Solución de sistemas de ecuaciones lineales

Magda Vibiana Mosquera Ledezma
Wilson Fernando Mutis Cantero
Universidad de Nariño

Semestre 2020-A

Forma matricial de un S.E.L

Definición (Recuerde que...)

Todo sistema de ecuaciones lineales (S.E.L) se puede expresar de la forma $AX = b$*, donde* A *es la matriz de coeficientes,* X *es el vector de incognitas y* b *es el vector de términos independientes, además, la matriz* $(A|b)$ *se denomina matriz aumentada del sistema y será de gran importancia en el proceso de solución de sistemas de ecuaciones lineales que estudiaremos a continuación.*

Forma matricial de un S.E.L

Ejemplo

Consideremos el siguiente S.E.L

$$\begin{cases} 2u + 4v + 3w &= 1 \\ v - w &= 0 \\ 3u + 5v + 7w &= 1 \end{cases}$$

Forma matricial de un S.E.L

Ejemplo

Consideremos el siguiente S.E.L

$$\begin{cases} 2u + 4v + 3w &= 1 \\ v - w &= 0 \\ 3u + 5v + 7w &= 1 \end{cases}$$

En este caso la matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Forma matricial de un S.E.L

Ejemplo

Consideremos el siguiente S.E.L

$$\begin{cases} 2u + 4v + 3w & = 1 \\ v - w & = 0 \\ 3u + 5v + 7w & = 1 \end{cases}$$

En este caso la matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

los vectores de incognitas y de terminos independientes son respectivamente

$$X = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Definición (Sistemas equivalentes)

Dos sistemas de ecuaciones lineales, del mismo tamaño y en las mismas incognitas, $AX = b$ y $CX = d$ son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

Definición (Sistemas equivalentes)

Dos sistemas de ecuaciones lineales, del mismo tamaño y en las mismas incognitas, $AX = b$ y $CX = d$ son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

Ejemplo

Por lo estudiado en su formación básica, el estudiante debería notar que los siguientes sistemas son equivalentes

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x - y & = 4 \\ x + y & = 5 \end{array}\right. \leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 2x - y & = 4 \\ 3x & = 9 \end{array}\right. \leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 6 - y & = 4 \\ x & = 3 \end{array}\right.$$

Solución de sistemas de ecuaciones lineales

Teorema

Dos sistemas de ecuaciones lineales $AX = b$ y $CX = d$, del mismo tamaño y en las mismas incognita, tienen el mismo conjunto solución si, y sólo si, sus matrices aumentadas $(A|b)$ y $(C|d)$ son equivalentes por filas.

Solución de sistemas de ecuaciones lineales

Teorema

Dos sistemas de ecuaciones lineales $AX = b$ *y* $CX = d$*, del mismo tamaño y en las mismas incognita, tienen el mismo conjunto solución si, y sólo si, sus matrices aumentadas* $(A|b)$ *y* $(C|d)$ *son equivalentes por filas.*

Para resolver el sistema $AX = b$ se realiza el siguiente procedimiento:

- Aplicamos la primera fase del proceso de eliminación gaussiana a la matriz aumentada $(A|b)$ y obtenemos una matriz escalonada $(U|c)$.

Solución de sistemas de ecuaciones lineales

Teorema

Dos sistemas de ecuaciones lineales $AX = b$ y $CX = d$, del mismo tamaño y en las mismas incognita, tienen el mismo conjunto solución si, y sólo si, sus matrices aumentadas $(A|b)$ y $(C|d)$ son equivalentes por filas.

Para resolver el sistema $AX = b$ se realiza el siguiente procedimiento:

- Aplicamos la primera fase del proceso de eliminación gaussiana a la matriz aumentada $(A|b)$ y obtenemos una matriz escalonada $(U|c)$.
- Si la columna c tiene pivote, el S.E.L asociado a la matriz aumentada $(U|c)$ tiene una ecuación de la forma

$$a_{k1}0 + a_{k2}0 + \cdots + a_{kn}0 = c_k,$$

con $c_k \neq 0$, que no tiene solución, por lo tanto, el sistema $AX = b$ es inconsistente.

Solución de un S.E.L

- Si la columna c no tiene pivote, el sistema es soluble, en este caso aplicamos la fase de reducción a la matriz $(U|c)$ para obtener la forma escalonada reducida $(E|r)$.
- Clasificamos las incognita del sistema $AX = b$ de la siguiente forma: Las incognitas asociadas a columnas con pivote en la matriz aumentada $(E|r)$ se denominan **básicas** y las otras incognitas se denominan **libres**. Si hay por lo menos una variable libre, el sistema $AX = b$ tiene infinitas soluciones, de lo contrario el sistema tiene solución única, es decir, un sistema soluble tiene solución única cuando todas sus incognitas son básicas.

