ИДЗ-18.2

Найти закон распределения указанной случайной величины X и ее функцию распределения $F(X)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Построить график функции распределения $F(X)$.

1.20) Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна $\frac{1}{6}$. Случайная величина X – число выигрышных билетов из четырех.

Решение: Случайная величина X имеет биномиальное распределение. Найдем закон распределения случайной величины X, используя формулу Бернулли:

$$P_n^x = C_n^x p^x q^{n-x}$$

В данной задаче:

$n = 4$ – всего билетов в выборке;

$x = \{0,1,2,3,4\}$ – вероятное количество выигрышных билетов в выборке.

P_n^x – вероятность того, что из n билетов выиграют ровно x.

По условию:

$p = \frac{1}{6}$ – вероятность того, что билет будет выигрышным.

$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ – вероятность того, что билет будет безвыигрышным.

0) $x = 0$

$$P_4^0 = C_4^0 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} \approx 0{,}4823$$

1) $x = 1$

$$P_4^1 = C_4^1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 4 \cdot \frac{125}{1296} = \frac{125}{324} \approx 0{,}3858$$

2) $x = 2$

$$P_4^2 = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 6 \cdot \frac{25}{1296} = \frac{25}{216} \approx 0{,}1157$$

3) $x = 3$

$$P_4^3 = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = 4 \cdot \frac{5}{1296} = \frac{5}{324} \approx 0{,}0154$$

4) $x = 4$

$$P_4^4 = C_4^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{1296} \approx 0{,}0008$$

Другие ИДЗ Рябушко можно найти на странице http://mathprofi.ru/idz_ryabushko_besplatno.html

Таким образом, искомый закон распределения:

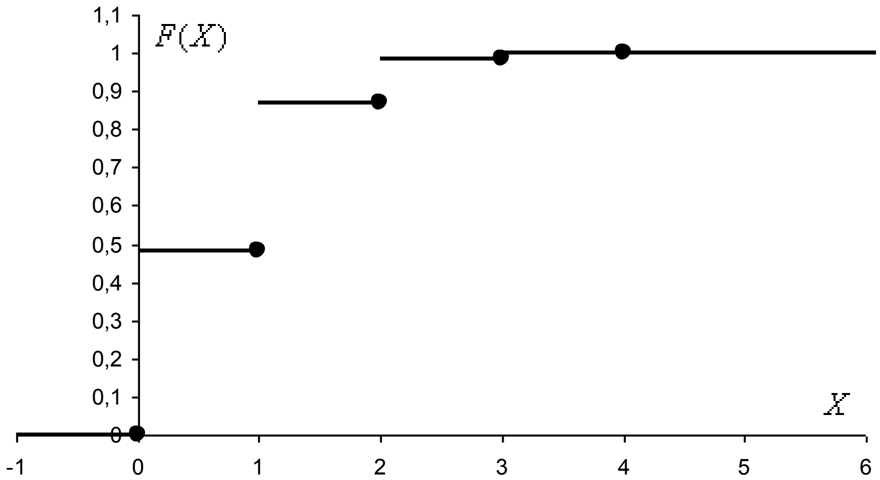
x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{625}{1296} \approx 0{,}4823$	$\frac{125}{324} \approx 0{,}3858$	$\frac{25}{216} \approx 0{,}1157$	$\frac{5}{324} \approx 0{,}0154$	$\frac{1}{1296} \approx 0{,}0008$

Проверка: 0,4823 + 0,3858 + 0,1157 + 0,0154 + 0,0008 = 1

Составим функцию распределения:

$$F(X) = \begin{cases} 0 \ \ \textit{при} \ x \le 0; \\ 0{,}4823 \ \textit{при} \ 0 < x \le 1; \\ 0{,}8681 \ \textit{при} \ 1 < x \le 2; \\ 0{,}9838 \ \textit{при} \ 2 < x \le 3; \\ 0{,}9992 \ \textit{при} \ 3 < x \le 4; \\ 1 \ \textit{при} \ x > 4. \end{cases}$$

Выполним чертеж:



Вычислим математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Используем соответствующие формулы для биномиального распределения

Вычислим математическое ожидание: $M = np = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{4}$

Найдем дисперсию: $D = npq = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{9}$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0{,}7453$

2.20) Задана функция распределения случайной величины X :

$$F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \frac{1}{6}(x^2+x), 0\le x\le 2\\ 1, x>2\end{cases}$$

