ИДЗ-18.2

Найти закон распределения указанной случайной величины X и ее функцию распределения $F(X)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Построить график функции распределения $F(X)$.

1.2) Производятся три выстрела по мишени. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна 0,4, вторым – 0,5, третьим – 0,6. Случайная величина X – число поражений мишени.

Решение: По условию $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}5$, $p_3 = 0{,}6$ – вероятности попадания соответствующих стрелков. Тогда вероятности их промаха:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$$

$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$$

Используя теоремы умножения независимых и сложения несовместных событий, составим закон распределения случайной величины X – числа поражения мишени.

0) $X = 0$ (все промахнулись)

$$p(0) = q_1 q_2 q_3 = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}12$$

1) $X = 1$

$$p(1) = p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3 = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 =$$
$$= 0{,}08 + 0{,}12 + 0{,}18 = 0{,}38$$

2) $X = 2$

$$p(2) = p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3 = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 =$$
$$= 0{,}08 + 0{,}12 + 0{,}18 = 0{,}38$$

3) $X = 3$

$$p(3) = p_1 p_2 p_3 = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}12$$

Таким образом, искомый закон распределения:

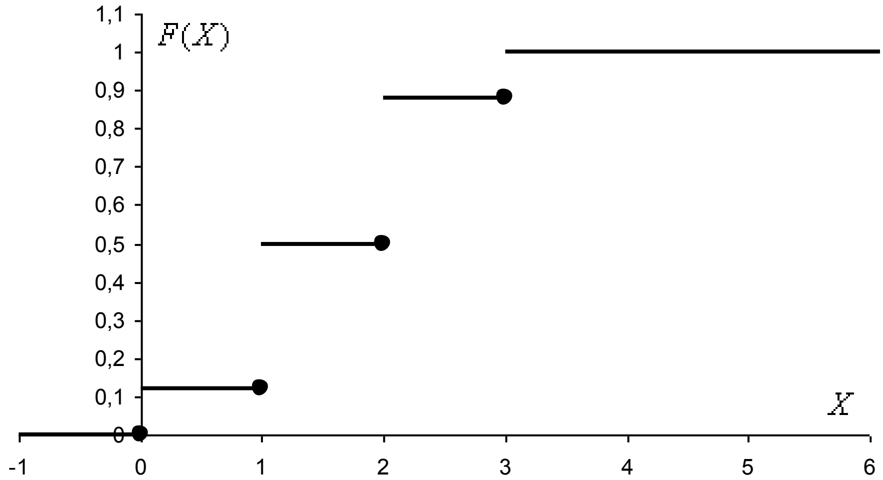
x_i	0	1	2	3
$p(i)$	0,12	0,38	0,38	0,12

Проверка: 0,12 + 0,38 + 0,38 + 0,12 = 1

Составим функцию распределения:

$$F(X)=\begin{cases} 0 \ \text{при } x\le 0; \\ 0{,}12 \ \text{при } 0<x\le 1; \\ 0{,}5 \ \text{при } 1<x\le 2; \\ 0{,}88 \ \text{при } 2<x\le 3; \\ 1 \ \text{при } x>3. \end{cases}$$

Выполним чертеж:



Вычислим математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Заполним расчетную таблицу:

x_i	0	1	2	3	Суммы:
p_i	0,12	0,38	0,38	0,12	1
$x_i p_i$	0	0,38	0,76	0,36	1,5
$x_i^2 p_i$	0	0,38	1,52	1,08	2,98

Математическое ожидание: $M(X)=1{,}5$

Дисперсию вычислим по формуле:
$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=2{,}98-(1{,}5)^2=2{,}98-2{,}25=0{,}73$.

