ИДЗ-18.2

Найти закон распределения указанной случайной величины X и ее функцию распределения $F(X)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Построить график функции распределения $F(X)$.

1.14) В партии из 15 телефонных аппаратов 5 неисправных. Случайная величина X – число неисправных аппаратов среди трех случайным образом отобранных.

Решение: Случайная величина X имеет гипергеометрическое распределение. Найдем закон распределения случайной величины X, используя формулу:

$$P_x = \frac{C_M^x \cdot C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}$$

В данной задаче:

$N = 15$ – всего телефонных аппаратов;

$M = 5$ – количество неисправных телефонных аппаратов;

$n = 3$ – размер выборки;

$x = \{0,1,2,3\}$ – возможное количество неисправных телефонных аппаратов в выборке.

$C_{15}^3 = \frac{15!}{12!\cdot 3!} = \frac{13\cdot 14\cdot 15}{6} = 455$ способами можно выбрать 3 телефонных аппарата.

0) $x = 0$

$$P_0 = \frac{C_5^0 \cdot C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{120}{455} \approx 0{,}264$$

1) $x = 1$

$$P_1 = \frac{C_5^1 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^3} = \frac{5\cdot 45}{455} \approx 0{,}495$$

2) $x = 2$

$$P_2 = \frac{C_5^2 \cdot C_{10}^1}{C_{15}^3} = \frac{10\cdot 10}{455} \approx 0{,}220$$

3) $x = 3$

$$P_3 = \frac{C_5^3 \cdot C_{10}^0}{C_{15}^3} = \frac{10}{455} \approx 0{,}022$$

Таким образом, искомый закон распределения:

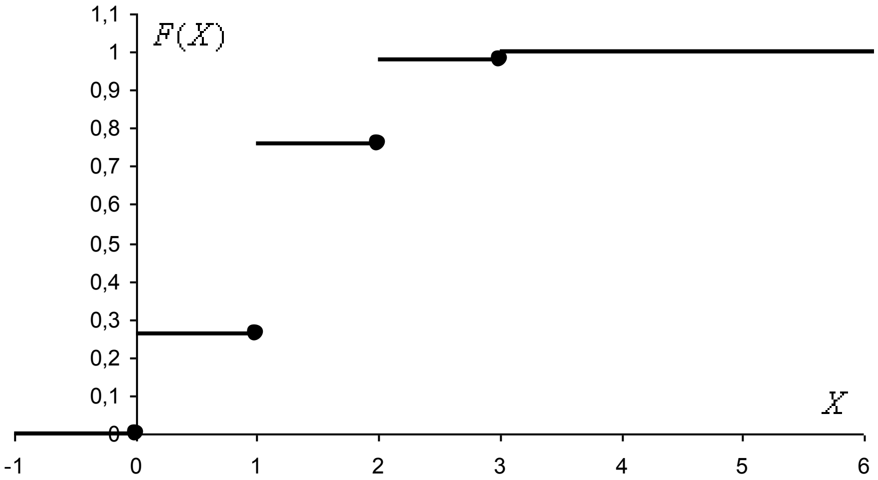
x_i	0	1	2	3
$p(i)$	0,264	0,495	0,219	0,022

Проверка: 0,264 + 0,495 + 0,219 + 0,022 = 1

Составим функцию распределения:

$$F(X)=\begin{cases}0 \ \text{при} \ x \le 0; \\ 0{,}264 \ \text{при} \ 0 < x \le 1; \\ 0{,}759 \ \text{при} \ 1 < x \le 2; \\ 0{,}978 \ \text{при} \ 2 < x \le 3; \\ 1 \ \text{при} \ x > 3.\end{cases}$$

Выполним чертеж:



Вычислим математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Используем соответствующие формулы для гипергеометрического распределения:

$$M(X)=\frac{M}{N}\cdot n=\frac{5}{15}\cdot 3=1$$

$$D(X)=\frac{M}{N}\cdot n\cdot\frac{(N-n)}{N}\cdot\frac{(N-M)}{(N-1)}=\frac{5}{15}\cdot 3\cdot\frac{12}{15}\cdot\frac{10}{14}=\frac{4}{7}\approx 0{,}571$$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{4}{7}}\approx 0{,}76$

2.14) Задана функция распределения случайной величины X :

$$F(x)=\begin{cases}0, x<\frac{3\pi}{2}\\ \cos x, \frac{3\pi}{2}\le x\le 2\pi\\ 1, x>2\pi\end{cases}.$$

