ИДЗ-18.2

Найти закон распределения указанной случайной величины X и ее функцию распределения $F(X)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Построить график функции распределения $F(X)$.

1.1) Автомобиль должен проехать по улице, на которой установлено четыре независимо работающих светофора. Каждый светофор с интервалом в 2 мин подает красный и зеленый сигналы. Случайная величина X – число остановок на этой улице.

Решение: Случайная величина X имеет биномиальное распределение. Найдем закон распределения случайной величины X, используя формулу Бернулли:

$$P_n^x = C_n^x p^x q^{n-x}$$

В данной задаче:
$n = 4$ – всего светофоров;
$x = \{0,1,2,3,4\}$ – вероятное количество остановок автомобиля на красный свет.
P_n^x – вероятность того, что будет ровно x остановок из n.

Из условия следует:
$p = 0{,}5$ – вероятность остановки автомобиля на красный свет.
$q = 1 - p = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$ – вероятность проезда автомобиля на зеленый свет

0) $x = 0$

$$P_4^0 = C_4^0 \cdot (0{,}5)^0 \cdot (0{,}5)^4 = (0{,}5)^4 = 0{,}0625$$

1) $x = 1$

$$P_4^1 = C_4^1 \cdot (0{,}5)^1 \cdot (0{,}5)^3 = 4 \cdot 0{,}5 \cdot (0{,}5)^3 = 0{,}25$$

2) $x = 2$

$$P_4^2 = C_4^2 \cdot (0{,}5)^2 \cdot (0{,}5)^2 = 6 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25 = 0{,}375$$

3) $x = 3$

$$P_4^3 = C_4^3 \cdot (0{,}5)^3 \cdot (0{,}5)^1 = 4 \cdot (0{,}5)^3 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$$

4) $x = 4$

$$P_4^4 = C_4^4 \cdot (0{,}5)^4 \cdot (0{,}5)^0 = (0{,}5)^4 = 0{,}0625$$

Таким образом, искомый закон распределения:

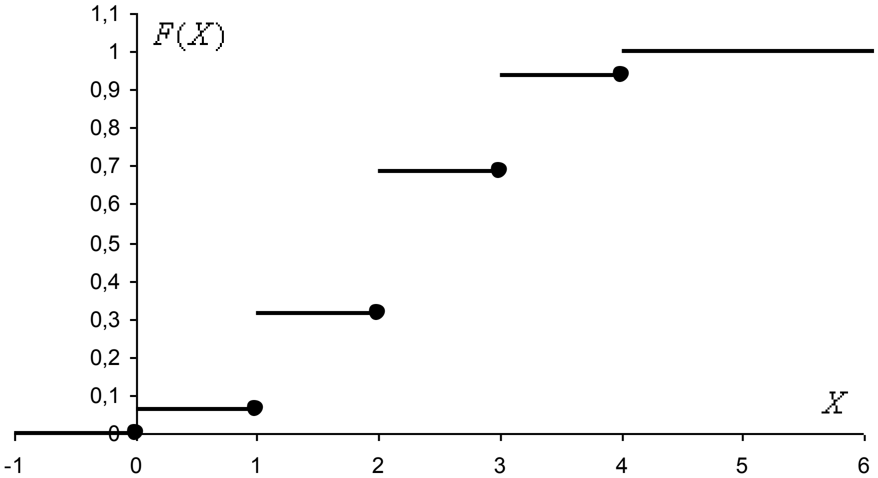
x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625

Проверка: 0,0625 + 0,25 + 0,375 + 0,25 + 0,0625 = 1

Составим функцию распределения:

$$F(X)=\begin{cases}0 \; \textit{при} \; x\le 0;\\ 0{,}0625 \; \textit{при} \; 0<x\le 1;\\ 0{,}3125 \; \textit{при} \; 1<x\le 2;\\ 0{,}6875 \; \textit{при} \; 2<x\le 3;\\ 0{,}9375 \; \textit{при} \; 3<x\le 4;\\ 1 \; \textit{при} \; x>4.\end{cases}$$

Выполним чертеж:



Вычислим математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Используем соответствующие формулы для биномиального распределения.

Вычислим математическое ожидание: $M=np=4\cdot 0{,}5=2$

Найдем дисперсию: $D=npq=4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5=1$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{1}=1$

2.1) Задана функция распределения случайной величины X : $F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \frac{1}{8}x^3, 0\le x\le 2\\ 1, x>2\end{cases}$.

