

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники**



**Вариант №161
Домашняя работа №4
по дисциплине
Дискретная математика**

Выполнил Студент группы Р3115
Владимир Мацюк
Преподаватель:
Поляков Владимир Иванович

Санкт-Петербург
2023г.

Исходная таблица соединений R:

v/v	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10	e11	e12
e1	0	3			4	4	4	4		3	4	
e2	3	0	1					4		2		
e3		1	0	5					3	1		
e4			5	0	1	4	1		4	5	4	
e5	4			1	0	1				3		
e6	4			4	1	0	2				4	
e7	4			1		2	0			4		1
e8	4	4						0	3	3		5
e9			3	4				3	0		5	
e10	3	2	1	5	3		4	3		0	2	
e11	4			4		4			8	2	0	4
e12							1	5			4	0

1 Найти гамильтонов цикл

Включаем в S вершину x1. $S=\{x1\}$

Возможная вершина: x2. $S=\{x1,x2\}$

Возможная вершина: x3. $S=\{x1,x2,x3\}$

Возможная вершина: x4. $S=\{x1,x2,x3,x4\}$

Возможная вершина: x5. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5\}$

Возможная вершина: x6. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6\}$

Возможная вершина: x7. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7\}$

Возможная вершина: x10. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x10\}$

Возможная вершина: x8. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x10,x8\}$

Возможная вершина: x9. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x10,x8,x9\}$

Возможная вершина: x11. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x10,x8,x9,x11\}$

Возможная вершина: x12. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x10,x8,x9,x11,x12\}$

Ребра $(x12,x1)$ нет, найдена гамильтонова цепь. Прибегнем к возвращению: удалим из S вершину x12, перейдем к x11. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x10,x8,x9,x11\}$

У x11 больше нет возможных вершин, удалим ее. Перейдем к x9. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x10,x8,x9\}$

У x9 больше нет возможных вершин, удалим ее. Перейдем к x8. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x10,x8\}$

Возможная вершина: x12. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x10,x8,x12\}$

Возможная вершина: x11. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x10,x8,x12,x11\}$

Возможная вершина: x9. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x10,x8,x12,x11,x9\}$

Ребра $(x9,x1)$ нет, найдена гамильтонова цепь. Прибегнем к возвращению: удалим из S вершину x9, перейдем к x11. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x10,x8,x12,x11\}$

У x11 больше нет возможных вершин, удалим ее. Перейдем к x12. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x10,x8,x12\}$

У x12 больше нет возможных вершин, удалим ее. Перейдем к x8. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x10,x8\}$

У x8 больше нет возможных вершин, удалим ее. Перейдем к x10. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x10\}$

Возможная вершина: x11. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x10,x11\}$

Возможная вершина: x9. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x10,x11,x9\}$

Возможная вершина: x8. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x10,x11,x9,x8\}$

Возможная вершина: x12. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x10,x11,x9,x8,x12\}$

Ребра $(x12,x1)$ нет, найдена гамильтонова цепь. Прибегнем к возвращению: удалим из S вершину x12, перейдем к x8. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x10,x11,x9,x8\}$

У x8 больше нет возможных вершин, удалим ее. Перейдем к x9. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x10,x11,x9\}$

У x9 больше нет возможных вершин, удалим ее. Перейдем к x11. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x10,x11\}$

Возможная вершина: x12. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x10,x11,x12\}$

Возможная вершина: x8. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x10,x11,x12,x8\}$

Возможная вершина: x9. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x10,x11,x12,x8,x9\}$

Ребра $(x9,x1)$ нет, найдена гамильтонова цепь. Прибегнем к возвращению: удалим из S вершину x9, перейдем к x8. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x10,x11,x12,x8\}$

У x8 больше нет возможных вершин, удалим ее. Перейдем к x12. $S=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x10,x11,x12\}$

У x_{12} больше нет возможных вершин, удалим ее. Перейдем к x_{11} . $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_{10}, x_{11}\}$
У x_{11} больше нет возможных вершин, удалим ее. Перейдем к x_{10} . $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_{10}\}$
У x_{10} больше нет возможных вершин, удалим ее. Перейдем к x_7 . $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$
Возможная вершина: x_{12} . $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_{12}\}$
Возможная вершина: x_8 . $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_{12}, x_8\}$
Возможная вершина: x_9 . $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_{12}, x_8, x_9\}$
Возможная вершина: x_{11} . $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_{12}, x_8, x_9, x_{11}\}$
Возможная вершина: x_{10} . $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_{12}, x_8, x_9, x_{11}, x_{10}\}$
Гамильтонов цикл найден. $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_{12}, x_8, x_9, x_{11}, x_{10}\}$

Матрица смежности с перенумерованными вершинами

0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0

- до перенумерации $x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_{12} \ x_8 \ x_9 \ x_{11} \ x_{10}$
- после перенумерации $x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9 \ x_{10} \ x_{11} \ x_{12}$

2 Построение графа пересечений G'

Определим p_{212} , для чего в матрице R выделим подматрицу R_{212} .

Ребро (x_2x_{12}) пересекается с $(x_1x_5), (x_1x_6), (x_1x_7), (x_1x_9), (x_1x_{11})$

Определим p_{29} , для чего в матрице R выделим подматрицу R_{29} .

Ребро (x_2x_9) пересекается с $(x_1x_5), (x_1x_6), (x_1x_7)$

Определим p_{312} , для чего в матрице R выделим подматрицу R_{312} .