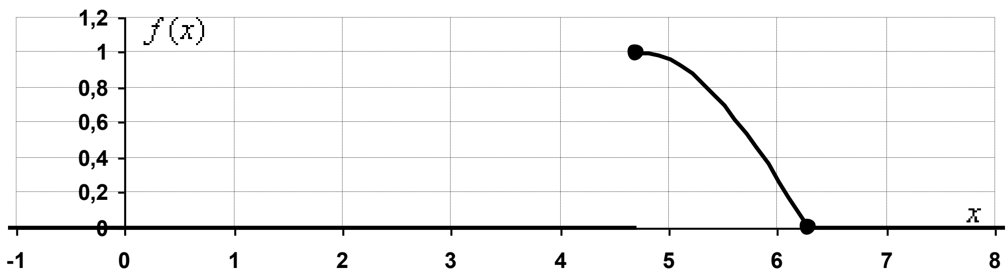
Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания случайной величины X на отрезок $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{7\pi}{4}\right]$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

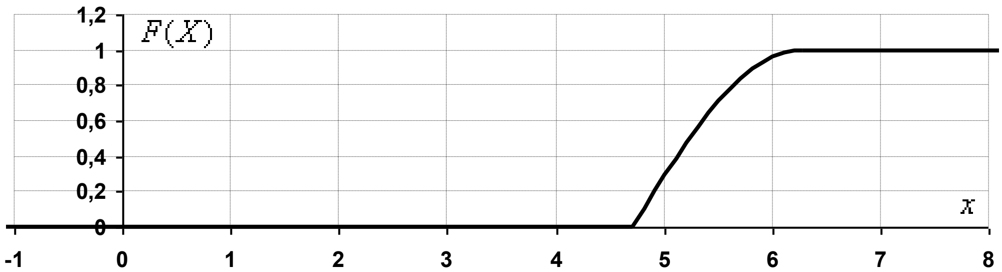
Решение:

Найдем функцию плотности распределения вероятностей:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, x<\frac{3\pi}{2}\\ -\sin x, \frac{3\pi}{2}\le x\le 2\pi\\ 0, x>2\pi\end{cases}$$

Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$.





Вычислим математическое ожидание и дисперсию.

Математическое ожидание:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=-\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} x\sin xdx=(*)$$

Интегрируем по частям:

$u=x\Rightarrow du=dx$

$dv=-\sin x\Rightarrow v=\cos x$

$$\int_a^b udv=uv\big|_a^b-\int_a^b vdu$$

$$(*)=(x\cos x)\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}-\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos xdx=(2\pi-0)-\sin x\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}=2\pi-(0+1)=2\pi-1\approx 5{,}28$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-(M(x))^2$$

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=-\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} x^2\sin xdx=(*)$$

Дважды интегрируем по частям:

$u=x^2\Rightarrow du=2xdx$

$dv=-\sin x\Rightarrow v=\cos x$

$$(*)=(x^2\cos x)\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}-2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} x\cos x=\left(4\pi^2-0\right)-2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} x\cos x=(*)$$

$u=-2x\Rightarrow du=-2dx$

$dv=\cos xdx\Rightarrow v=\sin x$

$$(*)=4\pi^2-2(x\sin x)\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}+2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin xdx=4\pi^2-2\left(0+\frac{3\pi}{2}\right)-2\cos x\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}=$$

$$=4\pi^2-3\pi-2(1-0)=4\pi^2-3\pi-2$$

Таким образом:

$$D(X)=4\pi^2-3\pi-2-(2\pi-1)^2=4\pi^2-3\pi-2-4\pi^2+4\pi-1=\pi-3\approx 0{,}14$$

Найдем вероятность того, что X примет значение из отрезка $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{7\pi}{4}\right]$.

$$P\left(\frac{3\pi}{2}\le x\le\frac{7\pi}{4}\right)=F\left(\frac{7\pi}{4}\right)-F\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-0=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}71$$

– искомая вероятность.

3.14) При работе ЭВМ время от времени возникают сбои. Поток сбоев можно считать простейшим. Среднее число сбоев за сутки равно 1,5. Найти вероятность того, что в течение суток произойдет хотя бы один сбой

Решение: Используем формулу Пуассона для простейшего потока событий:

$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$, в данной задаче:

$\lambda = 1{,}5$ – число сбоев сутки.

Найдем вероятность того, что за сутки не будет сбоев.

$$P_0 = \frac{1{,}5^0}{0!} \cdot e^{-1{,}5} \approx 0{,}2231$$

По теореме сложения вероятностей противоположных событий:

$P(m \geq 1) = 1 - P_0 \approx 1 - 0{,}2231 \approx 0{,}777$ – вероятность того, что за сутки будет хотя бы один сбой.

Ответ: $\approx 0{,}777$

4.14) По данным ОТК, брак при выпуске деталей составляет 2,5%. Пользуясь теоремой Бернулли, оценить вероятность того, что при просмотре партии из 8000 деталей будет установлено отклонение от средней доли брака менее 0,005

Решение: Используем теорему Бернулли:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

В данном случае: $p = 0{,}025$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}025 = 0{,}975$, $n = 8000$, $\varepsilon = 0{,}005$

Таким образом:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}025\right| \leq 0{,}005\right) \geq 1 - \frac{0{,}025 \cdot 0{,}975}{8000 \cdot (0{,}005)^2} = 0{,}878125$$