ИДЗ-18.2

Найти закон распределения указанной случайной величины X и ее функцию распределения $F(X)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Построить график функции распределения $F(X)$.

1.8) Вероятность поступления вызова на АТС в течение 1 мин равна 0,4. Случайная величина X – число вызовов, поступивших на АТС за 4 мин.

Решение: Случайная величина X имеет биномиальное распределение. Найдем закон распределения случайной величины X, используя формулу Бернулли:

$$P_n^x = C_n^x p^x q^{n-x}$$

В данной задаче:

$n = 4$ – количество минут;

$x = \{0,1,2,3,4\}$ – вероятное количество вызовов за 4 минуты.

$p = 0{,}4$ – вероятность поступления вызова в течение минуты.

$q = 1 - p = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$ – вероятность того, в течение минуты вызов не поступит.

P_4^x – вероятность того, что за 4 минуты поступит ровно x вызовов.

0) $x = 0$

$$P_4^0 = C_4^0 \cdot (0{,}4)^0 \cdot (0{,}6)^4 = (0{,}6)^4 = 0{,}1296$$

1) $x = 1$

$$P_4^1 = C_4^1 \cdot (0{,}4)^1 \cdot (0{,}6)^3 = 4 \cdot 0{,}4 \cdot (0{,}6)^3 = 0{,}3456$$

2) $x = 2$

$$P_4^2 = C_4^2 \cdot (0{,}4)^2 \cdot (0{,}6)^2 = 6 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}36 = 0{,}3456$$

3) $x = 3$

$$P_4^3 = C_4^3 \cdot (0{,}4)^3 \cdot (0{,}6)^1 = 4 \cdot (0{,}4)^3 \cdot 0{,}6 = 0{,}1536$$

4) $x = 4$

$$P_4^4 = C_4^4 \cdot (0{,}4)^4 \cdot (0{,}6)^0 = (0{,}4)^4 = 0{,}0256$$

Таким образом, искомый закон распределения:

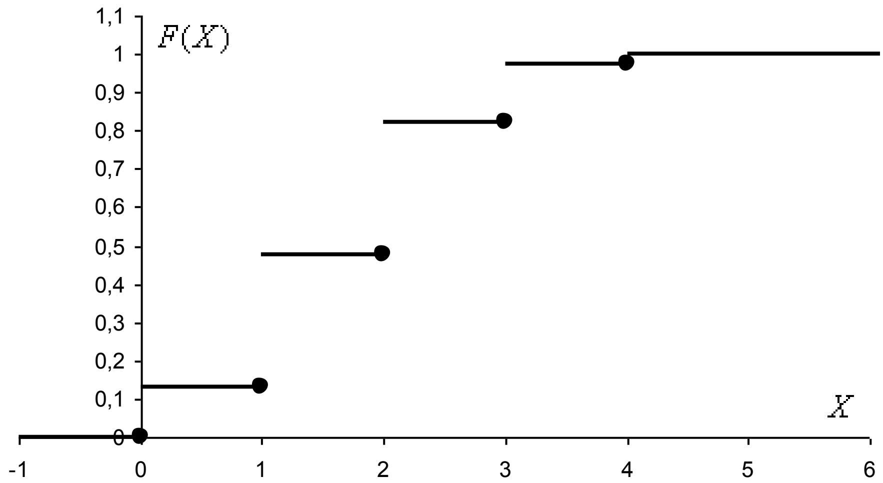
x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,1296	0,3456	0,3456	0,1536	0,0256

Проверка: 0,1296 + 0,3456 + 0,3456 + 0,1536 + 0,0256 = 1

Составим функцию распределения:

$$F(X)=\begin{cases}0 \ \text{при} \ x \le 0; \\ 0{,}1296 \ \text{при} \ 0 < x \le 1; \\ 0{,}4752 \ \text{при} \ 1 < x \le 2; \\ 0{,}8208 \ \text{при} \ 2 < x \le 3; \\ 0{,}9744 \ \text{при} \ 3 < x \le 4; \\ 1 \ \text{при} \ x > 4. \end{cases}$$

Выполним чертеж:



Вычислим математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Используем соответствующие формулы для биномиального распределения.

