ИДЗ-18.2

Найти закон распределения указанной случайной величины X и ее функцию распределения $F(X)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Построить график функции распределения $F(X)$.

1.4) Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,6. Случайная величина X – число поражений цели при четырех выстрелах.

Решение: Случайная величина X имеет биномиальное распределение. Найдем закон распределения случайной величины X, используя формулу Бернулли:

$$P_n^x = C_n^x p^x q^{n-x}$$

В данной задаче:

$n = 4$ – всего выстрелов;

$x = \{0,1,2,3,4\}$ – вероятное число поражений цели.

$p = 0{,}6$ – вероятность поражения цели при каждом выстреле.

$q = 1 - p = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$ – вероятность того, что цель не будет поражена при каждом выстреле.

P_4^x – вероятность того, что после 4 выстрелов цель будет поражена ровно x раз.

0) $x = 0$

$$P_4^0 = C_4^0 \cdot (0{,}6)^0 \cdot (0{,}4)^4 = (0{,}4)^4 = 0{,}0256$$

1) $x = 1$

$$P_4^1 = C_4^1 \cdot (0{,}6)^1 \cdot (0{,}4)^3 = 4 \cdot 0{,}6 \cdot (0{,}4)^3 = 0{,}1536$$

2) $x = 2$

$$P_4^2 = C_4^2 \cdot (0{,}6)^2 \cdot (0{,}4)^2 = 6 \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}16 = 0{,}3456$$

3) $x = 3$

$$P_4^3 = C_4^3 \cdot (0{,}6)^3 \cdot (0{,}4)^1 = 4 \cdot (0{,}6)^3 \cdot 0{,}4 = 0{,}3456$$

4) $x = 4$

$$P_4^4 = C_4^4 \cdot (0{,}6)^4 \cdot (0{,}4)^0 = (0{,}6)^4 = 0{,}1296$$

Таким образом, искомый закон распределения:

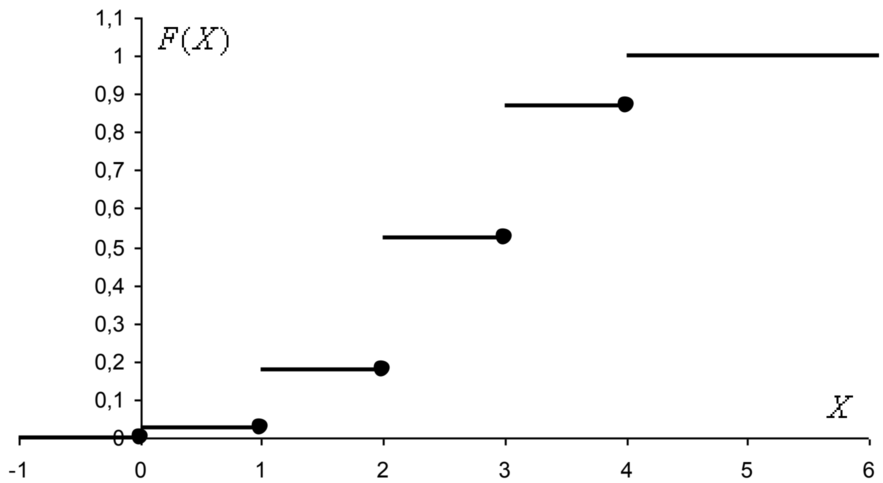
x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	0,1296

Проверка: 0,0256 + 0,1536 + 0,3456 + 0,3456 + 0,1296 = 1

Составим функцию распределения:

$$F(X)=\begin{cases}0 \ \text{при} \ x \le 0;\\ 0{,}0256 \ \text{при} \ 0 < x \le 1;\\ 0{,}1792 \ \text{при} \ 1 < x \le 2;\\ 0{,}5248 \ \text{при} \ 2 < x \le 3;\\ 0{,}8704 \ \text{при} \ 3 < x \le 4;\\ 1 \ \text{при} \ x > 4.\end{cases}$$

Выполним чертеж:



Вычислим математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Используем соответствующие формулы для биномиального распределения.

Вычислим математическое ожидание: $M = np = 4 \cdot 0{,}6 = 2{,}4$

Найдем дисперсию: $D = npq = 4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}96$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}96} \approx 0{,}98$

2.4) Задана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \frac{1}{24}(x^2+2x), 0\le x\le 4\\ 1, x>4\end{cases}$$

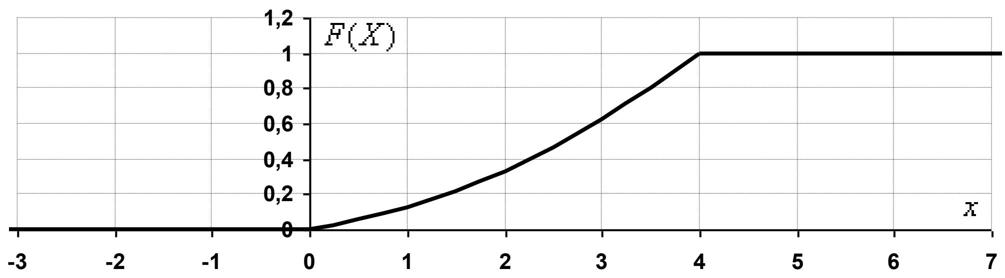
Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[0;1]$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

