REPRESENTACIONES DE LA ÁLGEBRA DE LIE $sl(2, \mathbb{C})$

YAMITH FERNANDO AGUANARY GALLARDO
EDWIN HERNÁN BOLAÑOS JOJOA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
SAN JUAN DE PASTO
2019

REPRESENTACIONES DE LA ÁLGEBRA DE LIE $sl(2, \mathbb{C})$

YAMITH FERNANDO AGUANARY GALLARDO
EDWIN HERNÁN BOLAÑOS JOJOA

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Asesor
Wilson Fernando Mutis Cantero
Doctor en Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
SAN JUAN DE PASTO
2019

Nota de Responsabilidad

Todas las ideas y conclusiones aportadas en el siguiente trabajo son responsabilidad exclusiva de los autores.

Artículo 1^{ro} del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1996 emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de Aceptación

Wilson Fernando Mutis Cantero
Presidente de Tesis

Germán Benitez Monsalve
Jurado

Luis Enrique Ramirez
Jurado

Este trabajo está dedicado a:

Mis Padres: Ernestina Gallardo y Fernando Aguanary por su valioso apoyo durante todo este tiempo.

Yamith

Este trabajo está dedicado a:
Mis padres Yolanda Jojoa, Miltón Bolaños, hermanos y mi novia Johana.
Edwin.

Agradecimientos

Al término de este trabajo de grado debo agradecer a todos aquellos profesionales que guiaron mi trayectoria universitaria, en especial a mi asesor, Wilson Fernando Mutis, quien demostró ser un gran profesor y un gran ser humano por la menara como motivó y trabajó más de lo normal para poder lograr este objetivo. A mi familia, por ser la motivación e inspiración, por siempre creer en mi, porque a pesar de los momentos difíciles, nunca dejaron de insistir en verme como un profesional. A mis compañeros y amigos de la carrera en donde debo resaltar a Johana y Edwin, quienes se convirtieron en personas indispensables en todo este tiempo. Por último, pero no por eso menos importante, a Jeniffer, que de una manera u otra, me exigió para ser de mi una mejor persona.

Yamith Fernando Aguanary Gallardo

Universidad de Nariño
Diciembre 2018.

Le agradezco a Dios por permitirme terminar esta etapa de mi vida y haber alcanzado este triunfo. Le doy gracias a mis padres Miltón y Yolanda por ser los principales promotores de mis sueños, por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación en el transcurso de mi vida, por los valores que me han enseñado y el gran apoyo que he tenido en cada momento. A mis hermanos por ser parte importante en mi vida, por ayudarme cuando más lo he necesitado y a todos los profesores por sus consejos y conocimientos, en especial quiero agradecer al Dr. Wilson Mutis por aceptarnos para realizar este trabajo, el trato recibido, por su parte la paciencia y comprensión mostrados en todo momento, gracias por su amistad que nos permitió aprender mucho más que lo estudiado en el proyecto.
Quiero agradecer a todos mis compañeros, en especial a Yamith no solo por ser mi compañero de tesis sino por su gran amistad. A mi novia Johana Jackeline, por ser una de persona más importantes en mi vida, por estar conmigo en las buenas y en las malas, por sus valores aprendidos, sobre todo por ser parte de mi vida y todo su amor, y por último gracias a todas las personas que a lo largo de mi carrera han estado ahí, porque de una u otra manera me ayudaron a poder cumplir esta meta. A todos ellos muchas gracias..

Edwin Hernán Bolaños

Universidad de Nariño
Diciembre 2018.

Resumen

Uno de los principales intereses en el estudio de la teoría de álgebras de Lie es caracterizar las representaciones irreducibles de una álgebra de Lie dada. En este documento se presenta una introducción a la teoría básica de álgebras de Lie y al estudio de las representaciones irreducibles de la álgebra $sl(2, \mathbb{C})$. El trabajo es el resultado del análisis detallado de diferentes textos especializados sobre la teoría de álgebras de Lie y pretende ser un documento escrito fácil de leer para estudiantes interesados en el tema y que no poseen una fuerte formación académica en estructuras algebraicas.

Palabras Clave: Álgebra de Lie, Representación, Representación irreducible, Módulo Verma, Módulos de Gelfand-Tsetlin.

Abstract

One of the main interests in the study of the Lie algebras theory is to characterize the irreducible representations of a given Lie algebra. This document presents an introduction to the basic of Lie algebras theory and the study of the irreducible representations of the algebra $sl(2, \mathbb{C})$. The work is the result of the detailed analysis of different specialized texts on the theory of Lie algebras and aims to be a written document easy to read for students interested in the topic and who do not have a strong academic background in algebraic structures.

Keywords Lie algebra, Representation, Irreducible representaction, Verma Modules, Gelfand-Tsetlin Modules.

Índice general

Introducción ix

1. Preliminares **1**
- 1.1. Espacios Vectoriales . . . 1
- 1.2. Transformaciones Lineales . . . 4
  - 1.2.1. Espacio dual . . . 6
- 1.3. Matrices . . . 8
- 1.4. Formas bilineales . . . 10
- 1.5. Diagonalización . . . 11
- 1.6. Valores y vectores propios . . . 12
  - 1.6.1. Polinomio característico . . . 12
- 1.7. Descomposición de Jordan . . . 14

2. Introducción a las Álgebras de Lie **17**
- 2.1. Álgebras de Lie, subálgebras de Lie e ideales . . . 17
- 2.2. Homomorfismos y representaciones . . . 25
- 2.3. Álgebras de Lie solubles y nilpotentes . . . 31
  - 2.3.1. Caracterización de las álgebras de Lie semisimples . . . 42

3. Representaciones de sl(2,$\mathbb{C}$) **46**
- 3.1. Teoría de Representaciones . . . 46
- 3.2. Representaciones de dimensión finita para $sl(2,\mathbb{C})$ . . . 48
- 3.3. Clasificación de las representaciones irreducibles de $sl(2,\mathbb{C})$ . . . 50

4. Representaciones irreducibles de dimensión infinita sobre $sl(2,\mathbb{C})$ **53**
- 4.1. Módulos de Peso . . . 53
  - 4.1.1. Módulos Verma . . . 54
  - 4.1.2. Módulos Gelfand Tsetlin (G-T) . . . 56

Conclusiones **61**

Apéndice **62**

Referencias **64**

Introducción

La teoría de las álgebras de Lie nace del estudio de los grupos de Lie realizado por el matemático noruego Sophus Lie en 1873. En la actualidad esta teoría tiene importantes aplicaciones en la matemática contemporánea, la física teórica, la teoría de códigos y la matemática financiera. El estudio de las álgebras de Lie requiere de un buen conocimiento de estructuras algebraicas abstractas como grupos, anillos, cuerpos y espacios vectoriales, motivo por el cual los cursos de álgebras de Lie, por lo general, se hacen a nivel posgraduado y los textos especializados en esta teoría presentan las pruebas de los teoremas omitiendo muchos detalles. Sin embargo, últimamente se ha notado un creciente interés en el estudio de las álgebras de Lie por parte de estudiantes de pregrado que no cuentan con una solida formación en estructuras algebraicas. En aras de fomentar el crecimiento de esta teoría es indispensable buscar mecanismos para que los futuros investigadores en esta temática puedan comenzar su estudio antes del posgrado, esto motivó a los autores de este trabajo a realizar un análisis detallado de la teoría básica de las álgebras de Lie y las representaciones de $sl(2,\mathbb{C})$. El resultado es la presente monografía en la cual se explican los pormenores de los principales teoremas en la teoría básica de las álgebras de Lie y sus representaciones, cabe aclarar que las demostraciones presentadas en este documento, aunque no son originales de los autores y se pueden encontrar en [4],[5],[6],[7] y [8], entre otros, fueron reescritas para facilitar su comprensión.
La monografía se ha organizado en cuatro capítulos los cuales tienen como propósito guiar al lector desde algunos tópicos de la teoría básica del álgebra abstracta hasta el estudio de las representaciones de dimensión finita e infinita sobre la álgebra de Lie $sl(2,\mathbb{C})$. En el Capítulo (1) se presentan los conceptos, definiciones y resultados básicos de la teoría de espacios vectoriales, transformaciones lineales y matrices, en el Capítulo (2) se hace una introducción a los conceptos y resultados básicos de la teoría de las álgebras de Lie. Los capítulos (3) y (4), son la parte central de este documento y en ellos se exponen las representaciones irreducibles de dimensión finita e infinita sobre la álgebra de Lie $sl(2,\mathbb{C})$.

Capítulo 1

Preliminares

En este capitulo se presentarán algunas definiciones y teoremas del álgebra de matrices y de espacios vectoriales, los cuales se utilizarán a lo largo del trabajo. La mayoría de los teoremas se enuncian sin demostración dado que son resultados conocidos del álgebra lineal, sin embargo las pruebas se pueden encontrar en [10], [11], [12] y [13]. En todo el documento se utiliza la siguiente notación: $|S|$ denota el cardinal del conjunto S, para un entero n, con $\mathbb{Z}_{\geq n}$ se denota el conjunto de todos los enteros mayores o iguales a n.

1.1. Espacios Vectoriales

En esta sección se supone que el lector conoce las definiciones de grupo, anillo y cuerpo, además las propiedades básicas de estas estructuras. En lo que sigue, $\mathbb{F}$ denotará un cuerpo fijo.

Definición 1.1 (**Espacio vectorial**). Un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ (o $\mathbb{F}$-espacio vectorial) es una terna $(V, +, \cdot)$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $(V, +)$ es un grupo abeliano
2. $\cdot : \mathbb{F} \times V \longrightarrow V$ es una función que asigna a cada par $(\alpha, w) \in \mathbb{F} \times V$ un elemento $\alpha w \in V$ y que satisface las siguientes condiciones: Para todo a, b en $\mathbb{F}$ y todo v, w en V
   (i) $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w$.
   (ii) $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$.
   (iii) $1 \cdot v = v$.
   (iv) $(ab) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$.

Los elementos de V se denominan vectores y los elementos de $\mathbb{F}$ escalares. La operación $\cdot$ se llama producto por escalar. En adelante, el $\mathbb{F}$-espacio vectorial $(V, +, \cdot)$ solo se denotará por V.

Definición 1.2 (**Subespacio vectorial**). Sean V un espacio vectorial y W un subconjunto no vacío de V. Se dice que W es un subespacio de V, si W es un espacio vectorial con la suma de vectores y el producto por escalar definidos en V.

Proposición 1.3. *Sean V es un espacio vectorial y W un subconjunto no vacio de V. Entonces, W es un subespacio de V si, y sólo si, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y para todo $v, w \in W$ se cumple $\alpha v + \beta w \in W$.*

Proposición 1.4. *Sea V un espacio vectorial, se tiene:*

1. *Si $\{W_i\}_{i\in I}$ es una colección de subespacios de V entonces $\bigcap\limits_{i\in I} W_i$ es un subespacio de V.*
2. *Si S y T son subespacios de V, entonces $S + T = \{s + t : s \in S,\ t \in T\}$ es subespacio de V.*

Espacio cociente

Sea W un subespacio de un espacio vectorial V. Defina en V la relación $\sim$ de la siguiente forma: $v \sim u$ si, y sólo si, $v - u \in W$, para todo $v, u \in V$. Se puede probar que $\sim$ es una relación de equivalencia en V. La clase de equivalencia del vector $v \in V$ se denota con $v + W$, o simplemente $\overline{v}$, es decir,

$$\overline{v} = v + W = \{u \in V : v - u \in W\} = \{v + w : w \in W\}.$$

La colección $V/W = \{v + W : v \in V\}$, se denomina conjunto de clases laterales módulo W.

Proposición 1.5. *Si W es un subespacio de un espacio vectorial V, entonces V/W es un espacio vectorial definiendo la suma de vectores por, $(v + W) + (u + W) := (v + u) + W$, y la multiplicación por escalar por, $\lambda(v + W) := (\lambda v) + W$, para todo par de vectores $v, u \in V$ y todo escalar $\lambda \in \mathbb{F}$. El espacio V/W se denomina espacio cociente.*

Definición 1.6 (**Combinación lineal**). Sea S un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V. Una combinación lineal de los vectores de S es un vector $v \in V$ de la forma

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \tag{1.1.1}$$

donde $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $v_1, \cdots, v_n \in S$ y $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. La combinación lineal (1.1.1) se denomina no trivial si por lo menos uno de los escalares $\alpha_i \neq 0$, en caso contrario la combinación lineal se denomina trivial.

Definición 1.7 (**Dependencia e independencia lineal**). Sea S un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V. Se dice que S es linealmente dependientes (o L.D) si el vector $0 \in V$ se puede expresar como una combinación lineal no trivial de los vectores en S, es decir, existen vectores $v_1, \cdots, v_n \in S$ y escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{F}$, no todos cero, tales que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$. En caso contrario se dirá que S es linealmente independientes (o L.I) lo que ocurrirá si la única combinación lineal de los vectores de S que representa al vector nulo es la combinación lineal trivial.

Definición 1.8 (**Subespacio generado**)**.** Sea S un subconjunto de un espacio vectorial V. El subespacio generado por S, denotado por *span* S, es la intersección de todos los subespacios de V que contienen a S. Además, se dice que S es un conjunto generador de V si *span* $\mathrm{S} = V$.

Proposición 1.9. *Si S es un subconjunto de un espacio vectorial V, entonces*

1. *span $S = \{0\}$ si, y sólo si, $S = \emptyset$.*

2. *span $S = \{v \in V : v$ es combinación lineal de vectores de $S\}$.*

Definición 1.10 (**Base**)**.** Sea V un espacio vectorial no nulo. Un subconjunto B de V es una base para V si satisface las dos condiciones siguientes:

1. B es un subconjunto generador de V.

2. B es LI.

Teorema 1.11. *Todo espacio vectorial V contiene una base, además, si B_1 y B_2 son bases de V, entonces $|B_1| = |B_2|$.*

Definición 1.12 (**Dimensión**)**.** Sea V un espacio vectorial. La dimensión de V (sobre $\mathbb{F}$), denotada dím V, es el cardinal de cualquier base de V. Si V contiene una base finita B, se dice que V es un espacio de dimensión finita y dím $V = |B|$.

Teorema 1.13. *Sean V un espacio vectorial y W un subespacio de V, se tiene:*

1. *Si S es un subconjunto L.I de V, entonces existe una base B de V tal que $S \subseteq B$.*

2. *Si V es de dimensión finita, entonces W es de dimensión finita y dím $W \leqslant$dím V.*

3. *Si V es de dimensión finita, entonces todo subconjunto $S \subseteq V$, con $|S| >$ dím V, es linealmente dependiente.*

4. *Si V es de dimensión finita, entonces todo subconjunto $S \subseteq V$, con $|S| =$ dím V tal que span $S = V$, es una base de V.*

Proposición 1.14. *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y U un subespacio de V. Si $\{u_1, \cdots, u_r\}$ es una base para U y $\{\overline{v}_1, \cdots \overline{v}_s\}$ es una base para V/U, entonces $\{u_1, \cdots, u_r, v_1, \cdots, v_s\}$ es una base para V.*

Proposición 1.15. *Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y U un subespacio de V, entonces dím $V/U =$ dím $V -$ dím U.*

Proposición 1.16. *Sean S y T subespacios de un espacio vectorial V de dimensión finita, entonces*

1. *Si $S \subseteq T$, entonces dím $S \leq$ dím T.*

2. *Si $S \subseteq T$ y dím $S =$ dím T, entonces $S = T$.*

Definición 1.17 (Suma directa de espacios vectoriales). Sean $W_1, W_2, \cdots, W_n$ subespacios de un espacio vectorial V. Se dice que V es suma directa de los W_i, denotado por $V = \bigoplus_{i=1}^{n} W_i$, si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. Para cualquier $v \in V$ existen $w_i \in W_i$ tales que $v = \sum_{i=1}^{n} w_i$.
2. Para cada $1 \leq i \leq n$, se tiene $W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_n) = \{0\}$.

Proposición 1.18. *Si $V = \bigoplus_{i=1}^{n} W_i$, entonces*

1. *Si B_i es una base de W_i, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} B_i$, es una base de V.*
2. *dím $V = \sum_{i=1}^{n}$ dím W_i.*

1.2. Transformaciones Lineales

Definición 1.19 (Transformación lineal). Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{F}$. Una función $f : V \longrightarrow W$ se llama una transformación o aplicación lineal de V en W si cumple:

(i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, para todo $v_1, v_2 \in V$

(ii) $f(\lambda v_1) = \lambda f(v_1)$, para todo $\lambda \in \mathbb{F};$ y para todo $v_1 \in V$

Ejemplos 1.20. Sean V y W dos espacios vectoriales. Entonces,

1. La función $0 : V \longrightarrow W$, definida por $0(x) = 0$, para toda $x \in V$, es una transformación lineal.
2. $I_V : V \longrightarrow V$ definida por $I_V(x) = x$ es una transformación lineal.
3. Suponga que dím $V = n \geq 1$ y sea $v \in V$ un vector no nulo, por el teorema (1.13), existe una base $B = \{v, v_1, \cdots, v_{n-1}\}$ de V y se tiene la transformación lineal $\chi : V \longrightarrow \mathbb{F}$, definida por
$$\chi(\alpha v + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha.$$
4. Para cada subespacio S de V, la función $\pi : V \longrightarrow V/S$ definida por $\pi(x) := x + S$ es una transformación lineal, denominada transformación lineal canónica asociada al subespacio S.

Proposición 1.21. *Sean $f : V \longrightarrow W$ y $g : W \longrightarrow Z$ dos transformaciones lineales, entonces $g \circ f : V \longrightarrow Z$, es una transformación lineal.*

Nota 1.22. En adelante, la composición $g \circ f$ se denotará simplemente con gf.

Definición 1.23. Sean V, W dos espacios vectoriales, y $f : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Se dice que:

1. f es un *monomorfismo* si f es inyectiva.

2. f es un *epimorfismo* si f es sobreyectiva.

3. f es un *isomorfismo* si f es biyectiva, en este caso los espacios vectoriales se dicen isomorfos, esto se denota con $V \cong W$.

Definición 1.24 (Endomorfismo). Sea V un espacio vectorial. Un endomorfismo en V es una transformación lineal $f : V \longrightarrow V$. El conjunto de todos los endomorfismos en el espacio V se denota con $End(V)$. Además, si $f \in End(V)$ es un isomorfismo, entonces se dice que f es un automorfismo.

Nota 1.25. Sea V un espacio vectorial. Se puede probar que $End(V)$ es un espacio vectorial definiendo la suma como $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$ y el producto por escalar por $(\alpha f)(v) = \alpha f(v)$, para todo $v \in V$, todo $f, g \in End(V)$ y todo $\alpha \in \mathbb{F}$.

Proposición 1.26. *Sea $f : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, entonces:*

1. *El kernel de f, denotado con $Ker(f)$ y definido por $Ker(f) := \{x \in V : f(x) = 0\}$, es un subespacio de V.*

2. *Para cada subespacio S de V, $f(S) = \{f(x) : x \in S\}$ es un subespacio de W. En particular, $f(V)$ se denomina imagen de f y se denota con $Im(f)$.*

3. *Para cada subespacio T de W, $f^{-1}(T) = \{x \in V : f(x) \in T\}$ es un subespacio de V denominado imagen inversa de T.*

Proposición 1.27. *Sean V y W dos espacios vectoriales, con dím $V = n$. Si $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base de V y $w_1, w_2, ..., w_n$ son vectores arbitrarios de W, entonces existe una única transformación lineal $f : V \longrightarrow W$ tal que $f(v_i) = w_i$ para cada $1 \leq i \leq n$.*

Teorema 1.28 (Teoremas de isomorfismo para espacios vectoriales). *Sean V, W y U tres espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{F}$.*

1. *Si $\varphi : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal, $V/Ker(\varphi) \cong Im(\varphi)$.*

2. *Si U y W son subespacios de V, entonces $(U + W)/W \cong U/(W \cap U)$.*

3. *Si U y W son subespacios de V tales que $U \subseteq W$, entonces W/U es un subespacio de V/U y $(V/U)/(W/U) \cong V/W$.*

Observación 1.29.

1. Una transformación lineal $f : V \longrightarrow W$ es un monomorfismo si, y sólo si, $Ker(f) = \{0\}$.

2. El transformación lineal canónica $\pi : V \longrightarrow V/S$ es un epimorfismo.

3. Los espacios vectoriales V y W son isomorfos si, y sólo, si dím $V =$ dím W.

Proposición 1.30. *Sean V, W dos espacios vectoriales y sea $f : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Si f es un isomorfismo, entonces $f^{-1} : W \longrightarrow V$ es una transformación lineal (que resulta ser un isomorfismo).*

Proposición 1.31. *Sean V un espacio vectorial y U un subespacio de V. Si $f \in End(V)$ y $f(U) \subseteq U$, entonces $\overline{f} : V/U \longrightarrow V/U$, definida por $\overline{f}(\overline{v}) := \overline{f(v)}$, es un endomorfismo en V/U.*

Demostración. Para mostrar que $\overline{f}$ esta bien definida, sean $\overline{v}, \overline{w} \in V/U$ tales que $\overline{v} = \overline{w}$ entonces existe $u \in U$, con $v = w + u$, luego $\overline{f}(\overline{v}) = \overline{f(v)} = \overline{f(w+u)} = \overline{f(w)} + \overline{f(u)} = \overline{f(w)} = \overline{f}(\overline{w})$, por tanto $\overline{f}$ esta bien definida. Finalmente, la linealidad de $\overline{f}$ es consecuencia de la linealidad de f. $\square$

Proposición 1.32. *Si $f : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal y V es de dimensión finita, entonces dím $V =$ dím $Ker(f) +$ dím $Im(f)$.*

Proposición 1.33. *Sean V, W dos espacios vectoriales y $f : V \longrightarrow W$ un isomorfismo. Entonces para toda base B de V, $f(B)$ es una base de W. En particular, si V es de dimensión finita, W también lo es y dím $V =$ dím W.*

Definición 1.34 (Subespacio invariante). Sean V un espacio vectorial y $f \in End(V)$. Un subespacio $W \subseteq V$ es invariante con respecto a la transformación f (o f-invariante) si $f(W) \subseteq W$. Si $L \subseteq End(V)$ y W es invariante con respecto a toda transformación en L, se dice que W es L-invariante.

Observación 1.35. En todo espacio vectorial V los subespacios triviales $\{0\}$ y V son $End(V)$-invariantes.

1.2.1. Espacio dual

Sean V y W dos espacios vectoriales, entonces el conjunto $Hom(V, W)$ de transformaciones lineales de V en W tiene estructura de espacio vectorial con la suma y producto por escalar definidos de la siguiente forma:

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v) \quad \text{y} \quad (\alpha f)(v) = \alpha f(v),$$

para todo $f, g \in Hom(V, W)$, toda $\alpha \in \mathbb{F}$ y todo vector $v \in V$. En particular, $Hom(V, \mathbb{F})$ se denomina el espacio dual de V y se denota con V^*. Además, si V y W son espacios vectoriales de dimensión finita, se tiene $\text{dím } Hom(V, W) = \text{dím } V \text{dím } W$, así que, para todo espacio vectorial V de dimensión finita se tiene $\text{dím } V = \text{dím } V^*$, luego $V \cong V^*$. Por otro lado, sea $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base de V, para cada $1 \leq i \leq n$ se define $\epsilon_i \in V^*$, de la siguiente manera

$$\epsilon_i(v_j) := \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Se puede probar que $\{\epsilon_1, \cdots \epsilon_n\}$ es una base de V^*, denominada base canónica de V^* asociada a la base B.

Proposición 1.36. *Si V es un espacio vectorial, entonces para $v \in V$ se tiene que $\psi_v : V^* \longrightarrow \mathbb{F}$, definida por $\psi_v(\omega) := \omega(v)$, es una transformación lineal.*

Demostración. Sean $\omega_1, \omega_2 \in V^*$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ se tiene

$$\psi_v(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) = (\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)(v) = \alpha\omega_1(v) + \beta\omega_2(v) = \alpha\psi_v(\omega_1) + \beta\psi_v(\omega_2).$$

Por tanto $\psi_v \in (V^*)^*$, para todo $v \in V$. □

Proposición 1.37. *Si V es un espacio vectorial, entonces $\mathfrak{f} : V \longrightarrow (V^*)^*$ definida por $\mathfrak{f}(v) := \psi_v$ es una transformación lineal, además, si $\text{dím } V < \infty$, entonces $\mathfrak{f}$ es isomorfismo.*

Demostración. Sean $v_1, v_2 \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, entonces, por un lado $\mathfrak{f}(\alpha v_1 + \beta v_2) = \psi_{\alpha v_1 + \beta v_2}$, y por otro lado, $\alpha\mathfrak{f}(v_1) + \beta\mathfrak{f}(v_2) = \alpha\psi_{v_1} + \beta\psi_{v_2}$. Para $\omega \in V^*$ se tiene:

$$\psi_{\alpha v_1 + \beta v_2}(\omega) = \omega(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha\omega(v_1) + \beta\omega(v_2) = \alpha\psi_{v_1}(\omega) + \beta\psi_{v_2}(\omega) = (\alpha\psi_{v_1} + \beta\psi_{v_2})(\omega).$$

Por tanto $\mathfrak{f}(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha\mathfrak{f}(v_1) + \beta\mathfrak{f}(v_2)$. Ahora, sea $v \in V \setminus \{0\}$, por el item (3) del ejemplo (1.20) existe $\chi \in V^*$ tal que $\chi(v) = 1$, luego $\mathfrak{f}(v)(\chi) = \chi(v) = 1 \neq 0$, esto es, $\mathfrak{f}(v) \neq 0$, es decir, $v \notin Ker(\mathfrak{f})$ por tanto $Ker(\mathfrak{f}) = \{0\}$. Finalmente, si V es dimensión finita se tiene

$$\text{dím } (V^*)^* = \text{dím } V = \text{dím } (Ker(\mathfrak{f})) + \text{dím } (Im(\mathfrak{f})) = \text{dím } (Im(\mathfrak{f})).$$

Pero $Im(\mathfrak{f}) \subseteq (V^*)^*$, luego $Im(\mathfrak{f}) = (V^*)^*$. De esta manera $\mathfrak{f}$ es sobreyectivo. □

Definición 1.38 (Anulador de un espacio). Sean V un espacio vectorial y W un subespacio de V. El anulador de W, denotado con W°, es el conjunto de todas las transfomaciones $f \in V^*$ tales que $f(w) = 0$, para toda $w \in W$.

