ИТМО УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

«Моделирование»

Лектор: АЛИЕВ Тауфик Измайлович,
доктор технических наук, профессор

Национальный исследовательский университет ИТМО
(НИУ ИТМО)

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

2. МОДЕЛИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

1. Система массового обслуживания (СМО)
2. Многообразие (классификация) СМО
3. Стратегии управления потоками заявок: дисциплины буферизации
4. Стратегии управления потоками заявок: дисциплины обслуживания
5. Сеть массового обслуживания (СеМО)
6. Параметры и характеристики СМО
7. Поток заявок. Длительность обслуживания
8. Основные характеристики базовых моделей с однородным потоком заявок и накопителем неограниченной емкости
9. Обозначения СМО (символика Кендалла)
10. Характеристики базовых моделей с однородным потоком заявок и накопителем неограниченной емкости (M/M/1 и M/G/1)
11. Характеристики базовых моделей с однородным потоком заявок и накопителем неограниченной емкости (M/M/1 и M/G/1)

Литература

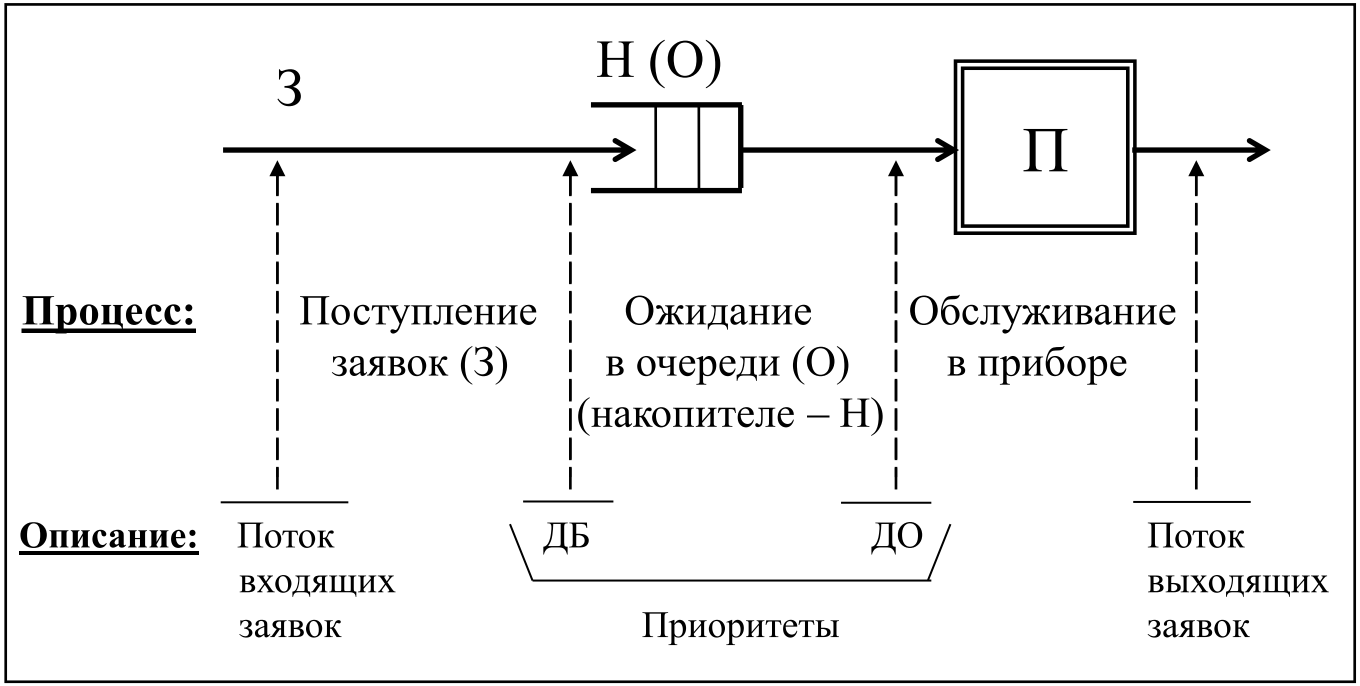
для самостоятельной подготовки

1. Алиев Т.И. Основы моделирования дискретных систем. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. – 363 с. **(Раздел 3 *«Математические модели дискретных систем»*)**

https://books.ifmo.ru/book/445/osnovy_modelirovaniya_diskretnyh_sistem.htm

Раздел 2. Модели дискретных систем

Система массового обслуживания (СМО)



Базовые понятия:

- Поток заявок
- Обслуживание
- Длительность обслуживания
- Ожидание
- Дисциплина буферизации (ДБ)
- Дисциплина обслуживания (ДО)
- Приоритет

Элементы СМО:

П – **прибор** (канал, устройство, линия, …)

З – **заявка** (запрос, клиент, вызов, требование, …)

Н – **накопитель** (*ёмкость*)