Ребро (x_3x_{12}) пересекается с $(x_1x_5), (x_1x_6), (x_1x_7), (x_1x_9), (x_1x_{11}), (x_2x_9)$

Определим p_{310} , для чего в матрице R выделим подматрицу R_{310} .

Ребро (x_3x_{10}) пересекается с $(x_1x_5), (x_1x_6), (x_1x_7), (x_1x_9), (x_2x_9)$

Определим p_{412} , для чего в матрице R выделим подматрицу R_{412} .

Ребро (x_4x_{12}) пересекается с $(x_1x_5), (x_1x_6), (x_1x_7), (x_1x_9), (x_1x_{11}), (x_2x_9), (x_3x_{10})$

Определим p_{411} , для чего в матрице R выделим подматрицу R_{411} .

Ребро (x_4x_{11}) пересекается с $(x_1x_5), (x_1x_6), (x_1x_7), (x_1x_9), (x_2x_9), (x_3x_{10})$

Определим p_{410} , для чего в матрице R выделим подматрицу R_{410} .

Ребро (x_4x_{10}) пересекается с $(x_1x_5), (x_1x_6), (x_1x_7), (x_1x_9), (x_2x_9)$

Определим p_{47} , для чего в матрице R выделим подматрицу R_{47} .

Ребро (x_4x_7) пересекается с $(x_1x_5), (x_1x_6)$

Определим p_{46} , для чего в матрице R выделим подматрицу R_{46} .

Ребро (x_4x_6) пересекается с (x_1x_5)

Определим p_{512} , для чего в матрице R выделим подматрицу R_{512} .

Ребро (x_5x_{12}) пересекается с $(x_1x_6), (x_1x_7), (x_1x_9), (x_1x_{11}), (x_2x_9), (x_3x_{10}), (x_4x_6), (x_4x_7), (x_4x_{10}), (x_4x_{11})$

15 пересечений графа найдено, закончим поиск.

	$p_{1\ 5}$	$p_{2\ 12}$	$p_{1\ 6}$	$p_{1\ 7}$	$p_{1\ 9}$	$p_{1\ 11}$	$p_{2\ 9}$	$p_{3\ 12}$	$p_{3\ 10}$	$p_{4\ 12}$	$p_{4\ 11}$	$p_{4\ 10}$	$p_{4\ 7}$	$p_{4\ 6}$	$p_{5\ 12}$
$p_{1\ 5}$	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
$p_{2\ 12}$	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$p_{1\ 6}$	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
$p_{1\ 7}$	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
$p_{1\ 9}$	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
$p_{1\ 11}$	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
$p_{2\ 9}$	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
$p_{3\ 12}$	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
$p_{3\ 10}$	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1
$p_{4\ 12}$	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
$p_{4\ 11}$	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
$p_{4\ 10}$	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
$p_{4\ 7}$	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
$p_{4\ 6}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
$p_{5\ 12}$	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1

3 Построение семейства ψ_G

В 1 строке ищем первый нулевой элемент - $r_{1\ 3}$.

Записываем дизъюнкцию $M_{1\ 3} = r_1 \vee r_3 = 110000111111110 \vee 011000111111101 = 111000111111111$

В строке $M_{1\ 3}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{4, 5, 6\}$.

Записываем дизъюнкцию $M_{1\ 3\ 4} = M_{1\ 3} \vee r_4 = 111000111111111 \vee 010100111111001 = 111100111111111$

В строке $M_{1\ 3\ 4}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{5, 6\}$.

Записываем дизъюнкцию $M_{1\ 3\ 4\ 5} = M_{1\ 3\ 4} \vee r_5 = 111100111111111 \vee 010010011111001 = 111110111111111$

В строке $M_{1\ 3\ 4\ 5}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{6\}$.

Записываем дизъюнкцию $M_{1\ 3\ 4\ 5\ 6} = M_{1\ 3\ 4\ 5} \vee r_6 = 111110111111111 \vee 010001010100001 = 111111111111111$

В строке $M_{1\ 3\ 4\ 5\ 6}$ все 1. Построено $\psi_1 = \{u_{1\ 5}, u_{1\ 6}, u_{1\ 7}, u_{1\ 9}, u_{1\ 11}\}$

Записываем дизъюнкцию $M_{1\ 3\ 4\ 6} = M_{1\ 3\ 4} \vee r_6 = 111100111111111 \vee 010001010100001 = 111101111111111$

В строке $M_{1\ 3\ 4\ 6}$ остались незакрытые 0.

Записываем дизъюнкцию $M_{1\ 3\ 5} = M_{1\ 3} \vee r_5 = 111000111111111 \vee 010010011111001 = 111010111111111$

В строке $M_{1\ 3\ 5}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{6\}$.

Строка 6 не закроет ноль на 4 позиции.

Записываем дизъюнкцию $M_{1\ 3\ 6} = M_{1\ 3} \vee r_6 = 111000111111111 \vee 010001010100001 = 111001111111111$

В строке $M_{1\ 3\ 6}$ остались незакрытые 0.

Записываем дизъюнкцию $M_{1\ 4} = r_1 \vee r_4 = 110000111111110 \vee 010100111111001 = 110100111111111$

В строке $M_{1\ 4}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{5, 6\}$.

Строки 5, 6 не закроют ноль на 3 позиции.

Записываем дизъюнкцию $M_{1\ 5} = r_1 \vee r_5 = 110000111111110 \vee 010010011111001 = 110010111111111$

В строке $M_{1\ 5}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{6\}$.

