**ИДЗ-18.2**

Найти закон распределения указанной случайной величины $X$ и ее функцию распределения $F(X)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Построить график функции распределения $F(X)$.

1.7) Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Случайная величина $X$ – число попаданий в цель при трех выстрелах.

**Решение:** Случайная величина $X$ имеет биномиальное распределение. Найдем закон распределения случайной величины $X$, используя формулу Бернулли:

$$P_n^x = C_n^x p^x q^{n-x}$$

В данной задаче:

$n = 3$ – всего выстрелов;

$x = \{0,1,2,3\}$ – вероятное число попаданий в цель.

$p = 0{,}8$ – вероятность попадания в цель при каждом выстреле.

$q = 1 - p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ – вероятность того, что цель не будет поражена при каждом выстреле.

$P_3^x$ – вероятность того, что после 3-х выстрелов цель будет поражена ровно $x$ раз.

0) $x = 0$

$$P_3^0 = C_3^0 \cdot (0{,}8)^0 \cdot (0{,}2)^3 = (0{,}2)^3 = 0{,}008$$

1) $x = 1$

$$P_3^1 = C_3^1 \cdot (0{,}8)^1 \cdot (0{,}2)^2 = 3 \cdot 0{,}8 \cdot (0{,}2)^2 = 0{,}096$$

2) $x = 2$

$$P_3^2 = C_3^2 \cdot (0{,}8)^2 \cdot (0{,}2)^1 = 3 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}2 = 0{,}384$$

3) $x = 3$

$$P_3^3 = C_3^3 \cdot (0{,}8)^3 \cdot (0{,}2)^0 = (0{,}8)^3 = 0{,}512$$

Таким образом, искомый закон распределения:

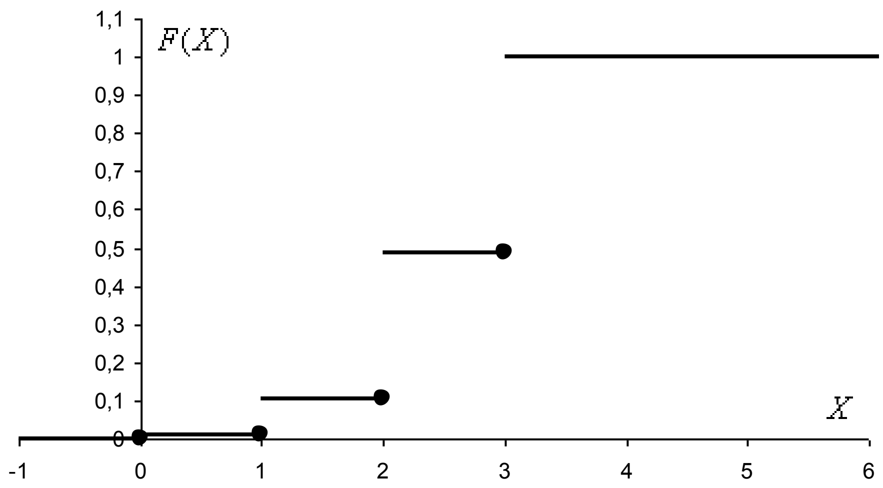
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,008 | 0,096 | 0,384 | 0,512 |

Проверка: 0,008 + 0,096 + 0,384 + 0,512 = 1

Составим функцию распределения:

$$F(X)=\begin{cases}0 \ \textit{при} \ x \le 0;\\ 0{,}008 \ \textit{при} \ 0 < x \le 1;\\ 0{,}104 \ \textit{при} \ 1 < x \le 2;\\ 0{,}488 \ \textit{при} \ 2 < x \le 3;\\ 1 \ \textit{при} \ x > 3.\end{cases}$$

Выполним чертеж:




Вычислим математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Используем соответствующие формулы для биномиального распределения.

Вычислим математическое ожидание: $M = np = 3 \cdot 0{,}8 = 2{,}4$

Найдем дисперсию: $D = npq = 3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}48$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}48} \approx 0{,}6928$

2.7) Задана функция распределения случайной величины $X$:

$$F(x)=\begin{cases}0, x<\dfrac{3\pi}{4}\\ \cos 2x, \dfrac{3\pi}{4}\le x\le \pi\\ 1, x>\pi\end{cases}.$$

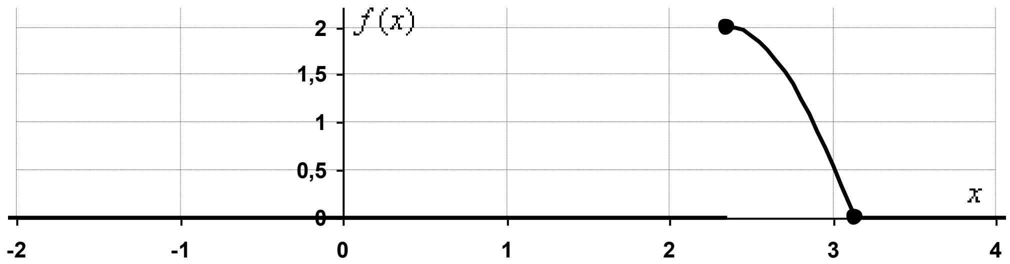
Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания случайной величины $X$ на отрезок $\left[\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{5\pi}{6}\right]$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

