ИДЗ-18.2

Найти закон распределения указанной случайной величины X и ее функцию распределения $F(X)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Построить график функции распределения $F(X)$.

1.6) Вероятность перевыполнения плана для СУ-1 равна 0,9, для СУ-2 – 0,8, для СУ-3 – 0,7. Случайная величина X – число СУ, перевыполнивших план.

Решение: По условию $p_1 = 0{,}9$, $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}7$ – вероятности перевыполнения плана для соответствующих СУ.

Тогда вероятности того, что план не будет перевыполнен:

$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

Используя теоремы умножения независимых и сложения несовместных событий, составим закон распределения случайной величины X – количества СУ, перевыполнивших план.

0) $X = 0$ (все СУ не перевыполнили план)

$$p(0) = q_1 q_2 q_3 = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}006$$

1) $X = 1$

$$p(1) = p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 =$$
$$= 0{,}054 + 0{,}024 + 0{,}014 = 0{,}092$$

2) $X = 2$

$$p(2) = p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 =$$
$$= 0{,}216 + 0{,}126 + 0{,}056 = 0{,}398$$

3) $X = 3$ (все СУ перевыполнили план)

$$p(3) = p_1 p_2 p_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504$$

Таким образом, искомый закон распределения:

x_i	0	1	2	3
$p(i)$	0,006	0,092	0,398	0,504

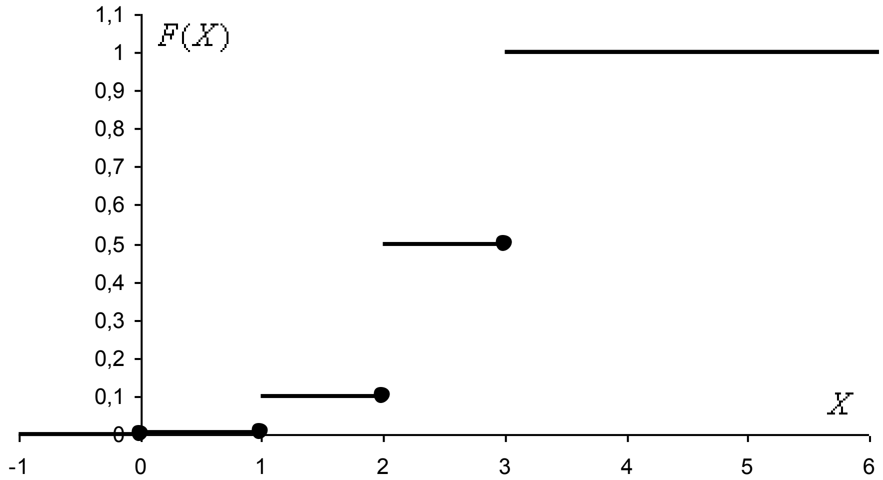
Проверка: 0,006 + 0,092 + 0,398 + 0,504 = 1

Составим функцию распределения:

Другие ИДЗ Рябушко можно найти на странице http://mathprofi.ru/idz_ryabushko_besplatno.html

$$F(X)=\begin{cases}0 \ \textit{при} \ x \le 0;\\ 0{,}006 \ \textit{при} \ 0 < x \le 1;\\ 0{,}098 \ \textit{при} \ 1 < x \le 2;\\ 0{,}4968 \ \textit{при} \ 2 < x \le 3;\\ 1 \ \textit{при} \ x > 3.\end{cases}$$

Выполним чертеж:



Вычислим математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Заполним расчетную таблицу:

x_i	0	1	2	3	Суммы:
p_i	0,006	0,092	0,398	0,504	1
$x_i p_i$	0	0,092	0,796	1,512	2,4
$x_i^2 p_i$	0	0,092	1,592	4,536	6,22

Математическое ожидание: $M(X)=2{,}4$

Дисперсию вычислим по формуле:
$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=6{,}22-(2{,}4)^2=6{,}22 - 5{,}76=0{,}46$.

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}46}\approx 0{,}68$

2.6) Задана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \frac{1}{20}(x^3+x), 0\le x\le 4\\ 1, x>4\end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[0;3]$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

В условии данного задания допущена явная опечатка. Необходимо, чтобы $F(4)=1$**, таким образом:** $F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \frac{1}{20}(x^2+x), 0\le x\le 4\\ 1, x>4\end{cases}$

Решение:

Найдем функцию плотности распределения вероятностей:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \frac{1}{20}(2x+1), 0\le x\le 4\\ 0, x>4\end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание и дисперсию.
Математическое ожидание:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{1}{20}\int_0^4 x(2x+1)dx=\frac{1}{20}\int_0^4(2x^2+x)dx=$$

$$=\frac{1}{20}\cdot\left(\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4=\frac{1}{20}\cdot\left(\frac{128}{3}+8-0-0\right)=\frac{1}{20}\cdot\frac{152}{3}=\frac{38}{15}\approx 2{,}533$$

