ para todo $y \in L$. Entonces, la transformción lineal ad: $L \to gl_n$ definida por $\mathrm{ad}(x) = (\mathrm{ad}_x)_B$, para toda $x \in L$, es un homomorfismo de álgebras de Lie. En efecto, de la identidad de Jacobi se tiene

$$\mathrm{ad}_{[x,\ y]} = \mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y - \mathrm{ad}_y\mathrm{ad}_x \text{ para todo } x,\ y \in L$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{ad}([x,\ y]) = (\mathrm{ad}_x)_B(\mathrm{ad}_y)_B - (\mathrm{ad}_y)_B(\mathrm{ad}_x)_B = [\mathrm{ad}(x),\ \mathrm{ad}(y)]$$

Definición 1.29. (Módulo). Un módulo sobre una $\mathbb{F}$-álgebra de Lie L (o L-módulo) es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial V junto con una acción $\cdot : L \times V \to V$, que asigna a cada par ordenado $(x,\ v) \in L \times V$ el vector $x \cdot v \in V$, tal que para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, todo $x, y \in L$ y todo par de vectores $v, w \in V$ se satisfacen las siguientes condiciones

1. $(\alpha x + \beta y) \cdot v = \alpha(x \cdot v) + \beta(y \cdot v)$.

[2] $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ denota el $\mathbb{F}$-espacio vectorial de las transformaciones lineales sobre V.

2. $x \cdot (\alpha v + \beta w) = \alpha(x \cdot v) + \beta(x \cdot w)$.

3. $[x,\ y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v)$.

Un submódulo de un L-módulo V es un subespacio $W \subseteq V$ invariante bajo la acción de L, esto es $x \cdot w \in W$ para todo $x \in L$ y $w \in W$.

Ejemplo 1.30. Toda álgebra de Lie L es un L-módulo definiendo $x \cdot y = [x,\ y]$ para todo $x,\ y \in L$. Además, todo L-módulo V tiene por lo menos dos submódulos, $\{0\}$ y V, denominados submódulos triviales.

Ejemplo 1.31. Considere el espacio vectorial $\mathbb{C}[x,\ y]$ de polinomios en dos variables $x,\ y$ con coeficientes complejos. Para $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, sea V_d el subespacio de $\mathbb{C}[x,\ y]$ formado por los polinomios homogeneos de grado d. Una base de V_d es el conjunto $\{x^d,\ x^{d-1}y, \ldots,\ xy^{d-1},\ y^d\}$. Se puede probar que V_d es un sl_2-módulo de dimensión $d+1$ (Ver [1], p. 48), definiendo la acción de sl_2 sobre V_d de la siguiente forma:

$$e \cdot P = x\frac{\partial}{\partial y}(P) \qquad f \cdot P = y\frac{\partial}{\partial x}(P) \qquad h \cdot P = x\frac{\partial}{\partial x}(P) - y\frac{\partial}{\partial y}(P)$$

Para todo polinomio $P \in V_d$.

Definición 1.32. (Módulos isomorfos). Sean V y W dos módulos sobre una álgebra de Lie L. Se dice que V y W son isomorfos si existe un isomorfismo $\phi : V \to W$ de espacios vectoriales que satisface la siguiente condición:

$$\phi(x \cdot v) = x \cdot \phi(v) \text{ para todo } x \in L \text{ y todo } v \in V$$

En este caso, se escribe $V \cong W$.

Observación 1.33. Todo sl_2-módulo V de dimensión $d+1$ es isomorfo a V_d, (Ver [9], p.).

Un problema de mucha importancia dentro de la teoría de las álgebras de Lie es la caracterización de los módulos (de dimensión finita) sobre una álgebra de Lie. Por la observación anterior, los módulos de dimensión finita sobre sl_2 están caracterizados, sin embargo, la estructura de módulos de dimensión finita sobre álgebras de Lie de mayor dimensión es aún un problema abierto. En la busqueda de avances dentro de esta problemática se han utilizado temas avanzados de teoría de categorías, álgebra homológica, álgebras filtradas y graduadas y geometría algebraica. Estos temas son difíciles y desbordan el interés de esta monografía, sin embargo, sustentan los teoremas centrales que permitieron el desarrollo de este trabajo. A continuación se presentan estos teoremas sin hacer referencia a las definiciones propias de las áreas antes descritas, sin embargo, el lector interesado puede remitirse a las referencias bibliográficas especializadas [2], [3], [13].

Teorema 1.34. (Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW)). *Si* $\{x_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ *es una base ordenada de la álgebra de Lie* L*, entonces una base para su álgebra envolvente universal* $U(L)$[3] *es el conjunto formado por el elemento* $1 \in U(L)$ *junto con los elementos de la forma* $x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(m)}$*, donde* $m \in \mathbb{Z}^+$ *y* $\sigma(1) \leq \sigma(2) \leq \ldots \leq \sigma(m)$.

Ejemplo 1.35. Para la álgebra de Lie sl_2 con base ordenada $\{e,\ f,\ h\}$ (ver ejemplo 1.23), se tiene que $U(sl_2)$ es el espacio vectorial generado por el conjunto $\{e^{m_1} f^{m_2} h^{m_3} : m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \cup \{1\}$.

Proposición 1.36. *Sea* L *una álgebra de Lie. Se satisfacen los siguientes enunciados:*

1. *Existe una graduación de la álgebra envolvente universal* $U(L)$ *tal que* $gr(U(L))$ *y la álgebra simétrica* $S(L)$ *son* L*-módulos isomorfos.*

2. *Si* $\dim L = n$*, entonces la álgebra simétrica* $S(L)$ *es canónicamente isomorfa al álgebra de polinómios* $\mathbb{F}[x_1, \ldots,\ x_n]$.

[3]Para las definiciones de álgebra envolvente universal y álgebra simétrica ver [6], pág. 89.

Capítulo 2

Geometría Algebraica y Secuencias Regulares Sobre Anillos

2.1. Geometría Algebraica

En esta sección se presentan las definiciones y teoremas de geometría algebraica las cuales se utilizan en el desarrollo del último capítulo. Aunque muchas de estas definiciones y teoremas se satisfacen sobre un cuerpo arbitrario K, en lo que sigue K denotará un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero.

Definición 2.1. (Espacio Afín). El *espacio afín* de dimensión n sobre K es el conjunto

$$\mathbb{A}^n_K := \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in K\}.$$

Definición 2.2. (Variedad Algebraica). Sea E un subconjunto del anillo de polinomios en n variables con coeficientes en el cuerpo K. El conjunto $\mathcal{V}(E)$ de puntos del espacio afín $\mathbb{A}^n_K$ formado por todos los ceros comunes de los polinomios en E se denomina *variedad algebraica* (o simplemente *variedad*), es decir,

$$\mathcal{V}(E) = \{P \in \mathbb{A}^n_K : f(P) = 0 \text{ para todo } f \in E\}$$

Proposición 2.3. *Si E un subconjunto del anillo $K[x_1, \dots, x_n]$ e $I = \langle E \rangle$ es el ideal de $K[x_1, \dots, x_n]$ generado por E, entonces $\mathcal{V}(E) = \mathcal{V}(I)$.*

Demostración. En efecto, por definición de ideal generado (ver proposición 1.4), $E \subseteq I$. Ahora, dado $P \in \mathcal{V}(I)$ se tiene que P es cero de todos los polinomios de I, en particular de los polinomios que están en E, luego $P \in \mathcal{V}(E)$, es decir, $\mathcal{V}(I) \subseteq \mathcal{V}(E)$. Por otra parte, si $P \in \mathcal{V}(E)$, entonces P es cero de todos los polinomios de E, además para cada $f \in I$ existen polinomios $f_1, \dots, f_r \in E$ y $g_1, \dots, g_3 \in K[x_1, \dots, x_n]$ tal que $f = g_1 f_1 + \cdots + g_r f_r$. Luego, $f(P) = \sum_{i=1}^{r} g_i(P) f_i(P)$ y dado que $f_i(P) = 0$, entonces $f(P) = 0$. Por lo tanto, $P \in \mathcal{V}(I)$, es decir, $\mathcal{V}(E) \subseteq \mathcal{V}(I)$. ∎

Observación 2.4. Por el corolario 1.15, el anillo $K[x_1,\dots,x_n]$ es noetheriano y por el teorema 1.7 todos sus ideales son finitamente generados, es decir, si E es un subconjunto de $K[x_1,\dots,x_n]$, existe un conjunto finito de polinomios $\{f_1,\dots,f_r\}\subseteq E$ tal que

$$\mathcal{V}(E)=\mathcal{V}(\langle f_1,\dots,f_r\rangle)=\mathcal{V}(f_1)\cap\cdots\cap\mathcal{V}(f_r)$$

Por lo tanto, todas las variedades son los ceros comunes de un conjunto finito de polinomios.

Lema 2.5. *En el espacio afín $\mathbb{A}^n_K$ se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *$\mathbb{A}^n_K$ y $\emptyset$ son variedades.*
2. *Si $V_1,\dots,V_k$ son variedades, entonces $V_1\cup\cdots\cup V_k$ también es una variedad.*
3. *Si $\{V_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ es una familia arbitraria de variedades, entonces $\bigcap\limits_{j\in\mathcal{J}} V_j$ también es una variedad.*
4. *Si $I_1\subseteq I_2$ son ideales de $K[x_1,\dots,x_n]$, entonces $\mathcal{V}(I_1)\supseteq\mathcal{V}(I_2)$.*
5. *Si $I\subseteq K[x_1,\dots,x_n]$ es cualquier ideal, entonces $\mathcal{V}(I)=\mathcal{V}(\sqrt{I})$.*[1]

Demostración.

1. Claramente $\mathbb{A}^n_K=\mathcal{V}(0)$ y $\emptyset=\mathcal{V}(1)$.
2. Para este caso, basta probar para dos variedades. Sean $V=\mathcal{V}(I)$ y $W=\mathcal{V}(J)$, se probará que $V\cup W=\mathcal{V}(I\cap J)$. En efecto, sea $P\in V\cup W$, luego P pertenece a alguna de las variedades o a ambas. Sin pérdida de generalidad, suponga $P\in V$, esto significa que para todo $f\in I$ se tiene $f(P)=0$, en particular para los $f\in I\cap J$ y así $P\in\mathcal{V}(I\cap J)$. Recíprocamente, sea $P\notin V\cup W$, entonces existen polinomios $f\in I$ y $g\in J$ tales que $f(P)\neq 0$ y $g(P)\neq 0$ y por lo tanto $f(P)g(P)\neq 0$. Sin embargo, $fg\in I\cap J$, así que $P\neq\mathcal{V}(I\cap J)$.
3. Se mostrará que $\bigcap\limits_{j\in\mathcal{J}}\mathcal{V}(I_j)=\mathcal{V}\left(\sum\limits_{j\in\mathcal{J}} I_j\right)$, donde

   $$\sum_{j\in\mathcal{J}} I_j=\left\{\sum_{j\in\mathcal{J}} f_j : f_j\in I_j \text{ y } f_j\neq 0 \text{ para a lo mas un número finito de términos}\right\}$$

   Sean $L=\sum\limits_{j\in\mathcal{J}} I_j$ y $P\in\mathcal{V}(L)$, observe que para cada $k\in\mathcal{J}$ se tiene $I_k\subseteq L$, entonces para todo polinomio f en I_k, se cumple $f(P)=0$, entonces $P\in\mathcal{V}(I_k)$, por lo tanto $P\in\bigcap\limits_{j\in\mathcal{J}}\mathcal{V}(I_j)$. Recíprocamente, sea $P\in\mathcal{V}(I_j)$ para todo $j\in\mathcal{J}$ y sea f un polinomio en L, se puede probar que L es un ideal del anillo noetheriano $K[x_1,\dots,x_n]$, luego existen polinomios $f_1,\dots,f_r\in L$,

[1] Sea R un anillo e I un ideal de R, el idael radical $\sqrt{I}$ se define por $\sqrt{I}=\{a\in R:\exists n\in\mathbb{N}, a^n\in I\}$.

tal que $L = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$, entonces $f = g_1 f_1 + \cdots + g_r f_r$ para algunos polinomios $g_1, \ldots, g_r$ en $K[x_1, \ldots, x_n]$. Dado que $P \in \bigcap_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{V}(I_j)$ se tiene $f_i(P) = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, r$, entonces $f(P) = 0$. Por lo tanto $P \in \mathcal{V}(L)$.

4. Sea $P \in \mathcal{V}(I_2)$ luego P es un cero de cada polinomio en I_2 y dado que $I_1 \subseteq I_2$, se tiene que P es un cero de cada poinomio en I_1, es decir, $P \in \mathcal{V}(I_1)$, por lo tanto $\mathcal{V}(I_1) \supseteq \mathcal{V}(I_2)$.

5. Dado que $I \subseteq \sqrt{I}$, por el ítem anterior se tiene $\mathcal{V}(\sqrt{I}) \subseteq \mathcal{V}(I)$. Recíprocamente, sean $P \in \mathcal{V}(I)$ y $f \in \sqrt{I}$, entonces existe $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f^m \in I$. Luego $f^m(P) = 0$ y por lo tanto $f(P) = 0$, es decir, $P \in \mathcal{V}(\sqrt{I})$.

■

Lema 2.6. *Si $f, g, h \in K[x_1, \ldots, x_n]$ y λ es un elemento no nulo en K, entonces se satisfacen los siguientes enunciados:*

1. $\mathcal{V}(f,\ g) = \mathcal{V}(f) \cap \mathcal{V}(g)$.
2. $\mathcal{V}(\lambda f) = \mathcal{V}(f)$.
3. $\mathcal{V}(f,\ fg \pm h) = \mathcal{V}(f,\ h)$.
4. $\mathcal{V}(f,\ gh) = \mathcal{V}(f,\ g) \cup \mathcal{V}(f,\ h)$.
5. $\mathcal{V}(f - g,\ hf) = \mathcal{V}(f - g,\ hg)$.
6. $\mathcal{V}(f - g,\ h \pm f) = \mathcal{V}(f - g,\ h \pm g)$.

Demostración. El primer enunciado es consecuencia inmediata de la definición.

2. Dado que $\lambda \neq 0$, se tiene $\langle \lambda f \rangle = \langle f \rangle$, por lo tanto $\mathcal{V}(\lambda f) = \mathcal{V}(f)$.

3. $\mathcal{V}(f,\ fg \pm h) = \mathcal{V}(f) \cap \mathcal{V}(fg \pm h) = \mathcal{V}(f) \cap \mathcal{V}(h) = \mathcal{V}(f,\ h)$.

4. $\mathcal{V}(f,\ gh) = \mathcal{V}(f) \cap \mathcal{V}(gh)$. Pero $\mathcal{V}(g,\ h) = \mathcal{V}(g) \cup \mathcal{V}(h)$, luego

$$\mathcal{V}(f,\ gh) = \mathcal{V}(f) \cap (\mathcal{V}(g) \cup \mathcal{V}(h)) = (\mathcal{V}(f) \cap \mathcal{V}(g)) \cup (\mathcal{V}(f) \cap \mathcal{V}(h))$$

Por lo tanto $\mathcal{V}(f,\ gh) = \mathcal{V}(f,\ g) \cup \mathcal{V}(f,\ h)$.

5. Utilizando los ítems anteriores se tiene

$$\mathcal{V}(f - g,\ hf) = \mathcal{V}(f - g,\ h) \cup \mathcal{V}(f - g,\ f) = \mathcal{V}(f - g,\ h) \cup \mathcal{V}(g,\ f)$$

Similarmente, $\mathcal{V}(f-g,\ hg) = \mathcal{V}(f-g,\ h) \cup \mathcal{V}(f,\ g)$. Por lo tanto, $\mathcal{V}(f-g,\ hf) = \mathcal{V}(f-g,\ hg)$.

6. Observe que $\mathcal{V}(f - g,\ h \pm f) = \mathcal{V}(f - g,\ h \pm f \pm g \mp g) = \mathcal{V}(f - g,\ (h \pm g) \pm (f - g))$. Luego, por el ítem 2, se tiene $\mathcal{V}(f - g,\ h \pm f) = \mathcal{V}(f - g,\ h \pm g)$.

■

Proposición 2.7. *Si $x_1, \ldots, x_n$ son n varibles conmutativas y para cada subconjunto no vacío $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ se denota $X_I = \prod_{i \in I} x_i$, entonces:*

$$\mathcal{V}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{|I|=2} X_I, \ldots, \sum_{|I|=n-1} X_I, \prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \mathcal{V}(x_1, \ldots, x_n)$$

Demostración. Se va a aproceder por inducción. Para $n = 2$, utilizando el lema 2.6 se tiene

$$\mathcal{V}(x_1 + x_2, x_1 x_2) = \mathcal{V}(x_1 + x_2, x_1) \cup \mathcal{V}(x_1 + x_2, x_2) = \mathcal{V}(x_1, x_2) \cup \mathcal{V}(x_2, x_1) = \mathcal{V}(x_1, x_2)$$

Ahora, suponga que el enunciado es válido para $n - 1$ variables conmutativas y sea

$$V = \mathcal{V}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{|I|=2} X_I, \ldots, \sum_{|I|=n-1} X_I, \prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{V}\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} x_i, \sum_{\substack{I \subseteq \hat{J} \\ |I|=2}} X_I, \ldots, \sum_{\substack{I \subseteq \hat{J} \\ |I|=n-1}} X_I, x_j\right)$$

Donde $\hat{J}$ denota el conjunto $\hat{J} = \{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n\}$, luego

$$V = \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{V}\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} x_i, \sum_{\substack{I \subseteq \hat{J} \\ |I|=2}} X_I, \ldots, \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} x_i, x_j\right) = \bigcup_{j=1}^{n} \left(\mathcal{V}\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} x_i, \sum_{\substack{I \subseteq \hat{J} \\ |I|=2}} X_I, \ldots, \sum_{\substack{I \subseteq \hat{J} \\ |I|=n-2}} X_I, \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} x_i\right) \cap \mathcal{V}(x_j)\right)$$

Y utilizando la hipótesis inductiva, se tiene:

$$\begin{aligned} V &= \bigcup_{j=1}^{n} \left(\mathcal{V}\left(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n\right) \cap \mathcal{V}(x_j)\right) \\ &= \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{V}\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \mathcal{V}\left(x_1, \ldots, x_n\right) \end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.8. Sean $x_1,\ x_2,\ x_3$ variables conmutativas, luego

$$\mathcal{V}(x_1 + x_2 + x_3,\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,\ x_1x_2x_3) = \mathcal{V}(x_1,\ x_2,\ x_3)$$

Definición 2.9. (Ideal asociado). Sea X un subconjunto no vacío de $\mathbb{A}_K^n$. El conjunto de polinomios en $K[x_1, \ldots, x_n]$ que se anulan en todos los puntos de X es un ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$ denominado *ideal asociado al subconjunto* X y se denota $\mathcal{J}(X)$, es decir,

$$\mathcal{J}(X) := \{f \in K[x_1, \ldots, x_n] : f(P) = 0 \text{ para todo } P \in X\}.$$

Además, se define $\mathcal{J}(\emptyset) = K[x_1, \ldots, x_n]$.

Lema 2.10. *Con la definición anterior se satisfacen los siguientes enunciados:*

1. *Si $X_1 \subseteq X_2$ son subconjuntos de $\mathbb{A}_K^n$, entonces $\mathcal{J}(X_1) \supseteq \mathcal{J}(X_2)$.*

2. *Si $V,\ W \subseteq \mathbb{A}_K^n$, entonces $\mathcal{J}(V \cup W) = \mathcal{J}(V) \cap \mathcal{J}(W)$.*

3. *Si $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$, entonces $\sqrt{\mathcal{J}(V)} = \mathcal{J}(V)$, i.e., el ideal $\mathcal{J}(V)$ es un ideal radical.*

Demostración. .

1. Sea $f \in \mathcal{J}(X_2)$, entonces $f(P) = 0$ para todo $P \in X_2$, en particular, para todo $P \in X_1$. Luego, $f \in \mathcal{J}(X_1)$ y por lo tanto $\mathcal{J}(X_2) \subseteq \mathcal{J}(X_1)$.

2. Sea $f \in \mathcal{J}(V \cup W)$, entonces $f(P) = 0$ para todo $P \in V \cup W$. Dado que $V,\ W \subseteq V \cup W$, se tiene $f(P) = 0$ para todo $P \in V$ y $f(P) = 0$ para todo $P \in W$. Luego, $f \in \mathcal{J}(V)$ y $f \in \mathcal{J}(W)$. Por lo tanto $f \in \mathcal{J}(V) \cap \mathcal{J}(W)$. Recíprocamente, dados $f \in \mathcal{J}(V) \cap \mathcal{J}(W)$ y un punto $P \in V \cup W$. No se pierde generalidad al suponer $P \in V$, además $f \in \mathcal{J}(V)$, luego $f(P) = 0$, es decir, $f \in \mathcal{J}(V \cup W)$.

3. Sean $f \in \sqrt{\mathcal{J}(V)}$ y $P \in V$, se tiene $f^r \in \mathcal{J}(V)$, para algún $r \geq 1$ y así $f^r(P) = 0$, entonces $f(P) = 0$, es decir $f \in \mathcal{J}(V)$. La otra inclusión siempre es válida puesto que $I \subseteq \sqrt{I}$.

■

Lema 2.11. *Para todo entero positivo n, se tiene $\mathcal{J}(\mathbb{A}_K^n) = \{0\}$.*

Demostración. En la prueba de este lema se utiliza el hecho de que todo cuerpo de característica cero es infinito. Los detalles de la demostración se pueden consultar en **REFERENCIAR**. ■

Teorema 2.12. *Si K es un cuerpo algebraicamente cerrado (no necesariamente de característica cero), entonces se cumplen los siguientes enunciados:*

1. *Si A es un subconjunto arbitrario de $\mathbb{A}_K^n$, entonces $A \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{J}(A))$, y la igualdad se tiene si y solamente si A es una variedad.*

2. *Si J es un ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$, entonces $J \subseteq \mathcal{J}(\mathcal{V}(J))$. Más aún, $\mathcal{J}(\mathcal{V}(J)) = \sqrt{J}$ y por lo tanto se tiene la igualdad $\mathcal{J}(\mathcal{V}(J)) = J$ si y solamente si J es un ideal radical.*

Demostración.

1. Sea $P \in A$, entonces $f(P) = 0$ para todo $f \in \mathcal{J}(A)$, por lo tanto $P \in \mathcal{V}(\mathcal{J}(A))$. Ahora, suponga que A es una variedad, luego $A = \mathcal{V}(I)$ para algún ideal I de $K[x_1, \ldots, x_n]$. Sean $f \in I$ y $P \in A$, se tiene $f(P) = 0$, es decir, cada polinomio de I se anula en todos los puntos de A, entonces por la definición 2.9 $f \in \mathcal{J}(A)$, luego $I \subseteq \mathcal{J}(A)$ y por el lema 2.5 $\mathcal{V}(I) \supseteq \mathcal{V}(J(A))$, así que, $A \supseteq \mathcal{V}(\mathcal{J}(A))$. Recíprocamente, si $V = \mathcal{V}(\mathcal{J}(V))$, entonces V es una variedad, por definición.

2. Sea $f \in J$, entonces $f(P) = 0$ para todo $P \in \mathcal{V}(J)$, por lo tanto $f \in \mathcal{J}(\mathcal{V}(J))$. La segunda afirmación es una consecuencia del teorema de los ceros de Hilbert[2]

$\blacksquare$

Ejemplo 2.13. ¿Cuáles son las variedades de la recta afín $\mathbb{A}^1_K$?

Sea V una variedad propia no vacía de $\mathbb{A}^1_k$. Dado que el anillo $K[x]$ es un dominio de ideales principales, $V = \mathcal{V}(f)$ para algún polinomio no constante $f \in K[x]$. Además, el cuerpo K es algebraicamente cerrado, entonces $f(x) = c(x - a_1)\cdots(x - a_k)$ para algunos $c, a_i \in K$, por lo tanto, $V = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Es decir, las variedades de $\mathbb{A}^1_K$ son los conjuntos finitos, el espacio total y el vacío.

Definición 2.14. (Variedad Irreducible). Una variedad V de A^n_K es irreducible si para todo par de variedades V_1 y V_2 tales que $V = V_1 \cup V_2$, se tiene $V = V_1$ o $V = V_2$. En caso contrario, V es reducible.

Ejemplo 2.15. Claramente $\emptyset$ (la variedad vacía) es irreducible. Por otro lado, en el espacio afín $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ la variedad $V = \mathcal{V}(x) = \{(0, b) : b \in \mathbb{C}\}$ es irreducible porque si V_1 y V_2 son variedades tales que $V = V_1 \cup V_2$ y $V_1 \neq V$, entonces existe un polinomio $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ de la forma $f(x,\ y) = xg(x,\ y) + h(y)$, con $h(y) \neq 0$, que se anula en todos los puntos de V_1. Además, para $(0, b) \in V_1$ se tiene $0 = f(0,\ b) = 0g(0,\ y) + h(b)$, luego $h(b) = 0$, así que $V_1 \subseteq \{(0, b) : h(b) = 0\} \subseteq V$. Dado que el número de raíces de $h(y)$ es finito, se sigue que V_1 es finito, luego V_2 es infinito puesto que V es infinito. Por lo anterior, todo polinomio que se anule en los puntos de V_2 debe ser de la forma $p(x, y) = xq(x,\ y)$, ya que en caso contrario, un procedimiento similar al realizado para V_1 justificaría que V_2 es finito. Luego, para todo $(0,\ b) \in V$ y todo polinomio $p(x,\ y)$ que se anule en los puntos de V_2 se tiene $p(0, b) = 0q(0,\ b) = 0$, por lo tanto, $V \subseteq V_2 \subseteq V$, es decir, $V = V_2$.

Proposición 2.16. *Una variedad no vacía V es irreducible si y sólo si su ideal asociado $\mathcal{J}(V)$ es un ideal primo.*

Demostración. Suponga que V es irreducible. Observe que $\mathcal{J}(V) \neq K[x_1, \ldots, x_n]$ porque V es no vacía. Ahora sean $f, g \in K[x_1, \ldots, x_n]$ tales que $fg \in \mathcal{J}(V)$, luego $\langle fg \rangle \subseteq \mathcal{J}(V)$, además, por el lema 2.5 y el teorema 2.12 se tiene que $V = \mathcal{V}(\mathcal{J}(V)) \subseteq \mathcal{V}(fg)$. Pero $\mathcal{V}(fg) = \mathcal{V}(f) \cup \mathcal{V}(g)$, entonces $V \subseteq \mathcal{V}(f) \cup \mathcal{V}(g)$ y así $V = (V \cap \mathcal{V}(f)) \cup (V \cap \mathcal{V}(g))$. Dado que V es irreducible, sin pérdida de generalidad se puede suponer $V = V \cap \mathcal{V}(f)$, es decir, $V \subseteq \mathcal{V}(f)$ y por el lema 2.10 se tiene $f \in \mathcal{J}(\mathcal{V}(f)) \subseteq \mathcal{J}(V)$, por lo tanto $\mathcal{J}(V)$ es primo. Recíprocamente, suponga que existen variedades W_1 y W_2 tales que $V = W_1 \cup W_2$ con $W_i \subsetneq V$[3], luego existen polinomios $f_i \in \mathcal{J}(W_i) \setminus \mathcal{J}(V)$. Sea $P \in V$, se tiene $f_1 f_2(P) = f_1(P) f_2(P) = 0$, luego $f_1 f_2 \in \mathcal{J}(V)$, por lo tanto $\mathcal{J}(V)$ no es primo. $\blacksquare$

[2] Los detalles de la prueba del teorema de los ceros de Hilbert se pueden consultar en **REFERENCIAR NOTAS**.
[3] Si W y V son variedades tales que $W \subsetneq V$, por el teorema 2.12 se garantiza que $\mathcal{J}(V) \subsetneq \mathcal{J}(W)$.

Ejemplo 2.17. $\mathbb{A}_K^n$ es irreducible ya que, por el lema 2.11, su ideal $\mathcal{J}(\mathbb{A}_K^n) = \{0\}$, que es primo.

Proposición 2.18. *Sean $x_1, \ldots, x_n$ variables conmutativas. Si A es un subconjunto de $\{x_1, \ldots, x_n\}$, entonces $\mathcal{V}(\{x : x \in A\})$ es irreducible en $\mathbb{A}_K^n$.*

Demostración. Sea $J = \langle A \rangle$, considere $R = K[x_1, \ldots, x_n]/J$. Los elementos de R son de la forma $f + J$ donde f es un polinomio en las variables del conjunto $B = \{x_1, \ldots, x_n\} \diagdown A$. Luego R es isomorfo a K o al anillo de polinomios en las variables del conjunto B, en cualquier caso R es un dominio entero y así J es un ideal primo. ■

Lema 2.19. *Sea V una variedad de A_K^n. Entonces, V es irreducible, si y sólo si, para todo par de variedades V_1 y V_2 tales que $V - V_i \neq \emptyset$, se tiene $(V - V_1) \cap (V - V_2) \neq \emptyset$.*

Demostración. Suponga que V es irreducible y que existen dos variedades V_1 y V_2 tales que los conjuntos $V - V_i$ son no vacíos y $(V - V_1) \cap (V - V_2) = \emptyset$, entonces,

$$V = V - [(V - V_1) \cap (V - V_2)]$$
$$V = [V - (V - V_1)] \cup [V - (V - V_2)]$$

Pero $V - (V - V_i) = V \cap V_i$, entonces $V = (V \cap V_1) \cup (V \cap V_2)$. Dado que V es irreducible se debe tener $V = V \cap V_i$ para algún $i \in \{1, 2\}$. Sin pérdida de generalidad, suponga $V = V \cap V_1$, entonces $V \subseteq V_1$, así $V - V_1 = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Para el recírpoco, sean V_1 y V_2 dos variedades tales que $V = V_1 \cup V_2$. Luego, $V - (V_1 \cup V_2) = \emptyset$, es decir, $(V - V_1) \cap (V - V_2) = \emptyset$. Por hipótesis, $V - V_1 = \emptyset$ o $V - V_2 = \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, suponga que $V - V_1 = \emptyset$, luego, $V \subseteq V_1 \subseteq V$, entonces $V = V_1$, por lo tanto, V es irreducible. ■

Proposición 2.20. *Toda colección no vacía de variedades en $\mathbb{A}_K^n$ tiene un elemento mínimal.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ una colección no vacía de variedades en $\mathbb{A}_K^n$ y considere la colección no vacía $\mathcal{G} = \{\mathcal{J}(V) : V \in \mathcal{F}\}$ de ideales en el anillo de polinomios $K[x_1, \ldots, x_n]$. Dado que $K[x_1, \ldots, x_n]$ es noetheriano, por el teorema 1.9 la colección $\mathcal{G}$ tiene un elemento máximal, es decir, existe $\mathcal{J}(V_0) \in \mathcal{G}$ tal que $\mathcal{J}(V_0)$ no está contenido propiamente en ningún ideal $\mathcal{J}(V)$ de $\mathcal{G}$. Luego, por el teorema 2.12 se tiene que $V_0 = \mathcal{V}(\mathcal{J}(V_0))$ es un elemento mínimal en $\mathcal{F}$. ■

Teorema 2.21. *Si V es una variedad de $\mathbb{A}_K^n$, entonces existen variedades irreducibles $V_1, \ldots, V_n$ únicas, tales que $V = V_1 \cup \cdots \cup V_n$ y para $i \neq j$, $V_i \nsubseteq V_j$.*

Demostración. Suponga que V no es unión finita de variedades irreducibles, entonces la colección $\mathcal{F}$ de variedades en $\mathbb{A}_K^n$ que no se pueden expresar como unión finita de variedades irreducibles es no vacía. Por la proposición anterior, $\mathcal{F}$ tiene un elemento minimal W_0 que es reducible, luego existen variedades W_1 y W_2 tales que $W_0 = W_1 \cup W_2$ y $W_i \subsetneq W_0$. Por la minimalidad de W_0, $W_i \notin \mathcal{F}$, luego W_i se puede expresar como unión finita de variedades irreducibles, es decir, W_0 es unión finita de variedades irreducibles, lo cual es una contradicción. Por lo tanto V es unión finita de variedades irreducibles. Ahora suponga que existen variedades irreducibles $V_1, \ldots, V_r, W_1, \ldots, W_s$ tales que

$$V_1 \cup \cdots \cup V_r = V = W_1 \cup \cdots \cup W_s$$

Con $V_i \nsubseteq V_j$ para $i \neq j$ y $W_l \nsubseteq W_t$ para $l \neq t$. Observe que

$$W_i = W_i \cap V = W_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{r} V_j \right) = \bigcup_{j=1}^{r} (V_j \cap W_i)$$

Dado que W_i es irreducible, $W_i = V_j \cap W_i$ para algún $j = 1, \ldots, r$, entonces $W_i \subseteq V_j$. Con un procedimiento similar, $V_j \subseteq W_t$ para algún $t = 1, \ldots, s$, así que $W_i \subseteq V_j \subseteq W_t$. Luego, $W_i = V_j$, además $r = s$. ■

Definición 2.22. (Componente Irreducible). Sea V una variedad de $\mathbb{A}_K^n$ y sean $V_1, \ldots, V_r$ variedades irreducibles tales que $V = V_1 \cup \cdots \cup V_r$ y para $i \neq j$, $V_i \nsubseteq V_j$. Cada una de las variedades V_i se denomina *componente irreducible* para V.

Ejemplo 2.23. Sean $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$ variables conmutativas, por el lema 2.6 y la proposición 2.7 se tiene

$$V = \mathcal{V}(x_1 + x_2 + x_3,\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,\ x_1x_2x_3,\ x_4x_5) = \mathcal{V}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) \cup \mathcal{V}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_5)$$

Entonces, las componentes irreducibles de V son $\mathcal{V}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ y $\mathcal{V}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_5)$.

Definición 2.24. (Dimesión). Sea V una variedad algebraica irreducible en $\mathbb{A}_K^n$. La dimensión de V, denotada por $\dim V$, es el supremo de los enteros r tales que existe una cadena de variedades irreducibles $V = V_0 \supsetneqq V_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq V_r$. Además, para una variedad arbitraria V con descomposición en componentes irreducibles $V = V_1 \cup \cdots \cup V_s$, donde $V_i \nsubseteq V_j$ para $i \neq j$, la dimensión de V se define por la ecuación

$$\dim V = \sup\{\dim V_i : i = 1, \ldots, s\}.$$

Finalmente, si $\dim V_i = k$ para todo $i = 1, \ldots, s$, se dice que la variedad V es equidimensional de dimensión pura k y se escribe V es $EqD(k)$.

Observación 2.25. Sea $V_0 \supsetneqq V_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq V_s$ una cadena de variedades irreducibles en $\mathbb{A}_K^n$ y sea $P_i = \mathcal{J}(V_i)$. Por el lema 2.10 se tiene la cadena $P_0 \subsetneqq P_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq P_s$ de ideales primos en $K[x_1, \ldots, x_n]$ y dado que dim Krull$(K[x_1, \ldots, x_n]) = n$, se tiene $s \leq n$, esto implica que cualquier cadena $V_0 \supsetneqq V_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq V_s$ de variedades irreducibles en $\mathbb{A}_K^n$ tiene longitud a lo mas n. Esto garantiza la existencia del supremo r que se menciona en la definición 2.24.

Ejemplo 2.26.

1. Sean $X = \{x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n\}$ e I un subconjunto no vacio de X de cardinal r, considere $A = X - I$, observe que se puede escribir $A = \{x_{j_1},\ x_{j_2}, \ldots,\ x_{j_s}\}$ donde $s = n - r$. En $\mathbb{A}^n_K$ tome la variedad $V = \mathcal{V}(I)$, la siguiente cadena de variedades ireducibles (ver 2.18)
$$V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq V_2 \supsetneq \cdots \supsetneq V_s$$
donde $V_i = \mathcal{V}(I,\ x_{j_1},\ x_{j_2}, \ldots,\ x_{j_i})$, para $i = 1, 2, \ldots, s$ tiene longitud máxima, por lo tanto $\dim V = s = n - r$.

2. En $\mathbb{A}^5_K$ considere la variedad $V = V_1 \cup V_2$ donde $V_1 = \mathcal{V}_1(x_3,\ x_1,\ x_5,\ x_2)$ y $V_2 = \mathcal{V}_2(x_5,\ x_3)$ por el item anterior se tiene $\dim V_1 = 1$ y $\dim V_2 = 3$, entonces por la definicióm de dimensión se tiene $\dim V = \sup\{\dim V_1, \dim V_2\} = 3$.

3. En $\mathbb{A}^9_K$ la variedad $V = V_1 \cup V_2$ donde $V_1 = \mathcal{V}_1(x_3,\ x_1,\ x_5,\ x_2)$ y $V_2 = \mathcal{V}_2(x_3,\ x_1,\ x_4,\ x_2)$, por el item 1 se tiene $\dim V_1 = 5$ y $\dim V_2 = 5$, entonces $\dim V = \sup\{\dim V_1, \dim V_2\} = 5$. Además dado que V_1 y V_2 tienen la misma dimensión se dice que V es $EqD(5)$.

2.2. Secuencias Regulares Sobre Anillos

Definición 2.27. (Elemento regular y secuencia regular). Sea A un anillo conmutativo con identidad. Un elemento $a \in A$ se dice *regular* sobre A si a no es ni divisor de cero ni unidad en A. Una secuencia $a_1, \ldots, a_t$ de elementos en A se denomina *regular* sobre A si cumple las dos condiciones siguientes:

1. El elemento a_1 es regular sobre A y para todo $i \in \{2, \ldots, t\}$ la clase del elemento a_i es regular sobre el anillo A/J_{i-1}, donde $J_{i-1} = \langle a_1, \ldots, a_{i-1}\rangle$ es el ideal de A generado por la secuencia $a_1, \ldots, a_{i-1}$.

2. $A/J_t \neq \{0\}$.

La definición de secuencia regular depende del orden de los elementos en la secuencia, puede suceder que después de una permutación de los elementos de una secuencia regular, la nueva secuencia no sea regular como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.28. Sea $A = \mathbb{F}[x,\ y,\ z]$ el anillo de polinomios en tres variables con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{F}$. La secuencia $x,\ y(1-x),\ z(1-x)$ es regular porque el polinomio x es un elemento regular del anillo A, la clase $\overline{y(1-x)} = \overline{y} - \overline{yx} = \overline{y}$ en el anillo $A/\langle x\rangle$ y $\overline{y}$ es un elemento regular sobre este anillo y finalmente, la clase de $\overline{z(1-x)} = \overline{z} - \overline{zx} = \overline{z}$ en el anillo $A/\langle x, y(1-x)\rangle$, $\overline{z}$ es regular sobre este anillo y $A/\langle x, y(1-x)\rangle$ no es el anillo $\{0\}$. Pero la secuencia $y(1-x),\ z(1-x),\ x$ no es regular porque la clase $\overline{z(1-x)}$ es un divisor de cero en el anillo $A/\langle y(1-x)\rangle$ porque $\overline{z(1-x)}\overline{y} = \overline{z}\overline{y(1-x)} = \overline{z}\overline{0} = \overline{0}$.

Las proposiciones que se presentan a continuación se utilizan en el desarroollo del último capítulo pero en sus demostraciones se utilizan conceptos del álgebra que en el momento no están al alcance de los autores, sin embargo, las demostraciones se puede encontrar en [8], p. 127. Para las tres proposiciones, A denota el anillo de polinomios en n variables con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{F}$. Recuerde que un monomio en n-variables conmutativas $x_1, \ldots,\ x_n$ es una expresión de la forma $ax_1^{k_1} \cdots ax_n^{k_n}$, donde $a \in \mathbb{F}$ y $k_1, \ldots,\ k_n$ son enteros no negativos, el grado del monomio $ax_1^{k_1} \cdots ax_n^{k_n}$ se define por $\text{gra}(ax_1^{k_1} \cdots ax_n^{k_n}) = k_1 + \cdots + k_n$. Un polinomio $f \in A$ es una suma finita de monomios y el grado de f es el máximo de los grados de los monomios que conforman a f, finalmente, se dice que f es un *polinomio homogéneo* si todos sus monomios tienen el mismo grado. Por ejemplo, el polinomio $f = x^3 - 2x^2y + xyz - z^3$ es homogéneo ya que todos sus monomios tienen grado 3.

Proposición 2.29. *Sea $f_1, \ldots, f_t$ una secuencia de polinomios en A, con $t \leq n$. La secuencia $f_1, \ldots, f_t$ es regular sobre A si, y sólamente si, para toda $i = 1, \ldots, t$, la variedad $\mathcal{V}(f_1 \ldots, f_i)$ es $EqD(n-i)$.*

Proposición 2.30. *Si $f_1, \ldots, f_t$ es una secuencia regular de polinomios homogéneos sobre A, entonces se satisfacen los siguientes enunciados:*

1. *Para toda permutación $\sigma \in S_t$, la secuencia $f_{\sigma(1)}, \ldots, f_{\sigma(t)}$ es regular sobre A.*
2. *Cualquier subsecuencia de $f_1, \ldots, f_t$ es regular en A.*
3. *Si $\mathcal{V}(f_1, \ldots, f_t)$ es $EqD(n-t)$, entonces la variedad determinada por cualquier subsecuencia de $f_1, \ldots, f_t$ es $EqD(n-s)$, donde s es la longitud de la subsecuencia.*

Ejemplo 2.31. Determinar si la secuencia $x + y,\ xy - zw$ es regular en el anillo de polinomios $\mathbb{C}[x,\ y,\ z,\ w]$. Para esto, considere la variedad $V = \mathcal{V}(z,\ x+y,\ xy - zw)$, por el lema 2.6 se tiene $V = \mathcal{V}(z,\ x+y,\ xy) = \mathcal{V}(z) \cap \mathcal{V}(x+y,\ xy)$. Por la proposición 2.7 se sigue que

$$V = \mathcal{V}(z) \cap \mathcal{V}(x,\ y) = \mathcal{V}(x,\ y,\ z)$$

Por la proposición 2.18, la variedad $\mathcal{V}(x,\ y,\ z)$ es irreducible, además es de dimensión 1, luego V es $EqD(1)$ y por la proposición 2.29 la secuencia $z,\ x+y,\ xy-zw$ es regular. Dado que los polinomios de la secuencia son homogéneos, por la proposición 2.30 cualquier subsecuencia es regular, por lo tanto la secuencia $x+y,\ xy - zw$ es regular en el anillo de polinomios $\mathbb{C}[x,\ y,\ z,\ w]$.

Capítulo 3

Generadores de las Subálgebras de Mishchenko-Fomenko y Secuencias Regulares

En teoría de Representaciones de Álgebras de Lie es importante estudiar los pares $(U(\mathfrak{g}), B)$, donde $U(\mathfrak{g})$ es el álgebra envolvente universal de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, B es una subálgebra conmutativa de $U(\mathfrak{g})$ y $U(\mathfrak{g})$ es un B-módulo libre. Con estas condiciones, todo B-módulo irreducible se puede levantar hasta un $U(\mathfrak{g})$-módulo irreducible.
En esta linea de estudio, el famoso teorema de Kostant [7] afirma que el álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$ de una $\mathbb{C}$-álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$ es un módulo libre sobre su centro. Para el caso de la $\mathbb{C}$-álgebra de Lie gl_n de las matrices de tamaño $n \times n$, Ovsienko [12] establece que $U(gl_n)$ es un módulo libre sobre la subalgebra de Gelfand-Tsetlin. Por el teorema principal de Futorny-Molev [2] se sabe que dado un elemento μ del espacio dual gl_n^* existe una subalgebra conmutativa $\mathcal{A}_\mu$ de $U(gl_n)$ tal que $gr\mathcal{A}_\mu = \overline{\mathcal{A}_\mu}$, donde $\overline{\mathcal{A}_\mu}$ es la subalgebra *Mishchenko-Fomenko* asociada al parámetro μ construida por el método de cambio de argumento, además, por Futorny-Ovsienko [3] se sabe que $U(gl_n)$ es un $\mathcal{A}_\mu$-módulo libre cuando la subalgebra $\overline{\mathcal{A}_\mu}$ es generada por una secuencia regular en $\mathcal{S}(gl_n)$. Según el trabajo de A. Moreau [10], la subalgebra $\overline{\mathcal{A}_\mu}$ es generada por una secuencia regular cuando μ es un elemento regular nilpotente. En el siguiente capítulo se mostrará que este resultado se satisface para todo parámetro μ en gl_2 y gl_3 y además, que en gl_4 el resultado se extiende para toda μ nilpotente. Estas pruebas utilizan un conjunto de generadores algebráicamente independientes de la subálgebra de Mischenko-Fomenko $\overline{\mathcal{A}_\mu}$ determinadas por Futorny-Molev en [2].

3.1. Subálgebras de Mishchenko-Fomenko

Sea $n \in \mathbb{Z}^+$, el teorema principal de Futorny-Molev [2] proporciona una forma de elegir un conjunto de polinomios algebraicamente independientes en el álgebra simétrica $S(gl_n)$ que generan la subálgebra de Mischenko-Fomenko $\mathcal{A}_\mu$ para un elemento arbitrario μ. El procedimiento para obtener este conjunto de generadores se describe a continuación:
Sea $E = (e_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n y sean $I = \{i_1 < \cdots < i_t\}$ y $J = \{j_1 < \cdots < j_t\}$ subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$. Con $E(I, J)$ se denota el siguiente determinante:

$$E(I,J) := \det \begin{pmatrix} e_{i_1j_1} & e_{i_1j_2} & \cdots & e_{i_1j_t} \\ e_{i_2j_1} & e_{i_2j_2} & \cdots & e_{i_2j_t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{i_tj_1} & e_{i_tj_2} & \cdots & e_{i_tj_t} \end{pmatrix}$$

Además, se define, $E(\emptyset, \emptyset) = 1$.

Ejemplo 3.1. Sea $E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$. Se tiene $E(3,3) = \det(e_{33}) = \det(7) = 7$. Para $I = \{1,3\}$ y $J = \{2,3\}$ se tiene

$$E(I,J) = \det \begin{pmatrix} e_{12} & e_{13} \\ e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = 21 + 6 = 27$$

Ahora, sea μ un elemento del espacio dual gl_n^*. Para describir el subconjunto de generadores de la subálgebra $\mathcal{A}_\mu$, se identifica gl_n^* con gl_n a través de una forma bilineal simétrica y así, se puede visualizar a μ como una matriz cuadrada de orden n. Suponga que los valores propios de μ son $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ y que $\lambda_i \neq \lambda_j$ cuando $i \neq j$. Si el valor propio λ_i tiene asociado k bloques de Jordan de tamaños $r_{i1} \geq r_{i2} \geq \cdots \geq r_{ik}$, con $J(r_{ij},\ \lambda_i)$ se denotará el bloque de Jordan de tamaño $r_{ij} \times r_{ij}$ asociado al valor propio λ_i, es decir

$$J(r_{ij},\ \lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{r_{ij} \times r_{ij}}$$

Ahora, denote con $\alpha(\lambda_i)$ el diagrama Young [1] cuya j-ésima fila tiene r_j cajas y sea $|\alpha(\lambda_i)|$ el número total de cajas en este diagrama. Luego, $|\alpha(\lambda_i)| = r_{i1} + \cdots + r_{ik}$. Con estos datos, introduzca otro

[1]Diagrama de Young es una disposición de casillas colocadas por filas de modo que cada fila tiene una cantidad menor o igual de casillas que la fila anterior.

diagrama de Young γ de tal manera que el número de cajas γ_l de la l-ésima fila de γ sea el número total de cajas que están estrictamente por debajo de la l-ésima fila en todos los diagramas $\alpha(\lambda_i)$, es decir

$$\gamma_l = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j \geq l+1} r_{ij},$$

Ahora, dado un conjunto N y un entero no negativo $m \leq |N|$, con $\mathcal{P}(N,\ m)$ se denota la colección de subconjuntos de N de cardinal m, es decir, $\mathcal{P}(N,\ m) = \{B \subseteq N : |B| = m\}$. Sea $N = \{1, \ldots, n\}$ y $\{x_{ij} : i, j \in N\}$ un conjunto de n^2 variables conmutativas, para $m = 1, \ldots, n$ y $k = 0, \ldots,\ m-1$ se define el polinomio $\phi_m^{(k)}$ de la siguiente forma:

$$\phi_m^{(k)} = \sum_{I \in \mathcal{P}(N,m)} \sum_{B,C \in \mathcal{P}(I,k)} (\text{sgn}\sigma)\mu(B,C)E(I \backslash B, I \backslash C) \tag{3.1.1}$$

Donde sgnσ denota el signo de la permutación $\sigma = \begin{pmatrix} B & I\backslash B \\ C & I\backslash C \end{pmatrix}$ y $E = (x_{ij})_{n\times n}$[2]. Además, asocie los elementos de la familia $\phi_m^{(k)}$ con las cajas del diagrama $\Gamma = (n, n-1, \ldots, 1)$ de modo que en la ij-ésima caja de Γ corresponda al polinomio $\phi_{n-j+1}^{(n-i-j+1)}$, como se ilustra en el diagrama siguiente:

$$\Gamma = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
\phi_n^{(n-1)} & \phi_{n-1}^{(n-2)} & \cdots & \phi_2^{(1)} & \phi_1^{(0)} \\
\hline
\phi_n^{(n-2)} & \phi_{n-1}^{(n-3)} & \cdots & \phi_2^{(0)} & \\
\cline{1-4}
\cdots & \cdots & \ddots & & \\
\cline{1-3}
\phi_n^{(1)} & \phi_{n-1}^{(0)} & & & \\
\cline{1-2}
\phi_n^{(0)} & & & & \\
\cline{1-1}
\end{array}$$

Teorema 3.2. ***(Futorny-Molev)*** *Los polinomios $\phi_m^{(k)}$ que corresponden a las cajas del diagrama Γ que no están en el diagrama γ son generadores algebraicamente independientes de la subálgebra $\mathcal{A}_\mu$. Además, gr$\mathcal{A}_\mu = \overline{\mathcal{A}_\mu}$, donde $\overline{\mathcal{A}_\mu}$ es la subalgebra de Mishchenko-Fomenko en $S(\mathfrak{g})$ asociada al parámetro μ.*

Ejemplo 3.3. Considere la forma canónica de Jordan $\mu = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Los valores propios de μ son 2 y 1 y los bloques de Jordan para μ son: $J(2,\ 2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $J(1,\ 2) = (2)$ y $J(1\ 1) = (1)$ y

[2]Observe que, en el caso $B = C = \emptyset$, se tiene $\sigma = id_n$, donde id_n es la permutación identidad de orden n y sgnσ = sgn $id_n = 1$.

se forman los diagramas de Young $\alpha(2) = (2,\ 1)$, $\alpha(1) = (1)$ y $\gamma = (1)$, es decir, el diagrama γ tiene una sola caja. Finalmente, para obtener los polinomios generadores del álgebra $\overline{\mathcal{A}_\mu}$ se sobrepone el diagrama γ sobre el diagrama Γ empezando en la primera caja de la primera fila, los generadores serán aquellos que queden en las cajas que no se eliminen.

$$\Gamma = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \phi_4^{(3)} & \phi_3^{(2)} & \phi_2^{(1)} & \phi_1^{(0)} \\ \hline \phi_4^{(2)} & \phi_3^{(1)} & \phi_2^{(0)} & \\ \cline{1-3} \phi_4^{(1)} & \phi_3^{(0)} & & \\ \cline{1-2} \phi_4^{(0)} & & & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Al sobreponer γ sobre el diagrama Γ se obtienen los generadores del álgebra $\overline{\mathcal{A}_\mu}$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \phi_3^{(2)} & \phi_2^{(1)} & \phi_1^{(0)} \\ \hline \phi_4^{(2)} & \phi_3^{(1)} & \phi_2^{(0)} & \\ \cline{1-3} \phi_4^{(1)} & \phi_3^{(0)} & & \\ \cline{1-2} \phi_4^{(0)} & & & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Para ilustrar la forma como se determinan los generadores del álgebra $\overline{\mathcal{A}_\mu}$, a continuación se calcula el polinomio $\phi_2^{(1)}$:

$$\phi_2^{(1)} = \sum_{I\in\mathcal{P}(N,2)} \sum_{B,C\in\mathcal{P}(I,1)} (\text{sgn}\sigma)\mu(B,C)E(I\backslash B, I\backslash C)$$

Donde $N = \{1,2,3,4\}$. Para $I = \{1,2\}$, cada una de las posibilidades para los subconjuntos B y C dan origen a uno de los términos del polinomio $\phi_2^{(1)}$, las posibilidades son las siguientes:

1. Con $B = C = \{1\}$, se tiene el término $\text{sgn}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\mu(1,1)E(2,2) = 2x_{22}$.

2. Con $B = C = \{2\}$, se tiene el término $\text{sgn}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\mu(2,2)E(1,1) = 2x_{11}$.

3. Con $B = \{1\}$ y $C = \{2\}$, se tiene el término $\text{sgn}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\mu(1,2)E(2,1) = -x_{21}$.

4. Con $B = \{2\}$ y $C = \{1\}$, se tiene el término $\text{sgn}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\mu(2,1)E(1,2) = 0$.

De forma similar se calculan los demás sumandos del polinomio, al realizar todos los cálculos se obtiene

$$\phi_2^{(1)} = 2x_{22} + 2x_{11} - x_{21} + 2x_{33} + 2x_{11} + 2x_{44} + x_{11} + 2x_{33} + 2x_{22} + 2x_{44} + x_{22} + 2x_{44} + x_{33}$$

Para el desarrollo del siguiente capítulo es necesario calcular los polinomios generadores de todas las formas posibles para μ, sin embargo, el anterior ejemplo permite observar que la forma de calcular los polinomios generadores de las subálgebras de Mischenko-Fomenko resulta ser un proceso muy extenso, por tal motivo los autores de este trabajo diseñaron un algoritmo (ver 4.3.3) que permitió realizar estos cálculos, es decir, todos los polinomios que aparecen en el siguiente capítulo fueron calculados empelando este algoritmo que fue implementado en el software algebraico Sage Math.

Capítulo 4

Subálgebras de Mishchenko-Fomenko en $S(gl_n)$

En este capítulo se presentan las demostraciones de los teoremas principales que sustentan este trabajo, dichos teoremas establecen que para gl_2, gl_3 y algunos casos de gl_4 los polinomios generadores de las subálgebras de Mischenko-Fomenko forman una secuencia regular sobre el álgebra $S(gl_n)$. Para las demostraciones que se presentan a continuación se utilizan temas de geometría algebraica, por tal razón se recomienda al lector tener claros los conceptos y teoremas del capítulo 2 de este trabajo.

Proposición 4.1. *Si μ y ξ son matrices semejantes de $gl_n(\mathbb{C})$ entonces $\overline{A_\mu} = \overline{A_\xi}$.*

Demostración. Es consecuencia inmediata del hecho de que las matrices semejantes tienen la misma forma canónica de Jordan. ■

Proposición 4.2. *Sea I_n la matriz identidad en gl_n. Si $\mu = \lambda I_n$, con $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces la subálgebra de Mischenko-Fomenko $\overline{A}_\mu \subset S(gl_n)$ es generada por una secuencia regular sobre $S(gl_n)$.*

Demostración. En este caso la matriz μ tiene n bloques de Jordan de tamaño 1 asociados al mismo valor propio λ, luego se forma un único diagrama de Young $\alpha(\lambda) = (1, 1, \ldots, 1)$ de n filas y cada fila con una sola caja. Luego, el diagrama de Young $\gamma = (n-1, n-2, \ldots, 1)$ tiene $n-1$ filas y la i-ésima fila tiene $n-i$ cajas. Al sobreponer el diagrama γ sobre el diagrama Γ se obtienen los generadores: $\phi_n^{(0)}$, $\phi_{n-1}^{(0)}, \ldots, \phi_2^{(0)}$, $\phi_1^{(0)}$. Al realizar los cálculos para $m = 1$ se obtiene el polinomio:

$$\phi_1^{(0)} = x_{11} + \cdots + x_{nn} = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$$

Y tomando $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, para $m = 2, \ldots, n$, el polinomio $\phi_m^{(k)}$ queda de la siguiente forma:

$$\phi_m^{(0)} = \sum_{I \in \mathcal{P}(N,m)} \sum_{B,C \in \mathcal{P}(I,0)} (\mathrm{sgn}\sigma)\mu(B,C)E(I \backslash B, I \backslash C) = \sum_{I \in \mathcal{P}(N,m)} E(I,I)$$

En total se pueden obtener $r = \binom{n}{m}$ subconjuntos $I_i \in \mathcal{P}(N,m)$, además cada uno de estos subconjunto I_i con $1 \leq i \leq r$ se puede escribir como $I_i = \{i_1 \leq \cdots \leq i_m\}$. Así $\phi_m^{(0)}$ tiene la forma:

$$\phi_m^{(0)} = E(I_1, I_1) + E(I_2, I_2) + \cdots + E(I_{r-1}, I_{r-1}) + E(I_r, I_r)$$

Calculando el determinante $E(I_i, I_i)$ se tiene:

$$E(I_i, I_i) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\prod_{w=1}^{n} x_{i_w \sigma(i_w)} \right) = x_{i_1 i_1} \cdots x_{i_m i_m} + f_i$$

Donde cada monomio del polinomio f_i es múltiplo de por lo menos una variable $x_{i_j i_k}$ con $j \neq k$. Entonces $\phi_m^{(0)}$ tiene la siguiente forma:

$$\phi_m^{(0)} = \sum_{i=1}^{r} f_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i_1 < \cdots < i_m}}^{r} x_{i_1 i_1} \cdots x_{i_m i_m} = f_m + \sum_{\substack{i=1 \\ i_1 < \cdots < i_m}}^{r} x_{i_1 i_1} \cdots x_{i_m i_m}$$

Donde f_m es un polinomio en el anillo $R = \mathbb{C}[x_{ij} : i, j = 1, \ldots, n]$ donde cada monomio de f_m es múltiplo de al menos una de las variables $x_{i_j i_k}$ con $j \neq k$. Ahora, sea $X = \{x_{ij} : i, j = 1, \ldots n,\ i \neq j\}$ y considere la variedad $V = \mathcal{V}\left(\phi_1^{(0)}, \phi_2^{(0)}, \ldots, \phi_n^{(0)}, X\right)$. Por el lema 2.6 se tiene:

$$V = \mathcal{V}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}, \sum_{\substack{i=1 \\ i_1 < i_2}}^{r} x_{i_1 i_1} x_{i_2 i_2}, \ldots \sum_{\substack{i=1 \\ i_1 < \cdots < i_m}}^{r} x_{i_1 i_1} \cdots x_{i_m i_m}, X \right)$$

Por la proposición 2.7, $V = \mathcal{V}(x_{11}, \ldots, x_{nn}, X)$, por lo tanto V es $EqD(n^2 - (n + |X|)) = EqD(0)$. De la proposición 2.29, la secuencia $\phi_1^{(0)}, \phi_2^{(0)}, \ldots, \phi_n^{(0)}, X$ es regular sobre R, además, los polinomios en esa secuencia son homogéneos, luego de la proposición 2.30 la secuencia $\phi_1^{(0)}, \phi_2^{(0)}, \ldots, \phi_n^{(0)}$ es regular y la prueba está completa. ■

Observación 4.3. Para una forma canónica de Jordan μ, el teorema de Futorny-Molev 3.2 establece que los generadores de la subálgebra de Mischenko-Fomenko $\overline{\mathcal{A}_\mu}$ dependen únicamente de los tamaños de los bloques de Jordan en que se puede descomponer μ y no de los valores propios particulares de la forma canónica de Jordan μ. Este hecho se utilizará en la prueba de los teoremas para gl_2 y gl_3.