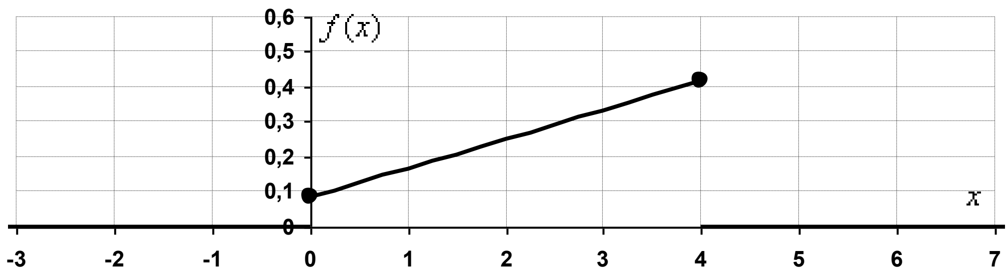
Решение:

Найдем функцию плотности распределения вероятностей:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \frac{1}{24}(2x+2), 0\le x\le 4\\ 0, x>4\end{cases}=\begin{cases}0, x<0\\ \frac{1}{12}(x+1), 0\le x\le 4\\ 0, x>4\end{cases}$$

Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$.





Вычислим математическое ожидание и дисперсию.

Математическое ожидание:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{1}{12}\int_0^4 x(x+1)dx=\frac{1}{12}\int_0^4 (x^2+x)dx=$$

$$=\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4=\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{64}{3}+8-0-0\right)=\frac{1}{12}\cdot\frac{88}{3}=\frac{22}{9}\approx 2{,}444$$

Дисперсия:

$$D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-(M(x))^2=\frac{1}{12}\int_0^4 x^2(x+1)dx-\left(\frac{22}{9}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{12}\int_0^4(x^3+x^2)dx-\frac{484}{81}=\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4-\frac{484}{81}=\frac{1}{12}\cdot\left(64+\frac{64}{3}-0-0\right)-\frac{484}{81}=$$

$$=\frac{1}{12}\cdot\frac{256}{3}-\frac{484}{81}=\frac{64}{9}-\frac{484}{81}=\frac{92}{81}\approx 1{,}136$$

Найдем вероятность того, что X примет значение из отрезка $[0;1]$.

$P(0\le x\le 1)=F(1)-F(0)=\frac{3}{24}-\frac{0}{24}=\frac{1}{8}=0{,}125$ – искомая вероятность.

3.4) Случайная величина X подчинена закону Пуассона с математическим ожиданием $a=3$. Найти вероятность того, что данная случайная величина X примет значение, меньшее, чем ее математическое ожидание.

Решение: Распределение Пуассона имеет вид:

$P_m=\frac{a^m}{m!}\cdot e^{-a}$, в данной задаче: $a=3$

Найдем вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее, чем ее математическое ожидание (0, 1 или 2).

По теореме сложения несовместных событий:

$P(m<3)=P_0+P_1+P_2=\frac{3^0}{0!}\cdot e^{-3}+\frac{3^1}{1!}\cdot e^{-3}+\frac{3^2}{2!}\cdot e^{-3}\approx 0{,}0498+0{,}1494+0{,}2240=0{,}4232$ – искомая вероятность.

Ответ: $\approx 0{,}4232$

4.4) В результате медицинского осмотра 900 призывников установлено, что их средняя масса на 1,2 кг больше средней массы призывников за один их предшествующих периодов. Какова вероятность этого отклонения, если среднее квадратическое отклонение массы призывников равно 8 кг?

Решение: случайная величина X (средняя масса призывников) удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова, кроме того, разность настоящего и предыдущего значений $\overline{X}-\overline{X}_{пред}$ равна 1,2 кг (отклонение является односторонним) и речь идёт превышении этого значения. Поэтому:

$$P\left(\left|\overline{X}-\overline{X}_{пред}\right|>\varepsilon\right)\approx\frac{1}{2}-\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

В данном случае: $\varepsilon=1{,}2$, $n=900$, $\sigma=8$

Таким образом, искомая вероятность:

$$P\left(\left|\overline{X}-\overline{X}_{пред}\right|>\varepsilon\right)\approx\frac{1}{2}-\Phi\left(\frac{1{,}2\cdot\sqrt{900}}{8}\right)=\frac{1}{2}-\Phi(4{,}5)=0{,}5-0{,}499997=0{,}000003$$

Ответ: 0,000003