Geometría Euclidiana
Taller 1: Lógica Proposicional
Docente: Wilson Mutis
Marzo de 2020

Conceptos Básicos de Lógica Proposicional

Para resolver los ejercicios de este taller recuerde las siguientes definiciones:

1. **Proposición Lógica:** Es una oración de la que se puede afirmar que es verdadera o falsa pero no ambas. Las proposiciones se denotan con letras minúsculas como p, q, r, s.

2. **Proposición Simple o Atómica:** Es una proposición que no puede descomponerse en partes que sean a su vez proposiciones.

3. **Conectores Lógicos:** Son términos o palabras que se usan para modificar o enlazar proposiciones. A continución se describen los seis conectores lógicos,

Nombre	**Símbolo**	**Lease**
Negación	$\sim$	No
Conjunción	$\wedge$	y
Disjunción	$\vee$	o
Disjunción Exclusiva	$\veebar$	o . . . o . . .
Implicación	$\rightarrow$	si . . . entonces . . .
Bicondicional	$\longleftrightarrow$	si y sólo si

4. **Proposición Compuesta o Molecular:** Es una proposición formada por una o varias proposiciones atómicas modificadas o enlazadas por conectores lógicos.

5. **Tabla de Verdad:** Es la representación de todas las combinaciones posibles de falsedad o veracidad de una proposición atómica o molecular. Contiene 2^n filas, siendo n la cantidad de variables de la proposición. En seguida se presentan las posibles combinaciones de falsedad o veracidad de una proposición para $n = 1, 2, 3, 4$.

$n = 1$

p
V
F

$n = 2$

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

$n = 3$

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

$n = 4$

p	q	r	s
V	V	V	V
V	V	V	F
V	V	F	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	V	F
V	F	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	V	F
F	F	F	V
F	F	F	F

Tablas de verdad para propociciones moleculares

Definición 1 (Negación). *Dada una proposicón p su negación $\sim p$ es la proposición que tiene valor de verdad contrario al valor de verdad de p.*

p	$\sim p$
V	F
F	V

Definición 2 (Conjución). *Dada dos proposicones p y q su conjunción se denota $p \wedge q$ y es verdadera únicamente cuando ambas p y q son verdaderas.*

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Definición 3 (**Disjución**). *Dada dos proposicones p y q su disjunción se denota $p \vee q$ y es falsa únicamente cuando ambas p y q son falsas.*

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Definición 4 (**Disjución Exclusiva**). *Dada dos proposicones p y q su disjunción exclusiva se denota $p \veebar q$ y es verdadera cuando p y q tienen valores de verdad contrarios.*

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Definición 5 (**Implicación**). *Dada dos proposicones p y q la implicación con antecedente p y consecuente q se denota $p \to q$ y es falsa únicamente cuando el antecedente p es verdadero y el consecuente q es falsa.*

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Definición 6 (**Bicondicional**). *Dada dos proposicones p y q su bicondicional se denota $p \leftrightarrow q$ y es verdadera cuando p y q tienen el mismo valor de verdad.*

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Jerarquía de los conectores lógicos

Podemos construir proposiciones moleculares (fórmulas) usando los conectores lógicos. Generalmente utilizaremos paréntisis para especificar el orden en que deben ser aplicados los conectores en una fórmula. Por ejemplo, $(p \vee q) \wedge (\sim r)$ es la conjución de $p \vee q$ con la negación $\sim r$. Sin embargo, para reducir el número de paréntesis, utilizamos las siguientes reglas de jerarquía para los conectores lógicos

1. La negación es el primer conector lógico que debe ser aplicado. Por ejemplo, la fórmula $\sim p \to q$ debe entenderce como la implicación con antecedente $\sim p$ y consecuente q, es decir, $\sim p \to q$ es la fórmula $(\sim p) \to q$ y por ningún motivo se debe interpretar como la negación $\sim (p \to q)$.

2. El conector conjunción siempre precede al conector disjunción. Por ejemplo, la fórmula $p \vee q \wedge r$ debe entenderse como la disjunción de p con la conjunción $q \wedge r$, es decir, $p \vee q \wedge r$ es la fórmula $p \vee (q \wedge r)$.

3. Los conectores conjunción y disjunción siempre preceden a los conectores implicación y bicondicional. Consecuentemente, $p \vee q \to r$ es lo mismo que $(p \vee q) \to r$ y la fórmula $p \leftrightarrow q \wedge r$ es lo mismo que $p \leftrightarrow (q \wedge r)$.

4. El conectores implicación tiene precedencia sobre el conector bicondicional, sin embargo, usaremos paréntesis cuando el orden de los estos conectores se deba tener en cuenta.

Ejecicios 1. Proposiciones compuestas y tablas de verdad

1. Considere las siguientes proposiciones atómicas:

   p : Juan obtuvo la máxima nota en la prueba final.
   q : Juan hizo los talleres propuestos por el profesor.
   r : Juan aprobó el curso de geometría euclidiana.