Вычислим математическое ожидание: $M = np = 4 \cdot 0{,}4 = 1{,}6$

Найдем дисперсию: $D = npq = 4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}96$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}96} \approx 0{,}98$

2.8) Задана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x<0\\ 1-\cos x,\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\\ 1,\ x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}.$$

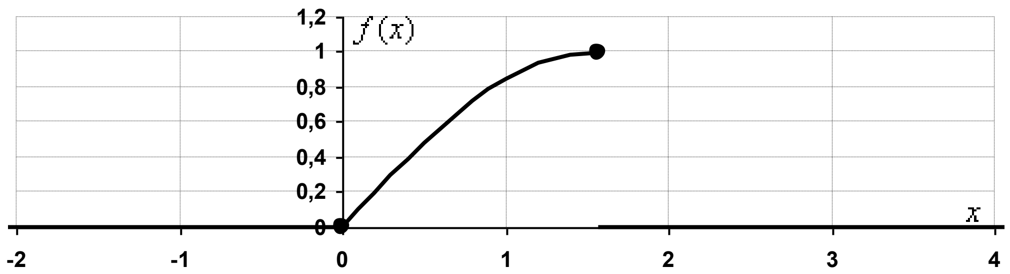
Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания случайной величины X на отрезок $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

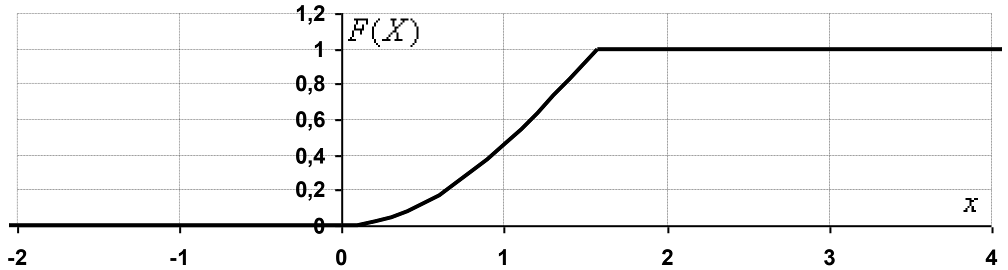
Решение:

Найдем функцию плотности распределения вероятностей:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0,\ x<0\\ \sin x,\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0,\ x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$.





Вычислим математическое ожидание и дисперсию.

Математическое ожидание:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx=(*)$$

Интегрируем по частям:

$u=x\Rightarrow du=dx$

$dv=\sin x\Rightarrow v=-\cos x$

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

$$(*)=-(x\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=(0-0)+\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1-0=1$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-(M(x))^2$$

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin xdx=(*)$$

Дважды интегрируем по частям:

$u=x^2\Rightarrow du=2xdx$

$dv=\sin x\Rightarrow v=-\cos x$

$$(*)=-(x^2\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x=-(0-0)+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x=(*)$$

$u=2x\Rightarrow du=2dx$

$dv=\cos xdx\Rightarrow v=\sin x$

$$(*)=2(x\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=2\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\pi+2(0-1)=\pi-2$$

Таким образом:

$$D(X)=\pi-2-1^2=\pi-3\approx 0{,}14$$

Найдем вероятность того, что X примет значение из отрезка $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$.

$$P\left(0\le x\le\frac{\pi}{3}\right)=F\left(\frac{\pi}{3}\right)-F(0)=1-\cos\frac{\pi}{3}-(1-1)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

– искомая вероятность.

3.8) Считается, что изделие – высшего качества, если отклонение его размеров от номинальных не превосходит по абсолютной величине 3,6 мм. Случайные отклонения размера изделия от номинального подчиняется нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 3 мм. Систематические отклонения отсутствуют. Определить среднее число изделий высшего качества среди 100 изготовленных.

Решение: Используем формулу:

$P(|X - M(x)| < \delta) \approx 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)$ – интегральная функция нормально распределенной случайной величины X; значения данной функции находим по соответствующей таблице.

В данном случае:

$P(|X - M(x)| < 3{,}6) \approx 2\Phi\left(\frac{3{,}6}{3}\right) = 2\Phi(1{,}2) = 2 \cdot 0{,}3849 = 0{,}7699 \approx 0{,}77$ –вероятность того, что изделие – высшего качества.

Таким образом, среднее число изделий высшего качества среди 100 изготовленных: $0{,}77 \cdot 100 = 77$

Ответ: 77

4.8) Вероятность того, что наугад выбранная деталь окажется бракованной, при каждой проверке одна и та же и равна 0,1. Партия изделий не принимается при обнаружении не менее 10 бракованных изделий. Сколько надо проверить деталей, чтобы с вероятностью 0,6 можно было утверждать, что партия, имеющая 10% брака не будет принята.

Решение: