ИДЗ-18.2

Найти закон распределения указанной случайной величины X и ее функцию распределения $F(X)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Построить график функции распределения $F(X)$.

1.5) Вероятность выпуска прибора, удовлетворяющего требованиям качества, равна 0,9. В контрольной партии 3 прибора. Случайная величина X – число приборов, удовлетворяющих требованиям качества.

Решение: Случайная величина X имеет биномиальное распределение. Найдем закон распределения случайной величины X, используя формулу Бернулли:

$$P_n^x = C_n^x p^x q^{n-x}$$

В данной задаче:

$n = 3$ – всего приборов в контрольной партии;

$x = \{0,1,2,3\}$ – вероятное количество приборов, удовлетворяющих требованиям качества.

P_n^x – вероятность того, что из n приборов ровно x будут удовлетворять требованиям качества.

По условию:

$p = 0{,}9$ – вероятность того, что прибор удовлетворяет требованиям качества.

$q = 1 - p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$ – вероятность того, что прибор не удовлетворяет требованиям качества.

0) $x = 0$

$$P_3^0 = C_3^0 \cdot (0{,}9)^0 \cdot (0{,}1)^3 = (0{,}1)^3 = 0{,}001$$

1) $x = 1$

$$P_3^1 = C_3^1 \cdot (0{,}9)^1 \cdot (0{,}1)^2 = 3 \cdot 0{,}9 \cdot (0{,}1)^2 = 0{,}027$$

2) $x = 2$

$$P_3^2 = C_3^2 \cdot (0{,}9)^2 \cdot (0{,}1)^1 = 3 \cdot 0{,}81 \cdot 0{,}1 = 0{,}243$$

3) $x = 3$

$$P_3^3 = C_3^3 \cdot (0{,}9)^3 \cdot (0{,}1)^0 = (0{,}9)^3 = 0{,}729$$

Таким образом, искомый закон распределения:

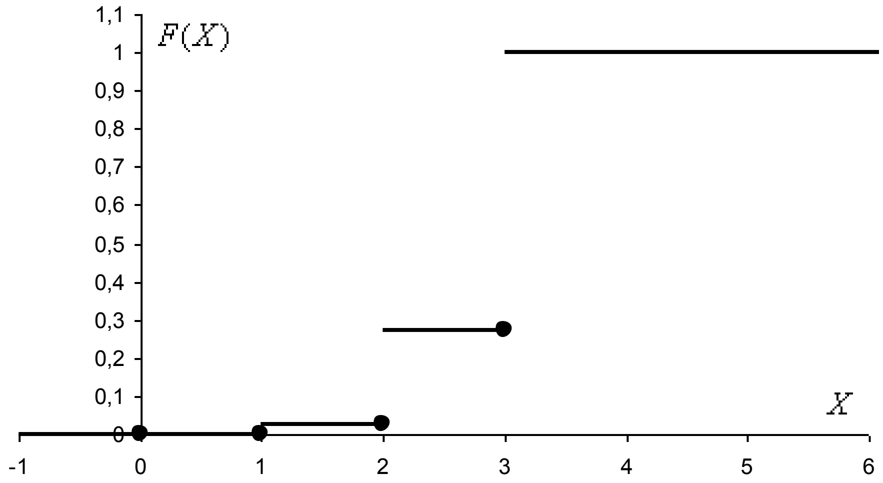
x_i	0	1	2	3
p_i	0,001	0,027	0,243	0,729

Проверка: 0,001 + 0,027 + 0,243 + 0,729 = 1

Составим функцию распределения:

$$F(X)=\begin{cases}0 \text{ } при \text{ } x\le 0;\\ 0{,}001 \text{ } при \text{ } 0<x\le 1;\\ 0{,}028 \text{ } при \text{ } 1<x\le 2;\\ 0{,}271 \text{ } при \text{ } 2<x\le 3;\\ 1 \text{ } при \text{ } x>3.\end{cases}$$

Выполним чертеж:



Вычислим математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Вычислим математическое ожидание: $M=np=3\cdot 0{,}9=2{,}7$

Найдем дисперсию: $D=npq=3\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1=0{,}27$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}27}\approx 0{,}52$

2.5) Задана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \frac{1}{10}(x^3+x), 0\le x\le 2\\ 1, x>2\end{cases}$$

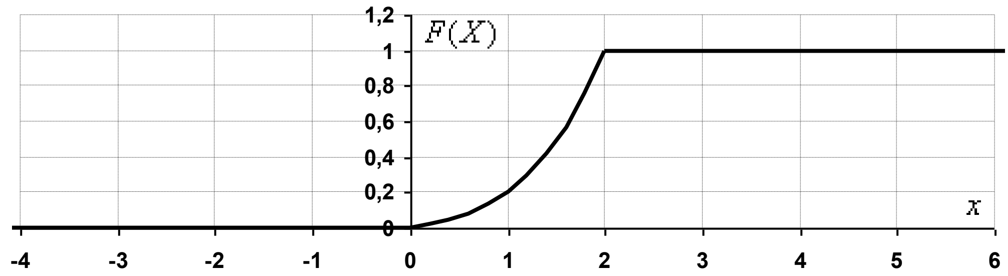
Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[0;1]$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