Строка 6 не закроет нули на позициях 3, 4

Записываем дизъюнкцию $M_{1\ 6} = r_1 \vee r_6 = 110000111111110 \vee 010001010100001 = 110001111111111$

В строке $M_{1\ 6}$ остались незакрытые 0.

Записываем дизъюнкцию $M_{1\ 15} = r_1 \vee r_{15} = 110000111111110 \vee 001111101011111 = 111111111111111$

В строке $M_{1\ 15}$ все 1. Построено $\psi_2 = \{u_{1\ 5}, u_{5\ 12}\}$

В 2 строке ищем первый нулевой элемент - $r_{2\ 7}$.

Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 7} = r_2 \vee r_7 = 111111000000000 \vee 101100111111001 = 111111111111001$

В строке $M_{2\ 7}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{13, 14\}$.

Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 7\ 13} = M_{2\ 7} \vee r_{13} = 111111111111001 \vee 101000000000101 = 111111111111101$

В строке $M_{2\ 7\ 13}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{14\}$.

Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 7\ 13\ 14} = M_{2\ 7\ 13} \vee r_{14} = 111111111111101 \vee 100000000000011 = 111111111111111$

В строке $M_{2\ 7\ 13\ 14}$ все 1. Построено $\psi_3 = \{u_{2\ 12}, u_{2\ 9}, u_{4\ 7}, u_{4\ 6}\}$

Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 7\ 14} = M_{2\ 7} \vee r_{14} = 111111111111001 \vee 100000000000011 = 111111111111101$

В строке $M_{2\ 7\ 14}$ остались незакрытые 0.

Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 8} = r_2 \vee r_8 = 111111000000000 \vee 101111110000000 = 111111110000000$

В строке $M_{2\ 8}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$.

Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 8\ 9} = M_{2\ 8} \vee r_9 = 111111110000000 \vee 101110101110001 = 11111111110001$
В строке $M_{2\ 8\ 9}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{12, 13, 14\}$.
Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 8\ 9\ 12} = M_{2\ 8\ 9} \vee r_{12} = 11111111110001 \vee 101110100001001 = 11111111111001$
В строке $M_{2\ 8\ 9\ 12}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{13, 14\}$.
Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 8\ 9\ 12\ 13} = M_{2\ 8\ 9\ 12} \vee r_{13} = 11111111111001 \vee 101000000000101 = 11111111111101$
В строке $M_{2\ 8\ 9\ 12\ 13}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{14\}$.
Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 8\ 9\ 12\ 13\ 14} = M_{2\ 8\ 9\ 12\ 13} \vee r_{14} = 11111111111101 \vee 100000000000011 = 11111111111111$
В строке $M_{2\ 8\ 9\ 12\ 13\ 14}$ все 1. Построено $\psi_4 = \{u_{2\ 12}, u_{3\ 12}, u_{3\ 10}, u_{4\ 10}, u_{4\ 7}, u_{4\ 6}\}$
Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 8\ 9\ 12\ 14} = M_{2\ 8\ 9\ 12} \vee r_{14} = 11111111111001 \vee 100000000000011 = 11111111111011$
В строке $M_{2\ 8\ 9\ 12\ 14}$ остались незакрытые 0.
Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 8\ 9\ 13} = M_{2\ 8\ 9} \vee r_{13} = 11111111110001 \vee 101000000000101 = 111111111110101$
В строке $M_{2\ 8\ 9\ 13}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{14\}$.
Строка 14 не закроет ноль на 12 позиции.
Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 8\ 9\ 14} = M_{2\ 8\ 9} \vee r_{14} = 11111111110001 \vee 100000000000011 = 111111111110011$
В строке $M_{2\ 8\ 9\ 14}$ остались незакрытые 0.
Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 8\ 10} = M_{2\ 8} \vee r_{10} = 111111110000000 \vee 101111101100000 = 111111111100000$
В строке $M_{2\ 8\ 10}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{11, 12, 13, 14, 15\}$.
Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 8\ 10\ 11} = M_{2\ 8\ 10} \vee r_{11} = 111111111100000 \vee 101110101010001 = 111111111110001$
В строке $M_{2\ 8\ 10\ 11}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{12, 13, 14\}$.
Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 8\ 10\ 11\ 12} = M_{2\ 8\ 10\ 11} \vee r_{12} = 111111111110001 \vee 101110100001001 = 111111111111001$
В строке $M_{2\ 8\ 10\ 11\ 12}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{13, 14\}$.
Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 8\ 10\ 11\ 12\ 13} = M_{2\ 8\ 10\ 11\ 12} \vee r_{13} = 11111111111001 \vee 101000000000101 = 111111111111101$
В строке $M_{2\ 8\ 10\ 11\ 12\ 13}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{14\}$.
Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 8\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14} = M_{2\ 8\ 10\ 11\ 12\ 13} \vee r_{14} = 11111111111101 \vee 100000000000011 = 111111111111111$
В строке $M_{2\ 8\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14}$ все 1. Построено $\psi_5 = \{u_{2\ 12}, u_{3\ 12}, u_{4\ 12}, u_{4\ 11}, u_{4\ 10}, u_{4\ 7}, u_{4\ 6}\}$
Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 8\ 10\ 11\ 12\ 14} = M_{2\ 8\ 10\ 11\ 12} \vee r_{14} = 11111111111001 \vee 100000000000011 = 111111111111011$
В строке $M_{2\ 8\ 10\ 11\ 12\ 14}$ остались незакрытые 0.
Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 8\ 10\ 11\ 13} = M_{2\ 8\ 10\ 11} \vee r_{13} = 111111111110001 \vee 101000000000101 = 111111111110101$
В строке $M_{2\ 8\ 10\ 11\ 13}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{14\}$.
Строка 14 не закроет ноль на 12 позиции.
Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 8\ 10\ 11\ 14} = M_{2\ 8\ 10\ 11} \vee r_{14} = 111111111110001 \vee 100000000000011 = 111111111110011$
В строке $M_{2\ 8\ 10\ 11\ 14}$ остались незакрытые 0.
Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 8\ 10\ 12} = M_{2\ 8\ 10} \vee r_{12} = 111111111100000 \vee 101110100001001 = 1111111111101001$
В строке $M_{2\ 8\ 10\ 12}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{13, 14\}$.
Строки 13, 14 не закроют ноль на 11 позиции.
Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 8\ 10\ 13} = M_{2\ 8\ 10} \vee r_{13} = 111111111100000 \vee 101000000000101 = 1111111111100101$
В строке $M_{2\ 8\ 10\ 13}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{14\}$.
Строка 14 не закроет нули на позициях 11, 12
Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 8\ 10\ 14} = M_{2\ 8\ 10} \vee r_{14} = 111111111100000 \vee 100000000000011 = 1111111111100011$
В строке $M_{2\ 8\ 10\ 14}$ остались незакрытые 0.
Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 8\ 10\ 15} = M_{2\ 8\ 10} \vee r_{15} = 111111111100000 \vee 001111101011111 = 111111111111111$
В строке $M_{2\ 8\ 10\ 15}$ все 1. Построено $\psi_6 = \{u_{2\ 12}, u_{3\ 12}, u_{4\ 12}, u_{5\ 12}\}$
Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 8\ 11} = M_{2\ 8} \vee r_{11} = 111111110000000 \vee 101110101010001 = 111111111010001$
В строке $M_{2\ 8\ 11}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{12, 13, 14\}$.
Строки 12, 13, 14 не закроют ноль на 10 позиции.
Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 8\ 12} = M_{2\ 8} \vee r_{12} = 111111110000000 \vee 101110100001001 = 111111110001001$
В строке $M_{2\ 8\ 12}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{13, 14\}$.
Строки 13, 14 не закроют нули на позициях 9, 10, 11
Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 8\ 13} = M_{2\ 8} \vee r_{13} = 111111110000000 \vee 101000000000101 = 111111110000101$
В строке $M_{2\ 8\ 13}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{14\}$.
Строка 14 не закроет нули на позициях 9, 10, 11, 12
Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 8\ 14} = M_{2\ 8} \vee r_{14} = 111111110000000 \vee 100000000000011 = 111111110000011$
В строке $M_{2\ 8\ 14}$ остались незакрытые 0.

Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 8\ 15} = M_{2\ 8} \vee r_{15} = 1111111100000000 \vee 001111101011111 = 11111111011111$
В строке $M_{2\ 8\ 15}$ остались незакрытые 0.

Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 9} = r_2 \vee r_9 = 1111110000000000 \vee 101110101110001 = 11111101110001$
В строке $M_{2\ 9}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{12, 13, 14\}$.
Строки 12, 13, 14 не закроют ноль на 8 позиции.

Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 10} = r_2 \vee r_{10} = 1111110000000000 \vee 101111101100000 = 111111101100000$
В строке $M_{2\ 10}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{11, 12, 13, 14, 15\}$.
Строки 11, 12, 13, 14, 15 не закроют ноль на 8 позиции.

Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 11} = r_2 \vee r_{11} = 1111110000000000 \vee 101110101010001 = 111111101010001$
В строке $M_{2\ 11}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{12, 13, 14\}$.
Строки 12, 13, 14 не закроют нули на позициях 8, 10

Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 12} = r_2 \vee r_{12} = 1111110000000000 \vee 101110100001001 = 111111100001001$
В строке $M_{2\ 12}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{13, 14\}$.
Строки 13, 14 не закроют нули на позициях 8, 9, 10, 11

Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 13} = r_2 \vee r_{13} = 1111110000000000 \vee 101000000000101 = 111111000000101$
В строке $M_{2\ 13}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{14\}$.
Строка 14 не закроет нули на позициях 7, 8, 9, 10, 11, 12

Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 14} = r_2 \vee r_{14} = 1111110000000000 \vee 100000000000011 = 111111000000011$
В строке $M_{2\ 14}$ остались незакрытые 0.

Записываем дизъюнкцию $M_{2\ 15} = r_2 \vee r_{15} = 1111110000000000 \vee 001111101011111 = 111111101011111$
В строке $M_{2\ 15}$ остались незакрытые 0.

В 3 строке ищем первый нулевой элемент - $r_{3\ 4}$.

Записываем дизъюнкцию $M_{3\ 4} = r_3 \vee r_4 = 011000111111101 \vee 010100111111001 = 011100111111101$
В строке $M_{3\ 4}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{5, 6, 14\}$.

Записываем дизъюнкцию $M_{3\ 4\ 5} = M_{3\ 4} \vee r_5 = 011100111111101 \vee 010010011111001 = 011110111111101$
В строке $M_{3\ 4\ 5}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{6, 14\}$.

Записываем дизъюнкцию $M_{3\ 4\ 5\ 6} = M_{3\ 4\ 5} \vee r_6 = 011110111111101 \vee 010001010100001 = 011111111111101$
В строке $M_{3\ 4\ 5\ 6}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{14\}$.