Observación 1.39. Sean V un espacio vectorial y W un subespacio de V. Si $f, g \in W^\circ$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, entonces para toda $w \in W$ se tiene

$$(\alpha f + \beta g)(w) = \alpha f(w) + \beta g(w) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$$

por lo tanto W° es un subespacio de V^*.

Proposición 1.40. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Si W es un subespacio de V, entonces dím $V =$ dím $W +$ dím W°.*

Demostración. Sea $B = \{w_1, \cdots, w_r, w_{r+1}, \cdots, w_{r+s}\}$ una base de V donde $\{w_1, \cdots, w_r\}$ es una base de W, luego $\{\epsilon_1 \cdots, \epsilon_r, \epsilon_{r+1}, \cdots, \epsilon_{r+s}\}$ es la base canónica de V^* asociada a B, además se tiene $W^{\circ} = span\{\epsilon_{r+1}, \cdots, \epsilon_{r+s}\}$ y así, dím $V = r + s =$ dím $W +$ dím W°. □

1.3. Matrices

En esta sección se presentan algunos aspectos básicos del álgebra de matrices. Para enteros positivos m y n, el conjunto de matrices de tamaño $m \times n$ con componentes en el cuerpo $\mathbb{F}$, se denotará con $M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Si $m = n$, el conjunto de matrices cuadradas de orden n, se denotará con $M_n(\mathbb{F})$ y para el caso $m = 1$, el conjunto de vectores columna de n componentes en el cuerpo $\mathbb{F}$, con $\mathbb{F}^n$. Una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ con componentes a_{ij}, $i = 1, ..., m$ y $j = 1, ..., n$, se denota con $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y se supone que el lector conoce la suma, multiplicación y producto por escalar usuales en $M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y sean $1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m$. Se define la matriz $e_{ij} \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ como la matriz que tiene un 1 en la ij-ésima componente y 0 en las demás. El conjunto $E = \{e_{ij} : 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$ es una base para $M_{n\times m}(\mathbb{F})$, la cual recibe el nombre de base canónica.

Definición 1.41 (Traza de una matriz). Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$. Se llama traza de la matriz A, y se denota $Tr(A)$, a la suma de las componentes de la diagonal principal de la matriz A, es decir $Tr(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Se puede probar que la función traza $Tr : M_n(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}$, satisface las siguientes propiedades:

Proposición 1.42. *Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ entonces*

1. $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$.
2. $Tr(\alpha A) = \alpha Tr(A)$.
3. $Tr(A^T) = Tr(A)$.
4. $Tr(AB) = Tr(BA)$.

Definición 1.43 (Matriz invertible). Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$, se dice que la matriz A es invertible (o no singular) si existe una matriz $B \in M_n(\mathbb{F})$ tal que $AB = BA = I_n$, donde I_n denota la matriz identidad de orden n.

Se puede probar que si A es una matriz invertible, entonces la matriz B de la definición anterior es única, en este caso la matriz B se denomina inversa de la matriz A y se denota con $B = A^{-1}$.

Proposición 1.44. *Sean A, B matrices invertibles, entonces*

1. *AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*
2. *A^T también lo es y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*
3. *Para cada $\lambda \in \mathbb{F}$, con $\lambda \neq 0$, la matriz λA es invertible y $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$.*

Definición 1.45 (**Vector de coordenadas**). Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial y sea $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ una base de V. El vector de coordenadas de un vector $v \in V$ con respecto a la base B, denotado con $[v]_B$, es el único vector $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)^t \in \mathbb{F}^n$ tal que

$$v = \alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, \cdots, \alpha_n v_n.$$

Proposición 1.46. *Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita y sean $B_1 = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V y $B_2 = \{w_1, ..., w_m\}$ una base de W. Si $f : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal, entonces existe una única matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ tal que para cada $v \in V$, se cumple*

$$[f(v)]_{B_2} = A[v]_{B_1}.$$

Observación 1.47. Se puede probar que $A = [\alpha_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ donde $f(v_j) = \alpha_{1j}w_1 + \cdots + \alpha_{mj}w_m$ para $i = 1, \cdots, m$ y $j = 1, \cdots, n$. La matriz A se denomina **matriz de la transformación** f en las bases B_1, B_2, y se denota $[f]_{B_1B_2}$. Si $f \in End(V)$ y $B_1 = B_2 = B$, esta matriz se denotará como $[f]_B$.

Proposición 1.48. *Si B_1 y B_2 son dos bases de un espacio vectorial V de dimensión finita, entonces $[f]_{B_1} \sim [f]_{B_2}$, para toda $f \in End(V)$.*

Proposición 1.49. *Sean B_1 y B_2 dos bases de un espacio vectorial V de dimensión finita. Si $f \in End(V)$, entonces $Tr([f]_{B_1}) = Tr([f]_{B_2})$.*

Demostración. Por la proposición anterior, existe una matriz invertible C tal que $[f]_{B_1} = C[f]_{B_2}C^{-1}$, entonces por proposición (1.42)

$$Tr([f]_{B_1}) = Tr(C[f]_{B_2}C^{-1}) = Tr([f]_{B_2}CC^{-1}) = Tr([f]_{B_2}).$$

□

Definición 1.50 (**Traza de una transformación lineal**). Sean V un espacio vectorial y f una transformación en $End(V)$. La traza de f, denotada con $Tr(f)$, es la traza de la matriz asociada a f en cualquier base de V.

1.4. Formas bilineales

Definición 1.51 (**Transformación bilineal**). Sean V, W y H tres espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{F}$. Una función $\phi : V \times W \longrightarrow H$ es una transformación o aplicación bilineal si para todo $v_1, v_2 \in V$, todo $w_1, w_2 \in W$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\phi(v_1, \alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha\phi(v_1, w_1) + \beta\phi(v_1, w_2)$.

2. $\phi(\alpha v_1 + \beta v_2, w_1) = \alpha\phi(v_1, w_1) + \beta\phi(v_2, w_2)$.

Definición 1.52 (**Forma bilineal: Simétrica y no degenerada**). Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Una aplicación bilineal $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$ se denomina forma bilineal en V. La forma bilineal φ es simétrica si $\varphi(v, w) = \varphi(w, v)$ para toda $v, w \in V$. Además, si φ es una forma bilineal simétrica, se define el Kernel de φ de la siguiente manera

$$Ker(\varphi) = \{v \in V : \varphi(v, w) = 0, \, \forall w \in V\},$$

y se dice que φ es no degenerada, si $Ker(\varphi) = \{0\}$. Si $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es una base de V, la matriz de la forma bilineal φ con respecto a la base B, denotada con $[\varphi]_B$, es la matriz cuadrada de orden n, cuya ij-ésima componente es $\varphi(v_i, v_j)$, $1 \leq i, j \leq n$, es decir

$$[\varphi]_B = \begin{pmatrix} \varphi(v_1, v_1) & \varphi(v_1, v_2) & \cdots & \varphi(v_1, v_n) \\ \varphi(v_2, v_1) & \varphi(v_2, v_2) & \cdots & \varphi(v_2, v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(v_n, v_1) & \varphi(v_n, v_2) & \cdots & \varphi(v_n, v_n) \end{pmatrix}.$$

Observación 1.53. Sea $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$ una forma bilineal simétrica. Claramente $Ker(\varphi)$ es un subespacio de V, y para toda base B de V, la matriz $[\varphi]_B$ es simétrica.

Definición 1.54 (**Complemento ortogonal**). Sea $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$ una forma bilineal simétrica y sea W un subespacio de V. El complemento ortogonal de W con respecto a φ, denotado con $W^\perp$, se define por $W^\perp = \{v \in V : \varphi(v, w) = 0, \, \forall w \in W\}$.

Observación 1.55. Bajo las condiciones de la definición anterior, claramente se tiene que $W^\perp$ es un subespacio de V.

Proposición 1.56. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Si $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$ es una forma bilineal simétrica, entonces dím V = dím W + dím $W^\perp$ − dím $(W \cap Ker(\varphi))$.*

Demostración. Sea $\phi : W \longrightarrow V^*$ la transformación lineal que a cada elemento $w \in W$ le asigna la función $\phi_w \in V^*$, definida por $\phi_w(v) := \varphi(w, v)$, para toda $v \in V$. Por proposición (1.32), se tiene dím W = dím $Ker(\phi)$ + dím $Im(\phi)$. Pero

$$Ker(\phi) = \{w \in W : \phi_w = 0 \in V^*\} = \{w \in W : \varphi(w, v) = 0, \, \forall v \in V\} = W \cap Ker(\varphi).$$

Además $(Im(\phi))^\circ = \{f \in (V^*)^* : f(\phi_w) = 0, \forall w \in W\}$. Por proposición (1.37), se tiene

$$\begin{aligned}(Im(\phi))^\circ &= \{\mathfrak{f}(v) : v \in V \text{ y } \mathfrak{f}(v)(\phi_w) = 0, \forall w \in W\}\\ &= \{\mathfrak{f}(v) : v \in V \text{ y } \psi_v(\phi_w) = 0, \forall w \in W\}\\ &= \{\mathfrak{f}(v) : v \in V \text{ y } \phi_w(v) = 0, \forall w \in W\}\\ &= \{\mathfrak{f}(v) : v \in V \text{ y } \varphi(w,v) = 0, \forall w \in W\}\\ &= \{\mathfrak{f}(v) : v \in W^\perp\} = \mathfrak{f}(W^\perp).\end{aligned}$$

Dado que $\mathfrak{f}$ es un isomorfismo (ver proposición 1.37) se tiene que dím $(Im(\phi))^\circ =$ dím $W^\perp$. De la proposición (1.40) se sigue

$$\text{dím } W = \text{dím } (W \cap Ker(\varphi)) + \text{dím } V^* - \text{dím } (Im(\phi))^\circ,$$

y dado que dím $V =$ dím V^*, se tiene, dím $V =$ dím $W +$ dím $W^\perp -$ dím $(W \cap Ker(\varphi))$ □

Observación 1.57. En la proposición anterior, dím V = dím W + dím $W^\perp$, cuando φ es no degenerada.

1.5. Diagonalización

Definición 1.58 (Matrices semejantes). Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Se dice que A y B son semejantes, y se denota $A \sim B$, si existe una matriz C invertible tal que $A = CBC^{-1}$.

Proposición 1.59. *Sean $A, B, C \in M_n(\mathbb{F})$, entonces:*

1. *$A \sim A$.*
2. *Si $A \sim B$, entonces $B \sim A$.*
3. *Si $A \sim B$ y $B \sim C$, entonces $A \sim C$.*
4. *Si $A \sim B$, entonces $Tr(A) = Tr(B)$.*

Definición 1.60 (Diagonalización). Una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ se dice diagonizable si A es semejante a una matriz diagonal $D \in M_n(\mathbb{F})$.

En otras palabras, una matriz diagonizable es una matriz que es semejante a una matriz diagonal. La noción correspondiente para transformaciones lineales es la siguiente

Definición 1.61 (Diagonalización de una transformación lineal). Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y sea $f : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Se dice que f es diagonizable o diagonal si existe una base B de V tal que $[f]_B$ es diagonal.

Teorema 1.62. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Entonces f es diagonizable si y sólo si $[f]_B$ es diagonizable para toda base B de V .*

1.6. Valores y vectores propios

Definición 1.63 (**Valor y vector propio**). Sea V un espacio vectorial y sea $f : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. $\lambda \in \mathbb{F}$ se denomina valor propio de f si existe un vector diferente de cero $v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$. El vector v se denomina vector propio de V asociado a λ.

Teorema 1.64. *Suponga que $\mathbb{F}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado y V es un espacio vectorial de dimensión finita. Si $f \in End(V)$, entonces f tiene por lo menos un valor propio en $\mathbb{F}$.*

Teorema 1.65. *Sea V un espacio vectorial con $\text{dím}\, V = n$ y sea $f : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Entonces f es diagonizable si y sólo si existe una base B de V formada por vectores propios de f.*

La mismas nociones se pueden definir para matrices: Dada $A \in M_n(\mathbb{F})$, se le puede asociar una transformación lineal $f_A : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$ definida por $f_A(x) = A \cdot x$. Notar que $[f_A]_E = A$, donde E es la base canónica de $\mathbb{F}^n$. Entonces $v \in \mathbb{F}^n,\ v \neq 0$, es un vector propio de f_A de valor propio λ si, y sólo si, $A \cdot v = \lambda v$.

Proposición 1.66. *Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$, Entonces A es diagonizable si y sólo si existe una base B de $\mathbb{F}^n$ formada por vectores propios de A.*

1.6.1. Polinomio característico

De la teoría del álgebra lineal, se sabe que para cada matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ esta definido el escalar $det(A)$ llamado determinante de A que satisface las siguientes propiedades.

Proposición 1.67. *Si $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, entonces:*

1. *A es invertible si y solo si $det(A) \neq 0$.*
2. *Para todo escalar $\lambda \in \mathbb{F}$, $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$.*
3. *$det(AB) = det(A)det(B)$.*

Si $A \in M_n(\mathbb{F})$, se tiene

$$\begin{aligned} \lambda \text{ es valor propio de } A &\iff \exists x \in \mathbb{F} - \{0\} \text{ tal que } A \cdot x = \lambda x \\ &\iff \text{ El sistema } A \cdot x = \lambda x \text{ tiene solucion no trivial} \\ &\iff \text{ El sistema } (\lambda I_n - A) \cdot x = 0 \text{ tiene solución no trivial.} \\ &\iff det(\lambda I_n - A) = 0. \end{aligned}$$

Definición 1.68 (**Polinomio característico**). Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$. Se llama polinomio característico de A, y se denota $p_A(X)$, al polinomio $p_A(X) = det(X \cdot I_n - A) \in \mathbb{F}[X]$.

Proposición 1.69. *Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ y sea $\lambda \in \mathbb{F}$. El escalar λ es valor propio de A si y sólo si λ es raíz de $p_A(X)$.*

Proposición 1.70. *Si A y B son matrices semejantes, entonces $p_A(X) = p_B(X)$.*

Proposición 1.71. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Si B_1 y B_2 son dos bases de V, entonces para cada $f \in End(V)$ se tiene $[f]_{B_1} \sim [f]_{B_2}$.*

Por las dos proposiciones anteriores tiene sentido la siguiente definición:

Definición 1.72 (Polinomio característico de un endomorfismo). Sean V un espacio vectorial de dimensión n y $f \in End(V)$. El polinomio característico de f es el polinomio

$$p(X) = det(XI_n - [f]_B),$$

donde B es una base de V.

Proposición 1.73. *Sean V un espacio vectorial de dimensión n y $f \in End(V)$. El escalar λ es un valor propio para f, si y solo si, λ es una raíz del polinomio característico de la transformación f.*

Definición 1.74 (Polinomio minimal). Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$. Se llama polinomio minimal de A, denotado con m_A, al polinomio mónico de grado mínimo que anula a A.

Observación 1.75. Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$. Dado que el anillo de polinomios $\mathbb{F}[X]$ es un dominio de ideales principales y $J_A\{P(X) \in \mathbb{F}[X] : P(A) = 0\}$ es un ideal de $\mathbb{F}[X]$ se tiene $J_A = \langle m_A \rangle$. Además, si p es el polinomio característico de A, entonces $p \in J_A = \langle m_A \rangle$. Por lo tanto el polinomio minimal de A divide a su polinomio característico.

Teorema 1.76 (Teorema de Cayley-Hamilton). *Si $A \in M_n(\mathbb{F})$, entonces el polinomio característico de A anula a la matriz A, es decir, si $p(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ es el polinomio característico de A, entonces*

$$p(A) = a_0I + a_1A + \cdots + a_nA^n = 0_{n\times m}.$$

Proposición 1.77. *Si $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $A \sim B$, entonces $m_A = m_B$.*

Este resultado implica que si $f : V \longrightarrow V$ es una transformación lineal definida en un espacio vectorial V de dimensión finita, y si se considera la matriz de f en dos bases de V distintas, los polinomios minimales de estas dos matrices coinciden. Esto permite dar la siguiente definición de polinomio minimal para transformaciones lineales.

Definición 1.78 (Polinomio minimal de una transformación lineal). Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y sea B una base de V. Sea $f : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Se define el polinomio minimal de f como $m_f = m_{[f]_B}$.

Teorema 1.79. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ algebraicamente cerrado. Si $f \in End(V)$ y $m_f(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}...(x-\lambda_k)^{m_k}$, con $m_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ es el polinomio minimal de f, entonces $V = V_1 \oplus ... \oplus V_k$ donde $V_i = Ker(\lambda_iI - f)^{m_i}$ con $i = 1, 2, ..., k$.*

Proposición 1.80. *Sean $A \in M_n(\mathbb{F})$ y m_A es el polinomio minimal de A. El escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ es un valor propio de A si y sólo si λ es raíz de m_A.*

Proposición 1.81. *Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$, entonces A es diagonalizable en $M_n(\mathbb{F})$ si y sólo si m_A tiene todas sus raíces en $\mathbb{F}$ y son simples.*

1.7. Descomposición de Jordan

Definición 1.82 (**Transformación lineal nilpotente**). Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial. Una transformación lineal $f : V \longrightarrow V$ se dice nilpotente si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n-veces} = 0.$$

Análogamente, se dice que una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ es nilpotente si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = 0$.

Definición 1.83 (**Transformación lineal semisimple**). Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial. Una transformación lineal $f : V \longrightarrow V$ se dice semisimple si existe una base B de V, en la cual la matriz que representa la transformación f es diagonal.

Lema 1.84. *Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Entonces, f es nilpotente si y sólo si $m_f = X^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Teorema 1.85. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos y sea $x \in End(V)$. Entonces ,*

a) Existen polinomios $f(X), q(X) \in \mathbb{C}[X]$, ambos sin termino constante, tales que $f(x)$ es una transformación semisimple y $q(x)$ es una transformación nilpotente. Además, $f(x)$ y $q(x)$ conmutan con la transformación x.

b) Si $x_s = f(x)$ y $x_n = q(x)$ donde f y q son los polinomios garantizados en el item (a), entonces $x = f(x) + q(x)$.

c) Sea B una base de V tal que $[x_s]_B$ es diagonal. Si $\overline{x_s}$ es la transformación donde $[\overline{x_s}]_B$ es la matriz compleja conjugada de $[x_s]_B$, entonces existe un polinomio $\overline{f}(X) \in \mathbb{C}\,[X]$ tal que $\overline{f}(x) = \overline{x_s}$.

Demostración. La prueba utilizará el teorema chino de restos para polinomios, presentado en el apéndice.

a) Sea $x \in End(V)$. Dado que $\mathbb{C}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado, existen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{C}$, distintos por pares, tales que el polinomio minimal de x tiene la forma

$$m(X) = (X - \lambda_1)^{m_1}(X - \lambda_2)^{m_2}...(X - \lambda_k)^{m_k}, \text{ con } m_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1},$$

para $i = 1, 2, ..., k$, sea $V_i = Ker(x - \lambda_i I)^{m_i}$, el teorema (1.79) garantiza que

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_k.$$

Considere los siguientes polinomios $p_i(X) = (X - \lambda_i)^{m_i} \in \mathbb{C}[X]$, para $i \neq j$ se tiene

$$mcd(p_i(X), p_j(X)) = 1.$$

Por teorema chino de los restos, existe un polinomio $f(X) \in \mathbb{C}\,[X]$ que satisface el siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{aligned} f(X) \cong & \lambda_i \,(\text{mód } p_i(X)) \quad i = 1, 2, ..., k \\ f(X) \cong & 0 \,(\text{mód } X) \end{aligned}$$

Sea $q(X) = X - f(X) \in \mathbb{C}\,[X]$, evaluando en x, se tiene $x = f(x) + q(x)$. Dado que $\mathbb{C}[X]$ es un anillo conmutativo, se tiene $q(X)f(X) = f(X)q(X)$, luego $q(x)f(x) = f(x)q(x)$. Similarmente, $xf(x) = f(x)x$ y $xq(x) = q(x)x$.

b) Se probará que $x_s = f(x)$ es semisimple. Para $i = 1, 2, ..., k$ sea B_i una base de V_i, ya que

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_k$$

Se tiene que $B = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_k$ es una base de V. Dado que $p_i(X)$ divide a $f(X) - \lambda_i$, entonces existe $q_i(X) \in \mathbb{C}\,[X]$ tal que $p_i(X)q_i(X) = f(X) - \lambda_i$ para todo $i = 1, 2, ..., k$. Sea $w_i \in B_i$, entonces

$$f(x)(w_i) = (p_i(x)q_i(x) + \lambda_i I)\,(w_i) = p_i(x)(w_i)q_i(x)(w_i) + \lambda_i w_i = \lambda_i w_i$$

Es decir todo vector de B es un vector propio de $f(x)$, así que la matriz de x_s en la base B es diagonal. Sea α un valor propio de x_n y sea $u \neq 0$ un vector propio de x_n asociado a α. Ahora se probará que $x_n = q(x)$ es una transformación nilpotente. Se tiene $x_n(u) = \alpha u$, pero $u \in V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_k$, entonces $u \in V_i$ para algún único $i \in \{1, 2, ..., k\}$. Sea $B_i = \{u_1, u_2, ..., u_k\}$, entonces $u = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + ... + \beta_k u_k$, luego

$$\begin{aligned} x_s(u) &= \beta_1 x_s(u_1) + \beta_2 x_s(u_2) + ... + \beta_k x_s(u_k) \\ &= \beta_1 \lambda_i u_1 + \beta_2 \lambda_i u_2 + ... + \beta_k \lambda_i u_k \\ &= \lambda_i(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + ... + \beta_k u_k) \\ &= \lambda_i u. \end{aligned}$$

Entonces

$$\alpha u = x_n(u) = (x - x_s)(u) = x(u) - x_s(u) = x(u) - \lambda_i u.$$

Así que, $x(u) = \alpha u - \lambda_i u = (\alpha - \lambda_i)u$. Luego u es vector propio de x asociado al valor propio $\alpha + \lambda_i$. Dado que $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ son los diferentes valores propios de x, entonces $\alpha + \lambda_i = \lambda_j$ para algún j, luego $x(u) = \lambda_j u$. Además, $E(\lambda_j) = \{v \in V : x(v) = \lambda_j v\} \subseteq Ker(x - \lambda_j I)^{m_j} = V_j$. En efecto, sea $v \in E(\lambda_j)$, entonces $(x - \lambda_j I)(v) = 0$, así,

$$(x - \lambda_j I)^{m_j - 1}(x - \lambda_j I)(v) = (x - \lambda_j I)^{m_j}(v) = 0.$$

Por lo tanto, $v \in Ker(x - \lambda_j I)^{m_j} = V_j$. De esta manera $u \in V_j \cap V_i$, luego $j = i$, entonces $\lambda_i = \lambda_j$, así que $\alpha = 0$, es decir, cero es el único valor propio de $q(x)$, por lema (1.84), se concluye que x_n es nilpotente.

$c)$ Sea $\overline{f}(X) \in \mathbb{C}[X]$ solución del siguiente sistema de congruencias

$$\begin{aligned} \overline{f}(X) \cong & \overline{\lambda_i} \,(\text{mód} p_i(X)) \quad i = 1, 2, ..., k \\ \overline{f}(X) \cong & 0 \,(\text{mód} X) \end{aligned}$$

Como en el item anterior, sea $w \in B_i$, donde B_i es una base de $V_i = Ker\,(x - \lambda_i I)^{m_i}$, por lo hecho en el item $a)$ se tiene

$$\overline{f}(x)(w) = \left(p_i(x) q_i(x) + \overline{\lambda_i} I\right)(w) = \overline{\lambda_i} w$$

Por lo tanto, $[\overline{f}(x)]_B$ es la matriz compleja conjugada de $[x_s]_B$.

