

# «Моделирование»

**Лектор:**        **АЛИЕВ Тауфик Измаилович,**  
*доктор технических наук, профессор*

---

**Национальный исследовательский университет ИТМО  
(НИУ ИТМО)**

*Факультет программной инженерии и компьютерной техники*

# **5. Сетевые модели дискретных систем**

# 5. СЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

## Часть 1:

1. Классификация сетевых моделей
2. Параметры сетевых моделей
3. Характеристики сетевых моделей
4. Расчет коэффициентов передач и интенсивностей потоков заявок в узлах РСМО
5. Расчет характеристик разомкнутых СеМО
6. Пример расчета характеристик разомкнутых СеМО
7. Алгоритм расчета характеристик замкнутых СеМО
8. Пример расчета характеристик замкнутых СеМО
9. Марковская модель замкнутой СеМО
10. Свойства СеМО

## Часть 2:

1. GPSS-модель двухузловой разомкнутой СеМО
2. GPSS-модель многоузловой разомкнутой СеМО
3. GPSS-модель замкнутой СеМО

### Литература

#### для самостоятельной подготовки

1. Алиев Т.И. Основы моделирования дискретных систем. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. – 363 с.  
(Введение / Раздел 4, параграфы 4.4; 4.5. Раздел 6, пункты 6.7.9, 6.7.10, 6.7.11)  
[https://books.ifmo.ru/book/445/osnovy\\_modelirovaniya\\_diskretnyh\\_sistem.htm](https://books.ifmo.ru/book/445/osnovy_modelirovaniya_diskretnyh_sistem.htm)

# Литература

## для самостоятельной подготовки

1. Алиев Т.И. Моделирование дискретных систем. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. – 363 с.

**(раздел 3 «Математические модели дискретных систем», параграфы 3.2 и 3.4;  
раздел 4 «Аналитическое моделирование», параграфы 4.4 и 4.5)**

[https://books.ifmo.ru/book/445/osnovy\\_modelirovaniya\\_diskretnyh\\_sistem.htm](https://books.ifmo.ru/book/445/osnovy_modelirovaniya_diskretnyh_sistem.htm)

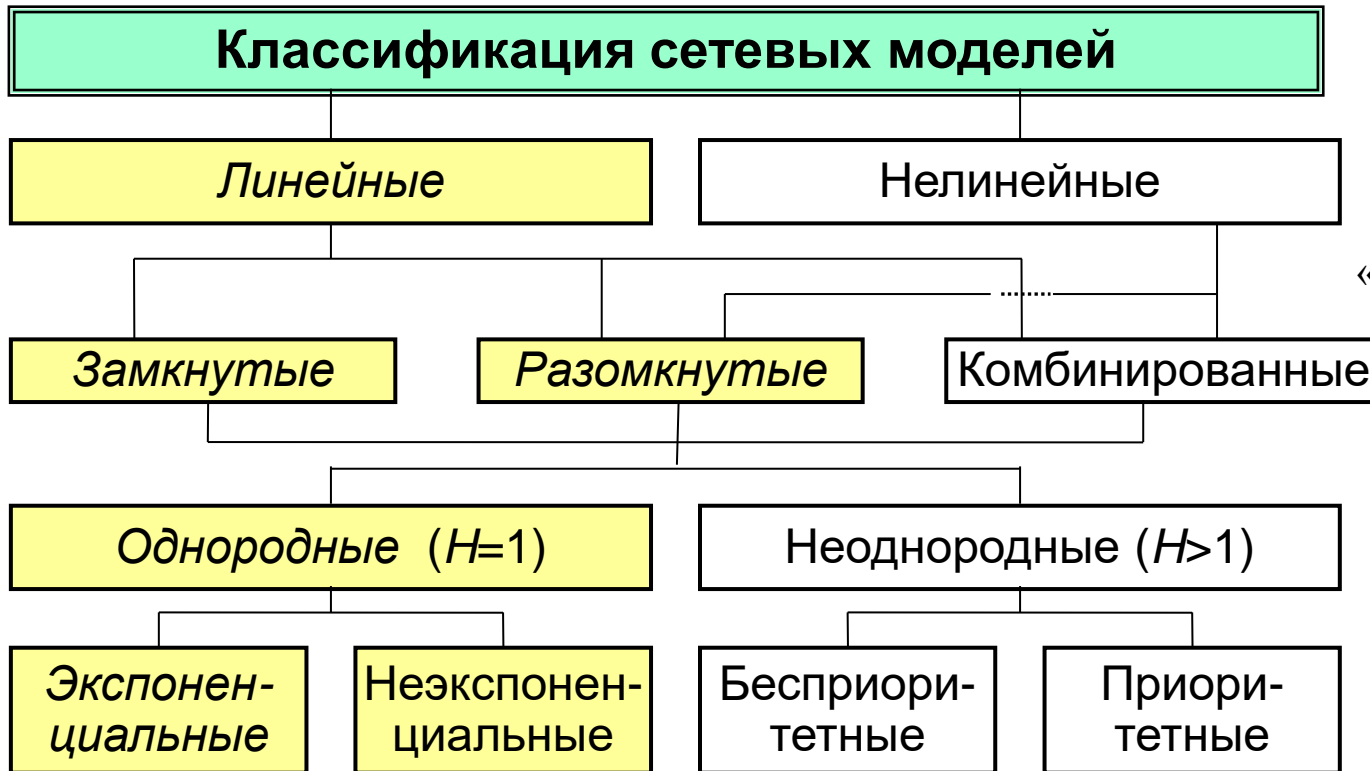
2. Алиев Т.И., Муравьева-Витковская Л.А., Соснин В.В. Моделирование: задачи, задания, тесты. Учебное пособие. - СПб.: НИУ ИТМО, 2011. – 197 с.

