0.1. Un curso de Álgebra Lineal

0.1.1. Definición de matriz

Definición 1. ***Matriz***

Sean m y n dos enteros positivos. Una matriz de tamaño $m \times n$ es un arreglo retangular de mn números reales (o complejos), ordenados en m filas horizontales y n columnas verticales. Cada número que conforma la matriz se denomina componente o entrada de la matriz. Las matrices se denotan con letras mayúsculas como A, B, C, y sus componentes con las respectivas letras minúsculas junto con dos subindices que representan la posición de la componente dentro de la matriz.

Si A es una matriz de tamaño $m \times n$, para $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$, con a_{ij} se denota la componente de la matriz A que se ubica simultáneamente en la i-ésima fila y la j-ésima columna. A continuación se presenta la forma general de una matriz:

Columna j
$j-$ésima columna

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Fila i
$i-$ésima fila

Componente ij
$ij-$ésima componente

Ejemplos:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & \frac{2}{3} & -\pi \end{pmatrix}$ es una matriz de tamaño 2×3.

2. $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ es una matriz de tamaño 2×2.

Observación: Cuando conocemos una regla o fórmula que cumplen todas las componentes de una matriz, podemos utilizar la siguiente forma simplificada para representar dicha matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, esto se ilustra en los siguientes ejemplos

Ejemplo 1. Determinemos explícitamente las siguientes matrices:

1. $A = (a_{ij})_{3\times 4}$, donde $a_{ij} = i + j$. **Solución:** $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

2. $B = (b_{ij})_{2\times 4}$, donde $b_{ij} = \frac{i-j}{2}$. **Solución:** $B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$

3. $C = (c_{ij})_{3\times 3}$, donde $c_{ij} = \cos\frac{(i+j)\pi}{2}$. **Solución:** $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4. $D = (d_{ij})_{4\times 3}$, donde $d_{ij} = \operatorname{sen}^2(i-j) + \cos^2(i-j)$. **Solución:** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

0.1.2. Tipos especiales de matrices

Definición 2. *Por su importancia dentro del álgebra de matrices, destacamos los siguientes tipos de matrices:*

1. *Matriz nula de tamaño $m \times n$.*

2. *Matriz cuadrada de orde n.*

3. *Matriz triangular superior.*

4. *Matriz triangular inferior.*

5. *Matriz triangular.*

6. *Matriz diagonal.*

7. *Matriz escalar (Matriz idéntica de orden n).*

Observación 1 (Vectores fila y vectores columna). Cada vector es un tipo especial de matriz. Los vectores fila de n componentes son matrices de tamaño $1 \times n$, de la forma $(a_1, \cdots, a_n)$ y los vectores columna de n componentes son matrices de tamaño $n \times 1$, de la forma $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Ejemplos:

1. $(1, -4, \pi)$ es un vector fila de 3 componentes y $(1, 0, 0, 0, 0)$ es un vector fila de 5 componentes.
2. $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. es un vector columna de 4 componentes.

Nota 1. *Sea $A = (a_{ij})_{m\times n}$. La i-ésima fila de la A se denota con A_i, es decir, $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$. La j-ésima fila de la A se denota con $A^{(j)}$, es decir, $A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$.*

Para la matriz $A = (a_{ij})_{4\times 3}$, donde $a_{ij} = \frac{j}{i}$, se tiene

$$A_1 = (1, 2, 3) \quad \text{y} \quad A_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$$

0.1.3. Igualdad y suma de matrices

Definición 3 (Matrices iguales). *Dos matrices $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{m\times n}$ son iguales, lo que se denota con $A = B$, si para cada $i = 1, \ldots, m$ y cada $j = 1, \ldots, n$ se tiene $a_{ij} = b_{ij}$.*

Ejemplos

1. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \pi \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta & \pi \\ \operatorname{sen}\pi & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. $(\cos(i+j))_{2\times 3} \neq (\cos(i+j))_{3\times 2}$.

Definición 4 (Suma o adición de matrices). *Sean $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{m\times n}$. La suma de A y B, denotada con $A + B$, es la matriz de tamaño $m \times n$ definida por*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Es decir, $A+B$ es la matriz de tamaño $m\times n$ que se obtiene al sumar las componentes correspondientes de A y B.

