ИДЗ-18.2

Найти закон распределения указанной случайной величины X и ее функцию распределения $F(X)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Построить график функции распределения $F(X)$.

1.11) При установившемся технологическом процессе предприятие выпускает $\frac{2}{3}$ своих изделий первым сортом и $\frac{1}{3}$ вторым сортом. Случайная величина X – число изделий первого сорта из взятых наугад четырех.

Решение: Случайная величина X имеет биномиальное распределение. Найдем закон распределения случайной величины X, используя формулу Бернулли:

$$P_n^x = C_n^x p^x q^{n-x}$$

В данной задаче:

$n = 4$ – всего изделий в выборке;

$x = \{0,1,2,3,4\}$ – вероятное количество изделий первого сорта в выборке.

P_n^x – вероятность того, что из n изделий ровно x будут первого сорта.

По условию:

$p = \frac{2}{3}$ – вероятность того, что изделие окажется первосортным.

$q = 1 - p = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ – вероятность того, что изделие будет второсортным.

0) $x = 0$

$$P_4^0 = C_4^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \approx 0{,}0123$$

1) $x = 1$

$$P_4^1 = C_4^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 4 \cdot \frac{2}{81} = \frac{8}{81} \approx 0{,}0988$$

2) $x = 2$

$$P_4^2 = C_4^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 6 \cdot \frac{4}{81} = \frac{24}{81} \approx 0{,}2963$$

3) $x = 3$

$$P_4^3 = C_4^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 = 4 \cdot \frac{8}{81} = \frac{32}{81} \approx 0{,}3951$$

4) $x = 4$

$$P_4^4 = C_4^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{16}{81} \approx 0{,}1975$$

Таким образом, искомый закон распределения:

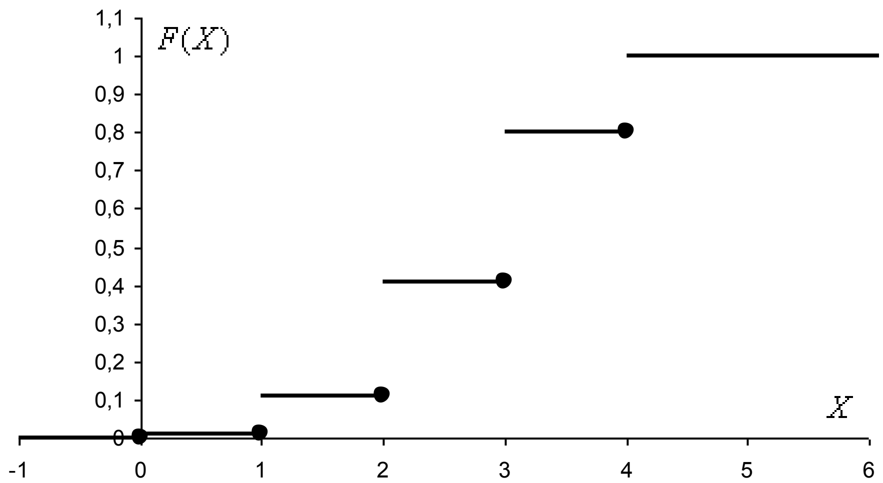
x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{81} \approx 0{,}0123$	$\frac{8}{81} \approx 0{,}0988$	$\frac{24}{81} \approx 0{,}2963$	$\frac{32}{81} \approx 0{,}3951$	$\frac{16}{81} \approx 0{,}1975$

Проверка: 0,0123 + 0,0988 + 0,2963 + 0,3951 + 0,1975 = 1

Составим функцию распределения:

$$F(X) = \begin{cases} 0 \ \textit{при} \ x \le 0; \\ 0{,}0123 \ \textit{при} \ 0 < x \le 1; \\ 0{,}1111 \ \textit{при} \ 1 < x \le 2; \\ 0{,}4074 \ \textit{при} \ 2 < x \le 3; \\ 0{,}8025 \ \textit{при} \ 3 < x \le 4; \\ 1 \ \textit{при} \ x > 4. \end{cases}$$

Выполним чертеж:



Вычислим математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Вычислим математическое ожидание: $M = np = 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

Найдем дисперсию: $D = npq = 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}94$

2.11) Задана функция распределения случайной величины X :

$$F(x)=\begin{cases}0, x<\dfrac{\pi}{2}\\ 1-\sin x, \dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\\ 1, x>\pi\end{cases}.$$

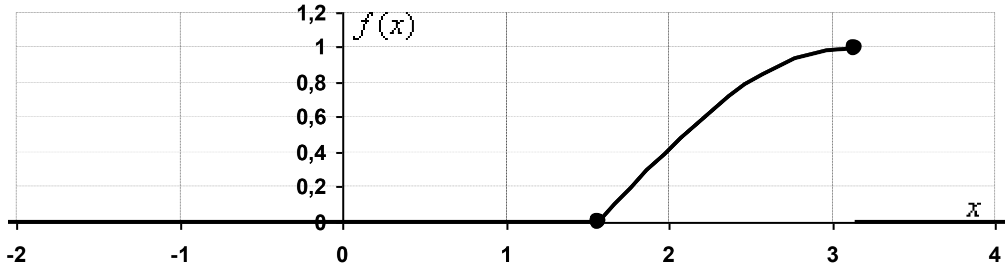
Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания случайной величины X на отрезок $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{4}\right]$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