**(раздел 1 параграф 1.3; раздел 2 параграф 2.3; раздел 4 параграфы 4.4, 4.5)**

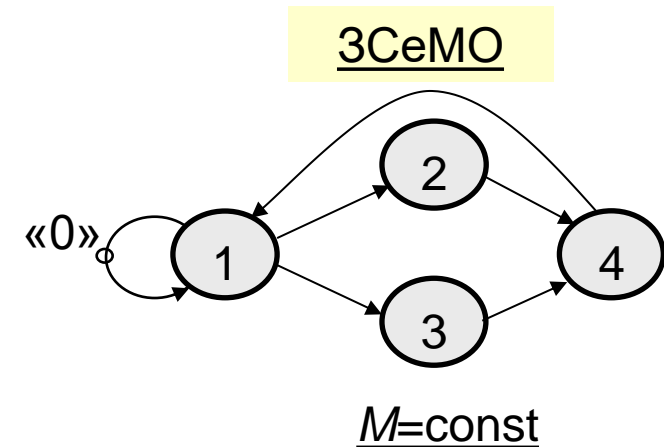
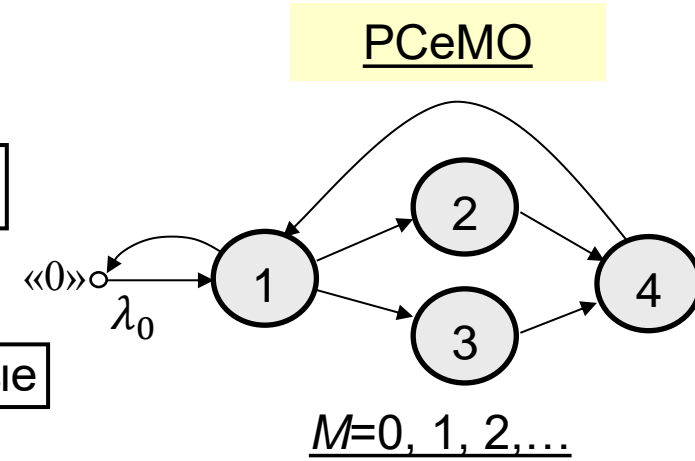
[https://books.ifmo.ru/book/686/modelirovanie:\\_zadachi,\\_zadaniya,\\_testy.htm](https://books.ifmo.ru/book/686/modelirovanie:_zadachi,_zadaniya,_testy.htm)

# 5. Сетевые модели дискретных систем

## Классификация сетевых моделей



В линейной сетевой модели:  $\lambda_j = \alpha_j \lambda_0$  ( $j = \overline{1, n}$ ),  
где  $\alpha_j$  - коэффициент передачи.



