Задание 2. Координаты вектора в базисе

L – пространство матриц второго порядка

Докажите, что система $\mathcal{A}$ является базисом в соответствующем линейном пространстве $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\},\ x$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}. \quad x = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Т.к. матрицы системы принадлежат пространству матриц второго порядка, поэтому для доказательства того, что эти матрицы образуют базис проверим, что они линейно независимы.

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4 \in R$$

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 & \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\lambda_2 & 3\lambda_2 \\ 4\lambda_2 & 3\lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda_3 \\ -\lambda_3 & \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_4 & -3\lambda_4 \\ 2\lambda_4 & -\lambda_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 0 + \lambda_4 & 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 - 3\lambda_4 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 + 2\lambda_4 & \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 & -2\lambda_2 & & +\lambda_4 & = 0 \\ 3\lambda_1 & +4\lambda_2 & -\lambda_3 & +2\lambda_4 & = 0 \\ 2\lambda_1 & +3\lambda_2 & +\lambda_3 & -3\lambda_4 & = 0 \\ \lambda_1 & +3\lambda_2 & +\lambda_3 & -\lambda_4 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -1.5\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \\ -0.5\mathrm{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & 0.5 \\ 0 & 5 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & -1.5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -\frac{5}{7}\mathrm{II} \\ +\frac{4}{7}\mathrm{II} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1\frac{5}{7} & -4\frac{5}{14} \\ 0 & 0 & 1\frac{4}{7} & -1\frac{11}{14} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -\frac{11}{12}\mathrm{III} \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1\frac{5}{7} & -4\frac{5}{14} \\ 0 & 0 & 0 & 2\frac{5}{24} \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 \cdot 1\frac{5}{7} \cdot 2\frac{5}{24} = 53 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ система образует базис пространства $\mathcal{L}$

Найдите в этом базисе координаты элемента x.

$$x = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$$

$$\begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 & \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\lambda_2 & 3\lambda_2 \\ 4\lambda_2 & 3\lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda_3 \\ -\lambda_3 & \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_4 & -3\lambda_4 \\ 2\lambda_4 & -\lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 0 + \lambda_4 & 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 - 3\lambda_4 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 + 2\lambda_4 & \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 & -2\lambda_2 & & +\lambda_4 & =-3 \\ 3\lambda_1 & +4\lambda_2 & -\lambda_3 & +2\lambda_4 & =0 \\ 2\lambda_1 & +3\lambda_2 & +\lambda_3 & -3\lambda_4 & =-6 \\ \lambda_1 & +3\lambda_2 & +\lambda_3 & -\lambda_4 & =2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -3 & -6 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) = \cdots = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = -6 \\ \lambda_4 = 2 \end{cases}$$

Ответ: $x = (-3,\ 0,\ -6,\ 2)$

L - пространство многочленов степени не больше четырёх

$$e_1 = 1+t \quad e_2 = t+t^2 \quad e_3 = t^2+t^3 \quad e_4 = t+t^3 \; e_5 = t^2+t^4$$

$$x = t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$$

$$e_1 = (0,0,0,1,1) \; e_2 = (0,1,0,1,0) \; e_3 = (0,1,1,0,0) \; e_4 = (0,1,0,1,0) \; e_5 = (1,0,1,0,0)$$

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 =$$

$$= (0,0,0,\lambda_1,\lambda_1) + (0,\lambda_2,0,\lambda_2,0) + \ (0,\lambda_3,\lambda_3,0,0)\ +\ (0,\lambda_4,0,\lambda_4,0)\ +\ (\lambda_5,0,\lambda_5,0,0) =\ 0$$

$$(\lambda_2+\lambda_3), (\lambda_3+\lambda_4), (\lambda_3+\lambda_5), (\lambda_1+\lambda_2), (\lambda_2+\lambda_4) = 0$$

Следовательно

$$\begin{cases} \lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3+\lambda_4 = 0 \\ \lambda_3+\lambda_5 = 0 \\ \lambda_1+\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2+\lambda_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

От 1 строки отнимаем 2 строку, умноженную на 1, от 3 строки отнимаем 2 строку, умноженную на 1

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

3-ую строку делим на -1

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

К 1 строке добавляем 3 строку, умноженную на 1, от 2 строки отнимаем 3 строку, умноженную на 1, от 4 строки отнимаем 3 строку, умноженную на 1, от 5 строки отнимаем 3 строку, умноженную на 1

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

4-ую строку делим на 2

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

К 1 строке добавляем 4 строку, умноженную на 1, от 2 строки отнимаем 4 строку, умноженную на 1, к 3 строке добавляем 4 строку, умноженную на 1, от 5 строки отнимаем 4 строку, умноженную на 1

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$\lambda_1 = 0\lambda_2 = 0\lambda_3 = 0\lambda_4 = 0\lambda_5 = 0$ Найдём координаты x в пространстве многочленов.

$$x = (1, -1, 1, -1, 1)$$

Координатами вектора x является 5 чисел $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$, удовлетворяющие уравнению

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 = (1, -1,\ 1, -1,\ 1)$$

$(0, 0, 0, \lambda_1, \lambda_1)+(0, \lambda_2, 0, \lambda_2, 0)+ (0, \lambda_3, \lambda_3, 0, 0) + (0, \lambda_4, 0, \lambda_4, 0) + (\lambda_5, 0, \lambda_5, 0, 0) = (1, -1,\ 1, -1,\ 1)$

Перепишем систему уравнений в матричном виде и решим его методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

От 1 строки отнимаем 2 строку, умноженную на 1, от 3 строки отнимаем 2 строку, умноженную на 1

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

3-ую строку делим на -1

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

К 1 строке добавляем 3 строку, умноженную на 1, от 2 строки отнимаем 3 строку, умноженную на 1, от 4 строки отнимаем 3 строку, умноженную на 1, от 5 строки отнимаем 3 строку, умноженную на 1

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

4-ую строку делим на 2

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

к 1 строке добавляем 4 строку, умноженную на 1, от 2 строки отнимаем 4 строку, умноженную на 1, к 3 строке добавляем 4 строку, умноженную на 1, от 5 строки отнимаем 4 строку, умноженную на 1

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2.5 \end{array}\right) \Rightarrow x \begin{cases} x_1 = 0.5 \\ x_2 = 0.5 \\ x_3 = -1.5 \\ x_4 = 0.5 \\ x_5 = 2.5 \end{cases}$$