

Una introducción a los números de Ramsey

Einar Yobany Ordoñez Yela

**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
SAN JUAN DE PASTO**

2019

Una introducción a los números de Ramsey

Einar Yobany Ordoñez Yela

**Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de
Licenciado en Matemáticas**

Asesor

**Wilson Fernando Mutis Caicedo
Doctor en Matemáticas**

**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
SAN JUAN DE PASTO**

2019

Nota de Responsabilidad

Todas las ideas y conclusiones aportadas en el siguiente trabajo son responsabilidad exclusiva de los autores.

Artículo 1^{ro} del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1966 emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de Aceptación

Wilson Fernando Mutis Caicedo

Director de Tesis

Jurado 1 (nombre)

Jurado

Jurado 2 (nombre)

Jurado

San Juan de Pasto, Febrero 24 de 2019

*Este trabajo está dedicado a:
Mi familia. Janeth Benavides,
Yobany*

Agradecimientos

Es ineluctable agradecer a todas las personas que inspiraron el desarrollo de este trabajo de grado. Especialmente a mi asesor, dado que su ayuda fue imprescindible para la realización de este documento. También quiero agradecer a mis profesores, a mi familia, a mis amigos y compañeros. Agradezco a todas estas personas por ayudarme durante esta etapa de mi formación. Gracias.

Resumen

En este trabajo se realiza una monografía sobre una teoría relativamente nueva y activa de las matemáticas, denominada teoría de Ramsey, esta teoría se describe sobre una combinación de teoría de conjuntos y combinatoria y se centra en la aparición de orden en una subestructura dada una estructura de un tamaño específico. El documento explora la teoría de Ramsey en el ámbito de la teoría de grafos y se centra en una rama denominada **“Números de Ramsey”**, en este sentido, se proporciona la prueba del teorema principal de Ramsey y de 7 de los 9 números exactos de Ramsey, adicionalmente, un método computacional en SAGEMATH para determinar los números de Ramsey en un intento por crear un aspecto accesible y fácil de entender sobre este tema.

Abstract

In the present work, we investigate the set of k -units in some commutative rings with identity. First of all, we study the set of k -units in \mathbb{Z}_n , in fields and in some group algebras, so we find the conditions under which these rings are Δ_k -rings, and for the case of the ring \mathbb{Z}_n we establish a connection between the concept of Δ_k -ring and the concept of Carmichael's number and two of its generalizations. Additionally, we present some results about the possible positive integers that can be the ratio of k -units modulo n , especially when $k = 2$. Finally, we study the cubic property of the diagonal in rings with identity.

Índice general

Introducción	VIII
1. Preliminares	1
1.1. Elementos y características de los grafos	1
1.2. Grafos Especiales	2
1.3. k-coloración y principio de Dirichlet	5
1.4. Grafos y 2-coloraciones	6
1.5. Teoría de números	8
2. Números de Ramsey	10
2.1. Teoría de Ramsey	11
2.1.1. Números de Ramsey para 2-coloraciones de grafos	14
2.2. Valores exactos para algunos números de Ramsey	17
2.2.1. Número de Ramsey $R(3,3)$	17
2.2.2. Número de Ramsey $R(3,4)$	18
2.2.3. Número de Ramsey $R(3,5)$	20
2.2.4. Número de Ramsey $R(4,4)$	22
2.2.5. Número de Ramsey $R(3,6)$	23
2.2.6. Número de Ramsey $R(3,7)$	29
3. Implementación de los números de Ramsey en SAGEMATH	51
3.1. Representación de las coloraciones en un grafo completo	51
3.2. Matrices de adyacencia	52
3.3. Buscando triángulos rojos	54
3.4. Buscando subgrafos monocromáticos	54
Conclusiones	58
Apéndice	59
Referencias	68

Introducción

“El desorden completo es imposible”.

Theodore S. Motzkin

Este trabajo de grado se enmarca dentro de una rama de las matemáticas denominada Teoría de Ramsey, aunque no existe una definición universal para ésta, se pueden dar dos definiciones generales que permiten proporcionar un mejor panorama sobre lo que tratará este documento. La primer definición radica en la frase de Theodore S. Motzkin, que enuncia que la teoría de Ramsey se basa en un orden final en medio de un caos aparente, sin embargo, una definición más adecuada para este documento es que la teoría de Ramsey se basa en la idea de que “cualquier estructura necesariamente contienen una subestructura ordenada” (ver [8]), es decir, la teoría de Ramsey es un campo de la matemática la cual enfatiza el orden en cosas tales como secuencias, grupos o grafos, este último es el más adecuado para lo que se quiere enfocar este documento es decir, grafos de un cierto orden que garantizan las existencia de subgrafos de otro orden menor.

Esta teoría lleva el nombre de Frank P. Ramsey, quien demostró su primer resultado en 1930, sin embargo, la mayoría de contribuciones provienen de Paul Erdos. En la actualidad esta teoría cuenta con muchas variaciones y se ha convertido en un área interesante para investigación, esto debido a que es una teoría que requiere poco vocabulario matemático para plantear preguntas elegantes, pero involucra una amplia variedad de técnicas para encontrar respuestas a estas preguntas.

El documento se divide en 3 capítulos; en el primer capítulo se dan a conocer las definiciones necesarias sobre teoría de números, teoría de grafos y coloraciones para abordar la teoría de Ramsey, además, algunas definiciones adicionales usadas en este trabajo de grado para facilitar las pruebas de los números de Ramsey. Para el segundo capítulo se presentan varias pruebas para el teorema de Ramsey hasta llegar al teorema de Ramsey para grafos y 2-coloraciones y con esto se presentan las pruebas detalladas para 7 de los 9 números exactos de Ramsey conocidos hasta la fecha, y finalmente, para el tercer capítulo se muestra un algoritmo para determinar numeros exactos de Ramsey diseñado por el autor basado en el artículo de Barton (ver [2]).

Notación

Dado un conjunto finito S , el cardinal de S se denota con $|S|$. El conjunto potencia de S es la clase de todos los subconjuntos de S y se denota $P(S)$. Además, para cada entero r tal que $0 \leq r \leq |S|$, con $P_r(S)$ denotará la clase de subconjuntos de S de cardinal r .

Finalmente, si n es un entero positivo $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ es el anillo de los enteros módulo n y $\mathbb{Z}_{\geq n}$ denotará el conjunto de los enteros mayores o iguales que n .

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, se presentan las definiciones y resultados básicos que permitirán el desarrollo del trabajo de grado, los cuales están enmarcados dentro de la teoría de números, la teoría de grafos y la combinatoria. Para familiarizarse un poco mas con esta teoria y sus resultados, se recomienda al lector consultar los libros ([12],[13],[20],[21]).

1.1. Elementos y características de los grafos

Definición 1.1. (Grafo). Un grafo es un par $G = (V(G), E(G))$ donde $V(G)$ es un conjunto finito no vacío y $E(G) \subseteq P_2(V(G))$. Los elementos de $V(G)$ se denominan vértices del grafo y los elementos de $E(G)$ aristas del grafo.

Ejemplo 1.2. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo, con

$$V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\} \text{ y } E(G) = \{\{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{b, g\}, \{c, f\}, \{d, f\}, \{d, g\}, \{g, h\}\}.$$

En la figura 1.1 se presenta gráficamente al grafo G , note que cada vértice se representa mediante un pequeño círculo y que cada arista por una curva que une los vértices de la arista.

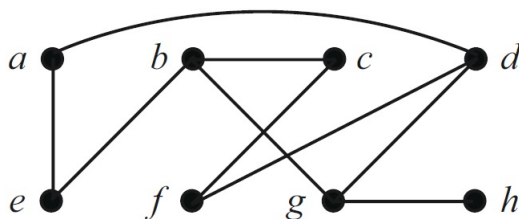


Figura 1.1: Representación gráfica de G

Definición 1.3. (Orden y tamaño de un grafo). El orden de un grafo $G = (V(G), E(G))$ es el cardinal del conjunto $V(G)$, y el tamaño de G es el cardinal del conjunto $E(G)$.

Ejemplo 1.4. El grafo $G = (V(G), E(G))$ del ejemplo 1.2, tiene orden 8 y tamaño 9.

Definición 1.5. (Grado de un vértice). Dado un vértice $v \in V(G)$ de un grafo $G = (V(G), E(G))$, el grado de v en G , denotado por $d(v)$, es el número de vértices w tal que $\{v, w\}$ es una arista de $E(G)$. El grado máximo del grafo G , denotado por Δ se define:

$$\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V(G)\},$$

similarmente, El grado mínimo del grafo G , denotado por δ se define:

$$\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V(G)\}.$$

Ejemplo 1.6. Sea G el grafo del ejemplo 1.2, y sea $v \in V(G)$, el grado del vértice v es 2. Además $\Delta(G) = 3$ y $\delta(G) = 1$.

Definición 1.7. (Vértice adyacente). Sea v un vértice de un grafo G . Un vértice w se dice que es adyacente a v si $\{v, w\}$ es una arista de $E(G)$.

Definición 1.8. (Vecindario de un vértice). El vecindario abierto de un vértice v en un grafo G es el conjunto $N(v)$ que consiste de todos los vértices adyacentes a v en G . El vecindario cerrado de v en G es el conjunto $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Un vértice v es universal cuando $N(v) = V(G) - \{v\}$ y un vértice v es aislado cuando $N(v) = \emptyset$.

Ejemplo 1.9. Para el grafo G del ejemplo 1.2, el vecindario abierto de un vértice $v \in V(G)$ es $N(v) = \{d, e\}$ y el vecindario cerrado $N[v] = \{a, d, e\}$. El grafo no tiene vértices universales ni vértices aislados.

Definición 1.10. (Conjunto independiente). Sea G un grafo. Un subconjunto $I \subseteq V(G)$ se denomina independiente si para todo $\{u, w\} \subseteq I$ se tiene $\{u, w\} \notin E(G)$. El cardinal del mayor conjunto independiente de G se denota $I(G)$.

Ejemplo 1.11. En el ejemplo 1.2, el conjunto $I = \{a, f, g\}$ es independiente. Además, $I(G) = 4$.

1.2. Grafos Especiales

Definición 1.12. (Grafo completo) Un grafo G es completo si contiene todas las aristas posibles, es decir, en un grafo completo todo vértice es adyacente a los otros vértices. Un grafo completo de orden n se denota por K_n .

A continuación se presentan las graficas de los grafos completos K_2, K_3 y K_5 .

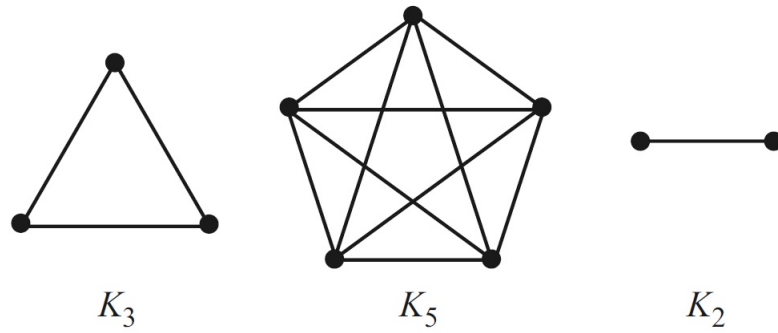


Figura 1.2: Ejemplos de grafos completos

Observación: Para todo vértice v del grafo completo K_n , se tiene

$$|N(v)| = \Delta(K_n) = \delta(K_n) = n - 1.$$

Definición 1.13. (Clique). Sea G un grafo. Un subconjunto $C \subseteq V(G)$ es un clique de G si para todo subconjunto $\{v, w\}$ de C se cumple que $\{v, w\} \in E(G)$. El tamaño del clique es el número de vértices que tiene. Además, $C(G)$ es el cardinal del mayor clique de G .

Ejemplo 1.14. En la figura 1.3 se puede notar que $C_1 = \{a, g, f\}$ y $C_2 = \{b, c, d, e\}$ son cliques de G . Además, $C(G) = 4$.

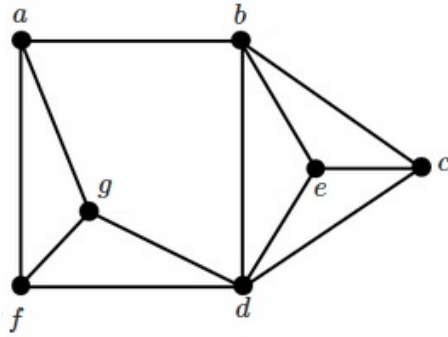
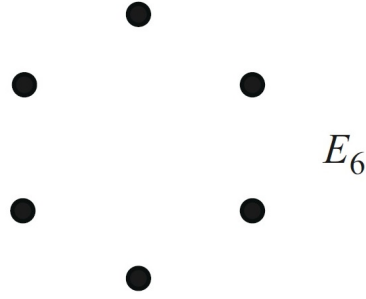


Figura 1.3: Ejemplo de cliques

Definición 1.15. (Grafo vacío). Un grafo vacío sobre n vértices, denotado por E_n , es un grafo de orden n donde $E = \emptyset$, es decir, todos los vértices son aislados.

Ejemplo 1.16. La figura 1.4 es el grafo vacío E_6 .

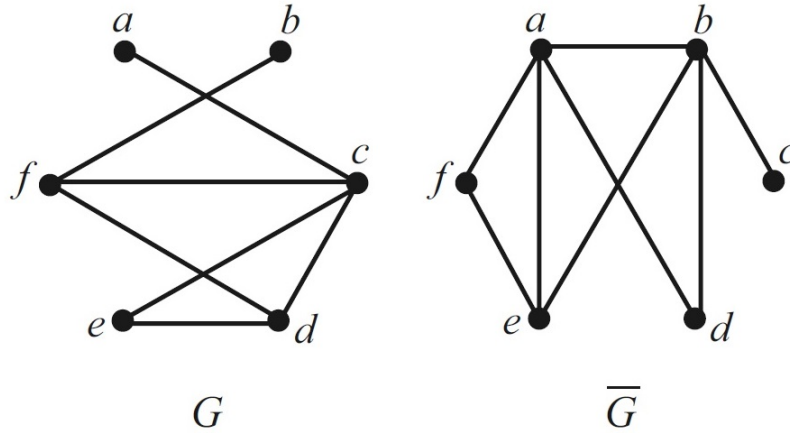
Figura 1.4: Ejemplo del grafo vacío E_6

Definición 1.17. (Complemento de un grafo). Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo de orden n . El complemento de G , es el grafo $\overline{G} = (V(G), \overline{E(G)})$, donde $\overline{E(G)}$ es el conjunto de aristas del grafo completo K_n que no están en $E(G)$.

Ejemplo 1.18. En la figura 1.5 se presentan un grafo G y su complemento \overline{G} . Observe que

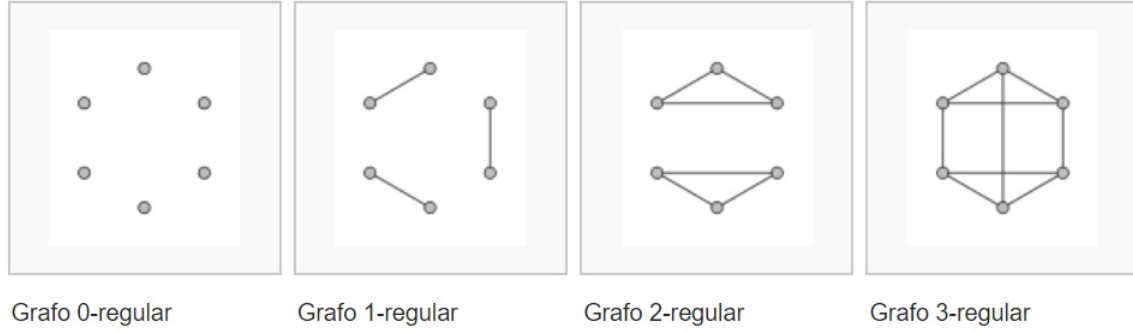
$$E(G) = \{\{a, c\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{c, f\}, \{b, f\}, \{e, d\}, \{d, f\}\} \text{ y}$$

$$\overline{E(G)} = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{a, f\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{f, e\}\}.$$

Figura 1.5: Un grafo G y su complemento \overline{G} .

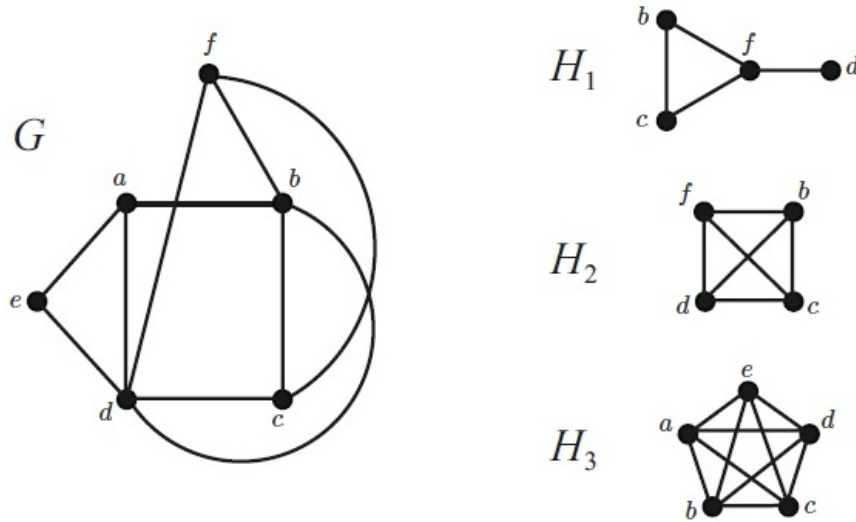
Definición 1.19. (k -regular). Sea k un entero no negativo, un grafo G es k -regular, si cada vértice de G tiene grado k . En particular, todo grafo vacío es 0-regular y para $n > 1$, el grafo K_n es $(n - 1)$ -regular.

Ejemplo 1.20. En la figura 1.6 se presentan los grafos k -regular para $k = 0, 1, 2, 3$.

Figura 1.6: Ejemplo de grafos k -regulares

Definición 1.21. (Subgrafo). Un grafo H es un subgrafo de un grafo G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Esto se denota por $H \subseteq G$.

Ejemplo 1.22. En la Figura 1.7, H_1 y H_2 son subgrafos de G , pero H_3 no lo es.

Figura 1.7: H_1 y H_2 son subgrafos de G

1.3. k -coloración y principio de Dirichlet

Definición 1.23. (k -coloración de $P_r(S)$). Sea $C = \{1, 2, \dots, k\}$ un conjunto de k colores y sean S un conjunto finito y $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Una k -coloración de $P_r(S)$ es una función $\chi: P_r(S) \rightarrow C$. Para $A \subseteq S$, con $|A| \geq r$, se dice que $P_r(A)$ es monocromático de color i si $P_r(A) \subseteq \chi^{-1}(i)$.

Una k -coloración de $P_r(S)$ puede interpretarse como una partición¹ $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ de $P_r(S)$, donde cada conjunto C_i está definido como $C_i = \chi^{-1}(i)$, para $i = 1, 2, 3, \dots, k$. Los conjuntos C_i se denominan clases de coloración. Una k -coloración está completamente determinada conociendo sus k clases de coloración C_1, C_2, \dots, C_k . Por este motivo es común referirse a una k -coloración mediante sus clases de coloración. Observe que $P_r(A)$ es monocromático de color i si $P_r(A) \subseteq C_i$.

Definición 1.24. (k-coloración de G). Sea $C = \{1, 2, \dots, k\}$ un conjunto de k colores y G un grafo. Una k -coloración de G es una función $\chi : E(G) \rightarrow C$, que asigna a cada arista en $E(G)$ un color en C .

Similarmente a la k -coloración de $P_r(S)$, una k -coloración de un grafo G puede interpretarse como una partición $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ del conjunto de aristas $E(G)$, donde $C_i = \chi^{-1}(i)$, para $i = 1, 2, 3, \dots, k$.

Teorema 1.25. (Principio de Dirichlet). Sean $p, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Si se distribuyen $np + 1$ objetos sobre n cajas, entonces alguna de las cajas debe contener al menos $p + 1$ objetos.

Demostración. Suponga lo contrario, es decir, todas las cajas tienen a los más p objetos. Sea p_i el número de objetos que hay en la i -ésima caja, $i = 1, 2, \dots, n$, entonces el número total de objetos satisface la desigualdad

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n \leq np < np + 1.$$

■

Teorema 1.26. (Principio de Dirichlet forma general). Sean q_1, q_2, \dots, q_n enteros positivos. Si $q_1 + q_2 + \dots + q_n - n + 1$ objetos son distribuidos en n cajas, entonces la primera caja contiene al menos q_1 objetos, o la segunda caja contiene al menos q_2 objetos, ..., o la n -ésima caja contiene al menos q_n objetos.

Demostración. Suponga lo contrario, es decir, si p_i denota el número de objetos que hay en la i -ésima caja, $i = 1, 2, \dots, n$, entonces $p_i < q_i - 1$, luego el número total de objetos satisface

$$\sum_{i=1}^n p_i \leq \sum_{i=1}^n (q_i - 1) = \sum_{i=1}^n q_i - n < \sum_{i=1}^n q_i - n + 1.$$

■

1.4. Grafos y 2-coloraciones

El cálculo de los números de Ramsey que se conocen hasta el momento ha sido posible definiendo una adecuada 2-coloración de grafos completos. Para entender esta técnica es necesario dar algunas definiciones adicionales de la teoría de grafos usando 2-coloraciones. En lo que sigue, χ denota una 2-coloración del grafo completo K_n con conjunto de colores $C = \{\text{rojo}, \text{azul}\}$.

¹Estrictamente no se trata de una partición en el sentido usual, pues se permite que alguna clase C_i sea vacía.

Definición 1.27. (Vértices adyacentes para 2-coloraciones). Dos vértices v, w del grafo K_n son adyacentes (con respecto a χ) si $\chi(\{v, w\}) = \text{rojo}$.

Definición 1.28. (Vecindario rojo y azul de un vértice). Para un vértice v de K_n , se define el vecindario abierto rojo como el conjunto $N_r(v)$ que contiene todos los vértices i adyacentes a v . Similarmente, se define vecindario abierto azul como el conjunto $N_a(v)$ que consiste de todos los vértices j del grafo tales que $\chi(\{v, j\}) = \text{azul}$. Así mismo, se define vecindario cerrado rojo de v como $N_r[v] = N_r(v) \cup \{v\}$ y vecindario cerrado azul de v como $N_a[v] = N_a(v) \cup \{v\}$.

Definición 1.29. (grado rojo y azul de un vértice). Sea v un vértice de K_n , el grado-rojo de v denotado como $d_r(v)$ se define como $d_r(v) = |N_r(v)|$. Similarmente el grado-azul de v se define $d_a(v) = |N_a(v)|$. El grado-rojo máximo de G denotado por $\Delta_r(G)$ y el grado-rojo mínimo denotado por $\delta_r(G)$ se definen como $\Delta_r(G) = \max\{d_r(v) | v \in V\}$ y $\delta_r(G) = \min\{d_r(v) | v \in V\}$ respectivamente. Similarmente, se definen el grado-azul máximo $\Delta_a(G)$ y el grado-azul mínimo $\delta_a(G)$ como $\Delta_a(G) = \max\{d_a(v) | v \in V\}$ y $\delta_a(G) = \min\{d_a(v) | v \in V\}$.

Definición 1.30. Sean G un grafo completo, H un subconjunto propio no vacío de $V(G)$ y sea $v \in (V(G) - H)$. Con $N_r(H, v)$ se denota el conjunto de vértices $u \in H$ tal que $\chi(\{u, v\}) = \text{rojo}$, es decir

$$N_r(H, v) = \{u \in H : \chi(\{u, v\}) = \text{rojo}\}.$$

Definición 1.31. (Conjunto independiente) Sean G un grafo completo y $H \subseteq V(G)$, se dice que H es un conjunto independiente de G con respecto a χ si el subgrafo completo con el conjunto de vértices H tiene todas sus aristas de color azul. Además, $I_\chi(G) = t$ denota el máximo número de vértices tal que G contiene un subgrafo K_t monocromático de color azul, es decir el máximo conjunto independiente con respecto a χ .