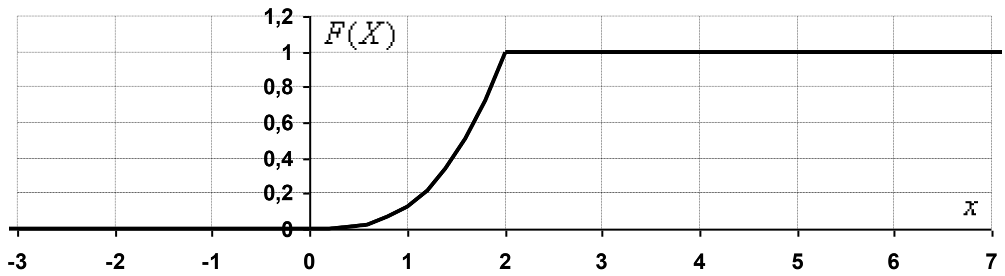
Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[0;1]$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

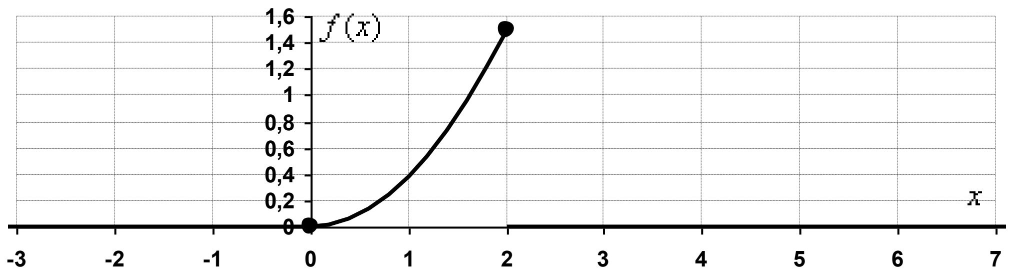
Решение:

Найдем функцию плотности распределения вероятностей:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \frac{3x^2}{8}, 0\le x\le 2\\ 1, x>2\end{cases}$$

Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$.





Вычислим математическое ожидание и дисперсию.

Математическое ожидание:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{3}{8}\int_0^2 x^3dx=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}\left(x^4\right)\Big|_0^2=\frac{3}{32}\cdot(16-0)=\frac{3}{2}=1{,}5$$

Дисперсия:

$$D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-(M(x))^2=\frac{3}{8}\int_0^2 x^4dx-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{5}\left(x^5\right)\Big|_0^2-\frac{9}{4}=$$
$$=\frac{3(32-0)}{40}-\frac{9}{4}=\frac{12}{5}-\frac{9}{4}=\frac{3}{20}=0{,}15$$

Найдем вероятность того, что X примет значение из отрезка $[0;1]$.

$P(0\le x\le 1)=F(1)-F(0)=\frac{1}{8}-0=\frac{1}{8}=0{,}125$ – искомая вероятность.

3.1) Валик, изготовленный автоматом, считается стандартным, если отклонение его диаметра от проектного размера не превышает 2 мм. Случайные отклонения диаметров валиков подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением 1,6 мм и математическим ожиданием, равным 0. Сколько стандартных валиков (в %) изготавливает автомат?

Решение: Используем формулу:

$$P(|X-a|<\delta)\approx 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

В данном случае:

$P(|X|<2)\approx 2\Phi\left(\frac{2}{1{,}6}\right)=2\Phi(1{,}25)=2\cdot 0{,}3944=0{,}7887$ – вероятность изготовления стандартных валиков.

Или в процентах: $0{,}7887\cdot 100\%=78{,}87\%$

Ответ: $78{,}87\%$

4.1) Для определения качества производимой заводом продукции отобрано наугад 2500 изделий. Среди них оказались 50 с дефектами. Частота изготовления бракованных изделий принята за приближенное значение вероятности изготовления бракованного изделия. Определить, с какой вероятностью можно гарантировать, что допущенная при этом абсолютная погрешность не будет превышать 0,02.

Решение: Используем теорему Бернулли:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\ge 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

В данном случае: $p=\frac{50}{2500}=0{,}02$, $q=1-p=1-0{,}02=0{,}98$, $\varepsilon=0{,}02$, $n=2500$

$P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}02\right|\le 0{,}02\right)\ge 1-\frac{0{,}02\cdot 0{,}98}{2500\cdot(0{,}02)^2}=1-0{,}0196=0{,}9804$ – искомая вероятность.

Ответ: не менее 0,9804