4.1. Teorema para gl_2

Teorema 4.4. *Si μ es una forma canónica de Jordan en gl_2, entonces los generadores de la subálgebra de Mischenko-Fomenko $\overline{A_\mu}$ forman una secuencia regular en el anillo de polnomios $A = \mathbb{C}[x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}]$.*

Demostración. Sea μ una forma canónica de Jordan en gl_2, los generadores de la subálgebra de Mischenko-Fomenko $\overline{\mathcal{A}_\mu}$ dependen de los tamaños de los bloques de Jordan en que se pueda descomponer μ, esto permite establecer que las posibilidades para la forma canónica de Jordan μ son las siguientes: μ consta de dos bloques de Jordan de tamaño 1 asociados al mismo valor propio, μ consta de un único bloque de Jordan de tamaño 2 o μ consta de dos bloques de Jordan de tamaño 1 asociados a dos valores propios distintos. En el primer caso, μ es un múltiplo escalar de la identidad y el resultado se sigue de la proposición 4.2. Para los casos restantes se demostrará que los generadores de la subálgebra $\overline{\mathcal{A}_\mu}$ forman una secuencia regular sobre el anillo usando la proposición 2.29, es decir, se probará que la variedad determinada por los generadores es $EqD(4-t)$ donde t es el número de generadores. Para el caso en que μ consta de un único bloque de Jordan de tamaño 2 asociado al mismo valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$, se obtiene que la subálgebra $\overline{\mathcal{A}_\mu}$ es generada por la secuencia

$$I = \{x_{11} + x_{22},\ x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12},\ \lambda(x_{11} + x_{22}) - x_{21}\}$$

Por el lema 2.6 se tiene

$$\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(x_{11} + x_{22},\ x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12},\ x_{21}) = \mathcal{V}(x_{11} + x_{22},\ x_{11}x_{22},\ x_{21})$$

Luego, $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(x_{11} + x_{22},\ x_{11},\ x_{21}) \cup \mathcal{V}(x_{11} + x_{22},\ x_{22},\ x_{21})$, pero

$$\mathcal{V}(x_{11} + x_{22},\ x_{11},\ x_{21}) = \mathcal{V}(x_{22},\ x_{11},\ x_{21}) = \mathcal{V}(x_{11} + x_{22},\ x_{22},\ x_{21}),$$

entonces $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(x_{11},\ x_{22},\ x_{21})$. Por la proposición 2.18, $\mathcal{V}(x_{11},\ x_{22},\ x_{21})$ es irreducible y su dimensión es $4 - 3 = 1$, luego $\mathcal{V}(I)$ es $EqD(1)$, por lo tanto, I es una secuencia regular sobre A. Para terminar, en el caso que μ consta de dos bloques de Jordan de tamaño 1 asociados a valores distintos α y β en $\mathbb{C}$, la subálgebra $\overline{\mathcal{A}_\mu}$ es generada por la secuencia

$$I = \{x_{11} + x_{22},\ x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12},\ \lambda x_{22} + \beta x_{11}\}$$

Puesto que en $\mathcal{V}(I)$ se cumple $x_{11} + x_{22} = 0$, al sustitur $x_{22} = -x_{11}$, se tiene

$$\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(x_{11} + x_{22},\ x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12},\ (\beta - \lambda)(x_{11}))$$

Dado que $\beta - \lambda \neq 0$, por el lema 2.6 se gerantiza que

$$\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(x_{11} + x_{22},\ x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12},\ x_{11}) = \mathcal{V}(x_{22},\ -x_{21}x_{12},\ x_{11}) = V \cup W$$

Donde $V = \mathcal{V}(x_{22},\ x_{21},\ x_{11})$ y $W = \mathcal{V}(x_{22},\ x_{12},\ x_{11})$. Por la proposición 2.18, V y W son variedades irreducibles y las dos tienen dimensión 1, luego $\mathcal{V}(I)$ es $EqD(1)$, por lo tanto, I es una secuencia regular sobre A. ∎

4.2. Teorema para gl_3

Sea f un elemento del anillo de polinomios $A = \mathbb{C}[x_{ij} : i, j = 1, \dots, n]$ y sea X un subconjunto no vacío de variables en $\{x_{ij} : i, j = 1, \dots, n\}$. En las pruebas de los teoremas siguientes, con $f(X)$ se denotará el polinomio que se obtiene de f haciendo cero todas las variables del conjunto X. Si $X = \{x_{ij}\}$, $f(X)$ se denota con $f(x_{ij})$.

Teorema 4.5. *Si μ es una forma canónica de Jordan en gl_3, entonces los generadores de la subálgebra de Mischenko-Fomenko $\overline{A_\mu}$ forman una secuencia regular en el anillo de polnomios $A = \mathbb{C}[x_{ij} : i, j = 1, 2, 3]$.*

Demostración. Por la proposición 2.29 es suficiente mostrar que la variedad determinada por los generadores de $\overline{\mathcal{A}_\mu}$ es equidimensional en cualquiera de las posibilidades que tiene la forma canónica de Jordan μ en gl_3. Para el caso en que μ es multiplo escalar de la identidad, el resultado se sigue de la proposición 4.2 y en los casos restantes μ es una de las formas canónicas de Jordan que se presentan a continuación:

$$1.\ \mu = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad 2.\ \mu = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad 3.\ \mu = \begin{pmatrix} \beta & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$4.\ \mu = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \qquad 5.\ \mu = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix},$$

donde λ, β y δ son distintos por pares.

4.2.1. Caso 1

Para el caso en que μ consta de dos bloques de Jordan asociados al mismo valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$, la subálgebra $\overline{\mathcal{A}_\mu}$ es generada por la secuencia $\mathcal{G} = \{\phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)},\ \phi_3^{(0)},\ \phi_2^{(1)},\ \phi_3^{(1)}\}$, donde

$$\begin{aligned}
\phi_1^{(0)} &= x_{11} + x_{22} + x_{33} \\
\phi_2^{(0)} &= -x_{12}x_{21} + x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31} - x_{23}x_{32} + x_{11}x_{33} + x_{22}x_{33} \\
\phi_3^{(0)} &= -(x_{23}x_{32} - x_{22}x_{33})x_{11} + (x_{13}x_{32} - x_{12}x_{33})x_{21} - (x_{13}x_{22} - x_{12}x_{23})x_{31} \\
\phi_2^{(1)} &= 2\lambda x_{11} + 2\lambda x_{22} + 2\lambda x_{33} - x_{21} = 2\lambda\phi_1^{(0)} - x_{21} \\
\phi_3^{(1)} &= -(x_{12}x_{21} - x_{11}x_{22})\lambda - (x_{13}x_{31} - x_{11}x_{33})\lambda - (x_{23}x_{32} - x_{22}x_{33})\lambda + x_{23}x_{31} - x_{21}x_{33} \\
&= \lambda\phi_2^{(0)} + x_{23}x_{31} - x_{21}x_{33}
\end{aligned}$$

La regularidad de la secuencia $\mathcal{G}$ se obtendrá como consecuencia de la proposición 2.30, mostrando que la variedad determinada por la secuencia de polinomios homogéneos $\mathcal{H} = \{x_{33}\} \cup \mathcal{G}$ es $EqD(3)$.

Por el lema 2.6 se tiene que $\mathcal{V}(\mathcal{H}) = \mathcal{V}(x_{33},\ x_{11}+x_{22},\ \phi_2^{(0)}(x_{33}),\ \phi_3^{(0)}(x_{33}),\ x_{21},\ x_{23}x_{31})$, así mismo, $\mathcal{V}(\mathcal{H}) = \mathcal{V}(x_{33},\ x_{11}+x_{22},\ \phi_2^{(0)}(X),\ \phi_3^{(0)}(X),\ x_{21},\ x_{23}x_{31})$, donde $X = \{x_{33}, x_{21}\}$. De aquí se sigue que $\mathcal{V}(\mathcal{H}) = V \cup W$ donde

$$V = \mathcal{V}(x_{33},\ x_{11}+x_{22},\ \phi_2^{(0)}(Y),\ \phi_3^{(0)}(Y),\ x_{21},\ x_{23})$$
$$W = \mathcal{V}(x_{33},\ x_{11}+x_{22},\ \phi_2^{(0)}(Z),\ \phi_3^{(0)}(Z),\ x_{21},\ x_{31})$$

donde $Y = X \cup \{x_{23}\}$ y $Z = X \cup \{x_{31}\}$. Observe que $\phi_3^{(0)}(Y) = x_{31}x_{13}x_{22}$ y $\phi_3^{(0)}(Z) = x_{11}x_{23}x_{32}$, por tanto, se tiene $V = V_1 \cup V_2$ y $W = W_1 \cup W_2$, donde

$$V_1 = \mathcal{V}(x_{33},\ x_{11}+x_{22},\ \phi_2^{(0)}(Y),\ x_{22},\ x_{21},\ x_{23}) = \mathcal{V}(x_{33},\ x_{11},\ x_{13}x_{31},\ x_{22},\ x_{21},\ x_{23})$$
$$V_2 = \mathcal{V}(x_{33},\ x_{11}+x_{22},\ \phi_2^{(0)}(Y),\ x_{31}x_{13},\ x_{21},\ x_{23}) = \mathcal{V}(x_{33},\ x_{11}+x_{22},\ x_{11}x_{22},\ x_{31}x_{13},\ x_{21},\ x_{23})$$
$$W_1 = \mathcal{V}(x_{33},\ x_{11}+x_{22},\ \phi_2^{(0)}(Z),\ x_{11},\ x_{21},\ x_{31}) = \mathcal{V}(x_{33},\ x_{22},\ x_{23}x_{32},\ x_{11},\ x_{21},\ x_{31})$$
$$W_2 = \mathcal{V}(x_{33},\ x_{11}+x_{22},\ \phi_2^{(0)}(Z),\ x_{23}x_{32},\ x_{21},\ x_{31}) = \mathcal{V}(x_{33},\ x_{11}+x_{22},\ x_{11}x_{22},\ x_{23}x_{32},\ x_{21},\ x_{31})$$

Por la proposición 2.7 se tiene

$$V_2 = \mathcal{V}(x_{33},\ x_{11},\ x_{22},\ x_{31}x_{13},\ x_{21},\ x_{23}) = V_1$$
$$W_2 = \mathcal{V}(x_{33},\ x_{11},\ x_{22},\ x_{32}x_{23},\ x_{21},\ x_{31}) = W_1$$

Entonces, $V = V_1$ y $W = W_1$, es decir, $\mathcal{V}(\mathcal{H}) = V_1 \cup W_1$. Además, por el lema 2.6 se tiene

$$V_1 = \mathcal{V}(x_{33},\ x_{11},\ x_{13},\ x_{22},\ x_{21},\ x_{23}) \cup \mathcal{V}(x_{33},\ x_{11},\ x_{31},\ x_{22},\ x_{21},\ x_{23})$$
$$W_1 = \mathcal{V}(x_{33},\ x_{22},\ x_{23},\ x_{11},\ x_{21},\ x_{31}) \cup \mathcal{V}(x_{33},\ x_{22},\ x_{32},\ x_{11},\ x_{21},\ x_{31})$$

Así, por la proposición 2.18 $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ es la unión de variedades irreducibles y de forma similar al ejemplo 2.26 se tiene que son de dimensión 3, es decir, $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ es $EqD(3)$, por lo tanto la secuencia $\mathcal{G}$ es regular en el anillo de polinomios A.

4.2.2. Caso 2

Para el caso en que μ consta de un solo bloque de Jordan asociado al valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$, la subálgebra $\overline{\mathcal{A}_\mu}$ es generada por la secuencia $\mathcal{G} = \{\phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)},\ \phi_3^{(0)},\ \phi_2^{(1)},\ \phi_3^{(1)}\}$ donde

$$\phi_1^{(0)} = x_{11} + x_{22} + x_{33}$$
$$\phi_2^{(0)} = -x_{12}x_{21} + x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31} - x_{23}x_{32} + x_{11}x_{33} + x_{22}x_{33}$$
$$\phi_3^{(0)} = -(x_{23}x_{32} - x_{22}x_{33})x_{11} + (x_{13}x_{32} - x_{12}x_{33})x_{21} - (x_{13}x_{22} - x_{12}x_{23})x_{31}$$
$$\phi_2^{(1)} = 2\lambda x_{11} + 2\lambda x_{22} + 2\lambda x_{33} - x_{21} - x_{32} = 2\lambda\phi_1^{(0)} - (x_{21} + x_{32})$$
$$\phi_3^{(1)} = \lambda\phi_2^{(0)} + x_{12}x_{31} + x_{23}x_{31} - x_{11}x_{32} - x_{21}x_{33}$$
$$\phi_3^{(2)} = \lambda^2 x_{11} + \lambda^2 x_{22} + \lambda^2 x_{33} - \lambda x_{21} - \lambda x_{32} + x_{31} = \lambda^2\phi_1^{(0)} - \lambda(x_{21} + x_{32}) + x_{31}$$

Por el lema 2.6 se tiene

$$\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \mathcal{V}(\phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)},\ \phi_3^{(0)},\ x_{21}+x_{32},\ x_{12}x_{31}+x_{23}x_{31}-x_{11}x_{32}-x_{21}x_{33},\ -\lambda(x_{21}+x_{32})+x_{31})$$
$$\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \mathcal{V}(\phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)},\ \phi_3^{(0)},\ x_{21}+x_{32},\ x_{12}x_{31}+x_{23}x_{31}-x_{11}x_{32}-x_{21}x_{33},\ x_{31})$$
$$\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \mathcal{V}(\phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)}(x_{31}),\ \phi_3^{(0)}(x_{31}),\ x_{21}+x_{32},\ x_{11}x_{32}+x_{21}x_{33},\ x_{31})$$

Observe que $x_{11}x_{32}+x_{21}x_{33} = x_{11}(x_{32}+x_{21})+x_{21}(x_{33}-x_{11})$, así remplazando en $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ y haciendo uso del lema 2.6 se garantiza que

$$\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \mathcal{V}(\phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)}(x_{31}),\ \phi_3^{(0)}(x_{31}),\ x_{21}+x_{32},\ x_{11}(x_{32}+x_{21})+x_{21}(x_{33}-x_{11}),\ x_{31})$$
$$\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \mathcal{V}(\phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)}(x_{31}),\ \phi_3^{(0)}(x_{31}),\ x_{21}+x_{32},\ x_{21}(x_{33}-x_{11}),\ x_{31}) = V\cup W$$

donde

$$V = \mathcal{V}(\phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)}(x_{31}),\ \phi_3^{(0)}(x_{31}),\ x_{21}+x_{32},\ x_{21},\ x_{31})$$
$$W = \mathcal{V}(\phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)}(x_{31}),\ \phi_3^{(0)}(x_{31}),\ x_{21}+x_{32},\ x_{33}-x_{11},\ x_{31})$$

Para la variedad V, por el lema 2.6 se tiene:

$$V = \mathcal{V}(\phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)}(\{x_{31},x_{21}\}),\ \phi_3^{(0)}(\{x_{31},x_{21}\}),\ x_{32},\ x_{21},\ x_{31})$$
$$V = \mathcal{V}(\phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)}(\{x_{31},x_{21},x_{32}\}),\ \phi_3^{(0)}(\{x_{31},x_{21},x_{32}\}),\ x_{32},\ x_{21},\ x_{31})$$
$$V = \mathcal{V}(x_{11}+x_{22}+x_{33},\ x_{11}x_{22}+x_{11}x_{33}+x_{22}x_{33},\ x_{11}x_{22}x_{33},\ x_{32},\ x_{21},\ x_{31})$$

De aquí, por la proposición 2.7 se sigue que $V = \mathcal{V}(x_{11},\ x_{22},\ x_{33},\ x_{32},\ x_{21},\ x_{31})$, que por la proposición 2.18 se garantiza que es una variedad irreducible y similarmente al ejemplo 2.26 su dimensión 3, por lo tanto, V es $EqD(3)$. Por otra parte, para probar que W es $EqD(3)$, por la proposición 2.30, es suficiente probar que la variedad $\overline{W} = \mathcal{V}(\{x_{12},\ x_{13},\ \phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)}(x_{31}),\ \phi_3^{(0)}(x_{31}),\ x_{21}+x_{32},\ x_{33}-x_{11},\ x_{31})$ es $EqD(1)$. Sea $X = \{x_{12},\ x_{13},\ x_{31}\}$, por el lema 2.6 se tiene

$$\overline{W} = \mathcal{V}(X,\ \phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)}(X),\ \phi_3^{(0)}(X),\ x_{21}+x_{32},\ x_{33}-x_{11})$$

Observe que $\phi_3^{(0)}(X) = -(x_{23}x_{32}-x_{22}x_{33})x_{11}$, luego por el lema 2.6 se tiene que $\overline{W} = W_1\cup W_2$, donde

$$W_1 = \mathcal{V}(X,\ \phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)}(X),\ x_{11},\ x_{21}+x_{32},\ x_{33}-x_{11})$$
$$W_2 = \mathcal{V}(X,\ \phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)}(X),\ -x_{23}x_{32}+x_{22}x_{33},\ x_{21}+x_{32},\ x_{33}-x_{11})$$

Por el lema 2.6 se tiene

$$W_1 = \mathcal{V}(X,\ x_{22}+x_{33},\ \phi_2^{(0)}(X\cup\{x_{11}\}),\ x_{11},\ x_{21}+x_{32},\ x_{33})$$
$$W_1 = \mathcal{V}(X,\ x_{22},\ x_{23}x_{32},\ x_{11},\ x_{21}+x_{32},\ x_{33}) = W_{11}\cup W_{12}$$
$$W_2 = \mathcal{V}(X,\ \phi_1^{(0)},\ x_{11}x_{22}+x_{11}x_{33},\ -x_{23}x_{32}+x_{22}x_{33},\ x_{21}+x_{32},\ x_{33}-x_{11})$$
$$W_2 = \mathcal{V}(X,\ \phi_1^{(0)},\ x_{11}(x_{22}+x_{33}),\ -x_{23}x_{32}+x_{22}x_{33},\ x_{21}+x_{32},\ x_{33}-x_{11}) = W_{21}\cup W_{22}$$

donde

$$
\begin{aligned}
W_{11} &= \mathcal{V}(X,\ x_{22},\ x_{23},\ x_{11},\ x_{21}+x_{32},\ x_{33})\\
W_{12} &= \mathcal{V}(X,\ x_{22},\ x_{32},\ x_{11},\ x_{21}+x_{32},\ x_{33}) = \mathcal{V}(X,\ x_{22},\ x_{32},\ x_{11},\ x_{21},\ x_{33})\\
W_{21} &= \mathcal{V}(X,\ \phi_1^{(0)},\ x_{11},\ -x_{23}x_{32}+x_{22}x_{33},\ x_{21}+x_{32},\ x_{33}-x_{11})\\
W_{22} &= \mathcal{V}(X,\ \phi_1^{(0)},\ x_{22}+x_{33},\ -x_{23}x_{32}+x_{22}x_{33},\ x_{21}+x_{32},\ x_{33}-x_{11})
\end{aligned}
$$

Observe que $W_{21} = W_1 = W_{22}$, así $W_2 = W_1$, es decir, $\overline{W} = W_1 = W_{11} \cup W_{12}$. Dado que W_{11} y W_{12}, por la proposición 2.18 se sabe que son variedades irreducibles y de forma similar al ejemplo 2.26 se garantiza que son de dimensión 1, se sigue que W_1 es $EqD(1)$, lo cual implica que la variedad W es $EqD(3)$, por lo tanto, $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ es $EqD(3)$ y así, la secuencia $\mathcal{G}$ es regular en el anillo de polinomios A.

4.2.3. Caso 3

Para el caso en que μ consta de dos bloques de Jordan asociados a dos valores propios distintos, el primero de tamaño 2 asociado al valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$ y el segundo de tamaño 1 asociado al valor propio $\beta \in \mathbb{C}$, la subálgebra $\overline{\mathcal{A}_\mu}$ es generada por la secuencia $\mathcal{G} = \{\phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)},\ \phi_3^{(0)},\ \phi_2^{(1)},\ \phi_3^{(1)},\ \phi_3^{(2)}\}$ donde

$$
\begin{aligned}
\phi_1^{(0)} &= x_{11}+x_{22}+x_{33}\\
\phi_2^{(0)} &= -x_{12}x_{21}+x_{11}x_{22}-x_{13}x_{31}-x_{23}x_{32}+x_{11}x_{33}+x_{22}x_{33}\\
\phi_3^{(0)} &= -(x_{23}x_{32}-x_{22}x_{33})x_{11}+(x_{13}x_{32}-x_{12}x_{33})x_{21}-(x_{13}x_{22}-x_{12}x_{23})x_{31}\\
\phi_2^{(1)} &= \lambda x_{11}+\beta x_{11}+\lambda x_{22}+\beta x_{22}+2\lambda x_{33}-x_{21} = \lambda\phi_1^{(0)}+\beta(x_{11}+x_{22})+\lambda x_{33}-x_{21}\\
\phi_3^{(1)} &= \lambda(x_{11}x_{33}-x_{13}x_{31}+x_{22}x_{33}-x_{23}x_{32})+\beta(x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21})+x_{23}x_{31}-x_{21}x_{33}\\
\phi_3^{(2)} &= \lambda\beta x_{11}+\lambda\beta x_{22}+\lambda^2 x_{33}-\beta x_{21} = \lambda(\beta(x_{11}+x_{22})+\lambda x_{33})-\beta x_{21}
\end{aligned}
$$

Por el lema 2.6 se tiene $\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \mathcal{V}(\phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)},\ \phi_3^{(0)},\ \beta(x_{11}+x_{22})+\lambda x_{33}-x_{21},\ \phi_3^{(1)},\ \phi_3^{(2)})$. Dado que en $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ se cumple que $\beta(x_{11}+x_{22})+\lambda x_{33}-x_{21} = 0$, se tiene $\beta(x_{11}+x_{22})+\lambda x_{33} = x_{21}$ y remplazando en $\phi_3^{(2)}$ se sigue que $\phi_3^{(2)} = \lambda x_{21}-\beta x_{21} = -\alpha x_{21}$, donde $\alpha = \beta-\lambda$. Luego, por el lema 2.6 se tiene

$$
\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \mathcal{V}(\phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)}(x_{21}),\ \phi_3^{(0)}(x_{21}),\ \beta(x_{11}+x_{22})+\lambda x_{33},\ \phi_3^{(1)}(x_{21}),\ x_{21})
$$

Ahora bien, dado que en $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ se cumple que $\phi_1^{(0)} = 0$ y $\phi_2^{(0)}(x_{21}) = 0$ se tiene que $x_{11}+x_{22} = -x_{33}$ y $x_{11}x_{33}-x_{13}x_{31}+x_{22}x_{33}-x_{23}x_{32} = -x_{11}x_{22}$ y remplazando se sigue

$$
\begin{aligned}
\phi_3^{(1)}(x_{21}) &= \lambda(-x_{11}x_{22})+\beta x_{11}x_{22}+x_{23}x_{31}\\
\phi_3^{(1)}(x_{21}) &= \alpha x_{11}x_{22}+x_{23}x_{31}
\end{aligned}
$$

Luego, remplazando en $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ y haciendo uso del lema 2.6 se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathcal{G}) &= \mathcal{V}(\phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)}(x_{21}),\ \phi_3^{(0)}(x_{21}),\ -\beta x_{33}+\lambda x_{33},\ \alpha x_{11}x_{22}+x_{23}x_{31},\ x_{21})\\
\mathcal{V}(\mathcal{G}) &= \mathcal{V}(\phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)}(x_{21}),\ \phi_3^{(0)}(x_{21}),\ -\alpha x_{33},\ \alpha x_{11}x_{22}+x_{23}x_{31},\ x_{21})\\
\mathcal{V}(\mathcal{G}) &= \mathcal{V}(\phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)}(x_{21}),\ \phi_3^{(0)}(x_{21}),\ x_{33},\ \alpha x_{11}x_{22}+x_{23}x_{31},\ x_{21})\\
\mathcal{V}(\mathcal{G}) &= \mathcal{V}(X,\ x_{11}+x_{22},\ \phi_2^{(0)}(X),\ \phi_3^{(0)}(X),\ \alpha x_{11}x_{22}+x_{23}x_{31})
\end{aligned}$$

donde $X=\{x_{21},x_{33}\}$. Ahora bien, dado que en la variedad $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ se satisfacen las igualdades $x_{11}+x_{22}=0$ y $\alpha x_{11}x_{22}+x_{23}x_{31}=0$, se tiene $\alpha x_{11}^2=x_{23}x_{31}$ y así, remplazando se sigue que $\phi_3^{(0)}(X)=x_{11}(-x_{23}x_{32}+x_{13}x_{31}+\alpha x_{11}x_{12})$, luego por el lema 2.6 se tiene $\mathcal{V}(\mathcal{G})=V\cup W$, donde

$$\begin{aligned}
V &= \mathcal{V}(X,\ x_{11}+x_{22},\ \phi_2^{(0)}(X),\ x_{11},\ -\alpha x_{11}^2+x_{23}x_{31})\\
W &= \mathcal{V}(X,\ x_{11}+x_{22},\ \phi_2^{(0)}(X),\ -x_{23}x_{32}+x_{13}x_{31}+\alpha x_{11}x_{12},\ -\alpha x_{11}^2+x_{23}x_{31})
\end{aligned}$$

En primer lugar, para la variedad V, por el lema 2.6 se tiene $V=\mathcal{V}(Y,\ x_{13}x_{31}+x_{23}x_{32},\ x_{23}x_{31})$, donde $Y=X\cup\{x_{11},\ x_{22}\}$, luego $V=\mathcal{V}(Y,\ x_{13}x_{31}+x_{23}x_{32},\ x_{23}x_{31})=V_1\cup V_2$, donde

$$\begin{aligned}
V_1 &= \mathcal{V}(Y,\ x_{13}x_{31}+x_{23}x_{32},\ x_{23})=\mathcal{V}(Y,\ x_{13}x_{31},\ x_{23})=\mathcal{V}(Y,\ x_{13},\ x_{23})\cup\mathcal{V}(Y,\ x_{31},\ x_{23})\\
V_2 &= \mathcal{V}(Y,\ x_{13}x_{31}+x_{23}x_{32},\ x_{31})=\mathcal{V}(Y,\ x_{23}x_{32},\ x_{31})=\mathcal{V}(Y,\ x_{23},\ x_{31})\cup\mathcal{V}(Y,\ x_{32},\ x_{31})
\end{aligned}$$

Así, por la proposición 2.18 se tiene que V_1 y V_2 se pueden escribir cada una como unión de dos variedades irreducibles, además, con un proceso igual al seguido en el ejemplo 2.26 se sabe que cada una es de dimensión 3, luego V es $EqD(3)$. En segundo lugar, para mostrar que la variedad W es $EqD(3)$ considere la variedad

$$\overline{W}=\mathcal{V}(x_{31}-x_{12},\ X,\ x_{11}+x_{22},\ \phi_2^{(0)}(X),\ -x_{23}x_{32}+x_{13}x_{31}+\alpha x_{11}x_{12},\ -\alpha x_{11}^2+x_{23}x_{31})$$

Dado que en $\overline{W}$ se cumple la igualdad $-\alpha x_{11}^2+x_{23}x_{31}=0$, se tiene $x_{11}^2=\dfrac{x_{23}x_{31}}{\alpha}$, luego remplazando y haciendo uso del lema 2.6 por el hecho de que $\alpha\neq 0$, se tiene

$$\mathcal{V}(\phi_2^{(0)}(X))=\mathcal{V}\left(-\frac{x_{23}x_{31}}{\alpha}-x_{13}x_{31}-x_{23}x_{32}\right)=\mathcal{V}\left(x_{23}x_{31}+\alpha(x_{13}x_{31}+x_{23}x_{32})\right)$$

y por tanto

$$\overline{W}=\mathcal{V}(x_{31}-x_{12},X,x_{11}+x_{22},x_{23}x_{31}+\alpha(x_{13}x_{31}+x_{23}x_{32}),-x_{23}x_{32}+x_{13}x_{31}+\alpha x_{11}x_{12},-\alpha x_{11}^2+x_{23}x_{31})$$

Ahora, dado que en $\overline{W}$ se satisface que $x_{31}-x_{12}=0$ y $-x_{23}x_{32}+x_{13}x_{31}+\alpha x_{11}x_{12}=0$, se sigue que $x_{23}x_{32}=x_{13}x_{31}+\alpha x_{11}x_{31}$, luego

$$\overline{W}=\mathcal{V}(x_{31}-x_{12},\ X,\ x_{11}+x_{22},\ x_{31}(x_{23}+2\alpha x_{13}+\alpha^2 x_{11}),\ -x_{23}x_{32}+x_{13}x_{31}+\alpha x_{11}x_{31},\ -\alpha x_{11}^2+x_{23}x_{31})$$

Luego, por el lema 2.6 se tiene que $\overline{W} = W_1 \cup W_2$, donde

$$W_1 = \mathcal{V}(x_{31} - x_{12},\ X,\ x_{11} + x_{22},\ x_{31},\ -x_{23}x_{32} + x_{13}x_{31} + \alpha x_{11}x_{31},\ -\alpha x_{11}^2 + x_{23}x_{31})$$
$$W_2 = \mathcal{V}(x_{31} - x_{12}, X, x_{11} + x_{22}, x_{23} + 2\alpha x_{13} + \alpha^2 x_{11}, -x_{23}x_{32} + x_{13}x_{31} + \alpha x_{11}x_{31}, -\alpha x_{11}^2 + x_{23}x_{31})$$

Para la variedad W_1, por el lema 2.6 se tiene $W_1 = \mathcal{V}(x_{12},\ X,\ x_{11} + x_{22},\ x_{31},\ x_{23}x_{32},\ x_{11}^2)$. Pero $\mathcal{V}(x_{11}^2) = \mathcal{V}(x_{11}) \cup \mathcal{V}(x_{11}) = \mathcal{V}(x_{11})$, de aquí se sigue que $W_1 = \mathcal{V}(x_{12},\ X,\ x_{22},\ x_{31},\ x_{23}x_{32},\ x_{11}$ y claramente, se sabe que W_1 se puede expresar como unión de dos variedades, que por la proposición 2.18 son irreducibles y de forma similar al ejemplo 2.26 se tiene que son de dimensión 2, luego W_1 es $EqD(2)$. Ahora, para probar que W_2 también lo es, considere la variedad

$$\overline{W_2} = \mathcal{V}(x_{31},\ x_{31}{-}x_{12},\ X,\ x_{11}{+}x_{22},\ x_{23}{+}2\alpha x_{13}{+}\alpha^2 x_{11},\ -x_{23}x_{32}{+}x_{13}x_{31}{+}\alpha x_{11}x_{31},\ -\alpha x_{11}^2{+}x_{23}x_{31})$$

Por el lema 2.6 se tiene

$$\overline{W_2} = \mathcal{V}(x_{31},\ x_{12},\ X,\ x_{11} + x_{22},\ x_{23} + 2\alpha x_{13} + \alpha^2 x_{11},\ -x_{23}x_{32},\ -\alpha x_{11}^2)$$
$$\overline{W_2} = \mathcal{V}(x_{31},\ x_{12},\ X,\ x_{11} + x_{22},\ x_{23} + 2\alpha x_{13} + \alpha^2 x_{11},\ -x_{23}x_{32},\ x_{11})$$
$$\overline{W_2} = \mathcal{V}(x_{31},\ x_{12},\ X,\ x_{22},\ x_{23} + 2\alpha x_{13},\ x_{23}x_{32},\ x_{11}) = W_{21} \cup W_{22}$$

donde

$$W_{21} = \mathcal{V}(x_{31},\ x_{12},\ X,\ x_{22},\ x_{23} + 2\alpha x_{13},\ x_{23},\ x_{11}) = \mathcal{V}(x_{31},\ x_{12},\ X,\ x_{22},\ x_{13},\ x_{23},\ x_{11})$$
$$W_{22} = \mathcal{V}(x_{31},\ x_{12},\ X,\ x_{22},\ x_{23} + 2\alpha x_{13},\ x_{32},\ x_{11})$$

Por la proposición 2.18 se tiene que W_{21} es una variedad irreducible y de forma similar al ejemplo 2.26 su dimensión es 1, es decir, W_{21} es $EqD(1)$. Para W_{22} considere la variedad

$$\overline{W_{22}} = \mathcal{V}(x_{13},\ x_{31},\ x_{12},\ X,\ x_{22},\ x_{23} + 2\alpha x_{13},\ x_{32},\ x_{11})$$

Luego, por el lema 2.6 se tiene $\overline{W_{22}} = \mathcal{V}(x_{13},\ x_{31},\ x_{12},\ X,\ x_{22},\ x_{23},\ x_{32},\ x_{11})$ y de forma similar al caso anterior, $\overline{W_{22}}$ es $EqD(0)$, así W_{22} es $EqD(1)$ y por ende $\overline{W_2}$ también lo es y con esto se ha probado que W_2 es $EqD(2)$ y así $\overline{W}$ es $EqD(2)$, es decir, W es $EqD(3)$, por lo tanto la secuencia $\mathcal{G}$ es regular sobre el anillo de polinomios A.