$\square$

Capítulo 2

Introducción a las Álgebras de Lie

En este capitulo se dará las definiciones básicas de álgebras de Lie para que el lector se familiarice con los conceptos y notaciones fundamentales, todo esto apoyado en una colección de ejemplos conocidos y detallados. El lector se puede dar cuenta que muchos de los conceptos son similares a los vistos en cursos de álgebra básica tales como espacios cocientes, ideales, etc. Una vez conocidos estos conceptos ya se puede comprender de manera adecuada las definiciones propias de la teoría de álgebras de Lie y teoremas importantes como lo son el teorema de Engel y el teorema de Lie. En lo que sigue, $\mathbb{F}$ denota un cuerpo y todos los espacios vectoriales y transformaciones lineales se entenderán sobre el cuerpo $\mathbb{F}$.

2.1. Álgebras de Lie, subálgebras de Lie e ideales

Definición 2.1 (**Álgebra**). Una álgebra sobre $\mathbb{F}$ (o $\mathbb{F}$-álgebra) es un espacio vectorial A junto con una operación binaria $* : A \times A \longrightarrow A$ que asigna a cada par ordenado $(a, b) \in A \times A$ el vector $a * b \in A$ y satisaface las siguientes condiciones para todo $a, b, c \in A$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$:

(1) $a * (\alpha b + \beta c) = \alpha(a * b) + \beta(a * c)$.

(2) $(\alpha a + \beta b) * c = \alpha(a * c) + \beta(b * c)$.

Además, se dice que:

(3) A es una álgebra asociativa si $a * (b * c) = (a * b) * c$.

(4) A es una álgebra conmutativa si $a * b = b * a$.

(5) A tiene identidad si existe un elemento $1 \in A$ tal que $1 * a = a * 1 = a$.

Ejemplo 2.2. El espacio vectorial $M_n(\mathbb{C})$ de las matrices cuadradas de orden n con entradas en los complejos con el producto usual de matrices es una $\mathbb{C}$-álgebra asociativa con identidad.

Ejemplo 2.3. Todo cuerpo $\mathbb{F}$ con su producto usual es una álgebra asociativa, conmutativa y con identidad.

Definición 2.4 (**Álgebra de Lie).** Una álgebra de Lie sobre $\mathbb{F}$ es un espacio vectorial L, junto con una aplicación bilineal $[-,-] : L \times L \longrightarrow L$, llamada corchete o conmutador, que asigna a cada par ordenado $(x, y) \in L \times L$ el vector $[x, y] \in L$ y que satisface las siguientes condiciones:

(i) Anti-conmutatividad: $[x, x] = 0$, para todo $x \in L$.

(ii) Identidad de Jacobi: $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, para todo $x, y, z \in L$.

Ejemplo 2.5. Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales. $\mathbb{R}^3$ tiene estructura de álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$ definiendo el corchete de la siguiente manera: Para $X = (x_1, x_2, x_3)$ y $Y = (y_1, y_2, y_3)$ en $\mathbb{R}^3$,

$$[X, Y] = (x_2y_3 - x_3y_2 \ , \ x_3y_1 - x_1y_3 \ , \ x_1y_2 - x_2y_1)$$

Primero se mostrará que $[X, Y]$ es bilineal. Sean $X = (x_1, x_2, x_3), Y = (y_1, y_2, y_3), Z = (z_1, z_2, z_3)$ vectores en $\mathbb{R}^3$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned}
[X, \alpha Y + \beta Z] &= [(x_1, x_2, x_3), (\alpha y_1 + \beta z_1, \alpha y_2 + \beta z_2, \alpha y_3 + \beta z_3)] \\
&= (x_2(\alpha y_3 + \beta z_3) - x_3(\alpha y_2 + \beta z_2),\ x_3(\alpha y_1 + \beta z_1) - x_1(\alpha y_3 + \beta z_3), \\
&\quad x_1(\alpha y_2 + \beta z_2) - x_2(\alpha y_1 + \beta z_1)) \\
&= (\alpha x_2y_3 + \beta x_2z_3 - \alpha x_3y_2 - \beta x_3z_2,\ \ + \alpha x_3y_1 + \beta x_3z_1 - \alpha x_1y_3 - \beta x_1z_3, \\
&\quad \alpha x_1y_2 + \beta x_1z_2 - \alpha x_2y_1 - \beta x_2z_1) \\
&= (\alpha(x_2y_3 - x_3y_2) + \beta(x_2z_3 - x_3z_2),\ \alpha(x_3y_1 - x_1y_3) + \beta(x_3z_1 - x_1z_3), \\
&\quad \alpha(x_1y_2 - x_2y_1) + \beta(x_1z_2 - x_2z_1)) \\
&= (\alpha(x_2y_3 - x_3y_2),\ \alpha(x_3y_1 - x_1y_3),\ \alpha(x_1y_2 - x_2y_1)) + (\beta(x_2z_3 - x_3z_2), \\
&\quad \beta(x_3z_1 - x_1z_3), \beta(x_1z_2 - x_2z_1)) \\
&= \alpha(x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) + \beta(x_2z_3 - x_3z_2, x_3z_1 - x_1z_3, x_1z_2 - x_2z_1)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $[X, \alpha Y + \beta Z] = \alpha[X, Y] + \beta[X, Z]$. Análogamente se puede probar que

$$[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z].$$

Además, $[X, X] = (x_2x_3 - x_3x_2, x_3x_1 - x_1x_3, x_1x_2 - x_2x_1) = (0, 0, 0)$. Para probar la identidad de Jacobi observe que $[X, [Y, Z]] = (X \cdot Z)Y - (X \cdot Y)Z$, donde $X \cdot Y$ denota el producto escalar de los vectores $X, Y \in \mathbb{R}^3$. En efecto, Sean X, Y, Z y $W = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{aligned}
(w_1, w_2, w_3) \quad &= [X, [Y, Z]] \\
&= [(x_1, x_2, x_3), [(y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3)]] \\
&= [(x_1, x_2, x_3), (y_2z_3 - y_3z_2, y_3z_1 - y_1z_3, y_1z_2 - y_2z_1)]
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
w_1 &= x_2(y_1z_2 - y_2z_1) - x_3(y_3z_1 - y_1z_3)\\
&= (x_2z_2 + x_3z_3)y_1 - (x_2y_2 + x_3y_3)z_1\\
w_2 &= x_3(y_2z_3 - y_3z_2) - x_1(y_1z_2 - y_2z_1)\\
&= (x_3z_3 + x_1z_1)y_2 - (x_3y_3 + x_1y_1)z_2\\
w_3 &= x_1(y_3z_1 - y_1z_3) - x_2(y_2z_3 - y_3z_2)\\
&= (x_1z_1 + x_2z_2)y_3 - (x_1y_1 + x_2y_2)z_3
\end{aligned}$$

Por otro lado, sea $L \in \mathbb{R}^3$ tal que $L = (l_1, l_2, l_3) = (X \cdot Z)Y - (X \cdot Y)Z$, así

$$\begin{aligned}
l_1 &= (X \cdot Z)y_1 - (X \cdot Y)z_1 &&= (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)y_1 - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)z_1\\
& &&= (x_2z_2 + x_3z_3)y_1 - (x_2y_2 + x_3y_3)z_1 = w_1\\
l_2 &= (X \cdot Z)y_2 - (X \cdot Y)z_2 &&= (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)y_2 - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)z_2\\
& &&= (x_3z_3 + x_1z_1)y_2 - (x_3y_3 + x_1y_1)z_2 = w_2\\
l_3 &= (X \cdot Z)y_3 - (X \cdot Y)z_3 &&= (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)y_3 - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)z_3\\
& &&= (x_1z_1 + x_2z_2)y_3 - (x_1y_1 + x_2y_2)z_3 = w_3
\end{aligned}$$

Por lo tanto $W = L$. Con este resultado se sigue que

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] = (X \cdot Z)Y - (X \cdot Y)Z + (Y \cdot X)Z - (Y \cdot Z)X$$

Dado que el producto escalar es conmutativo, se tiene

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] = (X \cdot Z)Y - (Y \cdot Z)X = -[Z, [X, Y]]$$

Por lo tanto $\mathbb{R}^3$ es una $\mathbb{R}$-álgebra de Lie.

Observación 2.6. Todo espacio vectorial V tiene estructura de álgebra de Lie definiendo el corchete trivialmente, es decir, $[x, y] = 0$ para todo $x, y \in V$. Esta estructura se llama álgebra de Lie abeliana.

Propiedades 2.7 (Corchete de Lie). *Si L es una álgebra de Lie, entonces*

1. $[x, 0] = [0, x] = 0$ *para todo* $x \in L$
2. $[x, y] = -[y, x]$ *para todo* $x, y \in L$
3. *Si* $[x, y] \neq 0$ *para* $x, y \in L$*, entonces* $\{x, y\}$ *es linealmente independiente.*

Demostración. Sean $x, y \in L$, entonces

1. $[x, 0] = [x, (0 + 0)]$, por la bilinealidad del corchete se tiene $[x, 0] = [x, 0] + [x, 0]$ y por tanto $[x, 0] = 0$. Similarmente, $[0, x] = 0$.

2. De la anti-conmutatividad se tiene $[x+y,x+y]=0$, luego $\cancelto{0}{[x,x]}+[x,y]+[y,x]+\cancelto{0}{[y,y]}=0$, así que, $[x,y]=-[y,x]$.

3. Sean $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ tales que $\alpha x+\beta y=0$, entonces $0=[x,\alpha x+\beta y]=\alpha\cancelto{0}{[x,x]}+\beta[x,y]=\beta[x,y]$. Como $[x,y]\neq 0$, se concluye que $\beta=0$. Luego, $\alpha x=0$. Pero $x\neq 0$, entonces $\alpha=0$, por lo tanto $\{x,y\}$ es linealmente independiente.

□

Teorema 2.8. *Si L es una álgebra asociativa, entonces L tiene estructura de álgebra de Lie definiendo el corchete de la siguiente forma: $[x,y]=xy-yx$, para todo $x,y\in L$*

Demostración. La bilinealidad del corchete es consecuencia de que el producto en L es lineal. Sean $x,y,z\in L$, se tiene $[x,x]=xx-xx=0$. Además,

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]=[x,yz-zy]+[y,zx-xz]=x(yz-zy)-(yz-zy)x+y(zx-xz)-(zx-xz)y,$$

dado que el producto en L es asociativo, se tiene

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]=(xy-yx)z+z(yx-xy)=[x,y]z-z[x,y]=-[z,[x,y]]$$

□

Ejemplo 2.9. Del teorema anterior se tiene:

1. Sea V un espacio vectorial, el par $(End(V),\circ)$, donde $End(V)$ es el conjunto de las transformaciones lineales de V en V y $\circ$ es la composición de funciones, es una álgebra asociativa, por lo tanto, $End(V)$ tiene estructura de álgebra de Lie definiendo el corchete como $[x,y]:=x\circ y-y\circ x$, para todo $x,y\in End(V)$. En adelante, $End(V)$ denotará la estructura de álgebra asociativa y $gl(V)$ la estructura de álgebra de Lie en $End(V)$.

2. Sea $M_n(\mathbb{F})$ el espacio vectorial que consiste de todas las matrices cuadradas de orden n. $M_n(\mathbb{F})$ con la multiplicación usual de matrices es una álgebra asociativa, por lo tanto $M_n(\mathbb{F})$ tiene estructura de álgebra de Lie definiendo el corchete de la siguiente manera:

$$[A,B]:=AB-BA, \text{ para todo } A,B\in M_n(\mathbb{F})$$

Con $gl(n,\mathbb{F})$ se denotará la estructura de álgebra de Lie en $M_n(\mathbb{F})$.

Proposición 2.10. *Si L es una álgebra de Lie no abeliana y dím $L=2$, entonces existe una base $\{x,y\}$ de L tal que $[x,y]=y$.*

Demostración. Como dím $L = 2$, existen $m, n \in L$ tales que $\{m, n\}$ es una base para L, dado que $[m, n] \in L$, entonces existen $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ tales que $[m, n] = \alpha m + \beta n$. Además, $[m, n] \neq 0$ porque L es no abeliana. Sin pérdida de generalidad suponga que $\beta \neq 0$, entonces

$$[m, [m, n]] = [m, \alpha m + \beta n] = \alpha \cancelto{0}{[m, m]} + \beta[m, n] = \beta[m, n],$$

luego $[m, n] = \frac{1}{\beta}[m, [m, n]] = \left[\frac{1}{\beta}m, [m, n]\right]$. Sean $x = \frac{1}{\beta}m$ y $y = [m, n]$ entonces $\{x, y\}$ es linealmente independiente porque $[x, y] = y \neq 0$.

$\square$

Definición 2.11 (**Subálgebra de Lie**)**.** Sea L una álgebra de Lie. Una subálgebra de Lie (o simplemente subálgebra) de L es un subespacio $K \subseteq L$ tal que $[x, y] \in K$, para todo $x, y \in K$.

Observación 2.12. Toda álgebra de Lie L tiene por lo menos dos subálgebras, $\{0\}$ y L, las cuales son llamadas triviales.

Ejemplo 2.13. Sean $\tau(n, \mathbb{F})$ el subespacio de $gl(n, \mathbb{F})$ que consta de todas las matrices triangulares superiores y $\eta(n, \mathbb{F})$ matrices estrictamente superiores. $\tau(n, \mathbb{F})$ y $\eta(n, \mathbb{F})$ son subálgebras de $gl(n, \mathbb{F})$. Es claro que $\tau(n, \mathbb{F})$ y $\eta(n, \mathbb{F})$ ya son subespacios vectoriales de $gl(n, \mathbb{F})$. Sean $A, B \in \tau(n, \mathbb{F})$ entonces $[A, B] = AB - BA$ y por álgebra lineal se sabe que la suma y el producto de matrices triangulares superiores es otra matriz triangular superior, por tanto $[A, B] \in \tau(n, \mathbb{F})$. De manera similar, si $C, D \in \eta(n, \mathbb{F})$ entonces $[C, D] \in \eta(n, \mathbb{F})$. Por lo tanto, $\tau(n, \mathbb{F})$ y $\eta(n, \mathbb{F})$ son subálgebras de $gl(n, \mathbb{F})$.

Ejemplo 2.14. El subespacio $\delta(n, \mathbb{F})$ de $gl(n, \mathbb{F})$ que consta de todas las matrices diagonales, es una subálgebra abeliana de $gl(n, \mathbb{F})$. En efecto, dado que la suma y el producto de matrices diagonales es de nuevo una matriz diagonal se tiene que $\delta(n, \mathbb{F})$ es una subálgebra de $gl(n, \mathbb{F})$. Además, el producto de matrices es conmutativo en $gl(n, \mathbb{F})$, luego $[A, B] = AB - BA = 0$, para todo par de matrices $A, B \in gl(n, \mathbb{F})$.

Proposición 2.15. *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y L una subálgebra de $gl(V)$. Si $x, y, z \in L$ entonces $Tr([x, y]z) = Tr(x[y, z])$.*

Demostración. Observe que $[x, y]z = (xy - yx)z = xyz - yxz$, luego

$$Tr([x, y]z) = Tr(xyz - yxz) = Tr(xyz) - Tr(yxz) = Tr(xyz - xzy) = Tr(x[y, z]).$$

$\square$

Observación 2.16. Sean L una álgebra de Lie y $x \in L$. Por la propiedad de anti-conmutatividad se tiene que $L = span\{x\}$ es una subálgebra abeliana de L.

Definición 2.17. Normalizador Sean L una álgebra de Lie y K una subálgebra de L, el normalizador de K en L, denotado como $N_L(K)$, se define por, $N_L(K) = \{x \in L : [x, K] \subseteq K\}$, donde $[x, K] = \{[x, k] : k \in K\}$.

Proposición 2.18. *Si L es una álgebra de Lie y K es una subálgebra de L, entonces $N_L(K)$ es una subálgebra de L.*

Demostración. Por la bilinealidad del corchete se tiene que $N_L(K)$ es un subespacio de L. Sean $x, y \in N_L(K)$ y $z \in K$, entonces $[[x, y], z] = [x, \underbrace{[y, z]}_{\in K}] + [y, \underbrace{[z, x]}_{\in K}]$, por lo tanto $[x, y] \in N_L(K)$. □

Se dice que K es auto-normalizador si $N_L(K) = K$.

Definición 2.19. Centralizador Sea X un subconjunto no vacío de una álgebra de Lie L, se define el centralizador de X en L de la siguiente manera $C_L(X) = \{y \in L : [y, X] = \{0\}\}$.

Se puede probar que $C_L(X)$ es una subálgebra de L.

Definición 2.20 (**Ideal**)**.** Un ideal de una álgebra de Lie L es un subespacio I de L tal que $[x, y] \in I$, para todo $x \in L$ y toda $y \in I$.

Ejemplo 2.21. El subespacio $\{0\}$ y la álgebra de Lie L son ideales triviales de L.

Ejemplo 2.22. Sea $sl(n, \mathbb{F}) = \{A \in gl(n, \mathbb{F}) : Tr(A) = 0\}$. $sl(n, \mathbb{F})$ es un ideal de $gl(n, \mathbb{F})$. En efecto, por propiedades de la traza (1.42), se tiene que $sl(n, \mathbb{F})$ es un subespacio $gl(n, \mathbb{F})$. Sean $A \in sl(n, \mathbb{F})$ y $B \in gl(n, \mathbb{F})$, entonces $Tr([A, B]) = Tr(AB - BA) = Tr(AB) - Tr(BA) = 0$, por lo tanto, $[A, B] \in sl(n, \mathbb{F})$, es decir, $sl(n, \mathbb{F})$ es un ideal de $gl(n, \mathbb{F})$.

Ejemplo 2.23. Sea L una álgebra de Lie. El centro de L, definido por $Z(L) = \{x \in L : [x, y] = 0, \forall y \in L\}$ es un ideal de L. En efecto, por la bilinealidad del corchete, $Z(L)$ es un subespacio de L. Sean $x, z \in L$ y $y \in Z(L)$, se tiene $[[x, y], z] = [0, z] = 0$. Por lo tanto, $[x, y] \in Z(L)$.

Ejemplo 2.24. Si L es una álgebra de Lie, entonces $[L, L] = span\{[x, y] : x, y \in L\}$, es un ideal de L, denominado álgebra derivada de L. En efecto, sean $z \in L$ y $r \in [L, L]$, entonces existen escalares $\alpha_i \in \mathbb{F}$ y vectores $x_i, y_i \in L$ tales que $r = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [x_i, y_i]$, luego

$$[r, z] = \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i [x_i, y_i], z\right] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[[x_i, y_i], z\right] \in [L, L].$$

Por lo tanto, $[L, L]$ es ideal de L.

Observación 2.25. Sea K una subálgebra de L. $N_L(K) = L$ si, y solo si, K es un ideal de L.

Proposición 2.26. *Sea L una álgebra de Lie. Si I y J son ideales de L y S es una subálgebra de L entonces:*

1. *$I \cap J$, $I + J = \{x + y : x \in I \text{ y } y \in J\}$ y $[I, J] = span\{[x, y] : x \in I, y \in J\}$, son ideales de L.*

2. $I \cap S$ es un ideal de S.

3. El espacio $L/I = \{x + I : x \in L\}$ es una álgebra de Lie definiendo el corchete como

$$[x + I, y + I] = [x, y] + I \quad \textit{para} \quad x, y \in L.$$

Demostración.

1. Claramente $I \cap J$ es un ideal de L y $I + J$, $[I, J]$ son subespacios de L. Para $I + J$ sean $x = a + b \in I + J$ y $y \in L$ entonces

$$[x, y] = [a + b, y] = \overbrace{[a, y]}^{\in I} + \overbrace{[b, y]}^{\in J} \in I + J.$$

Para $[I, J]$, por la bilinealidad del corchete, es suficiente mostrar que $[l, [x, y]] \in [I, J]$ donde $l \in L$, $x \in I$ y $y \in J$, entonces

$$[l, [x, y]] = [x, \overbrace{[l, y]}^{\in J}] + [y, \overbrace{[x, l]}^{\in I}] \in [I, J].$$

2. Claramente $I \cap S$ es un subespacio de S. Sean $x \in S$ y $y \in I \cap S$, entonces $[x, y] \in S$ y $[x, y] \in I$. Por lo tanto $[x, y] \in I \cap S$.

3. Primero se garantizará que el corchete en L/I está bien definido. Suponga que $x_1 + I = x_2 + I$ y $y_1 + I = y_2 + I$, entonces $x_2 = x_1 + w$ para algún $w \in I$ y $y_2 = y_1 + z$ para algún $z \in I$. Luego,

$$\begin{aligned} [x_2, y_2] + I &= [x_1 + w, y_1 + z] + I \\ &= [x_1, y_1] + \overbrace{([w, y_1] + [x_1, z] + [w, z])}^{\in I} + I \\ &= [x_1, y_1] + I. \end{aligned}$$

De esta manera se prueba que el corchete en L/I está bien definido. Resta comprobar que cumple con las dos condicienes para ser una álgebra de Lie, de la siguienete manera:

(i) No conmutatividad: Sea $x \in L/I$, entonces $x = y + I$ para algún $y \in L$, luego

$$[x, x] = [y + I, y + I] = \cancelto{0}{[y, y]} + I = I$$

(ii) Identidad de Jacobi: Sean $x, y, z \in L/I$ entonces $x = a + I$, $y = b + I$, $z = c + I$ donde $a, b, c \in L$, luego

$$[a + I, [b + I, c + I]] = [a + I, [b, c] + I = [a, [b, c]] + I$$

$$[b + I, [c + I, a + I]] = [b + I, [c, a] + I = [b, [c, a]] + I$$

$$[c+I,[a+I,b+I]] = [c+I,[a,b]+I = [c,[a,b]]+I$$

así,

$$\begin{aligned}
[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]] &= [a,[b,c]]+I+[b,[c,a]]+I+[c,[a,b]]+I \\
&= ([a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]])+I \\
&= 0+I \\
&= I
\end{aligned}$$

Por lo tanto L/I es una álgebra de Lie.

□

Observación 2.27. Todo ideal es una subálgebra, pero no toda subálgebra es un ideal. Por ejemplo, la subálgebra $\tau(n,\mathbb{F})$ de $gl(n,\mathbb{F})$ es una subálgebra que no es ideal. En efecto, sea $e_{12} \in \tau(n,\mathbb{F})$ y $e_{31} \in gl(n,\mathbb{F})$ entonces

$$[e_{12}, e_{31}] = e_{12}e_{31} - e_{31}e_{12} = -e_{32} \notin \tau(n,\mathbb{F}).$$

Definición 2.28 (Constantes de estructura). Si L es una álgebra de Lie con base ordenada $B = \{x_1, ..., x_n\}$, entonces $[-,-]$ esta completamente determinado por los corchetes $[x_i, x_j]$ con $i, j = 1, ..., n$. Existen los escalares $a_{ij}^k \in \mathbb{F}$ tal que

$$[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k x_k.$$

Los escalares a_{ij}^k se denominan constantes de estructura para L con respecto a la base B.

Ejemplo 2.29. Constantes de estructura para $sl(2,\mathbb{C})$.

Sea $\{e, f, h\}$ la base canónica de $sl(2,\mathbb{C})$, donde

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces $[e,f] = h;\ [e,h] = -2e;\ [f,h] = 2f$. Las constantes de estructura de $sl(2,\mathbb{C})$ con respecto a esta base pertenecen al conjunto $\{0, 1, -1, 2, -2\}$.

Definición 2.30 (Álgebra de Lie simple). Sea L una álgebra de Lie no abeliana. Se dice que L es *simple* si los únicos ideales de L son $\{0\}$ y L.

Ejemplo 2.31. La $\mathbb{C}$-álgebra de Lie $sl(2,\mathbb{C})$ es simple.

Sea I un ideal no trivial de $sl(2,\mathbb{C})$ y sea $\alpha e+\beta h+\gamma f$ un vector no nulo en I. Luego, $\alpha\neq 0$ o $\beta\neq 0$ o $\gamma\neq 0$. Sin perdida de generalidad suponga que $\alpha\neq 0$, y para $[\alpha e+\beta h+\gamma f,h]\in I$ se tiene

$$[\alpha e+\beta h+\gamma f,h]=\alpha[e,h]+\beta[h,h]+\gamma[f,h]=-2\alpha e+2\gamma f.$$

Luego $[-2\alpha e+2\gamma f,f]\in I$

$$[-2\alpha e+2\gamma f,f]=-2\alpha[e,f]+2\gamma[f,f]=-2\alpha h\neq 0.$$

Por lo tanto $h\in I$, luego $e,f\in I$, por lo tanto $I=sl(2,\mathbb{C})$.

2.2. Homomorfismos y representaciones

Definición 2.32 (**Homomorfismo de álgebras de Lie**). Sean L_1 y L_2 dos álgebras de Lie. Un homomorfismo de álgebras de Lie de L_1 en L_2 es una transformación lineal $\phi: L_1\to L_2$ tal que

$$\phi([x,y])=[\phi(x),\phi(y)],\ \text{para todo } x,y\in L_1.$$

El homomorfismo ϕ se denomina monomorfismo si ϕ es inyectiva, epimorfismo si ϕ es sobreyectiva e isomorfismo si ϕ es biyectiva. Se dice que L_1 y L_2 son álgebras de Lie isomorfas si existe un isomorfismo $\phi: L_1\longrightarrow L_2$, se denotará esto con $L_1\cong L_2$.

Ejemplo 2.33 (**Epimorfismo Canónico**). Sea L una álgebra de Lie, y sea I un ideal de L. La transformación lineal $\pi: L\longrightarrow L/I$ definida por $\pi(x):=x+I$, para todo $x\in L$ es un epimorfismo de álgebras de Lie. En efecto, claramente π es una transformación lineal sobreyectiva. Sean $x,y\in L$, entonces

$$\pi[x,y]=[x,y]+I=[x+I,y+I]=[\pi(x),\pi(y)].$$

Así π es un epimorfismo de álgebras de Lie.

Ejemplo 2.34. Sean L_1 y L_2 dos álgebras de Lie no abelianas de dimensión dos, por la proposición (2.10) existe una base $\{x_1,y_1\}$ de L_1 y existe una base $\{x_2,y_2\}$ de L_2 tales que $[x_1,y_1]=y_1$ y $[x_2,y_2]=y_2$, considere el isomorfismo de espacios vectoriales $\gamma: L_1\longrightarrow L_2$ definido por $\gamma(x_1):=x_2$ y $\gamma(y_1):=y_2$ y observe que

$$\gamma([x_1,y_1])=\gamma(y_1)=y_2=[x_2,y_2]=[\gamma(x_1),\gamma(y_1)].$$

Por lo tanto, γ es un isomorfismo de álgebras de Lie. Así, todas las álgebras de Lie no abelianas de dimensión 2 son isomorfas.

Observación 2.35. Los siguientes enunciados son verdaderos:

1. Si L_1,L_2 son dos álgebras de Lie, entonces la transformación lineal nula $0: L_1\longrightarrow L_2$ definida por $0(x)=0$ para toda $x\in L_1$, es un homomorfismo de álgebras de Lie.

2. Si L es una álgebra de Lie, entonces la función idéntica $id_L : L \longrightarrow L$, definida por $id_L(x) = x$ para toda $x \in L$, es un isomorfismo de álgebras de Lie.

3. Si $\phi : L_1 \longrightarrow L_2$ y $\gamma : L_2 \longrightarrow L_3$ son homomorfismo de álgebras de Lie, entonces

$$\gamma \circ \phi : L_1 \longrightarrow L_3$$

es un homomorfismo de álgebras de Lie.

Teorema 2.36 (Propiedades de los homomorfismos). *Si $\phi : L_1 \longrightarrow L_2$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, S una subálgebra de L_1 y R una subálgebra de L_2, entonces:*

1. *$\phi(S) := \{\phi(x) : x \in S\}$ es una subálgebra de L_2, en particular, $Im(\phi)$ es una subálgebra de L_2. Además, si S es un ideal de L_1 y ϕ es epimorfismo, entonces $\phi(S)$ es un ideal de L_2.*

2. *$\phi^{-1}(R) := \{x \in L_1 : \phi(x) \in R\}$ es una subálgebra de L_1. Además, si R es un ideal de L_2, entonces $\phi^{-1}(R)$ es un ideal de L_1, en particular $Ker(\phi)$ es un ideal de L_1.*

Demostración.

1. Por álgebra lineal $\phi(S)$ es un subespacio de L_2. Sean $y_1, y_2 \in \phi(S)$, entonces existen $x_1, x_2 \in S$ tales que $\phi(x_i) = y_i$, para $i = 1, 2$. Luego $[x_1, x_2] \in S$ y se tiene

$$[y_1, y_2] = [\phi(x_1), \phi(x_2)] = \phi([x_1, x_2]) \in \phi(S).$$

Por lo tanto $\phi(S)$ es una subálgebra de L_2. Ahora suponga que S es un ideal de L_1 y ϕ es epimorfismo. Para $y \in L_2$ y $z \in \phi(S)$, existen $x_1 \in L_1$ y $x_2 \in S$ tales que $y = \phi(x_1)$ y $z = \phi(x_2)$, entonces

$$[y, z] = [\phi(x_1), \phi(x_2)] = \phi(\overbrace{[x_1, x_2]}^{\in S}) \in \phi(S).$$

2. Claramente $\phi^{-1}(R)$ es un subespacio de L_1. Sean $x_1, x_2 \in \phi^{-1}(R)$, entonces $\phi(x_i) \in R$, para $i = 1, 2$. Además,

$$\phi([x_1, x_2]) = [\phi(x_1), \phi(x_2)] \in R,$$

es decir, $[x_1, x_2] \in \phi^{-1}(R)$, por lo tanto $\phi^{-1}(R)$ es una subálgebra de L_1. Ahora, si R es un ideal de L_2, probar que $\phi^{-1}(R)$ es un ideal de L_1, se hace en forma similar a lo anterior.

□

Teorema 2.37. *Si L_1, L_2 y L_3 son álgebras de Lie, entonces*

1. *$L_1 \cong L_1$.*

2. *Si $L_1 \cong L_2$, entonces $L_2 \cong L_1$.*

3. *Si* $L_1 \cong L_2$ *y* $L_2 \cong L_3$ *entonces* $L_1 \cong L_3$.

Demostración.

1. Por el item 1. de la observación (2.35) se tiene $L_1 \cong L_1$.

2. Sea $\phi : L_1 \longrightarrow L_2$ un isomorfismo, entonces $\phi^{-1} : L_2 \longrightarrow L_1$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Para $y_1, y_2 \in L_2$, existen $x_1, x_2 \in L_1$ tales que $\phi(x_i) = y_i$, con $i = 1, 2$ y se tiene

$$\phi^{-1}([y_1, y_2]) = \phi^{-1}([\phi(x_1), \phi(x_2)]) = \phi^{-1} \circ \phi([x_1, x_2]) = [x_1, x_2].$$

luego, $\phi^{-1}([y_1, y_2]) = [\phi^{-1}(y_1), \phi^{-1}(y_2)]$, por lo tanto $L_2 \cong L_1$.

3. Esto es consecuencia del item 3. de la observación (2.35) junto con el hecho que la composición de transformaciones lineales biyectivas es de nuevo una transformación lineal biyectiva.

□

Teorema 2.38 (**Teoremas de isomorfismo para álgebras de Lie**)**.**

1. *Sea* $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ *un homorfismo de álgebras de Lie,entonces* $L_1/Ker(\varphi) \cong Im(\varphi)$

2. *Si* I *y* J *son ideales de una álgebra de Lie* L*, entonces* $(J + I)/J \cong I/(I \cap J)$.

3. *Si* I *y* J *son ideales de una álgebra de Lie* L *tales que* $I \subseteq J$*, entonces* J/I *es un ideal de* L/I *y* $(L/I)/(J/I) \cong L/J$.

Demostración.

1. Sea $K = Ker(\varphi)$ y considere la aplicación $\overline{\varphi} : L_1/K \longrightarrow Im(\varphi)$ definida por

$$\overline{\varphi}(x_1 + K) := \varphi(x_1).$$

Para mostrar que $\overline{\varphi}$ esta bien definida, sean $x_1 + K, x_2 + K \in L_1/K$ tales que $x_1 + K = x_2 + K$. Luego existe $k \in K$ tal que $x_1 = x_2 + k$ y se tiene

$$\overline{\varphi}(x_1 + k) = \varphi(x_1) = \varphi(x_2 + k) = \varphi(x_2) + \cancelto{0}{\varphi(k)} = \overline{\varphi}(x_2 + K)$$

$\overline{\varphi}$ es lineal porque φ lo es, resta probar que $\overline{\varphi}$ es homomorfismo de álgebras de Lie. Sean $x_1, x_2 \in L_1$, entonces

$$\overline{\varphi}([x_1 + K, x_2 + K]) = \overline{\varphi}([x_1, x_2] + K) = \varphi([x_1, x_2]) = [\varphi(x_1), \varphi(x_2)]$$

Así que $\overline{\varphi}([x_1 + K, x_2 + K]) = [\overline{\varphi}(x_1 + K), \overline{\varphi}(x_2 + K)]$. Ahora se demostrará que $\overline{\varphi}$ es biyectiva. Sea $x_1 + K \in Ker(\overline{\varphi})$, se tiene:

$$0 = \overline{\varphi}(x_1 + K) = \varphi(x_1).$$

Entonces, $x_1 \in K$. Por lo tanto, $x_1 + K = K = 0$ en L_1/K, así $\overline{\varphi}$ es inyectiva, además, claramente $\overline{\varphi}$ es sobreyectiva, con esto se concluye que

$$L_1/Ker(\varphi) \cong \varphi(L_1).$$

2. Si I y J son ideales de L, entonces por proposición (2.26) $J+I$ y $J \cap I$ son ideales de L, además J es ideal de $J+I$. Considere la aplicación $\varphi : I \longrightarrow (J+I)/J$, definida por $\varphi(y) = y + J$, para $y \in I$. Se probará que φ es un homomorfismo de álgebras de Lie, sean $z, y \in I$, entonces

$$\varphi([z,y]) = [z,y] + J = [z+J, y+J] = [\varphi(z), \varphi(y)].$$

Para ver φ es sobreyectiva, considere el elemento $(x+y)+J \in (J+I)/J$, donde $x \in J$, $y \in I$, luego

$$\varphi(y) = y + J = J + (y+J) = (x+J) + (y+J) = (x+y) + J.$$

Por otro lado,

$$Ker(\varphi) = \{y \in I : \varphi(y) = J\} = \{y \in I : y + J = J\} = \{y \in I : y \in J\} = I \cap J$$

Por item 1. se concluye que $(J+I)/J \cong I/(I \cap J)$.

3. Sean $x + I \in L/I$ y $y + I \in J/I$, entonces $[y+I, x+I] = [y,x] + I \in J/I$ porque J es ideal de L, por lo tanto, J/I es ideal de L/I. Considere la aplicación $\varphi : L/I \longrightarrow L/J$ definida por $\varphi(x+I) = x + J$. para probar que φ esta bien definida, sean $x_1 + I = x_2 + I$ en L/I, luego $x_1 = x_2 + k$ para algún $k \in I$, entonces

$$\varphi(x_1) = x_1 + J = (x_2 + k) + J = x_2 + J = \varphi(x_2).$$

Ahora se probará que φ es un homomorfismo de álgebras de Lie, para ello, sean $x_1 + I$ y $x_2 + I$ elementos de L/I, entonces

$$\varphi([x_1 + I, x_2 + I]) = \varphi([x_1, x_2] + I) = [x_1, x_2] + J = [x_1 + J, x_2 + J],$$

por lo tanto $\varphi([x_1 + I, x_2 + I]) = [\varphi(x_1 + I), \varphi(x_2 + I)]$. Además,

$$\begin{aligned} Ker(\varphi) &= \{x + I \in L/I : \varphi(x+I) = J\} \\ &= \{x + I \in L/I : x + J = J\} \\ &= \{x + I \in L/I : x \in J\} \subseteq J/I. \end{aligned}$$

Recíprocamente, sea $y + I \in J/I$ se tiene $\varphi(y+I) = y + J = J$, así, $J/I \subseteq Ker\varphi$, por lo tanto, $Ker\varphi = J/I$. Finalmente, φ es claramente sobreyectiva y por item 1. se concluye que

$$(L/I)/(J/I) \cong L/J.$$

$\square$

Ejemplo 2.39. $gl(n,\mathbb{F})/sl(n,\mathbb{F}) \cong span\{I_n\}$. En efecto, se sabe que $sl(n,\mathbb{F})$ es ideal de $gl(n,\mathbb{F})$. Considere la aplicación $\varphi : gl(n,\mathbb{F}) \longrightarrow span\{I_n\}$ definida por $\varphi(A) := Tr(A).I_n$. Por propiedades de la traza, φ es claramente lineal. Ahora se demostrará que φ es un homomorfismo de álgebras de Lie

$$\begin{aligned}
\varphi([A,B]) &= Tr([A,B]).I_n \\
&= (Tr(AB) - Tr(BA)).I_n \\
&= 0.I_n \\
&= [Tr(A).I_n, Tr(B).I_n] \\
&= [\varphi(A), \varphi(B)].
\end{aligned}$$

Por lo tanto φ es un homomorfismo de álgebras de Lie. Además,

$$Ker(\varphi) = \{A \in gl(n,\mathbb{F}) : \varphi(A) = 0\} = \{A \in gl(n,\mathbb{F}) : Tr(A) = 0\} = sl(n,\mathbb{F}).$$

Observe que si $\lambda I_n \in span\{I_n\}$, entonces $\dfrac{\lambda}{n} I_n \in gl(n,\mathbb{F})$, y se tiene

$$\varphi\left(\frac{\lambda}{n} I_n\right) = Tr\left(\frac{\lambda}{n} I_n\right).I_n = \frac{\lambda}{n} Tr(I_n) I_n = \left(\frac{\lambda}{n} n\right) I_n = \lambda I_n.$$

Por lo tanto $gl(n,\mathbb{F})/sl(n,\mathbb{F}) \cong \varphi(gl(n,\mathbb{F})) = span\{I_n\}$.

Definición 2.40 (Representación). Sea L una álgebra de Lie. Una representación de L es un par (V,ϕ), donde V es un espacio vectorial y $\phi : L \to gl(V)$ es un homomorfismo de álgebras de Lie. La dimensión de la representación (V,ϕ) es la dimensión del espacio V.

Ejemplo 2.41. Sea L una álgebra de Lie y defina la aplicación $ad : L \longrightarrow gl(L)$ de la siguiente manera: Para $x \in L$, sea $ad(x) := ad_x : L \longrightarrow L$ la aplicación definida por $ad_x(y) := [x,y]$, para toda $y \in L$. El par (L, ad) es una representación de L, en efecto, por la bilinealidad del corchete ad es una transformación lineal. Sean $x,y,z \in L$, por la propiedad de Jacobi se tiene

$$[[x,y],z] = [x,[y,z]] - [y,[x,z]],$$

luego

$$\begin{aligned}
ad_{[x,y]}(z) &= [x,[y,z]] - [y,[x,z]] \\
&= ad_x([y,z]) - ad_y([x,z]) \\
&= ad_x ad_y(z) - ad_y ad_x(z) \\
&= [ad_x, ad_y](z).
\end{aligned}$$

El par (L, ad) se denomina representación adjunta de L.

Observación 2.42. $Ker(ad) = \{x \in L : ad_x = 0\} = \{x \in L : ad_x(y) = 0, \text{ para toda } y \in L\}$ por lo tanto,

$$Ker(ad) = \{x \in L : [x,y] = 0, \text{ para toda } y \in L\} = Z(L).$$

Proposición 2.43. *Para toda álgebra de Lie L, $ad_L := \{ad_x : x \in L\}$ es una subálgebra de $gl(L)$.*

Demostración. Por la bilinealidad del corchete en L, se tiene que ad_L es un subespacio de L. Sean $a, b \in ad_L$, entonces existen $x, y \in L$ tales que $a = ad_x$ y $b = ad_y$. Dado que ad es una representación de L, se tiene $[a, b] = [ad_x, ad_y] = ad_{[x,y]} \in L$. □

Ejemplo 2.44 (Representación natural). Sea L una subálgebra de $M_n(\mathbb{F})$. Considere la función $\phi : L \longrightarrow gl(\mathbb{F}^n)$ definida por $\phi_A(v) := Av$ para toda $A \in L$ y todo $v \in \mathbb{F}^n$. El par $(\mathbb{F}^n, \phi)$ es una representación de L. En efecto, sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $v \in \mathbb{F}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ entonces

$$\phi_{\alpha A+\beta B}(v) = (\alpha A + \beta B)v = \alpha Av + \beta Bv = \alpha\phi_A(v) + \beta_B(v) = (\alpha\phi_A + \beta\phi_B)(v),$$

es decir, ϕ es transformación lineal. Además

$$\phi_{[A,B]}(v) = \phi_{AB-BA}(v) = (AB-BA)(v) = ABv-BAv = \phi_A\phi_B(v)-\phi_B\phi_A(v) = (\phi_A\phi_B-\phi_B\phi_A)(v)$$

por tanto, ϕ es un homomorfismo de álgebras de Lie.

Definición 2.45 (Módulo). Sea L una álgebra de Lie. Un módulo sobre L (o L-módulo) es un espacio vectorial V junto con una aplicación bilineal $\cdot : L \times V \longrightarrow V$ (ver definición (1.51)) que asigna a cada par ordenado $(x, v) \in L \times V$ el vector $x \cdot v \in V$ y que satisface la siguiente condición: para toda $x, y \in L$ y toda $v \in V$ se cumple

$$[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v)\,.$$

Si V es un L-módulo, entonces la aplicación $\cdot : L \times V \longrightarrow V$ se denomina acción de L en V.

Ejemplo 2.46. Sea V un espacio vectorial y sea L una subálgebra de $gl(V)$. V es un L-módulo con la aplicación $\cdot : L \times V \longrightarrow V$ definida por $x \cdot v = x(v)$. La bilinealidad es consecuencia de la estructura de espacio vectorial de L y V. Sean $x, y \in L$ y $v \in V$, entonces

$$[x, y] \cdot v = [x, y](v) = (xy - yx)(v) = xy(v) - yx(v) = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v).$$

Observación 2.47. Sea L una álgebra de Lie.

1. Todo espacio vectorial V tiene estructura de L-módulo definiendo la acción de L en V por

$$x \cdot v = 0, \text{ para toda } x \in L \text{ y toda } v \in V.$$

2. La álgebra de Lie L tiene estructura de L-módulo definiendo la acción de L en L por

$$x \cdot y = [x, y], \text{ para toda } x, y \in L.$$

Teorema 2.48. *Sean V un espacio vectorial y L una álgebra de Lie, el par (V, ϕ) es una representación de L si, y solo si, la aplicación $\cdot : L \times V \longrightarrow V$ dada por $x \cdot v := \phi(x)(v)$ define una estructura de L-módulo en V.*

Demostración. Suponga que el par (V, ϕ) es una representación, entonces $\phi : L \longrightarrow gl(V)$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, así se garantiza la bilinealidad de $\cdot : L \times V \longrightarrow V$. Sean $x, y \in L$ y $v \in V$, se tiene

$$\begin{aligned}
[x, y] \cdot v = \phi\left([x, y]\right)(v) &= \left([\phi(x), \phi(y)]\right)(v) \\
&= \left(\phi(x)\phi(y)\right)(v) - \left(\phi(y)\phi(x)\right)(v) \\
&= \phi(x)\left(\phi(y)(v)\right) - \phi(y)\left(\phi(x)(v)\right) \\
&= \phi(x)\left(y \cdot v\right) - \phi(y)\left(x \cdot v\right) \\
&= x \cdot \left(y \cdot v\right) - y \cdot \left(x \cdot v\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto V es un L-módulo. Ahora suponga que V tiene estructura de L-módulo con la aplicación $\cdot : L \times V \longrightarrow V$ y defina la transformación $\phi : L \longrightarrow gl(V)$ por $\phi(x)(v) := x \cdot v$, para $x \in L, v \in V$. Sean $x, y \in L$, $v \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, entonces

$$\phi(\alpha x + \beta y)(v) = (\alpha x + \beta y) \cdot v = \alpha x \cdot v + \beta y \cdot v = \alpha\phi(x)(v) + \beta\phi(y)(v).$$

De esta manera, ϕ es transformación lineal. Por otro lado, observar que

$$\phi\left([x, y]\right)(v) = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v) = \left(\phi(x)\phi(y)\right)(v) - \left(\phi(y)\phi(x)\right)(v) = [\phi(x), \phi(y)](v).$$

Así ϕ es un homomorfismo de álgebras de Lie y por lo tanto, (V, ϕ) es una representación de L. $\square$

Representaciones y módulos son dos formas equivalentes de nombrar a la misma estructura algebraica, pero en algunos contextos es más conveniente usar el lenguaje de representaciones y en otros es más conveniente usar el lenguaje de módulos.

2.3. Álgebras de Lie solubles y nilpotentes

Una manera de estudiar las álgebras de Lie es a través de sus ideales, en particular, el estudio de la álgebra derivada proporciona importantes conceptos como son las álgebras solubles y nilpotentes.

Definición 2.49 (Serie derivada). Sea L una álgebra de Lie. Se define en L la serie derivada, de la siguiente manera:

$$L^{(0)} = L, L^{(1)} = [L, L], L^{(2)} = \left[L^{(1)}, L^{(1)}\right], \ldots, L^{(i)} = \left[L^{(i-1)}, L^{(i-1)}\right], \forall i \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Ejemplo 2.50. La serie derivada de la álgebra de Lie $L = \tau(3, \mathbb{F}) = span\{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{23}, e_{33}\}$ es

$$L^{(0)} = \tau(3, \mathbb{F}), \quad L^{(1)} = \eta(3, \mathbb{F}), \quad L^{(2)} = span\{e_{13}\}, \quad L^{(3)} = \{0\}.$$

Definición 2.51 (**Álgebra de Lie soluble**)**.** Sea L una álgebra de Lie, se dice que L es soluble si para algún $m \geq 1$ se cumple que $L^{(m)} = \{0\}$

Ejemplo 2.52. Del ejemplo anterior, la álgebra $\tau(3, \mathbb{F})$ es una álgebra de Lie soluble, de hecho, la álgebra $L = \tau(n, \mathbb{F}) = span\{e_{ij} : i \leq j\}$ es soluble, para probar esto, se calculará explícitamente la serie derivada. Observe que $L^{(1)} = \eta(n, \mathbb{F})$. Ahora sea $A = \sum\limits_{i<j}^{n} \alpha_{ij} e_{ij} \in \eta(n, \mathbb{F})$, el nivel de A, denotado con $\mathcal{N}(A)$, se define por

$$\mathcal{N}(A) = \begin{cases} \text{mín}\{j - i : \alpha_{ij} \neq 0\} & \text{si } A \neq 0 \\ n & \text{si } A = 0 \end{cases}$$

Para $i < j$ y $k < l$ se tiene

$$\begin{aligned} [e_{i,j}, e_{k,l}] =& e_{i,j}e_{k,l} - e_{k,l}e_{i,j} \\ =& \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq l, \quad j \neq k \\ e_{i,l} & \text{si } i \neq l, \quad j = k \\ -e_{k,j} & \text{si } i = l, \quad j \neq k \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}([e_{i,j}, e_{k,l}]) &= \begin{cases} n & \text{si } i \neq l, \quad j \neq k \\ l - i & \text{si } i \neq l, \quad j = k \\ j - k & \text{si } i = l, \quad j \neq k \end{cases} \\ &= \begin{cases} n & \text{si } i \neq l, \quad j \neq k \\ (l - k) + (j - i) & \text{si } i \neq l, \quad j = k \\ (j - i) + (l - k) & \text{si } i = l, \quad j \neq k \end{cases} \end{aligned}$$

Luego $\mathcal{N}([e_{i,j}, e_{k,l}]) = \mathcal{N}(e_{ij}) + \mathcal{N}(e_{kl})$, siempre que $[e_{i,j}, e_{k,l}] \neq 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} L^{(2)} =& [L^{(1)}, L^{(1)}] \subseteq span\{e_{ij} \in \eta(n, \mathbb{F}) : \mathcal{N}(e_{ij}) \geq 2\}, \\ L^{(3)} =& [L^{(2)}, L^{(2)}] \subseteq span\{e_{ij} \in \eta(n, \mathbb{F}) : \mathcal{N}(e_{ij}) \geq 3\}, \\ &\vdots \\ L^{(n)} =& [L^{(n-1)}, L^{(n-1)}] \subseteq span\{e_{ij} \in \eta(n, \mathbb{F}) : \mathcal{N}(e_{ij}) \geq n\} = \{0\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\tau(n, \mathbb{C})$ es soluble.

Lema 2.53. *Sea L una álgebra de Lie*

1. *Si L es soluble, entonces toda subálgebra de L es soluble.*

2. *Si L es soluble, entonces toda imagen homomorfa de L es soluble.*

3. *Si L tiene un ideal I tal que I y L/I son solubles, entonces L es soluble.*

4. *Si I y J son ideales solubles de L, entonces $I+J$ es ideal soluble de L.*

Demostración.

1. Sea K una subálgebra de L, como L es soluble existe $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $L^{(n)} = \{0\}$. Así, $K^{(n)} \subseteq L^{(n)} = \{0\}$, por lo tanto K es soluble.