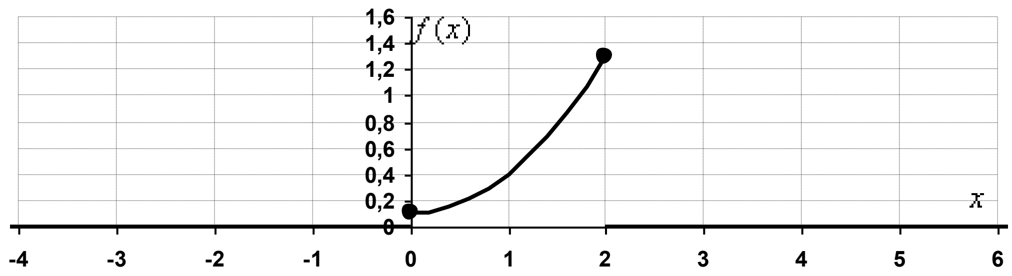
Решение:

Найдем функцию плотности распределения вероятностей:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \frac{1}{10}(3x^2+1), 0\le x\le 2\\ 0, x>2\end{cases}$$

Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$.





Вычислим математическое ожидание и дисперсию.

Математическое ожидание:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{1}{10}\int_0^2 x(3x^2+1)dx=\frac{1}{10}\int_0^2(3x^3+x)dx=$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{3x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=\frac{1}{10}\cdot(12+2-0)=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}=1{,}4$$

Дисперсия:

$$D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-(M(x))^2=\frac{1}{10}\int_0^2 x^2(3x^2+1)dx-\left(\frac{7}{5}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{10}\int_0^2(3x^4+x^2)dx-\frac{49}{25}=\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{3x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2-\frac{49}{25}=\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{96}{5}+\frac{8}{3}-0\right)-\frac{49}{25}=$$
$$=\frac{1}{10}\cdot\frac{328}{15}-\frac{49}{25}=\frac{164}{75}-\frac{49}{25}=\frac{17}{75}\approx 0{,}227$$

Найдем вероятность того, что X примет значение из отрезка $[0;1]$.

$P(0\le x\le 1)=F(1)-F(0)=\frac{2}{10}-0=0{,}2$ – искомая вероятность.

3.5) Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляются до ближайшего целого деления. Считая, что ошибки измерения распределены равномерно, найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, меньшая 0,04

Решение: Составим функцию плотности распределения вероятностей равномерно распределенной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \dfrac{1}{0{,}2}, 0\le x\le 0{,}2\\ 0, x>0{,}2\end{cases}=\begin{cases}0, x<0\\ 5, 0\le x\le 0{,}2\\ 0, x>0{,}2\end{cases}$$

Тогда искомая вероятность:

$$P(x<0{,}04)=\int_0^{0{,}04}f(x)dx+\int_{0{,}16}^{0{,}2}f(x)dx=5\int_0^{0{,}04}dx+5\int_{0{,}16}^{0{,}2}dx=$$
$$=5\cdot(x)\Big|_0^{0{,}04}+5\cdot(x)\Big|_{0{,}16}^{2}=5\cdot(0{,}04-0)+5\cdot(2-0{,}16)=0{,}2+0{,}2=0{,}4$$

Ответ: 0,4

4.5) Случайная величина X является средним арифметическим независимых и одинаково распределенных случайных величин, дисперсия каждой из которых равна 5. Сколько нужно взять таких величин, чтобы случайная величина X с вероятностью, не меньшей 0,9973, отклонялась от своего математического ожидания не более, чем на 0,01.

Решение: Случайная величина X удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова, поэтому справедливым является равенство $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum X_i-a\right|<\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)$.

В данном случае: $\varepsilon=0{,}01$, $\sigma=\sqrt{5}$, $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum X_i-a\right|<\varepsilon\right)\ge 0{,}9973$.

Таким образом:

$$2\Phi\left(\frac{0{,}01\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{5}}\right)\ge 0{,}9973$$

$$\Phi\left(\frac{0,01\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{5}}\right)\geq 0,4987$$

$$\frac{0,01\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{5}}\geq 3$$

$$\sqrt{\frac{n}{5}}\geq 300$$

$$\frac{n}{5}\geq 90000$$

$$n\geq 450000$$

Ответ: необходимо взять не менее, чем 450000 величин.