Дисперсия:

$$D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-(M(x))^2=\frac{1}{20}\int_0^4 x^2(2x+1)dx-\left(\frac{38}{15}\right)^2=$$

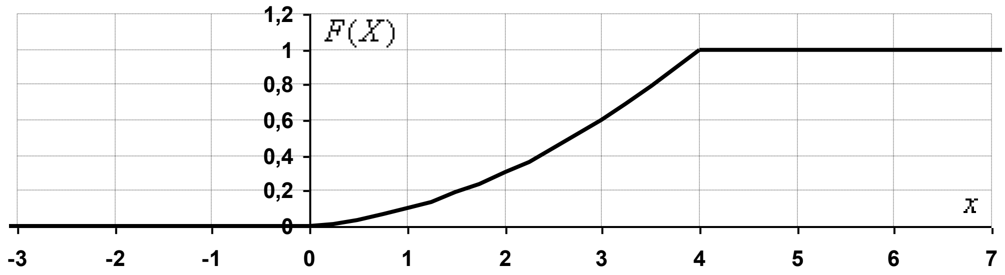
$$=\frac{1}{20}\int_0^4(2x^3+x^2)dx-\frac{1444}{225}=\frac{1}{20}\cdot\left(\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4-\frac{1444}{225}=\frac{1}{20}\cdot\left(128+\frac{64}{3}-0-0\right)-\frac{1444}{225}=$$

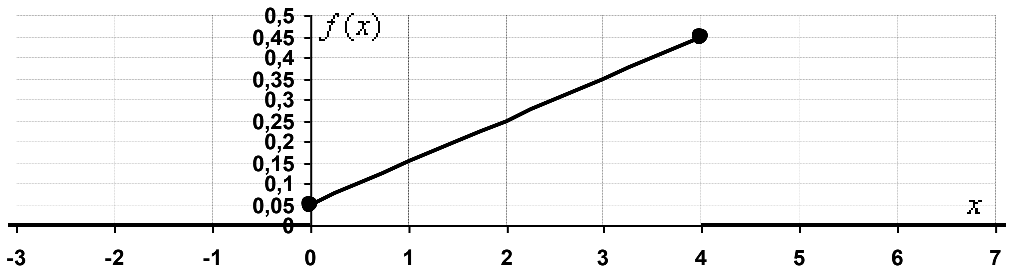
$$=\frac{1}{20}\cdot\frac{448}{3}-\frac{1444}{225}=\frac{112}{15}-\frac{1444}{225}=\frac{236}{225}\approx 1{,}049$$

Найдем вероятность того, что X примет значение из отрезка $[0;3]$.

$P(0\le x\le 3)=F(3)-F(0)=\frac{12}{20}-\frac{0}{20}=0{,}6$ – искомая вероятность.

Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$.





3.6) Поток заявок, поступающих на телефонную станцию, представляет собой простейший пуассоновский поток. Математическое ожидание числа вызовов за 1 ч равно 30. Найти вероятность того, что за 1 мин. поступит не менее двух вызовов.

Решение: Используем формулу Пуассона для простейшего потока событий:

$P_m = \dfrac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$, в данной задаче:

$\lambda = \dfrac{N}{60} = \dfrac{30}{60} = 0{,}5$ – среднее количество вызовов в минуту;

Найдем вероятность того, что за одну минуту станция получит менее двух вызовов. По теореме сложения несовместных событий:

$$P(m<2) = P_0 + P_1 = \frac{0{,}5^0}{0!} \cdot e^{-0{,}5} + \frac{0{,}5^1}{1!} \cdot e^{-0{,}5} \approx 0{,}6065 + 0{,}3033 = 0{,}9098$$

По теореме сложения вероятностей противоположных событий:

$P(m \geq 2) = 1 - P(m<2) \approx 1 - 0{,}9098 = 0{,}0902$ – вероятность того, что за одну минуту станция получит не менее двух вызовов

Ответ: $\approx 0{,}0902$

4.6) Случайная величина X является средним арифметическим 10000 независимых одинаково распределенных случайных величин, среднее квадратическое отклонение каждой из которых равно 2. Какое максимально отклонение случайной величины X от ее математического ожидания можно ожидать с вероятностью, не меньшей 0,9544?

Решение: Случайная величина X удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова, поэтому справедливым является равенство $P\left(\left|\dfrac{1}{n}\sum X_i - a\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)$.

В данном случае: $n = 1000$, $\sigma = 2$, $P\left(\left|\dfrac{1}{n}\sum X_i - a\right| < \varepsilon\right) = 0{,}9544$.

Таким образом:

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0{,}9544$$

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{10000}}{2}\right) = 0{,}4772$$

$$\frac{\varepsilon \cdot 100}{2} = 2$$

$$\varepsilon = \frac{4}{100} = 0{,}04$$

Ответ: $\varepsilon = 0{,}04$