Definición 1.32. (vértice aislado) Sea p un vértice de K_n . Se dice que p es un vértice aislado si $N_r(p) = \emptyset$, es decir, $d_r(p) = 0$.

Definición 1.33. (camino rojo y azul) Un camino rojo (azul) es una sucesión de vértices v_1, \dots, v_k , tal que $\chi(\{v_i, v_{i+1}\}) = \text{rojo (azul)}$ para todo $i = 1, \dots, k-1$. El camino v_1, \dots, v_k es simple si $v_i \neq v_j$, cuando $i \neq j$.

Definición 1.34. (Ciclo rojo y azul) Un ciclo rojo (azul) es un camino rojo (azul) simple v, v_1, \dots, v_k tal que $\chi(\{v, v_k\}) = \text{rojo (azul)}$. La longitud del ciclo v, v_1, \dots, v_k es $k+1$, es decir, el número de vértices en el ciclo.

Definición 1.35. (Circunferencia) La circunferencia de un grafo es la longitud del ciclo rojo más corto. Si el grafo no contiene ningún ciclo rojo, se define la circunferencia del grafo como infinito.

Definición 1.36. (Grafo conexo) Un grafo G se denomina conexo si cualesquier par de vértices distintos v_1, v_2 de K_n se pueden conectar por medio de un camino rojo.

1.5. Teoría de números

Definición 1.37. Se dice que un entero b es divisible por un entero $a \neq 0$, denotado por $a \mid b$, si existe un entero c tal que $b = ac$. Por $a \nmid b$ se denota que b no es divisible por a .²

Definición 1.38. (Congruencia) Sea n un entero fijo. Dos enteros a y b se dice que son congruentes módulo n , denotado por $a \equiv b \pmod{n}$, si $n \mid a - b$, es decir si existe un entero k tal que $a - b = kn$.

Teorema 1.39. (Propiedades de las congruencias) Si $n > 0$ y a, b, c enteros arbitrarios, entonces se tiene las siguientes propiedades:

- 1) $a \equiv a \pmod{n}$
- 2) Si $a \equiv b \pmod{n}$, entonces $b \equiv a \pmod{n}$
- 3) Si $a \equiv b \pmod{n}$ y $b \equiv c \pmod{n}$, entonces $a \equiv c \pmod{n}$
- 4) Si $a \equiv b \pmod{n}$ y $c \equiv d \pmod{n}$, entonces $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ y $ac \equiv bd \pmod{n}$.
- 5) Si $a \equiv b \pmod{n}$, entonces $a + c \equiv b + c \pmod{n}$ y $ac \equiv bc \pmod{n}$.
- 6) Si $ac \equiv bc \pmod{n}$ y $\text{mcd}(n, c) = 1$, entonces $a \equiv b \pmod{n}$.

Definición 1.40. (Residuos cuadráticos) Sean p un primo impar y t un entero tal que $p \nmid t$. Se dice que t es un residuo cuadrático módulo p , si existe un entero x tal que $x^2 \equiv t \pmod{p}$. En caso contrario t es un residuo no cuadrático módulo p . Además, la expresión $\left(\frac{t}{p}\right)$ se denomina símbolo de Legendre y se define

$$\left(\frac{t}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \mid t \\ 1 & \text{si } t \text{ es residuo cuadrático módulo } p \\ -1 & \text{si } t \text{ es no residuo cuadrático módulo } p \end{cases}.$$

El símbolo de Legendre satisface las siguientes propiedades:

- (i) $\left(\frac{0}{p}\right) = 0$ y $\left(\frac{1}{p}\right) = 1$.
- (ii) si $a \equiv b \pmod{p}$, entonces $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$.
- (iii) $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right)$.

Teorema 1.41. (Propiedades de residuos cuadráticos) Sea p un primo impar, con $Q_p \subseteq \mathbb{Z}_p$ se denotará el conjunto de residuos cuadráticos módulo p y con $N_p \subseteq \mathbb{Z}_p$ el conjunto de residuos no cuadráticos módulo p . Se cumplen los siguientes enunciados:

²Decir que b es divisible por un entero a , es lo mismo que, b es múltiplo de a o que a divide a b .

- (i) Si $a, b \in Q_p$, entonces $ab \in Q_p$.
- (ii) Si $a, b \in N_p$, entonces $ab \in Q_p$.
- (iii) Si $a \in Q_p$ y $b \in N_p$, entonces $ab \in N_p$.
- (iv) Si $a \in Q_p$, entonces $a^{-1} \in Q_p$ y si $a \in N_p$, entonces $a^{-1} \in N_p$.
- (v) Si $\overline{Q_p} = Q_p \cap \{1, 2, \dots, p-1\}$ y $\overline{N_p} = N_p \cap \{1, 2, \dots, p-1\}$, entonces $\overline{Q_p} = \frac{p-1}{2} = \overline{N_p}$.

Definición 1.42. (Residuos cúbicos) Sea p un número primo impar y a un entero tal que $p \nmid a$. Se dice que a es un residuo cubico módulo p , si existe un entero x tal que $x^3 \equiv a \pmod{p}$. En caso contrario se dice que a es un residuo no cúbico módulo p .

Capítulo 2

Números de Ramsey

En 1930, Frank Ramsey (ver [18]), estudiando un problema de lógica formal, probó un teorema que en la actualidad se conoce como teorema de Ramsey. Este teorema dio origen a la teoría de Ramsey que es un campo de estudio dentro de la teoría combinatoria el cual ha tenido grandes avances gracias los trabajos de Paul Erdos (1913 – 1996).

El teorema de Ramsey garantiza la existencia de ciertos enteros positivos denominados números de Ramsey. Determinar exactamente estos números no es un proceso fácil, a menudo se requiere de una larga enumeración de todos los casos posibles, por esta razón, es un problema abierto de la teoría de números y la combinatoria. Aunque se conocen pocos valores exactos de estos números, se han hecho grandes avances en encontrar cotas de los números desconocidos.

Los números de Ramsey se pueden aplicar para la solución de diferentes problemas de la matemática, por ejemplo, en el teorema de la amistad, el cual establece lo siguiente: *En cualquier grupo de seis personas, existen por lo menos tres personas que son mutuamente conocidas o por lo menos tres que son mutuamente desconocidas.* La solución a este problema es consecuencia de la prueba del primer número de Ramsey no trivial $R(3, 3) = 6$ (ver 2.7).

A continuación se muestra una tabla donde se presentan los números de Ramsey conocidos hasta el momento y las cotas de algunos números de Ramsey desconocidos.

–Al final del capítulo 2 dar algunas aplicaciones de los números de Ramsey.

Tabla 2.1: Valores y cotas para $R(m, n)$, $m, n \leq 10$

m,n	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6 [10]	9 [10]	14 [10]	18 [3]	23 [9]	28 [16]	36 [11]	40 42
4		18 [10]	25 [17]	36 41	49 61	59 84	73 115	92 149
5			43 48	58 87	80 143	101 216	133 316	149 442
6				102 165	115 298	134 495	183 780	204 1171
7					205 540	217 1031	252 1713	293 2826
8						282 1870	329 3583	343 6090
9							565 6588	581 12677
10								798 23556

Fuente: Small Ramsey Numbers - Radziszowski, 2017.

2.1. Teoría de Ramsey

Teorema 2.1. (*Ramsey para $k = 2$*):

Sea r un entero positivo. Si $p, q \geq r$, entonces, existe un entero positivo N tal que para todo conjunto finito S con $|S| \geq N$ se cumple lo siguiente: en cualquier 2-coloración $\{C_1, C_2\}$ de $P_r(S)$, existe un subconjunto S_1 de S de cardinal p tal que $P_r(S) \subseteq C_1$ o bien existe un subconjunto S_2 de S de cardinal q tal que $P_r(S) \subseteq C_2$.

Demostración. Se probará por inducción sobre p, q y r que el número de Ramsey $R(p, q; r)$ existe. Inicialmente se probará que $R(p, q; 1) = p + q - 1$. En efecto, sea S un conjunto tal que $|S| = p + q - 1$. Tomando las clases de coloración C_1 y C_2 como las cajas en el principio de Dirichlet forma general (ver 1.26) y los subconjuntos de S de cardinal 1 como los objetos se garantiza la existencia de por lo menos p elementos en C_1 o por lo menos q elementos en C_2 . Si $\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_p\} \in C_1$, tomando $S_1 = \bigcup_{i=1}^p \{x_i\}$ se tiene $P_1(S_1) \subseteq C_1$. Si $\{y_1\}, \{y_2\}, \dots, \{y_q\} \in C_2$, tomando $S_2 = \bigcup_{i=1}^q \{y_i\}$ se tiene $P_1(S_2) \subseteq C_2$, en consecuencia $R(p, q; 1) \leq p + q - 1$. Además, de la demostración del principio de Dirichlet forma general $p + q - 1$ es el menor entero con el que se asegura que habrá al menos p subconjuntos de cardinal 1 en C_1 o al menos q subconjuntos de cardinal 1 en C_2 . De manera que $R(p, q; 1) \geq p + q - 1$, por tanto $R(p, q; 1) = p + q - 1$.

A continuación se probará que $R(r, q; r) = q$. Sea S un conjunto tal que $|S| = q$ y sea $\{C_1, C_2\}$ una 2-coloración de $P_r(S)$. Si $C_1 = \emptyset$, entonces $P_r(S) \subseteq C_2$ y tomando $S_2 = S$ se tiene un subconjunto de cardinal q tal que $P_r(S_2) \subseteq C_2$. Si $C_1 \neq \emptyset$, se puede elegir $S_1 \in C_1$, luego $S_1 \subseteq S$ y $|S_1| = r$, entonces, $P_r(S_1) = \{S_1\} \subseteq C_1$. Con esto se llega a que $R(r, q; r) \leq q$. Ahora, sea S un conjunto tal que $|S| \leq q - 1$. Tomando las clases de coloración $C_1 = \emptyset$ y $C_2 = P_r(S)$ se define una 2-coloración de $P_r(S)$ para la cual no existe $S_1 \subseteq S$ de cardinal r tal que $P_r(S_1) \subseteq C_1$ y tampoco existe $S_2 \subseteq S$ de cardinal q tal que $P_r(S_2) \subseteq C_2$, luego $R(r, q; r) \geq q$ y por tanto $R(r, q; r) = q$. Similarmente, se prueba que $R(r, p; r) = p$.

Para continuar, sean $p, q, r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ tales que $p, q \geq r$ y por hipótesis inductiva supoga que:

- i) $R(p, q; r - 1)$ existe para todo p, q
- ii) Existe el número $q_1 = R(p, q - 1; r)$ para todo p, r
- iii) Existe el número $p_1 = R(p - 1, q; r)$ para todo q, r .

Se probará que también se cumple para r, p y q . Por contradicción suponga que no existe el número $R(p, q; r)$. Por el item (i) de la hipótesis de inducción existe el número $R(p_1, q_1; r - 1)$. Sea $N > R(p_1, q_1; r - 1)$ y sean S un conjunto tal que $|S| = N$ y $x \in S$, además, considere el conjunto $S_1 = S - \{x\}$, luego $|S_1| = N - 1 \geq R(p_1, q_1; r - 1)$. Si $\{C, D\}$ es una 2-coloración de $P_r(S)$ y se define:

$$C_1 = \{A \in C : x \notin A\} \text{ y } D_1 = \{A \in D : x \notin A\}$$

entonces, $\{C_1, D_1\}$ es una 2-coloración de $P_r(S_1)$ ya que $S_1 = S - \{x\}$. Considere los siguientes conjuntos:

$$C_x = \{A \in P_{r-1}(S_1) : A \cup \{x\} \in C\} \text{ y } D_x = \{A \in P_{r-1}(S_1) : A \cup \{x\} \in D\}.$$

Para cualquier $A \in P_{r-1}(S_1)$ se tiene que $A \cup \{x\} \in P_r(S)$, luego $A \cup \{x\} \in C$ o $A \cup \{x\} \in D$, lo que implica que $A \in C_x$ o $A \in D_x$, entonces $\{C_x, D_x\}$ es una 2-coloración de $P_{r-1}(S_1)$. Ahora, aplicando (i) de la hipótesis inductiva y como $|S_1| \geq R(p_1, q_1; r - 1)$ se debe cumplir que existe un subconjunto U de S_1 tal que $|U| = p_1$ donde $P_{r-1}(U) \subseteq C_x$ o existe un subconjunto $V \subseteq S_1$ tal que $|V| = q_1$ donde $P_{r-1}(V) \subseteq D_x$. En el primer caso, dado que $p_1 = R(p - 1, q; r)$ y $\{C_1, D_1\}$ es una 2-coloración de $P_r(S_1)$, por hipótesis (iii) existe ya sea un $U_1 \subseteq U$ de cardinal $p - 1$ tal que $P_r(U_1) \subseteq C_1 \subseteq C$ o un $U_2 \subseteq U$ de cardinal q tal que $P_r(U_2) \subseteq D_1 \subseteq D$. Si existe el subconjunto U_1 luego, $U_1 \cup \{x\}$ es un subconjunto de S de cardinal p , si $A \subseteq U_1 \cup \{x\}$ es un subconjunto de cardinal r , se tiene que, si $x \notin A$, entonces $A \subseteq U_1$, luego $A \in C$; si $x \in A$, entonces $A - \{x\}$ es un subconjunto de U de cardinal $r - 1$, así, $A - \{x\} \in C_x$, por tanto $A = (A - \{x\}) \cup \{x\} \in C$, de lo anterior se tiene que $U_1 \cup \{x\}$ es un subconjunto de S de cardinal r para el que $P_r(U_1 \cup \{x\}) \subseteq C$. Por otro lado, si existe un $U_2 \subseteq U$ de cardinal q , entonces el propio U_2 es un subconjunto de S de cardinal q tal que $P_r(U_2) \subseteq D$.

Para el segundo caso, como $q_1 = R(p, q - 1; r)$ y $\{C_1, D_1\}$ es una 2-coloración de $P_r(S_1)$, luego por

(ii) de la hipótesis inductiva, existe ya sea un $U_1 \subseteq U$ de cardinal p tal que $P_r(U_1) \subseteq C_1 \subseteq C$ o un subconjunto $U_2 \subseteq U$ tal que $P_r(U_2) \subseteq D_1 \subseteq D$. Observe que en el primer caso ya se tiene un subconjunto U_1 de cardinal p tal que $P_r(U_1) \subseteq C$ y para el segundo caso, se tiene un subconjunto $U_2 \cup \{x\} \subseteq S$ de cardinal q para el cual $P_r(U_2 \cup \{x\}) \subseteq D$. De lo anterior se sigue que

$$R(p, q; r) \leq R(R(p-1, q; r), R(p, q-1; r); r-1) + 1$$

Por la hipótesis de inducción se tiene que $R(R(p-1, q; r), R(p, q-1; r); r-1) + 1$ existe y es finito, por tanto $R(p, q; r)$ existe para cada $p, q, r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ con $p, q \geq r$. ■

Teorema 2.2. (Ramsey): Sean k, r enteros positivos. Si $q_1, q_2, \dots, q_k \geq r$, entonces, existe un entero positivo N tal que para todo conjunto finito S con $|S| \geq N$ se cumple lo siguiente: para cada k -coloración $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ de $P_r(S)$ existe al menos un $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ y un subconjunto S_i de S de cardinal q_i tal que $P_r(S_i) \subseteq C_i$.

El menor entero N_0 que satisface el teorema se llama número de Ramsey y se denota como $R(q_1, q_2, \dots, q_k; r)$.

Demostración. Se probará por inducción sobre el número de colores k que el número de Ramsey $R(q_1, q_2, \dots, q_k; r)$ existe. Por el teorema 2.1 es suficiente tomar $k \geq 3$. Inicialmente se prueba que $R(q_1; r) = q_1$. En efecto, sea S un conjunto, con $|S| \geq q_1$, tomando una 1-coloración $\{C_1\}$ de $P_r(S)$ y un subconjunto $S_1 \subseteq S$, tal que $|S_1| = q_1$ se tiene $P_r(S_1) \subseteq P_r(S) \subseteq C_1$. Ahora, suponga que el teorema se cumple para $(k-1)$ colores, es decir, para cualesquier enteros $r \geq 1$ y q_1, q_2, \dots, q_{k-1} tal que $q_i \geq r$ para $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ el número de Ramsey $R(q_1, q_2, \dots, q_{k-1}; r)$ existe, se probará que también se cumple para k colores. Por teorema 2.1 existe $p_{k-1} = R(q_{k-1}, q_k; r)$ y por hipótesis de inducción existe el número de Ramsey $N = R(q_1, \dots, q_{k-2}, p_{k-1}; r)$. Sea S un conjunto finito tal que $|S| \geq N$ y sea $\{C_1, \dots, C_{k-1}, C_k\}$ una k -coloración de $P_r(S)$ y defina la $(k-1)$ -coloración $\{C_1, \dots, C_{k-2}, D_{k-1}\}$ de $P_r(S)$ donde $D_{k-1} = C_{k-1} \cup C_k$, entonces existe al menos un subconjunto S_i de S de cardinal q_i tal que $P_r(S_i) \subseteq C_i$, donde $i \in \{1, 2, \dots, k-2\}$ o un subconjunto U_{k-1} de S de cardinal p_{k-1} tal que $P_r(U_{k-1}) \subseteq D_{k-1}$, en el primer caso el teorema se seguiría de inmediato, para el segundo caso, considere las siguientes clases de coloración

$$E_{k-1} = \{A \in P_r(U_{k-1}) : A \in C_{k-1}\} \text{ y } E_k = \{A \in P_r(U_{k-1}) : A \in C_k\}$$

observe que $\{E_{k-1}, E_k\}$ es una 2-coloración de $P_r(U_{k-1})$. Como $|U_{k-1}| = p_{k-1} = R(q_{k-1}, q_k; r)$, entonces existe ya sea un subconjunto $S_{k-1} \subseteq U_{k-1}$ de cardinal q_{k-1} tal que $P_r(S_{k-1}) \subseteq E_{k-1}$ o un subconjunto $S_k \subseteq U_{k-1}$ de cardinal q_k tal que $P_r(S_k) \subseteq E_k$. Note que por construcción $E_{k-1} \subseteq C_{k-1}$ y $E_k \subseteq C_k$, lo que implica que existe ya sea un subconjunto $S_k \subseteq S$ de cardinal q_{k-1} tal que $P_r(S_{k-1}) \subseteq C_{k-1}$ o un subconjunto $S_k \subseteq S$ de cardinal q_k tal que $P_r(S_k) \subseteq C_k$. De lo anterior se tiene que

$$R(q_1, q_2, \dots, q_k; r) \leq R(q_1, q_2, \dots, q_{k-2}, p_{k-1}; r)$$

y por el principio del buen orden el número $R(q_1, q_2, \dots, q_k; r)$ existe. ■

En la prueba del teorema de Ramsey no se da una formula explicita para calcular el valor exacto de los números de Ramsey, el teorema asegura la existencia y proporciona una cota superior para cada uno de estos números, lo cual ocurre a menudo en las demostraciones de la teoría de Ramsey, solo proporcionan cotas superiores para el tamaño de las estructuras combinatorias de interés. Encontrar este tipo de números es uno de los problemas mas importantes en la teoría de Ramsey.

Por otra parte, como se mencionó anteriormente, la teoría de Ramsey puede verse como una generalización del principio de Dirichlet generalizado, esto pasa cuando $r = 1$ en el teorema de Ramsey, en este caso las clases de coloración hacen el papel de las cajas y el enunciado queda de la siguiente forma:

Teorema 2.3. Sean $q_1, q_2, \dots, q_k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Si $N = R(q_1, q_2, \dots, q_k; 1)$ objetos se distribuyen en k cajas C_1, C_2, \dots, C_k , entonces se cumple lo siguiente: hay al menos q_1 objetos en la caja C_1 , o hay al menos q_2 objetos en la caja C_2, \dots , o hay al menos q_k objetos en la caja C_k . Además se tiene que:

$$R(q_1, q_2, \dots, q_k; 1) = q_1 + q_2 + \dots + q_k - k + 1.$$

La formulación habitual del principio del Dirichlet en forma simple se escribe, en términos de números de Ramsey, como

$$R(\underbrace{2, 2, \dots, 2}_{t\text{-veces}}; 1) = t + 1$$

Es decir, $t + 1$ es el mínimo entero que permite asegurar, que si se distribuyen ese número de objetos en t cajas, al menos una de ellas contiene dos o más objetos.

Conocida la existencia de los números de Ramsey es común preguntarse por el valor exacto de estos números, ¿Cómo encontrarlos?, ¿Qué métodos utilizar para su cálculo?, etc. Para esto, los métodos por medio de los cuales se han obtenido avances significativos en el cálculo de los números de Ramsey de la forma $R(p_1, p_2, \dots, p_k; 2)$ se basan en la teoría de grafos. Utilizando esta teoría, hasta el momento se ha logrado establecer el valor exacto de nueve números de Ramsey para 2-coloraciones y un número de Ramsey para 3-coloraciones. En adelante los números de la forma $R(p_1, p_2, \dots, p_k; 2)$ se denorarán con $R(p_1, p_2, \dots, p_k)$.

2.1.1. Números de Ramsey para 2-coloraciones de grafos

Dados $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, el número de Ramsey $N = R(p, q)$ se puede interpretar como el menor entero positivo tal que cualquier 2-coloración de las aristas del grafo completo K_N , usando los colores rojo y azul, contiene al menos un subgrafo completo K_p monocromático de color rojo o contiene al menos un subgrafo completo K_q monocromático de color azul.

A continuación se presentan algunos resultados generales que serán de gran utilidad para establecer los valores exactos de algunos números de Ramsey y para acotar superiormente otros de estos números.

Teorema 2.4. *Para los números de Ramsey se verifica.*

- 1) $R(q_1, q_2, \dots, q_k; 1) = q_1 + q_2 + \dots + q_k - k + 1$.
- 2) $R(p, r; r) = R(r, p; r) = p$.
- 3) $R(p, q; r) \leq R(R(p-1, q; r), R(p, q-1; r); r-1) + 1$.
- 4) $R(p, q) \leq R(p-1, q) + R(p, q-1)$.
- 5) Si $R(p-1, q)$ y $R(p, q-1)$ son números pares, entonces $R(p, q) < R(p-1, q) + R(p, q-1)$.

Demostración. El ítem (1) es consecuencia del principio de Dirichlet general, los ítems (2) y (3) se justificaron en la prueba del teorema 2.1. Para el ítem (4) sea $t = R(p-1, q) + R(p, q-1)$ y sea $\chi : E \rightarrow \{\text{rojo}, \text{azul}\}$ una 2-coloración del grafo completo $K_t = (V, E)$. Se probará que K_t contiene un subgrafo K_p monocromático de color rojo o un subgrafo K_q monocromático de color azul. Sea v un vértice de K_t , luego

$$d_r(v) + d_a(v) = t - 1 = R(p-1, q) + R(p, q-1) - 1.$$

Observe que, $d_r(v) < R(p-1, q)$ y $d_a(v) < R(p, q-1)$ implican que $d_r(v) + d_a(v) < t - 1$, lo cual no es posible. Así que $d_r(v) \geq R(p-1, q)$ o $d_a(v) \geq R(p, q-1)$.

Si $d_r(v) \geq R(p-1, q)$, considere un clique formado por $R(p-1, q)$ vértices del conjunto $N_r(v)$, por definición de los números de Ramsey existe algún subgrafo K_{p-1} monocromático de color rojo o algún subgrafo K_q monocromático de color azul. En el segundo caso ya se tiene un clique K_q de K_t con todas sus aristas de color azul. Para el primer caso, considere el clique K_p que se forma al conectar los $p-1$ vértices del subgrafo monocromático rojo K_{p-1} con el vértice v , dado que todas estas aristas que se añaden son de color rojo, el clique K_p es monocromático de color rojo.