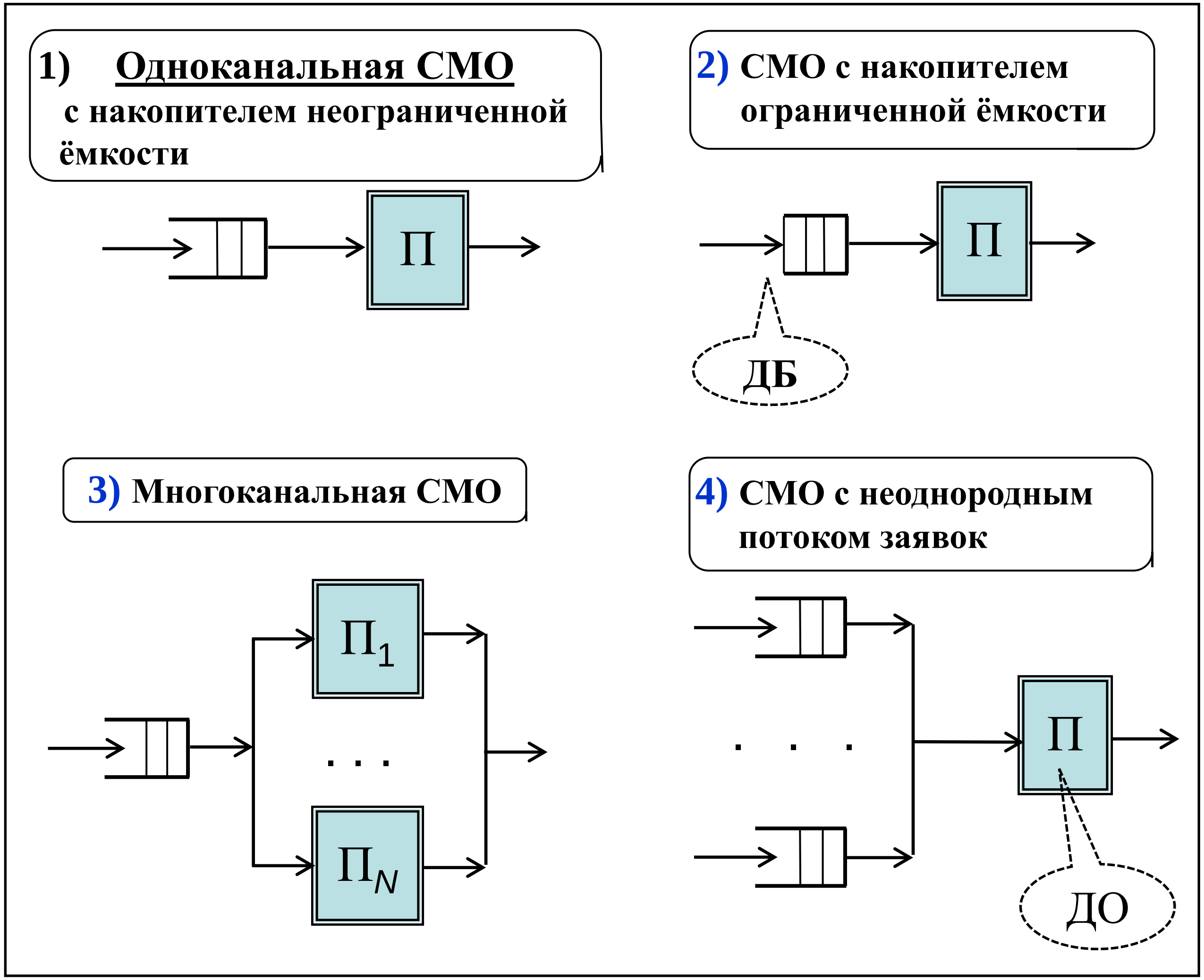
О – **очередь** (*длина*)

Примеры:

- Обслуживание в магазине
- Автомобильный перекрёсток
- Аэропорт: взлет и посадка самолетов, регистрация пассажиров
- …