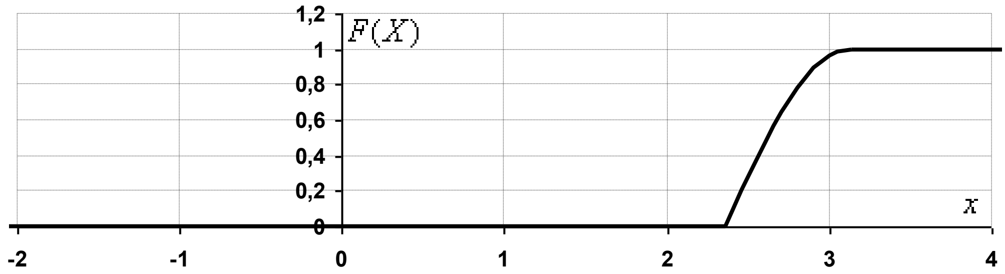
**Решение:**

Найдем функцию плотности распределения вероятностей:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, x<\dfrac{3\pi}{4}\\ -2\sin 2x, \dfrac{3\pi}{4}\le x\le \pi\\ 0, x>\pi\end{cases}$$

Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$.




Вычислим математическое ожидание и дисперсию.

Математическое ожидание:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=-2\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} x\sin 2x dx=(*)$$

Интегрируем по частям:

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = -2\sin 2x \Rightarrow v = \cos 2x$

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$(*) = (x\cos 2x)\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \cos 2x dx = (\pi - 0) - \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} = \pi - \frac{1}{2}(0+1) = \pi - \frac{1}{2} \approx 2{,}64$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(x))^2$$

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = -2\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} x^2 \sin 2x dx = (*)$$

Дважды интегрируем по частям:

$u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$

$dv = -2\sin 2x \Rightarrow v = \cos 2x$

$$(*) = (x^2 \cos 2x)\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} - 2\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} x\cos 2x = \left(\pi^2 - 0\right) - 2\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} x\cos 2x = (*)$$

$u = -x \Rightarrow du = -dx$

$dv = 2\cos 2x dx \Rightarrow v = \sin 2x$

$$(*) = \pi^2 - (x\sin 2x)\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \sin 2x dx = \pi^2 - \left(0 + \frac{3\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\cos 2x\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} =$$

$$= \pi^2 - \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}(1-0) = \pi^2 - \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Таким образом:

$$D(X) = \pi^2 - \pi - \frac{1}{2} - \left(\pi - \frac{1}{2}\right)^2 = \pi^2 - \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} - \pi^2 + \pi - \frac{1}{4} = \frac{\pi - 3}{4} \approx 0{,}035$$

Найдем вероятность того, что $X$ примет значение из отрезка $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

$$P\left(\frac{3\pi}{4} \le x \le \frac{5\pi}{6}\right) = F\left(\frac{5\pi}{6}\right) - F\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 0 + \frac{1}{2} = 0{,}5$$

– искомая вероятность.

3.7. В лотерее разыгрывается мотоцикл, велосипед и одни часы. Найти математическое ожидание выигрыша для лица, имеющего один билет, если общее количество билетов равно 100.

**Решение:** Рассмотрим случайную величину $X$ – количество выигравших билетов.

Если $x_1 = 0$, то $p_1 = \frac{97}{100} = 0{,}97$

Если $x_2 = 0$, то $p_2 = \frac{3}{100} = 0{,}03$

По определению математического ожидания:

$$M(X) = \sum x_i p_i = 0 \cdot 0{,}97 + 1 \cdot 0{,}03 = 0{,}03$$

**Ответ:** 0,03

4.7. Производится выборочный контроль партии электролампочек для определения средней продолжительности горения. Каким должен быть объем выборки, чтобы с вероятностью не меньшей 0,9876, можно было утверждать, что средняя продолжительность эксплуатации лампочки по всей партии отклонилась от средней, полученной в выборке, не более, чем на 10 ч, если среднее квадратическое отклонение продолжительности эксплуатации лампочки равно 80 ч?

**Решение:** Используем теорему Чебышева:

$$P\left(\left|\bar{x} - x_Г\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D}{n\varepsilon^2}$$

В данном случае:

$$1 - \frac{80^2}{n \cdot 10^2} = 0{,}9876$$

$$\frac{64}{n} = 0{,}0124$$

$$n = \frac{64}{0{,}0124} \approx 5161{,}3$$

**Ответ:** не менее чем 5162