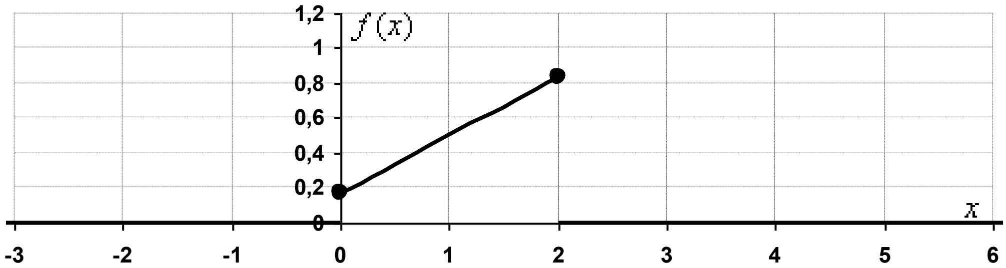
Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[0;1]$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

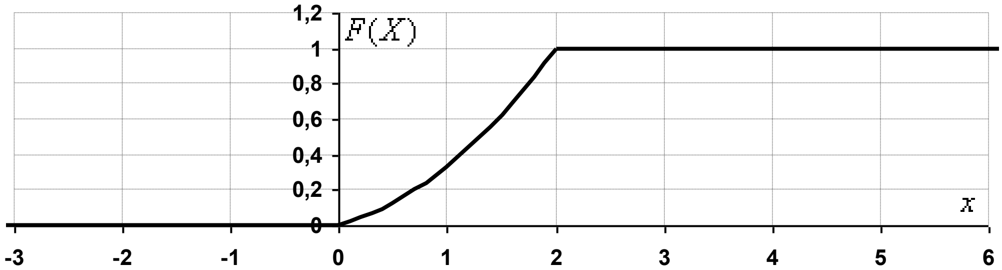
Решение:

Найдем функцию плотности распределения вероятностей:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \frac{1}{6}(2x+1), 0\le x\le 2\\ 0, x>2\end{cases}$$

Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$.





Вычислим математическое ожидание и дисперсию.

Математическое ожидание:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{1}{6}\int_0^2 x(2x+1)dx=\frac{1}{6}\int_0^2 (2x^2+x)dx=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{16}{3}+2-0\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{22}{3}=\frac{11}{9}\approx 1{,}222$$

Дисперсия:

$$D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-(M(x))^2=\frac{1}{6}\int_0^2 x^2(2x+1)dx-\left(\frac{11}{9}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^2(2x^3+x^2)dx-\frac{121}{81}=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}x^4+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2-\frac{121}{81}=\frac{1}{6}\cdot\left(8+\frac{8}{3}-0\right)-\frac{121}{81}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{32}{3}-\frac{121}{81}=\frac{16}{9}-\frac{121}{81}=\frac{23}{81}\approx 0{,}2840$$

Найдем вероятность того, что X примет значение из отрезка $[0;1]$.

$P(0\le x\le 1)=F(1)-F(0)=\frac{2}{6}-0=\frac{1}{3}\approx 0{,}333$ – искомая вероятность.

3.20) Число атак истребителей, которым может подвергнуться бомбардировщик над территорией противника, есть случайная величина, распределенная по закону Пуассона с математическим ожиданием $a=3$. Каждая атака с вероятностью 0,4 заканчивается поражением бомбардировщика. Определить вероятность поражения бомбардировщика в результате трех атак.

Решение: Используем формулу Пуассона для простейшего потока событий:

$P_m=\frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}$, в данной задаче:

$\lambda=np=3\cdot 0{,}4=1{,}2$

$m=\{1,2,3\}$ – возможное количество результативных атак

Определим вероятность поражения бомбардировщика в результате трех атак. По теореме сложения несовместных событий:

$$p=P_1+P_2+P_3\approx\frac{1{,}2^1}{1!}\cdot e^{-1{,}2}+\frac{1{,}2^2}{2!}\cdot e^{-1{,}2}+\frac{1{,}2^3}{3!}\cdot e^{-1{,}2}=$$

$$=0{,}3614+0{,}2169+0{,}0867=0{,}665$$

Ответ: $\approx 0{,}665$

4.20) Для определения средней урожайности поля в 10000 га предполагается взять на выборку по одному квадратному метру с каждого гектара площади и точно подсчитать урожайность с этих квадратных метров. Оценить вероятность того, что средняя выборочная урожайность будет отличаться от истинной средней урожайности на всем массиве не более чем на 0,1 ц, если предположить, что среднее квадратическое отклонение урожайности не превышает 3 ц.

Решение: Используем теорему Чебышева:

$$P\left(\left|\bar{x}-x_Г\right|\le\varepsilon\right)\ge 1-\frac{D}{n\varepsilon^2}$$

В данном случае:

$P\left(\left|\bar{x}-x_Г\right|\le 0{,}1\right)\ge 1-\frac{3^2}{10000\cdot(0{,}1)^2}=1-0{,}09=0{,}91$ – искомая вероятность.

Ответ: не менее чем 0,91