Раздел 2. Модели дискретных систем

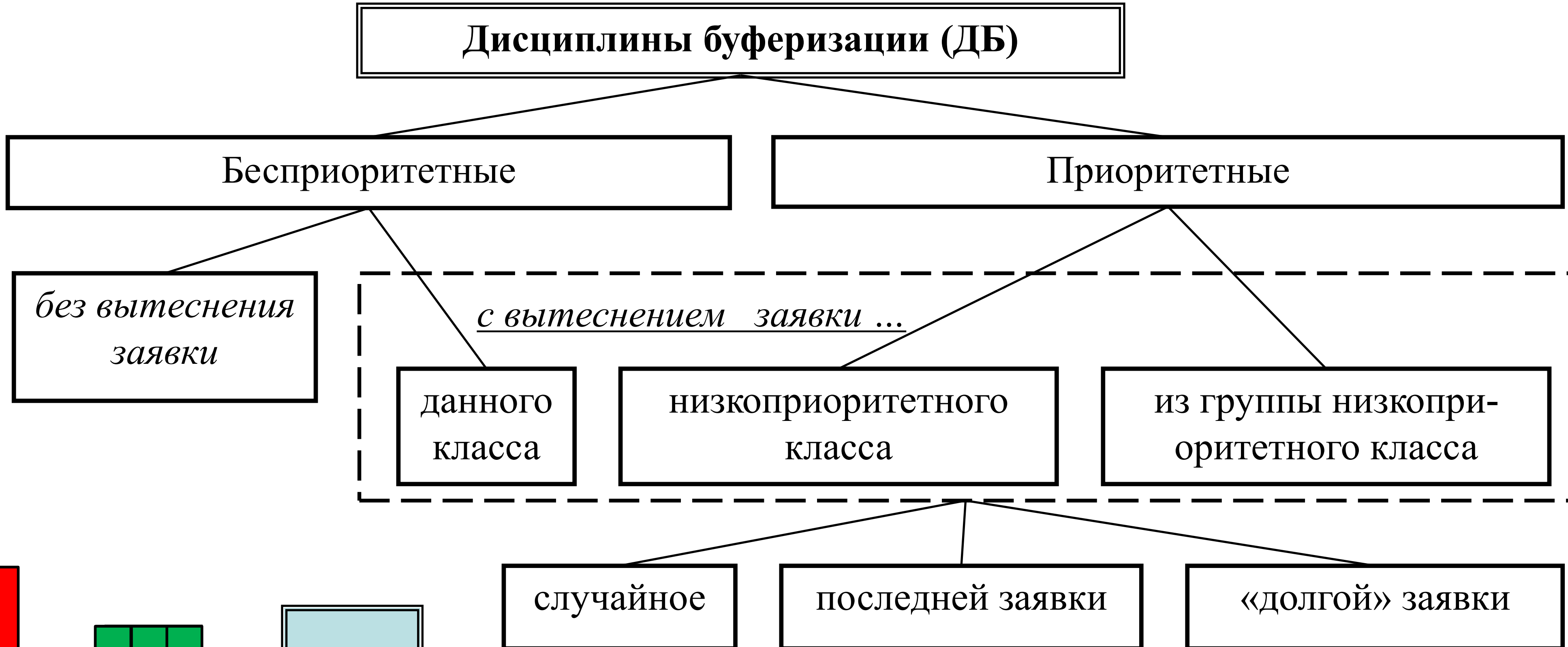
Многообразие (классификация) СМО

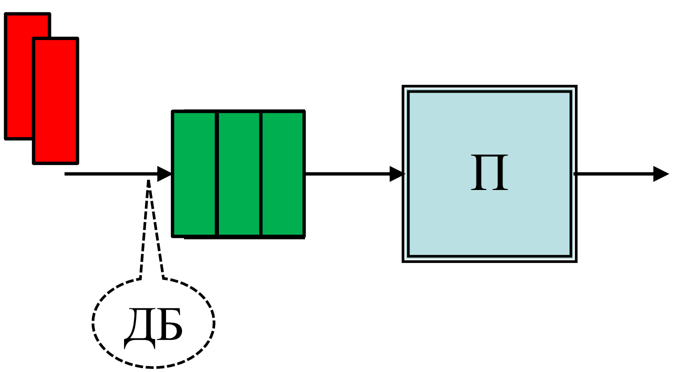


Предположения:

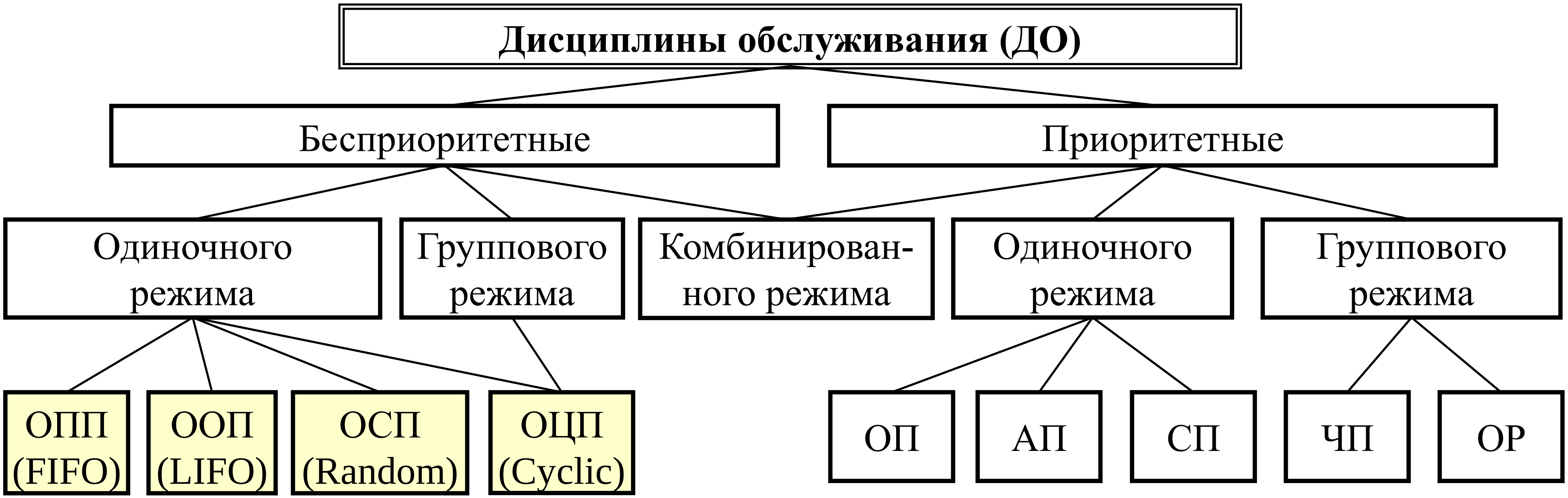
- заявка, поступившая в систему, *мгновенно* попадает на обслуживание, если прибор свободен;
- в приборе на обслуживании в каждый момент времени может находиться только *одна* заявка;
- прибор *не простаивает*, если в очереди есть хотя бы одна заявка;
- поступление заявок в СМО и длительности их обслуживания не зависят от того, сколько заявок уже находится в системе, или других факторов;
- длительность обслуживания заявок не зависит от скорости (интенсивности) поступления заявок в систему.