   Usando los símbolos p, q, r y conectores lógicos escriba la fórmula para cada una de las proposiciones moleculares dadas a continuación

   (a) Juan obtuvo la máxima nota en la prueba final pero no hizo los talleres propuestos por el profesor.

   (b) Juan obtuvo la máxima nota en la prueba final, hizo los talleres propuestos por el profesor y aprobó el curso de geometría euclidiana.

   (c) Si Juan aprobó el curso de geometría euclidiana entonces hizo los talleres propuestos por el profesor.

   (d) Juan hizo los talleres propuestos por el profesor y obtuvo la máxima nota en la prueba final, si y sólo si, aprobó el curso de geometría euclidiana.

   (e) Juan aprobó el curso de geometría euclidiana si obtuvo la máxima nota en la prueba final o hizo los talleres propuestos por el profesor.

2. Considere las siguientes proposiciones atómicas:

   p : Se han visto osos de anteojos por la zona.
   q : Es seguro caminar por el sendero.
   r : Las bayas del sendero están maduras.

   Usando los símbolos p, q, r y conectores lógicos escriba la fórmula para cada una de las proposiciones moleculares dadas a continuación

   (a) Las bayas del sendero están maduras pero no se han visto osos de anteojos por la zona.
   (b) No se han visto osos de anteojos por la zona y es seguro caminar por el sendero pero las bayas del sendero están maduras.
   (c) Si las bayas del sendero están maduras entonces o es seguro caminar por el sendero o se han visto osos de anteojos por la zona.
   (d) No es seguro caminar por el sendero cuando se han visto osos de anteojos por la zona o as bayas del sendero están maduras.
   (e) Para que sea seguro caminar por el sendero es suficiente que las bayas del sendero no estén maduras.

3. Construya la tabla de verdad de las siguientes proposiciones:

   (a) $\sim p \wedge q$
   (b) $\sim p \rightarrow \sim q$
   (c) $\sim p \wedge (\sim q \vee r)$
   (d) $\sim p \wedge q \vee r$
   (e) $(p \rightarrow \sim r) \vee (q \rightarrow \sim r)$
   (f) $(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim q \wedge r)$
   (g) $p \veebar (p \vee q)$
   (h) $(p \leftrightarrow q) \veebar (p \leftrightarrow \sim q)$
   (i) $(p \veebar q) \leftrightarrow (p \veebar \sim q)$
   (j) $(p \veebar q) \rightarrow \sim r$

Tautología, contradicción y contingencia

Definición 7 (Tautología). *Una tautología es una proposición molecular que siempre es verdadera independiente de los valores de veracidad de las proposiciones que la componen.*
Ejemplo

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

Luego, la proposición $p \vee \sim p$ es una tautología.

Definición 8 (Contradicción). *Una contradicción es una proposición molecular que siempre es falsa independiente de los valores de veracidad de las proposiciones que la componen. Ejemplo*

p	$\sim p$	$p\wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

Luego, la proposición $p\wedge \sim p$ es una contradicción.

Definición 9 (Contingencia). *Una contingencia es una proposición que puede ser verdadera o falsa según las proposiciones que la componen. Ejemplos, la conjunción $p \wedge q$, la disjunción $p \vee q$, la disjunción exclusiva $p \veebar q$, la implicación $p \to q$ y la bicondicional $p \leftrightarrow q$ son contingencias.*

Definición 10 (Fórmulas lógicamente equivalentes). *Dos fórmulas P y Q son lógicamente equivalentes si la fórmula $P \leftrightarrow Q$ es una tautología, esto se denota $P \equiv Q$.*

Ejemplo: $p \to q \equiv \sim p \vee q$ porque $(p \to q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$ es una tautología como se puede ver en su tabla de verdad

p	q	$p \to q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$(p \to q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Ejecicios 2. Proposiciones compuestas y tablas de verdad

1. Determine cuales de las siguientes fórmulas son tautologías, contradicciones o contingencias.

   (a) $p \to (p \vee q)$

   (b) $p \wedge q \to p$

   (c) $(p \wedge q) \to \sim q$

   (d) $(p \vee q) \to \sim p$

   (e) $(\sim p \vee q) \to (\sim q \to \sim p)$

   (f) $(p \to q) \wedge (p\wedge \sim q)$

2. Compruebe las siguientes equivalencias lógicas

   (a) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

   (b) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

   (c) $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p\vee \sim q$

   (d) $\sim (p \vee q) \equiv \sim p\wedge \sim q$

   (e) $\sim (\sim p) \equiv p$

   (f) $\sim (p \to q) \equiv p\wedge \sim q$

   (g) $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$

   (h) $p \wedge q \equiv \sim (p \to \sim q)$

   (i) $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

   (j) $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p\wedge \sim q)$