Записываем дизъюнкцию $M_{3\ 4\ 5\ 6\ 14} = M_{3\ 4\ 5\ 6} \vee r_{14} = 011111111111101 \vee 100000000000011 = 111111111111111$
В строке $M_{3\ 4\ 5\ 6\ 14}$ все 1. Построено $\psi_7 = \{u_{1\ 6}, u_{1\ 7}, u_{1\ 9}, u_{1\ 11}, u_{4\ 6}\}$

Записываем дизъюнкцию $M_{3\ 4\ 5\ 14} = M_{3\ 4\ 5} \vee r_{14} = 011110111111101 \vee 100000000000011 = 111110111111111$
В строке $M_{3\ 4\ 5\ 14}$ остались незакрытые 0.

Записываем дизъюнкцию $M_{3\ 4\ 6} = M_{3\ 4} \vee r_6 = 011100111111101 \vee 010001010100001 = 011101111111101$
В строке $M_{3\ 4\ 6}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{14\}$.
Строка 14 не закроет ноль на 5 позиции.

Записываем дизъюнкцию $M_{3\ 4\ 14} = M_{3\ 4} \vee r_{14} = 011100111111101 \vee 100000000000011 = 111100111111111$
В строке $M_{3\ 4\ 14}$ остались незакрытые 0.

Записываем дизъюнкцию $M_{3\ 5} = r_3 \vee r_5 = 011000111111101 \vee 010010011111001 = 011010111111101$
В строке $M_{3\ 5}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{6, 14\}$.
Строки 6, 14 не закроют ноль на 4 позиции.

Записываем дизъюнкцию $M_{3\ 6} = r_3 \vee r_6 = 011000111111101 \vee 010001010100001 = 011001111111101$
В строке $M_{3\ 6}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{14\}$.
Строка 14 не закроет нули на позициях 4, 5

Записываем дизъюнкцию $M_{3\ 14} = r_3 \vee r_{14} = 011000111111101 \vee 100000000000011 = 111000111111111$
В строке $M_{3\ 14}$ остались незакрытые 0.

В 4 строке ищем первый нулевой элемент - $r_{4\ 5}$.

Записываем дизъюнкцию $M_{4\ 5} = r_4 \vee r_5 = 010100111111001 \vee 010010011111001 = 010110111111001$
В строке $M_{4\ 5}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{6, 13, 14\}$.

Записываем дизъюнкцию $M_{4\ 5\ 6} = M_{4\ 5} \vee r_6 = 010110111111001 \vee 010001010100001 = 010111111111001$
В строке $M_{4\ 5\ 6}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{13, 14\}$.

Записываем дизъюнкцию $M_{4\ 5\ 6\ 13} = M_{4\ 5\ 6} \vee r_{13} = 010111111111001 \vee 101000000000101 = 111111111111101$
В строке $M_{4\ 5\ 6\ 13}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{14\}$.

Записываем дизъюнкцию $M_{4\ 5\ 6\ 13\ 14} = M_{4\ 5\ 6\ 13} \vee r_{14} = 111111111111101 \vee 100000000000011 = 111111111111111$
В строке $M_{4\ 5\ 6\ 13\ 14}$ все 1. Построено $\psi_8 = \{u_{1\ 7}, u_{1\ 9}, u_{1\ 11}, u_{4\ 7}, u_{4\ 6}\}$

Записываем дизъюнкцию $M_{4\ 5\ 6\ 14} = M_{4\ 5\ 6} \vee r_{14} = 010111111111001 \vee 100000000000011 = 110111111111011$
В строке $M_{4\ 5\ 6\ 14}$ остались незакрытые 0.