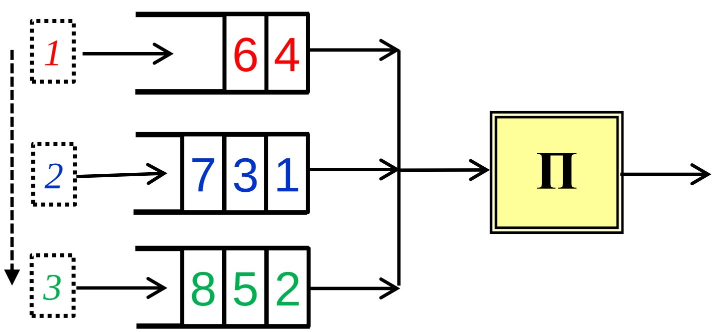
Стратегии управления потоками заявок: дисциплины буферизации





Стратегии управления потоками заявок: дисциплины обслуживания





12345678 (4; 2,7; 4)

87654321 (3; 4,3; 3)

32754186 (5,5; 2,3; 3,3)

41263578 (1,5; 3,7; 2,7)

46132578 (0,5; 3,7; 5,3)

ОП: 24613758

АП: ~~2~~46137258

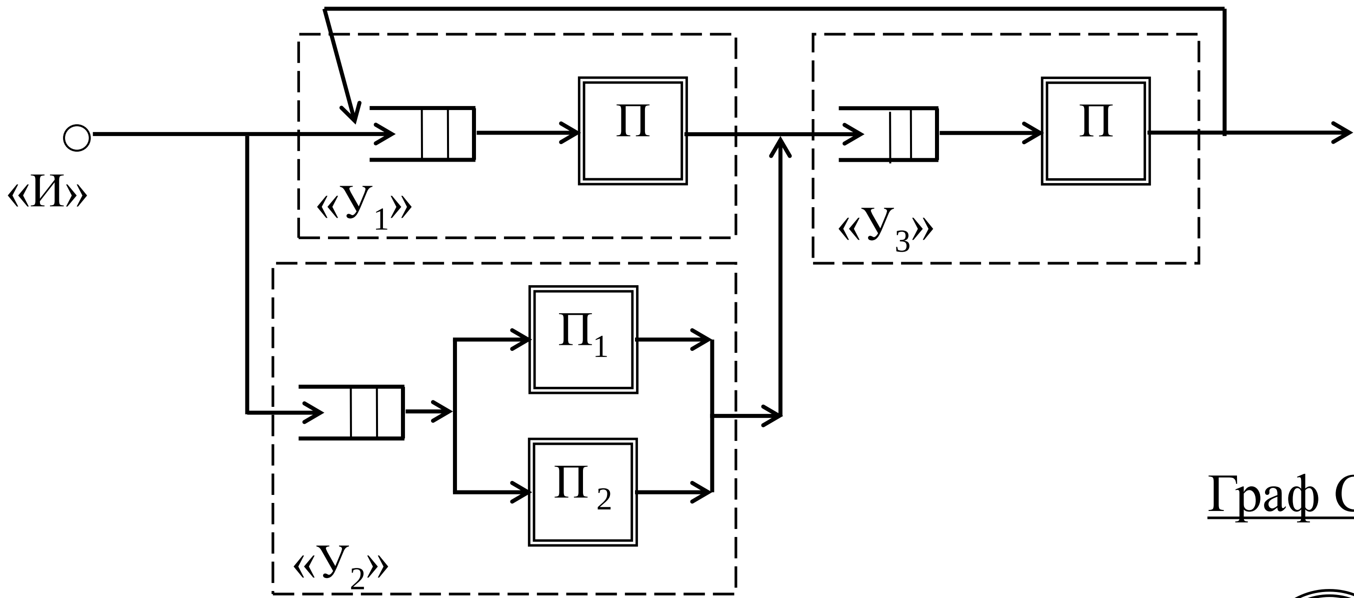
ЧП: 46132578

Расписание: (1,2,1,3,1,2)