## 5. Сетевые модели дискретных систем

### Параметры сетевых моделей (линейные однородные экспоненциальные СеМО)

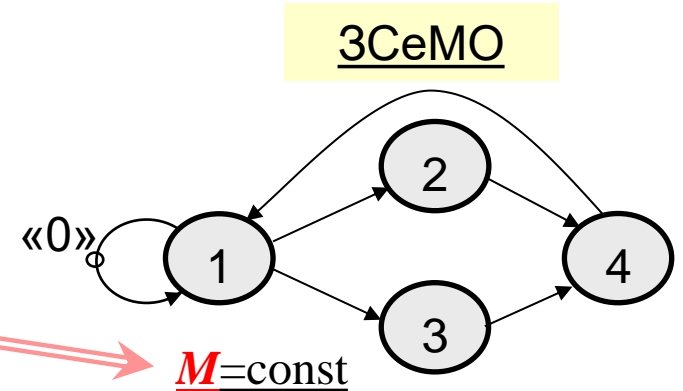
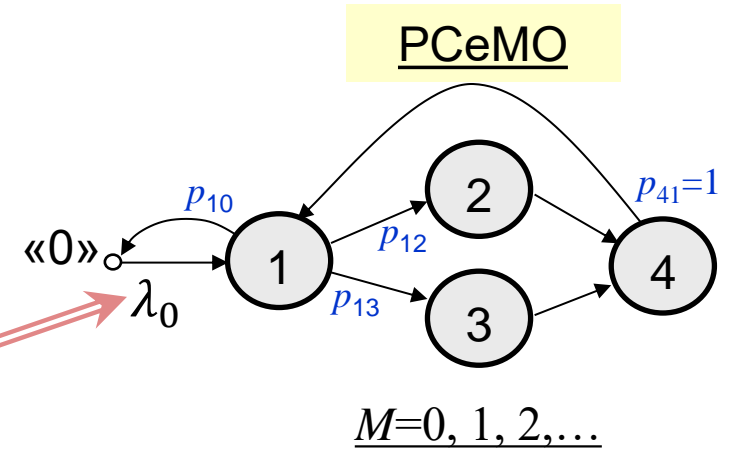
- количество узлов в сети:  $n$ ;
- количество приборов в узлах сети:  $K_1, \dots, K_n$ ;
- матрица вероятностей передач:

$$\mathbf{P} = [p_{ij} \mid i, j = 0, 1, \dots, n]$$

где  $p_{ij}$  - вероятность передачи заявки из узла  $i$   
в узел  $j$ :  $\sum_{j=0}^n p_{ij} = 1 \quad (i = \overline{0, n})$ ;

- интенсивность  $\lambda_0$  источника заявок,  
поступающих в PCeMO, или  
число заявок  $M$ , циркулирующих в 3CeMO;

- средние длительности обслуживания заявок в узлах сети:  $b_1, \dots, b_n$ .



## 5. Сетевые модели дискретных систем

### Характеристики сетевых моделей

Два класса характеристик:

- **узловые**, описывающие эффективность функционирования узлов (СМО);
- **сетевые**, описывающие функционирование СеМО в целом.

Сетевые характеристики:

- среднее число заявок, ожидающих обслуживания, и среднее число заявок, находящихся в сети:

$$L = \sum_{i=1}^n l_i ;$$

~~$$M = \sum_{i=1}^n m_i$$~~

- средние времена ожидания и пребывания заявок в сети:

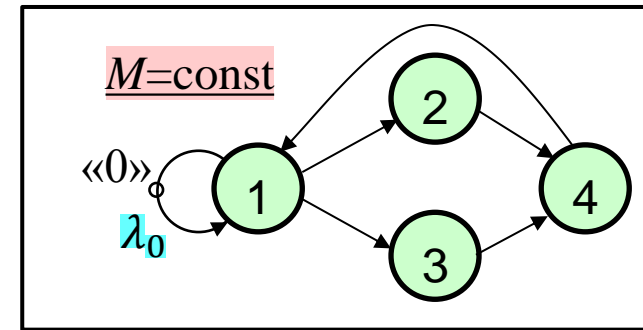
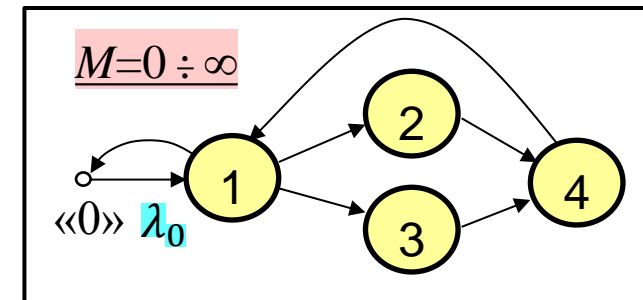
$$W = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i ;$$