2. Sea K una imagen homomorfa de L, es decir, existe un epimorfismo $\varphi : L \to K$. Para comenzar, se probará por inducción que $\varphi\left(L^{(m)}\right) = K^{(m)}$, para todo $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Sea $[x,y] \in K^{(1)}$, por la sobreyectividad de φ existen $a, b \in L$ tales que $\varphi(a) = x; \varphi(b) = y$, entonces
$$[x,y] = [\varphi(a), \varphi(b)] = \varphi([a,b]) \in \varphi(L^{(1)}),$$
luego $K^{(1)} \subseteq \varphi(L^{(1)})$. Ahora, sea $x \in \varphi(L^{(1)})$, entonces existen $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, escalares $\alpha_i \in \mathbb{F}$ y vectores $b_i, c_i \in L$, con $i = 1, \cdots, n$, tales que
$$x = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i [b_i, c_i]\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [\varphi(b_i), \varphi(c_i)] \in [K,K] = K^{(1)},$$
entonces, $\varphi(L^{(1)}) \subseteq K^{(1)}$. Por lo tanto, $\varphi(L^{(1)}) = K^{(1)}$. Ahora, suponga que el enunciado se cumple para $m = r$, es decir, $\varphi\left(L^{(r)}\right) = K^{(r)}$, entonces $K^{(r)}$ es una imagen homomorfa de $L^{(r)}$ y por el primer paso de inducción se tiene $\varphi([L^{(r)}, L^{(r)}]) = [K^{(r)}, K^{(r)}]$, o equivalentemente,
$$\varphi\left(L^{(r+1)}\right) = K^{(r+1)}.$$
Finalmente, dado que L es soluble existe $t \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $L^{(t)} = \{0\}$, entonces
$$K^{(t)} = \varphi(L^{(t)}) = \varphi(\{0\}) = \{0\}.$$

3. Considere el epimorfismo canónico $\pi : L \to L/I$. Por un razonamiento similar al item anterior se tiene
$$\pi\left(L^{(n)}\right) = (L/I)^{(n)}, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}_{>0},$$
dado que L/I es soluble, existe $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $(L/I)^{(k)} = \{I\}$, luego $\pi\left(L^{(k)}\right) = \{I\}$, es decir,
$$L^{(k)} \subseteq Ker(\pi) = I,$$
pero I es soluble, entonces $I^{(r)} = \{0\}$, para algún $r \in \mathbb{Z}_{>0}$, luego
$$L^{(k+r)} = (L^{(k)})^{(r)} \subseteq I^{(r)} = \{0\}.$$
Así, L es soluble.

4. Sea $I \cap J = K$, por el epimorfismo canónico $\pi : J \longrightarrow J/K$, se tiene que J/K es una imagen homomorfa de J y dado que J es soluble, por item 2, se tiene J/K es soluble. Pero $(J+I)/I \cong J/K$, entonces $(J+I)/I$ es soluble, además I es soluble y por item 3, se tiene $J+I$ es soluble.

□

Proposición 2.54. *Si L es una álgebra de Lie de dimensión finita, entonces existe un único ideal soluble R de L que contiene a todos los ideales solubles de L.*

Demostración. Considere la colección $\mathcal{E} = \{I : I \text{ es ideal soluble de } L\}$. Claramente $\{0\} \in \mathcal{E}$. Sea $R \in \mathcal{E}$ tal que dím $R \geq$ dímI, para todo $I \in \mathcal{E}$, por lema anterior se tiene

$$I + R \in \mathcal{E}, \text{ para todo } I \in \mathcal{E},$$

luego dím $R \leq$ dím $(I+R) \leq$ dím R, es decir, dím $(I+R) =$ dím R así que $I + R = R$, por tanto, $I \subseteq R$. Por último, la unicidad de R es clara. □

Definición 2.55 (Radical). Sea L una álgebra de Lie de dimensión finita, el radical de L, denotado por $radL$, es el único ideal soluble R de L que contiene a todos los ideales solubles de L.

Definición 2.56 (Álgebra semisimple). Sea L una álgebra de Lie de dimensión finita, se dice que L es semisimple si $radL = \{0\}$.

Proposición 2.57. *Si L es una álgebra de Lie de dimensión finita, entonces $L/radL$ es una álgebra de Lie semisimple.*

Demostración. Sean $R = radL$, $\pi : L \longrightarrow L/R$ el epimorfismo canónico y $\overline{J}$ un ideal soluble de L/R, por teorema (2.36), $K = \pi^{-1}(\overline{J})$ es un ideal de L que contiene a R, además, tomando $[x, y] \in [K, K]$ se tiene

$$\pi([x, y]) = [\pi(x), \pi(y)] \in [\overline{J}, \overline{J}],$$

luego $[K, K] \subseteq \pi^{-1}([\overline{J}, \overline{J}])$. De forma similar se prueba que

$$K^{(t)} \subseteq \pi^{-1}(\overline{J}^{(t)}) \text{ para todo } t \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Dado que $\overline{J}$ es soluble, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $\overline{J}^{(n)} = \{R\}$, entonces $K^{(n)} \subseteq \pi^{-1}(\{R\}) = R$, pero R es soluble, luego $K^{(n)}$ es soluble y se tiene

$$K^{(n+s)} = (K^{(n)})^{(s)} = \{0\} \text{ para algún } s \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Así que K es un ideal soluble de L, entonces $K \subseteq R$, por lo tanto, $K = R$. De esta manera $\overline{J} = \{R\}$, luego $rad(L/R) = \{R\}$. □

Definición 2.58 (Serie central descendente). Sea L una álgebra de Lie. La serie central descendente de L es la cadena $L = L^0 \supseteq L^1 \supseteq \cdots \supseteq L^r \supseteq \cdots$, donde $L^0 = L$, y para cada $r \in \mathbb{Z}_{>0}$, se define $L^r = \left[L, L^{r-1}\right]$.

Definición 2.59 (Álgebra de Lie Nilpotente). Sea L una álgebra de Lie. Se dice que L es nilpotente si para algún $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ se cumple que $L^n = \{0\}$.

Observación 2.60. $L^{(i)} = [L^{i-1}, L^{i-1}] \subseteq [L, L^{i-1}] = L^i$ por lo tanto, toda álgebra de Lie nilpotente es soluble. Sin embargo, existen álgebras de Lie solubles no nilpotentes, por ejemplo, la álgebra de Lie $L = \tau(n, \mathbb{F})$ es soluble (ver ejemplo (2.52)), pero no es nilpotente porque $L^1 = [L, L] = \eta(n, \mathbb{F})$, entonces

$$e_{12} = [e_{11}, e_{12}] \in [L, L^1] = L^2$$

$$e_{12} = [e_{11}, e_{12}] = [e_{11}, [e_{11}, e_{12}]] = [L, [L, L^1]] = [L, L^2] = L^3 \in [L, L^1] = L^3$$

$$\vdots$$

es decir, $e_{12} \in L^k$, para todo $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, por lo tanto $L^k \neq \{0\}$ para todo k.

Ejemplo 2.61. Utilizando un procedimiento similar al del ejemplo (2.52) se muestra que la álgebra de Lie $\eta(n, \mathbb{F})$ es nilpotente.

Lema 2.62. *Sea L una álgebra de Lie*

1. *Si L es nilpotente, entonces toda subálgebra de L es nilpotente.*

2. *Si L es nilpotente, entonces toda imagen homomorfa de L es nilpotente.*

3. *Si $L/Z(L)$ es nilpotente, entonces L es nilpotente.*

Demostración. Los items 1. y 2. son similares a la demostración del lema (2.53). Para el item 3. sea $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $(L/Z(L))^k = \{0\}$. Por un razonamiento similar al del lema (2.53) se tiene $\pi(L^k) = \{Z(L)\}$, donde $\pi : L \longrightarrow L/Z(L)$ es la proyección canónica. Luego $L^k \subseteq Z(L)$, entonces

$$L^{k+1} = [L, L^k] \subseteq [L, Z(L)] = \{0\}$$

□

Definición 2.63 (ad-nilpotente). Se dice que un elemento $x \in L$ es ad-nilpotente si ad_x es un endomorfismo nilpotente, es decir, existe $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $(ad_x)^n = \underbrace{ad_x \circ \ldots \circ ad_x}_{n \text{ veces}} = 0$

Lema 2.64. *Sean V un espacio vectorial y L una subálgebra de $gl(V)$. Si $x, y \in L$, entonces para todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ se tiene $(ad_x)^n(y) \in span\{x^{n-i}yx^i : i = 0, 1, \cdots, n\}$*

Demostración. Por inducción sobre n, de la definición de ad_x se cumple que

$$ad_x(y) = [x, y] = xy - yx \in span\{x^{1-i}yx^i : i = 0, 1\}.$$

Suponga que el enunciado se cumple para algún entero positivo n, entonces

$$(ad_x)^n(y) = \sum_{i=1}^{r} a_i x^{n-i} y x^i, \text{ donde } a_i \in \mathbb{F} \text{ y } 0 \leq r \leq n$$

Luego

$$(ad_x)^{n+1}(y) = ad_x((ad_x)^n(y)) = ad_x \left(\sum_{i=1}^{r} a_i x^{n-i} y x^i \right) = \sum_{i=1}^{r} a_i[(x^{n-j+1}yx^i - x^{(n-i)}yx^{i+1})]$$

□

Teorema 2.65. *Sean V un espacio vectorial y L una subálgebra de $gl(V)$. Si $x \in L$ es nilpotente, entonces x es ad-nilpotente.*

Demostración. Por lema anterior,

$$(ad_x)^n(y) = \sum_{i=1}^{t} a_i x^{n-i} y x^i, \text{ donde } a_i \in \mathbb{F} \text{ y } 0 \leq t \leq n.$$

Dado que x es nilpotente, existe $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $x^r = 0$. Sea $n \geqslant 2r$, entonces para $i \in \{0, 1, ..., n\}$, se tiene $i \geq r$ o $n - i \geq r$, porque en caso contrario $n = i + n - i < 2r$, lo que contradice la escogencia de n. Luego $x^{n-i} = 0$ ó $x^i = 0$ para toda $i \in \{0, 1, ..., n\}$, por lo tanto,

$$(ad_x)^n(y) = \sum_{i=0}^{t} a_i x^{n-i} y x^i = 0.$$

□

Teorema 2.66. *Sea V un espacio vectorial no trivial de dimensión finita. Si L es una subálgebra de $gl(V)$ y todo endomorfismo de L es nilpotente, entonces existe un vector $v \in V$ no nulo, tal que $x(v) = 0$ para todo $x \in L$.*

Demostración. Por inducción sobre la dimensión de L. Si dím $L = 1$, entonces $L = span\{x\}$ para algún $x \neq 0$. Dado que x es nilpotente entonces existe $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ para el cual $x^n = 0$; Ahora, sea $r = \text{mín}\{n : x^n = 0\} > 1$, luego $x^{r-1} \neq 0$, entonces existe un vector no nulo $v \in V$, tal que $x^{r-1}(v) \neq 0$ y $x^r(v) = 0$. Sea $w = x^{r-1}(v) \in V$ y sea $\alpha x \in L$, con $\alpha \in \mathbb{F}$, entonces

$$\alpha x(w) = \alpha x(x^{r-1}(v)) = \alpha x^r(v) = 0.$$

Suponga que el enunciado se satisface para toda subálgebra H de $gl(V)$ con dím $H \leqslant t$ para algún $t \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. Sea L una subálgebra de elementos nilpotentes en $gl(V)$, con dím $L = t + 1$. La colección

$\mathcal{M}$ de subálgebras propias no triviales de L es no vacía porque todo subespacio de dimensión uno es una subálgebra abeliana de L. Sea $K \in \mathcal{M}$ una subálgebra de dimensión maximal, dado que K es una subálgebra propia, dím $K <$ dím L, entonces existe $x \in L$ tal que $x + K \neq K$ en el espacio vectorial L/K. Por la bilinealidad del corchete en L, la función $\overline{f}_x : L/K \longrightarrow L/K$, definida por $\overline{f}_x(a + K) := [x, a] + K$, es una transformación lineal en $gl(L/K)$. Si $\overline{f}_x = 0$ entonces para todo $a + K \in L/K$ se tiene $\overline{f}_x(a + K) = [x, a] + K = K$, luego $[x, a] \in K$, así K es un ideal de L. En caso contrario $span\{\overline{f}_x\}$ es una subálgebra abeliana (y por lo tanto nilpotente), de dimensión 1, de $gl(L/K)$, y por el primer paso de inducción, existe un vector no nulo $a + K \in L/K$ tal que $\overline{f}_x(a+K) = K$, entonces $[x, a] \in K$, por lo tanto $K \subsetneq N_L(K)$, esto es, dím $K <$ dím $N_L(K)$ y dado que K es de dimensión maximal en $\mathcal{M}$ se debe tener $N_L(K) = L$ y por tanto K es ideal de L. Por lo anterior, la transformación lineal canónica $\pi : L \longrightarrow L/K$ es un homomorfismo de álgebras de Lie. Sea $y + K$ un vector no nulo en L/K, luego $H = span\,\{y + K\}$ es una subálgebra no trivial de L/K, entonces $\pi^{-1}(H)$ es una subálgebra de L que contiene propiamente a K. Por la maximalidad de la dimensión de K en $\mathcal{M}$ se tiene que $\pi^{-1}(H) = L$. Luego,

$$H = \pi\left(\pi^{-1}(H)\right) = \pi(L) = L/K$$

Entonces, dím $L =$ dím $K + 1$. Así que, $L = K \oplus span\,\{z\}$ para algún $z \in L \setminus K$. Por hipótesis inductiva existe un vector no nulo $v \in V$ tal que $x(v) = 0$ para todo $x \in K$. Sea

$$W = \{v \in V : x(v) = 0 \ \ \forall x \in K\} \neq \{0\}$$

Para $v, w \in W$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, se tiene

$$x(\alpha v + \beta w) = \alpha x(v) + \beta x(w) = 0, \text{ para toda } x \in K.$$

Así, W es subespacio de V. A continuación se probará que W es L-invariante, en efecto, sea $x = k + \alpha z \in L$, donde $k \in K$ y $\alpha z \in span\{z\}$ y sea $w \in W$ se tiene

$$x(w) = (k + \alpha z)(w) = \cancelto{0}{k(w)} + \alpha z(w) = \alpha z(w),$$

resta probar que para todo $y \in K$ se cumple que $yz(w) = 0$. Dado que $[y, z] = yz - zy$, se tiene $yz(w) = [y, z](w) + zy(w)$, pero $[y, z] \in K$, en consecuencia, $yz(w) = zy(w) = z(0) = 0$. Esto prueba que W es x-invariante. Luego $z\,|_W : W \longrightarrow W$ es una transformación nilpotente en $gl(W)$, entonces existe un vector no nulo $w \in W$ tal que $z(w) = z\,|_W\,(w) = 0$. Luego, para toda $k \in K$ y toda $\alpha \in \mathbb{F}$ se tiene

$$(k + \alpha z)(w) = \cancelto{0}{k(w)} + \alpha\cancelto{0}{z(w)} = 0.$$

Por lo tanto, toda transformación de L se anula en el vector no nulo w. □

Teorema 2.67 (**Teorema de Engel**). *Sea L una álgebra de Lie. Si todo elemento de L es ad-nilpotente, entonces L es nilpotente.*

Demostración. Se va a realizar la prueba por inducción sobre dím L. Si dím $L = 1$, el resultado es inmediato porque L es abeliana. Suponga que el enunciado se satisface para toda álgebra de Lie A de elementos ad-nilpotentes con dím $A < n$, para algún $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, y sea L una álgebra de Lie de elementos ad-nilpotentes de dimensión n. Luego ad_L es una subálgebra de $gl(L)$ de elementos nilpotentes. Por teorema (2.66), existe un vector no nulo $x \in L$ tal que $[y, x] = 0$, para toda $y \in L$, así $Z(L) \neq \{0\}$, entonces la álgebra cociente $L/Z(L)$ satisface dím $L/Z(L) < n$. Sean $\overline{x} = x + Z(L)$ y $\overline{y} = y + Z(L)$ dos vectores en $L/Z(L)$, por la definición del corchete en $L/Z(L)$, se tiene

$$(ad_{\overline{x}})^n(\overline{y}) = (ad_x)^n(y) + Z(L) \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Dado que x es una transformación ad-nilpotente se tiene que $\overline{x}$ es una transformación ad-nilpotente, luego $L/Z(L)$ es una álgebra de Lie que consta de elementos ad-nilpotentes y de dimensión menor que n, por hipótesis de inducción $L/Z(L)$ es nilpotente, además $Z(L)$ es un ideal nilpotente de L, entonces, por el lema (2.62) se sigue que L es nilpotente.

□

Teorema 2.68 (**Teorema de Lie**). *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero y sea V un espacio vectorial no trivial de dimensión finita sobre $\mathbb{F}$. Si L es una subálgebra soluble de $gl(V)$, entonces V contiene un vector propio común para todos los elementos de L.*

Demostración. La demostración se hará por inducción sobre la dimensión de L. Si dím $L = 0$, entonces el único elemento de L es la transformación nula y en este caso el enunciado se satisface trivialmente. Sea L una subálgebra soluble de $gl(V)$ con dím $L = 1$, entonces $L = span\{x\}$, para alguna transformación no cero $x \in gl(V)$. Dado que $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado, la transformación x tiene algún valor propio $\lambda \in \mathbb{F}$, luego $x(v) = \lambda v$, para algún vector no nulo $v \in V$. Sea $\alpha x \in L$, con $\alpha \in \mathbb{F}$, se tiene $\alpha x(v) = \alpha(\lambda v) = (\alpha\lambda)v$, es decir, v es un vector propio de αx, luego v es un vector propio común para toda transformación de L. Ahora, suponga que el enunciado se satisface para toda subálgebra soluble A de $gl(V)$ con dím $A \leq r$, para algún $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Sea L una subálgebra soluble de $gl(V)$ con dím $L = r + 1$, entonces $[L, L]$ es un ideal propio de L. Considere la álgebra cociente $\overline{L} = L/[L, L]$, esta álgebra es abeliana, ya que para todo $x, y \in L$ se tiene que

$$[x + [L, L], y + [L, L]] = [x, y] + [L, L] = [L, L]$$

Sea $\overline{K}$ un subespacio de $\overline{L}$ tal que dím $\overline{K} =$ dím $\overline{L} - 1 \geq 0$, dado que $\overline{L}$ es abeliana, $\overline{K}$ es un ideal de $\overline{L}$. Sea $\pi : L \longrightarrow \overline{L}$ el homomorfismo canónico de álgebras de Lie, entonces $\pi^{-1}(\overline{K})$ es un ideal propio K de L, luego dím $K \leq$ dím $L - 1$, si dím $K <$ dím $L - 1$, existe un subespacio J de L tal que $K \subsetneq J \subsetneq L$ y se tiene $\pi(K) = \pi(\pi^{-1}(\overline{K})) = \overline{K} \subsetneq \pi(J)$, entonces $\pi(J) = \pi(L) = \overline{L}$, así, para toda $x \in L$ existe $j \in J$ tal que $\pi(x) = \pi(j)$, es decir, $x - j \in Ker(\pi) \subseteq K \subseteq J$ luego $x \in J$, por tanto $J = L$ que contradice que J es un subespacio propio de L, de esta manera, dím $K =$ dím $L - 1$. Aplicando la hipótesis inductiva a K, existe un vector propio común $v \in V$, es decir, para cada

$x \in K$ existe $\lambda_x \in \mathbb{F}$ tal que $x(v) = \lambda_x v$. Así, se tiene la función $\lambda : K \longrightarrow \mathbb{F}$ definida por $\lambda(x) = \lambda_x$. Observe que λ es transformación lineal, en efecto, para $x, y \in K$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, se tiene

$$(\alpha x + \beta y)(v) = \alpha x(v) + \beta y(v) = \alpha\lambda_x v + \beta\lambda_y v = (\alpha\lambda(x) + \beta\lambda(y))v,$$

pero $x + y \in K$ y v es vector propio común para todo elemento de K, luego

$$(\alpha\lambda(x) + \beta\lambda(y))v = (\alpha x + \beta y)(v) = \lambda_{\alpha x+\beta y} v = \lambda(\alpha x + \beta y)v$$

y dado que v es un vector no nulo, se tiene $\lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha\lambda(x) + \beta\lambda(y)$ de lo cual se concluye que λ es transformación lineal. Ahora, considere el subespacio $W \subseteq V$ definido por

$$W = \{w \in V : x(w) = \lambda_x w, \forall x \in K\}$$

Observe que $W \neq \{0\}$ ya que $v \in W$. A continuación se probará que W es L-invariante (ver definición (1.34)), para esto, sean $w \in W$ y $x \in L$, se debe probar que para todo $y \in K$ se cumple $y(x(w)) = \lambda_y x(w)$. Se sabe que $yx(w) = xy(w) - [x, y](w)$ y como K es un ideal de L se tiene

$$yx(w) = x(\lambda_y w) - \lambda_{[x,y]} w = \lambda_y x(w) - \lambda_{[x,y]} w$$

Resta probar que $\lambda_{[x,y]} = 0$. Sea n el menor entero positivo tal que $w, x(w), \ldots, x^n(w)$ son linealmente dependientes, entonces $\{w, x(w), \ldots, x^{n-1}(w)\}$ es L.I. Para $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ considere el siguiente subespacio $W_i = span\{w, x(w), \ldots, x^{i-1}(w)\}$ y sea $W_0 = \{0\}$, entonces

$$W_0 \subseteq W_1 \subseteq \ldots \subseteq W_n = W_{n+1} = \ldots = W_{n+j} \text{ para todo } j \geq 0.$$

Además, dím $W_i = i$ para todo $0 \leq i \leq n$. Si $u \in W_j$ entonces existen escalares $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1} \in \mathbb{F}$ tales que $u = \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_i x^i(w)$, luego

$$x(u) = \sum_{i=0}^{j-1} x(\alpha_i x^i(w)) = \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_i x(x^i(w)) = \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_i x^{i+1}(w)$$

es decir $x(w) \in W_{j+1}$ y dado que $W_{n+1} = W_n$ se concluye que W_n es x-invariante. Además

$$y(u) = \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_i yx^i(w) = \alpha_0 y(w) + \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i yx^i(w) = \alpha_0\lambda_y w + \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i yx^i(w)$$

para $0 \leq i \leq j - 1$ se tiene

$$yx^i(w) = yx(x^{i-1}(w)) = \lambda_y x(x^{i-1}(w)) - \lambda_{[x,y]} x^{i-1}(w) = \lambda_y x^i(w) - \lambda_{[x,y]} x^{i-1}(w),$$

luego $y(u) \in W_j$, equivalentemente, W_j es y-invariante. Luego, se puede considerar $y \in gl(W_j)$ y para la base $B = \{w, x(w), \ldots, x^{j-1}(w)\}$ de W_j se tiene

$$\begin{aligned}
y(w) &= \lambda_y w \\
yx(w) &= \lambda_y x(w) - \lambda_{[x,y]} w \\
yx^2(w) &= \lambda_y x^2(w) - \lambda_{[x,y]} w \\
&\vdots \\
yx^{j-1}(w) &= \lambda_y x^{j-1}(w) - \lambda_{[x,y]} w
\end{aligned}$$

Así que, la matriz $[y]_B$ de la transformación y en la base B es

$$[y]_B = \begin{pmatrix} \lambda_y & -\lambda_{[x,y]} & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_y & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -\lambda_{[x,y]} \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_y \end{pmatrix}$$

Entonces, $Tr([y]_B) = n\lambda_y$ y dado que $[x, y] \in K$, se sigue $Tr([[x, y]]_B) = n\lambda_{[x,y]}$, pero de las propiedades de la traza se sabe que

$$Tr([[x, y]]_B) = Tr([xy - yx]_B) = Tr([xy]_B) - Tr([yx]_B) = 0.$$

Es decir, $n\lambda_{[x,y]} = 0$ y dado que la característica de $\mathbb{F}$ es cero, se sigue $\lambda_{[x,y]} = 0$. Por tanto, W es L-invariante. Para finalizar, dado que dím $K =$ dím $L-1$, existe $z \in L \backslash K$ tal que $L = K \oplus span\{z\}$. Se puede ver $z \in gl(W)$ y como $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado, la transformación z tiene un vector propio $w_0 \in W$. Para cada $x \in L$ existen $y \in K$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ tales que $x = y + \alpha z$, luego $x(w_0) = y(w_0) + \alpha z(w_0)$, además $z(w_0) = \beta w_0$ para algún $\beta \in \mathbb{F}$, entonces $x(w_0) = (\lambda_y \alpha \beta) w_0$. Por lo tanto w_0 es un vector propio común para todo $y \in L$.