Si $d_a(v) \geq R(p, q-1)$, un procedimiento análogo al anterior garantiza la existencia de un subgrafo K_p monocromático de color rojo o un subgrafo K_q monocromático de color azul. Esto finaliza la prueba del ítem (4). Para el ítem (5), suponga que $R(p, q) = R(p-1, q) + R(p, q-1)$ y que los números $R(p-1, q), R(p, q-1)$ son pares. Sea $n = R(p-1, q) + R(p, q-1) - 1$, luego $n < R(p, q)$ y por definición de números de Ramsey existe una 2-coloración del grafo completo K_n que no contiene ni un subgrafo K_p monocromático rojo ni un subgrafo K_q monocromático azul. Sea v un vértice del grafo K_n , luego

$$d_r(v) + d_a(v) + 1 = n = R(p-1, q) + R(p, q-1) - 1,$$

con un argumento similar al del ítem (4) se obtienen dos posibilidades: $d_r(v) \geq R(p-1, q) - 1$ o $d_a(v) \geq R(p, q-1) - 1$. Ahora, suponga que $d_r(v) > R(p-1, q) - 1$, en este caso, se puede considerar el subgrafo completo formado por $R(p-1, q)$ vértices de $N_r(v)$. Por teorema de Ramsey y dado que no existe un subgrafo K_q monocromático azul, debe existir un subgrafo K_{p-1} monocromático rojo, sin embargo, $K_{p-1} \cup \{v\}$ forma un subgrafo K_p monocromático rojo en K_n , lo que contradice la escogencia de la 2-coloración de K_n , por tanto $d_r(v) = R(p-1, q) - 1$, y de forma similar se obtiene $d_a(v) = R(p, q-1) - 1$. Dado que el vértice v era arbitrario, se concluye que cada vértice de K_n esta conectado a los otros $n-1$ vértices por $R(p-1, q) - 1$ aristas rojas y $R(p, q-1) - 1$ aristas azules.

Lema 2.5. (Apretón de manos) Si χ es una 2-coloración de un grafo $G = (V(G), E(G))$, entonces la suma de los grados-rojos es igual al doble del número de aristas rojas (E denota el número total de aristas rojas):

$$\sum_{v \in V(G)} d_r(v) = 2|E|.$$

Para la prueba de este lema ver "Theorem 2.2" del libro de Wilson ([1]).

Por el lema anterior, el total de aristas rojas en K_n esta dado por

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} (R(p-1, q) - 1) = \frac{n}{2} (R(p, q) - 1) = \frac{1}{2} ((R(p-1, q) + R(p, q-1) - 1) (R(p-1, q) - 1),$$

sin embargo $R(p-1, q)$ y $R(p, q-1)$ son pares, por tanto $|E|$ no puede ser entero, lo que contradice la igualdad. Así, $R(p, q) < R(p-1, q) + R(p, q-1)$. ■

Corolario 2.6. Para cualesquier $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ se tiene,

$$R(p, q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}$$

Demostración. Se prueba por inducción sobre la suma de los dos parámetros $n = p + q$. Note que se cumple para $n = 4$,

$$R(2, 2) = 2 \leq \binom{2+2-2}{2-1} = 2.$$

Ahora, suponiendo que el teorema se cumple para $n-1$, es decir, $R(p, q-1)$ y $R(p-1, q)$, se probará que también se cumple para $R(p, q)$. En efecto, utilizando el teorema 2.4, ítem (4), se tiene

$$\begin{aligned} R(p, q) &\leq R(p-1, q) + R(p, q-1) \\ &\leq \binom{p+q-3}{p-2} + \binom{p+q-3}{p-1}. \end{aligned}$$

Usando la regla de Pascal

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

se obtiene que

$$R(p, q) \leq \binom{p+q-3}{p-2} + \binom{p+q-3}{p-1} = \binom{p+q-2}{p-1}.$$

■

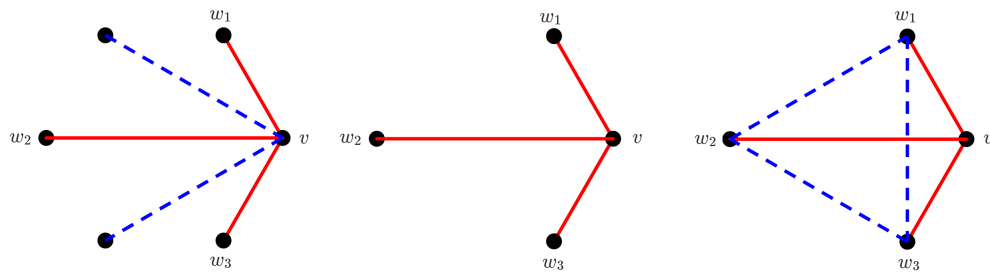
2.2. Valores exactos para algunos números de Ramsey

A continuación se presenta la demostración de siete de los números de Ramsey conocidos hasta la fecha. En general, el método para probar que $N = R(p, q)$ es el siguiente: Utilizando el teorema 2.4 se muestra que $R(p, q) \leq N$, luego, se define una 2-coloración del grafo completo K_{N-1} en la cual no existe ni un K_p monocromático de color rojo ni un K_q monocromático de color azul.

2.2.1. Número de Ramsey $R(3, 3)$

Teorema 2.7. $R(3, 3) = 6$

Demostración. Considere el grafo completo K_6 y sea v uno de sus vértices, luego $d(v) = 5$. Por el principio del palomar, por lo menos tres aristas con extremo v tienen el mismo color y sin pérdida de generalidad, se puede suponer que estas tres aristas son de color rojo, como se ilustra en el siguiente grafico:



Si por lo menos una de las aristas $\{w_1, w_2\}$, $\{w_1, w_3\}$ o $\{w_2, w_3\}$ es de color rojo, se tiene un subgrafo K_3 monocromático de color rojo, en caso contrario, se obtiene un subgrafo K_3 monocromático de color azul. Así que $R(3, 3) \leq 6$ ¹.

¹Esta desigualdad también se obtiene utilizando el ítem (4) del teorema 2.4

Para probar que $R(3, 3) > 5$, considere el grafo completo K_5 con vértices v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y la siguiente 2-coloración,

$$\chi : E(K_5) \rightarrow \{\text{rojo}, \text{azul}\},$$

dada por

$$\chi(\{v_1, v_2\}) = \chi(\{v_2, v_3\}) = \chi(\{v_3, v_4\}) = \chi(\{v_4, v_5\}) = \chi(\{v_5, v_1\}) = \text{rojo}$$

$$\chi(\{v, w\}) = \text{azul}, \text{ siempre que } \{v, w\} \notin \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_1\}\}$$

Gráficamente se tiene,

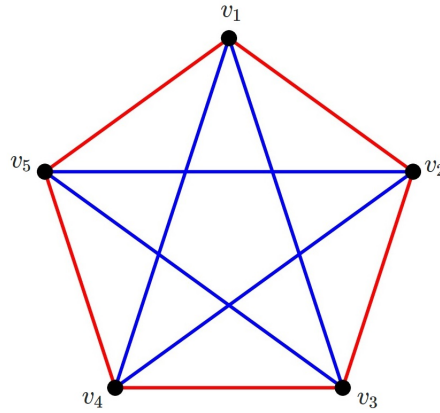


Figura 2.1: 2-coloración de K_5

En esta 2-coloración no hay ningún clique K_3 monocromático.

■

2.2.2. Número de Ramsey $R(3,4)$

Teorema 2.8. $R(3, 4) = 9$

Demostración. Dado que $R(2, 4) = 4$ y $R(3, 3) = 6$, por el ítem (5) de teorema 2.4, se tiene $R(3, 4) < R(2, 4) + R(3, 3) = 4 + 6 = 10$. Así, $R(3, 4) \leq 9$. Para probar que $R(3, 4) > 8$, considere el grafo K_8 con vértices etiquetados en el grupo cíclico \mathbb{Z}_8 y la 2-coloración dada por:

$\chi : E(K_8) \rightarrow \{\text{rojo}, \text{azul}\}$, dada por

$$\chi(\{i, j\}) = \begin{cases} \text{rojo} & \text{si } i - j \in \{1, 4, 7\} \\ \text{azul} & \text{si } i - j \in \{2, 3, 5, 6\} \end{cases}$$

Gráficamente se tiene,

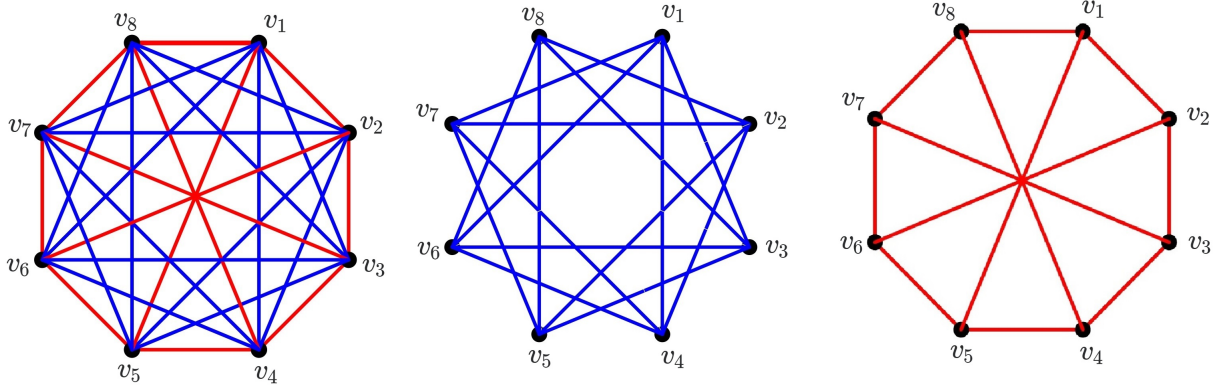
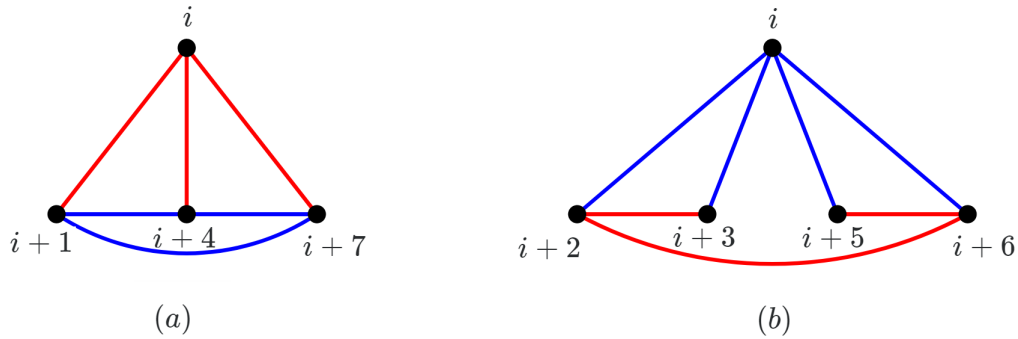


Figura 2.2: 2-coloración de K_8 (izquierda). K_8 azul y K_8 rojo para una inspección mas cercana



Sea i uno de los vértices del grafo K_8 , por la definición de la 2-coloración χ , $N_r(i) = \{i+k : k = 1, 4, 7\}$, sin embargo

$$\chi(\{i+1, i+4\}) = \chi(\{i+1, i+7\}) = \chi(\{i+7, i+4\}) = \text{azul},$$

por lo tanto, no existe un subgrafo K_3 monocromático de color rojo con vértice $i \in \{0, 1, \dots, 7\}$ (ver figura 2.2.2(a)). Ahora, suponga que existe un subgrafo K_4 monocromático de color azul y que i es uno de sus vértices, luego, $N_a(i) = \{i+k : k = 2, 3, 5, 6\}$. Observe que $i+2$ no puede ser otro vértice del subgrafo K_4 monocromático azul ya que

$$\chi(\{i+2, i+3\}) = \chi(\{i+2, i+6\}) = \text{rojo},$$

entonces los vértices de este clique son $\{i, i+3, i+5, i+6\}$, pero esto es una contradicción ya que $\chi(\{i+5, i+6\}) = \text{rojo}$ (ver figura 2.2.2(b)). Por tanto, no existe un subgrafo K_3 de color rojo, ni un subgrafo K_4 monocromático de color azul en esta 2-coloración del grafo K_8 . Por lo tanto, $R(3, 4) > 8$.

■

2.2.3. Número de Ramsey $R(3,5)$

Teorema 2.9. $R(3,5) = 14$

Demostración. Dado que $R(3,4) = 9$ y $R(2,5) = 5$, entonces por item (4) del teorema 2.4, se tiene $R(3,5) \leq R(3,4) + R(2,5) = 14$. Para probar que $R(3,5) > 13$, se definirá una 2-coloración del grafo K_{13} que no contiene un subgrafo K_3 rojo, ni un subgrafo K_5 azul. Considere los elementos del cuerpo \mathbb{Z}_{13} como los vértices del grafo K_{13} . Usando la definición (1.40), se puede verificar que $Q_{13} = \{1, 5, 8, 12\}$. Ahora, considere la 2-coloración χ definida de la siguiente forma:

$$\chi(\{i, j\}) = \begin{cases} \text{rojo} & \text{si } j - i \in Q_{13} \\ \text{azul} & \text{si } j - i \notin Q_{13} \end{cases}$$

La función χ esta bien definida porque

$$j - i \in Q_{13}, \text{ si y solo si, } i - j \in Q_{13}.$$

La representación gráfica de la 2-coloración χ es la siguiente:

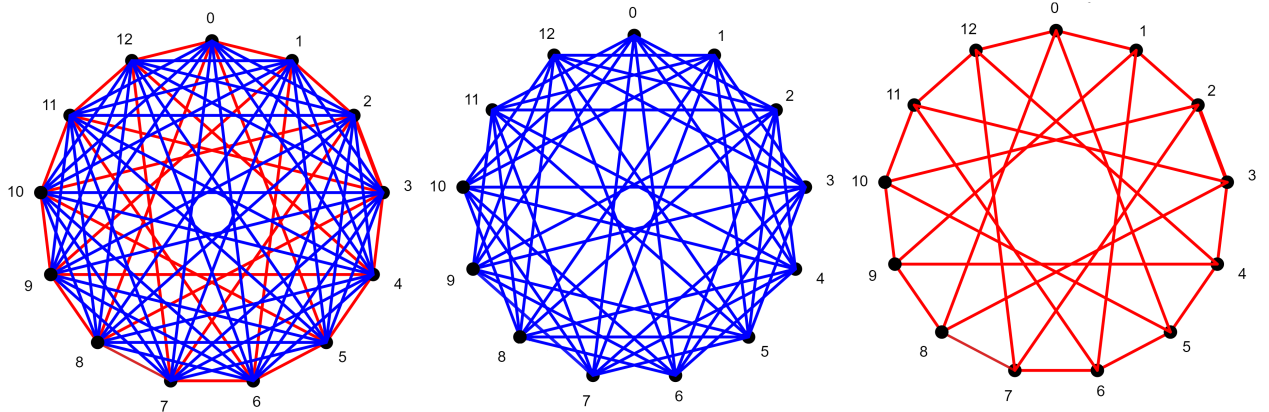
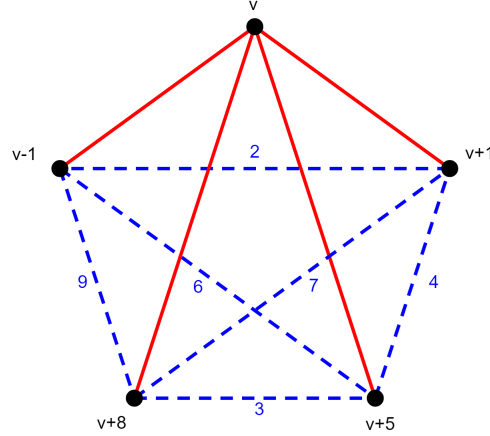


Figura 2.3: 2-coloración de K_{13} (izquierda). K_{13} azul y K_{13} rojo para una inspección mas cercana

Ahora, se probará que que no existe un subgrafo K_3 monocromático de color rojo. En efecto, elija 3 vértices cualesquiera del grafo K_{13} , sea v uno de estos vértices, por definición

$$N_r(v) = \{v + 1, v + 5, v + 8, v + 12\}.$$

Para $u, w \in \{v + 1, v + 5, v + 8, v + 12\}$, se tiene que las diferencias $w - u \in \{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$, entonces $\chi(\{u, w\}) = \text{azul}$, por tanto no puede existir un subgrafo K_3 monocromático rojo con esta 2-coloración de K_{13} .



Suponga que esta 2-coloración contiene un subgrafo K_5 monocromático de color azul y sea v uno de los vértices de este clique. Luego,

$$N_a(v) = \{v + i : i = 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11\}$$

Suponga que el segundo vértice del subgrafo K_5 es $v+2$, entonces los tres vértices restantes se deben seleccionar del conjunto

$$N_a(v) - \{v + 3, v + 7, v + 10\} = \{v + 4, v + 6, v + 9, v + 11\}$$

sin embargo,

$$(v + 9) - (v + 4) = (v + 11) - (v + 6) = 5 \in Q_{13},$$

por tanto $\chi(\{v + 4, v + 9\}) = \chi(\{v + 6, v + 11\}) = \text{rojo}$. De lo anterior, se tiene que $v + 2$ no puede ser uno de los vértices del subgrafo K_5 monocromático azul. Ahora, Suponga que el segundo vértice de este subgrafo K_5 es $v + 3$, entonces los tres vértices restantes se deben seleccionar del conjunto

$$N_a(v) - \{v + 4, v + 11\} = \{v + 6, v + 7, v + 9, v + 10\}$$

sin embargo,

$$(v + 7) - (v + 6) = (v + 10) - (v + 9) = 1 \in Q_{13}$$

por tanto $\chi(\{v + 6, v + 7\}) = \chi(\{v + 9, v + 10\}) = \text{rojo}$. De lo anterior, se tiene que $v + 3$ no puede ser uno de los vértices del subgrafo K_5 monocromático azul. Similarmente, suponiendo que el segundo vértice del subgrafo K_5 monocromático azul es $v + 4$, los otros vértices se deben seleccionar de $N_a(v) - \{v + 9\} = \{v + 6, v + 7, v + 10, v + 11\}$. Pero $(v + 7) - (v + 6) = (v + 11) - (v + 10) = 1 \in Q_{13}$, con esto se tiene que $v + 4$ no puede ser un vértice de K_5 azul. Si $v + 6$ es el segundo vértice del subgrafo K_5 monocromático azul, los otros vértices se deben seleccionar de $N_a(v) - \{v + 7, v + 11\} = \{v + 9, v + 10\}$, pero con cuatro vértices imposible formar el subgrafo K_5 monocromático azul. Finalmente, solo

quedan los vértices $\{v+7, v+9, v+10, v+11\}$ como los únicos candidatos para los 4 vértices restantes del subgrafo K_5 monocromático azul, sin embargo $v+10$ y $v+11$ son vértices consecutivos, con esto, se debe eliminar uno de ellos de la lista, haciendo imposible la construcción del subgrafo K_5 monocromático azul. ■

2.2.4. Número de Ramsey $R(4,4)$

Teorema 2.10. $R(4,4) = 18$

Demostración. Dado que $R(3,4) = R(4,3) = 9$, entonces aplicando item (4) de teorema (2.4), se tiene $R(4,4) \leq R(4,3) + R(3,4) = 18$. Para probar que $R(4,4) > 17$, considere los elementos del cuerpo \mathbb{Z}_{17} como los vértices del grafo K_{17} . Usando la definición (1.40) $Q_{17} = \{1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16\}$. Ahora, considere la 2-coloración χ definida de la siguiente forma:

$$\chi(\{i, j\}) = \begin{cases} \text{rojo} & \text{si } j - i \in Q_{17} \\ \text{azul} & \text{si } j - i \notin Q_{17} \end{cases}$$

Esta función esta bien definida por que

$$x - y \equiv a^2 \pmod{17}, \text{ si y solo si, } y - x = (4a)^2 \pmod{17}.$$

La representación gráfica de esta 2-coloración χ es la siguiente:

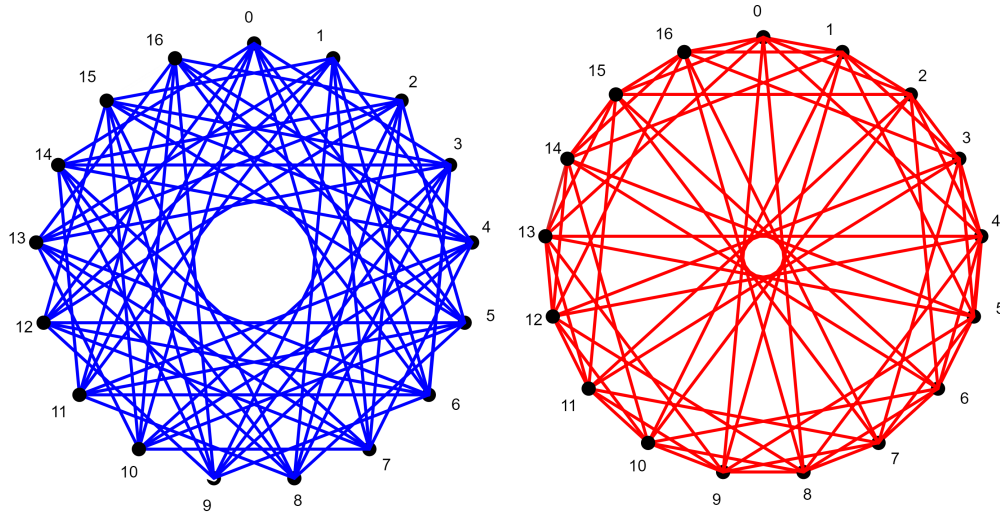


Figura 2.4: 2-coloración de K_{17} . K_{17} azul (izquierda) y K_{17} rojo (derecha) para una inspección mas cercana

Suponga que existe un subgrafo K_4 monocromático en la 2-coloración χ , donde los cuatro vértices son $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_{17}$, luego los elementos del conjunto $A = \{a - b, a - c, a - d, b - c, b - d, c - d\}$ son

todos residuos cuadráticos o ninguno lo es. Dado que $(a - b) \in \mathbb{Z}_{17} - \{0\}$, entonces existe su inverso $x = (a - b)^{-1} \in \mathbb{Z}_{17}$. Al multiplicar cada elemento del conjunto A por x se obtiene el conjunto $Ax = \{1, (a - c)x, (a - d)x, (b - c)x, (b - d)x, (c - d)x\}$ y por teorema 1.41 cada elemento de Ax es un residuo cuadrático. Sean $B = (a - d)x$ y $C = (a - c)x$, se tiene

$$\begin{aligned}(b - c)x &= ((a - c) - (a - b))x = (a - c)x - (a - b)x = C - 1 \\(b - d)x &= ((a - d) - (a - b))x = (a - d)x - (a - b)x = B - 1 \\(c - d)x &= ((b - d) - (b - c))x = (b - d)x - (b - c)x = B - C\end{aligned}$$

Luego, $Ax = \{1, C, B, C - 1, B - 1, B - C\} \subseteq \mathbb{Q}_p$, entonces

$$C - 1, B - 1 \in \{1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16\},$$

luego,

$$C, B \in \{2, 3, 5, 9, 10, 14, 16, 0\} \cap \mathbb{Q}_p = \{2, 9, 16\},$$

no obstante, $B - C \in \{14, 7, 3, 10\} \cap \mathbb{Q}_p = \emptyset$, lo que es una contradicción. Por tanto, no puede existir un clique K_4 monocromático del mismo color en la 2-coloración χ de K_{17} . Así, $R(4, 4) > 17$. ■

2.2.5. Número de Ramsey $R(3, 6)$

A continuación se probará que $R(3, 6) = 18$, para esto se usará el siguiente lema

Lema 2.11. Sea H un grafo completo con 13 vértices. Si χ es una 2-coloración de H tal que no contiene un clique K_3 monocromático rojo ni un clique K_5 monocromático azul, entonces para todo vértices $u \in V(H)$ se tiene $d_r(u) = 4$.