Solución de un S.E.L

- Si la columna c no tiene pivote, el sistema es soluble, en este caso aplicamos la fase de reducción a la matriz $(U|c)$ para obtener la forma escalonada reducida $(E|r)$.
- Clasificamos las incognita del sistema $AX = b$ de la siguiente forma: Las incognitas asociadas a columnas con pivote en la matriz aumentada $(E|r)$ se denominan **básicas** y las otras incognitas se denominan **libres**. Si hay por lo menos una variable libre, el sistema $AX = b$ tiene infinitas soluciones, de lo contrario el sistema tiene solución única, es decir, un sistema soluble tiene solución única cuando todas sus incognitas son básicas.
- Escribimos el sistema asociado a la matriz $(E|r)$ y despejamos las incognitas básicas en función de las incognitas libres.

Ejemplos

Ejemplo

Solucionemos el siguiente S.E.L

$$\left\{\begin{array}{ccc} x+w-y-z & = & 1 \\ y+w-2x & = & -3 \\ 2x-y+z-2w & = & 3 \\ -x+2w-z & = & -2 \end{array}\right.$$

Ejemplos

Ejemplo

Solucionemos el siguiente S.E.L

$$\left\{\begin{array}{ccc} x+w-y-z & = & 1 \\ y+w-2x & = & -3 \\ 2x-y+z-2w & = & 3 \\ -x+2w-z & = & -2 \end{array}\right.$$

Solución: La matriz aumentada del sistema es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} f_2 \to f_2 - f_1 \\ f_3 \to f_3 + 2f_1 \\ f_4 \to f_4 - 2f_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Ejemplos

$$\begin{array}{c} f_3 \to f_3 + \frac{4}{3} f_2 \\ f_4 \to f_4 - f_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ejemplos

$$\begin{array}{c} f_3 \to f_3 + \frac{4}{3} f_2 \\ f_4 \to f_4 - f_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Observe que la columna de términos independientes no tiene pivote, esto significa que el sistema es soluble y para hallar todas las soluciones continuamos con el proceso, es decir, aplicamos la fase de reducción a la matriz anterior

Ejemplos

$$\begin{array}{c} f_3 \to f_3 + \frac{4}{3} f_2 \\ f_4 \to f_4 - f_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Observe que la columna de términos independientes no tiene pivote, esto significa que el sistema es soluble y para hallar todas las soluciones continuamos con el proceso, es decir, aplicamos la fase de reducción a la matriz anterior

$$\begin{array}{c} f_2 \to -\frac{1}{3} f_2 \\ f_3 \to -3 f_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ejemplos

$$\begin{array}{c} f_1 \to f_1 + f_3 \\ f_2 \to f_2 + \frac{2}{3} f_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \; f_1 \to f_1 - f_2 \; \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ejemplos

$$\begin{array}{c} f_1 \to f_1 + f_3 \\ f_2 \to f_2 + \frac{2}{3} f_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad f_1 \to f_1 - f_2 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ahora clasificamos las incognita

Incognitas básicas: w, x, y
Incognita libre: z

Ejemplos

$$\begin{array}{c} f_1 \rightarrow f_1 + f_3 \\ f_2 \rightarrow f_2 + \frac{2}{3} f_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad f_1 \rightarrow f_1 - f_2 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ahora clasificamos las incognita

Incognitas básicas: w, x, y
Incognita libre: z

Dado que hay una incognita libre, el sistema tiene infinitas soluciones

Ejemplos

Por último escribimos *el sistema reducido*, es decir, el sistema asociado a la forma escalonada reducida obtenida en el paso anterior y despejamos las incognitas básicas en función de la libre

$$\left\{\begin{array}{lcl} w-z & = & 0 \\ x-z & = & 2 \\ y-z & = & 1 \end{array}\right., \text{ o equivalentemente, } \left\{\begin{array}{lcl} w & = & z \\ x & = & 2+z \\ y & = & 1+z \end{array}\right.$$

El conjunto solución del sistema es

$$S=\left\{\begin{pmatrix} z \\ 2+z \\ 1+z \\ z \end{pmatrix} : z\in\mathbb{R}\right\}$$

Ejercicios

1. Resolver el sistema

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 & = 3 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 6x_4 & = -6 \\ 2x_1 - 4x_2 - 4x_4 + 2x_5 & = -4 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 - 7x_4 + 2x_5 & = -7 \end{cases}$$

2. Determine los valores reales de x de modo que el sistema de ecuaciones lineales dado tenga el número de soluciones indicado.
   - $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & x & 0 & -1 \\ 1 & x+1 & x & 1 \\ -2 & -x & 3 & 2 \end{array}\right)$. *Solución única*
   - $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -9 & 3 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & 2 & x^2 & \alpha \end{array}\right)$. *Solución única, infinitas soluciones y ninguna solución.*