ИДЗ-18.2

Найти закон распределения указанной случайной величины X и ее функцию распределения $F(X)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Построить график функции распределения $F(X)$.

1.3) Вероятность безотказной работы в течение гарантийного срока для телевизоров первого типа равна 0,9, второго типа – 0,7, третьего типа – 0,8. Случайная величина X – число телевизоров, проработавших гарантийный срок, среди трех телевизоров разных типов.

Решение: По условию $p_1 = 0{,}9$, $p_2 = 0{,}7$, $p_3 = 0{,}8$ – вероятности безотказной работы в течение гарантийного срока телевизоров соответствующих типов. Тогда вероятности их отказа:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$$
$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$$
$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

Используя теоремы умножения независимых и сложения несовместных событий, составим закон распределения случайной величины X – количества телевизоров, проработавших гарантийный срок, среди трех телевизоров разных типов.

0) $X = 0$ (все телевизоры вышли из строя)

$$p(0) = q_1 q_2 q_3 = 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}006$$

1) $X = 1$

$$p(1) = p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 =$$
$$= 0{,}054 + 0{,}014 + 0{,}024 = 0{,}092$$

2) $X = 2$

$$p(2) = p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}9 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 =$$
$$= 0{,}126 + 0{,}216 + 0{,}056 = 0{,}398$$

3) $X = 3$ (все телевизоры проработали гарантийный срок)

$$p(3) = p_1 p_2 p_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}504$$

Таким образом, искомый закон распределения:

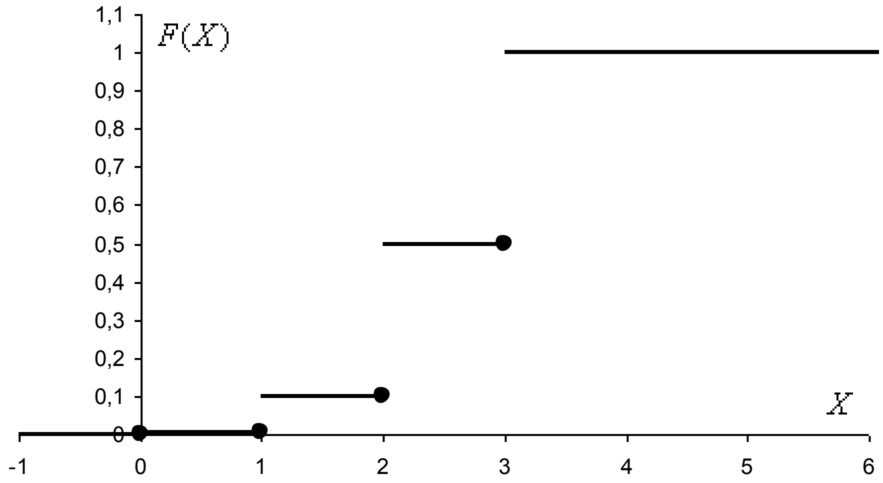
x_i	0	1	2	3
$p(i)$	0,006	0,092	0,398	0,504

Проверка: 0,006 + 0,092 + 0,398 + 0,504 = 1

Составим функцию распределения:

$$F(X)=\begin{cases}0 \ \ при \ x\le 0;\\ 0{,}006 \ \ при \ 0<x\le 1;\\ 0{,}098 \ при \ 1<x\le 2;\\ 0{,}4968 \ при \ 2<x\le 3;\\ 1 \ при \ x>3.\end{cases}$$

Выполним чертеж:



Вычислим математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Заполним расчетную таблицу:

x_i	0	1	2	3	Суммы:
p_i	0,006	0,092	0,398	0,504	1
$x_i p_i$	0	0,092	0,796	1,512	2,4
$x_i^2 p_i$	0	0,092	1,592	4,536	6,22

Математическое ожидание: $M(X)=2{,}4$

Дисперсию вычислим по формуле:
$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=6{,}22-(2{,}4)^2=6{,}22-5{,}76=0{,}46$.

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}46}\approx 0{,}68$

2.3) Задана функция распределения случайной величины X: $F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \frac{1}{9}x^2, 0\le x\le 3\\ 1, x>3\end{cases}$.