Ejemplos:

1. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \pi \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -3 & -\pi \\ 7 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 7 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ \pi & \sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ 2\pi & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -5 \\ 3\pi & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}.$

3. Sean $A = (\operatorname{sen}^2 i)_{3\times 4}$ y $B = (\cos^2 i)_{3\times 4}$, se tiene

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teorema 1. *Si A, B y C son matrices de tamaño $m\times n$, entonces*

1. *$A+B$ es una matriz de tamaño $m\times n$.*

2. *$A+(B+C) = (A+B)+C$.*

3. *$A+B = B+A$.*

4. *$A+\boldsymbol{O}_{m\times n} = A$.*

5. *Para la matriz A existe una única matriz de tamaño $m\times n$, denotada con $-A$, tal que*

$$A+(-A) = \boldsymbol{O}_{m\times n}.$$

Definición 5 (Transpuesta de una matriz)**.** *Sea $A = (a_{ij})_{m\times n}$. La transpuesta de A, denotada con A^t es la matriz de tamaño $n\times m$ cuya ji-ésima componente es la ij-ésima componente de la matriz A.*

Ejemplos:

1. $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -4 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -2 & -4 & \pi \\ 3 & \pi & -6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -2 & -4 & \pi \\ 3 & \pi & -6 \end{pmatrix}.$

Proposición 1. *Para toda matriz A se tiene $A = (A^t)^t$.*

Definición 6 (Matriz simétrica)**.** *Una matriz cuadrada A es simétrica si cumple la igualdad $A = A^t$.*

Definición 7 (Matriz antisimétrica)**.** *Una matriz cuadrada A es antisimétrica si cumple la igualdad $A = -A^t$.*

0.1.4. Múltiplos escalares de una matriz

Definición 8. *Sea $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y α un escalar. La multiplicación de α y la matriz A, denotada αA, es la matriz definida por*

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ejemplos:

(1) $-2\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -6 \\ 2 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$

(2) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -6 & 8 & 4 \\ -2 & 4 & -6 & 2 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$

(3) $-\sqrt{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$

(4) $0\,(a_{ij})_{m\times n} = \mathbf{0}_{m\times n}.$

Teorema 2. *Si A, B y C son matrices de tamaño $m\times n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces*

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t.$
3. $(\alpha A)^t = \alpha A^t.$
4. $0A = \boldsymbol{O}_{m\times n}, \quad 1A = A \quad y \quad -1A = -A.$
5. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B.$
6. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A.$
7. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A).$

0.1.5. Multiplicación de matrices

Definición 9 (Producto escalar)**.** *Sean* $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ *un vector fila de* n *componentes y* $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)^t$ *un vector columna de* n *componentes. El producto escalar de* $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b}$*, denotado con* $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$*, se define de la siguiente forma*

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Ejemplos:

- $(-4, -2, -3) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = -4(-2) + (-2)(3) + (-3)(-1) = 5.$

- $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{5}, -3, 1\right) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 25 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}(-3) - \frac{1}{5}(25) - 3(-1) + 1(3) = -1.$

- $\left(2, -\frac{1}{5}\right) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \\ -5 \end{pmatrix} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{5}(-5) = 0.$

Definición 10 (Multiplicación de matrices)**.** *Sean* $A = (a_{ij})_{m \times n}$ *y* $B = (b_{ij})_{n \times p}$*. la multiplicación de* A *y* B*, denotada* AB*, es la matriz de tamaño* $m \times p$ *cuya* ij*-ésima componente se obtiene del producto escalar de la* i*-ésima fila de* A *(factor izquierdo) y la* j*-ésima columna de* B *(factor derecho). Es decir,*

$$AB = \left(A_i B^{(j)}\right)_{m \times p}$$

Teorema 3 (Asociativa)**.** *Si* $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times p}$ *y* $C = (c_{ij})_{p \times q}$*, entonces*

$$A(BC) = (AB)C$$

Prueba: Observe que las matrices $A(BC)$ y $(AB)C$ tienen el mismo tamaño $m \times q$. Sean $D = BC$, $E = AD$, $F = AB$ y $G = FC$. Para toda $i = 1, \ldots, m$ y toda $j = 1, \ldots, q$ se tiene

