ИДЗ-18.2

Найти закон распределения указанной случайной величины X и ее функцию распределения $F(X)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Построить график функции распределения $F(X)$.

1.22) Вероятность выхода из строя каждого из трех блоков прибора в течение гарантийного срока равна 0,3. Случайная величина X – число блоков, вышедших из строя в течение гарантийного срока.

Решение: Случайная величина X имеет биномиальное распределение. Найдем закон распределения случайной величины X, используя формулу Бернулли:

$$P_n^x = C_n^x p^x q^{n-x}$$

В данной задаче:

$n = 3$ – всего блоков;

$x = \{0,1,2,3\}$ – вероятное количество блоков, вышедших из строя в течение гарантийного срока.

P_n^x – вероятность того, что из n блоков из строя выйдет ровно x блоков в течение гарантийного срока.

По условию:

$p = 0,3$ – вероятность выхода из строя каждого блока.

$q = 1 - p = 1 - 0,3 = 0,7$ – вероятность безотказной работы каждого из блоков.

0) $x = 0$

$$P_3^0 = C_3^0 \cdot (0,3)^0 \cdot (0,7)^3 = (0,7)^3 = 0,343$$

1) $x = 1$

$$P_3^1 = C_3^1 \cdot (0,3)^1 \cdot (0,7)^2 = 3 \cdot 0,3 \cdot (0,7)^2 = 0,441$$

2) $x = 2$

$$P_3^2 = C_3^2 \cdot (0,3)^2 \cdot (0,7)^1 = 3 \cdot 0,09 \cdot 0,7 = 0,189$$

3) $x = 3$

$$P_3^3 = C_3^3 \cdot (0,3)^3 \cdot (0,7)^0 = (0,3)^3 = 0,027$$

Таким образом, искомый закон распределения:

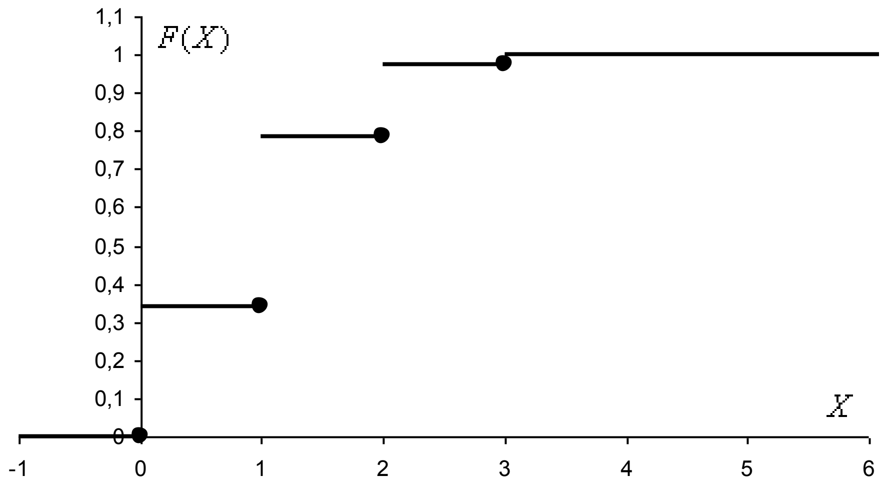
x_i	0	1	2	3
p_i	0,343	0,441	0,189	0,027

Проверка: 0,343 + 0,441 + 0,189 + 0,027 = 1

Составим функцию распределения:

$$F(X)=\begin{cases}0 \ \textit{при} \ x \le 0;\\ 0,343 \ \textit{при} \ 0 < x \le 1;\\ 0,784 \ \textit{при} \ 1 < x \le 2;\\ 0,973 \ \textit{при} \ 2 < x \le 3;\\ 1 \ \textit{при} \ x > 3.\end{cases}$$

Выполним чертеж:



Вычислим математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Вычислим математическое ожидание: $M = np = 3 \cdot 0{,}3 = 0{,}9$

Найдем дисперсию: $D = npq = 3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}63$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}63} \approx 0{,}79$

2.22) Задана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x<0\\ \frac{1}{4}(x^2-2x), 1\le x\le 2\\ 1,\ x>2\end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[1{,}2;1{,}5]$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Внимание! Условие данной задачи некорректное, поскольку функция $F(x)$ не может быть отрицательной.

3.22) Диаметр подшипников, изготовленные на заводе, представляет собой случайную величину, распределенную нормально с математическим ожиданием 1,5 см и средним квадратическим отклонением 0,04 см. Найти вероятность того, что размер наугад взятого подшипника колеблется от 1 до 2 см.

Решение: Используем формулу:

$P(\alpha<X<\beta)\approx\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)$ – интегральная функция нормально распределенной случайной величины X; значения данной функции находим по соответствующей таблице.

Для данной задачи вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала:

$$P(1<X<2)\approx\Phi\left(\frac{2-1{,}5}{0{,}04}\right)-\Phi\left(\frac{1-1{,}5}{0{,}04}\right)=\Phi(12{,}5)-\Phi(-12{,}5)=$$

$$=\Phi(12{,}5)+\Phi(12{,}5)=0{,}5000+0{,}5000=1$$

Ответ: Данное событие является практически достоверным.

4.22) Принимая вероятность вызревания кукурузного стебля с тремя початками равной 0,75, оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что среди 3000 стеблей опытного участка таких стеблей будет от 2190 до 2310 включительно.

Решение: Используем неравенство Чебышева:

$$P(|m-np|\le\varepsilon)\ge 1-\frac{npq}{\varepsilon^2}$$

В данном случае: $\varepsilon=2310-3000\cdot 0{,}75=2310-2250=60$

Таким образом:

$$P(2190\le m\le 2310)\ge 1-\frac{3000\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}{60^2}=1-0{,}15625=0{,}84375$$

Ответ: 0,84375