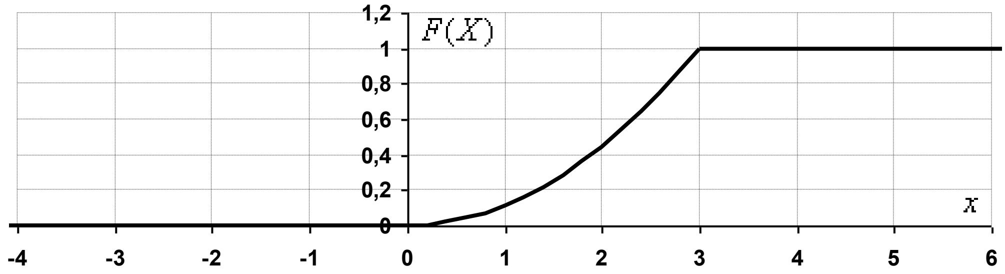
Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[0;1]$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

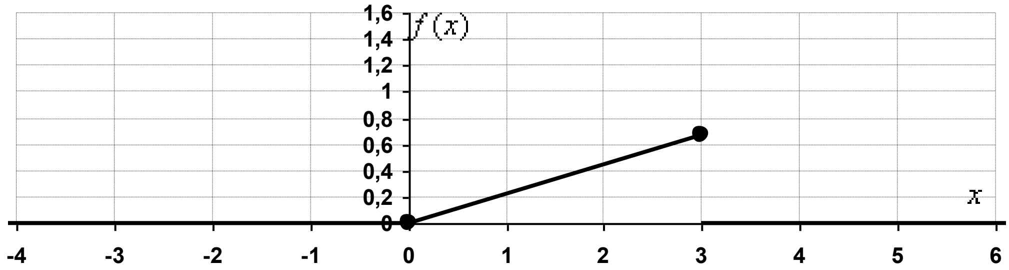
Решение:

Найдем функцию плотности распределения вероятностей:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \frac{2x}{9}, 0\le x\le 3\\ 0, x>3\end{cases}$$

Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$.





Вычислим математическое ожидание и дисперсию.

Математическое ожидание:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{2}{9}\int_0^3 x^2dx=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}\left(x^3\right)\Big|_0^3=\frac{2}{27}\cdot(27-0)=2$$

Дисперсия:

$$D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-(M(x))^2=\frac{2}{9}\int_0^3 x^3dx-2^2=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{4}\left(x^4\right)\Big|_0^3-4=$$

$$=\frac{(81-0)}{18}-4=\frac{9}{2}-4=\frac{1}{2}$$

Найдем вероятность того, что X примет значение из отрезка $[0;1]$.

$P(0 \le x \le 1) = F(1) - F(0) = \dfrac{1}{9} - 0 = \dfrac{1}{9} \approx 0{,}111$ – искомая вероятность.

3.3) Все значения равномерно распределенной случайной величины X лежат на отрезке $[2;8]$. Найти вероятность попадания случайной величины X в промежуток $(3;5)$.

Решение: Составим функцию плотности распределения вероятностей равномерно распределенной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < 2 \\ \dfrac{1}{(8-2)}, 2 \le x \le 8 \\ 0, x > 8 \end{cases} = \begin{cases} 0, \ x < 2 \\ \dfrac{1}{6}, \ 2 \le x \le 8 \\ 0, \ x > 8 \end{cases}$$

Тогда искомая вероятность:

$$P(3 < x < 5) = \int_3^5 f(x)dx = \frac{1}{6}\int_3^5 dx = \frac{1}{6} \cdot (x)\Big|_3^5 = \frac{1}{6} \cdot (5-3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$$

4.3) Случайная величина X является средней арифметической 3200 независимых и одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием, равным 3, и дисперсией, равной 2. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение из промежутка $(2{,}95;3{,}075)$.

Решение: Случайная величина X удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова, поэтому справедливым является равенство $P\left(\left|\dfrac{1}{n}\sum X_i - a\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)$. В данной задаче интервал не является симметричным: $\varepsilon_1 = 3{,}075 - 3 = 0{,}075$, $\varepsilon_2 = 2{,}95 - 3 = -0{,}05$.

Таким образом:

$$P(2{,}95 < X < 3{,}075) \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon_1\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\varepsilon_2\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{0{,}075 \cdot \sqrt{3200}}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{-0{,}05 \cdot \sqrt{3200}}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \Phi(3) + \Phi(2) = 0{,}4987 + 0{,}4772 = 0{,}9759$$