4.2.4. Caso 4

Para el caso en que μ consta de tres bloques de Jordan, dos asociados al mismo valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$ y el tercero asociado a un valor propio distinto $\beta \in \mathbb{C}$, la subálgebra $\overline{\mathcal{A}_\mu}$ es generada por la secuencia

$\mathcal{G} = \{\phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)},\ \phi_3^{(0)},\ \phi_2^{(1)},\ \phi_3^{(1)}\}$ donde:

$$\begin{aligned}
\phi_1^{(0)} &= x_{11} + x_{22} + x_{33}\\
\phi_2^{(0)} &= -x_{12}x_{21} + x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31} - x_{23}x_{32} + x_{11}x_{33} + x_{22}x_{33}\\
\phi_3^{(0)} &= -(x_{23}x_{32} - x_{22}x_{33})x_{11} + (x_{13}x_{32} - x_{12}x_{33})x_{21} - (x_{13}x_{22} - x_{12}x_{23})x_{31}\\
\phi_2^{(1)} &= \lambda x_{11} + \beta x_{11} + \lambda x_{22} + \beta x_{22} + 2\lambda x_{33} = \lambda\phi_1^{(0)} + \beta(x_{11} + x_{22}) + \lambda x_{33}\\
\phi_3^{(1)} &= \lambda(-x_{13}x_{31} + x_{11}x_{33} - x_{23}x_{32} + x_{22}x_{33}) - \beta(x_{12}x_{21} - x_{11}x_{22})
\end{aligned}$$

Por el lema 2.6 se tiene $\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \mathcal{V}(\phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)},\ \phi_3^{(0)},\ \beta(x_{11} + x_{22}) + \lambda x_{33},\ \phi_3^{(1)})$. Dado que en $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ se cumple que $\phi_1^{(0)} = 0$ y $\phi_2^{(0)} = 0$ se tienen las igualdades $x_{11} + x_{22} = -x_{33}$ y $-x_{13}x_{31} - x_{23}x_{32} + x_{11}x_{33} + x_{22}x_{33} = x_{12}x_{21} - x_{11}x_{22}$ y remplazando se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathcal{G}) &= \mathcal{V}(\phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)},\ \phi_3^{(0)},\ \beta(-x_{33}) + \lambda x_{33},\ \lambda(x_{12}x_{21} - x_{11}x_{22}) - \beta(x_{12}x_{21} - x_{11}x_{22}))\\
\mathcal{V}(\mathcal{G}) &= \mathcal{V}(\phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)},\ \phi_3^{(0)},\ (\lambda - \beta)x_{33},\ (\lambda - \beta)(x_{12}x_{21} - x_{11}x_{22}))
\end{aligned}$$

Puesto que $\lambda \neq \beta$, por el lema 2.6 se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathcal{G}) &= \mathcal{V}(\phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)},\ \phi_3^{(0)},\ x_{33},\ x_{12}x_{21} - x_{11}x_{22})\\
\mathcal{V}(\mathcal{G}) &= \mathcal{V}(\phi_1^{(0)}(x_{33}),\ \phi_2^{(0)}(x_{33}),\ \phi_3^{(0)}(x_{33}),\ x_{33},\ x_{12}x_{21} - x_{11}x_{22})
\end{aligned}$$

Ahora, considere la secuencia $\mathcal{H} = \{x_{11},\ \phi_1^{(0)}(x_{33}),\ \phi_2^{(0)}(x_{33}),\ \phi_3^{(0)}(x_{33}),\ x_{33},\ x_{12}x_{21} - x_{11}x_{22}\}$. Para probar que $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ es $EqD(4)$ se probará que $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ es $EqD(3)$. Por el lema 2.6 se tiene

$$\mathcal{V}(\mathcal{H}) = \mathcal{V}(x_{11},\ \phi_1^{(0)}(\{x_{11},\ x_{33}\}),\ \phi_2^{(0)}(\{x_{11},\ x_{33}\}),\ \phi_3^{(0)}(\{x_{11},\ x_{33}\}),\ x_{33},\ x_{12}x_{21})$$

Observe que $\phi_1^{(0)}(\{x_{11},\ x_{33}\}) = x_{22}$ y tomando $X = \{x_{11},\ x_{22},\ x_{33}\}$ se tiene

$$\mathcal{V}(\mathcal{H}) = \mathcal{V}(X,\ \phi_2^{(0)}(X),\ \phi_3^{(0)}(X),\ x_{12}x_{21}) = V \cup W$$

donde:

$$\begin{aligned}
V &= \mathcal{V}(X,\ \phi_2^{(0)}(X),\ \phi_3^{(0)}(X),\ x_{12}) = \mathcal{V}(Y,\ \phi_2^{(0)}(Y),\ \phi_3^{(0)}(Y))\\
W &= \mathcal{V}(X,\ \phi_2^{(0)}(X),\ \phi_3^{(0)}(X),\ x_{21}) = \mathcal{V}(Z,\ \phi_2^{(0)}(Z),\ \phi_3^{(0)}(Z))
\end{aligned}$$

donde $Y = X \cup \{x_{12}\}$ y $Z = X \cup \{x_{21}\}$. Observe que $\phi_3^{(0)}(Y) = x_{13}x_{32}x_{21}$, luego por el lema 2.6 se sigue que $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, donde

$$\begin{aligned}
V_1 &= \mathcal{V}(Y,\ \phi_2^{(0)}(Y),\ x_{13}) = \mathcal{V}(Y,\ \phi_2^{(0)}(Y \cup \{x_{13}\}),\ x_{13}) = \mathcal{V}(Y,\ -x_{23}x_{32},\ x_{13})\\
V_2 &= \mathcal{V}(Y,\ \phi_2^{(0)}(Y),\ x_{32}) = \mathcal{V}(Y,\ \phi_2^{(0)}(Y \cup \{x_{32}\}),\ x_{32}) = \mathcal{V}(Y,\ -x_{13}x_{31},\ x_{32})\\
V_3 &= \mathcal{V}(Y,\ \phi_2^{(0)}(Y),\ x_{21}) = \mathcal{V}(Y,\ \phi_2^{(0)}(Y \cup \{x_{21}\}),\ x_{21}) = \mathcal{V}(Y,\ -x_{13}x_{31} - x_{23}x_{32},\ x_{21})
\end{aligned}$$

Por el lema 2.6, V_1 y V_2 se pueden expresar, cada una, como unión de dos variedades, que por la proposición 2.18 son irreducibles y además, de forma similar al ejemplo 2.26 se sabe que son de dimensión 3, luego V_1 y V_2 son $EqD(3)$. Para demostrar que la variedad V_3 es $EqD(3)$ considere la variedad $\overline{V_3} = \mathcal{V}(x_{13},\ Y,\ -x_{13}x_{31} - x_{23}x_{32},\ x_{21})$, por el lema 2.6 se tiene

$$\overline{V_3} = \mathcal{V}(x_{13},\ Y,\ -x_{23}x_{32},\ x_{21}) = \mathcal{V}(x_{13},\ Y,\ x_{23},\ x_{21}) \cup \mathcal{V}(x_{13},\ Y,\ x_{32},\ x_{21})$$

Así, $\overline{V_3}$ es la unión de dos variedades que por la proposición 2.18 se sabe que son irreducibles, además las dos son de dimensión 2, es decir, $\overline{V_3}$ es $EqD(2)$, luego V_3 es $EqD(3)$, por lo tanto V es $EqD(3)$. Por otra parte, observe que $\phi_3^{(0)}(Z) = x_{12}x_{23}x_{31}$, luego por el lema 2.6 se sigue que $W = W_1 \cup W_2 \cup W_3$, donde

$$\begin{aligned}
W_1 &= \mathcal{V}(Z,\ \phi_2^{(0)}(Z),\ x_{12}) = \mathcal{V}(Z,\ \phi_2^{(0)}(Z \cup \{x_{12}\}),\ x_{12}) = \mathcal{V}(Z,\ -x_{13}x_{31} - x_{23}x_{32},\ x_{12})\\
W_2 &= \mathcal{V}(Z,\ \phi_2^{(0)}(Z),\ x_{23}) = \mathcal{V}(Z,\ \phi_2^{(0)}(Z \cup \{x_{23}\}),\ x_{23}) = \mathcal{V}(Z,\ -x_{13}x_{31},\ x_{23})\\
W_3 &= \mathcal{V}(Z,\ \phi_2^{(0)}(Z),\ x_{31}) = \mathcal{V}(Z,\ \phi_2^{(0)}(Z \cup \{x_{31}\}),\ x_{31}) = \mathcal{V}(Z,\ -x_{23}x_{32},\ x_{31})
\end{aligned}$$

Observe que $W_1 = V_3$, es decir, W_1 es $EqD(3)$. Por el lema 2.6, W_2 y W_3 se pueden expresar, cada una, como unión de dos variedades, que por la proposición 2.18 son irreducibles y además, de forma similar al ejemplo 2.26 todas de dimensión 3, luego W_2 y W_3 son $EqD(3)$ y así, W es $EqD(3)$. Por lo tanto, $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ es $EqD(3)$, es decir, la secuencia $\mathcal{G}$ es regular sobre el anillo A.

4.2.5. Caso 5

Para el caso en que μ consta de tres bloques de Jordan de tamaño 1, los cuales están asociados a tres valores propios distintos por pares ($\lambda,\ \beta,\ \delta \in \mathbb{C}$), la subálgebra $\overline{\mathcal{A}_\mu}$ es generada por la secuencia $\mathcal{G} = \{\phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)},\ \phi_3^{(0)},\ \phi_2^{(1)},\ \phi_3^{(1)},\ \phi_3^{(2)}\}$ donde:

$$\begin{aligned}
\phi_1^{(0)} &= x_{11} + x_{22} + x_{33}\\
\phi_2^{(0)} &= -x_{12}x_{21} + x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31} - x_{23}x_{32} + x_{11}x_{33} + x_{22}x_{33}\\
\phi_3^{(0)} &= -(x_{23}x_{32} - x_{22}x_{33})x_{11} + (x_{13}x_{32} - x_{12}x_{33})x_{21} - (x_{13}x_{22} - x_{12}x_{23})x_{31}\\
\phi_2^{(1)} &= \beta x_{11} + \delta x_{11} + \lambda x_{22} + \delta x_{22} + \lambda x_{33} + \beta x_{33} = \lambda(x_{22} + x_{33}) + \beta(x_{11} + x_{33}) + \delta(x_{11} + x_{22})\\
\phi_3^{(1)} &= -(x_{23}x_{32} - x_{22}x_{33})\lambda - (x_{13}x_{31} - x_{11}x_{33})\beta - (x_{12}x_{21} - x_{11}x_{22})\delta\\
\phi_3^{(2)} &= \beta\delta x_{11} + \lambda\delta x_{22} + \lambda\beta x_{33}
\end{aligned}$$

Dado que en $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ se cumple que $\phi_1^{(0)} = 0$ se tienen las siguientes igualdades: $x_{11} + x_{22} = -x_{33}$, $x_{11} + x_{33} = -x_{22}$ y $x_{22} + x_{33} = -x_{11}$, luego remplazando en $\phi_2^{(1)}$ se tiene:

$$\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \mathcal{V}(\phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)},\ \phi_3^{(0)},\ -\lambda x_{11} - \beta x_{22} - \delta x_{33},\ \phi_3^{(1)},\ \phi_3^{(2)})$$

Por el lema 2.6 se tiene

$$\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \mathcal{V}(\lambda\phi_1^{(0)} + (-\lambda x_{11} - \beta x_{22} - \delta x_{33}),\ \phi_2^{(0)},\ \phi_3^{(0)},\ -\lambda x_{11} - \beta x_{22} - \delta x_{33},\ \phi_3^{(1)},\ \beta\delta\phi_1^{(0)} - \phi_3^{(2)})$$
$$\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \mathcal{V}((\lambda - \beta)x_{22} + (\lambda - \delta)x_{33},\ \phi_2^{(0)},\ \phi_3^{(0)},\ -\lambda x_{11} - \beta x_{22} - \delta x_{33},\ \phi_3^{(1)},\ \beta\delta\phi_1^{(0)} - \phi_3^{(2)})$$

Dado que en $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ se cumple que $(\lambda - \beta)x_{22} + (\lambda - \delta)x_{33} = 0$ se tiene que $(\beta - \lambda)x_{22} = (\lambda - \delta)x_{33}$, así remplazando se sigue

$$\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \mathcal{V}((\lambda - \beta)x_{22} + (\lambda - \delta)x_{33},\ \phi_2^{(0)},\ \phi_3^{(0)},\ -\lambda x_{11} - \beta x_{22} - \delta x_{33},\ \phi_3^{(1)},\ (\delta - \beta)(\lambda - \delta)x_{33})$$

Dado que $\delta - \beta \neq 0$ y $\lambda - \delta \neq 0$, por el lema 2.6 se tiene

$$\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \mathcal{V}((\lambda - \beta)x_{22} + (\lambda - \delta)x_{33},\ \phi_2^{(0)},\ \phi_3^{(0)},\ -\lambda x_{11} - \beta x_{22} - \delta x_{33},\ \phi_3^{(1)},\ x_{33})$$

Luego, se sigue que $\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \mathcal{V}((\lambda - \beta)x_{22},\ \phi_2^{(0)}(x_{33}),\ \phi_3^{(0)}(x_{33}),\ -\lambda x_{11} - \beta x_{22},\ \phi_3^{(1)}(x_{33}),\ x_{33})$ y dado que $\lambda - \beta \neq 0$, por el lema 2.6 se tiene

$$\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \mathcal{V}(x_{22},\ \phi_2^{(0)}(\{x_{22},\ x_{33}\}),\ \phi_3^{(0)}(\{x_{22},\ x_{33}\}),\ -\lambda x_{11},\ \phi_3^{(1)}(\{x_{22},\ x_{33}\}),\ x_{33})$$
$$\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \mathcal{V}(X,\ \phi_2^{(0)}(X),\ \phi_3^{(0)}(X),\ \phi_3^{(1)}(X))$$

donde $X = \{x_{11},\ x_{22},\ x_{33}\}$. Ahora, considere la secuencia

$$\mathcal{H} = \{x_{12} - x_{21},\ x_{13} - x_{31},\ X,\ \phi_2^{(0)}(X),\ \phi_3^{(0)}(X),\ \phi_3^{(1)}(X)\}$$

La regularidad de la secuencia $\mathcal{G}$ se obtendrá como consecuencia de la proposición 2.30, mostrando que la variedad $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ es $EqD(1)$. Dado que en $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ se cumple que $x_{12} - x_{21}$ y $x_{13} - x_{31}$, se tiene que $x_{12} = x_{21}$ y $x_{13} = x_{31}$ y remplazando en $\phi_3^{(0)}(X)$ se tiene $x_{13}x_{32}x_{12} + x_{12}x_{23}x_{13} = x_{12}x_{13}(x_{32} + x_{23})$, luego por el el lema 2.6 se tiene que $\mathcal{V}(\mathcal{H}) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ donde

$$\begin{aligned} V_1 &= \mathcal{V}(x_{21},\ x_{13} - x_{31},\ X,\ \phi_2^{(0)}(X \cup \{x_{12}\}),\ x_{12},\ \phi_3^{(1)}(X \cup \{x_{12}\})) \\ &= \mathcal{V}(x_{21},\ x_{13} - x_{31},\ X,\ x_{13}x_{31} + x_{23}x_{32},\ x_{12},\ \lambda x_{23}x_{32} + \beta x_{13}x_{31}) \\ V_2 &= \mathcal{V}(x_{12} - x_{21},\ x_{31},\ X,\ \phi_2^{(0)}(X \cup \{x_{13}\}),\ x_{13}\ \phi_3^{(1)}(X \cup \{x_{13}\})) \\ &= \mathcal{V}(x_{12} - x_{21},\ x_{31},\ X,\ x_{12}x_{21} + x_{23}x_{32},\ x_{13},\ \lambda x_{23}x_{32} + \delta x_{12}x_{21}) \\ V_3 &= \mathcal{V}(x_{12} - x_{21},\ x_{13} - x_{31},\ X,\ \phi_2^{(0)}(X),\ x_{32} + x_{23},\ \phi_3^{(1)}(X)) \end{aligned}$$

Dado que en V_1 se cumple que $x_{13}x_{31} + x_{23}x_{32} = 0$ se tiene $x_{13}x_{31} = -x_{23}x_{32}$, luego remplazando y haciendo uso del lema 2.6 se tiene

$$V_1 = \mathcal{V}(x_{21},\ x_{13} - x_{31},\ X,\ x_{13}x_{31} + x_{23}x_{32},\ x_{12},\ (\beta - \lambda)x_{13}x_{31})$$
$$V_1 = \mathcal{V}(x_{21},\ x_{13} - x_{31},\ X,\ x_{23}x_{32},\ x_{12},\ x_{13}x_{31})$$

Luego, por la proposición 2.7 se sigue que $V_1 = \mathcal{V}(x_{21},\ x_{13},\ X,\ x_{23}x_{32},\ x_{12},\ x_{31})$. Observe que por el lema 2.6, la variedad V_1 se puede escribir como unión de dos variedades, que por la proposición 2.18 son irreducibles y de forma similar al ejemplo 2.26 se sabe que son de dimensión 1, así V_1 es $EqD(1)$. Note que si en V_2 se hacen las siguientes sustituciones: $x_{12} = x_{13}$, $x_{21} = x_{31}$ y $\delta = \beta$ se tiene que $V_2 = V_1$, luego V_2 es $EqD(1)$. Para probar que V_3 es $EqD(1)$ considere la variedad

$$\overline{V_3} = \mathcal{V}(x_{23},\ x_{12} - x_{21},\ x_{13} - x_{31},\ X,\ \phi_2^{(0)}(X),\ x_{32} + x_{23},\ \phi_3^{(1)}(X))$$
$$\overline{V_3} = \mathcal{V}(x_{23},\ x_{12} - x_{21},\ x_{13} - x_{31},\ X,\ -x_{12}x_{21} - x_{13}x_{31},\ x_{32},\ -\beta x_{13}x_{31} - \delta x_{12}x_{21})$$

Dado que en $\overline{V_3}$ se cumple que $-x_{12}x_{21} - x_{13}x_{31} = 0$, se tiene $x_{12}x_{21} = -x_{13}x_{31}$, luego remplazando y haciendo uso del lema 2.6 se sigue que

$$\overline{V_3} = \mathcal{V}(x_{23},\ x_{12} - x_{21},\ x_{13} - x_{31},\ X,\ -x_{12}x_{21} - x_{13}x_{31},\ x_{32},\ \beta x_{12}x_{21} - \delta x_{12}x_{21})$$
$$\overline{V_3} = \mathcal{V}(x_{23},\ x_{12} - x_{21},\ x_{13} - x_{31},\ X,\ -x_{12}x_{21} - x_{13}x_{31},\ x_{32},\ (\beta - \delta)x_{12}x_{21})$$
$$\overline{V_3} = \mathcal{V}(x_{23},\ x_{12} - x_{21},\ x_{13} - x_{31},\ X,\ -x_{12}x_{21} - x_{13}x_{31},\ x_{32},\ x_{12}x_{21})$$
$$\overline{V_3} = \mathcal{V}(x_{23},\ x_{12} - x_{21},\ x_{13} - x_{31},\ X,\ x_{13}x_{31},\ x_{32},\ x_{12}x_{21}) = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4$$

donde

$$W_1 = \mathcal{V}(x_{23},\ x_{12} - x_{21},\ x_{13} - x_{31},\ X,\ x_{13},\ x_{32},\ x_{12}) = \mathcal{V}(x_{23},\ x_{21},\ x_{31},\ X,\ x_{13},\ x_{32},\ x_{12})$$
$$W_2 = \mathcal{V}(x_{23},\ x_{12} - x_{21},\ x_{13} - x_{31},\ X,\ x_{13},\ x_{32},\ x_{21}) = \mathcal{V}(x_{23},\ x_{12},\ x_{31},\ X,\ x_{13},\ x_{32},\ x_{21})$$
$$W_3 = \mathcal{V}(x_{23},\ x_{12} - x_{21},\ x_{13} - x_{31},\ X,\ x_{31},\ x_{32},\ x_{12}) = \mathcal{V}(x_{23},\ x_{21},\ x_{13},\ X,\ x_{31},\ x_{32},\ x_{12})$$
$$W_4 = \mathcal{V}(x_{23},\ x_{12} - x_{21},\ x_{13} - x_{31},\ X,\ x_{31},\ x_{32},\ x_{21}) = \mathcal{V}(x_{23},\ x_{12},\ x_{13},\ X,\ x_{31},\ x_{32},\ x_{21})$$

Por la proposición 2.18 se tiene que las variedades W_i, con $i = 1, 2, 3, 4$ son irreducibles y siguiendo un proceso similar al empleado en el ejemplo 2.26 se sabe que son de dimensión 0, luego $\overline{V_3}$ es $EqD(0)$, es decir, por la proposición 2.30, V_3 es $EqD(1)$, por lo tanto $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ es $EqD(1)$ y así la secuencia $\mathcal{G}$ es regular sobre el anillo de polinomios A. ■

4.3. Teorema para gl_4

Teorema 4.6. *La subálgebra de Mischenko-Fomenko $\overline{A_\mu} \subset S(gl_4)$ es generada por una secuencia regular sobre $S(gl_4)$ cuando μ es una de las siguientes formas canónicas de Jordan nilpotentes:*

$$(1)\ \mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3)\ \mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3.1. Caso 1

Para el caso en que μ consta de tres bloques de Jordan, uno de tamaño dos y dos de tamaño uno, la subálgebra $\overline{\mathcal{A}_\mu}$ es generada por la secuencia $\mathcal{G} = \{\phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)},\ \phi_3^{(0)},\ \phi_4^{(0)},\ \phi_2^{(1)},\ \phi_3^{(1)},\ \phi_4^{(1)}\}$ donde:

1. $\phi_1^{(0)} = x_{11} + x_{22} + x_{33} + x_{44}$
2. $\phi_2^{(0)} = -x_{12}x_{21} + x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31} - x_{23}x_{32} + x_{11}x_{33} + x_{22}x_{33} - x_{14}x_{41} - x_{24}x_{42} - x_{34}x_{43} + x_{11}x_{44} + x_{22}x_{44} + x_{33}x_{44}$
3. $\phi_3^{(0)} = -(x_{23}x_{32} - x_{22}x_{33})x_{11} - (x_{24}x_{42} - x_{22}x_{44})x_{11} - (x_{34}x_{43} - x_{33}x_{44})x_{11} + (x_{13}x_{32} - x_{12}x_{33})x_{21} + (x_{14}x_{42} - x_{12}x_{44})x_{21} - (x_{34}x_{43} - x_{33}x_{44})x_{22} - (x_{13}x_{22} - x_{12}x_{23})x_{31} + (x_{14}x_{43} - x_{13}x_{44})x_{31} + (x_{24}x_{43} - x_{23}x_{44})x_{32} - (x_{14}x_{22} - x_{12}x_{24})x_{41} - (x_{14}x_{33} - x_{13}x_{34})x_{41} - (x_{24}x_{33} - x_{23}x_{34})x_{42}$
4. $\phi_4^{(0)} = x_{14}x_{23}x_{32}x_{41} - x_{13}x_{24}x_{32}x_{41} - x_{14}x_{22}x_{33}x_{41} + x_{12}x_{24}x_{33}x_{41} + x_{13}x_{22}x_{34}x_{41} - x_{12}x_{23}x_{34}x_{41} - x_{14}x_{23}x_{31}x_{42} + x_{13}x_{24}x_{31}x_{42} + x_{14}x_{21}x_{33}x_{42} - x_{11}x_{24}x_{33}x_{42} - x_{13}x_{21}x_{34}x_{42} + x_{11}x_{23}x_{34}x_{42} + x_{14}x_{22}x_{31}x_{43} - x_{12}x_{24}x_{31}x_{43} - x_{14}x_{21}x_{32}x_{43} + x_{11}x_{24}x_{32}x_{43} + x_{12}x_{21}x_{34}x_{43} - x_{11}x_{22}x_{34}x_{43} - x_{13}x_{22}x_{31}x_{44} + x_{12}x_{23}x_{31}x_{44} + x_{13}x_{21}x_{32}x_{44} - x_{11}x_{23}x_{32}x_{44} - x_{12}x_{21}x_{33}x_{44} + x_{11}x_{22}x_{33}x_{44}$
5. $\phi_2^{(1)} = -x_{21}$
6. $\phi_3^{(1)} = x_{23}x_{31} - x_{21}x_{33} + x_{24}x_{41} - x_{21}x_{44}$
7. $\phi_4^{(1)} = (x_{34}x_{43} - x_{33}x_{44})x_{21} - (x_{24}x_{43} - x_{23}x_{44})x_{31} + (x_{24}x_{33} - x_{23}x_{34})x_{41}$

La regularidad de la secuencia $\mathcal{G}$ se obtendrá como consecuencia de la proposición 2.30 mostrando que la variedad determinada por la secuencia de polinomios homogéneos $\mathcal{H} = \{x_{33},\ x_{44},\ x_{43}\} \cup \mathcal{G}$ es $EqD(6)$. Observe que $\phi_2^{(1)} = -x_{21}$, por el lema 2.6 la variedad $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ queda de la siguiente forma

$$\mathcal{V}(\mathcal{H}) = \mathcal{V}(x_{33},\ x_{44},\ x_{43},\ \phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)},\ \phi_3^{(0)},\ \phi_4^{(0)},\ x_{21},\ \phi_3^{(1)},\ \phi_4^{(1)})$$

Considere el conjunto $X = \{x_{33},\ x_{44},\ x_{43},\ x_{21}\}$, por el lema 2.6 se tiene

$$\mathcal{V}(\mathcal{H}) = \mathcal{V}(X,\ \phi_1^{(0)}(X),\ \phi_2^{(0)}(X),\ \phi_3^{(0)}(X),\ \phi_4^{(0)}(X),\ \phi_3^{(1)}(X),\ x_{23}x_{34}x_{41})$$

