ИДЗ-18.2

Найти закон распределения указанной случайной величины X и ее функцию распределения $F(X)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Построить график функции распределения $F(X)$.

1.13) Вероятность приема каждого из четырех радиосигналов равна 0,6. Случайная величина X – число принятых радиосигналов.

Решение: Случайная величина X имеет биномиальное распределение. Найдем закон распределения случайной величины X, используя формулу Бернулли:

$$P_n^x = C_n^x p^x q^{n-x}$$

В данной задаче:

$n = 4$ – всего сигналов;

$x = \{0,1,2,3,4\}$ – вероятное количество принятых сигналов.

$p = 0,6$ – вероятность приема каждого из сигналов.

$q = 1 - p = 1 - 0,6 = 0,4$ – вероятность каждый из сигналов принят не будет.

P_4^x – вероятность того, что из 4 сигналов будут приняты ровно x сигналов.

0) $x = 0$

$$P_4^0 = C_4^0 \cdot (0,6)^0 \cdot (0,4)^4 = (0,4)^4 = 0,0256$$

1) $x = 1$

$$P_4^1 = C_4^1 \cdot (0,6)^1 \cdot (0,4)^3 = 4 \cdot 0,6 \cdot (0,4)^3 = 0,1536$$

2) $x = 2$

$$P_4^2 = C_4^2 \cdot (0,6)^2 \cdot (0,4)^2 = 6 \cdot 0,36 \cdot 0,16 = 0,3456$$

3) $x = 3$

$$P_4^3 = C_4^3 \cdot (0,6)^3 \cdot (0,4)^1 = 4 \cdot (0,6)^3 \cdot 0,4 = 0,3456$$

4) $x = 4$

$$P_4^4 = C_4^4 \cdot (0,6)^4 \cdot (0,4)^0 = (0,6)^4 = 0,1296$$

Таким образом, искомый закон распределения:

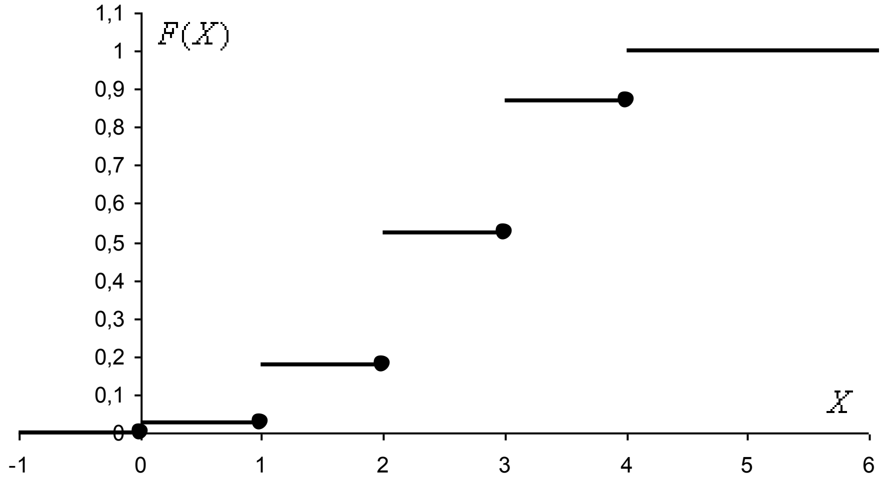
x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	0,1296

Проверка: 0,0256 + 0,1536 + 0,3456 + 0,3456 + 0,1296 = 1

Составим функцию распределения:

$$F(X)=\begin{cases}0 \ \ npu \ x \le 0;\\ 0{,}0256 \ npu \ 0 < x \le 1;\\ 0{,}1792 \ npu \ 1 < x \le 2;\\ 0{,}5248 \ npu \ 2 < x \le 3;\\ 0{,}8704 \ npu \ 3 < x \le 4;\\ 1 \ npu \ x > 4.\end{cases}$$

Выполним чертеж:



Вычислим математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Используем соответствующие формулы для биномиального распределения.

Вычислим математическое ожидание: $M = np = 4 \cdot 0{,}6 = 2{,}4$

Найдем дисперсию: $D = npq = 4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}96$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}96} \approx 0{,}98$

2.13) Задана функция распределения случайной величины X :

$$F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \frac{1}{33}(3x^2+2x), 0\le x\le 3\\ 1, x>3\end{cases}$$

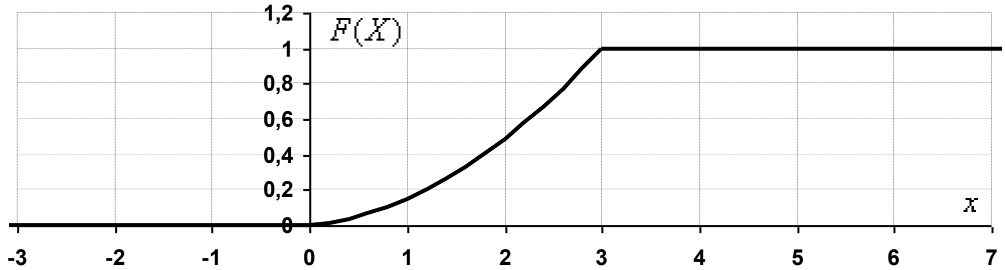
Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[0;2]$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

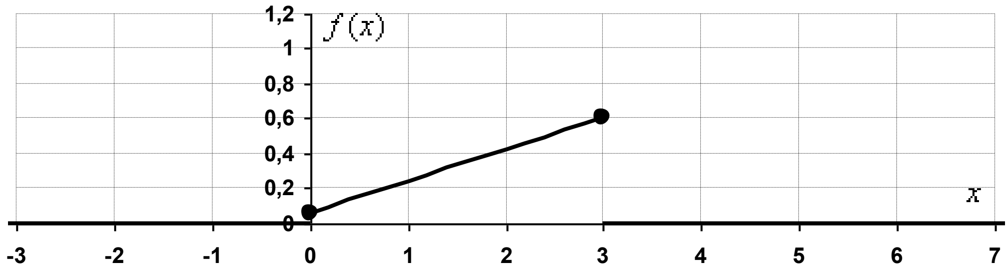
Решение:

Найдем функцию плотности распределения вероятностей:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0,\ x<0\\ \frac{1}{33}(6x+2),\ 0\le x\le 3\\ 0,\ x>3\end{cases}$$

Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$.





Вычислим математическое ожидание и дисперсию.

Математическое ожидание:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{1}{33}\int_0^3 x(6x+2)dx=\frac{1}{33}\int_0^3(6x^2+2x)dx=$$

$$=\frac{1}{33}\cdot(2x^3+x^2)\Big|_0^3=\frac{1}{33}\cdot(54+9-0)=\frac{1}{33}\cdot 63=\frac{21}{11}\approx 1{,}909$$

Дисперсия:

$$D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-(M(x))^2=\frac{1}{33}\int_0^3 x^2(6x+2)dx-\left(\frac{21}{11}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{33}\int_0^3(6x^3+2x^2)dx-\frac{441}{121}=\frac{1}{33}\cdot\left(\frac{3x^4}{2}+\frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^3-\frac{441}{121}=\frac{1}{33}\cdot\left(\frac{243}{2}+18-0\right)-\frac{441}{121}=$$

$$=\frac{1}{33}\cdot\frac{279}{2}-\frac{441}{121}=\frac{93}{22}-\frac{441}{121}=\frac{141}{242}\approx 0{,}5826$$

Найдем вероятность того, что X примет значение из отрезка $[0;2]$.

$P(0\le x\le 2)=F(2)-F(0)=\frac{16}{33}-0=\frac{16}{33}\approx 0{,}485$ – искомая вероятность.

3.13) Случайная величина подчинена закону Пуассона с математическим ожиданием $a=3$. Найти вероятность того, что данная случайная величина примет положительное значение.

Решение: Распределение Пуассона имеет вид:

$P_m=\frac{a^m}{m!}\cdot e^{-a}$, в данной задаче: $a=3$

Найдем вероятность того, что случайная величина примет нулевое значение:

По теореме сложения несовместных событий:

$P_0=\frac{3^0}{0!}\cdot e^{-3}\approx 0{,}05$

По теореме сложения вероятностей противоположных событий:

$P(m\ge 1)=1-P_0\approx 1-0{,}05=0{,}95$ – вероятность того случайная величина примет положительное значение

Ответ: $\approx 0{,}95$

4.13) Вероятность наличия зазубрин на металлических брусках, изготовленных из обточки, равна 0,2. Оценить вероятность того, что в партии из 1000 брусков отклонение числа пригодных брусков от 800 не превышает 5%.

Решение: Используем неравенство Бернулли:

$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\ge 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}$

В данном случае: $\varepsilon=0{,}05$ (5%)

Таким образом, искомая вероятность:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-800\right|\le 0{,}05\right)\ge 1-\frac{0{,}8\cdot 0{,}2}{1000\cdot(0{,}05)^2}=1-0{,}064=0{,}936$$

Ответ: не менее 0,936