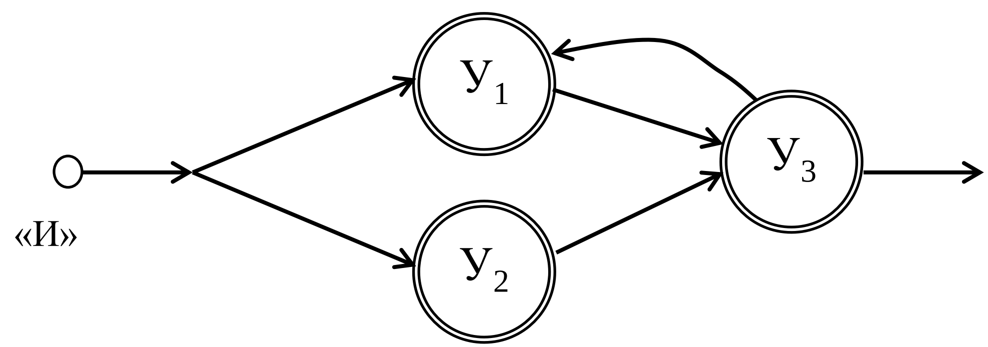
ОР: 41623578

Раздел 2. Модели дискретных систем

Сеть массового обслуживания (СеМО)



Граф СеМО

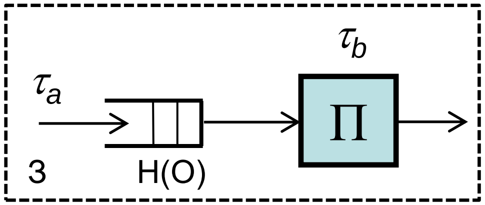


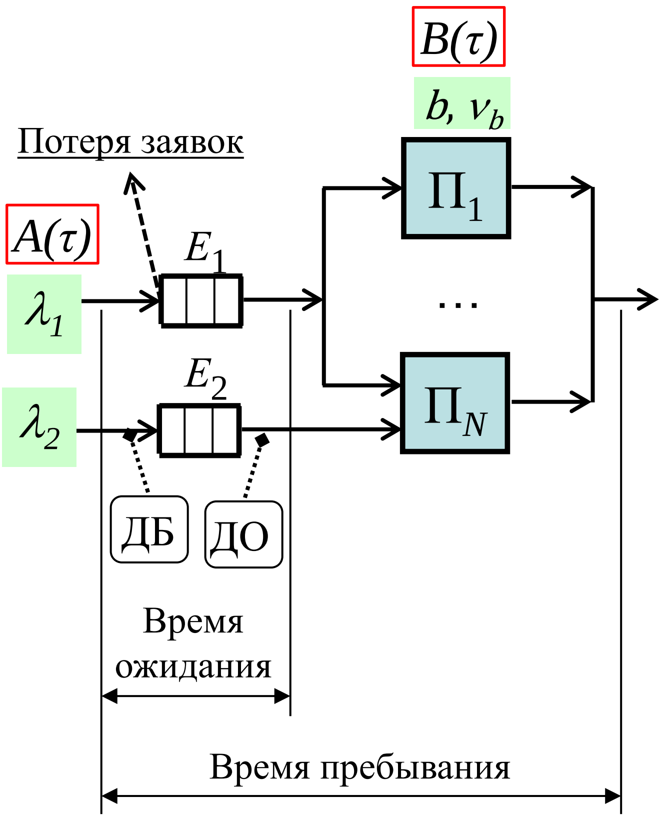
Базовые понятия:

- Источник (И)
- Узел (У)
- Граф СеМО
- Маршрут

2. Модели дискретных систем

Параметры и характеристики СМО





Параметры

1) структурные:

•количество устройств – ***N***;

•количество и ёмкости накопителей ***E***;

•способ взаимосвязи накопителей с устройствами.

2) *функциональные:* ДБ; ДО

3) *нагрузочные*:

•поток заявок: $A(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}$

$\boldsymbol{\lambda}$ [c^{-1}] – интенсивность $(a = 1/\lambda)$;

$$P(k,t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}$$

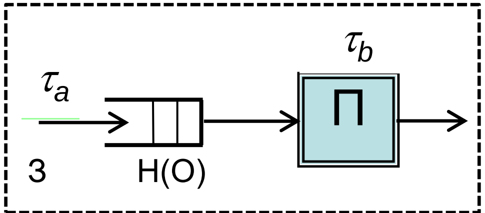
•обслуживание: $B(\tau) = 1 - e^{-\mu\tau}$

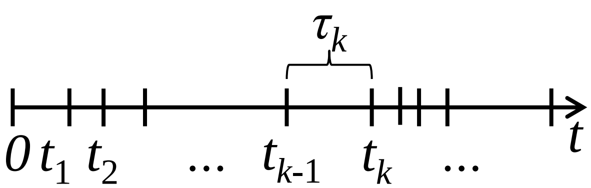
$b \ (\mu = 1/b)$ $\qquad \nu_b = \dfrac{\sigma_b}{b}$