$$e_{ij} = A_i \cdot D^{(j)} \quad \text{y} \quad g_{ij} = F_i \cdot C^{(j)}$$

Pero,

$$D^{(j)} = \begin{pmatrix} B_1 \cdot C^{(j)} \\ B_2 \cdot C^{(j)} \\ \vdots \\ B_n \cdot C^{(j)} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F_i = \left(A_i \cdot B^{(1)}, A_i \cdot B^{(2)}, \ldots, A_i \cdot B^{(p)},\right),$$

luego,

$$e_{ij} = a_{i1}(B_1 \cdot C^{(j)}) + a_{i2}(B_2 \cdot C^{(j)}) + \cdots + a_{in}(B_n \cdot C^{(j)})$$
$$g_{ij} = (A_i \cdot B^{(1)})c_{1j} + (A_i \cdot B^{(2)})c_{2j} + \cdots + (A_i \cdot B^{(p)})c_{pj}$$

Entonces,

$$e_{ij} = a_{i1}(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1p}) \cdot \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{pj} \end{pmatrix} + a_{i2}(b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2p}) \cdot \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{pj} \end{pmatrix}$$

$$+ \cdots + a_{in}(b_{n1}, b_{n2}, \ldots, b_{np}) \cdot \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{pj} \end{pmatrix} = g_{ij}.$$

Teorema 4 (Propiedades distributivas)**.** *Si* $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times p}$, $C = (c_{ij})_{n\times p}$ *y* $D = (c_{ij})_{p\times q}$, *entonces*

$$A(B + C) = AB + AC \quad y \quad (B + C)D = BD + CD.$$

Teorema 5. *Si* $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times p}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$A(\lambda B) = \lambda(AB) = (\lambda A)B.$$

Teorema 6. *Si* $A = (a_{ij})_{m\times n}$, *entonces* $I_m A = A = AI_n$.

Teorema 7 (Transpuesta de un producto de matrices)**.** *Si* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *y* $B = (b_{ij})_{n\times p}$, *entonces*

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

Prueba: Observe que $(AB)^t$ es una matriz de tamaño $p \times m$, además, B^t es de tamaño $p\times n$ y A^t es de tamaño $n\times m$, luego $B^t A^t$ es una matriz de tamaño $p\times m$. Sean $C = (AB)^t$, $D = B^t$, $E = A^t$ y $F = DE$. Para toda $j = 1, \ldots, p$ y toda $i = 1, \ldots, m$ se tiene

$$c_{ji} = ij - \text{ésima componente de } AB = A_i B^{(j)},$$

$$f_{ji} = D_j E^{(i)} = (b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj}) \cdot \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}.$$

Así que, $c_{ji} = f_{ji}$. Por lo tanto, $(AB)^t = B^t A^t$.

Ejemplo 1: Para las matrices $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(i) Determine la matriz $C = AB - B^t A^t$.

(ii) Encuentre la matriz X tal que $A^t B^t X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ejemplo 2: Sea E_{ij} la matriz cuadrada de orden n que tiene 1 en la ij-ésima componente y cero en las otras componente, calcule las siguientes multiplicaciones:

(i) $E_{ij}E_{jk}$.

(ii) $E_{ij}E_{kr}$, cuando $j \neq k$.

Teorema 8. *Si* $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times p}$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ *y* $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$, *entonces*

1. $yA = y_1 A_1 + \cdots + y_m A_m$.
2. $Ax = x_1 A^{(1)} + \cdots + x_n A^{(n)}$.
3. $AB = A^{(1)} B_1 + \cdots + A^{(n)} B_n$.
4. $AB = \begin{pmatrix} AB^{(1)} & AB^{(2)} & \cdots & AB^{(n)} \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{pmatrix}$.
5. $AB = \begin{pmatrix} A_1 B \rightarrow \\ A_2 B \rightarrow \\ \vdots \\ A_m B \rightarrow \end{pmatrix}$.

0.1.6. Eliminación Gaussiana

Sea A una matriz de tamaño $m \times n$. A continuación se describen tres tipos de transformaciones que se pueden realizar con las filas de la matriz A, cada una de estas transformaciones se denomina **operación elemental de fila**:

- **Permutación:** Operación elemental que consiste en intercambiar dos filas de la matriz A. Con $A\ f_i \leftrightarrow f_j$ se denotará que se intercambiaron (permutaron) las filas i y j de A.

- **Eliminación:** Operación elemental que consiste en sustituir una fila de A por la fila que resulte al sumar a dicha fila un múltiplo escalar de otra. Con $A\ f_i \rightarrow f_i + \alpha f_j$ se denotará que la i-ésima fila de A se sustituye por la fila que resulte de sumar la i-ésima fila con α veces la j-ésima fila de A.