$$U = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$$

- **производительность замкнутой СеМО:**

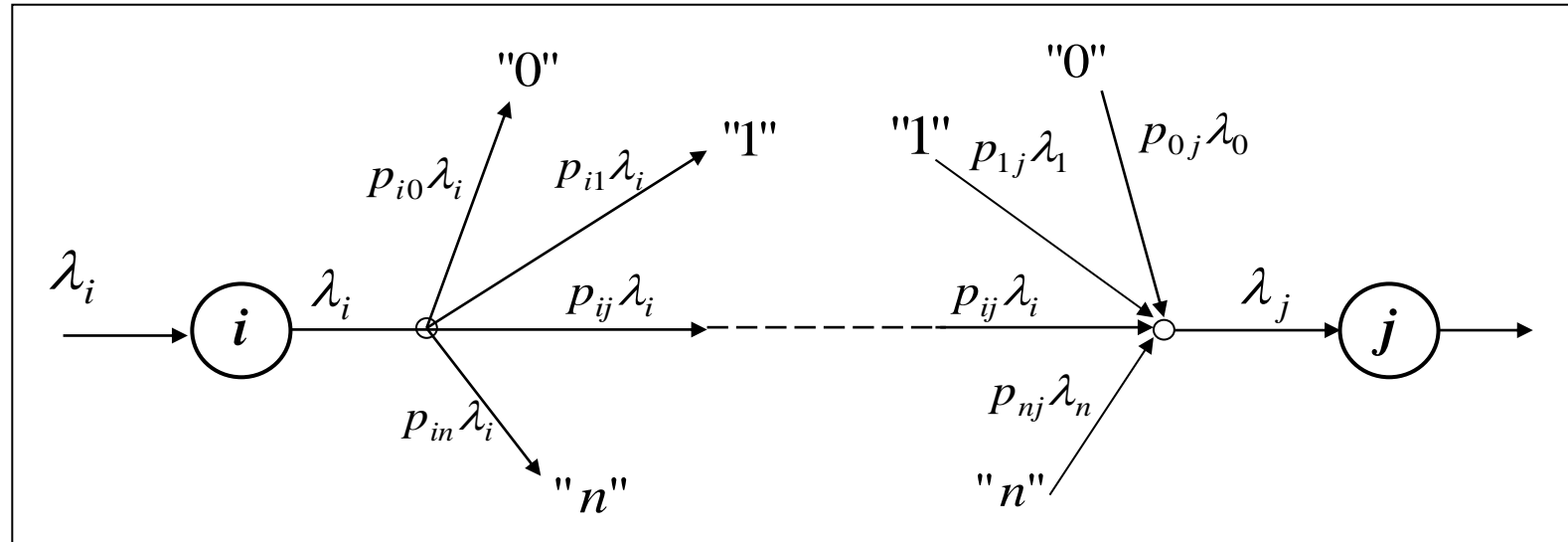
$$\lambda_0 = \lambda_i / \alpha_i \quad (i = 1, \dots, n); \quad \lambda_0 = M / U$$

$$\alpha_i \quad (i = 1, \dots, n) = ?$$



## 5. Сетевые модели дискретных систем

### Расчет коэффициентов передач и интенсивностей потоков заявок в узлах РСМО



$$\lambda_j = \sum_{i=0}^n p_{ij} \lambda_i \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$



$$\lambda_j = \alpha_j \lambda_0 \quad (j = \overline{1, n})$$

$$\alpha_j = \sum_{i=0}^n p_{ij} \alpha_i \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$