□

Corolario 2.69. *Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial no trivial de dimensión finita y L una subálgebra soluble de $gl(V)$, entonces existe una base de V en la cual cada elemento de L es representado por una matriz triangular superior.*

Demostración. Se probará por inducción sobre la dimensión de V. Si dím $V = 1$, entonces por el teorema de Lie existe un vector propio común $v_1 \in V$ para toda transformación de L, luego, $B_1 = \{v_1\}$ es una base de V para la cual cada elemento de L es representado por una matriz triangular superior. Suponga que el enunciado se cumple para todo espacio de dimensión n y sea V un espacio vectorial de dimensión $n + 1$, por el teorema de Lie, existe $v_1 \in V$ que es vector propio común para toda transformación $x \in L$. Para $U = span\{v_1\}$ se tiene dím $(V/U) = n$. Sea, $\overline{L} = \{\overline{x} \in gl(V/U) : x \in L\}$, donde $\overline{x}$ fue definida en la proposición (1.31). Observe que $[\overline{x}, \overline{y}] = \overline{[x, y]}$

y dado que L es una subálgebra de $gl(V)$ se tiene que $\overline{L}$ es una subálgebra de $gl(V/U)$. Por otro lado,

$$\begin{array}{llll} \overline{L}^{(1)} & = [\overline{L}, \overline{L}] & = span\{[\overline{x}, \overline{y}] : \overline{x}, \overline{y} \in \overline{L}\} & = span\{\overline{[x, y]} : x, y \in L\} \\ \overline{L}^{(2)} & = [\overline{L}^{(1)}, \overline{L}^{(1)}] & = span\{[\overline{x}, \overline{y}] : \overline{x}, \overline{y} \in \overline{L}^{(1)}\} & = span\{\overline{[x, y]} : x, y \in L^{(1)}\} \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{L}^{(r)} & = [\overline{L}^{(r-1)}, \overline{L}^{(r-1)}] & = span\{[\overline{x}, \overline{y}] : \overline{x}, \overline{y} \in \overline{L}^{(r-1)}\} & = span\{\overline{[x, y]} : x, y \in L^{(r-1)}\} \end{array}$$

y como L es soluble, $L^{(k)} = \{0\}$ para algún $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, de ahí se sigue que $\overline{L}^{(k+1)} = \{0\}$, luego, $\overline{L}$ es una subálgebra soluble de $gl(V/U)$. Por hipótesis inductiva, existe una base $\overline{B} = \{\overline{v}_2, \cdots, \overline{v}_{n+1}\}$ de V/U donde cada transformación de $\overline{L}$ es representada por una matriz triangular superior. Por proposición (1.14), $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_{n+1}\}$ es una base de V y para cada $x \in L$ se tiene $\overline{x} \in \overline{L}$, luego, para cada $j = 2, 3, \cdots, n+1$ existen escalares $\alpha_{ij}, \alpha_{2j}, \cdots, \alpha_{n+1j}$ tales que

$$\begin{array}{rl} \overline{x}(\overline{v}_j) & = \alpha_{2j}\overline{v}_2 + \cdots + \alpha_{jj}\overline{v}_j \\ x(v_j) + U & = (\alpha_{2j}v_2 + \cdots + \alpha_{jj}v_j) + U \end{array},$$

así que , $x(v_j) - (\alpha_{2j}v_2 + \cdots + \alpha_{jj}v_j) \in U = span\{v_1\}$, entonces, existe un escalar $\alpha_{1j} \in \mathbb{F}$ tal que $x(v_j) = \alpha_{1j}v_1 + \alpha_{2j}v_2 + \cdots + \alpha_{jj}v_j$. Además $x(v_1) = \alpha_{11}v_1$, para algún $\alpha_{11} \in \mathbb{F}$. Por lo tanto, la matriz de la transformación x en la base B es triangular superior. $\square$

Lema 2.70. *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y $x \in End(V)$. Si $x = x_s + x_n$ es la descomposición de Jordan de la transformación x, entonces $ad_x = ad_{x_s} + ad_{x_n}$ es la descomposición de Jordan de ad_x en el espacio vectorial $End(End(V))$.*

Demostración. Dado que x_n es nilpotente, por teorema (2.65) ad_{x_n} es nilpotente. Resta probar que ad_{x_s} es semisimple. Sea $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ una base para V en la cual la matriz T asociada a x_s es diagonal, luego, $T = diag(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ para algunos escales $a_1, a_2, \cdots, a_m \in \mathbb{F}$. Ahora, sea $\mathcal{B} = \{e_{ij} : i, j \in \{1, \ldots, m\}\}$, la base de $End(V)$ asociada a la base B, es decir $e_{ij}(v_k) = \delta_{j,k}v_i$, donde $1 \leq k \leq m$ y δ es la función delta de Kronecker. Dado que, $ad_{x_s}(e_{ij}) = [x_s, e_{ij}] = x_s e_{ij} - e_{ij}x_s$ y $x_s = \sum_{l=1}^{m} a_l e_{ll}$, se tiene $ad_{x_s}(e_{ij}) = \left(\sum_{l=1}^{m} a_l e_{ll}\right) e_{ij} - e_{ij}\left(\sum_{l=1}^{m} a_l e_{ll}\right)$. Además

$$e_{ll}e_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq i \\ e_{ij} & \text{si } l = i \end{cases} \quad \text{y} \quad e_{ij}e_{ll} = \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq j \\ e_{ij} & \text{si } l = j \end{cases}$$

Por tanto, $ad_{x_s}(e_{ij}) = (a_i - a_j)e_{ij}$. Así, la matriz asociada a ad_{x_s} respecto a la base $\mathcal{B}$ es diagonal, por tanto, ad_{x_s} es semisimple. Por otro lado, se sabe que $[ad_{x_s}, ad_{x_n}] = ad_{[x_s, x_n]}$ y como x_s, x_n conmutan entonces $[x_s, x_n] = 0$ y así, $[ad_{x_s}, ad_{x_n}] = 0$, es decir ad_{x_s}, ad_{x_n} conmutan. Además $ad_x = ad_{x_s + x_n} = ad_{x_s} + ad_{x_n}$ por tanto la descomposición de Jordan para ad_x es $ad_s = ad_{x_s} + ad_{x_n}$ $\square$

Teorema 2.71 (Criterio de Cartan). *Sea V un $\mathbb{C}$- espacio vectorial de dimensión finita y sea L una subálgebra de $gl(V)$. Si $Tr(xy) = 0$ para todo $x, y \in L$, entonces L es soluble.*

Demostración. Para probar que L es soluble, se mostrará que L^1 es nilpotente. Sea $x \in L^1$ y suponga que la descomposición de Jordan para x es $x = x_s + x_n$. Se sabe que existe una base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ de V tal que la matriz T asociada a x_s es diagonal y la matriz M asociada a x_n es triangular estrictamente superior. Luego, existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ tales que $x_s(v_j) = \lambda_j v_j$, para $j = 1, \cdots, m$, de esta manera, $T = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$. Sea $\overline{T}$ la matriz conjugada de la matriz T y sea $\overline{x_s} \in End(V)$ el endomorfismo tal que su matriz en la base B es $\overline{T}$. Entonces

$$Tr(\overline{x_s}x) = Tr(\overline{T}(T + M)) = Tr(\overline{T}T + \overline{T}M) = Tr(\overline{T}T) + Tr(\overline{T}M),$$

así que,

$$Tr(\overline{x_s}x) = Tr(diag(\lambda_1\overline{\lambda_1}, \cdots, \lambda_m\overline{\lambda_m})) + Tr(0) = |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 + ... + |\lambda_m|^2$$

Como $x \in L^1$ entonces existen $y, z \in L$ tales que $x = [y, z]$ por tanto $Tr(\overline{x_s}x) = Tr(\overline{x_s}[y, z])$. Por la proposición (2.15) se sabe que $Tr(\overline{x_s}[y, z]) = Tr([\overline{x_s}, y]z)$. Además, por el lema (2.70), la descomposición de Jordan para ad_x es $ad_x = ad_{x_s} + ad_{x_n}$. Por teorema (1.85), existe $q(X) \in \mathbb{C}[X]$ tal que $q(ad_x) = \overline{ad_{x_s}} = ad_{\overline{x_s}}$. Como L es ad_x-invariante, entonces L es $q(ad_{x_s})$-invariante, por tanto L es $ad_{\overline{x_s}}$-invariante y de esta forma $[\overline{x_s}, y] \in L$. Aplicando la hipótesis se concluye que

$$0 = Tr([\overline{x_s}, y]z) = Tr(\overline{x_s}[y, z]) = Tr(\overline{x_s}x)$$

Luego, $|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 + ... + |\lambda_m|^2 = 0$, así que, $\lambda_j = 0$ para todo $j = 1, \cdots, m$. Por tanto $x_s = 0$ y se tiene $x = x_n$, esto es, x es nilpotente para toda $x \in L^1$, y por le teorema de Engel (2.67), L^1 es nilpotente. □

2.3.1. Caracterización de las álgebras de Lie semisimples

Definición 2.72 (Forma de Killing). Sea L una $\mathbb{C}$-álgebra de Lie. La forma de Killing en L es la aplicación $\kappa : L \times L \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $\kappa(x, y) = Tr(ad_x\ ad_y)$.

Dado que ad es una transformación lineal y que $Tr(xy) = Tr(yx)$ se sigue que la forma de Killing es bilineal y simétrica. Observe que para todo $x, y, z \in L$ se tiene que

$$\kappa([x, y], z) = Tr\left(ad_{[x,y]}\ ad_z\right) = Tr\left([ad_x, ad_y]\ ad_z\right) = Tr\left(ad_x\ [ad_y, ad_z]\right) = Tr\left(ad_x\ ad_{[y,z]}\right).$$

Por lo tanto, $\kappa([x, y], z) = \kappa(x[y, z])$, es decir, la forma de Killing es asociativa. Por otro lado, $Ker(\kappa)$ es un ideal de L, en efecto, por la observación (1.53) $Ker(\kappa)$ es un subespacio de L. Sean $y, z \in L$ y $x \in Ker(\kappa)$, se tiene $\kappa([x, z], y) = \kappa(x, [z, y]) = 0$. por lo tanto $[x, z] \in Ker(\kappa)$.

Ejemplo 2.73. Utilizando la base canónica $B = \{x_1 = e, x_2 = f, x_3 = h\}$ de $sl\,(2, \mathbb{C})$, se tiene

$$\kappa(e, f) = 4,\ \kappa(e, h) = 0,\ \kappa(f, h) = 0,$$

entonces la matriz asociada a la forma de Killing en esta base es $[\kappa]_B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposición 2.74. *Sea L una $\mathbb{C}$-álgebra de Lie de dimensión finita. Si κ es la forma de Killing de L entonces $Ker(\kappa)$ es un ideal soluble de L.*

Demostración. Sea $K = Ker(\kappa)$, claramente K es un ideal de L, además, se sabe que

$$Tr(ad_x ad_y) = \kappa(x, y) = 0, \text{ para toda } x, y \in K,$$

entonces en la subálgebra $ad_K \subseteq gl(K)$ se satisfacen las hipótesis del criterio de Cartan (2.71), luego $[ad_K, ad_K] = ad_{[K,K]}$ es nilpotente, es decir, todo vector de la álgebra $[K, K]$ es ad-nilpotente, por el teorema de Engel (2.67) se tiene que $[K, K]$ es nilpotente y por lo tanto K es soluble. □

Proposición 2.75. *Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita. Si L es una subálgebra soluble de $gl(V)$, entonces $Tr(xz) = 0$ para todo $x \in L$ y toda $z \in L^1$.*

Demostración. Por corolario (2.69), existe una base $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ de V tal que todo $x \in L$ es representado por una matriz triangular superior, luego $L \cong \tau(n, \mathbb{C})$ y por lo mostrado en el ejemplo (2.52), se tiene, $L^1 \cong \eta(n, \mathbb{C})$, por tanto, para toda transformación en L^1, su matriz asociada en la base B esta en $\eta(n, \mathbb{C})$. Así, $Tr\,(xz) = 0$ para todo $x \in L$ y todo $z \in L^1$ □

Teorema 2.76. *Sea L una $\mathbb{C}$-álgebra de Lie de dimensión finita. L es soluble si, y sólo si, $\kappa(x, y) = 0$ para todo $x \in L$ y todo $y \in L^1$.*

Demostración. Dado que L es soluble, existe $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $L^{(n)} = \{0\}$. Sea $H = ad_L \subseteq gl(L)$, y como (L, ad) es una representación de L, se tiene $H^1 = [H, H] = ad_{[L,L]} = ad_{L^1}$. Luego, $H^{(n)} = ad_{L^{(n)}} = ad_{\{0\}} = \{0\}$. Por tanto ad_L es soluble. Aplicando la proposición (2.75) se tiene que $Tr(ad_x\ ad_y) = 0$ para todo $ad_x \in ad_L$ y todo $y \in ad_{L^1}$, por tanto $\kappa(x, y) = 0$ para todo $x \in L$ y todo $y \in L^1$. Ahora suponga que $Tr(ad_x\ ad_y) = 0$ para todo $x \in L$ y todo $y \in L^1$ y considere a la subálgebra $ad_{L^1} = \{ad_y : y \in L^1\} \subseteq gl(L)$. Claramente $ad_{L^1} \subseteq ad_L$, por tanto

$$Tr(ad_x\ ad_y) = 0 \text{ para todo } ad_x, ad_y \in ad_{L^1}$$

Por el criterio de Cartan (2.71), ad_{L^1} es una subálgebra soluble y así L^1 es soluble, entonces L es soluble. □

Teorema 2.77. *Sea L una $\mathbb{C}$-álgebra de Lie de dimensión finita. L es semisiple si, y solo si, la forma de Killing κ de L es no degenerada.*

Demostración. Suponga que L es semisimple, esto es, rad $L = \{0\}$. Por la proposición (2.74) $Ker(\kappa)$ es un ideal soluble de L, luego $Ker(\kappa) \subseteq$ rad L, por tanto, $Ker(\kappa) = \{0\}$, o equivalentemente, κ es no degenerada. Ahora, suponga que L no es semisimple, entonces $R =$ rad $L \neq \{0\}$, luego existe un entero positivo n tal que $R^{(n)} \neq \{0\}$ y $R^{(n+1)} = \{0\}$, es decir, $R^{(n)}$ es un ideal abeliano no trivial de L. Sea x un vector no nulo de $R^{(n)}$ y sea $z \in L$, se tiene

$$(ad_z ad_x)^2 (L) = ad_z ad_x ad_z (ad_x(L)) \subseteq ad_z ad_x \left(ad_z \left(R^{(n)}\right)\right) \subseteq ad_z \left(ad_x \left(R^{(n)}\right)\right) = ad_z (\{0\}) = \{0\}$$

Así, $(ad_z ad_x)^2 = 0$, es decir, $ad_z ad_x$ es un endomorfismo nilpotente de $gl(L)$, entonces existe una base B de L para la cual $[ad_z ad_x]_B$ es una matriz estrictamente triangular superior, luego

$$\kappa(z, x) = Tr(ad_z ad_x) = Tr\, [ad_z ad_x]_B = 0,$$

esto es, $x \in Ker(\kappa)$, por tanto, $Ker(\kappa) \neq \{0\}$. □

Proposición 2.78. *Sean L una $\mathbb{C}$-álgebra de Lie semisimple de dimensión finita y κ la forma de Killing en L. Si J es un ideal de L, entonces $J^\perp$ es un ideal de L y $L = J \oplus J^\perp$, como álgebra de Lie.*

Demostración. Por la observación (1.55) $J^\perp$ es un subespacio de L, sean $x \in L$, $z \in J^\perp$ y $y \in J$, se tiene $\kappa(y, [x, z]) = \kappa(\overbrace{[x, y]}^{\in J}, z) = 0$, por lo tanto $J^\perp$ es un ideal de L. Por otro lado, $K = J \cap J^\perp$ es un ideal de L y para $x, y \in K$ se tiene $Tr(ad_x\; ad_y) = \kappa(x, y) = 0$, por el criterio de Cartan (2.71), $[ad_K\; ad_K] = ad_{[K,K]}$ es un subálgebra nilpotente de $gl(K)$ y por teorema de Engel (2.67) K^1 es nilpotente, por lo tanto K es un ideal soluble de L, luego $K = \{0\}$. Además κ es no degenerada, entonces por la observación (1.57), se tiene dím $L =$ dím $J +$ dím $J^\perp$, por tanto $L = J \oplus J^\perp$. □

Lema 2.79. *Si L es una $\mathbb{C}$-álgebra de Lie semisimple no trivial de dimensión finita, entonces existen ideales I y J de L tales que I es simple y $L = I \oplus J$ como álgebra de Lie.*

Demostración. Si L es una álgebra de Lie simple, el enunciado se cumple tomando $I = L$ y $J = \{0\}$. Suponga que L no es simple, dado que L es no trivial, entonces L contiene por lo menos un ideal propio no trivial, sea I uno de éstos ideales con dimensión minimal y $J = I^\perp$, por la proposición anterior, $L = I \oplus J$. Resta probar que I es simple, sean M un ideal propio de I y $x \in L$, entonces existen $x_1 \in I$ y $x_2 \in J$ tales que $x = x_1 + x_2$, luego, $[x, M] = [x_1 + x_2, M] = [x_1.M] + [x_2, M]$, pero $[x_1, M] \subseteq M$ y $[x_2, M] \subseteq I \cap J = \{0\}$. Así que, $[x, M] \subseteq M$, es decir, M es un ideal de L y por la minimalidad de la dimensión de I, se tiene $M = \{0\}$, por lo tanto I es simple. □

Teorema 2.80. *Si L es una $\mathbb{C}$-álgebra de Lie semisimple no trivial de dimensión finita, entonces existen ideales simples $I_1, \cdots I_r \subseteq L$ tales que $L = I_1 \oplus \cdots \oplus I_r$, como álgebras de Lie. Además, si J es un ideal simple de L, entonces $J = I_i$ para algún $0 \leq i \leq r$.*

Demostración. La prueba se hará por inducción sobre la dimensión de L. Dado que $L \neq \{0\}$, se debe tener dím $L \geq 2$. Si dím $L = 2$ y L es no abeliana, por proposición (2.10) L tiene una base $\{x, y\}$ tal que $[x, y] = y$ y en este caso $I = span\{y\}$ es un ideal abeliano de L, luego rad $L \neq \{0\}$, por lo tanto L no es semisimple. Se comienza la prueba de inducción suponiendo dím $L \geq 3$. Por lema (2.79) existe un ideal simple I de L tal que $L = I \oplus I^{\perp}$, pero dím $I \geq 3$, entonces $L = I$ e $I^{\perp} = \{0\}$, es decir, L es simple y se satisface el enunciado. Suponga que el enunciado se satisface para álgebras de Lie de dimensión menor que r, para algún $r \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ y sea L una álgebra de Lie con dím $L \geq r$. Por lema (2.79) existe un ideal simple I_1 de L tal que $L = I_1 \oplus I_1^{\perp}$, luego dím $I_1^{\perp} =$ dím $L -$ dím $I_1 \leq r - 3 < r$, además $I_1^{\perp}$ es una álgebra de Lie semisimple porque todo ideal de $I_1^{\perp}$ es un ideal de L, entonces, por hipótesis inductiva, existen ideales $I_2, \cdots, I_r$ de I, y por lo tanto de L, tales que $I_1^{\perp} = I_2 \oplus \cdots \oplus I_r$, así que $L = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_r$. Para finalizar, sea J un ideal simple de L, entonces $J = [J, J] \subseteq [J, L] \subseteq J$, luego $[J, L] = J$. Por otro lado

$$[J, L] = [J, I_1] \oplus [J, I_2] \oplus \cdots \oplus [J, I_r].$$

Dado que los I_k son ideales simples de L y que $[J, I_k]$ es un ideal de I_k, debe existir un único k_0 tal que $[J, I_{k_0}] = I_{k_0}$ y $[J, I_k] = \{0\}$ cuando, $k \neq k_0$. Por lo tanto $J = [J, L] = [J, I_{k_0}] = I_{k_0}$. $\square$

Capítulo 3

Representaciones de sl(2,$\mathbb{C}$)

En este capitulo se va a introducir a las representaciones de las álgebras de Lie, retomando la definición dada en el capitulo anterior y ampliándola con otras definiciones relacionadas tales como subrepresentaciones, representaciones irreducibles, representaciones isomorfas y mas. Se enfatizará en representaciones finitas de la álgebra de Lie $sl(2,\mathbb{C})$ donde ya hay un estudio avanzado acerca del tema. Por conveniencia la base de $sl(2,\mathbb{C})$ seleccionada para el trabajo es base canónica $\{e, f, h\}$ dada en el ejemplo (2.29).

3.1. Teoría de Representaciones

En el capitulo anterior se mostró la definición de representación junto con la de L-módulo. Sería razonable preguntar por qué se ha presentado tanto representaciones como L-módulos. La razón es que ambos enfoques tienen sus ventajas, y a veces un enfoque parece más natural que el otro. Para los módulos, la notación es más fácil, y algunos de los conceptos pueden parecer más naturales. Por otro lado, tener un homomorfismo explícito para trabajar puede ser útil cuando estamos más interesados en la álgebra de Lie que en el espacio vectorial en el que actúa. En lo que sigue, sólo se utilizara el lenguaje de representaciones.

Definición 3.1 (**Subrepresentación**)**.** Sea (V, ϕ) una representación de alguna álgebra de Lie L y sea W un subespacio de V. El par (W, ϕ) es una subrepresentación de (V, ϕ) si para toda $x \in L$ se tiene que W es ϕ_x-invariante. Para simplificar se dirá que W es una subrepresentación de V.

Ejemplo 3.2. Sea (V, ϕ) una representación de una álgebra de Lie L. (V, ϕ) tiene por lo menos dos subrepresentaciones triviales $(\{0\}, \phi)$ y (V, ϕ).

Ejemplo 3.3. Sea L una álgebra de Lie. Las subrepresentaciones de (L, ad) son de la forma (I, ad), donde I es ideal de L. En efecto, sea $x \in L$, se tiene $ad_x(I) = [x, I] \subseteq I$.

Proposición 3.4. *Sea L es una álgebra soluble. Si (V, φ) es una representación de L y V es un espacio vectorial no trivial de dimensión finita, entonces existe una subrepresentación W de V con dím $W = 1$*

Demostración. Dado que φ es un homomorfismo, por lema (2.53), $Im(\varphi)$ es una subalgebra soluble de $gl(V)$. El teorema de Lie garantiza que existe $w \in V$ tal que w es un vector propio para toda transformación de $Im(\varphi)$. Sea $M = span\{w\}$, para cada $x \in L$ se tiene que M es φ_x-invariante, entonces M es una subrepresentación de V. □

Proposición 3.5. *Sea (V, φ) una representación de una álgebra de Lie L. Si W es una subrepresentación de V, entonces $\gamma : L \longrightarrow gl(V/W)$, definida por $\gamma_x(v + W) := \varphi_x(v) + W$, es un homomorfismo de álgebras de Lie y por lo tanto $(V/W, \gamma)$ es una representación de L.*

Demostración. Se probará que para cada $x \in L$, γ_x esta bien definida. Suponga que $v+W = u+W$, entonces existe $w \in W$ tal que $v = u + w$ y se tiene

$$\gamma_x(v + W) = \varphi_x(v) + W = \varphi_x(u + w) + W = (\varphi_x(u) + W) + (\varphi_x(w) + W).$$

Dado que W es φ_x-invariante se tiene $\gamma_x(v + W) = \gamma_x(u + W)$. Además $\gamma_x \in gl(V/W)$ porque $\varphi_x \in gl(V)$ y γ es lineal porque φ es lineal. Sean $x, y \in L$ y $\overline{v} = v + W \in V/W$, entonces

$$\gamma_{[x,y]}(\overline{v}) = \varphi_{[x,y]}(v) + W = [\varphi_x, \varphi_y](v) + W = (\varphi_x\varphi_y(v) + W) - (\varphi_y\varphi_x(v) + W) = [\gamma_x, \gamma_y](\overline{v})$$

por lo tanto, $(V/W, \gamma)$ es una representación de L. □

Definición 3.6 (**Representación irreducible**)**.** Sea L una álgebra de Lie. Una representación (V, ϕ) de L es irreducible si sus únicas subrepresentaciones son las triviales.

Ejemplo 3.7. Si L es una $\mathbb{C}$-álgebra de Lie soluble, del ejemplo (3.4) se tiene que toda representación irreducible de dimensión finita de L debe ser de dimensión 1.

Observación 3.8. Sea L una álgebra de Lie. La representación (L, ad) es irreducible si, y sólo si, L es simple.

Definición 3.9 (**Homomorfismo de representaciones**)**.** Sean (V, ϕ) y (W, φ) dos representaciones de una álgebra de Lie L. Un homomorfismo de (V, ϕ) en (W, φ) es una transformación lineal $\theta : V \longrightarrow W$ tal que para toda $x \in L$, se cumple que $\varphi_x\theta = \theta\phi_x$. Cuando θ sea un ismorfismo, entonces se dirá que (V, ϕ) y (W, φ) son representaciones isomorfas.

Proposición 3.10. *Sean (V, ϕ) y (W, φ) dos representaciones de una álgebra de Lie L y f un homomorfismo de V en W, entonces, $(Ker(f), \phi)$ es una subrepresentación de (V, ϕ).*

Demostración. Sea $x \in L$ y $z \in Ker(f)$ entonces $f(\phi_x(z)) = f\phi_x(z) = \varphi_x f(z) = 0$. Es decir, $\phi_x(z) \in Ker(f)$, y así $Ker(f)$ es ϕ_x-invariante. □

Lema 3.11 (**Lema de Schur**). *Sea L una $\mathbb{C}$-álgebra de Lie y sea (S,φ) una representación irreducible de dimensión finita de L. La aplicación $\theta : S \longrightarrow S$ es un homomorfismo de representaciones si, y sólo si, θ es un multiplo escalar de la transformación identidad; esto es $\theta = \lambda I_s$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Demostración. Si $\theta = \lambda I_s$, claramente θ es un homomorfismo de (S,φ) en (S,φ). Suponga que (S,φ) es una representación irreducible de L y $\theta : S \longrightarrow S$ es un homomorfismo de representaciones, es decir, si $x \in L$, entonces $\theta\varphi_x = \varphi_x\theta$. Dado que θ es una transformación lineal, entonces existe un valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$ para θ, por lo tanto $\theta(w) = \lambda w$ para algún $w \in S-\{0\}$. Para $(\theta-\lambda I_S) \in End(S)$ y $x \in L$ se cumple

$$(\theta - \lambda I_S)\varphi_x = \theta\varphi_x - \lambda I_S\varphi_x = \varphi_x\theta - \varphi_x(\lambda I_S) = \varphi_x(\theta - \lambda I_S)$$

es decir, $(\theta-\lambda I_S)$ es un homomorfismo de (S,φ) en (S,φ). Además, $(\theta-\lambda I_S)(w) = \theta(w)-\lambda w = 0$, así, $w \in Ker((\theta - \lambda I_S))$, luego $Ker((\theta - \lambda I_S)) \neq \{0\}$ y por la proposición (3.10) se sabe que $(Ker(\theta - \lambda I_S),\varphi)$ es una subrepresentación de (S,φ), y dado que (S,φ) es irreducible se tiene $S = Ker((\theta - \lambda I_S))$, luego $\theta - \lambda I_S = 0$, por lo tanto $\theta = \lambda I_S$.