Sean $X_1 = X \cup \{x_{23}\}$, $X_2 = X \cup \{x_{34}\}$ y $X_3 = X \cup \{x_{41}\}$. Por el lema 2.6, la variedad $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ se puede escribir $\mathcal{V}(\mathcal{H}) = W \cup M \cup N$ donde

$$\begin{aligned}
W =& \mathcal{V}(X_1,\ \phi_1^{(0)}(X_1),\ \phi_2^{(0)}(X_1),\ \phi_3^{(0)}(X_1),\ \phi_4^{(0)}(X_1),\ x_{24}x_{41})\\
M =& \mathcal{V}(X_2,\ \phi_1^{(0)}(X_2),\ \phi_2^{(0)}(X_2),\ \phi_3^{(0)}(X_2),\ (x_{31}x_{42} - x_{32}x_{41})(x_{13}x_{24} - x_{14}x_{23}),\ \phi_3^{(1)}(X_2))\\
N =& \mathcal{V}(X_3,\ \phi_1^{(0)}(X_3),\ \phi_2^{(0)}(X_3),\ \phi_3^{(0)}(X_3),\ \phi_4^{(0)}(X_3),\ x_{23}x_{31})
\end{aligned}$$

Observe que $\phi_2^{(0)}(X_1) = x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31} - x_{14}x_{41} - x_{24}x_{42}$, luego realizando los cambios de variable $x_{41} = x_{23}$ y $x_{14} = x_{32}$ se tiene el polinomio $\phi_2^{(0)}(X_3) = x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31} - x_{23}x_{32} - x_{24}x_{42}$. De hecho, haciendo los cambios de variable $x_{11} = x_{22},\ x_{13} = x_{42},\ x_{14} = x_{32},\ x_{23} = x_{41},\ x_{24} = x_{31}$ en los polinomios que determinan la variedad W se obtiene los polinomios que determinan la variedad N. Por lo tanto, es suficiente mostrar que W y M son $EqD(6)$. Por el lema 2.6 se tiene $W = W_1 \cup W_2$ donde

$$\begin{aligned}
W_1 =& \mathcal{V}(x_{24},\ X_1,\ \phi_1^{(0)}(X_1),\ \phi_2^{(0)}(X_1),\ \phi_3^{(0)}(X_1),\ \phi_4^{(0)}(X_1))\\
W_2 =& \mathcal{V}(x_{41},\ X_2,\ \phi_1^{(0)}(X_2),\ \phi_2^{(0)}(X_2),\ \phi_3^{(0)}(X_2),\ \phi_4^{(0)}(X_2))
\end{aligned}$$

Considre los conjuntos $Y = X_1 \cup \{x_{24}\}$ y $\overline{Y} = X_1 \cup \{x_{41}\}$. Aplicando el lema 2.6 a las variedades W_1 y W_2 se tiene

$$\begin{aligned}
W_1 =& \mathcal{V}(Y,\ \phi_1^{(0)}(Y),\ \phi_2^{(0)}(Y),\ \phi_3^{(0)}(Y),\ x_{13}x_{22}x_{34}x_{41})\\
W_2 =& \mathcal{V}(\overline{Y},\ \phi_1^{(0)}(\overline{Y}),\ \phi_2^{(0)}(\overline{Y}),\ \phi_3^{(0)}(\overline{Y}),\ x_{13}x_{24}x_{31}x_{42})
\end{aligned}$$

Por el lema 2.6, las variedades W_1 y W_2 se pueden escribir como la unión de cuatro variedades, de la siguiente forma: $W_1 = W_{11} \cup W_{12} \cup W_{13} \cup W_{14}$ y $W_2 = W_{21} \cup W_{22} \cup W_{23} \cup W_{24}$ donde

1. $W_{11} = \mathcal{V}(Y,\ x_{11} + x_{22},\ x_{11}x_{22} - x_{14}x_{41},\ x_{14}x_{22}x_{41},\ x_{13})$
2. $W_{12} = \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{13}x_{31} + x_{14}x_{41},\ x_{13}x_{34}x_{41},\ x_{22})$
3. $W_{13} = \mathcal{V}(Y,\ x_{11} + x_{22},\ x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31} - x_{14}x_{41},\ x_{22}(x_{13}x_{31} + x_{14}x_{41}),\ x_{34})$
4. $W_{14} = \mathcal{V}(Y,\ x_{11} + x_{22},\ x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31},\ x_{13}x_{22}x_{31},\ x_{41})$
5. $W_{21} = \mathcal{V}(\overline{Y},\ x_{11} + x_{22},\ x_{11}x_{22} - x_{24}x_{42}, x_{24}x_{42}x_{11},\ x_{13})$
6. $W_{22} = \mathcal{V}(\overline{Y},\ x_{11} + x_{22},\ x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31}, x_{13}x_{22}x_{31},\ x_{24})$
7. $W_{23} = \mathcal{V}(\overline{Y},\ x_{11} + x_{22},\ x_{11}x_{22} - x_{24}x_{42}, x_{24}x_{42}x_{11},\ x_{31})$
8. $W_{24} = \mathcal{V}(\overline{Y},\ x_{11} + x_{22},\ x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31}, x_{13}x_{22}x_{31},\ x_{42})$

Si se hace los cambios de variables $x_{31} = x_{14}$ y $x_{13} = x_{41}$ en los polinomios que determinan la variedad W_{11} se obtienen los polinomios que determinan la variedad W_{14}, por lo tanto es suficiente mostrar que W_{11} es $EqD(6)$. Aplicando el lema 2.6 se tiene que W_{11} se puede escribir como unión de tres variedades como sigue

$$\mathcal{V}(Y,\ x_{11}+x_{22},\ x_{11}x_{22},\ x_{14},\ x_{13}) \cup \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{14}x_{41},\ x_{22},\ x_{13}) \cup \mathcal{V}(Y,\ x_{11}+x_{22},\ x_{11}x_{22},\ x_{41},\ x_{13})$$

Ahora, por la proposición 2.7 se tiene

$$W_{11} = \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{22},\ x_{14},\ x_{13}) \cup \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{14}x_{41},\ x_{22},\ x_{13}) \cup \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{22},\ x_{41},\ x_{13})$$

Con base en el lema 2.6, la variedad $\mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{14}x_{41},\ x_{22},\ x_{13})$ se puede escribir como la siguiente unión: $\mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{14}x_{41},\ x_{22},\ x_{13}) = \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{14},\ x_{22},\ x_{13}) \cup \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{41},\ x_{22},\ x_{13})$, entonces la variedad W_{11} queda de la siguiente forma:

$$W_{11} = \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{22},\ x_{14},\ x_{13}) \cup \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{22},\ x_{41},\ x_{13}).$$

Dado que $Y = \{x_{23},\ x_{24},\ x_{33},\ x_{44},\ x_{43},\ x_{21}\}$, por la proposición 2.18 W_{11} es la unión de variedades irreducibles y en base al ejemplo 2.26 se tiene que son de dimensión es 6, así W_{11} es $EqD(6)$ y por lo tanto W_{14} también es $EqD(6)$. Ahora, para la variedad W_{12}, por el lema 2.6 se tiene que se puede escribir como la unión de tres variedades como sigue

$$\mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{14}x_{41},\ x_{13},\ x_{22}) \cup \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{13}x_{31} + x_{14}x_{41},\ x_{34},\ x_{22}) \cup \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{13}x_{31},\ x_{41},\ x_{22})$$

$$\begin{aligned} W_{12} =& \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{14}x_{41},\ x_{13},\ x_{22}) \cup \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{13}x_{31} + x_{14}x_{41},\ x_{34},\ x_{22}) \cup \\ & \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{13}x_{31},\ x_{41},\ x_{22}) \end{aligned}$$

Aplicando el lema 2.6,las variedades $\mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{14}x_{41},\ x_{13},\ x_{22})$ y $\mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{13}x_{31},\ x_{41},\ x_{22})$ se pueden escribir de la siguiten forma

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{14}x_{41},\ x_{13},\ x_{22}) =& \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{14},\ x_{13},\ x_{22}) \cup \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{41},\ x_{13},\ x_{22}) \\ \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{13}x_{31},\ x_{41},\ x_{22}) =& \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{13},\ x_{41},\ x_{22}) \cup \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{31},\ x_{41},\ x_{22}) \end{aligned}$$

Entonces la variedad W_{12} tiene la siguiente expresión

$$W_{12} = \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{14},\ x_{13},\ x_{22}) \cup \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{13},\ x_{41},\ x_{22}) \cup \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{13}x_{31} + x_{14}x_{41},\ x_{34},\ x_{22})$$

Las variedades $\mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{14},\ x_{13},\ x_{22})$ y $\mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{13},\ x_{41},\ x_{22})$ por el ejemplo 2.26 tienen dimensión 6, resta mostrar que la variedad $V = \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{13}x_{31} + x_{14}x_{41},\ x_{34},\ x_{22})$ también tiene dimensión 6, esto probará que W_{12} es $EqD(6)$. Considrele la siguiente variedad

$$\overline{V} = \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{13}x_{31} + x_{14}x_{41},\ x_{34},\ x_{22}, x_{14})$$

Por el lema 2.6 se tiene

$$\begin{aligned} \overline{V} =& \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{13}x_{31},\ x_{34},\ x_{22}, x_{14}) \\ \overline{V} =& \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{13},\ x_{34},\ x_{22}, x_{14}) \cup \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{31},\ x_{34},\ x_{22}, x_{14}) \end{aligned}$$

Por el ejemplo 2.26 las variedades $\mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{13},\ x_{34},\ x_{22}, x_{14})$ y $\mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{31},\ x_{34},\ x_{22}, x_{14})$ tienen dimensión 5, entonces por la proposición 2.30 la variedad V tiene dimensión 6 y esto prueba que W_{12} es $EqD(6)$. Ahora considere la variedad W_{13}, aplicando el lema 2.6 se tiene $W_{13} = V_1 \cup V_2$ donde

$$\begin{aligned} V_1 =& \mathcal{V}(Y,\ x_{11} + x_{22},\ x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31} - x_{14}x_{41},\ x_{22},\ x_{34}) \\ V_2 =& \mathcal{V}(Y,\ x_{11} + x_{22},\ x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31} - x_{14}x_{41},\ x_{13}x_{31} + x_{14}x_{41},\ x_{34}) \end{aligned}$$

Nuevamente aplicando a las variedades V_1 y V_2 el lema 2.6 se tiene

$$V_1 = \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{13}x_{31} + x_{14}x_{41},\ x_{22},\ x_{34})$$
$$V_2 = \mathcal{V}(Y,\ x_{11} + x_{22},\ x_{11}x_{22},\ x_{13}x_{31} + x_{14}x_{41},\ x_{34})$$

Por la proposición 2.7 la variedad $V_2 = \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{22},\ x_{13}x_{31} + x_{14}x_{41},\ x_{34})$, luego $V_1 = V_2$, por lo tanto $W_{13} = V_1$. Considere la variedad $\overline{V_1} = \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{22},\ x_{13}x_{31} + x_{14}x_{41},\ x_{34},\ x_{13})$, por el lema 2.6 se tiene

$$\overline{V_1} = V(Y,\ x_{11},\ x_{22},\ x_{14}x_{41},\ x_{34},\ x_{13})$$
$$\overline{V_1} = \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{22},\ x_{14},\ x_{34},\ x_{13}) \cup \mathcal{V}(Y,\ x_{11},\ x_{22},\ x_{41},\ x_{34},\ x_{13})$$

La variedad $\overline{V_1}$ está escrita como unión de dos variedades que según el ejemplo 2.26 tienen dimensión 5, luego por la proposición 2.30 la variedad V_1 tiene dimensión 6, entonces W_{13} es $EqD(6)$. Hasta este momento se ha probado que W_{11}, W_{12}, W_{13} y W_{14} son $EqD(6)$, esto demuestra que W_1 es $EqD(6)$. Ahora, para demostrar que W_2 es $EqD(6)$ se hace los siguientes cambios de variable:

- $x_{11} = x_{22},\ x_{42} = x_{14},\ x_{24} = x_{41}$ en los polinomios que determinan la variedad W_{11} se obtienen los polinomios que determinan la variedad W_{21} y dado que W_{11} es $EqD(6)$ entonces W_{21} es $EqD(6)$.

- $x_{13} = x_{31}$, en los polinomios que determinan W_{21} se obtienen los polinomios que determinan la variedad W_{23} y dado que W_{21} es $EqD(6)$ entonces W_{23} es $EqD(6)$.

- $x_{24} = x_{41}$, en los polinomios que determinan W_{14} se obtienen los polinomios que determinan la variedad W_{22} y dado que W_{14} es $EqD(6)$ entonces W_{22} es $EqD(6)$.

- $x_{24} = x_{42}$, en los polinomios que determinan W_{22} se obtienen los polinomios que determinan la variedad W_{24} y dado que W_{22} es $EqD(6)$ entonces W_{24} es $EqD(6)$.

Entonces W_{21}, W_{22}, W_{23} y W_{24} son $EqD(6)$, esto prueba que W_2 es $EqD(6)$ y dado que W_1 es $EqD(6)$, se tiene que W es $EqD(6)$. Resta probar que la variedad M es $EqD(6)$, por el lema 2.6 se puede escribir $M = M_1 \cup M_2$ donde

$$M_1 = \mathcal{V}(X_2,\ \phi_1^{(0)}(X_2),\ \phi_2^{(0)}(X_2),\ \phi_3^{(0)}(X_2),\ x_{31}x_{42} - x_{32}x_{41},\ \phi_3^{(1)}(X_2))$$
$$M_2 = \mathcal{V}(X_2,\ \phi_1^{(0)}(X_2),\ \phi_2^{(0)}(X_2),\ \phi_3^{(0)}(X_2),\ x_{13}x_{24} - x_{14}x_{23},\ \phi_3^{(1)}(X_2))$$

Haciendo los cambios de variables $x_{11} = x_{22},\ x_{13} = x_{42},\ x_{14} = x_{32},\ x_{23} = x_{41},\ x_{24} = x_{31}$ en los polinomios que determinan la variedad M_1 se obtiene los polinomios que determinan la variedad M_2. Entonces, es suficiente mostrar que M_1 es $EqD(6)$. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de polinomios que determinan la variedad M_1, es decir, $\mathcal{F} = \{X_2,\ \phi_1^{(0)}(X_2),\ \phi_2^{(0)}(X_2),\ \phi_3^{(0)}(X_2),\ x_{31}x_{42} - x_{32}x_{41},\ \phi_3^{(1)}(X_2)\}$. Considere la variedad $P = \mathcal{V}(x_{42},\ \mathcal{F})$, se va a mostrar que P es $EqD(5)$ y como consecuencia de la proposición 2.30 se obtendrá que M_1 es $EqD(6)$. Sea $Z = X_2 \cup \{x_{42}\}$, apliando el lema 2.6 se tiene

$$P = \mathcal{V}(Z, \phi_1^{(0)}(Z),\ \phi_2^{(0)}(Z),\ \phi_3^{(0)}(Z),\ x_{32}x_{41},\ \phi_3^{(1)}(Z))$$

Sean $Z_1 = Z \cup \{x_{32}\}$ y $Z_2 = Z \cup \{x_{41}\}$, nuevamente aplicando el lema 2.6, se puede escribir la variedad P de la siguiente forma $P = P_1 \cup P_2$ donde

$$\begin{aligned} P_1 =& \mathcal{V}(Z_1, \phi_1^{(0)}(Z_1),\ \phi_2^{(0)}(Z_1),\ \phi_3^{(0)}(Z_1),\ \phi_3^{(1)}(Z_1)) \\ P_2 =& \mathcal{V}(Z_2, \phi_1^{(0)}(Z_2),\ \phi_2^{(0)}(Z_2),\ \phi_3^{(0)}(Z_2),\ x_{23}x_{31}\ ) \end{aligned}$$

Ssea $\mathcal{T}$ el conjunto de polinomios que determinan la variedad P_1, se va a mostrar que la variedad $\overline{P_1} = \mathcal{V}(x_{23},\ \mathcal{T})$ es $EqD(4)$ y como consecuencia de la proposición 2.30 se obtendrá que P_1 es $EqD(5)$. Aplicando el lema 2.6 se tiene

$$\overline{P_1} = \mathcal{V}(x_{23},\ Z_1,\ x_{11}+x_{22},\ x_{11}x_{22}-x_{13}x_{31}-x_{14}x_{41},\ -x_{13}x_{22}x_{31}-x_{14}x_{22}x_{41}+x_{12}x_{24}x_{41},\ x_{24}x_{41})$$

Por el lema 2.6 la variedad $\overline{P_1}$ se puede escribir como la unión $\overline{P_1} = P_{11} \cup P_{12}$ donde

$$\begin{aligned} P_{11} =& \mathcal{V}(x_{23},\ Z_1,\ x_{11}+x_{22},\ x_{11}x_{22}-(x_{13}x_{31}+x_{14}x_{41}),\ x_{22}(x_{13}x_{31}+x_{14}x_{41}),\ x_{24}) \\ P_{12} =& \mathcal{V}(x_{23},\ Z_1,\ x_{11}+x_{22},\ x_{11}x_{22}-x_{13}x_{31},\ x_{13}x_{22}x_{31},\ x_{41}) \end{aligned}$$

La variedad P_{11} por ellema 2.6 se puede expresar $P_{11} = R_1 \cup R_2$ donde

$$\begin{aligned} R_1 =& \mathcal{V}(x_{23},\ Z_1,\ x_{11},\ x_{13}x_{31}+x_{14}x_{41},\ x_{22},\ x_{24}) \\ R_2 =& \mathcal{V}(x_{23},\ Z_1,\ x_{11}+x_{22},\ x_{11}x_{22},\ x_{13}x_{31}+x_{14}x_{41},\ x_{24}) \end{aligned}$$

Por la proposición 2.7 $R_2 = \mathcal{V}(x_{23},\ Z_1,\ x_{11},\ x_{22},\ x_{13}x_{31}+x_{14}x_{41},\ x_{24})$, por lo tanto $R_1 = R_2$ entonces $P_{11} = R_1$. Ahora, considere la variedad P_{12}, por el lema 2.6 se tiene $P_{12} = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ donde

$$\begin{aligned} S_1 =& \mathcal{V}(x_{23},\ Z_1,\ x_{11}+x_{22},\ x_{11}x_{22},\ x_{13},\ x_{41}) \\ S_2 =& \mathcal{V}(x_{23},\ Z_1,\ x_{11},\ x_{13}x_{31},\ x_{22},\ x_{41}) \\ S_3 =& \mathcal{V}(x_{23},\ Z_1,\ x_{11}+x_{22},\ x_{11}x_{22},\ x_{31},\ x_{41}) \end{aligned}$$

Aplicando a las variedades S_1 y S_3 la proposición 2.7 y a la variedad S_2 el lema 2.6, se tiene

$$\begin{aligned} S_1 =& \mathcal{V}(x_{23},\ Z_1,\ x_{11},\ x_{22},\ x_{13},\ x_{41}) \\ S_2 =& \mathcal{V}(x_{23},\ Z_1,\ x_{11},\ x_{13},\ x_{22},\ x_{41}) \cup \mathcal{V}(x_{23},\ Z_1,\ x_{11},\ x_{31},\ x_{22},\ x_{41}) \\ S_3 =& \mathcal{V}(x_{23},\ Z_1,\ x_{11},\ x_{22},\ x_{31},\ x_{41}) \end{aligned}$$

Entonces la variedad $P_{12} = S_1 \cup S_3$ y dado que $P_{11} = R_1$ se tiene $\overline{P_1} = R_1 \cup S_1 \cup S_3$. El conjunto $Z_1 = \{x_{32},\ x_{34},\ x_{33},\ x_{44},\ x_{43},\ x_{21},\ x_{42}\}$, entonces por el ejemplo 2.26 las variedades S_1 y S_3 tienen dimensión 4. Para mostrar que $\overline{P_1}$ es $EqD(4)$ resta probar que la variedad R_1 también tiene dimensión 4, para ello considere la variedad $\overline{R_1} = \mathcal{V}(x_{23},\ Z_1,\ x_{11},\ x_{13}x_{31} + x_{14}x_{41},\ x_{22},\ x_{24},\ x_{13})$, por el lema lema 2.6 se tiene

$$\begin{aligned}\overline{R_1} =& \mathcal{V}(x_{23},\ Z_1,\ x_{11},\ x_{14}x_{41},\ x_{22},\ x_{24},\ x_{13})\\ \overline{R_1} =& \mathcal{V}(x_{23},\ Z_1,\ x_{11},\ x_{14},\ x_{22},\ x_{24},\ x_{13}) \cup \mathcal{V}(x_{23},\ Z_1,\ x_{11},\ x_{41},\ x_{22},\ x_{24},\ x_{13})\end{aligned}$$

La variedad $\overline{R_1}$ se descompone en dos variedades que por el ejemplo 2.26 tienen dimensión 3, entonces $\overline{R_1}$ es $EqD(3)$ y por la proposición 2.30 la variedad R_1 es $EqD(4)$, es decir, tiene dimensión 4, así $\overline{P_1}$ es $EqD(4)$ y esto prueba que P_1 es $EqD(5)$. Ahora, considere la variedad P_2, aplicando el lema 2.6 se tiene $P_2 = P_{21} \cup P_{22}$ donde

$$\begin{aligned}P_{21} =& \mathcal{V}(x_{41},\ Y,\ x_{23},\ x_{11} + x_{22},\ x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31},\ x_{13}x_{22}x_{31})\\ P_{22} =& \mathcal{V}(x_{41},\ Y,\ x_{31},\ x_{11} + x_{22},\ x_{11}x_{22} - x_{23}x_{32},\ x_{23}x_{32}x_{11})\end{aligned}$$

Si se hace los sigueintes cambios de variables $x_{11} = x_{22},\ x_{31} = x_{23},\ x_{13} = x_{32}$ en los polinomios que determinan la variedad P_{21} se obtiene los polinomios que determinan la variedad P_{22}. Por lo tanto, es suficiente mostrar que P_{21} es $EqD(5)$. Del lema 2.6 se tiene

$$\begin{aligned}P_{21} =& \mathcal{V}(Z_2,\ x_{23},\ x_{11} + x_{22},\ x_{11}x_{22},\ x_{13}) \cup \mathcal{V}(Z_2,\ x_{23},\ x_{11},\ x_{13}x_{31},\ x_{22}) \cup\\ & \mathcal{V}(Z_2,\ x_{23},\ x_{11} + x_{22},\ x_{11}x_{22},\ x_{31})\end{aligned}$$

Aplicando la proposición 2.7 se tiene

$$P_{21} = \mathcal{V}(Z_2,\ x_{23},\ x_{11},\ x_{22},\ x_{13}) \cup \mathcal{V}(Z_2,\ x_{23},\ x_{11},\ x_{13}x_{31},\ x_{22}) \cup \mathcal{V}(Z_2,\ x_{23},\ x_{11},\ x_{22},\ x_{31})$$

Nuevamente del lema 2.6 se tiene

$$\begin{aligned}P_{21} =& \mathcal{V}(Z_2,\ x_{23},\ x_{11},\ x_{22},\ x_{13}) \cup \mathcal{V}(Z_2,\ x_{23},\ x_{11},\ x_{13},\ x_{22}) \cup \mathcal{V}(Z_2,\ x_{23},\ x_{11},\ x_{31},\ x_{22}) \cup\\ & \mathcal{V}(Z_2,\ x_{23},\ x_{11},\ x_{22},\ x_{31})\\ P_{21} =& \mathcal{V}(Z_2,\ x_{23},\ x_{11},\ x_{22},\ x_{13}) \cup \mathcal{V}(Z_2,\ x_{23},\ x_{11},\ x_{22},\ x_{31})\end{aligned}$$

Dado que $Y = \{x_{41},\ x_{34},\ x_{33},\ x_{44},\ x_{43},\ x_{21},\ x_{42}\}$, aplicando elel ejemplo 2.26 las variedades $\mathcal{V}(Z_2,\ x_{23},\ x_{11},\ x_{22},\ x_{13})$ y $\mathcal{V}(Z_2,\ x_{23},\ x_{11},\ x_{22},\ x_{31})$ tienen dimensión 5, por lo tanto P_2 es $EqD(5)$. Finalmente, puesto que P_1 y P_2 son $EqD(5)$, entonces P es $EqD(5)$.

4.3.2. Caso 2

Para el caso en que μ consta de un bloque de tamaño 3 y uno de tamaño 1, la subálgebra $\overline{\mathcal{A}_\mu}$ es generada por la secuencia $\mathcal{G} = \{\phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)},\ \phi_3^{(0)},\ \phi_4^{(0)},\ \phi_2^{(1)},\ \phi_3^{(1)},\ \phi_4^{(1)},\ \phi_3^{(2)},\ \phi_4^{(2)}\}$ donde:

1. $\phi_1^{(0)} = x_{11} + x_{22} + x_{33} + x_{44}$

2. $\phi_2^{(0)} = -x_{12}x_{21} + x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31} - x_{23}x_{32} + x_{11}x_{33} + x_{22}x_{33} - x_{14}x_{41} - x_{24}x_{42} - x_{34}x_{43} + x_{11}x_{44} + x_{22}x_{44} + x_{33}x_{44}$

3. $\phi_3^{(0)} = (x_{13}x_{32} - x_{12}x_{33})x_{21} - (x_{23}x_{32} - x_{22}x_{33})x_{11} - (x_{24}x_{42} - x_{22}x_{44})x_{11} - (x_{34}x_{43} - x_{33}x_{44})x_{11} + (x_{14}x_{42} - x_{12}x_{44})x_{21} - (x_{34}x_{43} - x_{33}x_{44})x_{22} - (x_{13}x_{22} - x_{12}x_{23})x_{31} + (x_{14}x_{43} - x_{13}x_{44})x_{31} + (x_{24}x_{43} - x_{23}x_{44})x_{32} - (x_{14}x_{22} - x_{12}x_{24})x_{41} - (x_{14}x_{33} - x_{13}x_{34})x_{41} - (x_{24}x_{33} - x_{23}x_{34})x_{42}$

4. $\phi_4^{(0)} = x_{14}x_{23}x_{32}x_{41} - x_{13}x_{24}x_{32}x_{41} - x_{14}x_{22}x_{33}x_{41} + x_{12}x_{24}x_{33}x_{41} + x_{13}x_{22}x_{34}x_{41} - x_{12}x_{23}x_{34}x_{41} - x_{14}x_{23}x_{31}x_{42} + x_{13}x_{24}x_{31}x_{42} + x_{14}x_{21}x_{33}x_{42} - x_{11}x_{24}x_{33}x_{42} - x_{13}x_{21}x_{34}x_{42} + x_{11}x_{23}x_{34}x_{42} + x_{14}x_{22}x_{31}x_{43} - x_{12}x_{24}x_{31}x_{43} - x_{14}x_{21}x_{32}x_{43} + x_{11}x_{24}x_{32}x_{43} + x_{12}x_{21}x_{34}x_{43} - x_{11}x_{22}x_{34}x_{43} - x_{13}x_{22}x_{31}x_{44} + x_{12}x_{23}x_{31}x_{44} + x_{13}x_{21}x_{32}x_{44} - x_{11}x_{23}x_{32}x_{44} - x_{12}x_{21}x_{33}x_{44} + x_{11}x_{22}x_{33}x_{44}$

5. $\phi_2^{(1)} = -x_{21} - x_{32}$

6. $\phi_3^{(1)} = x_{12}x_{31} + x_{23}x_{31} - x_{11}x_{32} - x_{21}x_{33} + x_{24}x_{41} + x_{34}x_{42} - x_{21}x_{44} - x_{32}x_{44}$

7. $\phi_4^{(1)} = (x_{34}x_{42} - x_{32}x_{44})x_{11} + (x_{34}x_{43} - x_{33}x_{44})x_{21} - (x_{14}x_{42} - x_{12}x_{44})x_{31} - (x_{24}x_{43} - x_{23}x_{44})x_{31} + (x_{14}x_{32} - x_{12}x_{34})x_{41} + (x_{24}x_{33} - x_{23}x_{34})x_{41}$

8. $\phi_3^{(2)} = x_{31}$

9. $\phi_4^{(2)} = -x_{34}x_{41} + x_{31}x_{44}$

La regularidad de la secuencia $\mathcal{G}$ se obtendrá como consecuencia de la proposición 2.30 mostrando que la variedad determinada por la secuencia de polinomios homogéneos $\mathcal{H} = \{x_{44}\} \cup \mathcal{G}$ es $EqD(6)$. Sea $U = \{x_{31},\ x_{44}\}$, por el lema 2.6 se tiene

$$\mathcal{V}(\mathcal{H}) = \mathcal{V}(U,\ \phi_1^{(0)}(U),\ \phi_2^{(0)}(U),\ \phi_3^{(0)}(U),\ \phi_4^{(0)}(U),\ \phi_2^{(1)}(U),\ \phi_3^{(1)}(U),\ \phi_4^{(1)}(U),\ \phi_4^{(2)}(U))$$

Ahora, sean $X = U \cup \{x_{34}\}$ y $Y = U \cup \{x_{41}\}$, por el lema 2.6 se tiene $\mathcal{V}(\mathcal{H}) = V_1 \cup V_2$ donde

$$V_1 = \mathcal{V}(X,\ \phi_1^{(0)}(X),\ \phi_2^{(0)}(X),\ \phi_3^{(0)}(X),\ \phi_4^{(0)}(X),\ \phi_2^{(1)}(X),\ \phi_3^{(1)}(X),\ x_{41}(-x_{14}x_{21} + x_{24}x_{33}))$$
$$V_2 = \mathcal{V}(Y,\ \phi_1^{(0)}(Y),\ \phi_2^{(0)}(Y),\ \phi_3^{(0)}(Y),\ \phi_4^{(0)}(Y),\ \phi_2^{(1)}(Y),\ \phi_3^{(1)}(Y),\ x_{34}(x_{42}x_{11} + x_{43}x_{21}))$$

Considere $X_1 = X \cup \{x_{41}\}$, por el lema 2.6 se tiene $V_1 = W_1 \cup W_2$ donde

$$W_1 = \mathcal{V}(X_1,\ \phi_1^{(0)}(X_1),\ \phi_2^{(0)}(X_1),\ \phi_3^{(0)}(X_1),\ \phi_4^{(0)}(X_1),\ \phi_2^{(1)}(X_1),\ x_{21}(x_{11} - x_{33}))$$
$$W_2 = \mathcal{V}(X,\ \phi_1^{(0)}(X),\ \phi_2^{(0)}(X),\ \phi_3^{(0)}(X),\ \phi_4^{(0)}(X),\ \phi_2^{(1)}(X),\ \phi_3^{(1)}(X),\ -x_{14}x_{21} + x_{24}x_{33})$$