Demostración. Sean $H = K_{13}$ un grafo completo y χ una 2-coloración de H la cual no contiene un clique K_3 monocromático rojo ni un clique K_5 monocromático azul. Sea $u \in V(H)$ y considere $N_r(u) = \{u_1, u_2, \dots, u_t\}$, dado que $\chi(\{u_i, u_j\}) = \text{azul}$, entonces $t = d_r(u) \leq 4$. Ahora, suponga que existe $x \in V(H)$ tal que $d_r(x) \leq 3$ y considere el subgrafo completo H' generado por los vértices del conjunto $W = V(H) - N_r[x]$, entonces

$$|W| \geq 13 - (t + 1) = 12 - 3 = 9$$

Por teorema 2.8 se conoce que $R(3, 4) = 9$ y dado que H' no contiene un clique K_3 monocromático rojo, entonces deben existir cuatro vértices $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 \in W$ los cuales forman un clique K_4 monocromático azul, lo que es una contradicción porque el conjunto $\{u, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$ formaría un clique K_5 monocromático azul de H . Por lo tanto, $d_r(u) = 4$. ■

Teorema 2.12. $R(3, 6) = 18$

Demostración. Por item (5) del teorema (2.4) se tiene

$$R(3, 6) < R(2, 6) + R(3, 5) = 6 + 14 = 20.$$

Sin embargo, esta cota no es optima, de hecho, a continuación se prueba por contradicción que $R(3, 6) \leq 18$. En efecto, sea $G = (V(G), E(G))$ el grafo completo con 18 vértices y suponga que existe una 2-coloración χ del grafo G la cual no contiene ni un clique K_3 monocromático rojo ni un clique K_6 monocromático azul, entonces se tienen los siguientes lemas:

Lema 2.13. Para todo vértice $v \in V(G)$, se tiene que $4 \leq d_r(v) \leq 5$

Demostración. Sea $v \in V(G)$ y suponga que $N_r(v) = \{s_1, s_2, \dots, s_t\}$, con esto $d_r(v) = t$. Como $\chi(\{v, s_i\}) = \text{rojo}$ para $s_i \in N_r(v)$ y no existe ningún clique K_3 monocromático rojo, entonces

$$\chi(\{s_i, s_j\}) = \text{azul}, \text{ para todo } 1 \leq i < j \leq t.$$

Así, los vértices de $N_r(v)$ forman un subgrafo K_t monocromático azul de G y por hipótesis no puede existir un K_6 azul en G , por tanto $t \leq 5$. Por otro lado, si $t \leq 3$, considere el subgrafo completo generado por los vértices del conjunto $W = V(G) - N_r[v]$, entonces

$$|W| = |V(G) - N_r[v]| = 18 - (t + 1) = 17 - t \geq 17 - 3 = 14.$$

Por teorema (2.9) se conoce que $R(3, 5) = 14$ y dado que no existe ningún subgrafo K_3 monocromático rojo, entonces deben existir cinco vértices en W los cuales forman un subgrafo K_5 monocromático azul. Sean y_1, y_2, y_3, y_4 y y_5 estos vértices, como $\chi(\{v, y_i\}) = \text{azul}$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, se tiene que el conjunto de vértices $\{v, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ forman un subgrafo K_6 monocromático azul en G , lo que contradice la escogencia de la 2-coloración χ . Por tanto $t \geq 4$. ■

Lema 2.14. Para todos los vértices $v \in V(G)$ se tiene, $d_r(v) = 5$.

Demostración. Por lema anterior, para todo $v \in V(G)$, $4 \leq d_r(v) \leq 5$. Ahora, suponga que existe un vértice $u \in V(G)$ tal que $d_r(u) = 4$ y considere el subgrafo completo H con 13 vértices generado por el conjunto de vértices $V(G) - N_r[u]$. Claramente, H no contiene un clique K_3 monocromático rojo. Además, si H contiene un clique K_5 monocromático azul, entonces los vértices de este clique K_5 junto con el vértice u formarían un clique K_6 monocromático azul en G , lo que es una contradicción. Así, el grafo H satisface las hipótesis del lema 2.11, luego para cada $x \in V(H)$ se tiene $|H \cap N_r(x)| = 4$. Ahora, sea $z \in N_r(u)$, dado que $4 \leq d_r(z) \leq 5$, deben existir al menos tres vértices $z_1, z_2, z_3 \in H$ tal que

$$\chi(\{z, z_i\}) = \text{rojo}, \text{ para } i = 1, 2, 3,$$

asimismo, $\chi(\{z_i, z_j\}) = \text{azul}$ para $i \neq j$, de otro modo, se formaría un subgrafo K_3 monocromático rojo. Además, por lo anterior,

$$|H \cap N_r(z_i)| = 4, \text{ para } i = 1, 2, 3$$

así que, $d_r(z_i) = 5$ para $i = 1, 2, 3$, esto implica que $N_r(z_i) \cap N_r(u) = \{z\}$ para $i = 1, 2, 3$, lo cual es una contradicción ya que los vértices del conjunto $(N_r(u) - \{z\}) \cup \{z_1, z_2, z_3\}$ forman un subgrafo K_6 monocromático azul en G . Esto prueba que para cualquier $v \in V(G)$, $d_r(v) = 5$. ■

Lema 2.15. Para cualquier par de vértices $u, v \in V(G)$, donde $\chi(\{u, v\}) = \text{azul}$, se cumple que

$$1 \leq |N_r(u) \cap N_r(v)| \leq 2.$$

Demostración. Sean $u, v \in V(G)$ donde $\chi(\{u, v\}) = \text{azul}$ y $N_r(u) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$. Suponga que $N_r(u) \cap N_r(v) = \emptyset$, entonces $\chi(\{v, u_i\}) = \text{azul}$, para $i = 1, \dots, 5$, y de esta forma el conjunto de vértices $\{v, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ generan un subgrafo completo K_6 monocromático azul en G , lo que es una contradicción, por tanto $|N_r(u) \cap N_r(v)| \geq 1$. Ahora, suponga que $|N_r(u) \cap N_r(v)| \geq 3$, como $d_r(u) = d_r(v) = 5$, se tiene

$$|N_r(u) \cup N_r(v)| = d_r(u) + d_r(v) - |N_r(u) \cap N_r(v)| = 10 - |N_r(u) \cap N_r(v)| \leq 7,$$

en consecuencia,

$$|N_a(u) \cap N_a(v)| = 16 - |N_r(u) \cup N_r(v)| \geq 9.$$

En este caso se puede considerar el clique H generado por los vértices del conjunto $N_a(u) \cap N_a(v)$. Por teorema (2.8) $R(3, 4) = 9$ y dado que H no puede contener un clique K_3 monocromático rojo, entonces H contiene un clique un clique K_4 monocromático azul, el cual junto a los vértices u y v forman un subgrafo K_6 monocromático azul en G , lo que no puede pasar, por lo tanto $|N_r(u) \cap N_r(v)| \leq 2$. ■

Para la prueba de los siguientes lemas, con $\epsilon(u, v)$ se denotará el cardinal del conjunto $N_r(u) \cap N_r(v)$, es decir,

$$\epsilon(u, v) = |N_r(u) \cap N_r(v)|.$$

Lema 2.16. Sea $v \in V(G)$. Si H es el subgrafo completo generado por los vértices del conjunto $G - N_r[v]$, entonces se cumple lo siguiente:

- 1) $|\{p \in V(H) : \epsilon(p, v) = 1\}| = 4$.
- 2) $|\{p \in V(H) : \epsilon(p, v) = 2\}| = 8$.
- 3) Si $p, q \in V(H)$ tales que $N_r(p) \cap N_r(v) = N_r(q) \cap N_r(v)$ entonces $p = q$.

Demostración. Considere los conjuntos $A = \{p \in V(H) : \epsilon(p, v) = 1\}$ y $B = \{p \in V(H) : \epsilon(p, v) = 2\}$. Observe que para cada vértice $p \in V(H)$ se tiene $\chi(\{p, v\}) = \text{azul}$, así, el lema anterior garantiza $1 \leq \epsilon(p, v) \leq 2$, luego, $V(H) = A \cup B$. Por otro lado, dado que $|V(G)| = 18$ y $|N_r[v]| = 6$, entonces $|V(H)| = 12$. Además, para cada vértice $s \in N_r(v)$, se tiene $N_r(s) \cap N_r(v) = \emptyset$, porque en caso contrario se formaría un clique K_3 monocromático rojo. Recuerde que $d_r(v) = d_r(s) = 5$, luego $|N_r(s) \cap V(H)| = 4$, en consecuencia, existen 20 aristas rojas que unen vértices de $N_r(v)$ con vértices de $V(H)$. Note que, por cada vértice en A se cuenta una arista roja que une vértices de $N_r(v)$ con vértices de $V(H)$ y por cada vértice en B se cuenta dos de estas aristas, luego $|A| + 2|B| = 20$. Además,

$$|A| + |B| = |A \cup B| = |V(H)| = 12,$$

entonces $20 - 2|B| + |B| = 12$, es decir, $|B| = 8$ y $|A| = 4$. Para probar el ítem (3), considere las funciones $f : A \rightarrow P_2(N_r(v))$ definida por

$$f(p) = s \text{ si y solo si } \chi(\{p, s\}) = \text{rojo}$$

y la función $g : B \rightarrow P_2(N_r(v))$ definida por

$$g(p) = \{u, w\} \text{ si y solo si } \chi(\{p, u\}) = \chi(\{p, w\}) = \text{rojo}.$$

Se probará que f y g son funciones inyectivas. En efecto, sean $p, q \in A$ tal que $f(p) = f(q)$, luego existe un vértice $s \in N_r(v)$ para el cual se tiene $\chi(\{p, s\}) = \chi(\{q, s\}) = \text{rojo}$. Si $\chi(\{p, q\}) = \text{azul}$, entonces los vértices del conjunto $\{p, q\} \cup (N_r(v) - \{s\})$ forman un clique K_6 monocromático azul, lo cual es una contradicción, por tanto $\chi(\{p, q\}) = \text{rojo}$, sin embargo, si esto ocurre, $\{p, q, s\}$ forman un subgrafo K_3 monocromático rojo, lo que también es una contradicción, por tanto $p = q$, es decir f es inyectiva. Esto prueba que si $p, q \in A$ y $N_r(p) \cap N_r(v) = N_r(q) \cap N_r(v)$ entonces $p = q$. Similarmente, sean $p, q \in B$ tal que $f(p) = f(q)$, luego existen $s, t \in N_r(v)$ para los cuales $f(p) = \{s, t\} = f(q)$, con esto $\chi(\{p, s\}) = \chi(\{p, t\}) = \chi(\{q, s\}) = \chi(\{q, t\}) = \text{rojo}$, entonces $N_r(s) \cap N_r(t) = \{v, p, q\}$ lo que también es una contradicción por lema (2.15), por tanto $p = q$, es decir g es inyectiva. Esto prueba que si $p, q \in B$ y $N_r(p) \cap N_r(v) = N_r(q) \cap N_r(v)$ entonces $p = q$. Esto completa la prueba porque $V(H) = |A| \cup |B|$. ■

Lema 2.17. Con la notación del lema anterior, los vértices del conjunto A inducen un 4-ciclo rojo.

Demostración. Suponga que $N_r(v) = \{s_1, s_2, s_3, s_4, t\}$ y $A = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ y por lema anterior, considere que $\chi(\{p_i, s_j\}) = \text{rojo}$, si y solamente si, $i = j$. Además,

$$\chi(\{p_i, t\}) = \text{azul}, \text{ para } i = 1, 2, 3, 4,$$

sea $N_r(t) = \{v, t_1, t_2, t_3, t_4\}$, observe que $t_i \in V(H) - A$ para $i = 1, 2, 3, 4$, luego $\{t_1, t_2, t_3, t_4\} \subset B$. Además, se conoce que $|B| = 8$, entonces existe $\{w_1, w_2, w_3, w_4\} \subset V(H)$ tal que

$$B = \{t_1, t_2, t_3, t_4, w_1, w_2, w_3, w_4\},$$

en consecuencia

$$V(G) = \{v, s_1, s_2, s_3, s_4, t, t_1, t_2, t_3, t_4, p_1, p_2, p_3, p_4, w_1, w_2, w_3, w_4\}.$$

Dado que $\epsilon(t_i, v) = 2$ y $t \in N_r(t_i) \cap N_r(v)$ para $t_i \in (N_r(t) - \{v\})$, entonces existe un único vértice $s_k \in (N_r(v) - \{t\})$ tal que $s_k \in N_r(t_i) \cap N_r(v)$. Dado que la función g definida en el lema (2.16) es inyectiva y $w_i \in B$, entonces para cada $w_{ij} \in \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ existe un único $\{s_i, s_j\} \subset (N_r(v) - \{t\})$ tal que $\chi(\{s_i, w_{ij}\}) = \chi(\{s_j, w_{ij}\}) = \text{rojo}$. Ahora, considere los conjuntos $F = \{p_i, p_j, s_i, s_j, w_{ij}\}$ y $T = N_r(v) - \{s_i, s_j\}$. Por lema anterior se tiene $\chi(\{x, y\}) = \text{azul}$, para todo $x \in F$ y todo $y \in T$, sin embargo, dado que $\chi(\{p_j, s_j\}) = \chi(\{s_j, w_{ij}\}) = \text{rojo}$, entonces $\chi(\{p_j, w_{ij}\}) = \text{azul}$, similarmente se tiene que $\chi(\{p_i, w_{ij}\}) = \text{azul}$. Observe que, si $\chi(\{p_i, p_j\}) = \text{azul}$, entonces los vértices del conjunto $T \cup \{p_i, p_j, w_{ij}\}$ formarían un subgrafo K_6 monocromático azul en G , por tanto $\chi(\{p_i, p_j\}) = \text{rojo}$.

Ahora, considere los conjuntos $C_i = N_r(w_i) \cap N_r(v)$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Para cada vértice $s \in N_r(v)$, con $s \neq t$, se probará que existen exactamente dos números $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, tal que $s \in C_i \cap C_j$. En efecto, suponga que $s_1 \in C_i$ y $s_1 \notin C_j$, para todo $j \neq i$, luego los únicos conjuntos C_j posibles son $\{s_2, s_3\}, \{s_2, s_4\}, \{s_3, s_4\}$ y con esto se tiene que $\chi(\{p_2, p_3\}) = \chi(\{p_2, p_4\}) = \chi(\{p_3, p_4\}) = \text{rojo}$, luego los vértices $\{p_2, p_3, p_4\}$ forman un subgrafo K_3 monocromático rojo, lo que es una contradicción, así, cada s_i pertenece a por lo menos dos conjunto C_i , ahora, suponga que s_1 pertenece a tres conjuntos C_i , las posibilidades para estos C_i son $\{s_1, s_2\}, \{s_1, s_3\}, \{s_1, s_4\}$ y con esto se tiene que

$$\chi(\{p_1, p_2\}) = \chi(\{p_1, p_3\}) = \chi(\{p_1, p_4\}) = \text{rojo}$$

y el conjunto C_i faltante debe estar conformado por dos elementos $\{s_i, s_j\} \subset \{s_2, s_3, s_4\}$ y cualquiera que sea la elección, el conjunto $\{p_1, p_i, p_j\}$ formaría un subgrafo K_3 monocromático rojo. Por lo tanto, el vértice s pertenece a exactamente dos conjuntos C_i .

Para terminar, considere los conjuntos $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ y $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$. Por lo hecho en el parrafo anterior, $g(W) = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$, donde g es la funcion definida en el lema 2.16, asimismo, $C_i \subset S$ para toda $i = 1, 2, 3, 4$. A continuación, si fuese necesario, se cambiarán las etiquetas de los elementos de los conjuntos W y S , de tal manera que $g(w_1) = \{s_1, s_2\}$. Sea s_3 el único vértice en S tal que $\{s_2, s_3\}$ es uno de los conjuntos C_i y denote con w_2 el único vértice de W tal que $g(w_2) = \{s_2, s_3\}$. Observe que $\chi(\{p_1, p_3\}) = \text{azul}$, en caso contrario los vértices $\{p_1, p_2, p_3\}$ formarían un triangulo rojo, por esta razón, el único vértice s_4 tal que $\{s_3, s_4\}$ es uno de los conjuntos C_i satisface que $s_4 \neq s_1$. Dado que cada vértice de S pertenece a exactamente dos de los cuatro conjuntos C_i , la única posibilidad restante es que $g(w_4) = \{s_1, s_4\}$. Por la manera como se etiquetaron los vértices de W y S , se tiene que

$$\chi(\{p_1, p_2\}) = \chi(\{p_2, p_3\}) = \chi(\{p_3, p_4\}) = \chi(\{p_4, p_1\}) = \text{rojo}.$$

Es decir, los vértices del conjunto $A = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ inducen un 4 ciclo rojo. ■

Teorema 2.18. *En la 2-coloración χ de G definida anteriormente existe un K_3 monocromático de color rojo o un K_6 monocromático de color azul.*

Demostración. Continuando con la notación del lema anterior, sin pérdida de generalidad, suponga que $p_1p_2p_3p_4$ es el 4-ciclo rojo inducido por el conjunto $A = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ en G . Observe que para evitar triángulos rojos $N_r(p_i) \cap N_r(p_{i+1}) = \emptyset$, para $i = 1, 2, 3$, además, $N_r(p_1) \cap N_r(p_3) = \{p_2, p_4\}$ y $N_r(p_2) \cap N_r(p_4) = \{p_1, p_3\}$, por tanto $\epsilon(p_i, t) = 1$, sin pérdida de generalidad, suponga $\chi(\{p_i, t_j\}) = \text{rojo}$, si y solamente si, $i = j$. Asimismo, considere w_i el vértice restante de $N_r(p_i)$ para $i = 1, 2, 3, 4$. **ver figura 1.** Ahora, por definición de la función g , existen dos vértice $s_i, s_j \in S$ tal que $g(w_{ij}) = \{s_i, s_j\}$ para $w_{i,j} \in W$. Considere w_1 , el proceso es similar para w_2, w_3, w_4 . Así, $g(w_1) = \{s_i, s_j\}$ y los posibles candidatos para s_i, s_j están en el conjunto $\{s_2, s_3, s_4\}$. Además, dado que $\epsilon(p_i, t) = 1$ y $\epsilon(s_i, t) = 2$, entonces $\epsilon(w_i, t) = 2$, para $i = 1, 2, 3, 4$, es decir $\epsilon(w_2, t) = 2$ y los posibles candidatos $t_1, t_2 \in N_r(w_1) \cap N_r(t)$ están en el conjunto $\{t_2, t_3, t_4\}$.

Suponga $\chi(\{w_1, s_i\}) = \chi(\{w_1, t_i\}) = \text{rojo}$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Si $i = 2$ o 4 , entonces $\epsilon(w_1, p_i) = 3$, lo que contradice el lema 2.15, por tanto $i = 3$, es decir $\chi(\{w_1, s_3\}) = \chi(\{w_1, t_3\}) = \text{rojo}$ y $g(w_1) = \{s_2, s_i\}$. Suponga que $s_2 \in g(w_1)$, el proceso es similar para $s_4 \in g(w_1)$. Por lo anterior w_1 no puede estar conectado mediante una arista roja a s_2 y t_2 al mismo tiempo, por tanto $\chi(\{w_1, t_4\}) = \text{rojo}$.

Ahora, considere el par de vértices $\{t, s_2\}$, dado que $v \in N_r(s_2) \cap N_r(t)$, entonces existe un único $t_i \in N_r(s_2) \cap N_r(t)$ para $i = 1, 2, 3, 4$. No puede ser t_2 para evitar el subgrafo K_3 monocromático rojo generado por los vértices $\{s_2, p_2, t_2\}$, no puede ser t_3 para evitar el subgrafo K_3 monocromático rojo generado por $\{s_2, w_1, t_3\}$ y no puede ser t_4 para evitar el subgrafo K_3 monocromático rojo generado por $\{s_2, w_1, t_4\}$, por tanto la única posibilidad es que $\chi(\{s_2, t_1\}) = \text{rojo}$, pero si esto ocurre, entonces $N_r(s_2) \cap N_r(p_1) = \{p_2, w_1, t_1\}$, lo que contradice el lema (2.15). Por tanto en la 2-coloración χ de G debe existir un subgrafo K_3 monocromático rojo o un subgrafo K_6 monocromático azul. ■

En Apéndice 3.4, se prueba que $R(3, 6) > 17$. ■

2.2.6. Número de Ramsey $R(3, 7)$

Teorema 2.19. $R(3, 7) = 23$

Para la prueba de este número de Ramsey es necesario añadir nueva notación y definiciones a este trabajo.

Definición 2.20. Sean $G = K_n$ un grafo y $\chi : E(G) \rightarrow \{0, 1\}$ una 2-coloración de G . Con $C_\chi(G) = t$ se denota el máximo número de vértices tal que G contiene un subgrafo K_t monocromático de color

0 y con $I_\chi(G) = r$ se denota el máximo número de vértices tal que G contiene un subgrafo K_r monocromático de color 1. Además, si se fija la 2-coloración χ se escribirá $C(G)$ en lugar de $C_\chi(G)$ e $I(G)$ en lugar de $I_\chi(G)$.

Definición 2.21. (x, y) -grafo.

Sea $\chi : E(G) \rightarrow \{0, 1\}$ una 2-coloración de un grafo completo G . Si $x > C_\chi(G)$ e $y > I_\chi(G)$ se dice que G es un (x, y) -grafo con respecto a la 2-coloración χ .

Definición 2.22. Complemento de una 2-coloración.

Sea G un grafo completo y $\chi : E(G) \rightarrow \{0, 1\}$ una 2-coloración de G . El complemento de χ es una 2-coloración $\bar{\chi} : E(G) \rightarrow \{0, 1\}$ definida por

$$\bar{\chi}(\{v, w\}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi(\{v, w\}) = 0 \\ 0 & \text{si } \chi(\{v, w\}) = 1 \end{cases}$$

Proposición 2.23. G es un (x, y) -grafo con respecto a la 2-coloración χ si y solo si G es un (y, x) -grafo con respecto a la 2-coloración $\bar{\chi}$.

Demostración. G es un (x, y) -grafo si y solo si

$$x > C_\chi(G) = I_{\bar{\chi}}(G) \quad e \quad y > I_\chi(G) = C_{\bar{\chi}}(G),$$

luego, G es un (y, x) -grafo con respecto a $\bar{\chi}$. ■

Observación 2.24. Sean $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, se define

$$R'(m, n) = R(m, n) - 1.$$

En consecuencia, para cada grafo completo G tal que $|V(G)| \leq R'(m, n)$, existe una 2-coloración $\chi : E(G) \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $C_\chi(G) < m$ y $I_\chi(G) < n$. Es decir, G es un (m, n) -grafo con respecto a χ . Así,

$$R'(m, n) = \max \{|V(G)| : G \text{ es un } (m, n) \text{ - grafo con respecto a } \chi : E(G) \rightarrow \{0, 1\}\}$$

Lema 2.25. Sea $\chi : E(G) \rightarrow \{0, 1\}$ una 2-coloración de un grafo $G = K_n$. Si G es un (x, y) -grafo con respecto a χ , entonces para cada $v \in V(G)$ se cumple:

$$(n - 1) - R'(x, y - 1) \leq d_r(v) \leq R'(x - 1, y).$$

Demostración. Sea H un subgrafo de G tal que $V(H) = N_r(v)$, luego $\chi|_H : E(H) \rightarrow \{0, 1\}$ es una 2-coloración del subgrafo completo H , entonces

$$I_{\chi|_H}(H) \leq I_\chi(G) < y.$$

Ademas,

$$C_{\chi|_H}(H) \leq C_\chi(G) - 1 < x - 1.$$

Así que H es un $(x - 1, y)$ -grafo con respecto a $\chi|_H$, es decir

$$d_r(v) \leq R'(x - 1, y).$$

Por otro lado, sea H' el subgrafo de G tal que $V(H') = N_a(v)$, luego

$$I_{\chi|_{H'}}(H) \leq I_\chi(G) - 1 < y - 1.$$

y

$$C_{\chi|_{H'}}(H) \leq C_\chi(G) < x.$$

Es decir, H' es un $(x, y - 1)$ -grafo con respecto a $\chi|_{H'}$, entonces

$$d_a(v) \leq R'(x, y - 1)$$

Ademas, se tiene que

$$d_r(v) + d_a(v) = n - 1$$

por tanto

$$d_r(v) \geq (n - 1) - R'(x, y - 1).$$

■

Definición 2.26. Sea G un (x, y) -grafo completo con respecto a una 2-coloración $\chi : E(G) \rightarrow \{0, 1\}$; Se define

$$\sigma(G) = R'(x - 1, y) - \delta_r(G).$$

Proposición 2.27. Sea $G = K_n$ un grafo completo. Si G es (x, y) -grafo con respecto a una 2-coloración $\chi : E(G) \rightarrow \{0, 1\}$, entonces

$$a) \ n \leq R'(x - 1, y) + R'(x, y - 1) + 1 - \sigma(G)$$

$$b) \ \sigma(G) \leq R'(x - 1, y) + R'(x, y - 1) + 1 - n$$

Demostración. por lema 2.25, se tiene $(n - 1) - R'(x, y - 1) \leq d_r(p)$ para todo $p \in V(G)$, eligiendo p de tal forma que $d_r(p) = R'(x - 1, y) - \sigma(G)$, entonces

$$(n - 1) - R'(x, y - 1) \leq R'(x - 1, y) - \sigma(G),$$

de donde se obtiene a) y b) despejando n y $\sigma(G)$ respectivamente.

■

Corolario 2.28.

$$R'(x, y) \leq R'(x, y-1) + R'(x-1, y) + 1$$

La desigualdad estricta se cumple cuando $R'(x, y-1)$ y $R'(x-1, y)$ son ambos números pares.

Demostración. Por la observación 2.24, $R'(m, n) = R(m, n) - 1$ y por teorema 2.4 ítems (4) y (5) se tiene que $R(x, y) \leq R(x, y-1) + R(x-1, y)$ y la desigualdad estricta se cumple cuando $R(x, y-1)$ y $R(x-1, y)$ son ambos números pares, así

$$R'(x, y) + 1 \leq R'(x, y-1) + 1 + R'(x-1, y) + 1$$

$$R'(x, y) \leq R'(x, y-1) + R'(x-1, y) + 1.$$

■

Definición 2.29. Sea $G = K_n$ un (x, y) -grafo completo con respecto a la 2-coloración χ . A un vértice $p \in V(G)$ se lo denomina preferido cuando al conjunto de vértices $V(G)$ se lo divide en dos subconjuntos complementarios, $N_r(p)$ y $N_a(p)$. Además, si $H_1(p) = (V', E')$ donde $V' = N_r(p)$ y $H_2(p) = (V'', E'')$ donde $V'' = N_a(p)$, entonces por la prueba de 2.25 se tiene que $H_1(p)$ es un $(x-1, y)$ -grafo con respecto a χ y $H_2(p)$ es un $(x, y-1)$ -grafo con respecto a χ .

Para un (x, y) -grafo completo G , se define $r_j = R(x-1, y) - j$, $s_j = |\{v \in V(G) : d_r(v) = r_j\}|$ y $e = |\{\{v, w\} \in E(G) : \chi(\{v, w\}) = 0\}|$. Además, para un vértice preferido p considere los subgrafos $H_1(p)$ y $H_2(p)$ definidos anteriormente, así, se definen $t_j = |\{v \in V' : d_r(v) = r_j\}|$ y

$$e_1(p) = |\{\{v, w\} \in E' : \chi(\{v, w\}) = 0\}| \text{ y } e_2(p) = |\{\{v, w\} \in E'' : \chi(\{v, w\}) = 0\}|.$$

Proposición 2.30. Si $G = K_n$ es un (x, y) -grafo con respecto a una 2-coloración $\chi : E(G) \rightarrow \{0, 1\}$ y considerando los números anteriores para un vértice preferido $p \in V(G)$, se cumple la siguiente ecuación:

$$e_2(p) - e_1(p) = R'(x-1, y) \left[\frac{n}{2} - R'(x-1, y) + j \right] + \sum_{j=1}^{\sigma(G)} j \left(t_j - \frac{s_j}{2} \right).$$

Demostración. Sean G un (x, y) -grafo completo con respecto a $\chi : E(G) \rightarrow \{0, 1\}$ y $p \in V(G)$ un vértice preferido. Ahora, se contará el número de aristas rojas de G de dos maneras diferentes.

Por definición 2.35 se tiene que $\sigma(G) = R'(x-1, y) - q$ donde $q = \delta_r(G)$, luego

$$\begin{aligned} 2e &= qs_{\sigma(G)} + (q+1)s_{\sigma(G)-1} + (q+2)s_{\sigma(G)-2} + \cdots + R'(x-1, y)s_0 \\ e &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\sigma(G)} (R'(x-1, y) - j)s_j = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\sigma(G)} r_j s_j \end{aligned}$$

Similarmente, se cuenta el cardinal $|N_r(w_i)|$ para cada $w_i \in H_1(p)$, luego $\sum_{j=0}^{\sigma(G)} r_j t_j$ cuenta una vez las aristas rojas que salen de $H_1(p)$ y dos veces las aristas rojas de $H_1(p)$, entonces

$$e = \sum_{j=0}^{\sigma(G)} r_j t_j - e_1(p) + e_2(p)$$

Eliminado e se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\sigma(G)} r_j s_j &= \sum_{j=1}^{\sigma(G)} r_j t_j - e_1(p) + e_2(p) \\ e_2(p) - e_1(p) &= \sum_{j=0}^{\sigma(G)} \left(\frac{s_j}{2} - t_j \right) (R'(x-1, y) - j). \end{aligned}$$

Además, se tiene que $\sum_{j=1}^{\sigma(G)} s_j = n$ y $\sum_{j=0}^{\sigma(G)} t_j = r_j$, por tanto

$$\begin{aligned} e_2(p) - e_1(p) &= \sum_{j=0}^{\sigma(G)} \left(\frac{s_j}{2} - t_j \right) (R'(x-1, y) - j). \\ &= \sum_{j=0}^{\sigma(G)} R'(x-1, y) \frac{s_j}{2} - \sum_{j=0}^{\sigma(G)} j \frac{s_j}{2} - \sum_{j=0}^{\sigma(G)} t_j R'(x-1, y) + \sum_{j=0}^{\sigma(G)} j t_j \\ &= R'(x-1, y) \left(\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\sigma(G)} s_j - \sum_{j=0}^{\sigma(G)} t_j \right) + \sum_{j=0}^{\sigma(G)} j \left(t_j - \frac{s_j}{2} \right) \\ &= R'(x-1, y) \left(\frac{n}{2} - r_j \right) + \sum_{j=0}^{\sigma(G)} j \left(t_j - \frac{s_j}{2} \right) \end{aligned}$$

■

Corolario 2.31. Sea $G = K_n$ un grafo completo. Si G es un $(3, y)$ -grafo con respecto a χ y $p \in V(G)$ un vértice preferido tal que $d_r(p) = r_j$, entonces

$$e_2(p) = (y-1) \left(\frac{n}{2} - y + 1 + j \right) + \sum_{j=1}^{\sigma(G)} j \left(t_j - \frac{s_j}{2} \right).$$

Demostración. Por proposición 2.30 se tiene

$$e_2(p) - e_1(p) = R'(x-1, y) \left(\frac{n}{2} - r_j \right) + \sum_{j=0}^{\sigma(G)} j \left(t_j - \frac{s_j}{2} \right),$$

Sin embargo, como $R(2, y) = y$, entonces $R'(2, y) = y-1$. Además, por definición $C_\chi(G) < 3$, es decir $e_1 = 0$, por tanto

$$e_2(p) = (y-1) \left(\frac{n}{2} - y + 1 + j \right) + \sum_{j=1}^{\sigma(G)} j \left(t_j - \frac{s_j}{2} \right)$$

■

Proposición 2.32. Sea G un $(3, y)$ - grafo completo sobre n vértices y sea χ una 2-coloración de G . Si existen vértices p y p' tal que $d_r(p) = d_r(p') = r_j$, donde $\chi(\{p, p'\}) = 0$ entonces, para $m = \min\{e_2(p), e_2(p')\}$ se tiene

$$m \leq (y-1) \left(\frac{n}{2} - y + 1 + j \right)$$

Demostración. Usando la notación de proposición 2.30, sea $t'_j = |\{v \in N_r(p') : d_r(v) = r_j\}|$ y $e_2(p')$ el número de aristas rojas en H_2 cuando p' es preferido. Como $\chi(\{p, p'\}) = 0$ y $C_\chi(G) < 3$, entonces $N_r(p) \cap N_r(p') = \emptyset$, así $t_j + t'_j \leq s_j$ para todo j . Además,

$$\sum_{j=1}^{\sigma(G)} j \left(t_j - \frac{s_j}{2} \right) + \sum_{j=1}^{\sigma(G)} j \left(t'_j - \frac{s_j}{2} \right) = \sum_{j=1}^{\sigma(G)} j (t_j + t'_j - s_j) \leq 0.$$

Ahora, por corolario 2.31, se tiene

$$e_2(p) = (y-1) \left(\frac{n}{2} - y + 1 + j \right) + \sum_{j=1}^{\sigma(G)} j \left(t_j - \frac{s_j}{2} \right)$$

y

$$e_2(p') = (y-1) \left(\frac{n}{2} - y + 1 + j \right) + \sum_{j=1}^{\sigma(G)} j \left(t'_j - \frac{s_j}{2} \right)$$

para p y p' respectivamente. Luego, sumando las dos igualdades se tiene

$$e_2(p) + e_2(p') = 2(y-1) \left(\frac{n}{2} - y + 1 + j \right) + \sum_{j=1}^{\sigma(G)} j (t_j + t'_j - s_j).$$

Por tanto

$$e_2(p) + e_2(p') \leq 2(y-1) \left(\frac{n}{2} - y + 1 + j \right)$$

donde $e_2(p) \leq (y-1) \left(\frac{n}{2} - y + 1 + j \right)$ o $e_2(p') \leq (y-1) \left(\frac{n}{2} - y + 1 + j \right)$. ■

Corolario 2.33. Sea $G = K_n$ un grafo completo. Si $\sigma(G) = 1$ y G es un $(3, y)$ -grafo con respecto a χ , entonces existe un vértice $p \in V(G)$ con $d_r(p) = r_1$ donde

$$e_2(p) \leq (y-1) \left[\frac{n}{2} - y + 2 \right]$$

Además, si la igualdad se cumple para todos los vértices $p_i \in V(G)$ con $d_r(p) = r_1$, entonces el conjunto de estos vértices se divide en dos clases, cada una con $s_1/2$ vértices tal que las aristas que unen los vértices de estas dos clases sean todas de color 0 y las aristas que unen vértices de la misma clase son todas de color 1.

Demostración. Si hay 2 vértices $p, p' \in V(G)$ tal que $d_r(p) = r_1 = d_r(p')$ y $\chi(\{p, p'\}) = 0$ entonces por proposición 2.32, $e_2(p) \leq (y-2) \left(\frac{n}{2} - y + 2 \right)$.

Ahora, sea $A = \{p_1, p_2, \dots, p_{s_1}\}$ todos los vértices tal que $d_r(p_i) = r_1$. Si $\chi(\{p_i, p_j\}) = 1$ para $i \neq j$ y $\sigma(G) = 1$, entonces $\sum_{j=1}^{\sigma(G)} j(t_j - s_j/2) = t_1 - s_1/2$, luego $t_1 = 0$ y por corolario 2.31

$$e_2(p) = (y-1) \left(\frac{n}{2} - y + 2 \right) - \frac{s_1}{2}.$$

Suponga que $e_2(p) = (y-1) \left(\frac{n}{2} - y + 2 \right)$ se cumple para todo $p_i \in A$, luego $t_1 = \frac{s_1}{2}$. Sean $p, q \in A$ donde $\chi(\{p, q\}) = 1$, se define los conjuntos

$$A_p = \{w \in N_r(p) : d_r(w) = r_1\} \text{ y } A_q = \{w' \in N_r(p) : d_r(w') = r_1\}$$

donde $|A_p| = |A_q| = \frac{s_1}{2}$.

Si $A_p \cap A_q = \emptyset$, entonces $|A_p| + |A_q| = s_1$, sin embargo $p \in A$ pero $p \notin A_p \cap A_q$, lo que es una contradicción, luego $A_p \cap A_q \neq \emptyset$. Ahora, suponga que $A_p \neq A_q$, sin perdida de generalidad sea $z \in A_p$ y $z \notin A_q$, luego $A_p \cap A_z = \emptyset$ de otro modo se tiene un triangulo de color 0, así

$$\begin{aligned} |A_p \cup A_z| &= |A_p| + |A_z| - |A_p \cap A_z| \\ &= \frac{s_1}{2} + \frac{s_1}{2} = s_1. \end{aligned}$$

Entonces $A = A_p \cup A_z$, sin embargo $q \in A$ pero $q \notin A_p$ y $q \notin A_z$, por tanto $A_p = A_q$. Así, A se divide en dos clases $C_1 = N_r(p_1) \cap A$ y $C_2 = A - (N_r(p_1) \cap A)$. ■

En vista de las proposiciones precedentes, es claro que el número de aristas rojas en un (x, y) -grafo con respecto a una 2-coloración χ es información útil. Ahora, se deriva una formula que da limites inferiores en el número de aristas rojas de un (x, y) -grafo sobre n vértices con respecto a una 2-coloración χ .

Definición 2.34. Si $G = K_n$ es un (x, y) -grafo con respecto a χ , entonces $e(x, y, n)$ denota el número mínimo de aristas rojas posibles en G .

Observe que dado un grafo $G = K_n$ donde G es un (x, y) -grafo con respecto a χ y $p \in V(G)$ para el cual $d_r(p) = d$, entonces por lema 2.25 $H_2(p)$ es un $(x, y-1)$ -grafo con respecto a χ con $n-d-1$ vértices, así $e_2 \geq e(x, y-1, n-d-1)$.

Proposición 2.35. Sea $G = K_n$ un grafo completo. Si G es un $(3, y)$ -grafo con respecto a χ con e aristas rojas, entonces

$$ne \geq \sum_{i=0}^{\sigma(G)} \{e(3, y-1, n-r_i-1) + r_i^2\} s_i$$

donde r_i y s_i están definidos en proposición 2.30.

Demostración. Usando la notación de proposición 2.30, sea $G = K_n$ un (x, y) -grafo con respecto a χ y sea p un vértice preferido con $d_r(p) = r_i$. Observe que en un $(3, y)$ -grafo con respecto a χ se

tiene que $e_1 = 0$ ya que $C(G) < 3$, es decir que H_1 forma un subgrafo completo donde todas sus aristas son de color azul. Así, sea $\beta_{ij}(p)$ el número de vértices $v \in H_1$ tal que $d_r(v) = r_j$, es decir $\beta_{ij}(p) = \{v \in H_1 : d_r(v) = r_j\}$, luego $\sum_{j=0}^{\sigma(G)} r_j \beta_{ij}(p)$ cuenta el total de aristas rojas que salen de H_1 , por tanto

$$\sum_{j=0}^{\sigma(G)} r_j \beta_{ij}(p) = \sum_{j=0}^{\sigma(G)} (y-1-j) \beta_{ij}(p) = \sum_{j=0}^{\sigma(G)} (y-1-i) \beta_{ij}(p) + \sum_{j=0}^{\sigma(G)} (i-j) \beta_{ij}(p)$$

donde $\sum_{j=0}^{\sigma(G)} (y-1-i) \beta_{ij}(p) = r_i \sum_{j=0}^{\sigma(G)} \beta_{ij}(p) = r_i |H_1| = r_i^2$, luego el total de aristas rojas en G esta dado por:

$$e = e_2(p) + r_i^2 + \sum_{j=0}^{\sigma(G)} (i-j) \beta_{ij}(p)$$

Se sabe que $e_2(p) \geq e(3, y-1, n-r_i-1)$, luego

$$e \geq e(3, y-1, n-r_i-1) + r_i^2 + \sum_{j=0}^{\sigma(G)} (i-j) \beta_{ij}(p)$$

Si se suma esto sobre todos los vértices $p \in V_i$, donde $V_i = \{p \in V(G) : d_r(p) = r_i\}$, note que el termino

$$\sum_{i=0}^{\sigma(G)} \sum_{p \in V_i} \sum_{j=0}^{\sigma(G)} (i-j) \beta_{ij}(p) = 0.$$

En efecto, sea $A = [a_{ij}]$, donde $a_{ij} = \sum_{p \in V_i} (i-j) \beta_{ij}(p)$, como $\sum_{p \in V_i} \beta_{ij}(p) = \sum_{p \in V_i} \beta_{ji}(p)$, la matriz A es antisimétrica, por tanto

$$\sum_{i=0}^{\sigma(G)} \sum_{j=0}^{\sigma(G)} a_{ij} = 0.$$

y para los demás términos se tiene

$$ne = \sum_{i=0}^{\sigma(G)} s_i e \geq \sum_{i=0}^{\sigma(G)} s_i (e(3, y-1, n-r_i-1)) + \sum_{i=0}^{\sigma(G)} s_i (r_i^2)$$

Por tanto

$$ne \geq \sum_{i=0}^{\sigma(G)} \{e(3, y-1, n-r_i-1) + r_i^2\} s_i$$

■

Con esta proposición y la proposición 2.30 es posible calcular el valor exacto o cotas inferiores del número $e(x, y, n)$ para un (x, y) -grafo con respecto a χ . La existencia de tales grafos se evitará por el momento.

Proposición 2.36. $e(3, 3, 4) = 2$, $e(3, 3, 5) = 5$, $e(3, 4, 7) = 6$, $e(3, 4, 8) \geq 10$, $e(3, 5, 9) = 7$, $e(3, 5, 10) = 10$, $e(3, 5, 11) \geq 15$, $e(3, 5, 12) \geq 20$.

Demostración. Las igualdades se pueden probar por construcción, por ejemplo $e(3, 4, 7) = 6$. Sea $G = K_7$ un $(3, 4)$ -grafo completo con respecto a χ . Suponga que en G existe un vértice p tal que $d_r(p) = 0$, luego $d_a(p) = 6$, como $R(3, 3) = 6$, entonces en $H_2(p)$ existe un subgrafo K_3 monocromático de color azul, sin embargo, los vértices que forman el K_3 monocromático azul junto con el vértice p forman un subgrafo K_4 monocromático azul en G , lo que es una contradicción. Ahora suponga $d_r(p) = 1$, luego se tiene que $H_2(p)$ es un $(3, 3)$ -grafo con respecto a χ sobre 5 vértices, como $e(3, 3, 5) = 5$ y las 5 aristas rojas junto con la arista roja disjunta forman un $(3, 4)$ -grafo con al menos 6 aristas rojas. Similarmente se prueba para $d_r(p) \neq 1$.

Las desigualdades se prueban usando las proposiciones 2.35 y 2.30, por ejemplo $e(3, 4, 8) \geq 10$. Sea $G = K_8$ un $(3, 4)$ -grafo completo con respecto a χ con $e = e(3, 4, 8)$. Por lema 2.25, $\sigma(G) = 2$.

Por proposición 2.35 se tiene que

$$8e \geq (e(3, 3, 4) + 9)s_0 + (e(3, 3, 5) + 4)s_1 = 11s_0 + 9s_1$$

Usando proposición 2.30, se tiene $2e = \sum_{j=0}^{\sigma(G)} s_j r_j = 3s_0 + 2s_1$ y $8 = \sum_{j=0}^{\sigma(G)} s_j = s_0 + s_1$. Es decir, con estas proposiciones se obtiene el sistema

$$11s_0 + 9s_1 \geq 8e$$

$$3s_0 + 2s_1 = 2e$$

$$s_0 + s_1 = 8$$

La solución a este sistema que minimiza e es $s_0 = s_1 = 4$ y $e = 10$. Para minimizar el sistema se usó programación entera mixta (MIP) en Sagemath (Ver apéndice 1). ■

Proposición 2.37. Si $G = K_{13}$ es un $(3, 5)$ -grafo completo con respecto a χ , entonces

$$e(3, 5, 13) = 26.$$

Además, para todo $p \in V(G)$ se tiene que $d_r(p) = 4$.

Demostración. Por el lema 2.25, se tiene que $\sigma(G) = 0$. Usando la proposición 2.35, se obtiene $13e \geq (e(3, 4, 8) + 16)s_0 = 26s_0$, es decir que $e = 2s_0$, por otro lado $13 = \sum_{j=0}^{\sigma(G)} s_j = s_0$, por tanto $e \geq 26$. Además, como $s_0 = |\{v \in V(G) : d_r(v) = r_0\}| = 13$ y $r_0 = 4$ implica que, para todo $p \in V(G)$ se tiene que $d_r(p) = 4$. ■

Proposición 2.38.

$$e(3, 6, 17) \geq 38$$

Demostración. Usando el lema 2.25 se tiene que $\sigma(G) = 3$. Por proposición 2.35 se tiene que

$$17e \geq (e(3, 5, 11) + 25)s_0 + (e(3, 5, 12) + 16)s_1 + (e(3, 5, 13) + 9)s_2 = 40s_0 + 36s_1 + 35s_2$$

Usando proposición 2.30, se tiene $2e = 5s_0 + 4s_1 + 3s_2$ y $17 = s_0 + s_1 + s_2$. Se obtiene el sistema

$$40s_0 + 36s_1 + 35s_2 \geq 17e$$

$$5s_0 + 4s_1 + 3s_2 = 2e$$

$$s_0 + s_1 + s_2 = 17$$

La solución a este sistema que minimiza e es $s_0 = 8$, $s_1 = 9$, $s_2 = 0$ y $e = 38$. Nuevamente, para minimizar el sistema se usó programación entera mixta (MIP) en Sagemath (Ver apéndice 1). ■

Para probar que $e(3, 6, 17) \geq 40$, es necesario algunas técnicas adicionales que se presentan a continuación.

Definición 2.39. Sean G un grafo completo y χ una 2-coloración de G . Un conjunto independiente máximo en G , se refiere a un conjunto independiente en G que contiene $I(G)$ vértices. Un vértice $p \in V(G)$ se llamará esencial si pertenece a todo conjunto independiente máximo de G .

Lema 2.40. Sean G un grafo completo, χ una 2-coloración de G y $p, q \in V(G)$ tal que $\chi(\{p, q\}) = 0$. Sea G' el grafo obtenido de G donde $\chi(\{p, q\}) = 1$, llame χ' a la nueva 2-coloración de G' , entonces

- (1) Cualquier conjunto independiente en G con respecto a χ es independiente en G' con respecto a χ' .
- (2) Si p o q no son esenciales en G' , entonces $I_{\chi'}(G') = I_{\chi}(G)$.
- (3) Si p y q son esenciales en G' , entonces $I_{\chi'}(G') = I_{\chi}(G) + 1$.
- (4) Si p es esencial en G , entonces p es esencial en G' y q no es esencial en G' .

Demostración. (1) Por la construcción de G' , si S es un conjunto independiente en G , como $\chi(\{p, q\}) = \text{rojo}$ y esa arista roja no está en S , luego S es independiente en G' .

- (2) Si p no es esencial en G' , existe un conjunto independiente máximo T en G' tal que $p \notin T$, luego T también es un conjunto independiente máximo en G , es decir $I_{\chi}(G) = I_{\chi'}(G')$, la prueba es similar cuando q no es esencial en G' .

- (3) Observe que, si $I_{\chi}(G) = I_{\chi'}(G')$, entonces cualquier conjunto independiente máximo en G es también máximo en G' y no debe contener a p y q al mismo tiempo. Luego si p y q son esenciales en G' , entonces $I_{\chi}(G) < I_{\chi'}(G')$; sin embargo si se quita p o q de un conjunto independiente máximo en G' se obtiene un conjunto independiente máximo en G , luego $I_{\chi'}(G') = I_{\chi}(G) + 1$

- (4) Sea p esencial en G . Suponga que p no es esencial en G' , por (3) existe un conjunto independiente máximo $T \in G$ tal que $p \notin T$, es decir que p no es esencial en G , luego p debe ser esencial en

G' . Suponga que q es esencial en G' , luego por (2), si p y q son esenciales en G' , entonces ninguno de los dos p y q son esenciales en G lo que también contradice la hipótesis. Por tanto si p es esencial en G , entonces p debe ser esencial en G' pero q no puede ser esencial en G' . ■

Proposición 2.41. Sean χ una 2-coloración de un grafo completo G y g_i el número de subgrafos conexos de G con i aristas rojas. Si G tiene circunferencia z , entonces para todo entero $0 \leq w < z$,

$$(-1)^w I_\chi(G) \leq (-1)^w \sum_{i=0}^w (-1)^i g_i.$$

La igualdad se cumple si G es libre de circuitos y la sumatoria es sobre todos los subgrafos conexos.

Demostración. La prueba se será por inducción sobre el número de aristas rojas del grafo.

Hipótesis inductiva (HI): Sea G un grafo completo con circunferencia mayor a w , sean χ una 2-coloración del grafo G y $p \in V(H)$. Existe una partición de los subgrafos conexos de G con w o menos aristas rojas entre dos clases, los subgrafos de una clase serán llamados positivos y los de la otra clase negativos. Para $i = 0, 1, 2, \dots, w-1$ existen funciones $f_i : S_i^+ \rightarrow S_{i+1}^-$ (donde S_j^+ es el conjunto de subgrafos positivos con j aristas rojas y S_j^- el conjunto de subgrafos negativos con j aristas rojas). También se cumplen las siguientes condiciones.

- (1) S_0^- es un conjunto independiente máximo;
- (2) Si $p \in S_0^-$, entonces p es esencial en G ;
- (3) f_i es biyectiva para $i = 1, 2, \dots, w-1$;
- (4) Para todo subgrafo positivo H con menos de w aristas rojas, p es un vértice de H si y solo si p es un vértice de $f_i(H)$;
- (5) Si G tiene w o menos aristas rojas, entonces $S_w^+ = \emptyset$.

Nota: (Elección de S_0^- y S_0^+). Para $p \in V(G)$, si p es esencial defina S_0^- como cualquier conjunto independiente máximo, si p no es esencial, defina S_0^- como uno de los conjuntos independientes máximos tal que $p \notin S_0^-$ y defina S_0^+ como el complemento de S_0^- .

Observe primero que, si la HI se cumple para un grafo G , entonces $\sum_{i=0}^w (-1)^i g_i = I_\chi(G) + (-1)^w |S_w^+|$, (pues S_i^+ cancela S_{i+1}^- por la biyección), luego la proposición vale para G ; multiplicando ambos lados por $(-1)^w$: $(-1)^w \sum_{i=0}^w (-1)^i g_i = (-1)^w I_\chi(G) + (-1)^{2w} |S_w^+| = (-1)^w I_\chi(G) + |S_w^+|$, donde $|S_w^+| \geq 0$.

Segundo, note que la HI se cumple para todo grafo con todas sus aristas azules, además si G es un grafo que satisface la HI para algún vértice p , entonces G unido con cualquier vértice aislado también va a satisfacer la hipótesis (condiciones (2) y (4) se satisfacen trivialmente para cualquier vértice aislado).

Para $z = \infty$ la igualdad se cumple ya que no hay circuitos y la sumatoria es sobre todos los subgrafos conexos, hay varios casos en el que $z = \infty$, ejemplo: suponga un grafo G con k vértices donde en su

2-coloración χ solo existen 3 aristas rojas, pueden ocurrir dos casos:

si las 3 aristas rojas están separadas entonces, $g_0 = k$ y $g_1 = 1$, por tanto

$$\begin{aligned} (-1)^w I_\chi(G) &= (-1)^w (g_0 - g_1 + \dots + (-1)^w g_w) \\ (-1)^w (k - 3) &= (-1)^w (k - 3 + 0 - \dots + 0 * (-1)^w) \end{aligned}$$

si hay 1 arista roja separada y 2 aristas rojas conectadas, entonces $g_0 = k, g_1 = 3$ y $g_2 = 1$, por tanto

$$\begin{aligned} (-1)^w I_\chi(G) &= (-1)^w (g_0 - g_1 + \dots + (-1)^w g_w) \\ (-1)^w (k - 2) &= (-1)^w (k - 3 + 1 - \dots + 0 * (-1)^w) \end{aligned}$$

Para $z = 3$, suponga un grafo G con k vértices donde en su 2-coloración χ existen 3 aristas rojas las cuales forman un K_3 monocromático rojo, suponga que $\{p, q, r\}$ son los vértices del triángulo rojo, como p no es esencial, (denotando como pq al subgrafo conexo de una arista) se pueden definir $S_0^- = \{s \in V(G) : s \text{ es aislado}\} \cup \{r\}$, $S_1^+ = \{pq, pr\}$, $S_1^- = \{rq\}$, $S_2^- = \{prq, pqr\}$, $S_2^+ = \{rpq\}$ y $S_3^- = \{pqrp\}$, definiendo estos conjuntos se cumple la HI y se verifica la desigualdad para $w = 0, 1, 2$. Ahora, suponga que la HI se satisface para todos los grafos con menos de n aristas rojas. Sea G un grafo con n aristas y sea $p \in V(G)$ no **aislado**.

Caso 1: p es esencial en G .

Elija cualquier arista roja de G que tenga a p como un extremo; llame q al otro extremo. Sea G' el grafo obtenido de G tal que $\chi(\{p, q\}) = \text{azul}$, llame χ' a la 2-coloración de G' . Aplicando la HI a G' usando el vértice p , sea la partición de los subgrafos conexos denotada por π' y las funciones f'_i . Además, aplicando la HI de nuevo para el grafo G' y el vértice q , llame a la partición subgrafos conexos π'' y a las funciones f''_i en este caso.

Dado un subgrafo conexo H de G teniendo w o menos aristas, note que es libre de circuitos (ya que G tiene circunferencia $z \geq w$). Luego, si H contiene una arista roja entre p y q ($\chi(\{p, q\}) = \text{rojo}$), por la construcción de G' , en G' , H contiene la arista azul entre p, q ($\chi'(\{p, q\}) = \text{azu}$). Llame a la componente roja que contiene a p la p -componente de H y a la otra **componente roja**, la q -componente de H .

Los subgrafos conexos de G con w o menos aristas son ahora partidos en las clases positivas y negativas de la siguiente manera: Si $H \in \pi'$, entonces H conserva el signo de la clase dada por la partición π' , es decir ($\text{sig}_\pi(H) = \text{sig}_{\pi'}(H)$), si $H \notin \pi'$, entonces H tiene el signo de su q -componente bajo la partición π'' , es decir ($\text{sig}_\pi(H) = \text{sig}_{\pi''}(q\text{-componente de } H)$). La asignación de los subgrafos positivos es especificado de la siguiente manera: Si H es positivo, tiene $i < w$ aristas

rojas y $H \in \pi'$, se define $f_i(H) = f'_i(H)$, pero si H es positivo, tiene $i < w$ aristas rojas y $H \notin \pi'$, entonces $f_i(H)$ se define como sigue: el grafo conexo con p -componente queda de la misma forma que en H y el grafo conexo con q -componente será igual a f''_i aplicada a la q -componente de H . Note que este será un subgrafo conexo de G , ya que (4) de la HI asegura que q es un vértice de f''_i aplicado a la q -componente de H .

ya se ha definido la partición π y las funciones f_i de G con el vértice p , ahora se prueba que cumple con las condiciones de la HI. Por lema 2.40, $I_\chi(G) = I_{\chi'}(G)$ y p es esencial en G' , por tanto (1) y (2) de la HI se satisfacen, (note que todos los vértices son particionados por π'). Para probar (3), seleccione un subgrafo H de la clase negativa con $i + 1$ aristas rojas con $i \geq 0$. Suponga que $H \in \pi'$, como f'_i es biyectiva, existe un único subgrafo H' con i aristas rojas, tal que $f_i(H') = f'_i(H') = H$. Ahora, suponga que $H \notin \pi'$

FALTA

Finalmente, considere el caso en que G tiene w o menos aristas rojas. Si G tiene menos de w aristas rojas o si G no es conexo, entonces $S_w^+ = \emptyset$. Ahora, si G es conexo y tiene w aristas, existe un solo subgrafo T con w aristas rojas, la q -componente de T es el subgrafo máximo conexo de G' que contiene a q (observe que tiene menos de w aristas rojas). El hecho de que f'' debe satisfacer (4) requiere de la q -componente de T , en consecuencia T debe estar en la clase negativa, por tanto $S_w^+ = \emptyset$.

FALTA

■

Para las siguientes proposiciones es necesario dar algunas definiciones.

Sea $G = K_n$ un $(3, y)$ -grafo completo con respecto a χ . Considere un conjunto independiente H_1 de G y sea H_2 el subgrafo generado por los vértices restantes. Sea G_j el conjunto de subgrafos conexos de H_2 con j aristas rojas. Defina $r_i(j) = |\{A \in G_j : \sum_{u \in A} |N_r(H_1, u)| = i\}|$. Además, para K un subgrafo de H_2 defina:

$$\omega(K) = |\{r \in H_1 : \chi(\{r, p\}) = \text{rojo, para algun } p \in K\}|$$

$$\mu(K) = \sum_{u \in K} |N_r(H_1, u)|$$

Teniendo en cuenta esto, se puede definir $r_i(j) = |\{A \in G_j : \mu(A) = i\}|$.

Definición 2.42. Sea $p \in H_2$. Se dice que p está sobre un r -subconjunto S de H_1 si $N_r(p) \cap H_1 \subseteq S$. Además, defina $\text{supp}(p) = \{u \in H_1 : \chi(\{p, u\}) = \text{rojo}\}$.

Definición 2.43. Sea S un r -subconjunto de H_1 . Se define el subgrafo T soportado por S como el subgrafo de H_2 generado por todos los vértices $p \in H_2$ tales que p está sobre S .

Definición 2.44. Sea $K \in G_j$. Se dice que un r -subconjunto $S \subseteq H_1$ soporta al subgrafo K si existe un subgrafo $T \subseteq H_2$ tal que

- (i) $K \subseteq T$
- (ii) T es soportado por S

Sea G un $(3, y)$ - grafo con respecto a una 2-coloración χ . Si H_1 es un conjunto independiente de G con v vértices y $H_2 \subseteq (G - H_1)$ tal que $N_r(p) \cap H_1 \neq \emptyset$ para todo $p \in H_2$, entonces:

Proposición 2.45. Para cada $K \in G_j$ existe un único subgrafo $T \subseteq H_2$ tal que

- (i) $K \subseteq T$
- (ii) T es soportado por un r -subconjunto S .

Demostración. Sean

$$S = \{q \in H_1 : q \in N_r(p) \text{ para algún } p \text{ en } K\}$$

y T el subgrafo de H_2 soportado por S . Sean $p \in K$ y $q \in N_r(p) \cap H_1$, luego $q \in S$, es decir que p está sobre S , como T es soportado por S , por definición $p \in T$, por tanto $K \subseteq T$.

Ahora, suponga que existe un subgrafo T_1 soportado por el r -subconjunto S_1 tal que $K \subseteq T_1$, sea $p \in T_1$, luego p está sobre S_1 y $|S_1| = |S|$. Si p no está sobre S entonces, existe un vértice $q \in N_r(p) \cap H_1$ tal que $q \notin S$, es decir que existe un vértice $q' \in (S - S_1)$, con esto se tiene que existe un vértice $p' \in K$ tal que $q' \in N_r(p') \cap H_1$ ya que K esta sobre S , luego $K \not\subseteq T_1$, lo que es una contradicción, por tanto $T_1 \subseteq T$. Similarmente se prueba que $T \subseteq T_1$. Con lo cual se tiene que $T = T_1$. ■

Proposición 2.46. Si $K \in G_j$ y $|H_1| = v$, entonces existen exactamente $\binom{v-\omega(K)}{r-\omega(K)}$ r -subconjuntos de H_1 que soportan a K .

Demostración. Sea $S = N_r(K) \cap H_1$. Además, sea T el subgrafo de H_2 soportado por S , luego $|S| = \omega(T)$, por proposición 2.45 T es único y $K \subseteq T$. Si $\omega(T) \leq r$ entonces hay exactamente $\binom{v-\omega(T)}{r-\omega(T)}$ r -subconjuntos de H_1 que soportan el subgrafo T , si $\omega(T) > r$ se define $\binom{v-\omega(T)}{r-\omega(T)} = 0$ ya que no existiría un r -subconjunto de H_2 que soporte a T . Además $\omega(K) = \omega(T)$, en efecto, como $K \subseteq T$, luego $\omega(K) \leq \omega(T)$ y por construcción de S , $\omega(T) \leq \omega(K)$, por tanto también existen exactamente $\binom{v-\omega(K)}{r-\omega(K)}$ r -subconjuntos de H_1 que soportan el subgrafo K . ■

Proposición 2.47. Sea G un $(3, y)$ -grafo completo con respecto a una 2-coloración χ y $|H_1| = v$. Para K un subgrafo conexo de H_2 y las definiciones de $r_i(j), \omega(K), \mu(K)$ se tiene que

$$[r + y - 1 - v] \binom{v}{r} \geq \sum_{j=0}^a (-1)^j \left(\sum_{i=0}^r \binom{v-i}{r-i} r_i(j) \right) + \epsilon(a, r).$$

donde a es impar y todos los subgrafos de G los cuales son soportados por un r -subconjunto de H_1 tienen una circunferencia mayor que a , y donde:

$$\epsilon(a, r) = \sum_{j=0}^a (-1)^j \left\{ \sum_{K \in G_j} \left[\binom{v - \omega(K)}{r - \omega(K)} - \binom{v - \mu(K)}{r - \mu(K)} \right] \right\}$$

Demostración. Sea S un subconjunto de r vértices en H_1 y T el subgrafo de H_2 soportado por S . Dado que G es un $(3, y)$ -grafo con respecto a χ y H_1 es un conjunto independiente entonces $v = |H_1| \leq y - 1$, es decir $(y - 1) - (v - r) \geq 0$.

Sea W un conjunto independiente máximo contenido en T , luego $|W| = I_\chi(T)$, entonces $W \cup (H_1 - S)$ es un conjunto independiente contenido en G , y se tiene

$$y - 1 \geq |W \cup (H_1 - S)| = |W| + |H_1 - S| = I_\chi(T) + (v - r)$$

Es decir, $I_\chi(T) \leq (y - 1) - (v - r)$. Además, como a es impar y por proposición 2.41,

$$I_\chi(T) \geq \sum_{j=0}^a (-1)^j g_j,$$

donde g_j es el número de subgrafos conexos de T el cual tienen j aristas rojas. Así;

$$[r + y - 1 - v] \geq \sum_{j=0}^a (-1)^j g_j$$

Sumando esta desigualdad para todos los r -subconjuntos de H_1 , el lado izquierdo queda

$$[r + y - 1 - v] \binom{v}{r}$$

ya que se suma la misma cantidad $\binom{v}{r}$ veces. En el lado derecho se cuentan subgrafos conexos con j aristas rojas del subgrafo T determinado por el r -subconjunto S , sin embargo por proposición 2.46 un subgrafo $K \in G_j$ se cuenta exactamente $\binom{v - \omega(K)}{r - \omega(K)}$ veces, por tanto

$$[r + y - 1 - v] \binom{v}{r} \geq \sum_{j=0}^a (-1)^j \left(\sum_{K \in G_j} \binom{v - \omega(K)}{r - \omega(K)} \right)$$

y el lado derecho puede ser escrito como

$$\sum_{j=0}^a (-1)^j \left\{ \sum_{K \in G_j} \binom{v - \mu(K)}{r - \mu(K)} + \sum_{K \in G_j} \left[\binom{v - \omega(K)}{r - \omega(K)} - \binom{v - \mu(K)}{r - \mu(K)} \right] \right\}$$

o simplemente

$$\sum_{j=0}^a (-1)^j \left(\sum_{i=1}^r \binom{v - i}{r - i} r_i(j) \right) + \epsilon(a, r).$$

■

Para discutir las consecuencias de la proposición anterior se introduce la siguiente terminología: un vértice p de H_2 tal que $|N_r(H_1, p)| = j$ será llamado un j -vértice y una arista roja entre un i -vértice y un j -vértice será llamada una (i, j) -arista (roja o azul).

Observación 2.48. El número a de la proposición 2.47 se puede elegir igual a 1 o 3 en todos los casos en que G sea un $(3, y)$ -grafo, (todos los subgrafos tienen circunferencia por lo menos 4).

Observación 2.49. Si G es un $(3, y)$ -grafo completo con respecto a χ y H_1 tiene $y - 1$ vértices, entonces

- (1) $r_0(0) = 0$;
- (2) Hay a lo mas un 1-vértice sobre cualquier 1-subconjunto de H_1 ;
- (3) Si hay 3 vértices sobre un 2-subconjunto de H_1 , dos de ellos deben ser 1-vértices unidos por arista roja y el tercero un 2-vértice;
- (4) puede haber a lo mas $(R'(3, r + 1) - r)$ vértices sobre un r -conjunto de H_1

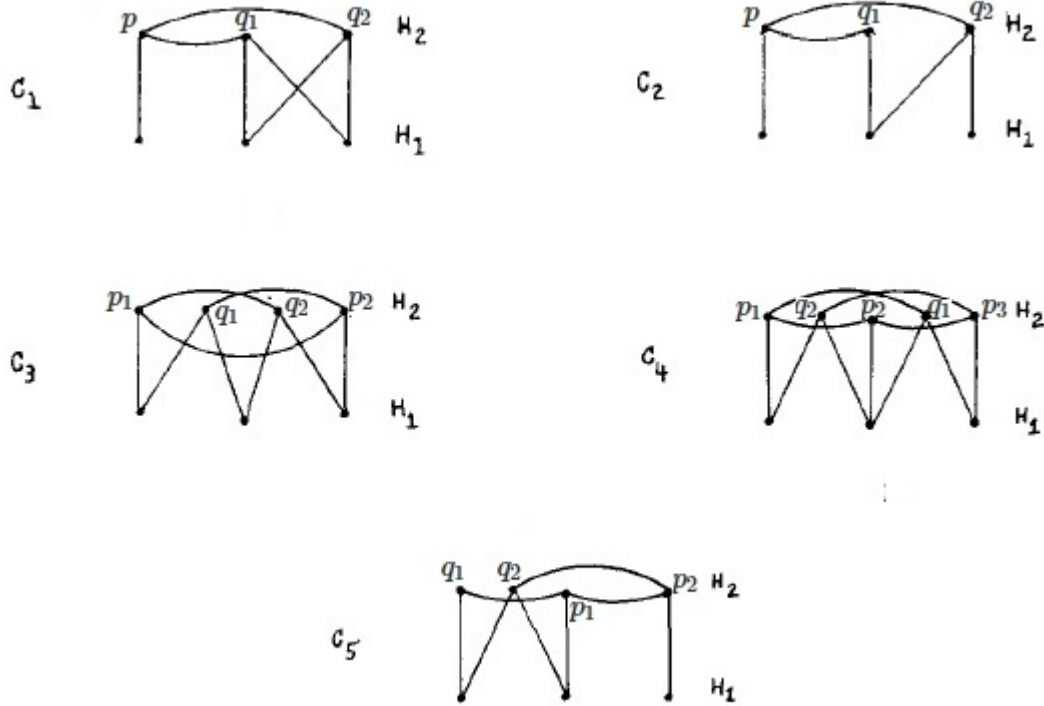
Demostración. (1) Por construcción de H_1 y H_2 no pueden haber 0-vértices

- (2) Dos 1-vértices sobre un 1-subconjunto junto con los $y - 2$ vértices restantes de H_1 forman un y -conjunto independiente, lo que es una contradicción.
- (3) Dados 3 vértices sobre un 2-subconjunto, esos 3 vértices juntos con los 2 del 2-subconjunto de H_1 forman un $(3, 3)$ -grafo con respecto al mismo χ de 5 vértices (ya que no pueden haber triángulos rojos en G y si existe un K_3 azul en el subgrafo de los 5 vértices, el K_3 azul junto a los $y - 3$ vértices restantes de H_1 forman un y -conjunto independiente en G), y en un $(3, 3)$ -grafo Y con respecto a χ de 5 vértices cada $v \in V(Y)$ tienen $d_r(v) = 2$, con lo que se cumplen las condiciones de (3).
- (4) Considere un subgrafo K generado por un r -subconjunto de H_1 y los vértices sobre este r -subconjunto. Los vértices de K tienen aristas azules con los $y - 1 - r$ vértices restantes de H_1 , así si K contiene $r + 1$ vértices independientes, entonces los $y - 1 - r$ vértices de H_1 junto con los $r + 1$ de K formarían un y -conjunto independiente, por tanto K puede tener a lo mas $R'(3, r + 1)$ vértices, de los cuales $(R'(3, r + 1) - r)$ están sobre un r -subconjunto de H_1 . ■

Proposición 2.50. Si G es un $(3, y)$ -grafo con respecto a una 2-coloración χ , $v = y - 1$, $k = 3$, escogiendo $a = \infty$ entonces

$$\epsilon(\infty, 3) = \sum_{i=1}^4 c_i$$

donde c_i es el número de configuraciones del tipo C_i (ver figura 2.2.6) que están contenidas en G (por contenidas se entiende que hay un 3-subconjunto de H_1 tal que el subgrafo dado por ese 3-subconjunto y los vértices sobre este es de tipo C_i).



Demostración. Sean p, q vértices de H_2 tal que $\chi(\{p, q\}) = \text{rojo}$, para evitar formar triángulos rojos en G , $\text{supp}(p) \neq \text{supp}(q)$. Luego si K consiste de solo una arista y 2 vértices o si K sólo es un vértices, entonces $\omega(K) = \mu(K)$.

Considere un subgrafo conexo K con al menos 2 aristas rojas que está sobre un 3-subconjunto de H_1 , sea $p, q_1, q_2 \in V(K)$ tal que $\chi(\{p, q_1\}) = \chi(\{p, q_2\}) = \text{rojo}$. Para evitar triángulos rojos en G , ninguno de los vértices p, q_1, q_2 puede ser un j -vértices para $j > 2$. Si p fuese un 2-vértice se tendría que q_1 y q_2 son 1-vértice que forman aristas rojas con un único vértice de H_1 , lo que contradice (2) de la observación 2.49, por tanto p es 1-vértice.

Ahora, considere todos los posibles subgrafos conexos de H_2 que tienen 2 aristas rojas sobre un 3-subconjunto, luego como p es 1-vértice, q_1 y q_1 son ambos 1-vértice o q_1 es 1-vértice y q_2 es un

2-vértice o ambos son 2-vértices. Observe que

$$\epsilon(\infty, 3) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left\{ \sum_{K \in G_j} \left[1 - \binom{v - \mu(K)}{3 - \mu(K)} \right] \right\}$$

si $\omega(K) = \mu(K)$ ($\mu(K) = 3$) para algún j , no se aporta nada en la sumatoria de $\epsilon(\infty, 3)$, si $\mu(K) > 3$ para algún j se aporta 1 o -1 a la sumatoria dependiendo si j es par o impar respectivamente.

Si q_1 y q_1 son ambos 1-vértice, entonces $\omega(K) = \mu(K)$ lo que no aporta a $\epsilon(\infty, 3)$. Si q_1 es 1-vértice y q_2 es un 2-vértice (ver configuración C_2), como $\mu(K) = 4$ y $j = 2$, aporta 1 a $\epsilon(\infty, 3)$. Finalmente, si q_1 y q_2 son ambos 2-vértices (ver configuración C_1), como $\mu(K) = 5$, aporta 1 a $\epsilon(\infty, 3)$.