## 5. Сетевые модели дискретных систем

### Расчет характеристик разомкнутых CeMO

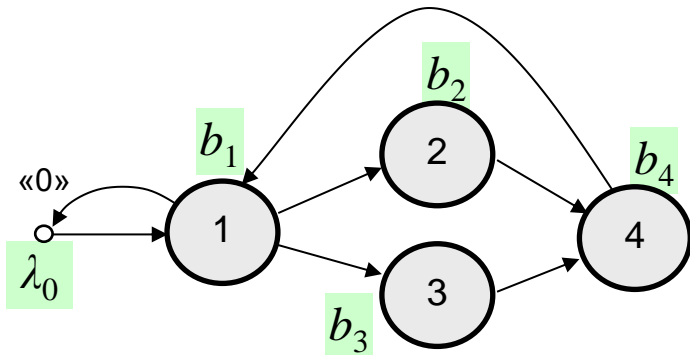
Условие отсутствия перегрузок:

$$\rho_j = \frac{\lambda_j b_j}{K_j} = \frac{\alpha_j \lambda_0 b_j}{K_j} < 1 \quad (j = \overline{1, n})$$



$$\lambda_0 < \min \left( \frac{K_1}{\alpha_1 b_1}, \frac{K_2}{\alpha_2 b_2}, \dots, \frac{K_n}{\alpha_n b_n} \right)$$

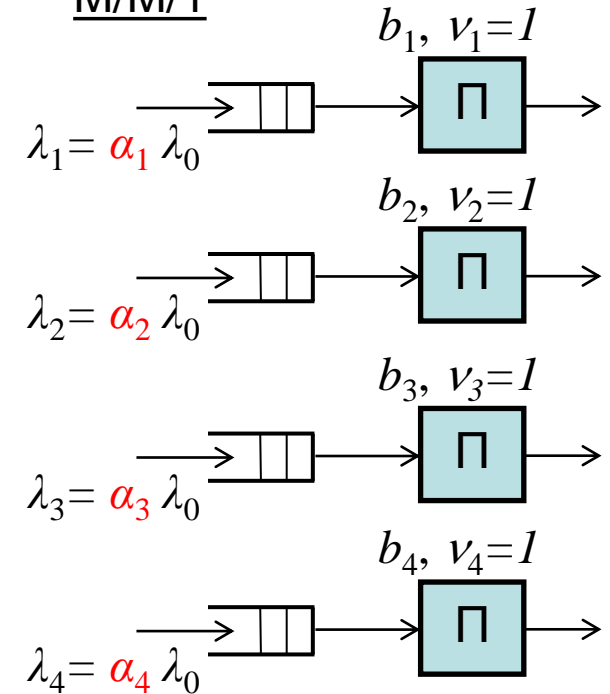
PCeMO (03)



Эквивалентное преобразование



M/M/1



При  $K_1 = \dots = K_n = 1$ :

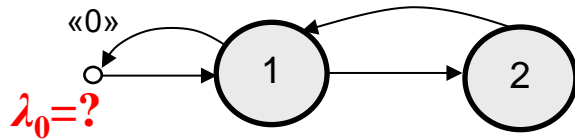
$$u_i = b_i / (1 - \rho_i) = b_i / (1 - \alpha_i \lambda_0 b_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$U = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$$

## 5. Сетевые модели дискретных систем

### Пример расчета характеристик разомкнутой СеМО

PCeMO (**ОЭ**)



$$n=2; \quad K_1=K_2=1; \quad b_1=2 \text{ c}; \quad b_2=1 \text{ c}$$

$$P =$$

	0	1	2
0		1	
1	0,2		0,8
2		1	

$$\alpha_j = \sum_{i=0}^n p_{ij} \alpha_i \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

$$\lambda_0 < \min \left( \frac{K_1}{\alpha_1 b_1}, \frac{K_2}{\alpha_2 b_2}, \dots, \frac{K_n}{\alpha_n b_n} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= 0,2 \alpha_1 \\ \alpha_2 &= 0,8 \alpha_1 \end{aligned} \right\}$$

$$\alpha_0=1; \quad \alpha_1=5; \quad \alpha_2=4$$

$$\lambda_0 < \min (0,1; 0,25) \text{ c}^{-1}$$

$$\lambda_0=0,05 \text{ c}^{-1}; \quad \lambda_1 = \alpha_1 \lambda_0 = 0,25 \text{ c}^{-1}; \quad \lambda_2 = \alpha_2 \lambda_0 = 0,2 \text{ c}^{-1}$$

$$\rho_1 = \alpha_1 \lambda_0 b_1 = 0,5; \quad \rho_2 = \alpha_2 \lambda_0 b_2 = 0,2$$

$$u_1 = \frac{b_1}{1 - \rho_1} = 4 \text{ c}; \quad u_2 = \frac{b_2}{1 - \rho_2} = 1,25 \text{ c}$$

$$U = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 5 * 4 + 4 * 1,25 = 25 \text{ c}$$