Записываем дизъюнкцию $M_{4\ 5\ 13} = M_4\ 5 \vee r_{13} = 010110111111001 \vee 101000000000101 = 111110111111101$
В строке $M_{4\ 5\ 13}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{14\}$.
Строка 14 не закроет ноль на 6 позиции.
Записываем дизъюнкцию $M_{4\ 5\ 14} = M_4\ 5 \vee r_{14} = 010110111111001 \vee 100000000000011 = 110110111111101$
В строке $M_{4\ 5\ 14}$ остались незакрытые 0.
Записываем дизъюнкцию $M_{4\ 6} = r_4 \vee r_6 = 010100111111001 \vee 010001010100001 = 010101111111001$
В строке $M_{4\ 6}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{13, 14\}$.
Строки 13, 14 не закроют ноль на 5 позиции.
Записываем дизъюнкцию $M_{4\ 13} = r_4 \vee r_{13} = 010100111111001 \vee 101000000000101 = 111100111111101$
В строке $M_{4\ 13}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{14\}$.
Строка 14 не закроет нули на позициях 5, 6
Записываем дизъюнкцию $M_{4\ 14} = r_4 \vee r_{14} = 010100111111001 \vee 100000000000011 = 110100111111101$
В строке $M_{4\ 14}$ остались незакрытые 0.
В 5 строке ищем первый нулевой элемент - $r_{5\ 6}$.
Записываем дизъюнкцию $M_{5\ 6} = r_5 \vee r_6 = 010010011111001 \vee 010001010100001 = 010011011111001$
В строке $M_{5\ 6}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{7, 13, 14\}$.
Записываем дизъюнкцию $M_{5\ 6\ 7} = M_{5\ 6} \vee r_7 = 010011011111001 \vee 101100111111001 = 111111111111001$
В строке $M_{5\ 6\ 7}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{13, 14\}$.
Записываем дизъюнкцию $M_{5\ 6\ 7\ 13} = M_{5\ 6\ 7} \vee r_{13} = 111111111111001 \vee 101000000000101 = 111111111111101$
В строке $M_{5\ 6\ 7\ 13}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{14\}$.
Записываем дизъюнкцию $M_{5\ 6\ 7\ 13\ 14} = M_{5\ 6\ 7\ 13} \vee r_{14} = 111111111111101 \vee 100000000000011 = 111111111111111$
В строке $M_{5\ 6\ 7\ 13\ 14}$ все 1. Построено $\psi_9 = \{u_{1\ 9}, u_{1\ 11}, u_{2\ 9}, u_{4\ 7}, u_{4\ 6}\}$
Записываем дизъюнкцию $M_{5\ 6\ 7\ 14} = M_{5\ 6\ 7} \vee r_{14} = 111111111111001 \vee 100000000000011 = 111111111111101$
В строке $M_{5\ 6\ 7\ 14}$ остались незакрытые 0.
Записываем дизъюнкцию $M_{5\ 6\ 13} = M_{5\ 6} \vee r_{13} = 010011011111001 \vee 101000000000101 = 111011011111101$
В строке $M_{5\ 6\ 13}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{14\}$.
Строка 14 не закроет нули на позициях 4, 7
Записываем дизъюнкцию $M_{5\ 6\ 14} = M_{5\ 6} \vee r_{14} = 010011011111001 \vee 100000000000011 = 110011011111101$
В строке $M_{5\ 6\ 14}$ остались незакрытые 0.
Записываем дизъюнкцию $M_{5\ 7} = r_5 \vee r_7 = 010010011111001 \vee 101100111111001 = 111110111111001$
В строке $M_{5\ 7}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{13, 14\}$.
Строки 13, 14 не закроют ноль на 6 позиции.
Записываем дизъюнкцию $M_{5\ 13} = r_5 \vee r_{13} = 010010011111001 \vee 101000000000101 = 111010011111101$
В строке $M_{5\ 13}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{14\}$.
Строка 14 не закроет нули на позициях 4, 6, 7
Записываем дизъюнкцию $M_{5\ 14} = r_5 \vee r_{14} = 010010011111001 \vee 100000000000011 = 110010011111101$
В строке $M_{5\ 14}$ остались незакрытые 0.
В 6 строке ищем первый нулевой элемент - $r_{6\ 7}$.
Записываем дизъюнкцию $M_{6\ 7} = r_6 \vee r_7 = 010001010100001 \vee 101100111111001 = 111101111111001$
В строке $M_{6\ 7}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{13, 14\}$.
Строки 13, 14 не закроют ноль на 5 позиции.
Записываем дизъюнкцию $M_{6\ 9} = r_6 \vee r_9 = 010001010100001 \vee 101110101110001 = 111111111110001$
В строке $M_{6\ 9}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{12, 13, 14\}$.
Записываем дизъюнкцию $M_{6\ 9\ 12} = M_{6\ 9} \vee r_{12} = 111111111110001 \vee 101110100001001 = 111111111111001$
В строке $M_{6\ 9\ 12}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{13, 14\}$.
Записываем дизъюнкцию $M_{6\ 9\ 12\ 13} = M_{6\ 9\ 12} \vee r_{13} = 111111111111001 \vee 101000000000101 = 111111111111101$
В строке $M_{6\ 9\ 12\ 13}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{14\}$.
Записываем дизъюнкцию $M_{6\ 9\ 12\ 13\ 14} = M_{6\ 9\ 12\ 13} \vee r_{14} = 111111111111101 \vee 100000000000011 = 111111111111111$
В строке $M_{6\ 9\ 12\ 13\ 14}$ все 1. Построено $\psi_{10} = \{u_{1\ 11}, u_{3\ 10}, u_{4\ 10}, u_{4\ 7}, u_{4\ 6}\}$
Записываем дизъюнкцию $M_{6\ 9\ 12\ 14} = M_{6\ 9\ 12} \vee r_{14} = 111111111111001 \vee 100000000000011 = 111111111111101$
В строке $M_{6\ 9\ 12\ 14}$ остались незакрытые 0.
Записываем дизъюнкцию $M_{6\ 9\ 13} = M_{6\ 9} \vee r_{13} = 111111111110001 \vee 101000000000101 = 111111111110101$
В строке $M_{6\ 9\ 13}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{14\}$.
Строка 14 не закроет ноль на 12 позиции.
Записываем дизъюнкцию $M_{6\ 9\ 14} = M_{6\ 9} \vee r_{14} = 111111111110001 \vee 100000000000011 = 111111111110011$
В строке $M_{6\ 9\ 14}$ остались незакрытые 0.