Ahora, considere todos los posibles subgrafos conexos de H_2 que tienen 3 aristas rojas soportados por un 3-subconjunto de H_1 . Primero, considere $p, q_1, q_2, q_3 \in G_3$ tal que $\chi(\{p, q_1\}) = \chi(\{p, q_2\}) = \chi(\{p, q_3\}) = \text{rojo}$, se probó que p es 1-vértice, entonces q_1, q_2, q_3 están sobre un 2-subconjunto de H_1 , luego los $y - 3$ vértices de H_1 junto con q_1, q_2, q_3 forman un y -conjunto independiente en G , por tanto el único subgrafo conexo con 3 aristas rojas sobre un 3-subconjunto es un camino simple de longitud 3. Sea $q_1, p_1, p_2, q_2 \in H_2$ tal que $\chi(\{q_1, p_1\}) = \chi(\{p_1, p_2\}) = \chi(\{p_2, q_2\}) = \text{rojo}$, se probó que p_1 y p_2 deben ser 1-vértices, q_1 y q_2 no pueden ser ambos 1-vértices ya que 4 1-vértices deben estar sobre un 4-subconjunto. Así, si q_1 es 1-vértice y q_2 es un 2-vértice (ver configuración C_5). El subgrafo K generado por q_1, p_1, p_2 no aporta a $\epsilon(\infty, 3)$ ya que $\omega(K) = \mu(K)$, el subgrafo K' generado por p_1, p_2, q_2 aporta 1 a $\epsilon(\infty, 3)$, ya que $\mu(K') = 4$ y $j = 2$, mientras que todo el subgrafo C_5 aporta -1 a $\epsilon(\infty, 3)$ ya que $\mu(C_5) = 5$ y $j = 3$, luego en total la configuración C_5 no aporta nada a $\epsilon(\infty, 3)$. Si q_1 y q_2 son ambos 2-vértices (ver configuración C_3). El subgrafo generado por p_1, p_2, q_1 (2 aristas rojas) contribuye 1, el subgrafo generado por p_2, p_1, q_2 (2 aristas rojas) contribuye 1 y el subgrafo generado por q_2, p_1, p_2, q_1 (3 aristas rojas) contribuye -1 , es decir que la configuración C_3 aporta en total 1 a $\epsilon(\infty, 3)$.

Finalmente, considere los subgrafos sobre un 3-subconjunto de H_1 que tienen más de 3 aristas rojas. Al igual que antes, ningún vértice puede ser adyacente a 3 vértices por aristas rojas, los 2-vértices en el subgrafo deben ser de grado rojo 1 en el subgrafo y pueden haber más de tres 1-vértices. La única configuración posible es un camino de cuatro aristas rojas con los extremos siendo 2-vértices (ver configuración C_4), para este caso, los subgrafos generados por $q_1, p_1, p_2; p_2, p_3, q_2$ (2 aristas rojas) y q_1, p_1, p_2, p_3, q_2 (4 aristas rojas), cada subgrafo contribuye 1, los subgrafos generados por $q_1, p_1, p_2, p_3; p_1, p_2, p_3, q_2$ (3 aristas rojas), cada uno contribuye -1 y el subgrafo generado por p_1, p_2, p_3 no contribuye nada, por tanto la configuración C_4 aporta en total 1 a $\epsilon(\infty, 3)$. ■

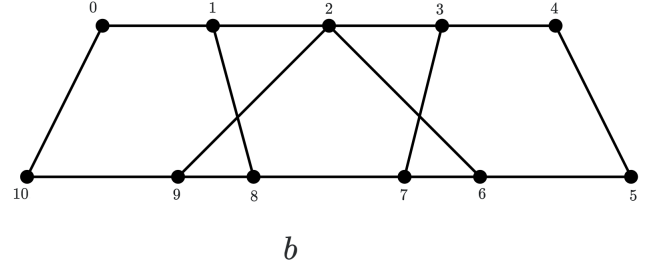
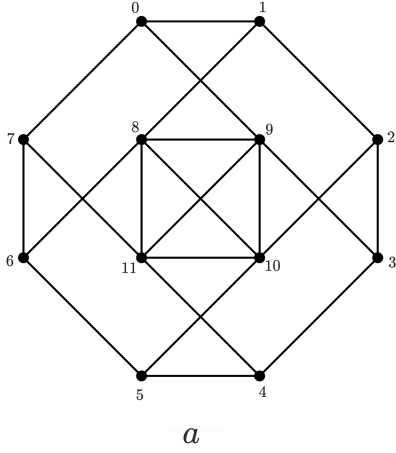
Proposición 2.51.

$$e(3, 6, 17) \geq 40$$

Demostración. Sean G un $(3, 6)$ -grafo con respecto a una 2-coloración χ sobre 17 vértices y p un vértice preferido tal que $d_r(p) = 3$. Existe una única solución en proposición 2.38 teniendo un valor mínimo de 38 aristas rojas para $e(3, 6, 17)$ donde $s_2 = 0$ (s_2 es el número de vértices de grado 3) en ésta solución. Como $d_r(p) = 3$, luego G tiene 39 o más aristas rojas. Por definición 2.29 $H_2(p)$ es un $(3, 5)$ -grafo sobre 13 vértices y por proposición 2.37 $H_2(p)$ tiene exactamente 26 aristas rojas, como $\sum_{j=0}^{\sigma(G)} t_j r_j = e - e_2 \geq 13$, entonces $H_1(p)$ contiene por lo menos un vértice q tal que $d_r(q) = 5$ en G . Sin embargo para todo $w \in V(H_2(p))$ $d_r(w) = 4$ lo que implica que en $H_2(p)$ solo existen 0-vértices y 1-vértices, luego los 4 1-vértices sobre q más los 2 restantes de $H_1(p)$ forman un 6-conjunto independiente en G , lo que es una contradicción, por tanto no pueden haber vértices $p \in G$ tal que $d_r(p) = 3$.

Ahora, sea $G = K_{17}$ un $(3, 6)$ -grafo con 38 aristas rojas, si p es un vértice preferido tal que $d_r(p) = 4$ entonces $H_2(p)$ debe contener un 0-vértices. En efecto, suponga que $H_2(p)$ no contiene un 0-vértice, en $H_2(p)$ existen por lo menos 20 aristas rojas, es decir que hay a lo más 14 aristas rojas entre $H_1(p)$ y $H_2(p)$, por otro lado, si un vértice en $H_1(p)$ es adyacente a 3 o más 1-vértices, esos 3 1-vértices, junto con los 3 vértices restantes de $H_1(p)$ forman un 6-conjunto independiente, por tanto un vértice en $H_1(p)$ es adyacente a lo más a 2 1-vértices en $H_2(p)$. Así, en $H_2(p)$ existen a lo más 8 1-vértices, si no hay 0-vértices, entonces los 4 vértices restantes de $H_2(p)$ son 2-vértices, con lo que existen al menos 16 aristas rojas entre $H_1(p)$ y $H_2(p)$, lo que contradice el primer conteo, por tanto, existe un 0-vértice q en $H_2(p)$, si se extiende el grafo $G = K_{17}$ a un $(3, 6)$ -grafo con respecto a la 2-coloración χ cambiando la arista $\chi(\{p, q\}) = \text{rojo}$, entonces si se demuestra la no existencia de un $(3, 6)$ -grafo con respecto a χ sobre 17 vértices con 39 aristas rojas, la no existencia de un $(3, 6)$ -grafo con respecto a χ con 17 vértices y 38 aristas se demuestra simultáneamente extendiendo el grafo.

Sea $G = K_{17}$ un $(3, 6)$ -grafo con respecto a una 2-coloración χ con 39 aristas rojas; G debe contener 7 vértices de grado-rojo 4 y 10 vértices de grado-rojo 5. Suponga que existe un vértice p preferido tal que $d_r(p) = 4$ adyacente a 3 vértices de grado-rojo 5, luego $H_2(p)$ es un $(3, 5)$ -grafo con respecto a χ sobre 12 vértices y 20 aristas, este grafo es único, ver figura 2.2.6(a), se prueba que es imposible poner las aristas rojas entre $H_1(p)$ y $H_2(p)$, ver apéndice 3.4.



Ahora, sean $T_1 = \{v \in V(G) : d_r(v) = 4\}$ y $T_2 = \{v \in V(G) : d_r(v) = 5\}$ y sea $n = |\{x, y\} : x \in T_1 \text{ y } y \in T_2|$, por lo que se probó en apéndice 3.4, cada vértice de grado-rojo 4 está conectado a por lo menos 2 vértices de grado-rojo 4, es decir cada vértice de grado-rojo 4 está conectado por una arista roja a lo mas a 2 vértices de grado-rojo 5, luego $n \leq 2 * 7 = 14$.

Por otro lado, suponiendo que cada vértice de grado 5 está conectado por arista roja a por lo menos 2 vértices de grado 4 se tiene que $n \geq 2 * 10 = 20$ lo que es una contradicción. Por tanto existe un vértice de grado 5 conectado con arista roja a por lo menos 4 vértice de grado 5. Además, si existe un vértice de grado 5 conectado con arista roja a 5 vértices de grado 5, prefiriendo ese vértice se tiene que H_2 es un $(3, 5, 11) \geq 15$. Por tanto, debe existir un vértice p de grado 5 conectado con aristas rojas a 4 vértices de grado 5 y 1 vértice de grado 4, prefiriendo el vértice p , se tiene que $H_2(p)$ es un $(3, 5)$ -grafo con respecto a χ sobre 11 vértices y 15 aristas rojas, este grafo es único, ver figura 2.2.6(b). Como antes, se puede probar que es imposible poner aristas rojas entre $H_1(p)$ y $H_2(p)$ de tal forma que se forme un $(3, 6)$ -grafo con respecto a χ , (ver apéndice 3.4). Se sigue entonces que cualquier $(3, 6)$ -grafo con respecto a una 2-coloración χ con 17 vértices debe tener 40 aristas rojas o más. ■

Proposición 2.52.

$$R'(3, 7) \leq 22$$

Demostración. Sean $G = K_{23}$ un $(3, 7)$ -grafo completo con respecto a una 2-coloración χ y $p \in V(G)$. Si $d_r(p) \leq 4$, entonces prefiriendo ese vértice $H_2(p)$ tendrá 18 vértices o más, se sabe que $R(3, 6) = 18$, es decir existe un 6-conjunto independiente en $H_2(p)$ el cual, junto a p forma un 7-conjunto independiente. Si $d_r(p) = 5$, entonces $H_2(p)$ es un $(3, 6)$ -grafo con respecto a χ el cual tiene 40 o más aristas, aplicando corolario 2.33 se obtiene

$$40 \leq 6 \left(\frac{23}{2} - 7 + 2 \right) = 39,$$

por tanto, G contiene solo vértices con $d_r(p) = 6$.

Debido a su longitud, el resto de la prueba se divide en lemas

Lema 2.53. Para cualquier vértice preferido p , $r_i(0) = 0$ cuando $i \geq 4$.

Demostración. Sean p' un i -vértice ($N_r(p', H_1) = i$) y W_1 el subgrafo de G formado por los vértices que estan conectados mediante una arista roja a p o p' o a ambos.

Sea W_2 el subgrafo de G formado por los vértices de G distintos de p, p' y de los vértices de W_1 , (W_2 es un subgrafo de $H_2(p)$), cualquier conjunto independiente en W_2 puede extenderse con p y p' , por tanto W_2 debe ser un $(3, 5)$ -grafo con respecto a χ . Como $d_r(p) = d_r(p') = 6$, entonces W_1 tiene $(12 - i)$ vértices y W_2 tiene $(9 + i)$ vértices, además se conoce que $R'(3, 5) \leq 13$, por tanto $i \leq 4$. Ahora, suponga que $i = 4$, es decir que W_2 tiene 13 vértices, por proposición 2.37 $e(3, 5, 13) = 26$ y para todo $p_i \in V(G)$ se cumple que $N_r(p_i, W_2) = 4$ y $N_r(p_i, G) = 6$, luego existen $13 * 2 = 26$ aristas rojas entre W_2 y W_1 .

Ademas, para $q_i \in W_1$ con $i = 1, 2, \dots, 8$ se tiene que $d_r(q_1) + d_r(q_2) + \dots + d_r(q_8) = 48$, de las cuales 12 corresponden a las aristas rojas que van a p y p' , 26 corresponden a las aristas rojas que van a W_2 y las 10 restantes corresponden a las aristas rojas que hay en W_1 , pero en W_1 pueden haber a lo mas 4 aristas rojas, lo que es una contradicción, por tanto i no puede ser 4. ■

Lema 2.54. Para cualquier vértice preferido p ,

$$r_1(0) = 2 + r_3(0) \quad \text{y} \quad r_2(0) = 14 - 2r_3(0) \quad (1)$$

más aun, si z es el número de aristas rojas entre 1-vértices y 3-vértices y $\epsilon = \epsilon(\infty, 3)$, entonces

$$2r_2(1) \geq [6 - 2r_3(0)] + r_3(2) + (z + \epsilon) \quad (2)$$

Demostración. Por observación 2.49(1), $r_o(0) = 0$ y por el lema anterior $r_i(0) = 0$ para $i \geq 4$, así $r_1(0) + r_2(0) + r_3(0) = 16$ (ya que existen 16 vértices en $H_2(p)$), cada vértice en $H_1(p)$ esta conectado con una arista roja a 5 vértices de $H_2(p)$, luego $r_1(0) + 2r_2(0) + 3r_3(0) = 30$ (ya que existen 30 aristas entre $H_1(p)$ y $H_2(p)$), obteniendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} r_1(0) + r_2(0) + r_3(0) &= 16 \\ r_1(0) + 2r_2(0) + 3r_3(0) &= 30 \end{aligned}$$

restando las dos ecuaciones se tiene $r_2(0) = 14 - 2r_3(0)$

Multiplicando por (-2) la primera ecuacion y restando la segunda se obtiene $r_1(0) = 2 + r_3(0)$.

Además, aplicando la proposición 2.47 con $a = \infty$ y $a = 3$, se obtiene

$$\begin{aligned}
[3] \binom{6}{3} &\geq \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\sum_{i=1}^3 \binom{6-i}{3-i} r_i(j) \right) + \epsilon \\
&\geq \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\binom{5}{2} r_1(j) + \binom{4}{1} r_2(j) + \binom{3}{0} r_3(j) \right) + \epsilon \\
&\geq \binom{5}{2} r_1(0) + \binom{4}{1} r_2(0) + \binom{3}{0} r_3(0) - \binom{4}{1} r_2(1) - \binom{3}{0} r_3(1) + \binom{3}{0} r_3(2) + \epsilon \\
60 &\geq 10r_1(0) + 4r_2(0) + r_3(0) - 4r_2(1) - r_3(1) + r_3(2) + \epsilon \tag{3}
\end{aligned}$$

donde se excluyo $r_1(1), r_1(2), r_2(2)$ ya que $r_1(1) = r_1(2) = r_2(2) = 0$.

Ahora, sea $\tau = \sum [N_r(q, H_2(p))]$ para todo $q \in H_2(p)$ donde q es un 1-vértices, claramente $\tau = 5r_1(0)$. Además, cada arista roja que une dos 1-vértices se cuenta 2 veces en τ , cada arista roja que un 1-vértice y un 2-vértice se cuenta una sola vez en τ , también cada arista roja que une un 1-vértice con un 3-vértice se cuenta una vez en τ . Pero el número de aristas rojas que unen dos 1-vértices es $r_2(1)$, el número de aristas rojas que unen un 1-vértice con un 2-vértice es $r_3(1)$ y como z es el número de aristas rojas entre 1-vértices y 3-vértices, se tiene que $\tau = 2r_2(1) + r_3(1) + z$, usando esta y las ecuaciones en (1) para eliminar $r_3(1), r_1(0)$ y $r_2(0)$ de (3) se obtiene

$$\begin{aligned}
60 &\geq 10(2 + r_3(0)) + 4(14 - 2r_3(0)) + r_3(0) - 4r_2(1) - (5r_1(0) - z - 2r_2(1)) + r_3(2) + \epsilon \\
&\geq 70 + 3r_3(0) - 5(2 + r_3(0)) - 2r_2(1) + z + r_3(2) + \epsilon \\
2r_2(1) &\geq [6 - 2r_3(0)] + r_3(2) + (z + \epsilon).
\end{aligned}$$

■

Lema 2.55. Para cualquier vértice preferido p ,

$$2 \leq r_3(0) \leq 4$$

Demostración. Por observación 2.49(2), hay a lo mas seis 1-vértices en $H_2(p)$ y por lema anterior $r_3(0) = r_1(0) - 2$, es decir que $r_3(0) \leq 4$.

Ahora, si $r_3(0) = 0$, entonces $r_1(0) = 2$, por tanto $r_2(1) \leq 1$ (de otro modo $r_1(0) > 2$), sustituyendo en (2) del lema anterior se tiene

$$2 \geq 6 + r_3(2) + (z + \epsilon)$$

por proposición 2.47, $\epsilon \geq 0$, así la inecuación no se cumple, con lo que $r_3(0) \neq 0$.

Si $r_3(0) = 1$, entonces $r_1(0) = 3$, por tanto $r_2(1) \leq 2$, sustituyendo en (2) del lema anterior se tiene

$$2r_2(1) \geq 4 + r_3(2) + (z + \epsilon) \geq 4 + r_3(2),$$

sin embargo, si $r_2(1) = 2$, entonces $r_3(2) = 1$, con lo cual se tiene que $4 \geq 4 + 1$, lo que es una contradicción, por tanto $r_3(0) \neq 1$. ■

■

Capítulo 3

Implementación de los números de Ramsey en SAGEMATH

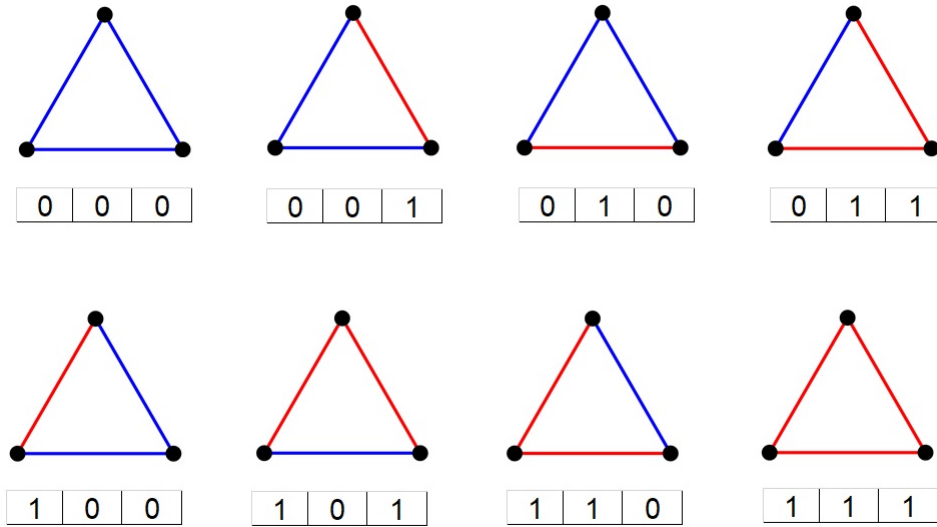
El método computacional que se proporciona en esta tesis requiere la capacidad de generar todas las 2-coloraciones de los grafos completos en un orden específico y analizar cada grafo coloreado y ver si se satisfacen o no las condiciones del número de Ramsey dado. El código que se proporciona no es de ninguna forma eficiente, es un método de fuerza bruta, ya que calcula todas las 2-coloraciones de un grafo (incluso aquellos que tienen una estructura similar o se sabe que ya contienen subgrafos completos monocromáticos) y se repite iterativamente en cada subgrafo completo del tamaño analizado por el número de Ramsey. Sin embargo este código será una línea de base para que otros puedan construir o mejorar este, para generar un algoritmo comprensible y eficiente para determinar valores exactos para los números de Ramsey.

3.1. Representación de las coloraciones en un grafo completo

Se requiere representar todos los grafos 2-coloreados en un orden determinado, para esto, se necesita representar cada una de las aristas del grafo completo e identificarse si la arista es roja o azul. Con este requisito binario, se lleva a considerar a los números binarios como un conducto para representar todas las aristas del grafo.

Con esto es posible representar cualquier grafo completo dado como una matriz de números binarios con un 1 o un 0 en una posición específica, correspondiente a si la arista es de color rojo o azul respectivamente. En un grafo completo K_n existen $\binom{n}{2}$ aristas y $2^{\binom{n}{2}}$ posibles 2-coloraciones, lo que complica el calculo, sin embargo es posible convertir cada número de 0 a $2^{\binom{n}{2}} - 1$ como una única representación binaria.

Ejemplo 3.1. En la siguiente figura se muestra la representación de todas las 2-coloraciones del grafo K_3 y el número binario correspondiente.



El algoritmo en SAGEMATH para convertir un entero a binario se presenta a continuacion.

```
def CBinario(numin):
    L=[]
    while numin!=0:
        L.append(numin%2)    # %residuo
        numin=numin//2      # // cociente
    return L
```

CBinario toma un entero como entrada y genera una lista de ceros y unos correspondiente a la conversión del entero en binario.

3.2. Matrices de adyacencia

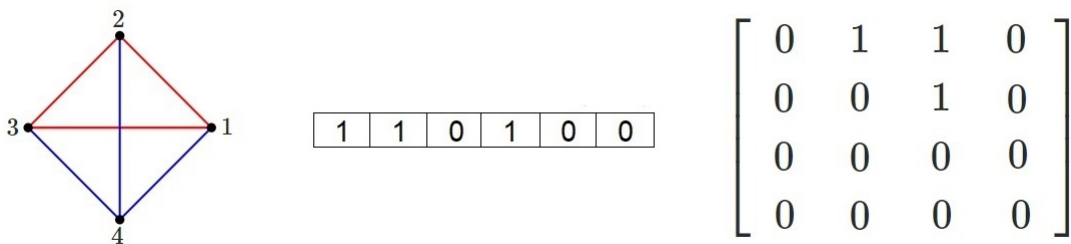
Si bien producir una representación binaria es útil, no es eficiente al momento de analizar estas representaciones, por tanto se utiliza matrices de adyacencia, en este trabajo de grado se trabajan 2-coloraciones de grafos completos K_n . A cada 2-coloración χ de K_n se le asocia la matriz A estrictamente triangular superior de orden n de componentes a_{ij} con $i < j$, para $v_i, v_j \in V(K_n)$ definido de la siguiente forma

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi(\{v_i, v_j\}) = \text{rojo} \\ 0 & \text{si } \chi(\{v_i, v_j\}) = \text{azul} \end{cases}$$

esta matriz se denomina matriz de adyacencia asociada a la 2-coloración χ .

La representación binaria de un grafo se transfiere a la representación de la matriz de adyacencia de manera que un 1 en la representación binaria corresponde a un 1 en la ubicación de la matriz asignada y un 0 en la representación binaria corresponde a un 0 en la ubicación de la matriz asignada.

Ejemplo 3.2. En la siguiente figura se muestran 3 representaciones equivalentes de una 2-coloración del grafo K_4 . La representación gráfica se transfiere a la representación binaria es el orden de aristas $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$ de izquierda a derecha (CBinario regresa la lista binaria de izquierda a derecha para facilitar la colocación de 1 y 0 en la matriz de adyacencia), en la lista binaria aparece 1 si la arista correspondiente es roja y 0 si la arista es azul y en el mismo orden se transfiere a la matriz de adyacencia, donde la parte inferior de la diagonal son ceros.