Характеристики

1. Нагрузка
2. Загрузка (и коэффициент простоя) системы
3. Вероятность потери заявки из-за ограниченной емкости накопителя
4. Время ожидания заявок в очереди
5. Время пребывания заявок в системе (*в очереди и на обслуживании в приборе*)
6. Длина очереди заявок
7. Число заявок находящихся одновременно в системе (*в очереди и на обслуживании*)

Поток заявок





$\tau_k = t_k - t_{k-1}$ $(k=1, 2, \ldots)$

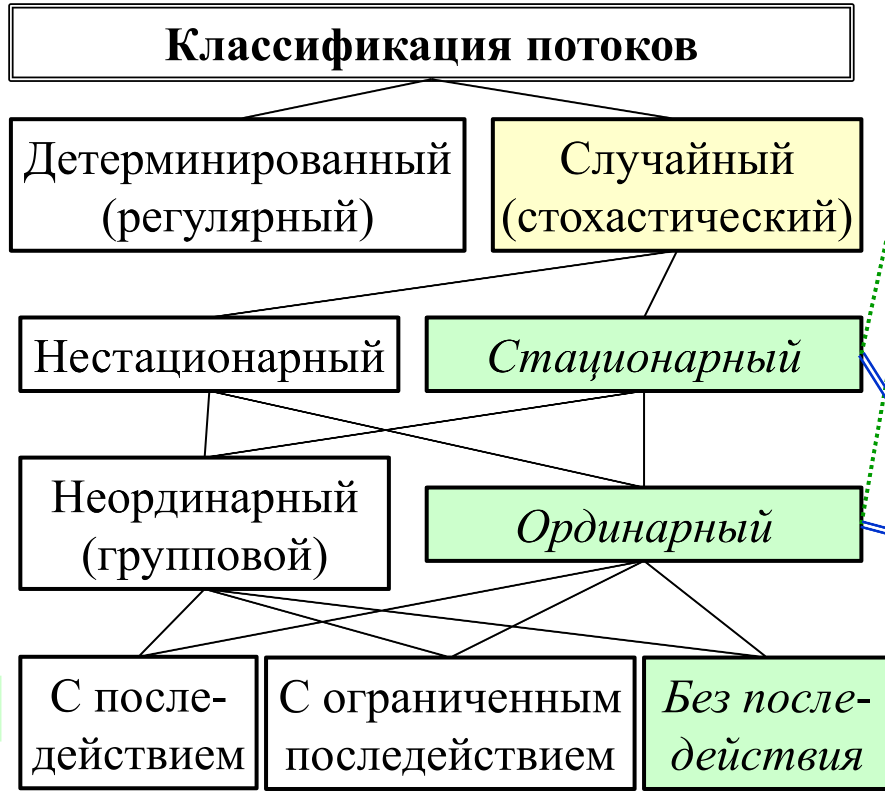
Случайный поток:

$A_k(\tau)$; $a_k(\tau) = A_k'(\tau)$

Рекуррентный поток:

$A_k(\tau) = A(\tau)$ $(k=1, 2, \ldots)$

$\lambda = 1/a$ [c^{-1}] – интенсивность потока;

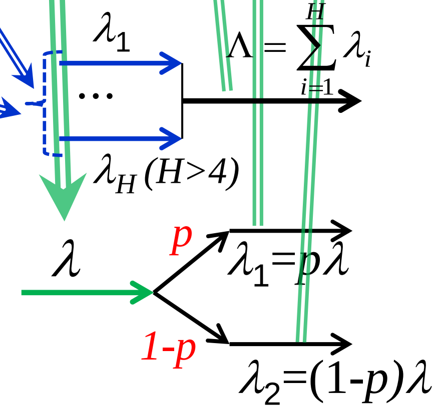


Простейший поток (Пуассоновский)

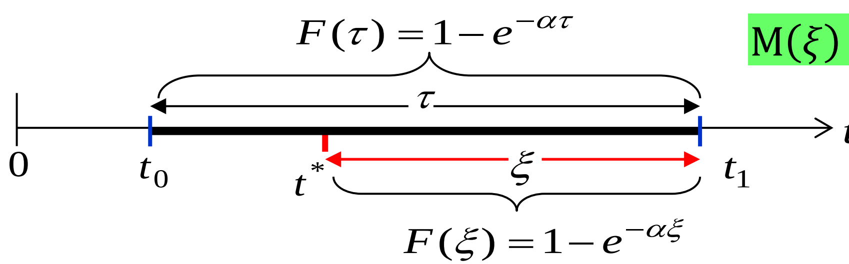
$$A(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}$$

$$P(k,t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}$$

Свойства:

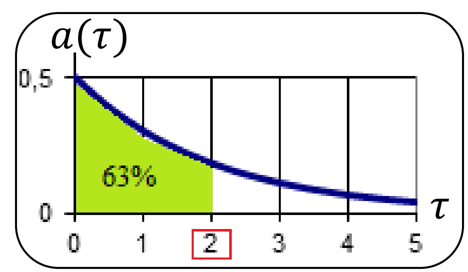


Свойство отсутствия последействия:



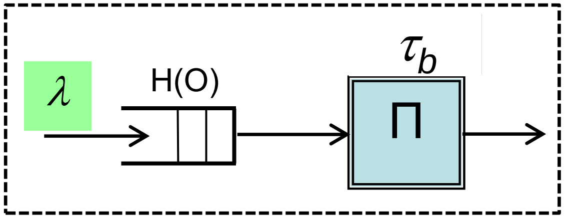
$M(\xi) = M(\tau) = 1/\alpha$

$F(\xi) = F(\tau)$



2. Модели дискретных систем

Поток заявок



Простейший (пуассоновский) поток

- *Стационарный*
- *Ординарный*
- *Без последействия*

$$A(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}$$

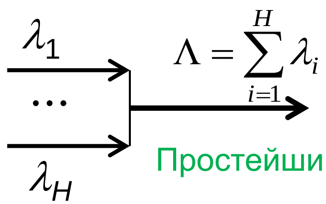
λ [с$^{-1}$] – интенсивность потока ($a = 1/\lambda$);

$$\boxed{P(k,t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}}$$

– вероятность того, что за время t поступит k заявок (k= 0, 1, 2, …)

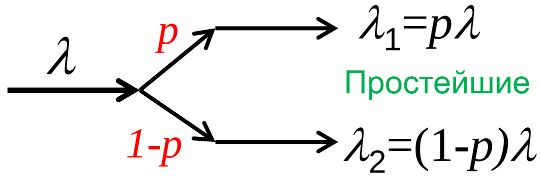
Замечательные свойства *простейшего потока*:

1) Суммирование потоков

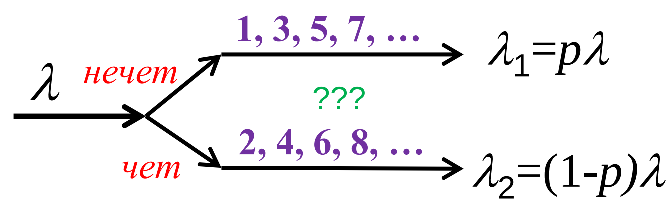


2) Разрежение простейшего потока:

а) случайное (**вероятностное**)



б) неслучайное (**детерминированное**)



Длительность обслуживания

$B(\tau)$; $b(\tau) = B'(\tau)$ $\Longrightarrow$ $b,\ v_b$

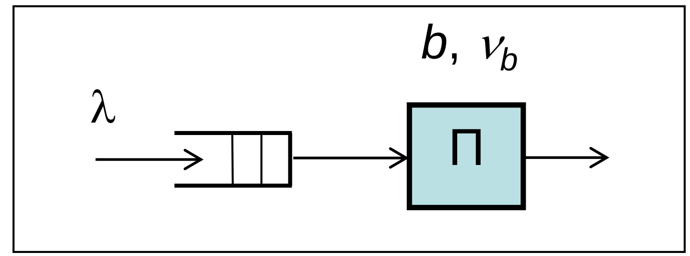
μ - интенсивность обслуживания: $\mu = 1/b$ [1/с=с$^{-1}$]

Основные характеристики базовых моделей с однородным потоком заявок и накопителем неограниченной емкости

1) нагрузка $\boxed{y = \lambda / \mu = \lambda b}$ **($y > 0$)**

2) загрузка $\rho = \lim\limits_{T \to \infty} \dfrac{T_p}{T}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\rho = \min(y/N;1)}$ **($0 \le \rho \le 1$)**

3) коэффициент простоя $\eta = 1 - \rho$



4) среднее время ожидания w = **?**

5) среднее время пребывания $\boxed{u = w + b}$

6) средняя длина очереди $\boxed{l = \lambda w}$

7) среднее число заявок в системе $\boxed{m = \lambda u}$

Условие отсутствия перегрузок:

$$\rho < 1$$

При $N = 1$: $\rho < 1 \Longrightarrow \lambda < \mu$

Обозначения СМО (символика Кендалла)

A/B/N/E

A и **B** – законы распределений:

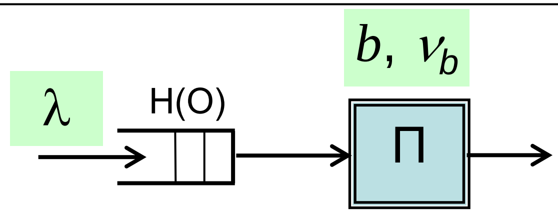
- **G** (General) – *произвольное распределение общего вида*;
- **M** (Markovian) – *экспоненциальное (показательное) распределение*;
- **D** (Deterministik) – *детерминированное распределение*;
- **U** (Uniform) – *равномерное распределение*;
- $\mathbf{E_k}$ (Erlangian) – *распределение Эрланга k-го порядка* (с *k* последовательными *одинаковыми* экспоненциальными фазами);
- $\mathbf{h_k}$ (hypoexponential) – гипоэкспоненциальное распределение *k*-го порядка (с *k* последовательными *разными* экспоненциальными фазами);
- $\mathbf{H_r}$ (Hyperexponential) – *гиперэкпоненциальное распределение порядка r* (с *r* параллельными экспоненциальными фазами);
- **g** (gamma) – гамма-распределение;
- **P** (Pareto) – распределение Парето и т.д.

