ИДЗ-18.2

Найти закон распределения указанной случайной величины X и ее функцию распределения $F(X)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Построить график функции распределения $F(X)$.

1.16) 90% панелей, изготавливаемых на железобетонном заводе – высшего сорта. Случайная величина X – число панелей высшего сорта из четырех, взятых наугад.

Решение: Случайная величина X имеет биномиальное распределение. Найдем закон распределения случайной величины X, используя формулу Бернулли:

$$P_n^x = C_n^x p^x q^{n-x}$$

В данной задаче:

$n = 4$ – всего панелей в выборке;

$x = \{0,1,2,3,4\}$ – вероятное количество панелей высшего сорта в выборке.

P_n^x – вероятность того, что из n панелей ровно x будут высшего сорта.

Из условия следует:

$p = 0,9$ – вероятность того, что панель будет высшего сорта.

$q = 1 - p = 1 - 0,9 = 0,1$ – вероятность того, что панель не будет высшего сорта

0) $x = 0$

$$P_4^0 = C_4^0 \cdot (0,9)^0 \cdot (0,1)^4 = (0,1)^4 = 0,0001$$

1) $x = 1$

$$P_4^1 = C_4^1 \cdot (0,9)^1 \cdot (0,1)^3 = 4 \cdot 0,9 \cdot (0,1)^3 = 0,0036$$

2) $x = 2$

$$P_4^2 = C_4^2 \cdot (0,9)^2 \cdot (0,1)^2 = 6 \cdot 0,81 \cdot 0,01 = 0,0486$$

3) $x = 3$

$$P_4^3 = C_4^3 \cdot (0,9)^3 \cdot (0,1)^1 = 4 \cdot (0,9)^3 \cdot 0,1 = 0,2916$$

4) $x = 4$

$$P_4^4 = C_4^4 \cdot (0,9)^4 \cdot (0,1)^0 = (0,9)^4 = 0,6561$$

Таким образом, искомый закон распределения:

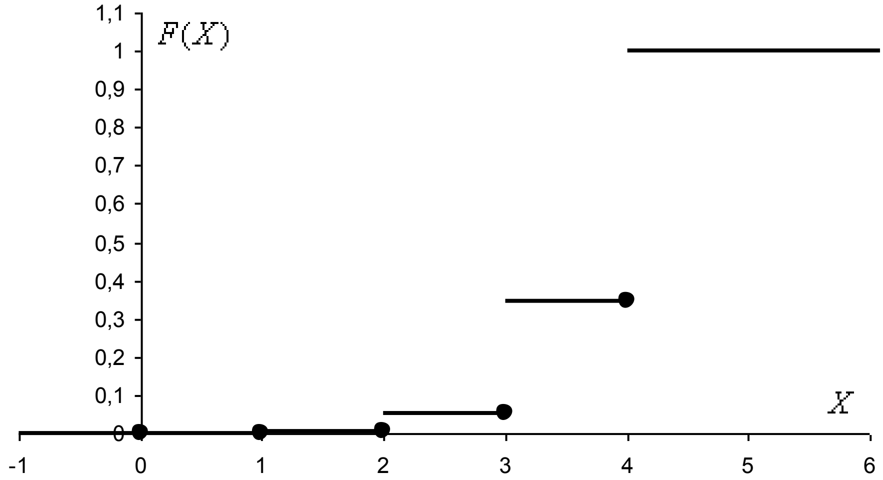
x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0001	0,0036	0,0486	0,2916	0,6561

Проверка: 0,0001 + 0,0036 + 0,0486 + 0,2916 + 0,6561 = 1

Составим функцию распределения:

$$F(X)=\begin{cases} 0 \ \textit{при} \ x \le 0; \\ 0{,}0001 \ \textit{при} \ 0 < x \le 1; \\ 0{,}0037 \ \textit{при} \ 1 < x \le 2; \\ 0{,}0523 \ \textit{при} \ 2 < x \le 3; \\ 0{,}3439 \ \textit{при} \ 3 < x \le 4; \\ 1 \ \textit{при} \ x > 4. \end{cases}$$

Выполним чертеж:



Вычислим математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Используем соответствующие формулы для биномиального распределения.