□

3.2. Representaciones de dimensión finita para $sl(2,\mathbb{C})$

Considere el espacio vectorial $\mathbb{C}[X,Y]$ de polinomios en dos variables X,Y con coeficientes complejos. Para $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, sea V_d el subespacio de $\mathbb{C}[X,Y]$ formado por los polinomios homogeneos de grado d. Así, $V_0 = \mathbb{C}$, y para $d > 0$, una base de V_d es $B = \left\{X^d, X^{d-1}Y, ..., XY^{d-1}, Y^d\right\}$, luego dím $V_d = d+1$. Ahora considere la transformación lineal $\varphi : sl(2,\mathbb{C}) \longrightarrow gl(V_d)$, definida sobre la base canónica de $sl(2,\mathbb{C})$ de la siguiente forma:

$$\varphi_e(P) := X\frac{\partial}{\partial Y}(P), \quad \varphi_f(P) := Y\frac{\partial}{\partial X}(P), \quad \varphi_h(P) := X\frac{\partial}{\partial X}(P) - Y\frac{\partial}{\partial Y}(P),$$

donde $P \in V_d$. Observe que las tres aplicaciones φ_e, φ_f y φ_h son lineales ya que las derivadas parciales son transformaciones lineales, además, el grado de los polinomios claramente se conserva. Por otro lado, para cada vector en la base B se tiene

$$\begin{aligned}\varphi_h(X^{d-j}Y^j) &= X\frac{\partial}{\partial X}(X^{d-j}Y^j) - Y\frac{\partial}{\partial Y}(X^{d-j}Y^j)\\ &= (d-j)X^{d-j}Y^j - jX^{d-j}Y^j\\ &= (d-2j)X^{d-j}Y^j\end{aligned}$$

Luego, la matriz que representa a la transformación φ_h en la base B es la matriz diag $(d, d-2, \cdots, -d)$.

Teorema 3.12. *El par (V_d,φ) es una representación de $sl(2,\mathbb{C})$.*

Demostración. Claramente φ es una transformación lineal, resta probar que φ es un homomorfismo de álgebras de Lie, es decir, $\varphi[e,f]=[\varphi(e),\varphi(f)]$, $\varphi[e,h]=[\varphi(e),\varphi(h)]$ y $\varphi[f,h]=[\varphi(f),\varphi(h)]$. Del ejemplo (2.31), se sabe que $[e,f]=h$, $[e,h]=-2e$ y $[f,h]=2f$. Sea $X^aY^{d-a}\in B$, se tiene

$$\varphi_{[e,f]}(X^aY^{d-a})=\varphi_h(X^aY^{d-a})=\left(X\frac{\partial}{\partial X}-Y\frac{\partial}{\partial Y}\right)(X^aY^{d-a})$$

luego,

$$\varphi_{[e,f]}(X^aY^{d-a})=aX^aY^{d-a}-(d-a)X^aY^{d-a}=(2a-d)X^aY^{d-a}$$

Note que la igualdad anterior se satisface aún para $a=0$ y $a=d$. Por otro lado

$$\begin{aligned}
[\varphi_e,\varphi_f](X^aY^{d-a})&=(\varphi_e\varphi_f-\varphi_f\varphi_e)\,(X^aY^{d-a})\\
&=\varphi_e\left(\varphi_f(X^aY^{d-a})\right)-\varphi_f\left(\varphi_e(X^aY^{d-a})\right)\\
&=\varphi_e\left(Y\frac{\partial}{\partial X}(X^aY^{d-a})\right)-\varphi_f\left(X\frac{\partial}{\partial Y}(X^aY^{d-a})\right)\\
&=\varphi_e\left(aX^{a-1}Y^{d-a+1}\right)-\varphi_f\left((d-a)X^{a+1}Y^{d-a-1}\right)\\
&=X\frac{\partial}{\partial Y}\left(aX^{a-1}Y^{d-a+1}\right)-Y\frac{\partial}{\partial X}\left((d-a)X^{a+1}Y^{d-a-1}\right)\\
&=a(d-a+1)X^aY^{d-a}-(d-a)(a+1)X^aY^{d-a}\\
&=(2a-d)X^aY^{d-a}
\end{aligned}$$

y la igualdad anterior también se satisface para $a=0$ y $a=d$. Por lo tanto, $\varphi[e,f]=[\varphi(e),\varphi(f)]$. Haciendo un proceso similar con los demás corchetes se obtiene el resultado deseado. $\square$

Si se toman los espacios generados por cada uno de los elementos de la base B, se tiene la siguiente representación gráfica de la representación (V_d,φ):

$$\begin{tikzcd}
0 & X^d \arrow[l, bend left, "\varphi_e"] \arrow[r, bend left, "\varphi_f"] \arrow[loop above, "\varphi_h"] & X^{d-1}Y \arrow[l, bend left, "\varphi_e"] \arrow[r, bend left, "\varphi_f"] \arrow[loop above, "\varphi_h"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\varphi_e"] \arrow[r, bend left, "\varphi_f"] & X^{d-j}Y^j \arrow[l, bend left, "\varphi_e"] \arrow[r, bend left, "\varphi_f"] \arrow[loop above, "\varphi_h"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\varphi_e"] \arrow[r, bend left, "\varphi_f"] & XY^{d-1} \arrow[l, bend left, "\varphi_e"] \arrow[r, bend left, "\varphi_f"] \arrow[loop above, "\varphi_h"] & Y^d \arrow[l, bend left, "\varphi_e"] \arrow[r, bend left, "\varphi_f"] \arrow[loop above, "\varphi_h"] & 0
\end{tikzcd}$$

Teorema 3.13. (V_d,φ) *es una representación irreducible de la álgebra de Lie* $sl(2,\mathbb{C})$*.*

Demostración. Sea W una subrepresentación de V_d, con $W\neq\{0\}$. Se probará que $W=V_d$. Sea k un vector no nulo en W, dado que $W\subseteq V_d$, entonces

$$k=\alpha_0X^d+\alpha_1X^{d-1}Y+\alpha_2X^{d-2}Y^2+\cdots+\alpha_{d-1}XY^{d-1}+\alpha_dY^d$$

con $\alpha_i\in\mathbb{C}$ para toda $0\leq i\leq d$. Como $k\neq 0$, algún coeficiente debe ser diferente de cero, luego existe $j=\text{mín}\{l:\alpha_l\neq 0,\ 0\leq l\leq d\}$ y se tiene

$$\varphi_f(k)=Y\frac{\partial}{\partial X}(k)=Y\frac{\partial}{\partial X}\left(\sum_{r=j}^{d}\alpha_jX^{d-r}Y^r\right)=\sum_{r=j}^{d-1}(d-r)\alpha_rX^{d-r-1}Y^{r+1}$$

Luego,

$$(\varphi_f)^2(k) = \varphi_f\left(\sum_{r=j}^{d-1}(d-r)\alpha_r X^{d-r-1}Y^{r+1}\right) = \sum_{r=j}^{d-2}(d-r)(d-r-1)\alpha_r X^{d-r-2}Y^{r+2}$$

Aplicando j veces φ_f al vector k se tiene que $(\varphi_f)^j(k) = (d-j)!\alpha_j Y^d$. y dado que $(d-j)!\alpha_j \neq 0$, se tiene, $Y^d \in W$. Por otro lado, al aplicar φ_e a Y^d se tiene que

$$\varphi_e(Y^d) = X\frac{\partial}{\partial Y}(Y^d) = dXY^{d-1}$$

es decir $XY^{d-1} \in W$. Aplicando sucesivamente φ_e se tiene que los elementos de la base de V_d están en W, lo cual implica que $W = V_d$, que era lo que se quería probar.

□

3.3. Clasificación de las representaciones irreducibles de $sl(2,\mathbb{C})$

A continuación se va a mostrar que cualquier representación irreducible de dimensión finita es isomorfa a (V_d, φ) para algún $d \geq 0$.

Teorema 3.14. *Si (V,ϕ) es una representación de $sl(2,\mathbb{C})$ y $v \in V$ es un vector propio de ϕ_h asociado valor propio λ, entonces*

1. *$\phi_e(v) = 0$ ó $\phi_e(v)$ es un vector propio de ϕ_h con valor propio $\lambda + 2$.*

2. *$\phi_f(v) = 0$ ó $\phi_f(v)$ es un vector propio de ϕ_h con valor propio $\lambda - 2$.*

Demostración. Si $\phi_e(v) = 0$, entonces no hay nada que probar. En caso contrario, dado que ϕ es un homomorfismo de álgebras de Lie, se tiene $\phi_{[h,e]} = [\phi_h, \phi_e] = \phi_h\phi_e - \phi_e\phi_h$, entonces

$$\phi_h(\phi_e(v)) = \phi_e(\phi_h(v)) + \phi_{[h,e]}(v) = \phi_e(\lambda v) + \phi_{2e}(v) = \lambda\phi_e(v) + 2\phi_e(v) = (\lambda+2)\phi_e(v).$$

por lo tanto, $\phi_e(v)$ es un vector propio de ϕ_h asociado al valor propio $\lambda + 2$. El item 2. se prueba de manera similar.

□

Corolario 3.15. *Sean (V,ϕ) una representación de $sl(2,\mathbb{C})$ y $v \in V$ un vector propio de ϕ_h asociado valor propio λ. Si $\phi_e^k(v) \neq 0$, para algún $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, entonces $\phi_e^k(v)$ es un valor propio de ϕ_h asociado al valor propio $\lambda + 2k$. Además, si $\phi_f^k(v) \neq 0$, para algún $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, entonces $\phi_f^k(v)$ es un valor propio de ϕ_h asociado al valor propio $\lambda - 2k$.*

Demostración. Por inducción sobre k. Por hipótesis $\phi_e(v) \neq 0$ y por el teorema anterior se tiene $\phi_h(\phi_e(v)) = (\lambda + 2)\phi_e(v)$. Suponga que el enunciado se cumple para algún $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, entonces

$$\phi_h(\phi_e^{k+1}(v)) = \phi_e(\phi_h(\phi_e^k(v))) + \phi_{2e}(\phi_e^k(v)) = \phi_e((\lambda + 2k)\phi_e^k(v)) + 2\phi_e(\phi_e^k(v)),$$

por tanto, $\phi_h(\phi_e^{k+1}(v)) = (\lambda+2(k+1))\phi_e^{k+1}(v)$. Similarmente se prueba que $\phi_f^k(v)$ es un valor propio de ϕ_h asociado al valor propio $\lambda - 2k$. □

Lema 3.16. *Sea (V, ϕ) una representación de dimensión finita sobre $sl(2, \mathbb{C})$, entonces V contiene un vector propio w de ϕ_h tal que $\phi_e(w) = 0$.*

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un valor propio de la transformación ϕ_h y sea $v \in V$ un vector propio asociado a λ . Ahora considere el conjunto $S = \{\phi_e^k(v) : k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$. Si $\phi_e^k(v)$ es un vector no nulo de S, por el corolario (3.15) $\phi_e^k(v)$ es un vector propio de ϕ_h asociado al valor propio $\lambda + 2k$, luego, los escalares $\lambda, \lambda + 2, \cdots, \lambda + 2k$ son valores propios distintos de ϕ_h. Pero ϕ_h tiene una cantidad finita de valores propios distintos, así que existe $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tal que $\phi_e^r(v) \neq 0$ y $\phi_e^{r+1}(v) = 0$. Por tanto, llamando $w = \phi_e^r(v)$ se tiene $\phi_h(w) = (\lambda + 2r)w$ y $\phi_e(w) = 0$. □

Teorema 3.17. *Si (V, ϕ) es una representación irreducible de dimensión finita de $sl(2, \mathbb{C})$ entonces (V, ϕ) es isomorfa a (V_d, φ) para algún $d \geq 0$.*

Demostración. Por el lema (3.16) V tiene un vector propio w de ϕ_h tal que $\phi_e(w) = 0$. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\phi_h(w) = \lambda w$ y considere el conjunto $S = \{\phi_f^m(w) : m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$, con un proceso similar al utilizado en la demostración del lema (3.16) se verifica que existe $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tal que $\phi_f^d(w) \neq 0$ y $\phi_f^{d+1}(w) = 0$. Ahora, sea $W = span\{w, \phi_f(w), \phi_f^2(w), \cdots, \phi_f^d(w)\}$. Por el corolario (3.15) se tiene

$$\phi_h(\phi_f^k(w)) = (\lambda - 2k)\phi_f^k, \text{ donde } 0 \leq k \leq d. \tag{3.3.1}$$

Luego, W es $\{\phi_h, \phi_f\}$-invariante. A continuación se prueba por inducción que W es ϕ_e-invariante. Claramente, $\phi_e(w) = 0 \in W$. Suponga que $\phi_e(\phi_f(w)), \cdots, \phi_e(\phi_f^{k-1}(w))$ están en W. Como ϕ es un homomorfismo de álgebras de Lie, se tiene, $\phi_{[e,f]} = [\phi_e, \phi_f] = \phi_e\phi_f - \phi_f\phi_e$, luego

$$\phi_e(\phi_f^k(w)) = \phi_f(\phi_e(\phi_f^{k-1}(w))) + \phi_{[e,f]}(\phi_f^{k-1}(w)) = \phi_f(\phi_e(\phi_f^{k-1}(w))) + \phi_h(\phi_f^{k-1}(w)),$$

dado que $\phi_e(\phi_e^{k-1}(w)) \in W$, y que W es $\{\phi_h, \phi_f\}$-invariante se tiene $\phi_e(\phi_f^k(w)) \in W$. Esto muestra que W es una subrepresentación no trivial de V, pero por hipótesis (V, ϕ) es irreducible, lo cual implica que $W = V$, es decir, $B = \{w, \phi_f(w), \phi_f^2(w), \cdots, \phi_f^d(w)\}$ es una base para V. De la ecuación (3.3.1), se sigue que $[\phi_h]_B = \text{diag }(\lambda, \lambda - 2, \cdots, \lambda - 2d)$, por tanto,

$$Tr([\phi_h]_B) = \sum_{k=0}^{d}(\lambda - 2k) = (d + 1)\lambda - 2\sum_{k}^{d} k = (d + 1)\lambda - d(d + 1) = (d + 1)(\lambda - d)$$

Se sabe que $\phi_{[e,f]} = \phi_h$, luego

$$[\phi_h]_B = [\phi_e \phi_f - \phi_f \phi_e]_B = [\phi_e]_B[\phi_f]_B - [\phi_f]_B[\phi_e]_B.$$

Así, la $Tr([\phi_h]) = 0$, por tanto $\lambda = d$. Por otro lado, $\left\{X^d, X^{d-1}Y, ..., XY^{d-1}, Y^d\right\}$ es una base de V_d, además, para $0 \leq j \leq d$ se tiene $\varphi_f^j(X^d) = \alpha_j X^{d-j}Y^j$, donde $\alpha_j = d(d-1)\cdots(d-j) \neq 0$, entonces $\{X^d, \varphi_f(X^d), \cdots, \varphi_f^d(X^d)\}$ es otra base de V_d. Ahora considere la transformación lineal $\psi : V \longrightarrow V_d$ definida por $\psi(\phi_f^k(w)) := \varphi_f^k(X^d)$, donde $0 \leq k \leq d$. ψ es un isomorfismo de espacios vectoriales ya que transforma una base de V en una base de V_d. Resta probar que $\varphi_x\psi = \psi\phi_x$ para toda $x \in sl(2,\mathbb{C})$. Es suficiente probarlo con los elementos de la base canónica de $sl(2,\mathbb{C})$. Empezando con f se tiene que

$$\varphi_f\psi(\phi_f^k(w)) = \varphi_f(\varphi_f^k(X^d)) = \varphi_f^{k+1}(X^d) = \psi(\phi_f^{k+1}(w)) = \psi\phi_f(\phi_f^k(w)).$$

Para h, utilizando que $\lambda = d$, se tiene

$$\varphi_h\psi(\phi_f^k(w)) = \varphi_h(\varphi_f^k(X^d)) = \alpha_k(d-2k)X^{d-k}Y^y = (d-2k)\varphi_f^k(X^d),$$

además

$$\psi\phi_h(\phi_f^k(w)) = \psi((d-2k)\phi_f^k(w)) = (d-2k)\psi(\phi_f^k(w)) = (d-2k)\varphi_f^k(X^d).$$

Por lo tanto, $\varphi_h\psi(\phi_f^k(w)) = \psi\phi_h(\phi_f^k(w))$. Finalmente, la prueba de $\varphi_e\psi(\phi_f^k(w)) = \psi\phi_e(\phi_f^k(w))$, se hará por inducción. Observe que

$$\varphi_e\psi(w) = \varphi_e(X^d) = 0 = \psi_e(0) = \psi\phi_e(w)$$

Suponga que el enunciado se satisface para $\phi_f(w), \cdots, \phi_f^{k-1}(w)$, entonces

$$\begin{aligned}
\psi\phi_e(\phi_f^k(w)) \quad &= (\psi\phi_f\phi_e + \psi\phi_h)(\phi_f^{k-1}(w)) \\
&= (\varphi_f\psi\phi_e + \varphi_h\psi)(\phi_f^{k-1}(w)) \\
&= \varphi_f\psi\phi_e(\phi_f^{k-1}(w)) + \varphi_h\psi(\phi_f^{k-1}(w))
\end{aligned}$$

por hipótesis de inducción se tiene

$$\begin{aligned}
\psi\phi_e(\phi_f^k(w)) \quad &= \varphi_f\varphi_e\psi(\phi_f^{k-1}(w)) + \varphi_h\psi(\phi_f^{k-1}(w)) \\
&= (\varphi_f\varphi_e + \varphi_h)\left(\psi(\phi_f^{k-1}(w))\right) \\
&= \varphi_e\varphi_f\left(\psi(\phi_f^{k-1}(w))\right) \\
&= \varphi_e\psi\left(\phi_f(\phi_f^{k-1}(w))\right) \\
&= \varphi_e\psi(\phi_f^k(w))
\end{aligned}$$

Por tanto $\varphi_x\psi = \psi\phi_x$ para toda $x \in sl(2,\mathbb{C})$. $\square$

Capítulo 4

Representaciones irreducibles de dimensión infinita sobre $sl(2, \mathbb{C})$

En capítulo anteriores se caracterizaron las representaciones irreducibles de dimensión finita sobre $sl(2, \mathbb{C})$, sin embargo, las representaciones irreducibles de dimensión infinita son un tema que aun se encuentra en desarrollo. A continuación se presenta la definición de módulos de peso por medio de la cual se ha logrado determinar algunas representaciones irreducibles de dimensión infinita sobre $sl(2, \mathbb{C})$.

4.1. Módulos de Peso

Definición 4.1 (**Peso**). Sean (V, ϕ) una representación de $sl(2, \mathbb{C})$. Un peso para (V, ϕ) es un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$V_\lambda := \{v \in V : \phi_h(v) = \lambda v\} \neq \{0\}.$$

Observación 4.2. Si λ es un peso para una representación (V, ϕ) de $sl(2, \mathbb{C})$, entonces V_λ es un subespacio no nulo de V. En efecto, sean $v, w \in V_\lambda$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, se tiene

$$\phi_h(\alpha v + \beta w) = \alpha \phi_h(v) + \beta \phi_h(w) = \alpha \lambda v + \beta \lambda w = \lambda(\alpha v + \beta w).$$

Por lo tanto V_λ es un subespacio de V y se denomina espacio de peso asociado al peso λ.

Definición 4.3 (**Módulos de peso**). Una representación (V, ϕ) de $sl(2, \mathbb{C})$ es un módulo de peso si V es suma directa de espacios de peso, es decir, para $H = \{\lambda \in \mathbb{C} : V_\lambda \neq \{0\}\}$ se tiene

$$V = \bigoplus_{\lambda \in H} \{v \in V : \phi_h(v) = \lambda v\}.$$

Ejemplo 4.4. Sea $L = sl(2, \mathbb{C})$, entonces (L, ad) es un módulo de peso. En efecto, utilizando la base canónica de L, se tiene

$$L = span\{f\} \oplus span\{e\} \oplus span\{h\}.$$

Pero $L_2 = \{x \in L : ad_h(x) = 2x\} = \{x \in L : [h,x] = 2x\}$ y dado que $[h,f] = 2f$ entonces $span\{f\} \subseteq L_2$. Ahora sea $x = \alpha f + \beta e + \gamma h \in L_2$, entonces

$$[h,x] = \alpha[h,f] + \beta[h,e] = 2(\alpha f) - 2(\beta e) = 2(\alpha f - \beta e),$$

luego, $\alpha f + \beta e + \gamma h = \alpha f - \beta e$ se tiene que $\beta = \gamma = 0$, es decir, $x = \alpha f \in span\{f\}$ por tanto $span\{f\} = L_2$. De manera similar se prueba que $L_{-2} = span\{e\}$ y $L_0 = span\{h\}$.