- **Multiplicación:** Operación elemental que consiste en sustituir una fila de A por α veces esa fila, donde α es un escalar no cero. Con $A\ f_i \rightarrow \alpha f_i$ se denotará que la i-ésima fila de A se sustituye por α veces la i-ésima fila.

Ejemplos:

- $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -2 \\ 6 & -4 & 3 & -3 \end{pmatrix} f_1 \leftrightarrow f_3 = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 5 & -2 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

- $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -2 \\ 6 & -4 & 3 & -3 \end{pmatrix} f_2 \to f_2 + f_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & -1 \\ 6 & -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$

- $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -2 \\ 6 & -4 & 3 & -3 \end{pmatrix} f_1 \to -3f_1 = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 12 & -3 \\ 1 & 2 & 5 & -2 \\ 6 & -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$

- $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2 \leftrightarrow f_1 \\ f_2 \to f_2 + 2f_1 \\ f_3 \to \frac{1}{6}f_3 \\ f_3 \to f_3 - f_1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{9}{2} \end{pmatrix}.$

Definición 11 (Matrices equivalentes por filas)**.** *Dos matrices A y B son equivalentes por filas, lo que se denota con $A \leftrightarrow B$, si la matriz B se puede obtener aplicando un número finito de operaciones elementales de fila sobre la matriz A.*

Teorema 9. *Si A, B y C son matrices del mismo tamaño, entonces*

1. *$A \leftrightarrow A$ (Reflexiva).*

2. *Si $A \leftrightarrow B$, entonces $B \leftrightarrow A$ (Simétrica).*

3. *Si $A \leftrightarrow B$ y $B \leftrightarrow C$, entonces $A \leftrightarrow C$ (Transitiva).*

Definición 12 (Matriz elemental)**.** *Sea E una matriz cuadrada de orden n. Se dice que E es una matriz elemental si E se obtiene aplicando una única operación elemental de fila sobre la matriz idéntica I_n.*

Utilizamos la siguiente notación:

1. **Matriz de permutación:** $P_{ij} = I_n \ f_i \leftrightarrow f_j$.

2. **Matriz de eliminación:** $E_{ij}(\alpha) = I_n \ f_i \to f_i + \alpha f_j$.

3. **Matriz de multiplicación:** $M_i(\alpha) = I_n \ f_i \to \alpha f_i$, donde $\alpha \neq 0$.

Ejemplo: Las siguientes son matrices elementales de orden 4.

- $P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $P_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $E_{24}(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $E_{43}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 1 \end{pmatrix}$
- $M_4(-\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Observación 2. Las matrices elementales tienen las siguientes características:

1. La ij-ésima componente de la matriz elemental $E_{ij}(\alpha)$, de orden n, es α y las otras componentes coinciden con las respectivas componentes de la matriz idéntica I_n.

2. La matriz elemental $M_i(\alpha)$, de orden n, es diagonal, su ii-ésima componente es α y las otras componentes coinciden con las respectivas componentes de la matriz idéntica I_n.

Teorema 10. *Si E es una matriz elemental de orden m y A es una matriz de tamaño $m \times n$, entonces el producto EA es igual a la matriz que se obtiene al aplicar sobre la matriz A la operación elemental que define a la matriz E, es decir,*

1. $P_{ij}A = A \; f_i \leftrightarrow f_j$.

2. $E_{ij}(\alpha)A = A \; f_i \to f_i + \alpha f_j$.

3. $M_i(\alpha)A = A \; f_i \to \alpha f_i$, *donde* $\alpha \neq 0$.

Definición 13 (Matriz escalonada)**.** *Una matriz U de tamaño $m \times n$ se llama escalonada si satisface las siguientes condiciones, en las que se denomina **pivote** a la primera componente distinta de cero de cada fila no nula:*

1. *Todas las filas que están encima de una fila no nula deben ser no nulas.*

2. *El pivote de una fila esta a la derecha del pivote de la fila anterior.*

3. *Para una columna con pivote, las entradas de dicha columna que estén debajo del pivote deben ser cero.*

Ejemplos: Las siguientes son matrices son escalonadas:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Definición 14 (Matriz escalonada reducida)**.** *Una matriz escalonada U es **escalonada reducida** si satisface las siguientes condiciones:*

1. *Todos los pivotes de U son iguales a* 1.