El siguiente algoritmo toma elemento por elemento de la lista binaria y va asignando los elementos a la matriz de forma que priorice el llenado de cada fila en orden. Por ejemplo, para llenar la matriz de adyacencia $n \times n$, se asigna el primer elemento de la lista binaria al elemento $(1, 2)$ de la matriz, el segundo a $(1, 3)$ y así sucesivamente, luego cuando el $n - 1$ elemento de la representación binaria se asigna a $(1, n)$, el siguiente elemento se asigna a la segunda fila de la matriz $(2, 3)$, el $n + 1$ elemento se asigna a $(2, 4)$ y así sucesivamente hasta que los últimos 3 elementos llenen $(n - 1, n - 2)$, $(n, n - 2)$ y $(n, n - 1)$ respectivamente (ver ejemplo 3.2). El algoritmo en SAGEMATH quedaría como sigue

```
import numpy as np
def CrearMatriz(num,dim):
    G=np.zeros((dim,dim),dtype=np.int)
    A=CBinario(num)
    while len(A)<((dim*(dim-1))/2):
        A.append(0)
    print A
    i=0
    for x in range(dim):
        for y in range(x+1,dim):
            G[x][y]=A[i]
            i=i+1
    return G
```

CrearMatriz toma un entero en base 10 y una dimensión n y devuelve una matriz $n \times n$. El propósito de este código es crear una matriz de adyacencia para una 2-coloración específica de un grafo K_n . Éste algoritmo toma un valor entero y utiliza *CBinario* para convertir ese valor en una lista binaria que define la 2-coloración específica del grafo.

3.3. Buscando triángulos rojos

En una 2-coloración de un grafo existe un triángulo rojo con vértice común i , si sobre la i -ésima fila de la matriz de adyacencia A existen por lo menos dos 1, suponga $a_{ij} = a_{ik} = 1$, para $i < j < k$, en este caso el triángulo rojo se completa si $a_{jk} = 1$.

Ejemplo: se quiere saber si existen triángulos rojos en la matriz A de la figura 3.2, se recorre la primera fila hasta encontrar un 1, que en este caso corresponde a la posición $(1, 2)$, para la existencia de un triángulo debe existir otro 1 en la misma fila, en A el siguiente 1 está en la posición $(1, 3)$, teniendo estas dos posiciones se verifica si en la posición $(2, 3)$ aparece un 1, si es así, existe un triángulo en A . En SAGEMATH el algoritmo que busca triángulos rojos es el siguiente

```
def Triangulos(A):
    for i in range(len(A)):
        for j in range(i, len(A)):
            if A[i][j] == 1:
                for k in range(j+1, len(A)):
                    if A[i][k]==1 and A[j][k]==1:
                        return True
    return False
```

Triangulos toma una matriz de adyacencia A como entrada y devuelve verdadero si existe un triángulo rojo o falso si no. Este algoritmo es eficiente pero solo busca triángulos rojos, para el caso de subgrafos K_n para $n > 3$ se necesitan algunas modificaciones del algoritmo.

3.4. Buscando subgrafos monocromáticos

Para buscar subgrafos K_n azules con $n > 3$, es necesario crear una lista C , donde proporcione listas de vértices con el cual este conectado mediante una arista azul cada vértice, ejemplo: sea A la matriz de la figura 3.2, C proporciona una lista de listas donde $C[0]$ corresponde la lista de los vértices mayores a 0 conectados mediante una arista azul con el vértice 0 (cabe resaltar que en SAGEMATH los vértices inician en 0, así los vértices de 3.2 se reorganizan de 0 a 3), luego $C[n]$ corresponde a la lista de los vértices mayores que n conectados mediante una arista azul con el vértice n . En SAGEMATH la lista C para el ejemplo queda como sigue

```

B=[]
C=[]
for i in range(4):
    B=[]
    for j in range(i+1,4):
        if T[i][j]==0:
            B.append(j)
    C.append(B)
print C
-----
[[3], [3], [3], []]

```

$C = [[3], [3], [3], []]$ ya que el vértice 0 solo esta conectado mediante arista azul con el vértice 3, igual para el vértice 2 y 3, el vértice 4 no esta conectado con ningún vértice mayor que 4 por tanto genera una lista vacía.

Teniendo esto, se contruyen todas las posibles combinaciones de cada $C[i]$ y $n - 1$, donde n es el subgrafo monocromático que se esta buscando y similarmente que **Triangulo** se verifican si las posiciones correspondientes aparece un 0 para determinar si existe o no un K_n monocromático azul. El algoritmo en SAGEMATH queda como sigue

```

def Independiente(A,dimension,tamano_conjunto):
    B=[]
    C=[]
    for i in range(dimension):
        B=[]
        for j in range(i+1,dimension):
            if A[i][j]==0:
                B.append(j)
        C.append(B)
    for w in range(dimension):
        O=list(Combinations(C[w],tamano_conjunto-1))
        if O != []:
            for k in range(len(O)):
                x=0
                for i in O[k]:
                    for j in O[k]:
                        x=x+A[i][j]
                if x == 0:

```

```

        return True

    return False

```

Independiente toma como entrada una matriz, la dimensión de la matriz y el tamaño del clique monocromático azul que se está buscando y devuelve verdadero si existe un clique monocromático azul y falso si no.

Observe que si se quiere buscar subgrafos monocromáticos K_n de color rojo, se debe trabajar con el complemento de la matriz y aplicar el mismo algoritmo. El algoritmo que genera una matriz complemento queda como sigue

```

def Complemento(num,dim):
    H=np.zeros((dim,dim),dtype=np.int)
    A=CBinario(num)
    while len(A)<((dim*(dim-1))/2):
        A.append(0)
    D=[]
    for i in range(len(A)):
        D.append(1)
    F=[m - n for m,n in zip(D,A)]
    j=0
    for x in range(dim):
        for y in range(x+1,dim):
            H[x][y]=F[j]
            j=j+1
    return H

```

Ejemplo 3.3. Se quiere probar que $R(3,3) = 6$. En este caso si se aplica el algoritmo $(R(3,3);5)$ sobre 5 vértices, este encontrará un contraejemplo, el cual lo muestra como representación de matriz, para el caso de 6 vértices el algoritmo recorrerá todas las 2^{15} posibles 2-coloraciones y no encontrará ningún contraejemplo $(R(3,3)=6)$.

```

R(3,3)>5
for k in range(2**10):
    G=CrearMatriz(k,5)
    if Triangulos(G)==True or Independiente(G,5,3)==True:
        print (str(k)+ " Passed")
        k=k+1
    else:

```

```

        print(k)
        U=CrearMatriz(k,5)
        print (U)
        break
print("Done")

```

```

...
219 Passed
220
[[0 0 0 1 1]
 [0 0 1 0 1]
 [0 0 0 1 0]
 [0 0 0 0 0]
 [0 0 0 0 0]]

```

Done

R(3,3)=6

```

for k in range(2**15):
    G=CrearMatriz(k,6)
    if Triangulos(G)==True or Independiente(G,6,3)==True:
        print (str(k)+ " Passed")
        k=k+1
    else:
        print(k)
        U=CrearMatriz(k,5)
        print (U)
        break
print("Done")

```

```

...
32765 Passed
32766 Passed
32767 Passed

```

Done

Conclusiones

-

Apéndice

Apéndice 1

Para encontrar una cota inferior de los números de Ramsey anteriores a $R(3, 6) = 18$ se ha venido construyendo 2-coloraciones de grafos con la ayuda de módulos, para este caso, se requiere construir una 2-coloración del grafo completo sobre 17 vértices que no contenga un K_3 monocromático rojo ni un K_6 monocromático azul, sin embargo ya no es posible usar módulos.

En <http://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/data/ramsey.html>, se encuentran todas las posibles 2-coloraciones de K_n para $n = 1, 2, \dots, 17$ que no contienen ni un K_3 monocromático rojo ni un K_6 monocromático azul. Para 17 vértices, existen 7 de las 2-coloraciones que se necesitan, no obstante no es posible probar que alguna de estas 2-coloraciones no contiene un K_3 monocromático rojo ni un K_6 monocromático azul como se ha venido desarrollando con los anteriores números, para este caso, se comprobará mediante los algoritmos **Triangulos** e **Independiente** del capítulo 3.

Para hacer esto es necesario encontrar el número binario y así usar CrearMatriz. Así, la matriz de una 2-coloración del grafo completo K_{17} el cual no posee K_3 monocromatico rojo ni un K_6 monocromático azul es el siguiente

```
CrearMatriz(61381485421056196018508786574505654960677, 17)

-----
array([[0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0],
       [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0],
       [0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0],
       [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0],
       [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0],
       [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0],
       [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0],
       [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0],
       [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0],
       [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1],
       [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0],
       [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1],
       [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0],
       [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1],
       [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0],
       [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1],
       [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]])
```

Teniendo la matriz de adyacencia ya es posible utilizar los algoritmos para saber si el grafo cumple con lo requerido.

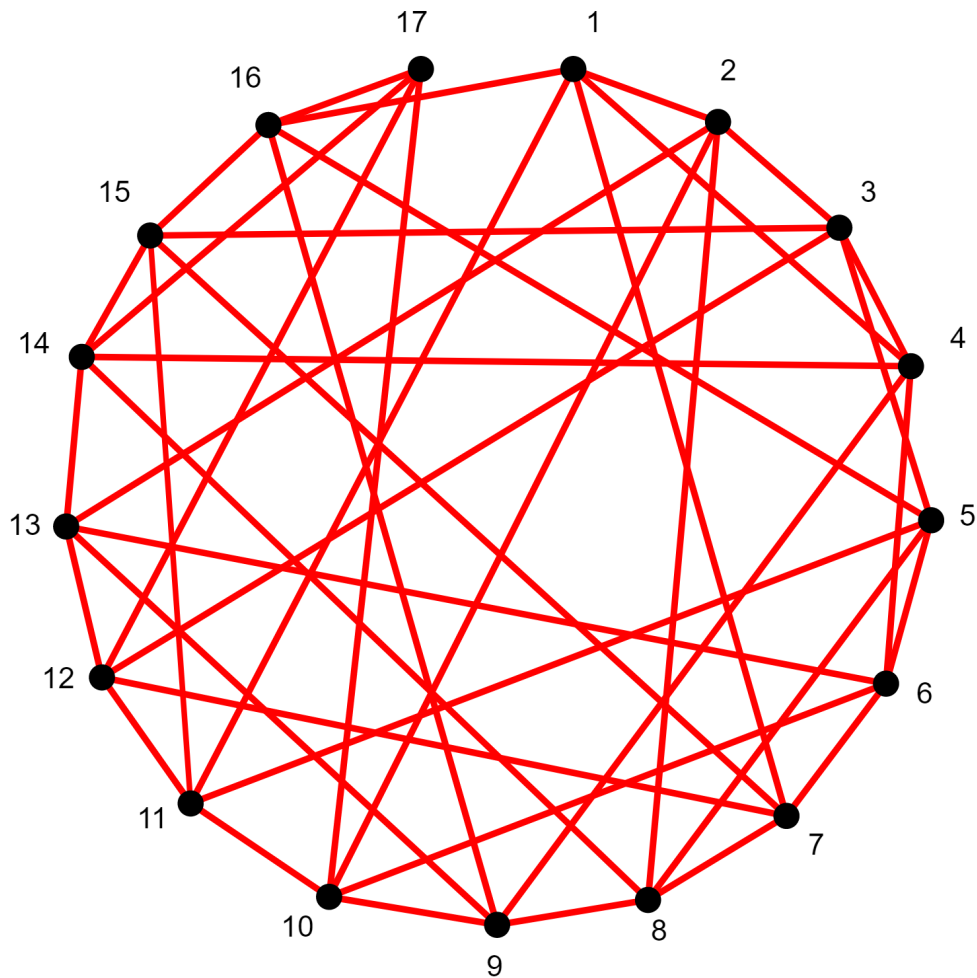
```

if Triangulos(Y)==True or Independiente(Y,17,6)==True:
    print "Existen triangulos o 6-conjuntos independientes en Y"
else:
    print "No existen triangulos ni 6-conjuntos independientes en Y"

```

 No existen triangulos ni 6-conjuntos independientes en Y

Con esto se concluye que la 2-coloración del grafo completo K_{17} no posee un K_3 monocromático rojo ni un K_6 monocromático azul. Además la representación gráfica de esta 2-coloración de K_{17} queda de la siguiente manera, (cabe resaltar que solo aparecen las aristas rojas con el fin de notar la forma del grafo).



Apéndice 2

En la proposición 2.36 se quiere probar $e(3, 4, 8) \geq 10$, donde se obtiene el sistema

$$11s_0 + 9s_1 \leq 8e$$

$$3s_0 + 2s_1 = 2e$$

$$s_0 + s_1 = 8$$

Usando programación entera mixta (MIP). Dividiendo entre 2 la segunda ecuación obtenemos la función objetivo e igualando la primera y tercera ecuación se obtiene una restricción y la tercera ecuación será la segunda restricción. Así,

Función objetivo: $e = \frac{3}{2}s_0 + s_1$
 Restricciones: $s_0 + s_1 = 8$ y $-\frac{1}{8}s_0 + \frac{1}{8}s_1 \leq 0$.

En SAGEMATH fue necesario usar la librería **PuLP** (más informacion de esta libreria en <https://pythonhosted.org/PuLP/>), la cual proporciona un lenguaje para modelar y resolver problemas de optimización utilizando programación lineal.

```

from pulp import *
from fractions import Fraction
prob=LpProblem("edges", LpMinimize)
x1= LpVariable("x1", lowBound=0, cat='Integer')
x2= LpVariable("x2", lowBound=0, cat='Integer')
prob += Fraction(5,2)*x1 + 2*x2
prob += (1)*x1 + (1)*x2 <= 12
prob += (1)*x1 + (1)*x2 >= 12
prob += Fraction(1,6)*x1 + Fraction(1,6)*x2>=0
prob

status = prob.solve() #Se resuelve usando la opción solv de PuLP.
LpStatus[status] #Estado de la solución

-----
'Optimal'
-----
value(x1),value(x2),value(prob.objective)

-----
(0.0, 12.0, 24.0)
-----

```

Apéndice 3

Para probar que $e(3, 6, 17) \geq 38$ en la proposición 2.38 se requiere la solución que minimiza e en el sistema

$$40s_0 + 36s_1 + 35s_2 \leq 17e$$

$$5s_0 + 4s_1 + 3s_2 = 2e$$

$$s_0 + s_1 + s_2 = 17$$

Dividiendo entre 2 la segunda ecuación se obtiene la función objetivo, la tercera ecuación será una restricción e igualando la primera y tercera ecuación se obtiene la segunda restricción. Así se tiene

Función objetivo: $e = \frac{5}{2}s_0 + 2s_1 + \frac{3}{2}s_2$

Restricciones: $s_0 + s_1 + s_2 = 17$ y $\frac{5}{34}s_0 - \frac{2}{17}s_1 - \frac{19}{34}s_2 \geq 0$.

Similarmente, se usa SAGEMATH para minimizar e

```

from pulp import *
from fractions import Fraction

prob=LpProblem("edges", LpMinimize)
x1= LpVariable("x1", lowBound=0, cat='Integer')
x2= LpVariable("x2", lowBound=0, cat='Integer')
x3= LpVariable("x3", lowBound=0, cat='Integer')
prob += Fraction(5,2)*x1 + 2*x2 + Fraction(3,2)*x3
prob += (1)*x1 + (1)*x2 + (1)*x3 >= 17
prob += (1)*x1 + (1)*x2 + (1)*x3 <= 17
prob += Fraction(5,34)*x1-Fraction(2,17)*x2-Fraction(19,34)*x3 >= 0
prob

status = prob.solve()
LpStatus[status]

-----
'Optimal'
-----
value(x1),value(x2), value(x3) ,value(prob.objective)

-----
(8.0, 9.0, 0.0, 38.0)
-----

```

Apéndice 4

En este apéndice se presenta el algoritmo que el autor diseñó en el software algebraico libre SAGEMATH, el cual permite justificar los dos enunciados siguientes en un $(3,6)$ -grafo con 17 vértices:

- (a) No existe un vértice preferido p de grado 4 tal que $H_1(p)$ contenga 3 vértices de grado 5.
- (b) No existe un vértice preferido p de grado 5 tal que $H_1(p)$ contenga 4 vértices de grado 5.

Estos enunciados se utilizan en la prueba de la proposición 2.51 para deducir que en un $(3,6)$ -grafo con 17 vértices debe contener por lo menos 40 aristas rojas.

Para el item (a), como ya se conoce la matriz de adyacencia A de $H_2(p)$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se crea una matriz de adyacencia B tamaño 17×17 , donde en las primeras 12×12 posiciones está la matriz de $H_2(p)$, la siguiente fila y columna pertenece al vértice p donde se sabe que $d_r(p) = 4$, así $H_1(p) = \{14, 15, 16, 17\}$, luego las componentes $b_{13,14}, b_{13,15}, b_{13,16}, b_{13,17}$ tienen un 1 y el resto se completan con 0,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora, como cada vértice 14, 15, 16, 17 se conectan mediante arista roja con 4 vértices en $H_2(p)$ y el vértice 16 se conecta con 3, entonces en la matriz B se completan con 1 en cada columna 13, 14, 15, 16 de tal forma que, los 4 vértices deben ser independientes y que existan exactamente 10 vértices de grado 5 y 7 vértices de grado 4.

Para esto se deben crear dos listas T y $T1$, las cuales buscan todos los posibles 4-conjuntos independientes en T de A y todos los posibles 3-conjuntos independientes en $T1$ de A .

```

C=[]
for i in range(12):
    D=[]
    for j in range(i+1,12):
        if A[i][j]==0:
            D.append(j)
    C.append(D)
"Busca 4-conjuntos independientes "
T=[]
for w in range(12):
    O=list(Combinations(C[w],3))
    if O != []:
        R=[w]
        for k in range(len(O)):
            x=0
            for i in O[k]:
                for j in O[k]:
                    x=x+A[i][j]
            if x != 0:
                pass
            else:
                for i in range(len(O[k])):
                    R.append(O[k][i])
        T.append(R)
        R=[w]

print T

-----
"Busca 3-conjuntos independientes "
T1=[]
for w in range(12):
    O=list(Combinations(C[w],2))
    if O != []:
        R=[w]
        for k in range(len(O)):
            x=0
            for i in O[k]:
                for j in O[k]:
                    x=x+A[i][j]
            if x != 0:
                pass
            else:
                for i in range(len(O[k])):
                    R.append(O[k][i])
        T1.append(R)
        R=[w]

print T1

```

Además, es necesario saber cuantos vértices de grado 5 y cuantos de grado 4 hay. En SAGEMATH queda como sigue,

```

"detecta el grado de los vertices del grafo y en las dos
ultimas posiciones, cuantos hay de grado 4 y cuantos de grado 5"

```

```

def valencia(A):
    L=[]
    v4=0
    v5=0
    for i in range(len(A)):
        s=0
        for k in range(i):
            s=s+A[k][i]
        for j in range(i+1,len(A)):
            s=s+A[i][j]
        L.append(s)
        if s==4:
            v4=v4+1
        if s==5:
            v5=v5+1
    L.append(v4)
    L.append(v5)
    return L

```

Teniendo esto, se crea un algoritmo el cual busque todas las posibles conexiones de $H_1(p)$ con $H_2(p)$, donde arroje cuantas soluciones son posibles sin que se pueda formar un $(3, 6)$ -grafo.

```

z=0
C=[x[:] for x in B]
for w in T:
    for s in range(4):
        C[w[s]][13]=1
    D=[x[:] for x in C]
    for i in T:
        for j in range(4):
            D[i[j]][14]=1
    F=[x[:] for x in D]
    for k in T:
        for r in range(4):
            F[k[r]][15]=1
    H=[x[:] for x in F]
    for m in T1:
        for n in range(3):
            H[m[n]][16]=1
    Y=valencia(H)
    if Y[17]==7 and Y[18]==10:
        if Independiente(H,17,6)==True:
            pass
        else:
            z=z+1
    H=[x[:] for x in F]
    F=[x[:] for x in D]
    D=[x[:] for x in C]
    C=[x[:] for x in B]
print z, "soluciones"
0 soluciones

```

Similarmente para el item (b), se muestra que es imposible poner las aristas rojas entre $H_1(p)$ y $H_2(p)$ sin formar un $(3, 6)$ -grafo para un vértice p preferido tal que $d_r(p) = 5$, donde

```

A = [[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1],
      [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0],
      [0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0],
      [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0],
      [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0],
      [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0],

```

```
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]]
```

```
B = [[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
      [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
      [0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
      [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
      [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
      [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
      [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
      [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
      [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
      [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
      [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
      [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0],
      [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0],
      [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1],
      [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
      [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
      [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
      [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
      [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]]
```

Para este caso, se añade 1 en las posiciones (12,13), (12,14), (12,15), (12,16), (12,17) en la matriz B , como el vértice p es de grado 5, se recorre el algoritmo anterior sobre la lista T en las columnas 13,14,15,16 y la columna 17 se recorre sobre $T1$.

```
z=0
C=[x[:] for x in B]
for w in T:
    for s in range(4):
        C[w[s]][12]=1
D=[x[:] for x in C]
for i in T:
    for j in range(4):
        D[i[j]][13]=1
F=[x[:] for x in D]
for k in T:
    for r in range(4):
        F[k[r]][14]=1
H=[x[:] for x in F]
for m in T:
    for n in range(4):
        H[m[n]][15]=1
Q=[x[:] for x in H]
```

```
    for t in T1:
        for e in range(3):
            Q[t[e]][16]=1
            Y=valencia(Q)
            if Y[17]==7 and Y[18]==10:
                if Independiente(Q,17,6)==True:
                    pass
                else:
                    z=z+1
                    Q=[x[:] for x in H]
                    H=[x[:] for x in F]
                    F=[x[:] for x in D]
                    D=[x[:] for x in C]
                    C=[x[:] for x in B]
print z, "soluciones"
-----
0 soluciones
```

Referencias

- [1] J. Aldous, S. Best, and R. Wilson. *Graphs and Applications: An Introductory Approach*. The Open University. Springer London, 2003.
- [2] L. E. Barton. Ramsey theory. 2016.
- [3] D. Cariolaro. On the Ramsey number $R(3,6)$. *Australasian Journal of Combinatorics*, **37**:301–304, 2007.
- [4] C. A. Diaz. Tesis de licenciatura: Teoria de Ramsey y teorema de erdos-szekeres. 2013.
- [5] G. Exoo. On two classical Ramsey numbers of the form $R(3,n)$. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **2**(4):488–490, 1989.
- [6] J. Goedgebeur and S. P. Radziszowski. New computational upper bounds for Ramsey numbers $R(3,k)$. *the electronic journal of combinatorics*, 20(1):28, 2013.
- [7] R. Graham and S. Butler. *Rudiments of Ramsey theory*, volume 123. American Mathematical Soc., 2015.
- [8] R. L. Graham and J. H. Spencer. Ramsey theory. *Scientific American*.
- [9] J. E. Graver and J. Yackel. Some graph theoretic results associated with Ramsey’s theorem. *Journal of Combinatorial Theory*, **4**(2):125–175, 1968.
- [10] R. E. Greenwood and A. M. Gleason. Combinatorial relations and chromatic graphs. *Canadian Journal of Mathematics*, **7**(1):7, 1955.
- [11] C. M. Grinstead and S. M. Roberts. On the Ramsey numbers $R(3,8)$ and $R(3,9)$. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **33**:27–51, 1982.
- [12] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford university press, 1979.
- [13] K. Ireland and M. Rosen. *A classical introduction to modern number theory*, volume 84. Springer Science & Business Media, 2013.
- [14] G. Kéry. On a theorem of Ramsey. *Math. Lapok*, 15:204–224, 1964.
- [15] B. M. Landman and A. Robertson. *Ramsey Theory on the integers*, volume 73. American Mathematical Soc., 2014.

-
- [16] B. D. McKay and Z. K. Min. The value of the Ramsey number $R(3,8)$. *Journal of Graph Theory*, **16**(1):99–105, 1992.
 - [17] B. D. McKay and S. P. Radziszowski. $R(4,5)=25$. *Journal of Graph Theory*, **19**(3):309–322, 1995.
 - [18] F. P. Ramsey. On a problem of formal logic. pages 264–286, 1930.
 - [19] A. Soifer. *Ramsey Theory: Yesterday, today, and tomorrow*, volume 285. Springer Science & Business Media, 2010.
 - [20] D. B. West et al. *Introduction to graph theory*, volume **2**. Prentice hall Upper Saddle River, 2001.
 - [21] R. J. Wilson. *Introduction to graph theory*. Pearson Education India, 1979.