Tome el conjunto $\overline{X_1} = X_1 \cup \{x_{21}\}$, por el lema 2.6 se tiene $W_1 = W_{11} \cup W_{12}$ donde

$$W_{11} = \mathcal{V}(\overline{X_1},\ \phi_1^{(0)}(\overline{X_1}),\ \phi_2^{(0)}(\overline{X_1}),\ \phi_3^{(0)}(\overline{X_1}),\ x_{11}x_{24}x_{33}x_{42},\ x_{32})$$
$$W_{12} = \mathcal{V}(X_1,\ \phi_1^{(0)}(X_1),\ \phi_2^{(0)}(X_1),\ \phi_3^{(0)}(X_1),\ (x_{21}x_{43} + x_{33}x_{42})(x_{14}x_{21} - x_{11}x_{24}),\ \phi_2^{(1)}(X_1),\ x_{11} - x_{33})$$

Para la variedad W_{11}, por el lema 2.6 se tiene $W_{11} = G_1 \cup G_2 \cup G_3$ donde

$$\begin{aligned}
G_1 &= \mathcal{V}(\overline{X_1},\ x_{22}+x_{33},\ x_{22}x_{33}-x_{24}x_{42},\ x_{24}x_{33}x_{42},\ x_{11},\ x_{32}) \\
G_2 &= \mathcal{V}(\overline{X_1},\ x_{11}+x_{22},\ x_{11}x_{22}-x_{24}x_{42},\ x_{24}x_{42}x_{11},\ x_{33},\ x_{32}) \\
G_3 &= \mathcal{V}(\overline{X_1},\ x_{11}+x_{22}+x_{33},\ x_{11}x_{22}+x_{11}x_{33}+x_{22}x_{33},\ x_{22}x_{33}x_{11},\ x_{24}x_{42},\ x_{32})
\end{aligned}$$

Por el lema 2.6 se tiene que $G_1 = G_{11} \cup G_{12}$ y $G_2 = G_{21} \cup G_{22}$ donde

$$\begin{aligned}
G_{11} &= \mathcal{V}(\overline{X_1},\ x_{22},\ x_{24}x_{42},\ x_{33},\ x_{11},\ x_{32}) \\
G_{12} &= \mathcal{V}(\overline{X_1},\ x_{22}+x_{33},\ x_{22}x_{33},\ x_{24}x_{42},\ x_{11},\ x_{32}) \\
G_{21} &= \mathcal{V}(\overline{X_1},\ x_{22},\ x_{24}x_{42},\ x_{11},\ x_{33},\ x_{32}) \\
G_{22} &= \mathcal{V}(\overline{X_1},\ x_{11}+x_{22},\ x_{11}x_{22},\ x_{24}x_{42},\ x_{33},\ x_{32})
\end{aligned}$$

Observe que $G_{11} = G_{21}$, además por el lema 2.6 la variedad G_{11} se puede escribir como la unión de las variedades $R_1 = \mathcal{V}(\overline{X_1},\ x_{22},\ x_{24},\ x_{33},\ x_{11},\ x_{32})$ y $R_2 = \mathcal{V}(\overline{X_1},\ x_{22},\ x_{42},\ x_{33},\ x_{11},\ x_{32})$. Por la proposición 2.18, las variedades R_1 y R_2 son irreducibles y además de forma similar al ejemplo 2.26 se tiene que su dimensón es 6, entonces G_{11} y G_{21} son $EqD(6)$. Además, por la proposición 2.7 se tiene que

$$G_{12} = \mathcal{V}(\overline{X_1},\ x_{22},\ x_{33},\ x_{24}x_{42},\ x_{11},\ x_{32}) \text{ y } G_{22} = \mathcal{V}(\overline{X_1},\ x_{11},\ x_{22},\ x_{24}x_{42},\ x_{33},\ x_{32})$$

Así, $G_{12} = G_{22}$ y por el lema 2.6 la variedad G_{12} se puede escribir como la unión de las variedades $\overline{R_1} = \mathcal{V}(\overline{X_1}, x_{22}, x_{33}, x_{24}, x_{11}, x_{32})$ y $\overline{R_2} = \mathcal{V}(\overline{X_1}, x_{22}, x_{33}, x_{42}, x_{11}, x_{32})$. Luego, de la proposición 2.18, las variedades $\overline{R_1}$ y $\overline{R_2}$ son irreducibles y además de forma similar al ejemplo 2.26 se tiene que su dimensón es 6, entonces G_1 y G_2 son $EqD(6)$. Ahora, aplicando la proposición 2.7 a la variedad G_3 se tiene $G_3 = \mathcal{V}(\overline{X_1},\ x_{11},\ x_{22},\ x_{33},\ x_{24}x_{42},\ x_{32})$. Claramente $G_3 = G_{11}$ y dado que G_{11} es $EqD(6)$ se tiene que G_3 es $EqD(6)$, por lo tanto W_{11} es $EqD(6)$. Ahora, para W_{12}, aplicando el lema 2.6 se tiene $W_{12} = H_1 \cup H_2$ donde

$$\begin{aligned}
H_1 &= \mathcal{V}(X_1,\ \phi_1^{(0)}(X_1),\ \phi_2^{(0)}(X_1),\ \phi_3^{(0)}(X_1),\ x_{21}x_{43}+x_{33}x_{42},\ \phi_2^{(1)}(X_1),\ x_{11}-x_{33}) \\
H_2 &= \mathcal{V}(X_1,\ \phi_1^{(0)}(X_1),\ \phi_2^{(0)}(X_1),\ \phi_3^{(0)}(X_1),\ x_{14}x_{21}-x_{11}x_{24},\ \phi_2^{(1)}(X_1),\ x_{11}-x_{33})
\end{aligned}$$

Para H_1 considere la variedad

$$\overline{H_1} = \mathcal{V}(X_1,\ \phi_1^{(0)}(X_1),\ \phi_2^{(0)}(X_1),\ \phi_3^{(0)}(X_1),\ x_{21}x_{43}+x_{33}x_{42},\ \phi_2^{(1)}(X_1),\ x_{11}-x_{33},\ x_{23}-x_{12},\ x_{43}-x_{42})$$

Entonces, se probará que $\overline{H_1}$ es $EqD(4)$ y como consecuencia de la proposición 2.30 se obtendrá que H_1 es $EqD(6)$. Dado que en $\overline{H_1}$ se cumple $x_{11}-x_{33}=0$, $x_{23}-x_{12}=0$ y $x_{43}-x_{42}=0$, entonces $x_{11}=x_{33}$, $x_{23}=x_{12}$ y $x_{43}=x_{42}$. Además, dado que en $\overline{H_1}$ se tiene $x_{11}+x_{22}+x_{33}=0$, entonces $2x_{11}+x_{22}=0$, por lo tanto $-2x_{11}=x_{22}$ y haciendo los anteriores cambios se tiene

$$\overline{H_1} = \mathcal{V}(X_1,\ h_1,\ h_2,\ h_3,\ x_{42}(x_{21}+x_{33}),\ x_{21}+x_{32},\ x_{11}-x_{33},\ x_{23}-x_{12},\ x_{43}-x_{42})$$

donde

1. $h_1 = x_{11} + x_{22} + x_{33}$
2. $h_2 = 3x_{11}^2 + x_{24}x_{42}$
3. $h_3 = (x_{12}x_{21} - 2x_{11}^2)x_{11} - x_{24}x_{42}x_{11} - (x_{13}x_{21} + x_{12}x_{11})x_{21} + x_{14}x_{42}x_{21}$
   $- x_{24}x_{42}x_{21} - x_{24}x_{11}x_{42}$

Luego, por el lema 2.6 se tiene que $\overline{H_1} = H_{11} \cup H_{12}$, donde

$$H_{11} = \mathcal{V}(X_1,\ x_{22},\ x_{11},\ x_{13}x_{21}^2,\ x_{42},\ x_{21}+x_{32},\ x_{33},\ x_{23}-x_{12},\ x_{43})$$
$$H_{12} = \mathcal{V}(X_1,\ h_1,\ h_2,\ h_3,\ x_{21}+x_{33},\ x_{21}+x_{32},\ x_{11}-x_{33},\ x_{23}-x_{12},\ x_{43}-x_{42})$$

Por el lema 2.6 se tiene $\mathcal{V}(x_{21}^2) = \mathcal{V}(x_{21}) \cap \mathcal{V}(x_{21}) = \mathcal{V}(x_{21})$, luego $H_{11} = S_1 \cup S_2$ donde

$$S_1 = \mathcal{V}(X_1,\ x_{22},\ x_{11},\ x_{13},\ x_{42},\ x_{21}+x_{32},\ x_{33},\ x_{23}-x_{12},\ x_{43})$$
$$S_2 = \mathcal{V}(X_1,\ x_{22},\ x_{11},\ x_{21},\ x_{42},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{23}-x_{12},\ x_{43})$$

Considere las variedades $\overline{S_1} = \mathcal{V}(X_1,\ x_{22},\ x_{11},\ x_{13},\ x_{42},\ x_{21}+x_{32},\ x_{33},\ x_{23}-x_{12},\ x_{43},\ x_{21},\ x_{23})$ y $\overline{S_2} = \mathcal{V}(X_1,\ x_{22},\ x_{11},\ x_{21},\ x_{42},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{23}-x_{12},\ x_{43},\ x_{23})$, por el lema 2.6 se tiene

$$\overline{S_1} = \mathcal{V}(X_1,\ x_{22},\ x_{11},\ x_{13},\ x_{42},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{12},\ x_{43},\ x_{21},\ x_{23})$$
$$\overline{S_2} = \mathcal{V}(X_1,\ x_{22},\ x_{11},\ x_{21},\ x_{42},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{12},\ x_{43},\ x_{23})$$

Por la proposición 2.18, las variedades $\overline{S_1}$ y $\overline{S_2}$ son irreducibles y de forma similar al ejemplo 2.26 se tiene que son de dimensión 2 y 3 respectivamente, es decir, $\overline{S_1}$ es $EqD(2)$ y $\overline{S_2}$ es $EqD(1)$, entonces por la proposición 2.30 las variedades S_1 y S_2 son $EqD(4)$, por lo tanto H_{11} es $EqD(4)$. Para la variedad H_{12}, dado que se cumple $x_{21}+x_{33} = 0$ y $x_{11}-x_{33} = 0$, entonces $x_{21} = -x_{11}$ y remplazando en el polinomio h_3 se tiene

$$\begin{aligned} h_3 &= (-x_{12}x_{11} - 2x_{11}^2)x_{11} - x_{24}x_{42}x_{11} + (-x_{13}x_{11} + x_{12}x_{11})x_{11} - x_{14}x_{42}x_{11} \\ &\quad + x_{24}x_{42}x_{11} - x_{24}x_{11}x_{42} \\ h_3 &= -x_{11}(2x_{11}^2 + x_{24}x_{42} + x_{13}x_{11} + x_{14}x_{42}) \end{aligned}$$

Luego, sea $h_3' = 2x_{11}^2 + x_{24}x_{42} + x_{13}x_{11} + x_{14}x_{42}$, por el lema 2.6 se tiene $H_{12} = I_1 \cup I_2$, donde

$$I_1 = \mathcal{V}(X_1,\ h_1,\ h_2,\ x_{11},\ x_{21}+x_{33},\ x_{21}+x_{32},\ x_{11}-x_{33},\ x_{23}-x_{12},\ x_{43}-x_{42})$$
$$I_2 = \mathcal{V}(X_1,\ h_1,\ h_2,\ h_3',\ x_{21}+x_{33},\ x_{21}+x_{32},\ x_{11}-x_{33},\ x_{23}-x_{12},\ x_{43}-x_{42})$$

Aplicando a la variedad I_1 el lema 2.6 se tiene

$$I_1 = \mathcal{V}(X_1,\ x_{22},\ x_{24}x_{42},\ x_{11},\ x_{21},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{23} - x_{12},\ x_{43} - x_{42})$$

Nuevamente aplicando el lema 2.6 se tiene $I_1 = I_{11} \cup I_{12}$ donde

$$I_{11} = \mathcal{V}(X_1,\ x_{22},\ x_{24},\ x_{11},\ x_{21},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{23} - x_{12},\ x_{43} - x_{42})$$
$$I_{12} = \mathcal{V}(X_1,\ x_{22},\ x_{42},\ x_{11},\ x_{21},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{23} - x_{12},\ x_{43})$$

Ahora, considere $\overline{I_{11}} = \mathcal{V}(X_1,\ x_{22},\ x_{24},\ x_{11},\ x_{21},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{23} - x_{12},\ x_{43} - x_{42},\ x_{23},\ x_{43})$ y $\overline{I_{12}} = \mathcal{V}(X_1,\ x_{22},\ x_{42},\ x_{11},\ x_{21},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{23} - x_{12},\ x_{43},\ x_{23})$, por el lema 2.6 se tiene

$$\overline{I_{11}} = \mathcal{V}(X_1,\ x_{22},\ x_{24},\ x_{11},\ x_{21},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{12},\ x_{42},\ x_{23},\ x_{43})$$
$$\overline{I_{12}} = \mathcal{V}(X_1,\ x_{22},\ x_{42},\ x_{11},\ x_{21},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{12},\ x_{43},\ x_{23})$$

Por la proposición 2.18, las variedades $\overline{I_{11}}$ e $\overline{I_{12}}$ son irreducibles y además de forma similar al ejemplo 2.26 las variedades $\overline{I_{11}}$ e $\overline{I_{12}}$ tienen dimensión 2 y 3 respectivamente, es decir, $\overline{I_{11}}$ es $EqD(2)$ e $\overline{I_{12}}$ es $EqD(1)$, luego como consecuencia de la proposición 2.30 las variedades I_{11} e I_{12} son $EqD(4)$, por lo tanto I_1 es $EqD(4)$. Ahora, para I_2, dado que en I_2 se cumple $h_2 = 0$, se tiene $x_{24}x_{42} = -3x_{11}^2$ y considere la variedad

$$\overline{I_2} = \mathcal{V}(X_1,\ h_1,\ h_2,\ h_3',\ x_{21} + x_{33},\ h_4,\ x_{11} - x_{33},\ x_{23} - x_{12},\ x_{43} - x_{42},\ x_{14})$$

Luego, por el lema 2.6 y haciendo la sustitución $x_{24}x_{42} = -3x_{11}^2$ en h_3' se tiene

$$\overline{I_2} = \mathcal{V}(X_1,\ h_1,\ h_2,\ x_{11}(x_{13} - x_{11}),\ x_{21} + x_{33},\ h_4,\ x_{11} - x_{33},\ x_{23} - x_{12},\ x_{43} - x_{42},\ x_{14})$$

Por el lema 2.6, la variedad $\overline{I_2}$ se pude escribir como la unión $\overline{I_2} = I_{21} \cup I_{22}$, donde

$$I_{21} = \mathcal{V}(X_1,\ x_{22},\ x_{24}x_{42},\ x_{11},\ x_{21},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{23} - x_{12},\ x_{43} - x_{42},\ x_{14})$$
$$I_{22} = \mathcal{V}(X_1,\ h_1,\ h_2,\ x_{13} - x_{11},\ x_{21} + x_{33},\ x_{21} + x_{32},\ x_{11} - x_{33},\ x_{23} - x_{12},\ x_{43} - x_{42},\ x_{14})$$

Aplicando el lema 2.6, la variedad I_{21} se puede escribir como la unión $I_{21} = T_1 \cup T_2$ donde

$$T_1 = \mathcal{V}(X_1,\ x_{22},\ x_{24},\ x_{11},\ x_{21},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{23} - x_{12},\ x_{43} - x_{42},\ x_{14})$$
$$T_2 = \mathcal{V}(X_1,\ x_{22},\ x_{42},\ x_{11},\ x_{21},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{23} - x_{12},\ x_{43},\ x_{14})$$

Considere las siguientes variedades

$$\overline{T_1} = \mathcal{V}(X_1,\ x_{22},\ x_{24},\ x_{11},\ x_{21},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{23} - x_{12},\ x_{43} - x_{42},\ x_{14},\ x_{23},\ x_{43})$$
$$\overline{T_2} = \mathcal{V}(X_1,\ x_{22},\ x_{42},\ x_{11},\ x_{21},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{23} - x_{12},\ x_{43},\ x_{14},\ x_{23})$$

Ahora, por el lema 2.6 $\overline{T_1} = \mathcal{V}(X_1,\ x_{22},\ x_{24},\ x_{11},\ x_{21},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{12},\ x_{42},\ x_{14},\ x_{23},\ x_{43})$ y $\overline{T_2} = \mathcal{V}(X_1,\ x_{22},\ x_{42},\ x_{11},\ x_{21},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{12},\ x_{43},\ x_{14},\ x_{23})$. Luego, por la proposición 2.18, las variedades $\overline{T_1}$ y $\overline{T_2}$ son irreducibleas y además de forma similar al ejemplo 2.26 las variedades $\overline{T_1}$ y $\overline{T_2}$ tienen dimensión 1 y 2 respectivamente, es decir, $\overline{T_1}$ es $EqD(1)$ y $\overline{T_2}$ es $EqD(2)$, luego como consecuencia de la proposición 2.30 las variedades T_1 y T_2 son $EqD(3)$, por lo tanto I_{21} es $EqD(3)$.

Ahora, para I_{22} considere la variedad

$$\overline{I_{22}} = \mathcal{V}(X_1,\ h_1,\ h_2,\ x_{13}-x_{11},\ x_{21}+x_{33},\ x_{21}+x_{32},\ x_{11}-x_{33},\ x_{23}-x_{12},\ x_{43}-x_{42},\ x_{14},\ x_{11})$$

Luego, por el lema 2.6 se tieene

$$\overline{I_{22}} = \mathcal{V}(X_1,\ x_{22},\ x_{24}x_{42},\ x_{13},\ x_{21},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{23}-x_{12},\ x_{43}-x_{42},\ x_{14},\ x_{11})$$

Aplicando el lema 2.6, la variedad $\overline{I_{22}}$ se puede escribir como la unión $\overline{I_{22}} = K_1 \cup K_2$ donde

$$K_1 = \mathcal{V}(X_1,\ x_{22},\ x_{24},\ x_{13},\ x_{21},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{23}-x_{12},\ x_{43}-x_{42},\ x_{14},\ x_{11})$$
$$K_2 = \mathcal{V}(X_1,\ x_{22},\ x_{42},\ x_{13},\ x_{21},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{23}-x_{12},\ x_{42},\ x_{14},\ x_{11})$$

Considere las variedades

$$\overline{K_1} = \mathcal{V}(X_1,\ x_{22},\ x_{24},\ x_{13},\ x_{21},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{23}-x_{12},\ x_{43}-x_{42},\ x_{14},\ x_{11},\ x_{23},\ x_{43})$$
$$\overline{K_2} = \mathcal{V}(X_1,\ x_{22},\ x_{42},\ x_{13},\ x_{21},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{23}-x_{12},\ x_{43},\ x_{14},\ x_{11},\ x_{23})$$

Ahora, por el lema 2.6, $\overline{K_1} = \mathcal{V}(X_1,\ x_{22},\ x_{24},\ x_{13},\ x_{21},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{12},\ x_{42},\ x_{14},\ x_{11},\ x_{23},\ x_{43})$ y $\overline{K_2} = \mathcal{V}(X_1,\ x_{22},\ x_{42},\ x_{13},\ x_{21},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{12},\ x_{43},\ x_{14},\ x_{11},\ x_{23})$. Luego, por la proposición 2.18, las variedades $\overline{K_1}$ y $\overline{K_2}$ son irreducibleas y además de forma similar al ejemplo 2.26 las variedades $\overline{K_1}$ y $\overline{K_2}$ tienen dimensión 0 y 1 respectivamente, es decir, $\overline{K_1}$ es $EqD(0)$ y $\overline{K_2}$ es $EqD(1)$, luego como consecuencia de la proposición 2.30 las variedades K_1 y K_2 son $EqD(2)$, por lo tanto $\overline{I_{22}}$ es $EqD(2)$, entonces I_{22} es $EqD(3)$, esto iimplica que $\overline{I_2}$ es $EqD(3)$ y por la proposición 2.30 se tiene que I_2 es $EqD(4)$, entonces H_{12} es $EqD(4)$ y dado que H_{11} es $EqD(4)$ se tiene $\overline{H_1}$ es $EqD(4)$ y por la proposición 2.30 se concluye que H_1 es $EqD(6)$. Ahora, observe que si se hace los cambios de variable $x_{11} = x_{33}$, $x_{12} = -x_{23}$, $x_{14} = x_{43}$, $x_{23} = -x_{12}$, $x_{24} = -x_{42}$ y $x_{42} - x_{24}$ en los polinomios que determinan la varidad H_1 se obtienen los polinomios que determinan la variedad H_2, por lo tanto H_2 es $EqD(6)$, esto prueba que la variedad W_{12} es $EqD(6)$ y dado que la variedad W_{11} es $EqD(6)$ entonces W_1 es $EqD(6)$. Ahora, para probar que W_2 es $EqD(6)$ considere la variedad

$$\overline{W_2} = \mathcal{V}(Z,\ \phi_1^{(0)}(Z),\ \phi_2^{(0)}(Z),\ \phi_3^{(0)}(Z),\ \phi_4^{(0)}(Z),\ \phi_2^{(1)}(Z),\ \phi_3^{(1)}(Z),\ p)$$

Donde $Z = X \cup \{x_{12},\ x_{13},\ x_{43}\}$ y $p = -x_{14}x_{21} + x_{24}x_{33}$. Se probará que $\overline{W_2}$ es $EqD(3)$ y como consecuencia de la proposición 2.30 se obtendrá que W_2 es $EqD(6)$. Dado que en la variedad $\overline{W_2}$

se cumple $\phi_1^{(0)}(Z) = 0$ y $p = 0$, entonces $-x_{11} = x_{22} + x_{33}$ y $x_{14}x_{21} = x_{24}x_{33}$ y haciendo estas sustituciones en $\phi_3^{(0)}(Z)$ y $\phi_4^{(0)}(Z)$ se tiene

$$\begin{aligned}\phi_3^{(0)}(Z) &= x_{11}(x_{23}x_{21} + x_{22}x_{33} - x_{24}x_{42}) + x_{24}x_{42}x_{33} - x_{14}x_{41}(x_{22} + x_{33}) - x_{24}x_{33}x_{42}\\ &= x_{11}(x_{23}x_{21} + x_{22}x_{33} - x_{24}x_{42} + x_{14}x_{41})\\ \phi_4^{(0)}(Z) &= -x_{24}x_{23}x_{33}x_{41} - x_{14}x_{22}x_{33}x_{41} + x_{24}x_{33}x_{33}x_{42} - x_{11}x_{24}x_{33}x_{42}\\ &= x_{33}(-x_{24}x_{23}x_{41} - x_{14}x_{22}x_{41} + x_{24}x_{33}x_{42} - x_{11}x_{24}x_{42})\end{aligned}$$

Luego, sea $Z_1 = Z \cup \{x_{11}\}$, por el lema 2.6 se tiene $\overline{W_2} = W_{21} \cup W_{22}$ donde

$$\begin{aligned}W_{21} &= \mathcal{V}(Z_1,\ \phi_1^{(0)}(Z_1),\ \phi_2^{(0)}(Z_1),\ \phi_4^{(0)}(Z_1),\ \phi_2^{(1)}(Z_1),\ \phi_3^{(1)}(Z_1),\ p)\\ W_{22} &= \mathcal{V}(Z,\ \phi_1^{(0)}(Z),\ \phi_2^{(0)}(Z),\ x_{23}x_{21} + x_{22}x_{33} - x_{24}x_{42} + x_{14}x_{41},\ \phi_4^{(0)}(Z),\ \phi_2^{(1)}(Z),\ \phi_3^{(1)}(Z),\ p)\end{aligned}$$

Dado que en W_{21} se cumple $\phi_1^{(0)}(Z_1) = 0$, $\phi_3^{(1)}(Z_1) = 0$ y $p = 0$, entonces $x_{22} = -x_{33}$, $x_{21}x_{33} = x_{24}x_{41}$ y $x_{14}x_{21} = x_{24}x_{33}$, así, por lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned}\phi_2^{(0)}(Z_1) &= x_{23}x_{21} - x_{33}^2 - x_{14}x_{41} - x_{24}x_{42}\\ \phi_4^{(0)}(Z_1) &= x_{33}^2(-x_{21}x_{23} + x_{14}x_{41} + x_{24}x_{42})\end{aligned}$$

Ahora, considere los polinomios $f = x_{23}x_{21} - x_{14}x_{41} - x_{24}x_{42}$ y $g = x_{33}^2$, observe que por el lema 2.6 se tiene $\mathcal{V}(f - g, fg) = \mathcal{V}(f, g)$, luego se tiene que

$$W_{21} = \mathcal{V}(Z_1,\ \phi_1^{(0)}(Z_1),\ f,\ g,\ \phi_2^{(1)}(Z_1),\ \phi_3^{(1)}(Z_1),\ p)$$

Observe que $\mathcal{V}(g) = \mathcal{V}(-x_{33}^2) = \mathcal{V}(x_{33})$. Ahora, sea $B = Z_1 \cup \{x_{22},\ x_{33}\}$, por el lema 2.6 se tiene

$$W_{21} = \mathcal{V}(B,\ f,\ x_{21} + x_{32},\ x_{24}x_{41},\ x_{14}x_{21})$$

Luego, por el lema 2.6 se puede escribir $W_{21} = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ donde

$$\begin{aligned}C_1 &= \mathcal{V}(B,\ x_{23}x_{21},\ x_{21} + x_{32},\ x_{24},\ x_{14})\\ C_2 &= \mathcal{V}(B,\ x_{14}x_{41},\ x_{32}\ x_{24},\ x_{21})\\ C_3 &= \mathcal{V}(B,\ x_{23}x_{21} - x_{24}x_{42},\ x_{21} + x_{32}\ x_{41},\ x_{14})\\ C_4 &= \mathcal{V}(B,\ x_{24}x_{42},\ x_{32}\ x_{41},\ x_{21})\end{aligned}$$

Utilizando el lema 2.6, en las variedades se tiene

$$\begin{aligned}C_1 &= \mathcal{V}(B,\ x_{23},\ x_{21} + x_{32},\ x_{24},\ x_{14}) \cup \mathcal{V}(B,\ x_{21},\ x_{32},\ x_{24},\ x_{14})\\ C_2 &= \mathcal{V}(B,\ x_{14},\ x_{32}\ x_{24},\ x_{21}) \cup \mathcal{V}(B,\ x_{41},\ x_{32}\ x_{24},\ x_{21})\\ C_4 &= \mathcal{V}(B,\ x_{24},\ x_{32}\ x_{41},\ x_{21}) \cup \mathcal{V}(B,\ x_{42},\ x_{32}\ x_{41},\ x_{21})\end{aligned}$$

Observe que C_2 y C_4 se desomponen en variedades que según la proposición 2.18, son irreducibleas y en base al ejemplo 2.26 tienen dimension 3, por lo tanto C_2 y C_4 son $EqD(3)$. En la expresión de C_1, la variedad $\mathcal{V}(B,\ x_{21},\ x_{32},\ x_{24},\ x_{14})$ tiene dimensión 3, entonces para mostrar que C_1 es $EqD(3)$ resta probar que la variedad $J_1 = \mathcal{V}(B,\ x_{23},\ x_{21}+x_{32},\ x_{24},\ x_{14})$ tiene dimensión 3, para ello considere la variedad $\overline{J_1} = \mathcal{V}(B,\ x_{23},\ x_{21}+x_{32},\ x_{24},\ x_{14},\ x_{24})$. Luego, aplicando el lema 2.6 se tiene $\overline{J_1} = \mathcal{V}(B,\ x_{23},\ x_{21},\ x_{24},\ x_{14},\ x_{24})$, por la proposición 2.18, $\overline{J_1}$ es irreducible y en base al ejemplo 2.26 tienen dimensión 2, es decir, $\overline{J_1}$ es $EqD(3)$, luego por la la proposición 2.30 J_1 es es $EqD(3)$, esto prueba que C_1 es $EqD(3)$. Ahora, para probar que C_3 es $EqD(3)$ considere la variedad $\overline{C_3} = \mathcal{V}(B,\ x_{23}x_{21}-x_{24}x_{42},\ x_{21}+x_{32}\ \ x_{41},\ x_{14},\ x_{21})$, entonces por el lema 2.6 se tiene

$$\begin{aligned}
&\overline{C_3} = \mathcal{V}(B,\ x_{24}x_{42},\ x_{32}\ \ x_{41},\ x_{14},\ x_{21})\\
&\overline{C_3} = \mathcal{V}(B,\ x_{24},\ x_{32}\ \ x_{41},\ x_{14},\ x_{21}) \cup \overline{C_3} = \mathcal{V}(B,\ x_{42},\ x_{32}\ \ x_{41},\ x_{14},\ x_{21})
\end{aligned}$$