4.1.1. Módulos Verma

A continuación se definen los módulos Verma los cuales son módulos de peso de dimensión infinita sobre $L = sl(2,\mathbb{C})$. Para esto, sean $\lambda \in \mathbb{C}$ y $M(\lambda)$ el espacio vectorial libre con base $B = \{v_0, v_1, \cdots, v_n, \cdots\}$. Ahora defina la transformación lineal $\phi : L \longrightarrow gl(M(\lambda))$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \phi_e(v_i) : &= \begin{cases} i(\lambda - i + 1)v_{i-1} & si \quad i \neq 0 \\ 0 & si \quad i = 0 \end{cases} \\ \phi_f(v_i) : &= v_{i+1} \\ \phi_h(v_i) : &= (\lambda - 2i)v_i \end{aligned}$$

Teorema 4.5. *El par $(M(\lambda), \phi)$ es un módulo de peso de $sl(2,\mathbb{C})$.*

Demostración. Se probará que ϕ es un homomorfismo de álgebras de Lie. Se procederá de manera similar a la prueba del teorema (3.12). En primer lugar, observe que $\phi_{[e,f]}(v_i) = \phi_h(v_i) = (\lambda - 2i)v_i$. Por otro lado, para $i = 0$

$$[\phi_e, \phi_f](v_0) = \phi_e\phi_f(v_0) - \phi_f\phi_e(v_0) = \phi_e(v_1) - \phi_f(0) = \lambda v_0$$

y para $i > 0$,

$$[\phi_e, \phi_f](v_i) = \phi_e\phi_f(v_i) - \phi_f\phi_e(v_i) = \phi_e(v_{i+1}) - \phi_f\left(i(\lambda - i + 1)v_{i-1}\right)$$

luego, $[\phi_e, \phi_f](v_i) = (i+1)(\lambda - i)v_i - i(\lambda - i + 1)v_i = (\lambda - 2i)v_i$, por tanto $\phi_{[e,f]} = [\phi_e, \phi_f]$. En segundo lugar,

$$\phi_{[e,h]}(v_i) = -2\phi_e(v_i) = \begin{cases} -2i(\lambda - i + 1)v_{i-1} & si \quad i \neq 0 \\ 0 & si \quad i = 0 \end{cases}$$

para $i = 0$ se tiene

$$[\phi_e, \phi_h](v_0) = \phi_e\phi_h(v_0) - \phi_h\phi_e(v_0) = \phi_e(\lambda v_0) - \phi_h(0) = 0$$

y para $i > 0$,

$$[\phi_e, \phi_h](v_i) = \phi_e\phi_h(v_i) - \phi_h\phi_e(v_i) = \phi_e((\lambda - 2i)v_i) - \phi_h(i(\lambda - i + 1)v_{i-1})$$

luego, $[\phi_e,\phi_h](v_i) = (\lambda-2i)i(\lambda-i+1)v_{i-1} - (\lambda-2i-2)i(\lambda-i+1)v_{i-1} = -2i(\lambda-i+1)v_{i-1}$, se concluye que $\phi_{[e,h]} = [\phi_e,\phi_h]$, Para finalizar $\phi_{[f,h]}(v_i) = 2\phi_f(v_i) = 2v_{i+1}$ y también

$$[\phi_f,\phi_h](v_i) = \phi_f\phi_h(v_i) - \phi_h\phi_f(v_i) = \phi_f((\lambda-2i)v_i) - \phi_h(v_{i+1}),$$

luego, $[\phi_f,\phi_h](v_i) = (\lambda-2i)v_{i+1} - (\lambda-2(i+1))v_{i+1} = 2v_{i+1}$, por tanto, $\phi_{[f,h]} = [\phi_f,\phi_h]$. Se concluye que el par $(M(\lambda),\phi)$ es una representación de $sl(2,\mathbb{C})$. Resta probar que es módulo de peso y para ello observe que

$$M(\lambda) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} span\{v_n\}$$

Sean $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $w\in span\{v_n\}$, entonces $w=\beta v_n$ para algún $\beta\in\mathbb{C}$. Además

$$\phi_h(w) = \beta\phi_h(v_n) = (\lambda-2n)\beta v_n = (\lambda-2n)w$$

Es decir, $w\in\{v\in M(\lambda) : \phi_h(v) = (\lambda-2n)v\} = M_{\lambda-2n}$, luego $span\{v_n\}\subseteq M_{\lambda-2n}$. Recíprocamente, sea $u\in M_{\lambda-2n}$, entonces $\phi_h(u) = (\lambda-2n)u$, además, existen $\beta_1,\cdots,\beta_r\in\mathbb{C}$, $\beta_i\neq 0$ tales que $u=\beta_1 v_{i_1}+\cdots+\beta_r v_{i_r}$ y se tiene

$$\phi_h(u) = \beta_1\phi_h(v_{i_1})+\cdots+\beta_r\phi_h(v_{i_r}) = \sum_{j=1}^{r}\beta_j(\lambda-2i_j)v_{i_j},$$

luego

$$(\lambda-2n)\sum_{j=1}^{r}\beta_j v_{i_j} = \sum_{j=1}^{r}\beta_j(\lambda-2i_j)v_{i_j}$$

así que

$$\sum_{j=1}^{r}[(\lambda-2n)-(\lambda-2i_j)]\beta_j v_{i_j} = 0$$

entonces $2(i_j-n)\beta_j = 0$, es decir, $i_j=n$, para toda $j=1,2,\cdots,r$. Así que

$$u = (\beta_1+\cdots+\beta_r)v_n \in span\{v_n\}.$$

Por lo tanto $M_{\lambda-2n}\subseteq span\{v_n\}$, de esta manera $M_{\lambda-2n} = span\{v_n\}$, para todo $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Llamando $H=\{\lambda-2n : n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$, se concluye que $M(\lambda) = \bigoplus_{t\in H}\{v\in M(\lambda) : \phi_h(v) = tv\}$

□

De manera similar a la representación (V_d,φ), la representación anterior tiene su propio diagrama el cual es el siguiente:

$$\begin{tikzcd}
0 & v_0 \arrow[l, bend left, "\phi_e"] \arrow[r, bend left, "\phi_f"] \arrow[loop above, "\phi_h"] & v_1 \arrow[l, bend left, "\phi_e"] \arrow[r, bend left, "\phi_f"] \arrow[loop above, "\phi_h"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\phi_e"] \arrow[r, bend left, "\phi_f"] & v_j \arrow[l, bend left, "\phi_e"] \arrow[r, bend left, "\phi_f"] \arrow[loop above, "\phi_h"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\phi_e"] \arrow[r, bend left, "\phi_f"] & v_{n-1} \arrow[l, bend left, "\phi_e"] \arrow[r, bend left, "\phi_f"] \arrow[loop above, "\phi_h"] & v_n \arrow[l, bend left, "\phi_e"] \arrow[r, bend left, "\phi_f"] \arrow[loop above, "\phi_h"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\phi_e"]
\end{tikzcd}$$

Teorema 4.6. *El módulo de peso $(M(\lambda), \phi)$ es una representación irreducible de $sl(2, \mathbb{C})$ si, y sólo si, $\lambda \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$*

Demostración. Suponga que $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y sea $V = span\{v_{\lambda+1}, v_{\lambda+2}, \cdots\}$. Se mostrará que V es una subrepresentación no trivial de $M(\lambda)$. Por la definición de ϕ_f y ϕ_h, claramente el subespacio V es $\{\phi_f, \phi_h\}$-invariante, resta probar que V es ϕ_e-invariante, para $k \in V$ existe $m \in \mathbb{Z}_{\geq \lambda+1}$ tal que

$$k = \sum_{j=\lambda+1}^{m} \alpha_j v_j, \text{ donde } \alpha_m \neq 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\phi_e(k) &= \sum_{j=\lambda+1}^{m} \alpha_j \phi_e(v_j) = \sum_{j=\lambda+1}^{m} \alpha_j j(\lambda - j + 1) v_{j-1} \\
&= \alpha_{\lambda+1}(\lambda+1)\cancelto{0}{(\lambda - (\lambda+1) + 1)} v_\lambda + \sum_{j=\lambda+2}^{m} \alpha_j j(\lambda - j + 1) v_{j-1} \\
&= \sum_{j=\lambda+1}^{m-1} \alpha_{j+1}(j+1)(\lambda - j) v_j \ \in V
\end{aligned}$$

por lo tanto, V es ϕ_e-invariante y así V es una subrepresentación no trivial de $M(\lambda)$. Ahora suponga que $\lambda \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y que $W \neq \{0\}$ es una subrepresentación de $M(\lambda)$. Observe que si $v_0 \in W$, entonces al aplicar ϕ_f^n, con $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, a éste elemento se obtiene la base del espacio vectorial $M(\lambda)$, luego, para demostrar el enunciado es suficiente probar que $v_0 \in W$. Sea $k \in W$, dado que $W \subseteq M(\lambda)$ entonces existe $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $k = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i v_i$, donde $\alpha_m \neq 0$. Sin perdida de generalidad se puede suponer que $m \geq 1$ y se tiene

$$\begin{aligned}
\phi_e(\alpha_m v_m) &= m(\lambda - m + 1)\alpha_m v_{m-1} \\
\phi_e^2(\alpha_m v_m) &= (m-1)m(\lambda - m + 1)(\lambda - m + 2)\alpha_m v_{m-2} \\
&\ \vdots \\
\phi_e^m(\alpha_m v_m) &= \left(m!\alpha_m \prod_{i=1}^{m} (\lambda - m + i) \right) v_0
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\phi_e^m(k) = \cancelto{0}{\phi_e^m \left(\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_i v_i \right)} + \phi_e^m(\alpha_m v_m) = \beta v_0$$

Es claro que $\beta = m!\alpha_m \prod_{i=1}^{m} (\lambda - m + i) \neq 0$ porque que $\lambda \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$, de esta manera $v_0 \in W$. $\square$

4.1.2. Módulos Gelfand Tsetlin (G-T)

Las álgebras de Gelfand Tsetlin y módulos de Gelfand Tsetlin, son un estudio que abarca un gran campo dentro de las representaciones de la álgebra de Lie $gl(n, \mathbb{F})$, sin embargo, el propósito de este documento radica en las representaciones sobre la álgebra de Lie $sl(2,\mathbb{C})$, por tanto, a continuación se presentarán los módulos de Gelfand-Tsetlin sobre $sl(2,\mathbb{C})$. Si el lector quiere profundizar en el tema, puede remitirse a [1], [2]y [3].

Definición 4.7 (**Tabla G-T para** $sl(2,\mathbb{C})$). Para un vector $l=(l_{11},l_{21},l_{22})\in\mathbb{C}^3$, la tabla Gelfand-Tsetlin para l, denotada con $T(l)$, es el siguiente arreglo

$$T(l)=\begin{array}{|c|c|}\hline l_{21} & l_{22}\\\hline \multicolumn{2}{c}{\boxed{l_{11}}}\end{array}$$

Fijando $l=(l_{11},l_{21},l_{22})\in\mathbb{C}^3$, con V_l se denotará el espacio vectorial libre con base

$$B_l=\left\{\begin{array}{|c|c|}\hline l_{21} & l_{22}\\\hline \multicolumn{2}{c}{\boxed{l_{11}+z}}\end{array}: z\in\mathbb{Z}\right\}$$

Por comodidad, la tabla de G-T en B_l correspondiente al vector $(l_{11}+z,l_{21},l_{22})$ se denotará con $T(l+z)$. Ahora, utilizando las formulas de Gelfand-Tsetlin (ver [1] y [3]), se define la transformación lineal $\psi: sl(2,\mathbb{C})\longrightarrow gl(V_l)$ como sigue:

$$\begin{aligned}
\psi_e(T(l+z)) &:= (l_{21}-(l_{11}+z))((l_{11}+z)-l_{22})T(l+(z+1))\\
\psi_f(T(l+z)) &:= T(l+(z-1))\\
\psi_h(T(l+z)) &:= (2(l_{11}+z)-l_{21}-l_{22}-1)T(l+z)
\end{aligned}$$

Teorema 4.8. *El par (V_l,ψ) es una representación de $sl(2,\mathbb{C})$.*

Demostración. Se debe probar que ψ es un homomorfismo de álgebras de Lie. Se procederá de manera similar a la prueba del teorema (3.12). En primer lugar

$$\psi_{[e,f]}(T(l+z))=\psi_h(T(l+z))=(2(l_{11}+z)-l_{21}-l_{22}-1)T(l+z)$$

y por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned}
\psi_e\psi_f(T(l+z)) &= \psi_e\left(T(l+(z-1))\right)\\
&=(l_{21}-l_{11}-z+1)(l_{11}-l_{22}+z-1)T(l+z)\\
\psi_f\psi_e(T(l+z)) &= \psi_f\left((l_{21}-(l_{11}+z))((l_{11}+z)-l_{22})T(l+(z+1)\right)\\
&=(l_{21}-l_{11}-z)(l_{11}-l_{22}+z)T(l+z)
\end{aligned},$$

entonces,

$$[\psi_e,\psi_f](T(l+z))=(l_{11}-l_{21}+z+l_{11}-l_{22}+z-1)T(l+z)=(2(l_{11}+z)-l_{21}-l_{22}-1)T(l+z)$$

por tanto $\psi_{[e,f]}=[\psi_e,\psi_f]$. Para el segundo caso se tiene

$$\psi_{[e,h]}(T(l+z))=-2\psi_e(T(l+z))=-2(l_{21}-(l_{11}+z))((l_{11}+z)-l_{22})T(l+(z+1))$$

por otro lado, $\psi_e\psi_h(T(l+z)) = \psi_e((2(l_{11}+z)-l_{21}-l_{22}-1)T(l+z)) = \alpha T(l+(z+1))$, donde $\alpha = (l_{21}-(l_{11}+z))((l_{11}+z)-l_{22})(2(l_{11}+z)-l_{21}-l_{22}-1)$, además,

$$\psi_h\psi_e(T(l+z)) = \psi_h((l_{21}-(l_{11}+z))((l_{11}+z)-l_{22})T(l+(z+1))) = \beta T(l+(z+1))$$

donde $\beta = (2(l_{11}+(z+1))-l_{21}-l_{22}-1)((l_{22}-(l_{11}+z))((l_{11}+z)-l_{22})$. Luego

$$[\psi_e,\psi_h](T(l+z)) = (\alpha-\beta)T(l+(z+1)) = -2((l_{22}-(l_{11}+z))((l_{11}+z)-l_{22})T(l+(z+1).$$

así, $\psi_{[e,h]} = [\psi_e,\psi_h]$. Por último, $\psi_{[f,h]}(T(l+z)) = 2\psi_f(T(l+z)) = 2T(l+(z-1))$ y también se tiene

$$\begin{aligned}
\psi_f\psi_h(T(l+z)) &= \psi_f((2(l_{11}+z)-l_{21}-l_{22}-1)T(l+z)) \\
&= (2(l_{11}+z)-l_{21}-l_{22}-1)T(l+(z-1)) \\
\psi_h\psi_f(T(l+z)) &= \psi_h((T(l+(z-1))) \\
&= (2(l_{11}+(z-1))-l_{21}-l_{22}-1)T(l+(z-1))
\end{aligned},$$

luego,

$$\begin{aligned}
[\psi_f,\psi_h](T(l+z)) &= ((2(l_{11}+z)-l_{21}-l_{22}-1)-(2(l_{11}+(z-1))-l_{21}-l_{22}-1))T(l+(z-1)) \\
&= 2T(l+(z-1))
\end{aligned}$$

así $\psi_{[f,h]} = [\psi_f,\psi_h]$. Se concluye que el par (V_l,ψ) es una representación de $sl(2,\mathbb{C})$. $\square$

Nota 4.9. Una forma gráfica de observar la representación (V_l,ψ) es la siguiente:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, bend left, "\psi_e"] & T(l-2) \arrow[l, bend left, "\psi_f"] \arrow[loop above, "\psi_h"] \arrow[r, bend left, "\psi_e"] & T(l-1) \arrow[l, bend left, "\psi_f"] \arrow[loop above, "\psi_h"] \arrow[r, bend left, "\psi_e"] & T(l) \arrow[l, bend left, "\psi_f"] \arrow[loop above, "\psi_h"] \arrow[r, bend left, "\psi_e"] & T(l+1) \arrow[l, bend left, "\psi_f"] \arrow[loop above, "\psi_h"] \arrow[r, bend left, "\psi_f"] & T(l+2) \arrow[l, bend left, "\psi_f"] \arrow[loop above, "\psi_h"] \arrow[r, bend left, "\psi_e"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\psi_f"]
\end{tikzcd}$$

Teorema 4.10. ***Teorema Principal*** *V_l es irreducible si, y solo si $l_{21}-l_{11}, l_{22}-l_{11} \notin \mathbb{Z}$.*

Demostración. Suponga que $l_{21}-l_{11}, l_{22}-l_{11} \notin \mathbb{Z}$ y que $W \neq \{0\}$ es una subrepresentación de V_l. Sea $0 \neq k \in W$ luego existen $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, enteros $z_1 < \cdots < z_m$ y escalares no nulos $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ tales que $k = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i T(l+z_i)$. Luego

$$\begin{aligned}
\psi_f(k) &= \psi_f\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i T(l+z_i)\right) = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\psi_f(T(l+z_i)) = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i T(l+z_i-1) \\
\psi_f^2(k) &= \psi_f\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i T(l+z_i-1)\right) = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\psi_f(T(l+z_i-1)) = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i T(l+z_i-2)
\end{aligned}$$

Siguiendo con este proceso, para $t = z_m - z_{m-1} > 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
\psi_f^t(k) &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i T(l+z_i-t) \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i T(l+z_i-t) + \alpha_m T(l+z_m-t) \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i T(l+z_i-t) + \alpha_m T(l+z_m-(z_m-z_{m-1})) \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i T(l+z_i-t) + \alpha_m T(l+z_{m-1})
\end{aligned}$$

Por otro lado, se sabe que $\psi_e(T(l+z)) = (l_{21}-l_{11}-z)(l_{11}-l_{22}+z)T(l+z+1)$, llamando $\beta_z = (l_{21}-l_{11}-z)(l_{11}-l_{22}+z)$, se tiene

$$\psi_e^2(T(l+z)) = \psi_e(\beta_z T(l+z+1)) = \beta_z \psi_e(T(l+z+1)) = \beta_z \beta_{z+1} T(l+z+2)$$

Luego, $\psi_e^t(T(l+z)) = \beta_z ... \beta_{z+t-1} T(l+z+t)$. Sea $\gamma = \beta_{z_{m-1}} ... \beta_{z_{m-1}+t-1} \neq 0$, entonces

$$\frac{1}{\gamma}\psi_f^t(k) = \frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i T(l+z_i-t) + \frac{1}{\gamma}\alpha_m T(l+z_{m-1}).$$

para $x = \frac{1}{\gamma}\psi_f^t(k)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\psi_e^t(x) &= \psi_e^t\left(\frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i T(l+z_i-t)\right) + \psi_e^t\left(\frac{1}{\gamma}\alpha_m T(l+z_{m-1})\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\gamma}\alpha_i \psi_e^t(T(l+z_i-t)) + \frac{1}{\gamma}\alpha_m \psi_e^t(T(l+z_{m-1})) \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{\gamma}\beta_{z_i} ... \beta_{z_i+t-1} T(l+z_i) + \alpha_m T(l+z_{m-1}+t) \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{\gamma}\beta_{z_i} ... \beta_{z_i+t-1} T(l+z_i) + \alpha_m T(l+z_m)
\end{aligned}$$

Dado que W es un espacio vectorial, $\psi_e^t(x) - k \in W$. Si $\sigma_i = \frac{\alpha_i}{\gamma}\beta_{z_i} ... \beta_{z_i+t-1}$, entonces

$$\sum_{i=1}^{m-1} \sigma_i T(l+z_i) + \cancel{\alpha_m T(l+z_m)} - \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i T(l+z_i) - \cancel{\alpha_m T(l+z_m)} = \sum_{i=1}^{m-1} (\sigma_i - \alpha_i) T(l+z_i).$$

Observe que $\sigma_i - \alpha_i \neq 0$, para toda $i = 1, \cdots, m-1$. Es decir, la combinación lineal que representa el vector $\psi_e^t(x) - k$ tiene exactamente $m-1$ sumandos no nulos. Repitiendo este procedimiento una cantidad finita de veces, se obtiene que la tabla $T(l+z_i) \in W$, para algún $z_i \in \mathbb{Z}$. Ahora aplicando a ésta tabla las transformaciones ψ_f^n y ψ_e^m, com $m, n \in \mathbb{Z}$, se obtienen todos los elementos de la base de V_l, por lo tanto $W = V_l$. Para finalizar, suponga que $l_{21} - l_{11} \in \mathbb{Z}$ ó $l_{22} - l_{11} \in \mathbb{Z}$. Sin pérdida de generalidad, suponga que $l_{21} - l_{11} = z' \in \mathbb{Z}$, luego

$$\psi_e(T(l+z')) = \cancelto{0}{(l_{21}-l_{11}-z')}(l_{11}-l_{22}+z')T(l+z'+1) = 0.$$

Sea $W = span\,\{T(l+z) : z \leq z'\}$. Por el gráfico que ilustra ésta representación (4.9) es fácil ver que W es $\{\psi_h, \psi_f\}$-invariante. Ahora, para $k \in W$ existe $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que

$$k = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i T(l + z_i), \text{ donde } z_i \leq z'.$$

Si $z_m < z'$, claramente $\psi_e(k) \in W$. Para $z_m = z'$ se tiene $\psi_e(k) = \sum\limits_{i=0}^{m} \alpha_i \psi_e(T(l + z_i))$, pero $\alpha_m \psi(T(l + z_m)) = \cancelto{0}{(l_{21} - l_{11} - z_m)}(l_{11} - l_{22} + z_m)T(l + z_m + 1) = 0$, así

$$\psi_e(k) = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i (l_{21} - l_{11} - z_i)(l_{11} - l_{22} + z_i) T(l + z_i + 1) \in W$$

es decir, W es ψ_e-invariante. Con esto se concluye que W es un subrepresentación no trivial de V_l.

$\square$

El teorema anterior es un caso particular de un resultado más general que aparece en [1].

Conclusiones

1. Los teoremas presentados en el Capítulo 2 de esta monografía son resultados conocidos dentro de la teoría de álgrebras de Lie, no obstante las pruebas fueron reescritas por los autores para mostrar los detalles que en general se omiten en los textos especializados en esta teoría, como por ejemplo, el Teorema de Engel, Teorema de Lie y Criterio de Cartan.

2. El teorema principal (4.10) es un caso particular del teorema 7,6 del artículo de Futorny, Grantcharov y Ramirez [1] pero la prueba que aquí se presenta es un producto original de los autores el cual se obtuvo después de un estudio y análisis minucioso de dicho artículo.

3. Módulos y representaciones de una álgebra de Lie son dos estructuras equivalentes y en la bibliografía consultada para la realización de este documento se utilizan indistintamente las dos nociones. En esta monografía se utiliza exclusivamente el lenguaje de representaciones dado que para los estudiantes de pregrado es más familiar la definición de tranformación lineal que la definición de acción sobre un conjunto.

4. Las representaciones irreducibles de dimensión infinita sobre $sl(2, \mathbb{C})$ es un tema que aún está en estudio. En este trabajo se presentaron dos clases de representaciones irreducibles de dimensión infinita para $sl(2, \mathbb{C})$, sin embargo, determinar si dos de estas representaciones son o no isomorfas, es un trabajo abierto para estudiantes que en un futuro estén interesados en el estudio de esta teoría.

Apéndice

Este apéndice tiene el propósito de presentar el teorema chino de restos para polinomios el cual se utiliza en la prueba del teorema (1.85).

Definición .11 (**Congruencia en polinomios**). Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo y sea f un polinomio no nulo en $\mathbb{F}[X]$. Dos polinomios $g_1, g_2 \in \mathbb{F}[X]$ son congruentes módulo f, lo cual se denota con $g_1 \cong g_2 (\text{mód } f)$, si existe un polinomio $q \in \mathbb{F}[X]$ tal que $g_1 - g_2 = qf$.

Las propiedades básicas de la congruencia en polinomios se dan en la siguiente proposición.

Proposición .12. *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo. Si f es un polinomio no nulo en $\mathbb{F}[X]$, entonces*

1. $g \cong g(\text{mód } f)$ *para todo* $g \in \mathbb{F}[X]$.
2. *Sean* $g, h \in \mathbb{F}[X]$. *Si* $g \cong h(\text{mód } f)$, *entonces* $h \cong g(\text{mód } f)$.
3. *Sean* $g, h, t \in \mathbb{F}[X]$. *Si* $g \cong h(\text{mód } f)$ *y* $h \cong t(\text{mód } f)$, *entonces* $g \cong t(\text{mód } f)$.

Teorema .13 (**Chino del Resto para polinomios**). *Sean $f_1, f_2, \cdots, f_k \in \mathbb{F}[X]$ polinomios sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ tales que $mcd(f_i, f_j) = 1$, cuando $i \neq j$. Si $g_1, g_2, \cdots, g_k \in \mathbb{F}[X]$, entonces el sistema de congruencias $h \cong g_i \,(\text{mód } f_i)$ para todo $i = 1, 2, \cdots, k$, tiene solución. Ademas, si h_1 y h_2 son dos soluciones de este sistema, entonces $h_1 \cong h_2 \,(\text{mód } f_1 f_2 \cdots f_k)$.*

Demostración. Sea $f = f_1 f_2 \cdots f_k$ el producto de los k polinomios y sea

$$q_i = \frac{f}{f_i} \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \cdots, k.$$

Como $mcd(q_i, f_i) = 1$, existe $r_i \in \mathbb{F}[X]$ con la propiedad de que

$$q_i r_i \cong 1(\text{ mód } f_i), \quad i = 1, 2, \cdots, k,$$

entonces $1 = r_i q_i + s_i f_i$. Defina ahora el polinomio h por

$$h = \sum_{i=1}^{k} g_i q_i r_i = g_1 q_1 r_1 + g_2 q_2 r_2 + \cdots + g_k q_k r_k.$$

Observe que h es la solución (o una de las soluciones) buscada. Como f_i divide a q_j para $i \neq j$, se tiene que $h \cong g_i q_i r_i(\text{ mód } f_i)$. Como $q_i r_i \cong 1(\text{ mód } f_i)$, se sigue que

$$h \cong g_i(\text{ mód } f_i), \quad \text{para todo} \quad i = 1, 2, \cdots, k.$$

Ahora si h_2 es otra solución de todas las ecuaciones en congruencias

$$h_2 \cong g_i(\text{ mód } f_i), \quad \text{para todo} \quad i = 1, 2, \cdots, k,$$

entonces

$$f_i \text{ divide a } h - h_2 \quad \text{para todo} \quad i = 1, 2, \cdots, k.$$

Lo cual implica que f divide a $h - h_2$, por lo tanto,

$$h \cong h_2(\text{ mód } f_1 f_2 \cdots f_k).$$

□

Referencias

[1] Futorny V. Grantcharov D. and Ramirez E. *Irreducible Generic Gelfand-Tsetlin Modules of* $gl(n)$. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. **11** (2015), 1-13.

[2] Drozd A. Futorny V. Ovsienko S, *Harish-Chandra subalgebras and Gelfand-Zetlin modules, in Finite-Dimensional Algebras and Related Topics.* Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, Vol. 424,(1994), 79-93.

[3] Gelfand I. Tsetlin M., *Finite-dimensional representations of the group of unimodular matrices*, Dokl.Akad. Nauk USSR 71 (1950), 825-828.

[4] Mazorcguk V. *Lectures on* $sl_2(\mathbb{C})$*-modules*, World Scientific Book. Uppsala (2009).

[5] Humphreys J. *Introduction to Lie Algebras and representation Theory.* Springer-Verlag, New York (1972).

[6] Erdmann K. *Introduction to Lie Algebras*, Springer-Verlag, London Limited (2006).

[7] San Martin L.*Álgebras de Lie* Unicamp. Segunda edição. Campinas, (2010).

[8] Samelson H. *Notes on Lie Algebras.* Springer-Verlag, Third Corrected Edition, Stanford, (1989).

[9] Xu X. *Representations of Lie Algebras and Partial Differential Equations.*Springer Nature Singapore Pte Ltd. (2017).

[10] Gallian J. *Contemporary Abstract Algebra.* Brooks/Cole, Cengage Learning, Seventh Edition. (2010).

[11] Dummit D. and Foote R. *Abstract Algebra* John Wiley and Sons, Inc. Third Edition. Toronto (2004).

[12] Grossman S. *Álgebra Lineal.* Quinta Edición, Mc Graw Hill, México, (1995).

[13] Jeronimo G. Sabia J. y Tesauri S. *Álgebra Lineal.* Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Universidad de Buenos Aires. (2008).