2. *En una columna pivotal, todas las entradas por encima del pivote son iguales a cero.*

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, es una matriz escalonada reducida.

Sea A una matriz de tamaño $m \times n$. El proceso de eliminación de Gauss es un método numérico que se utiliza para reducir la matriz A. Es decir, para llevar la matriz a la forma escalonada reducida. El método consta de dos fases:

1. Fase de escalonamiento.

2. Fase de reducción.

Pasos de la fase de escalonamiento:

(a) Ubíquese en la primera columna no nula de la matriz A.

(b) Si la componente de la primera fila en la primera columna no nula es cero, intercambie la primera fila por una fila inferior que no tenga cero en esa posición.

(c) Aplicando operaciones elementales del tipo eliminación, obtenga ceros debajo del pivote de la primera fila.

(d) Cubra la primera fila y la primera columna no nula columna y repita el proceso comenzando en el paso (a).

Pasos de la fase de reducción:

(a) Con la operación elemental apropiada, del tipo multiplicación, transformar en 1 el pivote de la última fila no nula de la matriz escalonada obtenida en la fase de escalonamiento.

(b) Aplicando operaciones elementales del tipo eliminación, obtenga ceros por encima del pivote de la última fila no nula.

(c) Cubra la última fila no nula y repita el proceso comenzando en el paso (a).

Ejercicios

1. Para cada una de las siguientes situaciones, defina las entradas de una matriz que permita almacenar la información correspondiente e indique el tamaño y el tipo de matriz.

   (1) La empresa $M\&H$ produce 10 tipos de productos en 7 plantas de producción. *Información:* Producción por tipo de producto en cada planta.

   (2) La Universidad de Nariño tiene 234 salones y un horario académico de 7:00 am a 9:00 pm. *Información:* Uso de los salones (ocupado o desocupado) en cada una de las horasdel horario académico.

   (3) Hay 320 puntos en el plano cartesiano. *Información:* Distancia entre cada punto y los demás.

2. Una compañia de piezas para autos produce bobinas, alternadores, bujías e imanes en dos plantas I y II. La matrices A y B representan la producción de las dos plantas en la primera y segunda quincena de agosto, respectivamente. Escribir una matriz $C = [c_{ij}]_{4\times 2}$ que represente la producción total de la compañia en el mes de agosto. (Las entradas de las dos matrices están organizadas según el orden en que se dió la información)

$$A = \begin{pmatrix} 30 & 50 \\ 25 & 60 \\ 800 & 720 \\ 25 & 30 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 15 & 25 \\ 30 & 60 \\ 960 & 800 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$$

   (1) Interprete C_1 y $C^{(2)}$.

   (2) Interprete c_{21} y c_{32}.

3. Sean $A = [a_{ij}]_{3\times 2}$, con $a_{ij} = i - 2j$ y $B = [b_{ij}]_{3\times 2}$, con $b_{ij} = j - i$. Determine:

   (1) Las componentes a_{11}, a_{31} y a_{22} de A.

   (2) Las matrices $A + B$, $B - A$, AB^t, B^tA, A^tB y BA^t.

   (3) Una matriz D tal que $A + 2B - 3D = B - A$.

   (4) Una matriz X tal que $X^t - 3B = (-2X + B^t - A^t)^t$.

4. Sea $A = [a_{ij}]_{50\times 4}$, con $a_{ij} = \cos\frac{i\pi}{4}$ y $B = [b_{ij}]_{4\times 4}$, con $b_{ij} = \operatorname{sen}\frac{j\pi}{4}$. Llame $C = AB$ y $D = BA^t$ determine:

   (1) C_{20}

   (2) C_{31}

   (1) $D^{(15)}$

   (2) $D^{(45)}$

5. Sean $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$. Encuentre

   (1) Una matriz D tal que $3D - 2CB = 0_{3\times3}$.

   (2) Una matriz E tal que $2E - 3BC = 0_{2\times2}$

   (1) Una matriz F tal que $2C^tB^t - F = I_2$

   (2) Una matriz G tal que $B^tC^t - 2G = I_3$

6. Sean A y B dos matrices triangulares superiores de orden 2. Qué tipo de matriz es $A + B$ y AB?

   (1) Resuelva para el caso en que A y B son matrices triangulares superiores de orden 3.