La variedad $\overline{C_3}$ se descompone en una unión de dos variedades irreducibles y que además en base al ejemplo 2.26 tienen dimensión 2, entonces $\overline{C_3}$ es $EqD(2)$ y por la proposición 2.30 C_3 es $EqD(3)$. Dado que C_1, C_2 C_3 y C_4 son $EqD(3)$ entonces W_{21} es $EqD(3)$. Para probar que W_{22} es $EqD(3)$, observe que en los polinomios que determinan la variedad W_{22} se tiene $\phi_4^{(0)}(Z) = x_{33}q$, donde $q = -x_{24}x_{23}x_{41} - x_{14}x_{22}x_{41} + x_{24}x_{33}x_{42} - x_{11}x_{24}x_{42}$ y aplicando el lema 2.6, la variedad W_{22} se puede escribir como la unión $W_{22} = D_1 \cup D_2$ donde

$$\begin{aligned}
D_1 &= \mathcal{V}(Z,\ \phi_1^{(0)}(Z),\ \phi_2^{(0)}(Z),\ x_{23}x_{21}-x_{24}x_{42}+x_{14}x_{41},\ x_{33},\ \phi_2^{(1)}(Z),\ \phi_3^{(1)}(Z),\ x_{14}x_{21})\\
D_2 &= \mathcal{V}(Z,\ \phi_1^{(0)}(Z),\ \phi_2^{(0)}(Z),\ x_{23}x_{21}+x_{22}x_{33}-x_{24}x_{42}+x_{14}x_{41},\ q,\ \phi_2^{(1)}(Z),\ \phi_3^{(1)}(Z),\ p)
\end{aligned}$$

Considere $F_1 = Z \cup \{x_{33},\ x_{14}\}$ y $F_2 = Z \cup \{x_{33},\ x_{21}\}$, luego aplicando el lema 2.6, se tiene $D_1 = E_1 \cup E_2$ donde

$$\begin{aligned}
E_1 &= \mathcal{V}(F_1,\ x_{11}+x_{22},\ x_{11}x_{22}+x_{23}x_{21},\ x_{23}x_{21}-x_{24}x_{42},\ x_{21}+x_{32},\ x_{11}x_{21}+x_{24}x_{41})\\
E_2 &= \mathcal{V}(F_2,\ x_{11}+x_{22},\ x_{11}x_{22}-x_{14}x_{41},\ -x_{24}x_{42}+x_{14}x_{41},\ x_{32},\ x_{24}x_{41})
\end{aligned}$$

Sea $\overline{E_1} = \mathcal{V}(F_1,\ x_{11}+x_{22},\ x_{11}x_{22}+x_{23}x_{21},\ x_{23}x_{21}-x_{24}x_{42},\ x_{21}+x_{32},\ x_{11}x_{21}+x_{24}x_{41},\ x_{42})$, aplicando el lema 2.6, se tiene

$$\overline{E_1} = \mathcal{V}(F_1,\ x_{11}+x_{22},\ x_{11}x_{22}+x_{23}x_{21},\ x_{23}x_{21},\ x_{21}+x_{32},\ x_{11}x_{21}+x_{24}x_{41},\ x_{42})$$

Aplicando el lem, la variedad $\overline{E_1}$ se puede escribir como la unión $\overline{E_1} = L_1 \cup L_2$ dinde

$$\begin{aligned}
L_1 &= \mathcal{V}(F_1,\ x_{11}+x_{22},\ x_{11}x_{22},\ x_{23},\ x_{21}+x_{32},\ x_{11}x_{21}+x_{24}x_{41},\ x_{42})\\
L_1 &= \mathcal{V}(F_1,\ x_{11}+x_{22},\ x_{11}x_{22},\ x_{21},\ x_{32},\ x_{24}x_{41},\ x_{42})
\end{aligned}$$

Aplicando la proposición 2.7 y el lema 2.6 se tiene

$$L_1 = \mathcal{V}(F_1,\ x_{11},\ x_{22},\ x_{23},\ x_{21}+x_{32},\ x_{24}x_{41},\ x_{42})$$
$$L_2 = \mathcal{V}(F_1,\ x_{11},\ x_{22},\ x_{21},\ x_{32},\ x_{24}x_{41},\ x_{42})$$

Nuevamente aplicando el lema 2.7, las variedades L_1 y L_2 quedan de la siguiente forma

$$L_1 = \mathcal{V}(F_1,\ x_{11},\ x_{22},\ x_{23},\ x_{21}+x_{32},\ x_{24},\ x_{42}) \cup \mathcal{V}(F_1,\ x_{11},\ x_{22},\ x_{23},\ x_{21}+x_{32},\ x_{41},\ x_{42})$$
$$L_2 = \mathcal{V}(F_1,\ x_{11},\ x_{22},\ x_{21},\ x_{32},\ x_{24},\ x_{42}) \cup \mathcal{V}(F_1,\ x_{11},\ x_{22},\ x_{21},\ x_{32},\ x_{41},\ x_{42})$$

La variedad L_2 se descompone en variedades que según la proposición 2.18, son irreducibleas y en base al ejemplo 2.26 tienen dimension 2, por lo tanto la variedad L_2 es $EqD(2)$. Observe la expresión para L_1, se va a probar que las variedades $L_{11} = \mathcal{V}(F_1,\ x_{11},\ x_{22},\ x_{23},\ x_{21}+x_{32},\ x_{24},\ x_{42})$ y $L_{12} = \mathcal{V}(F_1,\ x_{11},\ x_{22},\ x_{23},\ x_{21}+x_{32},\ x_{41},\ x_{42})$ son $EqD(2)$, para elllo considera las variedades

$$\overline{L_{11}} = \mathcal{V}(F_1,\ x_{11},\ x_{22},\ x_{23},\ x_{21}+x_{32},\ x_{24},\ x_{42},\ x_{21})$$
$$\overline{L_{12}} = \mathcal{V}(F_1,\ x_{11},\ x_{22},\ x_{23},\ x_{21}+x_{32},\ x_{41},\ x_{42},\ x_{21})$$

Luego, aplicando el lema el lema 2.7, se tiene $\overline{L_{11}} = \mathcal{V}(F_1,\ x_{11},\ x_{22},\ x_{23},\ x_{32},\ x_{24},\ x_{42},\ x_{21})$ y $\overline{L_{12}} = \mathcal{V}(F_1,\ x_{11},\ x_{22},\ x_{23},\ x_{32},\ x_{41},\ x_{42},\ x_{21})$. Por la proposición 2.18, las variedades $\overline{L_{11}}$ y $\overline{L_{12}}$ son irreducibleas y además en base al ejemplo 2.26 las variedades $\overline{L_{11}}$ y $\overline{L_{12}}$ tienen dimensión 1, es decir, $\overline{L_{11}}$ y $\overline{L_{12}}$ son $EqD(1)$, luego como consecuencia de la proposición 2.30 las variedades L_{11} y L_{12} son $EqD(2)$, por lo tanto L_1 es $EqD(2)$, entonces $\overline{E_1}$ es $EqD(2)$ y por la proposición 2.30 se tiene que E_1 es $EqD(3)$.

Para la variedad E_2, por el lema 2.7 y la proposición 2.7 se tiene

$$\begin{aligned}
E_2 =& \mathcal{V}(F_2,\ x_{11}+x_{22},\ x_{11}x_{22}-x_{14}x_{41},\ x_{14}x_{41},\ x_{32},\ x_{24}) \cup \mathcal{V}(F_2,\ x_{11},\ x_{22},\ x_{24}x_{42},\ x_{32},\ x_{41})\\
E_2 =& \mathcal{V}(F_2,\ x_{11},\ x_{22},\ x_{14},\ x_{32},\ x_{24}) \cup \mathcal{V}(F_2,\ x_{11},\ x_{22}-,\ x_{41},\ x_{32},\ x_{24}) \cup \\
& \mathcal{V}(F_2,\ x_{11},\ x_{22},\ x_{24},\ x_{32},\ x_{41}) \cup \mathcal{V}(F_2,\ x_{11},\ x_{22},\ x_{42},\ x_{32},\ x_{41})
\end{aligned}$$

Luego, la variedad E_2 se descompone en una unión de variedades que según la proposición 2.18 son irreducibles y además en base al ejemplo 2.26 tienen dimensión 3, por lo tanto E_2 es $EqD(3)$ y dado que E_1 es $EqD(3)$ se tiene D_1 es $EqD(3)$.

Ahora, para D_2, observe que en los polinomios que determinan la variedad D_2 estan los polinomios

$$\begin{aligned}
r =& x_{23}x_{21} + x_{22}x_{33} - x_{24}x_{42} + x_{14}x_{41}\\
q =& -x_{24}x_{23}x_{41} - x_{14}x_{22}x_{41} + x_{24}x_{33}x_{42} - x_{11}x_{24}x_{42}\\
\phi_2^{(0)}(Z) =& x_{11}x_{22} + x_{23}x_{21} + x_{11}x_{33} + x_{22}x_{33} - x_{14}x_{41} - x_{24}x_{42}
\end{aligned}$$

Por el lema 2.6, se tiene $\mathcal{V}(r - \phi_2^{(0)}(Z) - q, r, q) = \mathcal{V}(\phi_2^{(0)}(Z), r, q)$, luego la variedad D_2 queda de la siguiente forma

$$D_2 = \mathcal{V}(Z,\ \phi_1^{(0)}(Z),\ \phi_2^{(0)}(Z),\ r,\ r - \phi_2^{(0)}(Z) - q,\ \phi_2^{(1)}(Z),\ \phi_3^{(1)}(Z),\ p)$$

Observe que $r - \phi_2^{(0)}(Z) - q = x_{33}^2$, luego por el lema 2.6, $\mathcal{V}(x_{33}^2) = \mathcal{V}(x_{33})$, entonces se tiene

$$D_2 = \mathcal{V}(Z,\ \phi_1^{(0)}(Z),\ \phi_2^{(0)}(Z),\ r,\ x_{33},\ \phi_2^{(1)}(Z),\ \phi_3^{(1)}(Z),\ p)$$

Así mismo

$$D_2 = \mathcal{V}(Z,\ \phi_1^{(0)}(Z),\ \phi_2^{(0)}(Z),\ x_{23}x_{21} - x_{24}x_{42} + x_{14}x_{41},\ x_{33},\ \phi_2^{(1)}(Z),\ \phi_3^{(1)}(Z),\ x_{14}x_{21})$$

Luego se tiene $D_1 = D_2$ y dado que D_1 es $EqD(3)$ se tiene W_{22} es $EqD(3)$, entonces se conluye que $\overline{W_2}$ es $EqD(3)$ y por la proposición 2.30 se tiene que W_2 es $EqD(6)$ y esto prueba que V_1 es $EqD(6)$. Finalmente si se hacen los cambios de variable $x_{11} = x_{33}$, $x_{12} = -x_{23}$, $x_{24} = x_{24}$, $x_{14} = x_{43}$, $x_{23} = -x_{12}$, $x_{12} = -x_{23}$, $x_{24} = -x_{42}$, $x_{34} = x_{41}$ y $x_{42} = -x_{24}$, los polinomios de la variedad V_1 se transforman en los polinopmios de la variedad V_2, por tanto V_2 es $EqD(6)$, entonces $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ es $EqD(6)$, lo cual concluye la prueba.

4.3.3. Caso 3

Para el caso en que μ consta de dos bloques de Jordan de tamaño 2, la subálgebra $\overline{\mathcal{A}_\mu}$ es generada por la secuencia $\mathcal{G} = \{\phi_1^{(0)},\ \phi_2^{(0)},\ \phi_3^{(0)},\ \phi_4^{(0)},\ \phi_2^{(1)},\ \phi_3^{(1)},\ \phi_4^{(1)},\ \phi_4^{(2)}\}$ donde:

1. $\phi_1^{(0)} = x_{11} + x_{22} + x_{33} + x_{44}$
2. $\phi_2^{(0)} = -x_{12}x_{21} + x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31} - x_{23}x_{32} + x_{11}x_{33} + x_{22}x_{33} - x_{14}x_{41} - x_{24}x_{42} - x_{34}x_{43} + x_{11}x_{44} + x_{22}x_{44} + x_{33}x_{44}$
3. $\phi_3^{(0)} = -(x_{23}x_{32} - x_{22}x_{33})x_{11} - (x_{24}x_{42} - x_{22}x_{44})x_{11} - (x_{34}x_{43} - x_{33}x_{44})x_{11} + (x_{13}x_{32} - x_{12}x_{33})x_{21} + (x_{14}x_{42} - x_{12}x_{44})x_{21} - (x_{34}x_{43} - x_{33}x_{44})x_{22} - (x_{13}x_{22} - x_{12}x_{23})x_{31} + (x_{14}x_{43} - x_{13}x_{44})x_{31} + (x_{24}x_{43} - x_{23}x_{44})x_{32} - (x_{14}x_{22} - x_{12}x_{24})x_{41} - (x_{14}x_{33} - x_{13}x_{34})x_{41} - (x_{24}x_{33} - x_{23}x_{34})x_{42}$
4. $\phi_4^{(0)} = x_{14}x_{23}x_{32}x_{41} - x_{13}x_{24}x_{32}x_{41} - x_{14}x_{22}x_{33}x_{41} + x_{12}x_{24}x_{33}x_{41} + x_{13}x_{22}x_{34}x_{41} - x_{12}x_{23}x_{34}x_{41} - x_{14}x_{23}x_{31}x_{42} + x_{13}x_{24}x_{31}x_{42} + x_{14}x_{21}x_{33}x_{42} - x_{11}x_{24}x_{33}x_{42} - x_{13}x_{21}x_{34}x_{42} + x_{11}x_{23}x_{34}x_{42} + x_{14}x_{22}x_{31}x_{43} - x_{12}x_{24}x_{31}x_{43} - x_{14}x_{21}x_{32}x_{43} + x_{11}x_{24}x_{32}x_{43} + x_{12}x_{21}x_{34}x_{43} - x_{11}x_{22}x_{34}x_{43} - x_{13}x_{22}x_{31}x_{44} + x_{12}x_{23}x_{31}x_{44} + x_{13}x_{21}x_{32}x_{44} - x_{11}x_{23}x_{32}x_{44} - x_{12}x_{21}x_{33}x_{44} + x_{11}x_{22}x_{33}x_{44}$
5. $\phi_2^{(1)} = -x_{21} - x_{43}$
6. $\phi_3^{(1)} = x_{23}x_{31} - x_{21}x_{33} + x_{13}x_{41} + x_{24}x_{41} + x_{23}x_{42} - x_{11}x_{43} - x_{22}x_{43} - x_{21}x_{44}$

7. $\phi_4^{(1)} = (x_{23}x_{42}-x_{22}x_{43})x_{11}-(x_{13}x_{42}-x_{12}x_{43})x_{21}+(x_{34}x_{43}-x_{33}x_{44})x_{21}-(x_{24}x_{43}-x_{23}x_{44})x_{31}+ (x_{13}x_{22}-x_{12}x_{23})x_{41}+(x_{24}x_{33}-x_{23}x_{34})x_{41}$

8. $\phi_4^{(2)} = -x_{23}x_{41}+x_{21}x_{43}$

Sea $X=\{x_{12},\ x_{14},\ x_{32},\ x_{34}\}$ y considere la secuencia $\mathcal{H}=\mathcal{G}\cup X$. La regularidad de la secuencia $\mathcal{G}$ se obtendrá como consecuencia de la proposición 2.30 mostrando que la variedad determinada por la secuencia de polinomios homogéneos $\mathcal{H}$ es $EqD(4)$. Aplicando el lema 2.6 se tiene

$$\mathcal{V}(\mathcal{H})=\mathcal{V}(X,\ \phi_1^{(0)}(X),\ \phi_2^{(0)}(X),\ \phi_3^{(0)}(X),\ \phi_4^{(0)}(X),\ \phi_2^{(1)}(X),\ \phi_3^{(1)}(X),\ \phi_4^{(1)}(X),\ \phi_4^{(2)}(X))$$

Observe que $\phi_4^{(0)}(X)=(x_{22}x_{44}-x_{24}x_{42})(x_{11}x_{33}-x_{13}x_{31})$, entonces por el lema 2.6, la variedad $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ se puede escribir como la unión $\mathcal{V}(\mathcal{H})=W\cup Z$ donde

$$\begin{aligned}W=&\mathcal{V}(X,\ \phi_1^{(0)}(X),\ \phi_2^{(0)}(X),\ \phi_3^{(0)}(X),\ x_{22}x_{44}-x_{24}x_{42},\ \phi_2^{(1)}(X),\ \phi_3^{(1)}(X),\ \phi_4^{(1)}(X),\ \phi_4^{(2)}(X))\\ Z=&\mathcal{V}(X,\ \phi_1^{(0)}(X),\ \phi_2^{(0)}(X),\ \phi_3^{(0)}(X),\ x_{11}x_{33}-x_{13}x_{31},\ \phi_2^{(1)}(X),\ \phi_3^{(1)}(X),\ \phi_4^{(1)}(X),\ \phi_4^{(2)}(X))\end{aligned}$$

Si se hace los cambios $x_{11}=x_{22},\ x_{13}=x_{42},\ x_{23}=x_{41},\ x_{24}=x_{31}$ y $x_{33}=x_{44}$ en los polinomios que determinan la variedad W se obtiene los polinomios que determinan la variedad Z, por lo tanto es suficiente mostrar que la variedad W es $EqD(4)$. Ahora, considere la siguiente variedad

$$M=\mathcal{V}(X,\ \phi_1^{(0)}(X),\ \phi_2^{(0)}(X),\ \phi_3^{(0)}(X),\ x_{22}x_{44}-x_{24}x_{42},\ \phi_2^{(1)}(X),\ \phi_3^{(1)}(X),\ \phi_4^{(1)}(X),\ \phi_4^{(2)}(X),\ x_{24})$$

Sea $X_1=X\cup\{x_{24}\}$, aplicando el lema 2.6 a la variedad M se tiene

$$M=\mathcal{V}(X_1,\ \phi_1^{(0)}(X_1),\ \phi_2^{(0)}(X_1),\ \phi_3^{(0)}(X_1),\ x_{22}x_{44},\ \phi_2^{(1)}(X_1),\ \phi_3^{(1)}(X_1),\ \phi_4^{(1)}(X_1),\ \phi_4^{(2)}(X_1))$$

Por el lema 2.6, la variedad M se puede escribir como la unión $M=P\cup Q$ donde

$$\begin{aligned}P=\mathcal{V}(X_1,\ \phi_1^{(0)}(X_1),\ \phi_2^{(0)}(X_1),\ \phi_3^{(0)}(X_1),\ x_{22},\ \phi_2^{(1)}(X_1),\ \phi_3^{(1)}(X_1),\ \phi_4^{(1)}(X_1),\ \phi_4^{(2)}(X_1))\\ Q=\mathcal{V}(X_1,\ \phi_1^{(0)}(X_1),\ \phi_2^{(0)}(X_1),\ \phi_3^{(0)}(X_1),\ x_{44},\ \phi_2^{(1)}(X_1),\ \phi_3^{(1)}(X_1),\ \phi_4^{(1)}(X_1),\ \phi_4^{(2)}(X_1))\end{aligned}$$

Considere los conjuntos $I=X_1\cup\{x_{22}\}$ y $J=X_1\cup\{x_{44}\}$, entonces aplicando el lema 2.6, las variedades P y Q quedan de la siguientee forma

$$\begin{aligned}P=\mathcal{V}(I,\ \phi_1^{(0)}(I),\ \phi_2^{(0)}(I),\ \phi_3^{(0)}(I),\ \phi_2^{(1)}(I),\ \phi_3^{(1)}(I),\ \phi_4^{(1)}(I),\ \phi_4^{(2)}(I))\\ Q=\mathcal{V}(J,\ \phi_1^{(0)}(J),\ \phi_2^{(0)}(J),\ \phi_3^{(0)}(J),\ \phi_2^{(1)}(J),\ \phi_3^{(1)}(J),\phi_4^{(1)}(I),\ \ \phi_4^{(2)}(J))\end{aligned}$$

Observe que $\phi_3^{(0)}(I)=x_{44}(x_{33}x_{11}-x_{13}x_{31})$ y $\phi_3^{(0)}(J)=x_{22}(x_{33}x_{11}-x_{13}x_{31})$, aplicando el lema 2.6, la variedad $P=P_{11}\cup P_{12}$ y la variedad $Q=Q_{11}\cup Q_{12}$ donde

$$\begin{aligned}P_{11}=&\mathcal{V}(I,\ \phi_1^{(0)}(I),\ \phi_2^{(0)}(I),\ x_{44},\ \phi_2^{(1)}(I),\ \phi_3^{(1)}(I),\ \phi_4^{(1)}(I),\ \phi_4^{(2)}(I))\\ P_{12}=&\mathcal{V}(I,\ \phi_1^{(0)}(I),\ \phi_2^{(0)}(I),\ x_{33}x_{11}-x_{13}x_{31},\ \phi_2^{(1)}(I),\ \phi_3^{(1)}(I),\ \phi_4^{(1)}(I),\ \phi_4^{(2)}(I))\\ Q_{11}=&\mathcal{V}(J,\ \phi_1^{(0)}(J),\ \phi_2^{(0)}(J),\ x_{22},\ \phi_2^{(1)}(J),\ \phi_3^{(1)}(J),\phi_4^{(1)}(I),\ \ \phi_4^{(2)}(J))\\ Q_{12}=&\mathcal{V}(J,\ \phi_1^{(0)}(J),\ \phi_2^{(0)}(J),\ x_{33}x_{11}-x_{13}x_{31},\ \phi_2^{(1)}(J),\ \phi_3^{(1)}(J),\phi_4^{(1)}(I),\ \ \phi_4^{(2)}(J))\end{aligned}$$

Considere los conjuntos $I_1 = I \cup \{x_{44}\}$ y $J_1 = J \cup \{x_{22}\}$, aplicando el lema 2.6, las variedades P_{11} y Q_{11} quedan de la sigiente forma

$$\begin{aligned} P_{11} =& \mathcal{V}(I_1,\ \phi_1^{(0)}(I_1),\ \phi_2^{(0)}(I_1),\ \phi_2^{(1)}(I_1),\ \phi_3^{(1)}(I_1),\ \phi_4^{(1)}(I_1),\ \phi_4^{(2)}(I_1)) \\ Q_{11} =& \mathcal{V}(J_1,\ \phi_1^{(0)}(J_1),\ \phi_2^{(0)}(J_1),\ \phi_2^{(1)}(J_1),\ \phi_3^{(1)}(J_1),\ \phi_4^{(1)}(J_1),\ \phi_4^{(2)}(J_1)) \end{aligned}$$

Observe que $I_1 = J_1$, entonces los polinomios que determinan la variedad P_{11} son los mismos polinomios que determinan la variedad Q_{11}, así $P_{11} = Q_{11}$. Ahora, en la variedad P_{12} el polinomio $\phi_2^{(0)}(I) = x_{44}(x_{11} + x_{33})$ y en la variedad Q_{12} el polinomio $\phi_2^{(0)}(J) = x_{22}(x_{11} + x_{33})$, entonces por el lema 2.6 la variedad P_{12} se puede ecribir como la unión $P_{12} = R_1 \cup R_2$ y la variedad Q_{12} se puede escribir como la unión $Q_{12} = S_1 \cup S_2$ donde

$$\begin{aligned} R_1 =& \mathcal{V}(I,\ \phi_1^{(0)}(I),\ x_{44},\ x_{33}x_{11} - x_{13}x_{31},\ \phi_2^{(1)}(I),\ \phi_3^{(1)}(I),\ \phi_4^{(1)}(I),\ \phi_4^{(2)}(I)) \\ R_2 =& \mathcal{V}(I,\ \phi_1^{(0)}(I),\ x_{11} + x_{33},\ x_{33}x_{11} - x_{13}x_{31},\ \phi_2^{(1)}(I),\ \phi_3^{(1)}(I),\ \phi_4^{(1)}(I),\ \ \phi_4^{(2)}(I)) \\ S_1 =& \mathcal{V}(J,\ \phi_1^{(0)}(J),\ x_{22},\ x_{33}x_{11} - x_{13}x_{31},\ \phi_2^{(1)}(J),\ \phi_3^{(1)}(J),\ \phi_4^{(1)}(J),\ \phi_4^{(2)}(J)) \\ S_2 =& \mathcal{V}(J,\ \phi_1^{(0)}(J),\ x_{11} + x_{33},\ x_{33}x_{11} - x_{13}x_{31},\ \phi_2^{(1)}(J),\ \phi_3^{(1)}(J),\ \phi_4^{(1)}(J),\ \phi_4^{(2)}(J)) \end{aligned}$$

En los polinomios que determinan la variedad R_1 aparec x_{44} y en los polinomios que determinan la variedad S_1 aparece x_{22}, aplicando el lema 2.6, las variedades R_1 y S_1 quedan de la sigiente forma

$$\begin{aligned} R_1 =& \mathcal{V}(I_1,\ \phi_1^{(0)}(I_1),\ x_{33}x_{11} - x_{13}x_{31},\ \phi_2^{(1)}(I_1),\ \phi_3^{(1)}(I_1),\ \phi_4^{(1)}(I_1),\ \phi_4^{(2)}(I_1)) \\ S_1 =& \mathcal{V}(J_1,\ \phi_1^{(0)}(J_1),\ x_{33}x_{11} - x_{13}x_{31},\ \phi_2^{(1)}(J_1),\ \phi_3^{(1)}(J_1),\ \phi_4^{(1)}(J_1),\ \phi_4^{(2)}(J_1)) \end{aligned}$$

Dado que $I_1 = J_1$, entonces los polinomios que determinan la variedad R_1 son los mismos polinomios que determinan la variedad S_1, así $R_1 = S_1$. Ahora, en los polinomios que determinan las variedades R_2 y S_2 aparece $x_{11} + x_{33}$, entonces aplicando el lema 2.6, las variedades R_2 y S_2 quedan de la sigiente forma

$$\begin{aligned} R_2 =& \mathcal{V}(I,\ x_{44},\ x_{11} + x_{33},\ x_{33}x_{11} - x_{13}x_{31},\ \phi_2^{(1)}(I),\ \phi_3^{(1)}(I),\ \phi_4^{(1)}(I),\ \ \phi_4^{(2)}(I)) \\ S_2 =& \mathcal{V}(J,\ x_{22},\ x_{11} + x_{33},\ x_{33}x_{11} - x_{13}x_{31},\ \phi_2^{(1)}(J),\ \phi_3^{(1)}(J),\ \phi_4^{(1)}(J),\ \phi_4^{(2)}(J)) \end{aligned}$$

Observe que en los polinomios que determinan la variedad R_2 aparec x_{44} y en los polinomios que determinan la variedad S_2 aparece x_{22}, aplicando el lema 2.6, se tiene

$$\begin{aligned} R_2 =& \mathcal{V}(I_1,\ x_{11} + x_{33},\ x_{33}x_{11} - x_{13}x_{31},\ \phi_2^{(1)}(I_1),\ \phi_3^{(1)}(I_1),\ \phi_4^{(1)}(I_1),\ \phi_4^{(2)}(I_1)) \\ S_2 =& \mathcal{V}(J_1,\ x_{11} + x_{33},\ x_{33}x_{11} - x_{13}x_{31},\ \phi_2^{(1)}(J_1),\ \phi_3^{(1)}(J_1),\ \phi_4^{(1)}(J_1),\ \phi_4^{(2)}(J_1)) \end{aligned}$$

Luego, dado que $I_1 = J_1$, entonces los polinomios que determinan la variedad R_2 son los mismos polinomios que determinan la variedad S_2, así $R_2 = S_2$, entonces $P_{12} = Q_{12}$ y dado que $P_{11} = Q_{11}$ se tiene $P = Q$. Ahora, recuerde que $M = P \cup Q$, entonces

$$M = P = P_{11} \cup P_{12} = P_{11} \cup R_1 \cup R_2.$$

Además, observe que el polinomio $\phi_1^{(0)}(I_1) = x_{11} + x_{33}$ y el polinomio $\phi_2^{(0)}(I_1) = x_{33}x_{11} - x_{13}x_{31}$, entonces los polinomios que determinan las variedades P_{11}, R_1 y R_2 son los mismos, así $M = P_{11}$.