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}73}\approx 0{,}85$

2.2) Задана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \frac{1}{33}(2x^2+5x), 0\le x\le 3\\ 1, x>3\end{cases}$$

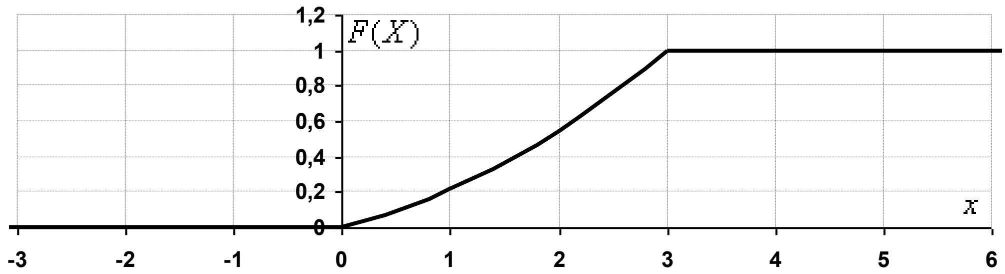
Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[1;2]$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

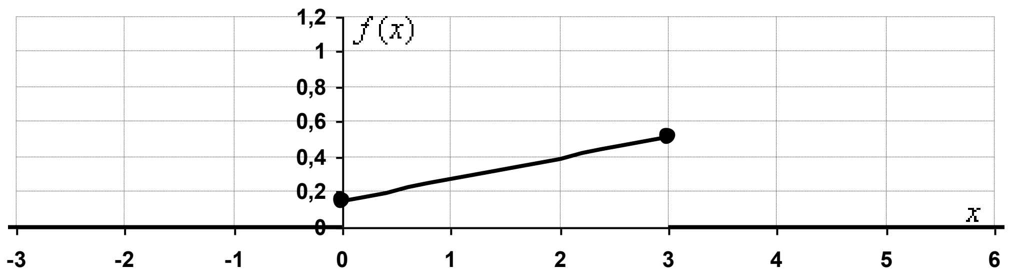
Решение:

Найдем функцию плотности распределения вероятностей:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \frac{1}{33}(4x+5), 0\le x\le 3\\ 0, x>3\end{cases}$$

Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$.





Вычислим математическое ожидание и дисперсию.

Математическое ожидание:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{1}{33}\int_0^3 x(4x+5)dx=\frac{1}{33}\int_0^3(4x^2+5x)dx=$$

$$=\frac{1}{33}\cdot\left(\frac{4x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}\right)\Big|_0^3=\frac{1}{33}\cdot\left(36+\frac{45}{2}-0\right)=\frac{1}{33}\cdot\frac{117}{2}=\frac{39}{22}\approx 1{,}77$$

Дисперсия:

$$D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-(M(x))^2=\frac{1}{33}\int_0^3 x^2(4x+5)dx-\left(\frac{39}{22}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{33}\int_0^3(4x^3+5x^2)dx-\frac{1521}{484}=\frac{1}{33}\cdot\left(x^4+\frac{5x^3}{3}\right)\Big|_0^3-\frac{1521}{484}=\frac{1}{33}\cdot(81+45-0)-\frac{1521}{484}=$$

$$=\frac{42}{11}-\frac{1521}{484}=\frac{327}{484}\approx 0{,}676$$

Найдем вероятность того, что X примет значение из отрезка $[1;2]$.

$P(1\le x\le 2)=F(2)-F(1)=\frac{18}{33}-\frac{7}{33}=\frac{11}{33}=\frac{1}{3}\approx 0{,}333$ – искомая вероятность.

3.2) При определении расстояния радиолокатором случайные ошибки распределены по нормальному закону. Какова вероятность того, что ошибка при определении расстояния не превысит 20 м, если известно, что систематических ошибок радиолокатор не допускает, а дисперсия ошибок равна 1370 $м^2$.

Решение: Используем формулу:

$$P(|X-a|<\delta)\approx 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

В данном случае:

$P(|X-a|<20)\approx 2\Phi\left(\frac{20}{\sqrt{1370}}\right)=2\Phi(0{,}54)=2\cdot 0{,}2054=0{,}4108$ – искомая вероятность.

Ответ: $\approx 0{,}4108$

4.2) Дисперсия каждой из 4500 независимых, одинаково распределенных случайных величин равна 5. Найти вероятность того, что среднее арифметическое этих случайных величин отклонится от своего математического ожидания не более, чем на 0,04

Решение: Используем теорему Чебышева:

$$P\left(\left|\overline{X}-M(X)\right|<\varepsilon\right)\ge 1-\frac{D(X)}{n\varepsilon^2}$$

В данном случае:

$P\left(\left|\overline{X}-M(X)\right|<0{,}04\right)\ge 1-\frac{5}{4500\cdot 0{,}04^2}=1-0{,}6944=0{,}3056$ – искомая вероятность

Ответ: не менее, чем 0,3056