   (2) Resuelva para el caso en que A y B son matrices triangulares superiores de orden 4.

   (3) Resuelva para el caso en que A y B son matrices triangulares inferiores.

   (4) Resuelva para el caso en que A y B son matrices diagonales.

   (5) Qué puede concluir de los anteriores resultados?

7. Determine el valor de las constantes a, b y c de tal manera que se tenga las siguientes igualdades de matrices:

   (1) $\begin{pmatrix} 2 & 2a-b \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 5 \\ b-a & -1 \end{pmatrix}$

   (2) $\begin{pmatrix} 2 & a+3b & -1 \\ 3 & c^2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ a-b & 6c-9 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

8. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & x & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} y & -2 & 1 \\ 2 & y & y \\ x & 0 & y \end{pmatrix}$

   (1) Determine el valor de x para que la matriz A sea simétrica.

   (2) Determine el valor de x y el de y para que la matriz B sea antisimétrica.

   (3) Determine el valor de x y el de y para que la matriz $A + B$ sea triangular.

9. Sea A una matriz cuadrada. Justifique cada uno de los siguientes enunciados verdaderos:

(1) $A + A^t$ es simétrica.

(2) $A - A^t$ es antisimétrica.

(3) AA^t es simétrica.

10. En cada caso encuentre una matriz simétrica A y una matriz antisimétrica B tal que $A + B$ sea la matriz dada

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -5 & 6 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} \pi & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

11. Justifique las siguientes afirmaciones verdaderas:

(1) Si A es simétrica, entonces para todo escalar λ, la matriz λA es simétrica.

(2) Si A es una matriz antisimétrica, entonces para todo escalar λ, la matriz λA es antisimétrica.

(3) Si A y B son matrices simétricas del mismo orden, entonces la matriz $A + B$ es simétrica.

(4) Si A y B son matrices antisimétricas del mismo orden, entonces la matriz $A+B$ es antisimétrica.

(5) Si A es antisimétrica, entonces las matrices A^2, A^4, A^6 y A^k, con k entero positivo par, son simétricas.

(6) Si A es antisimétrica, entonces las matrices A^3, A^5, A^7 y A^k, con k entero positivo impar, son antisimétricas.

12. Sean A y B matrices antisimétricas del mismo orden, bajo qué condición la matriz AB es simétrica?

13. Sean A y B matrices cuadradas del mismo orden. Si A es simétrica y B es antisimétrica, bajo qué condición la matriz AB es antisimétrica?

14. Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden n. La traza de A, denotada con $tr(A)$, es la suma de las componentes de la diagonal principal de A, es decir,

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

(1) Calcule la traza de las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & y \\ x & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(2) Verifique que para todo entero positivo n y todo escalar λ se cumple que $tr(\lambda I_n) = \lambda n$.

(3) Calcule $tr(A)$ para la matriz $A = [a_{ij}]_{50\times 50}$, con $a_{ij} = \cos \frac{(i+j)\pi}{2}$.

(4) Calcule $tr(B)$ para la matriz $B = [b_{ij}]_{100\times 100}$, con $b_{ij} = \operatorname{sen} \frac{(i+j)\pi}{8}$.

(5) Sea A una matriz cuadrada para la cual $tr(A) = 2$. Determine la traza de la matriz $A + 4A + 9A + \cdots + 20^2 A$.

15. Suponga que A y B son matrices cuadradas de orden n. Utilice la definición de traza de una matriz para justificar los siguientes enunciados verdaderos:

(1) $tr(AB) = tr(BA)$

(2) No es posible que $AB - BA = I_n$

16. Una matriz triangular superior se denomina **triangular estrictamente superior** si todas las componentes de su diagonal principal son cero.

(1) Compruebe que toda matriz triangular estrictamente superior de orden 2 es nilpotente.

(2) Compruebe que toda matriz triangular estrictamente superior de orden 3 es nilpotente[1].

17. Compruebe que la matriz $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ es idempotente.

18. Suponga que B es una matriz idempotente de orden n. Compruebe que la matriz $I_n - B$ es idempotente.

19. Sean A y B matrices idempotentes del mismo orden. Suponga que A y B conmutan (i.e, $AB = BA$). Compruebe que AB es idempotente.

[1]De hecho, toda matriz triangular estrictamente superior es nilpotente.