N = **1, 2, 3, …, ∞** – количество приборов

E = **0, 1, 2, …** – емкость накопителя (*по умолчанию: ∞*)

Примеры: M/M/1 M/G/4 E_3/U/2/10 G/H_2/1/20 M/D/∞

Характеристики базовых моделей с однородным потоком заявок и накопителем неограниченной емкости (M/M/1 и M/G/1)



ДО: *ОПП, ООП, ОСП*=?

1) нагрузка $y = \lambda / \mu = \lambda b < \mathbf{1}$ $(N=1)$

2) загрузка $\rho = \min(y/N;1) < \mathbf{1}$

3) коэффициент простоя $\eta = 1 - \rho$

4) среднее время ожидания

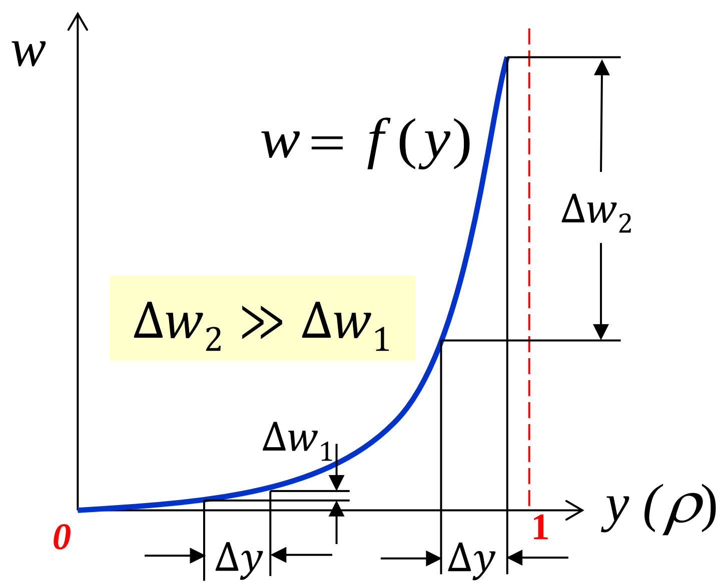
$$w = \frac{\rho b}{1-\rho} \quad \textbf{(M/M/1);} \qquad w = \frac{\lambda b^2 (1 + \nu_b^{\ 2})}{2(1-\rho)} \quad \textbf{(M/G/1)}$$

5) среднее время пребывания $u = w + b = \dfrac{b}{1-\rho}$

6) средняя длина очереди $l = \lambda w = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$

7) среднее число заявок в системе $m = \lambda u = \dfrac{\rho}{1-\rho}$

Анализ свойств системы



Характеристики базовых моделей с однородным потоком заявок и накопителем ограниченной емкости (M/M/1/E)

1) нагрузка $y = \lambda / \mu = \lambda b$

2) *вероятность потери* (***обслуживания***) *заявок* $\pi_n = \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{N_n(T)}{N(T)}$ $\left(\pi_0 = (1-\pi_n) = \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{N_0(T)}{N(T)}\right)$

3) *производительность системы* $\lambda' = \pi_0 \lambda = (1-\pi_n)\lambda$

4) *интенсивность потока потерянных заявок* $\lambda'' = \pi_n \lambda = (1-\pi_0)\lambda$

5) загрузка $\rho = \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{T_p}{T}$ $\Longrightarrow$ $\rho = \dfrac{(1-\pi_n)y}{K}$

6) коэффициент простоя $\eta = 1-\rho$

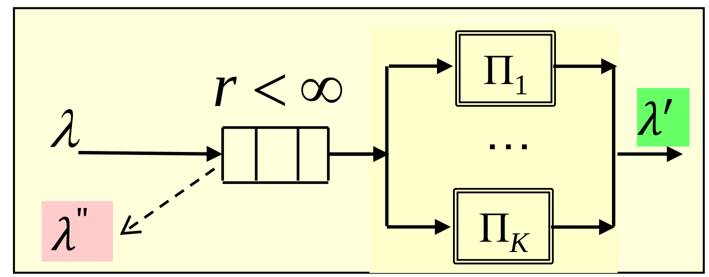
7) среднее время ожидания w = ?

8) среднее время пребывания $u = w + b$

9) средняя длина очереди $l = \lambda w$

10) среднее число заявок в системе $m = \lambda u$

M/M/1/r



$$p_k = \begin{cases} \dfrac{y^k(1-y)}{1-y^{r+2}}, & y \neq 1 \\[2ex] \dfrac{y^k}{r+2}, & y = 1 \end{cases} \qquad (k=0,1,\ldots,r+1)$$

Условие отсутствия перегрузок ?

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

«Моделирование»

Лектор: **АЛИЕВ Тауфик Измайлович,**
доктор технических наук, профессор

Национальный исследовательский университет ИТМО
(НИУ ИТМО)

Факультет программной инженерии и компьютерной техники