Ahora, en la variedad P_{11} el polinomio $\phi_4^{(1)}(I_1) = x_{42}(x_{23}x_{11} - x_{13}x_{21})$, entonces aplicando el lema 2.6, la variedad M se puede escribir como la unón $M = B \cup C$ donde

$$\begin{aligned}
B =& \mathcal{V}(I_1,\ \phi_1^{(0)}(I_1),\ \phi_2^{(0)}(I_1),\ \phi_2^{(1)}(I_1),\ \phi_3^{(1)}(I_1),\ x_{42},\ \phi_4^{(2)}(I_1)) \\
C =& \mathcal{V}(I_1,\ \phi_1^{(0)}(I_1),\ \phi_2^{(0)}(I_1),\ \phi_2^{(1)}(I_1),\ \phi_3^{(1)}(I_1),\ x_{23}x_{11} - x_{13}x_{21},\ \phi_4^{(2)}(I_1))
\end{aligned}$$

Considere el conjunto $Y = I_1 \cup \{x_{42}\}$, aplicnado el lema 2.6, la vriedad B tiene la forma

$$B = \mathcal{V}(Y,\ \phi_1^{(0)}(Y),\ \phi_2^{(0)}(Y),\ \phi_2^{(1)}(Y),\ \phi_3^{(1)}(Y),\ \phi_4^{(2)}(Y))$$

Sea $\overline{B}$ la variedad formada por el monomio x_{13} y los polinomios que determinan la variedad B, es decir, $\overline{B} = \mathcal{V}(Y,\ \phi_1^{(0)}(Y),\ \phi_2^{(0)}(Y),\ \phi_2^{(1)}(Y),\ \phi_3^{(1)}(Y),\ \phi_4^{(2)}(Y),\ x_{13})$. Ahora, tomando el conjunto $Y_1 = Y \cup \{x_{13}\}$ y aplicando el lema 2.6, se tiene

$$\overline{B} = \mathcal{V}(Y_1,\ \phi_1^{(0)}(Y_1),\ \phi_2^{(0)}(Y_1),\ \phi_2^{(1)}(Y_1),\ \phi_3^{(1)}(Y_1),\ \phi_4^{(2)}(Y_1))$$

Observe que el polinomio $\phi_2^{(0)}(Y_1) = x_{11}x_{33}$, aplicando el lema 2.6, la variedad $\overline{B}$ se puede escribir como la unión $\overline{B} = B_1 \cup B_2$ donde

$$\begin{aligned}
B_1 &= \mathcal{V}(Y_1,\ \phi_1^{(0)}(Y_1),\ x_{11},\ \phi_2^{(1)}(Y_1),\ \phi_3^{(1)}(Y_1),\ \phi_4^{(2)}(Y_1)) \\
B_2 &= \mathcal{V}(Y_1,\ \phi_1^{(0)}(Y_1),\ x_{33},\ \phi_2^{(1)}(Y_1),\ \phi_3^{(1)}(Y_1),\ \phi_4^{(2)}(Y_1))
\end{aligned}$$

Aplicando el lema 2.6 se tiene

$$\begin{aligned}
B_1 &= \mathcal{V}(Y_1,\ x_{33},\ x_{11},\ -x_{21} - x_{43},\ x_{23}x_{31},\ -x_{23}x_{41} + x_{21}x_{43}) \\
B_2 &= \mathcal{V}(Y_1,\ x_{11},\ x_{33},\ -x_{21} - x_{43},\ x_{23}x_{31},\ -x_{23}x_{41} + x_{21}x_{43})
\end{aligned}$$

Luego, se tiene $B_1 = B_2$, entonces $B = B_1$. Sea $Y_2 = Y_1 \cup \{x_{33},\ x_{11}\}$, aplicando el lema 2.6, se tiene

$$\begin{aligned}
\overline{B} &= \mathcal{V}(Y_2,\ -x_{21} - x_{43},\ x_{23},\ x_{21}x_{43}) \cup \mathcal{V}(Y_2,\ -x_{21} - x_{43},\ x_{31},\ -x_{23}x_{41} + x_{21}x_{43}) \\
\overline{B} &= \mathcal{V}(Y_2,\ x_{43},\ x_{23},\ x_{21}) \cup \mathcal{V}(Y_2,\ x_{21},\ x_{23},\ x_{43}) \cup \mathcal{V}(Y_2,\ -x_{21} - x_{43},\ x_{31},\ -x_{23}x_{41} + x_{21}x_{43})
\end{aligned}$$

Por la proposición 2.18, las variedades $V(Y_2,\ x_{43},\ x_{23},\ x_{21})$ y $\mathcal{V}(Y_2,\ x_{21},\ x_{23},\ x_{43})$ son irreducibleas, además de forma similar al ejemplo 2.26 se tiene que su dimensón es 2. Para probar que $\overline{B}$ es $EqD(2)$ resta mostrar que la variedad $D = \mathcal{V}(Y_2,\ -x_{21} - x_{43},\ x_{31},\ -x_{23}x_{41} + x_{21}x_{43})$ tiene dimensión 2, para ello considere la variedad $\overline{D} = \mathcal{V}(Y_2,\ -x_{21} - x_{43},\ x_{31},\ -x_{23}x_{41} + x_{21}x_{43},\ x_{21})$, aplicando el lema se tiene

$$\overline{D} = \mathcal{V}(Y_2,\ x_{43},\ x_{31},\ x_{23}x_{41},\ x_{21}) = \mathcal{V}(Y_2,\ x_{43},\ x_{31},\ x_{23},\ x_{21}) \cup \mathcal{V}(Y_2,\ x_{43},\ x_{31},\ x_{41},\ x_{21})$$

Observe que la variedad $\overline{D}$ se escribe como unión de dos variedades que según la proposición 2.18 son irreducibles y además de forma similar al ejemplo 2.26 se tiene que su dimensón es 1, entonces $\overline{D}$ es $EqD(1)$, luego, como consecuencia de la proposición 2.30 se tiene que D es $EqD(2)$, así $\overline{B}$ es $EqD(2)$ y por lo tanto B es $EqD(3)$.

Ahora, se va a probar que la variedad C es $EqD(3)$, para ello considere la variedad $\overline{C}$ formada por los polinomios que determinan la variedad C junto con el monomio x_{31}, es decir

$$\overline{C} = \mathcal{V}(I_1,\ \phi_1^{(0)}(I_1),\ \phi_2^{(0)}(I_1),\ \phi_2^{(1)}(I_1),\ \phi_3^{(1)}(I_1),\ x_{23}x_{11} - x_{13}x_{21},\ \phi_4^{(2)}(I_1),\ x_{31})$$

Sea $Y_3 = I_1 \cup \{x_{31}\}$, aplicando el lema 2.6, la variedad $\overline{C}$ queda de la siguiente forma

$$\overline{C} = \mathcal{V}(Y_3,\ \phi_1^{(0)}(Y_3),\ x_{11}x_{33},\ \phi_2^{(1)}(Y_3),\ \phi_3^{(1)}(Y_3),\ x_{23}x_{11} - x_{13}x_{21},\ \phi_4^{(2)}(Y_3))$$

Por el lema 2.6, la vvariedad $\overline{C}$ se puede escribir como la unión $\overline{C} = C_1 \cup C_2$ donde

$$\begin{aligned} C_1 =& \mathcal{V}(Y_3,\ \phi_1^{(0)}(Y_3),\ x_{11},\ \phi_2^{(1)}(Y_3),\ \phi_3^{(1)}(Y_3),\ x_{23}x_{11} - x_{13}x_{21},\ \phi_4^{(2)}(Y_3)) \\ C_2 =& \mathcal{V}(Y_3,\ \phi_1^{(0)}(Y_3),\ x_{33},\ \phi_2^{(1)}(Y_3),\ \phi_3^{(1)}(Y_3),\ x_{23}x_{11} - x_{13}x_{21},\ \phi_4^{(2)}(Y_3)) \end{aligned}$$

Aplicando el lema lema 2.6 se tiene

$$\begin{aligned} C_1 =& \mathcal{V}(Y_3,\ x_{33},\ x_{11},\ -x_{21} - x_{43},\ x_{13}x_{41} + x_{23}x_{42},\ x_{13}x_{21},\ -x_{23}x_{41} + x_{21}x_{43}) \\ C_2 =& \mathcal{V}(Y_3,\ x_{11},\ x_{33},\ -x_{21} - x_{43},\ x_{13}x_{41} + x_{23}x_{42},\ x_{13}x_{21},\ -x_{23}x_{41} + x_{21}x_{43}) \end{aligned}$$

Luego, se tiene $C_1 = C_2$, entonces $\overline{C} = C_1$. Considere el conjunto $Y_4 = Y_3 \cup \{x_{11},\ x_{33}\}$, entonces $\overline{C} = \mathcal{V}(Y_4,\ -x_{21} - x_{43},\ x_{13}x_{41} + x_{23}x_{42},\ x_{13}x_{21},\ -x_{23}x_{41} + x_{21}x_{43})$, aplicando el lema 2.6, la variedad $\overline{C}$ se puede escribir como la unión $\overline{C} = T_1 \cup T_2$ donde

$$\begin{aligned} T_1 =& \mathcal{V}(Y_4,\ -x_{21} - x_{43},\ x_{23}x_{42},\ x_{13},\ -x_{23}x_{41} + x_{21}x_{43}) \\ T_2 =& \mathcal{V}(Y_4,\ x_{43},\ x_{13}x_{41} + x_{23}x_{42},\ x_{21},\ x_{23}x_{41}) \end{aligned}$$

Aplicando el lema 2.6, se tiene

$$\begin{aligned} T_1 =& \mathcal{V}(Y_4,\ -x_{21} - x_{43},\ x_{23},\ x_{13},\ x_{21}x_{43}) \cup \mathcal{V}(Y_4,\ -x_{21} - x_{43},\ x_{42},\ x_{13},\ -x_{23}x_{41} + x_{21}x_{43}) \\ T_2 =& \mathcal{V}(Y_4,\ x_{43},\ x_{13}x_{41},\ x_{21},\ x_{23}) \cup \mathcal{V}(Y_4,\ x_{43},\ x_{23}x_{42},\ x_{21},\ x_{41}) \end{aligned}$$

Nuevamente, por el lema 2.6, se tiene

$$\begin{aligned} T_1 =& \mathcal{V}(Y_4,\ x_{43},\ x_{23},\ x_{13},\ x_{21}) \cup \mathcal{V}(Y_4,\ x_{21},\ x_{23},\ x_{13},\ x_{43}) \cup \\ & \mathcal{V}(Y_4,\ -x_{21} - x_{43},\ x_{42},\ x_{13},\ -x_{23}x_{41} + x_{21}x_{43}) \\ T_2 =& \mathcal{V}(Y_4,\ x_{43},\ x_{13},\ x_{21},\ x_{23}) \cup \mathcal{V}(Y_4,\ x_{43},\ x_{41},\ x_{21},\ x_{23}) \cup \\ & \mathcal{V}(Y_4,\ x_{43},\ x_{23},\ x_{21},\ x_{41}) \cup \mathcal{V}(Y_4,\ x_{43},\ x_{42},\ x_{21},\ x_{41}) \end{aligned}$$

Observe que en la expresión para T_1 y T_2 hay variedade que son las mismas y dado que $\overline{C} = T_1 \cup T_2$, entonces $\overline{C} = \overline{C_1} \cup \overline{C_2} \cup \overline{C_3} \cup \overline{C_4}$ donde

$$\begin{aligned}
\overline{C_1} =& \mathcal{V}(Y_4,\ x_{43},\ x_{23},\ x_{13},\ x_{21})\\
\overline{C_2} =& \mathcal{V}(Y_4,\ x_{43},\ x_{42},\ x_{21},\ x_{41})\\
\overline{C_3} =& \mathcal{V}(Y_4,\ x_{43},\ x_{41},\ x_{21},\ x_{23})\\
\overline{C_4} =& \mathcal{V}(Y_4,\ -x_{21} - x_{43},\ x_{42},\ x_{13},\ -x_{23}x_{41} + x_{21}x_{43})
\end{aligned}$$

Por la proposición 2.18, las variedades $\overline{C_1}$, $\overline{C_2}$ y $\overline{C_3}$ son irreducibleas, además de forma similar al ejemplo 2.26 se tiene que su dimensón es 2. Para probar que $\overline{C}$ es $EqD(2)$ resta mostrar que la variedad $\overline{C_4}$ tiene dimensión 2, para ello considere la siguitene variedad

$$\overline{\overline{C_4}} = \mathcal{V}(Y_4,\ -x_{21} - x_{43},\ x_{42},\ x_{13},\ -x_{23}x_{41} + x_{21}x_{43},\ x_{21})$$

Aplicando el lema 2.6 se tiene

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{C_4}} =& \mathcal{V}(Y_4,\ x_{43},\ x_{42},\ x_{13},\ x_{23}x_{41},\ x_{21})\\
\overline{\overline{C_4}} =& \mathcal{V}(Y_4,\ x_{43},\ x_{42},\ x_{13},\ x_{23},\ x_{21} \cup \mathcal{V}(Y_4,\ x_{43},\ x_{42},\ x_{13},\ x_{41},\ x_{21}
\end{aligned}$$

Luego, la variedad $\overline{\overline{C_4}}$ se escribe como unión de dos variedades que según la proposición 2.18 son irreducibles y además de forma similar al ejemplo 2.26 se tiene que su dimensón es 1, entonces $\overline{\overline{C_4}}$ es $EqD(1)$, luego, como consecuencia de la proposición 2.30 se tiene que $\overline{C_4}$ es $EqD(2)$, así $\overline{C}$ es $EqD(2)$ y por lo tanto C es $EqD(3)$. Dado que $M = B \cup C$, entonces M es $EqD(3)$, como consecuencia de la proposición 2.30 se tiene que W es $EqD(4)$, entonces Z también es $EqD(4)$, así $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ es $EqD(4)$ y esto era lo que se queria probar.

Conclusiones

1. Los teoremas presentados en el Capítulo 2 de esta monografía son resultados conocidos dentro de la Geometría Algebraica, no obstante las pruebas fueron reescritas por los autores para mostrar los detalles que en general se omiten en los textos especializados en esta teoría.

2. Utlizando el software algebraico SAGEMATH y en base al artículo de Futorny-Molev [2] y a la tesis doctoral de Mutis [11], los autores han diseñado un algoritmo que permite calcular los polinomios generadores de la subálgebra de Mishchenko-Fomenko $\overline{\mathcal{A}_\mu}$, donde μ es una de las formas canónicas de Jordan presentadas en el capítulo 4. Este algoritmo ha permitido comprobar los polinomios dados en [11].

3. Por lo expuesto en este trabajo, específicamente en el capítulo 3, se puede establecer que los métodos computacionales son una gran herramienta para futuros avances en esta temática, además, cabe resaltar que el algoritmo está diseñado para calcular los polinomios generadores para μ en gl_n con $n \geq 2$.

4. El trabajo desarrollado en el capítulo 4 es una explicación detallada del trabajo hecho por Mutis en el capítulo 3 de su tesis doctoral (ver [11]), esto con el fin de que esté al alcance de un estudiante de pregrado que tenga claras las bases que exigen los capítulos anteriores.

Apéndice

Este apéndice tiene el propósito de presentar y explicar el algoritmo diseñado por los autores de este trabajo, que fue utilizado para calcular los polinomios presentados en el capítulo 4. A continuación se explican cada una de las funciones del algoritmo para $\mu = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

```
var('a','b','c')
```

En primer lugar, se definen las constantes a utilizar. En este caso se han definido solo 3 constantes ya que son las necesarias para este trabajo, sin embargo, se pueden definir cuantas se vayan a utilizar. En el cálculo de los polinomios en el capítulo 4, las constantes usadas en el trabajo en relación a las usadas en SAGE son: $\lambda = a$, $\beta = b$ y $\delta = c$.

```
def comb(m,k):
    f=factorial(m)//(factorial(k)*factorial(m-k))
    return f
```

La función **comb** calcula $C_m^k = \dfrac{m!}{k!(m-k)!}$, por ejemplo, **comb**(2,1)=2.

```
def Sublistas(N,m):
    P=Subsets(N, m)
    f=comb(len(N),m)
    Q=P.list()
    R=[]
    for j in [0..f-1]:
        R.append([])
        for i in [0..m-1]:
            R[j].append(Q[j][i])
    return R
```

Con la función **Sublistas**, dada una lista N se obtiene todas las posibles sublistas de tamaño m y está diseñada para calcular todos subconjuntos de la colección $\mathcal{P}(N,m)$ en la primera sumatoria de la fórmula 3.1.1. Por ejemplo, sea $N = \{1,2,3\}$ y $m = 2$, luego $\textbf{Sublistas}(N,m) = [[1,2],[1,3],[2,3]]$. En adelante, esta lista se denominará I.

```
def B_C(I):
    f=comb(m,k)
    ByC=[]
    for l in [0..len(I)-1]:
        BC=Sublistas(I[l],k)
        for i in [0..f-1]:
            for j in [0..f-1]:
                ByC.append([BC[i],BC[j]])
    return ByC
```

Fijando k, la función **B_C** recibe una lista de listas I y retorna una lista donde cada componente representa un par de sublistas de longitud k para cada componente de la lista I. Es decir, dada la lista de todos los casos posibles de $\mathcal{P}(N, m)$ se tienen todas las posiblidades de (B, C), esto para expandir la segunda sumatoria de la fórmula 3.1.1. Por ejemplo, sea I y sea $k = 1$, entonces

$$\mathbf{B\_C}(I) = [[[1],[1]],\ [[1],[2]],\ [[2],[1]],\ [[2],[2]],\ [[1],[1]],\ [[1],[3]],\\ [[3],[1]],\ [[3],[3]],\ [[2],[2]],\ [[2],[3]],\ [[3],[2]],\ [[3],[3]]].$$

Esta lista que ha resultado en adelante será ByC.

```
def I_BC(I,ByC):
    f=comb(m,k)
    if len(ByC[0][0])==0:
        I_bc=[]
        for i in [0..len(ByC)-1]:
            I_bc.append([I[i],I[i]])
    else:
        I_b=[]
        for i in [0..len(I)-1]:
            I0=I[i][:]
            for j in [0+i*f^2..f^2-1+i*f^2]:
                for l in [0..k-1]:
                    I0.remove(ByC[j][0][l])
                I_b.append(I0)
                I0=I[i][:]
        I_c=[]
        for i in [0..len(I)-1]:
            I0=I[i][:]
            for j in [0+i*f^2..f^2-1+i*f^2]:
                for l in [0..k-1]:
                    I0.remove(ByC[j][1][l])
                I_c.append(I0)
                I0=I[i][:]
        I_bc=[[I_b[i],I_c[i]] for i in [0..len(ByC)-1]]
    return I_bc
```

La función **I_BC** retorna todas las posibilidades de $(I\backslash B, I\backslash C)$ dados I y todas las posibilidades de (B, C) y de forma similar a la anterior función, está diseñada para expandir la segunda sumatoria de la función 3.1.1, por ejemplo, sean I y ByC, luego

$$\begin{aligned}\mathbf{I\_BC}(I, ByC) =&[[[2],[2]],\ [[2],[1]],\ [[1],[2]],\ [[1],[1]],\ [[3],[3]],\ [[3],[1]],\\ &[[1],[3]],\ [[1],[1]],\ [[3],[3]],\ [[3],[2]],\ [[2],[3]],\ [[2],[2]]].\end{aligned}$$

En adelante, esta lista será I_bc. Cabe destacar que la i-ésima componente de I_bc corresponde a la i-ésima componente de ByC.

```
def EdeMu(mu):
    n=len(mu[0])
    M=[range(10*i+1,10*i+n+1) for i in range((1),(1)+n)]
    E0=[]
    for j in [0..n-1]:
        E0.append(list(var('x%d' % M[j][i]) for i in [0..n-1]));
    E=Matrix(E0)
    return E
```

Con la función **EdeMu** se encuentra la matriz $E = (x_{ij})$ con $i, j = 1, \ldots, n$, donde n es el tamaño de la forma canónica de Jordan μ. Por ejemplo

$$E = \mathbf{EdeMu}(\mu) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

```
def M_B_C(M,ByC):
    MA=[]
    k=len(ByC[0])
    for j in [0..k-1]:
        for i in [0..k-1]:
            MA.append(M[ByC[0][j]-1][ByC[1][i]-1])
    MB=[]
    for j in [0..k-1]:
        MB.append([MA[i] for i in [0+j*k..k-1+j*k]])

    M_B_C=Matrix([MB[i] for i in [0..len(MB)-1]])
    return M_B_C
```

Dada una matriz M y la lista $[B, C]$, la función **M_B_C** retorna la matriz $M(B, C)$, esto con el fin de calcular $\mu(B, C)$ y $E(I\backslash B, I\backslash C)$ en la fórmula 3.1.1. Por ejemplo, dada la matriz E y las listas $B = [1, 2]$ y $C = [2, 3]$, se tiene

$$\mathbf{M\_B\_C}(E, [B, C]) = \begin{pmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$$

```
def sigma(I,ByC,I_bc,i):
    sigma0=ByC[i][0]+I_bc[i][0]
    sigma1=ByC[i][1]+I_bc[i][1]
    sigma=Matrix([sigma0,sigma1])
    return sigma
```

Dados el conjunto de posibilidades de $I \in \mathcal{P}(N,m)$, el conjunto de todas las posibilidades de (B,C), el conjunto correspondiente de todas las posibilidades de $(I\backslash B, I\backslash C)$ y especificando con que (B,C) se desea trabajar, la función **sigma** calcula σ en la fórmula 3.1.1. Por ejemplo, sea I, ByC e I_bc y sea $i=2$, entonces el i nos indica que se construirá σ con el conjunto que está en la posición 3 de la lista ByC y con el conjunto que está en la posición 3 de la lista I_bc (en la posición 3 puesto que en SAGE las posiciones inician en 0). Entonces, $(B,C) = (\{2\},\{1\})$ y $(I\backslash B, I\backslash C) = (\{1\},\{2\})$ y así

$$\textbf{sigma}(I, ByC, I\_bc, i) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

```
def sgn(A):
    A0=list(A[0]); A1=list(A[1]); a=len(A0); C=[]
    while a>0:
        B=[]
        B.append(A0[0])
        B.append(A1[0])
        C.append(B)
        A0.remove(A0[0])
        A1.remove(A1[0])
        a=a-1
    D=[]
    for i in [0..len(C)-1]:
        if C[i][0]!=C[i][1]:
            D.append(C[i])
    for j in [0..len(D)-1]:
        for l in [j+1..len(D)-1]:
            if D[j][0]==D[l][1] and len(D[j])==2:
                D[l].append(0)
    E=[]
    for i in [0..len(D)-1]:
        if len(D[i])==2:
            E.append(D[i])
    s=(-1)^(len(E))
    return s
```

La función **sgn** calcula el signo de una permutación A, en este caso está diseñada para calcular $\mathrm{sgn}\sigma$ en la fórmula 3.1.1. Por ejemplo, dado $\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, se tiene $\textbf{sgn}(\sigma) = -1$.

```
def blq(mu):
    A=[]
    P=[mu[0][0],1]
    for i in [0..len(mu[0])-2]:
        if mu[i][i+1]==1:
            P=[P[0],P[1]+1]
        else:
            A.append(P)
            P=[mu[i+1][i+1],1]
    A.append(P)
    return A
```

La función **blq** recibe una forma canónica de Jordan y retorna una lista de listas, la cual tiene tantas listas como bloques de Jordan tenga la forma canónica, donde cada lista tiene 2 componentes: La primera indica el valor propio del bloque de Jordan y la segunda el tamaño del mismo. Por ejemplo, sea μ, entonces: $\mathbf{blq}(\mu) = [[a, 2], [b, 1]]$. Esto indica que μ es conformada por dos bloques de Jordan, el primero con valor propio a de tamaño 2 y el segundo con valor propio b de tamaño 1.

```
def GAMMA(mu):
    G=[]
    n=len(mu[0])
    while n>0:
        G1=[]
        while len(G1)<n:
            G1.append(1)
        G.append(G1)
        n=n-1
    for i in [1..len(G)-1]:
        while len(G[i])<len(G[0]):
            G[i].append(0)
    GAMMA=Matrix([G[i] for i in [0..len(G)-1]])
    return GAMMA
```

La función **GAMMA** da Γ en forma de matriz de acuerdo al tamaño de la forma canónica de Jordan. Por ejemplo, sea μ, entonces se tiene

$$\mathbf{GAMMA}(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz obtenida se interpreta de la siguiente forma: Donde aparece el valor 1 se tiene una caja en el diagrama y donde aparece el valor 0 no la hay. Así mismo, en las dos funciones siguientes, se obtendrá una matriz similar, la cual se interpreta de la misma forma.

```
def gamma(mu):
    i=1; f=0; F=[]; A=blq(mu)
    while i<len(A):
        for j in [i..len(A)-1]:
            if A[j][0]==A[j-i][0]:
                f=f+A[j][1]
        if f!=0:
            F.append([f])
        f=0
        i=i+1
    while len(F)<len(mu[0]):
        F.append([0])
    for i in [0..len(F)-1]:
        while F[i][0]>1:
            F[i].append(1)
            F[i][0]=F[i][0]-1
        while len(F[i])<len(mu[0]):
            F[i].append(0)
    gamma=Matrix([F[i] for i in [0..len(F)-1]])
    return gamma
```

La función **gamma** retorna γ en forma de matriz de acuerdo al tamaño de la forma canónica de Jordan. Por ejemplo, sea μ, luego **gamma**$(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

```
def G_g(mu):
    G_g=GAMMA(mu)-gamma(mu)
    return G_g
```

La función **G_g** está diseñada para sobreponer el diagrama γ sobre el diagrama Γ para obtener los generadores del álgebra $\overline{A_\mu}$ y el resultado también se da en forma de matriz. En este caso, dado μ se tiene que **G_g**(μ) =**Gamma**(μ) dado que **gamma**(μ) es la matriz nula.

```
def myk(mu):
    Gg=G_g(mu)
    MyK=[]
    r=len(mu[0])-1
    while r>-1:
        for i in [0..len(mu[0])-1]:
            if Gg[i][r-i]==1:
                MyK.append([i+(len(mu[0])-r),len(mu[0])-1-r])
        r=r-1
    return MyK
```

Dada la forma canónica de Jordan μ, la función **myk** retorna una lista, donde cada componente es una lista de dos elementos, el primero que indica el valor de m y el segundo el valor de k para la fórmula 3.1.1. La lista tendra todas las posibilidades de m y k segun cuales sean los generadores de la subálgebra $\overline{\mathcal{A}_\mu}$. Por ejemplo, sea μ, luego $\mathbf{myk}(\mu) = [[1,0],\ [2,0],\ [3,0],\ [2,1],\ [3,1],\ [3,2]]$, esto quiere decir que se van a calcular los polinomios $\phi_m^{(k)}$, donde $m = 1,2,3$ y $k = 0,\dots m-1$.

Ahora, teniendo las funciones anteriores se completa las operaciones necesarias en la fórmula 3.1.1 y así se integra lo anterior en la siguiente función:

```
def phi_m_k(MK,mu):
    E=EdeMu(mu); n=len(mu[0]); N=[1..n]
    I=Sublistas(N,MK[0]); ByC=B_C(I); I_bc=I_BC(I,ByC)
    pol=0
    if MK[1]==0:
        for i in [0..len(ByC)-1]:
            pol=pol+(1*1*(det(M_B_C(E,I_bc[i]))))
    else:
        for i in [0..len(ByC)-1]:
            pol=pol+((sgn(sigma(I,ByC,I_bc,i)))*(det(M_B_C(mu,ByC[i])))*(d
    return pol
```

Luego, en el desarrollo de este trabajo se necesitan calcular los polinomios de 10 formas canónicas de Jordan: 2 de gl_2, 5 de gl_3 y 3 de gl_4, por lo cual se han escrito dichas formas canónicas en el algoritmo para que al momento de utilizarlo unicamente se escoja una de ellas, como sigue:

```
#Posibilidades de mu en gl_2
mu21=Matrix([[a,1],[0,a]])
mu22=Matrix([[a,0],[0,b]])

#Posibilidades de mu en gl_3
mu31=Matrix([[a,1,0],[0,a,0],[0,0,a]])
mu32=Matrix([[a,1,0],[0,a,1],[0,0,a]])
mu33=Matrix([[b,1,0],[0,b,0],[0,0,a]])
mu34=Matrix([[a,0,0],[0,a,0],[0,0,b]])
mu35=Matrix([[a,0,0],[0,b,0],[0,0,c]])

#Posibilidades de mu en gl_4
mu41=Matrix([[0,1,0,0],[0,0,0,0],[0,0,0,0],[0,0,0,0]])
mu42=Matrix([[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,0],[0,0,0,0]])
mu43=Matrix([[0,1,0,0],[0,0,0,0],[0,0,0,1],[0,0,0,0]])
```

Ahora bien, si se desea una nueva forma canónica de Jordan se la escribe en el algoritmo. Con todo lo anterior se calculan los polinomios generadores de la subálgebra $\overline{\mathcal{A}_\mu}$ asociada a la forma canónica de Jordan μ como sigue:

```
mu=mu33 #ESPECIFÍQUE EL mu.
MyK=myk(mu)
print 'Los polinomios generadores de'
print mu
print 'de gl_', len(mu[0]), 'son:'
print
for k in [0..len(mu[0])-1]:
    for m in [k+1..len(mu[0])]:
        for l in [0..len(MyK)-1]:
            if m==MyK[l][0] and k==MyK[l][1]:
                print 'phi_', m, '^', k, '=', phi_m_k(MyK[l],mu)
                print
```

Además, si se desea un polinomio generador específico se procede de la siguiente forma:

```
mu=mu33; print mu #ESPECIFÍQUE EL mu.
n=len(mu[0]); print 'de gl_', n.

#Se calcula phi_m^k, por lo cual especifique m y k.

m=3; print 'm=', m
k=1; print 'k=', k

print 'phi_', m, '^', k, '=', phi_m_k([m,k],mu)
```

En el desarrollo de este trabajo es necesario utilizar el algoritmo para agilizar los cálculos de los polinomios generadores en gl_2, gl_3 y gl_4 pero cabe resaltar que el algoritmo está diseñado para gl_n, con $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, por lo cual es una herramienta muy importante tanto en este como en futuros trabajos.

Referencias

[1] Aguanary, Y. y Bolaños, E. (2019). *Representaciones de la álgebra de Lie* $sl(2,\mathbb{C})$. Tesis de pregrado. Universidad de Nariño, Pasto.

[2] Futorny, V. y Molev, A. (2015). Quantization of the shift of argument subalgebras in type A. *Advances in Mathematics*, 285:1358-1375.

[3] Futorny, V. y Ovsienko, S. (2005). Kostant's theorem for special filtered algebras. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 37:187-199. ISSN S0024609304003844.

[4] Gallian, J. (2010). *Contemporary Abstract Algebra.* Brooks/Cole, Cengage Learning, Seventh Edition.

[5] Grossman, S. (2012). *Álgebra Lineal.* University of Montana, University College London. ISBN: 978-607-15-0760-0.

[6] Humphreys, J. (1972). *Introduction to Lie Algebras and representation theory.* Springer-Verlag, New York-Berlin. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 9.

[7] Kostant, S. (1963). Lie groups representations in polynomial rings. *Amer. J. Math*, 85(2):327-404.

[8] Matsumura, H. (1986). *Commutative ring theory.* Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press, New York. ISBN: 978-0-521-36764-6.

[9] Mazorchuk, V. *Lectures on* $sl_2(\mathbb{C})$*-modules.* World Scientific Book, Uppsala (2009).

[10] Moreau A. Remarks about Mishchenko-Fomenko algebras and regular sequences. *Selecta Mathematica*, 24, (2018),2651-2657.

[11] Mutis, W. (2016). *Subálgebras de Mishchenko-Fomenko em* $S(gl_n)$ *e sequências regulares.* Tesis doctoral. Universidade de São Paulo, São Paulo.

[12] S. Ovsienko. *Strongly nilpotent matrices and Gelfand-Tsetlin modules.* J. Linear Algebra and Appl,365, (2003), 349-367.

[13] Rybnikov, L. (2006). The argument shift method and gaudin model. *Functional Analysis and Its Applications*, 40(3):30-43.