$$M = \lambda_0 U = 1,25$$

$$\lambda_0=0,09 \text{ c}^{-1}; \quad \lambda_1=0,45 \text{ c}^{-1}; \quad \lambda_2=0,36 \text{ c}^{-1}$$

$$\rho_1=0,9; \quad \rho_2=0,36$$

$$u_1=20 \text{ c}; \quad u_2=1,5625 \text{ c}$$

$$U = 5 * 20 + 4 * 1,5625 = 106,25 \text{ c}$$

$$M = \lambda_0 U = 9,5625$$

## 5. Сетевые модели дискретных систем

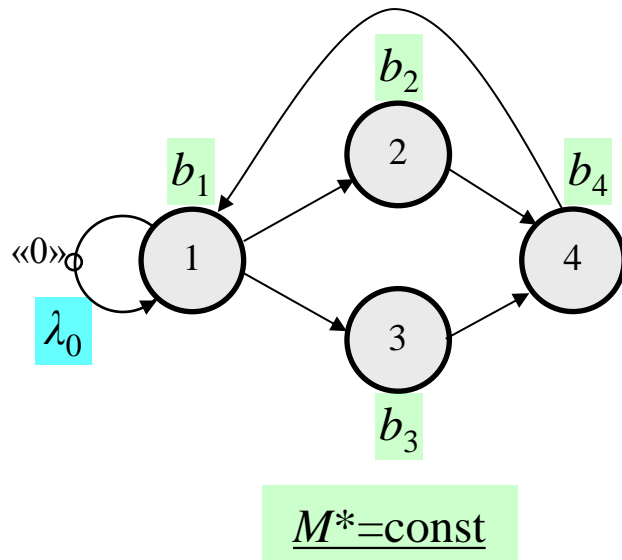
### Алгоритм расчета характеристик замкнутых СеМО

$$\lambda_j = \sum_{i=0}^n p_{ij} \lambda_i \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$



$$\alpha_j = \sum_{i=0}^n p_{ij} \alpha_i \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

3СеМО (03)



$$\left\{ \begin{array}{l} u_i(M) = b_i [1 + m_i(M - 1)] \\ U(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i(M) \\ \lambda_0(M) = \frac{M}{U(M)} \\ m_i(M) = \alpha_i \lambda_0(M) u_i(M) \end{array} \right.$$

$M = 1, 2, \dots, M^*$

$i = 1, 2, \dots, n$

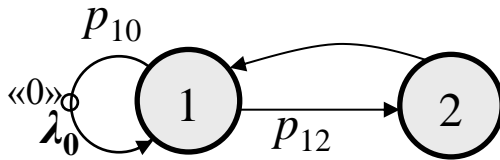
.....  
 $M^*$  - заданное  
число заявок в  
3СеМО

$$M = \sum_{i=1}^n m_i(M)$$

## 5. Сетевые модели дискретных систем

### Пример расчета характеристик замкнутой CeMO

3CeMO (OЭ)



$$n=2; \quad K_1=K_2=1; \quad b_1=2 \text{ c}; \quad b_2=1 \text{ c}$$

**P=**

	0	1	2
0		1	
1	0,2		0,8
2		1	

**PCemo**

$$\lambda_0=0,09 \text{ c}^{-1}; \quad U=106,25 \text{ c}$$

$$M=9,5625$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= 0,2\alpha_1 \\ \alpha_2 &= 0,8\alpha_1 \end{aligned} \right\}$$

$$\alpha_0=1; \quad \alpha_1=5; \quad \alpha_2=4$$

$$u_i(M) = b_i[1 + m_i(M-1)]$$

$$U(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i(M)$$

$$\lambda_0(M) = \frac{M}{U(M)}$$

$$m_i(M) = \alpha_i \lambda_0(M) u_i(M)$$

$$\underline{M^*=2} \quad (M=1, 2)$$

**M=1**

$$1) \quad u_1(1) = b_1 = 2 \text{ c}$$

$$u_2(1) = b_2 = 1 \text{ c}$$

$$2) \quad \underline{U(1)} = \alpha_1 u_1(1) + \alpha_2 u_2(1) = \underline{14 \text{ c}}$$

$$3) \quad \underline{\lambda_0(1)} = 1/U(1) = 1/14 \approx \underline{0,07 \text{ c}^{-1}}$$

$$4) \quad m_1(1) = \alpha_1 \lambda_0(1) u_1(1) = 10/14$$

$$m_2(1) = \alpha_2 \lambda_0(1) u_2(1) = 4/14$$

**M=M\*=2**

$$1) \quad u_1(2) = 48/14 \text{ c}$$

$$u_2(2) = 18/14 \text{ c}$$

$$2) \quad \underline{U(2)} = 156/7 \approx \underline{22,3 \text{ c}}$$

$$3) \quad \underline{\lambda_0(2)} = 7/78 \approx \underline{0,09 \text{ c}^{-1}}$$

$$4) \quad m_1(2) = 60/39$$

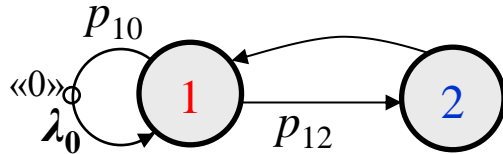
$$m_2(2) = 18/39$$

$$M = \sum_{i=1}^n m_i(M)$$

## 5. Сетевые модели дискретных систем

### Марковская модель замкнутой СеМО

#### 3СеМО (ОЭ)



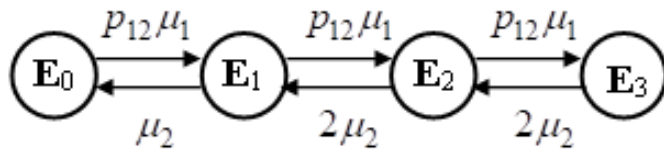
$P=$

	0	1	2
0		1	
1	0,2		0,8
2		1	

$n=2; K_1=1; K_2=2; b_1=2 \text{ с}; b_2=1 \text{ с}; M=3$

#### Кодирование состояний: $(M_1, M_2)$

$M_1 = \{0, 1, 2, 3\} \quad M_2 = \{0, 1, 2, 3\}$



$E_0: (3, 0)$   
 $E_1: (2, 1)$   
 $E_2: (1, 2)$   
 $E_3: (0, 3)$

	$E_0$	$E_1$	$E_2$	$E_3$
$G =$				
$E_0$	$-p_{12} \mu_1$	$p_{12} \mu_1$	0	0
$E_1$	$\mu_2$	$-(p_{12} \mu_1 + \mu_2)$	$p_{12} \mu_1$	0
$E_2$	0	$2\mu_2$	$-(p_{12} \mu_1 + 2\mu_2)$	$p_{12} \mu_1$
$E_3$	0	0	$2\mu_2$	$-2\mu_2$

#### Характеристики 3СеМО:

- загрузка узлов:  $\rho_1 = p_0 + p_1 + p_2; \quad \rho_2 = 0,5p_1 + p_2 + p_3;$
- ср. длины очередей:  $l_1 = 2p_0 + p_1; \quad l_2 = p_3;$
- среднее число заявок в узлах СеМО:  
 $m_1 = 3p_0 + 2p_1 + p_2; \quad m_2 = p_1 + 2p_2 + 3p_3;$

• **производительность 3СеМО:**  $\lambda_0 = \frac{\rho_1}{\alpha_1 b_1} = \frac{\rho_2}{\alpha_2 b_2}$

• ср. время ожидания в узлах:  $w_1 = \frac{l_1}{\alpha_1 \lambda_0}; \quad w_2 = \frac{l_2}{\alpha_2 \lambda_0};$

• ср. время пребывания в узлах:  $u_1 = \frac{m_1}{\alpha_1 \lambda_0}; \quad u_2 = \frac{m_2}{\alpha_2 \lambda_0};$

• нагрузка в узлах сети:  $y_1 = \alpha_1 \lambda_0 b_1; \quad y_2 = \alpha_2 \lambda_0 b_2;$