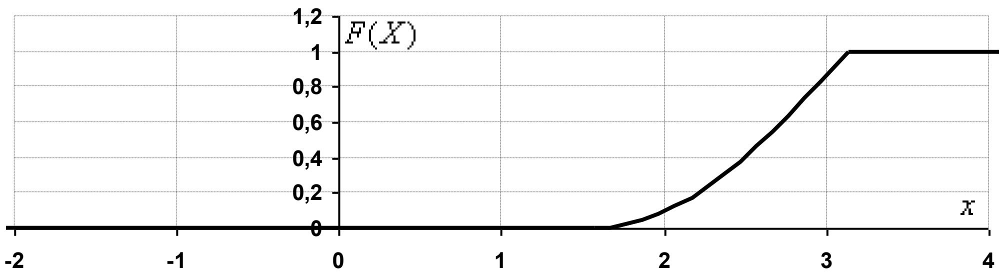
Решение:

Найдем функцию плотности распределения вероятностей:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, x<\dfrac{\pi}{2}\\ -\cos x, \dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\\ 0, x>\pi\end{cases}$$

Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$.





Вычислим математическое ожидание и дисперсию.

Математическое ожидание:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos x dx=(*)$$

Интегрируем по частям:

$u=x\Rightarrow du=dx$

$dv=-\cos x\Rightarrow v=-\sin x$

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

$$(*)=-(x\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin xdx=-\left(0-\frac{\pi}{2}\right)-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{\pi}{2}-(-1-0)=\frac{\pi}{2}+1\approx 2{,}57$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-(M(x))^2$$

В данном случае:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2\cos x dx=(*)$$

Дважды интегрируем по частям:

$u=x^2\Rightarrow du=2xdx$

$dv=-\cos x\Rightarrow v=-\sin x$

$$(*)=-(x^2\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\sin xdx=-\left(0-\frac{\pi^2}{4}\right)+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\sin x=(*)$$

$u=2x\Rightarrow du=2dx$

$dv=\sin xdx\Rightarrow v=-\cos x$

$$(*)=\frac{\pi^2}{4}-2(x\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos xdx=\frac{\pi^2}{4}-2(-\pi-0)+2\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=$$

$$=\frac{\pi^2}{4}+2\pi+2(0-1)=\frac{\pi^2}{4}+2\pi-2$$

Таким образом:

$$D(X)=\frac{\pi^2}{4}+2\pi-2-\left(\frac{\pi}{2}+1\right)^2=\frac{\pi^2}{4}+2\pi-2-\frac{\pi^2}{4}-\pi-1=\pi-3\approx 0{,}14$$

Найдем вероятность того, что X примет значение из отрезка $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right]$.

$$P\left(\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{4}\right)=F\left(\frac{3\pi}{4}\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)-1+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=1-\frac{\sqrt{2}}{2}-1+1=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}29$$

– искомая вероятность.

3.11) Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения – 5 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 минут

Решение: Составим функцию плотности распределения вероятностей равномерно распределенной случайной величины X – времени ожидания пассажиром очередного автобуса:

$$f(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \dfrac{1}{5}, 0\le x\le 5\\ 0, x>5\end{cases}=\begin{cases}0,\ x<0\\ 0{,}2,\ 0\le x\le 5\\ 0,\ x>5\end{cases}$$

Тогда искомая вероятность:

$$P(0\le x\le 3)=\int_0^3 f(x)dx=0{,}2\int_0^3 dx=0{,}2\cdot(x)\Big|_0^3=0{,}2\cdot(3-0)=0{,}6$$

Ответ: 0,6

4.11) Вероятность появления события в одном опыте равна 0,5. Можно ли с вероятностью, большей 0,97, утверждать, что число появлений события в 1000 независимых опытах находится в пределах от 400 до 600.

Решение: Используем интегральную теорему Лапласа:

$P_n(m_1\le x\le m_2)\approx\Phi(k_2)-\Phi(k_1)$;

В данной задаче:

$n=1000$ – всего опытов;

$p=0{,}5$ – вероятность появления события в каждом из опытов;

$q=1-p=1-0{,}5=0{,}5$ – вероятность того, что событие не появится в каждом из опытов.

По соответствующим формулам найдем k_1 и k_2:

$$k_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{600-1000\cdot 0{,}5}{\sqrt{1000\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}}=\frac{100}{\sqrt{250}}\approx 6{,}32;$$

$$k_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{400-1000\cdot 0{,}5}{\sqrt{1000\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}}=\frac{-100}{\sqrt{250}}\approx -6{,}32.$$

Таким образом:

$P_{1000}(600\le x\le 400)\approx\Phi(6{,}32)-\Phi(-6{,}32)=\Phi(6{,}32)+\Phi(6{,}32)=$

$=2\Phi(6{,}32)=2\cdot 0{,}5000=1>0{,}97$ – вероятность того, что в 1000 независимых испытаниях событие появится от 400 до 600 раз.

Ответ: можно