Вычислим математическое ожидание: $M = np = 4 \cdot 0{,}9 = 3{,}6$

Найдем дисперсию: $D = npq = 4 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}36$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$

2.16) Задана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0, x<-1\\ \frac{1}{5}(x+1), -1\le x\le 4\\ 1, x>4\end{cases}$$

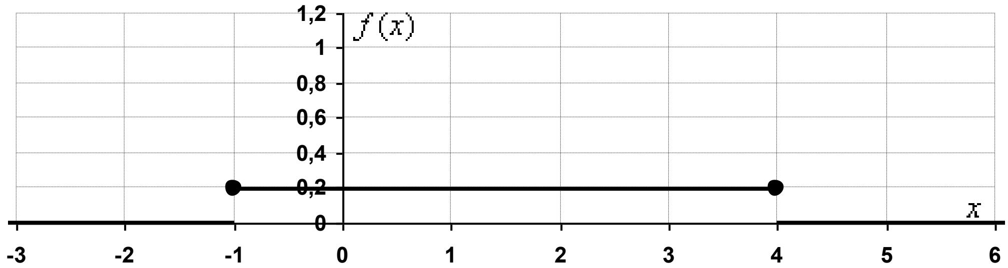
Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[0;3]$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

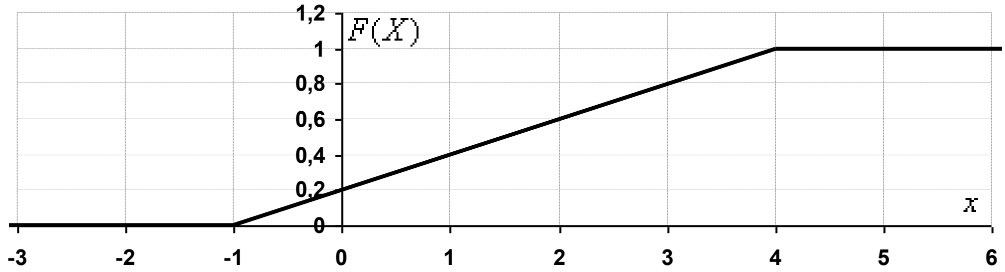
Решение:

Найдем функцию плотности распределения вероятностей:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, x<-1\\ \frac{1}{5}, -1\le x\le 4\\ 0, x>4\end{cases}$$

Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$.





Вычислим математическое ожидание и дисперсию.

Математическое ожидание:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{1}{5}\int_{-1}^{4} xdx=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}(x^2)\Big|_{-1}^{4}=\frac{1}{10}\cdot(16-1)=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

Дисперсия:

$$D(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(x))^2 = \frac{1}{5}\int\limits_{-1}^{4} x^2 dx - \left(\frac{3}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}(x^3)\Big|_{-1}^{4} - \frac{9}{4} = \frac{1}{15}(64+1) - \frac{9}{4} = \frac{13}{3} - \frac{9}{4} = \frac{25}{12} \approx 2{,}083$$

Найдем вероятность того, что X примет значение из отрезка $[0;3]$.

$P(0 \le x \le 3) = F(3) - F(0) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}6$ – искомая вероятность.

3.16) Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием 40 и дисперсией 100. Вычислить вероятность попадания случайной величины X в интервал $(30;80)$

Решение: Вычислим среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{100} = 10$.

Используем формулу:

$P(\alpha < X < \beta) \approx \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)$ – интегральная функция нормально распределенной случайной величины X; значения данной функции находим по соответствующей таблице.

Для данной задачи вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала:

$$P(30 < X < 80) \approx \Phi\left(\frac{80-40}{10}\right) - \Phi\left(\frac{30-40}{10}\right) = \Phi(4) - \Phi(-1) =$$
$$= \Phi(4) + \Phi(1) = 0{,}5000 + 0{,}3413 = 0{,}8413$$

Ответ: $\approx 0{,}8413$

4.16) Суточный расход воды в населенном пункте является случайной величиной, среднее квадратическое отклонение которой равно 10000 л. Оценить вероятность того, что расход воды в этом пункте в течение дня отклоняется от математического ожидания по абсолютной величине более, чем на 25000 л.

Решение: Используем теорему Чебышева:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

В данном случае:

$P(|X - M(X)| < 25000) \ge 1 - \frac{10000^2}{25000^2} = 1 - 0{,}16 = 0{,}84$ – вероятность того, что расход воды в этом пункте в течение дня отклоняется от математического ожидания по абсолютной величине **не** более, чем на 25000 л. По условию требуется найти вероятность противоположного события, значит, искомая вероятность: 0,16

Ответ: не более 0,16