• ср. число параллельно работающих узлов:  $R = \rho_1 + \rho_2;$

• ср. число параллельно работающих приборов:  $Y = y_1 + y_2;$

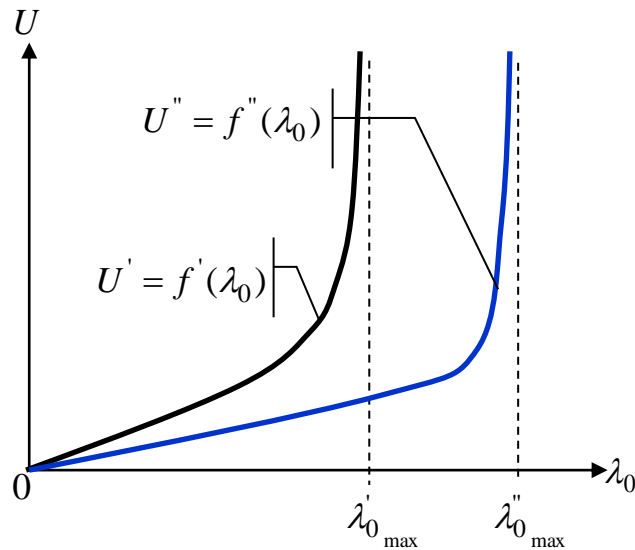
• суммарное число заявок во всех очередях:  $L = l_1 + l_2;$

• суммарное (полное) время ожидания и пребывания заявок в СеМО:

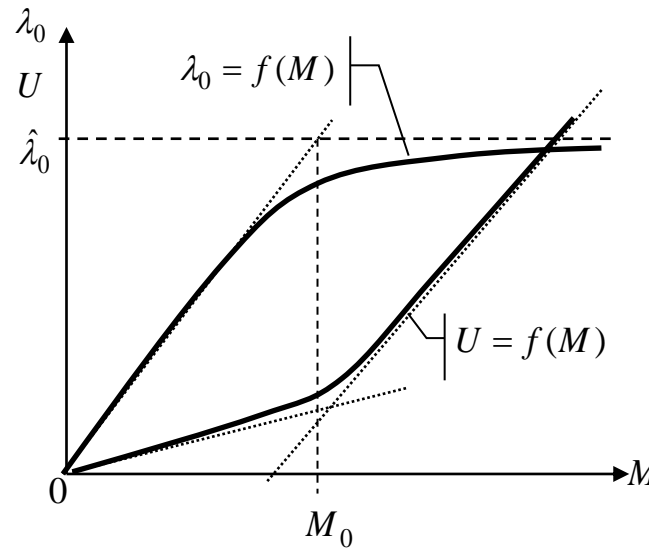
$$W = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2; \quad U = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2;$$

## 5. Сетевые модели дискретных систем

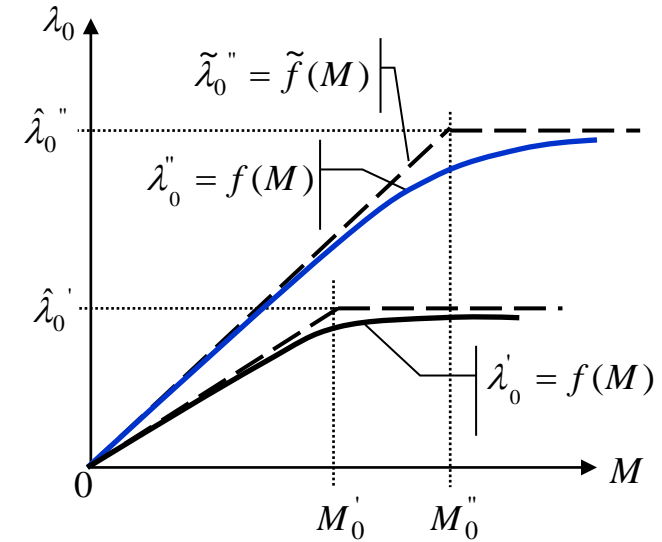
### Свойства СеМО



Зависимости времени пребывания заявок в разомкнутой СеМО от интенсивности их поступления



Зависимости производительности и времени пребывания заявок в замкнутой СеМО от числа заявок



#### Разгрузка «узкого места»:

- увеличение числа приборов в узле;
- увеличение производительности узла;
- перераспределение нагрузки между узлами (например, файлы между НМД).

#### «Узкое место»:

$$\rho_y = \max\{\rho_1, \dots, \rho_n\} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 1$$

#### Пропускная способность СеМО:

$$\rho_y = \frac{\alpha_y \lambda_0 b_y}{K_y} = 1 \Rightarrow \hat{\lambda}_0 = \frac{K_y}{\alpha_y b_y}$$

# «Моделирование»

**Лектор:**        **АЛИЕВ Тауфик Измайлович,**  
*доктор технических наук, профессор*

---

**Национальный исследовательский университет ИТМО  
(НИУ ИТМО)**

*Факультет программной инженерии и компьютерной техники*