Записываем дизъюнкцию $M_{6\ 11} = r_6 \vee r_{11} = 010001010100001 \vee 101110101010001 = 11111111110001$
В строке $M_{6\ 11}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{12, 13, 14\}$.
Записываем дизъюнкцию $M_{6\ 11\ 12} = M_{6\ 11} \vee r_{12} = 11111111110001 \vee 101110100001001 = 11111111111001$
В строке $M_{6\ 11\ 12}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{13, 14\}$.
Записываем дизъюнкцию $M_{6\ 11\ 12\ 13} = M_{6\ 11\ 12} \vee r_{13} = 11111111111001 \vee 101000000000101 = 11111111111101$
В строке $M_{6\ 11\ 12\ 13}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{14\}$.
Записываем дизъюнкцию $M_{6\ 11\ 12\ 13\ 14} = M_{6\ 11\ 12\ 13} \vee r_{14} = 11111111111101 \vee 100000000000011 = 11111111111111$
В строке $M_{6\ 11\ 12\ 13\ 14}$ все 1. Построено $\psi_{11} = \{u_{1\ 11}, u_{4\ 11}, u_{4\ 10}, u_{4\ 7}, u_{4\ 6}\}$
Записываем дизъюнкцию $M_{6\ 11\ 12\ 14} = M_{6\ 11\ 12} \vee r_{14} = 11111111111001 \vee 100000000000011 = 11111111111101$
В строке $M_{6\ 11\ 12\ 14}$ остались незакрытые 0.
Записываем дизъюнкцию $M_{6\ 11\ 13} = M_{6\ 11} \vee r_{13} = 11111111110001 \vee 101000000000101 = 111111111110101$
В строке $M_{6\ 11\ 13}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{14\}$.
Строка 14 не закроет ноль на 12 позиции.
Записываем дизъюнкцию $M_{6\ 11\ 14} = M_{6\ 11} \vee r_{14} = 11111111110001 \vee 100000000000011 = 111111111110011$
В строке $M_{6\ 11\ 14}$ остались незакрытые 0.
Записываем дизъюнкцию $M_{6\ 12} = r_6 \vee r_{12} = 010001010100001 \vee 101110100001001 = 11111110101001$
В строке $M_{6\ 12}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{13, 14\}$.
Строки 13, 14 не закроют нули на позициях 9, 11
Записываем дизъюнкцию $M_{6\ 13} = r_6 \vee r_{13} = 010001010100001 \vee 101000000000101 = 111001010100101$
В строке $M_{6\ 13}$ находим номера нулевых элементов, составляем список $J' = \{14\}$.
Строка 14 не закроет нули на позициях 4, 5, 7, 9, 11, 12
Записываем дизъюнкцию $M_{6\ 14} = r_6 \vee r_{14} = 010001010100001 \vee 100000000000011 = 110001010100011$
В строке $M_{6\ 14}$ остались незакрытые 0.
Из матрицы $R(G')$ видно, что строки с номерами $j > 6$ не смогут закрыть ноль в позиции 2.
Семейство максимальных внутренне устойчивых множеств ψ_G построено. Это:

$\psi_1 = \{u_{1\ 5}, u_{1\ 6}, u_{1\ 7}, u_{1\ 9}, u_{1\ 11}\}$
 $\psi_2 = \{u_{1\ 5}, u_{5\ 12}\}$
 $\psi_3 = \{u_{2\ 12}, u_{2\ 9}, u_{4\ 7}, u_{4\ 6}\}$
 $\psi_4 = \{u_{2\ 12}, u_{3\ 12}, u_{3\ 10}, u_{4\ 10}, u_{4\ 7}, u_{4\ 6}\}$
 $\psi_5 = \{u_{2\ 12}, u_{3\ 12}, u_{4\ 12}, u_{4\ 11}, u_{4\ 10}, u_{4\ 7}, u_{4\ 6}\}$
 $\psi_6 = \{u_{2\ 12}, u_{3\ 12}, u_{4\ 12}, u_{5\ 12}\}$
 $\psi_7 = \{u_{1\ 6}, u_{1\ 7}, u_{1\ 9}, u_{1\ 11}, u_{4\ 6}\}$
 $\psi_8 = \{u_{1\ 7}, u_{1\ 9}, u_{1\ 11}, u_{4\ 7}, u_{4\ 6}\}$
 $\psi_9 = \{u_{1\ 9}, u_{1\ 11}, u_{2\ 9}, u_{4\ 7}, u_{4\ 6}\}$
 $\psi_{10} = \{u_{1\ 11}, u_{3\ 10}, u_{4\ 10}, u_{4\ 7}, u_{4\ 6}\}$
 $\psi_{11} = \{u_{1\ 11}, u_{4\ 11}, u_{4\ 10}, u_{4\ 7}, u_{4\ 6}\}$

4 Выделение из G' максимального двудольного подграфа H'

Для каждой пары множеств вычислим значение критерия $\alpha_{\gamma\beta} = |\psi_\gamma| + |\psi_\beta| - |\psi_\gamma \cap \psi_\beta|$:

$$\begin{aligned}\alpha_{12} &= |\psi_1| + |\psi_2| - |\psi_1 \cap \psi_2| = 5 + 2 - 1 = 6 \\ \alpha_{13} &= |\psi_1| + |\psi_3| - |\psi_1 \cap \psi_3| = 5 + 4 - 0 = 9 \\ \alpha_{14} &= |\psi_1| + |\psi_4| - |\psi_1 \cap \psi_4| = 5 + 6 - 0 = 11 \\ \alpha_{15} &= |\psi_1| + |\psi_5| - |\psi_1 \cap \psi_5| = 5 + 7 - 0 = 12 \\ \alpha_{16} &= |\psi_1| + |\psi_6| - |\psi_1 \cap \psi_6| = 5 + 4 - 0 = 9 \\ \alpha_{17} &= |\psi_1| + |\psi_7| - |\psi_1 \cap \psi_7| = 5 + 5 - 4 = 6 \\ \alpha_{18} &= |\psi_1| + |\psi_8| - |\psi_1 \cap \psi_8| = 5 + 5 - 3 = 7 \\ \alpha_{19} &= |\psi_1| + |\psi_9| - |\psi_1 \cap \psi_9| = 5 + 5 - 2 = 8 \\ \alpha_{110} &= |\psi_1| + |\psi_{10}| - |\psi_1 \cap \psi_{10}| = 5 + 5 - 1 = 9 \\ \alpha_{111} &= |\psi_1| + |\psi_{11}| - |\psi_1 \cap \psi_{11}| = 5 + 5 - 1 = 9 \\ \alpha_{23} &= |\psi_2| + |\psi_3| - |\psi_2 \cap \psi_3| = 2 + 4 - 0 = 6 \\ \alpha_{24} &= |\psi_2| + |\psi_4| - |\psi_2 \cap \psi_4| = 2 + 6 - 0 = 8 \\ \alpha_{25} &= |\psi_2| + |\psi_5| - |\psi_2 \cap \psi_5| = 2 + 7 - 0 = 9 \\ \alpha_{26} &= |\psi_2| + |\psi_6| - |\psi_2 \cap \psi_6| = 2 + 4 - 1 = 5 \\ \alpha_{27} &= |\psi_2| + |\psi_7| - |\psi_2 \cap \psi_7| = 2 + 5 - 0 = 7 \\ \alpha_{28} &= |\psi_2| + |\psi_8| - |\psi_2 \cap \psi_8| = 2 + 5 - 0 = 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{29} &= |\psi_2| + |\psi_9| - |\psi_2 \cap \psi_9| = 2 + 5 - 0 = 7 \\
\alpha_{210} &= |\psi_2| + |\psi_{10}| - |\psi_2 \cap \psi_{10}| = 2 + 5 - 0 = 7 \\
\alpha_{211} &= |\psi_2| + |\psi_{11}| - |\psi_2 \cap \psi_{11}| = 2 + 5 - 0 = 7 \\
\alpha_{34} &= |\psi_3| + |\psi_4| - |\psi_3 \cap \psi_4| = 4 + 6 - 3 = 7 \\
\alpha_{35} &= |\psi_3| + |\psi_5| - |\psi_3 \cap \psi_5| = 4 + 7 - 3 = 8 \\
\alpha_{36} &= |\psi_3| + |\psi_6| - |\psi_3 \cap \psi_6| = 4 + 4 - 1 = 7 \\
\alpha_{37} &= |\psi_3| + |\psi_7| - |\psi_3 \cap \psi_7| = 4 + 5 - 1 = 8 \\
\alpha_{38} &= |\psi_3| + |\psi_8| - |\psi_3 \cap \psi_8| = 4 + 5 - 2 = 7 \\
\alpha_{39} &= |\psi_3| + |\psi_9| - |\psi_3 \cap \psi_9| = 4 + 5 - 3 = 6 \\
\alpha_{310} &= |\psi_3| + |\psi_{10}| - |\psi_3 \cap \psi_{10}| = 4 + 5 - 2 = 7 \\
\alpha_{311} &= |\psi_3| + |\psi_{11}| - |\psi_3 \cap \psi_{11}| = 4 + 5 - 2 = 7 \\
\alpha_{45} &= |\psi_4| + |\psi_5| - |\psi_4 \cap \psi_5| = 6 + 7 - 5 = 8 \\
\alpha_{46} &= |\psi_4| + |\psi_6| - |\psi_4 \cap \psi_6| = 6 + 4 - 2 = 8 \\
\alpha_{47} &= |\psi_4| + |\psi_7| - |\psi_4 \cap \psi_7| = 6 + 5 - 1 = 10 \\
\alpha_{48} &= |\psi_4| + |\psi_8| - |\psi_4 \cap \psi_8| = 6 + 5 - 2 = 9 \\
\alpha_{49} &= |\psi_4| + |\psi_9| - |\psi_4 \cap \psi_9| = 6 + 5 - 2 = 9 \\
\alpha_{410} &= |\psi_4| + |\psi_{10}| - |\psi_4 \cap \psi_{10}| = 6 + 5 - 4 = 7 \\
\alpha_{411} &= |\psi_4| + |\psi_{11}| - |\psi_4 \cap \psi_{11}| = 6 + 5 - 3 = 8 \\
\alpha_{56} &= |\psi_5| + |\psi_6| - |\psi_5 \cap \psi_6| = 7 + 4 - 3 = 8 \\
\alpha_{57} &= |\psi_5| + |\psi_7| - |\psi_5 \cap \psi_7| = 7 + 5 - 1 = 11 \\
\alpha_{58} &= |\psi_5| + |\psi_8| - |\psi_5 \cap \psi_8| = 7 + 5 - 2 = 10 \\
\alpha_{59} &= |\psi_5| + |\psi_9| - |\psi_5 \cap \psi_9| = 7 + 5 - 2 = 10 \\
\alpha_{510} &= |\psi_5| + |\psi_{10}| - |\psi_5 \cap \psi_{10}| = 7 + 5 - 3 = 9 \\
\alpha_{511} &= |\psi_5| + |\psi_{11}| - |\psi_5 \cap \psi_{11}| = 7 + 5 - 4 = 8 \\
\alpha_{67} &= |\psi_6| + |\psi_7| - |\psi_6 \cap \psi_7| = 4 + 5 - 0 = 9 \\
\alpha_{68} &= |\psi_6| + |\psi_8| - |\psi_6 \cap \psi_8| = 4 + 5 - 0 = 9 \\
\alpha_{69} &= |\psi_6| + |\psi_9| - |\psi_6 \cap \psi_9| = 4 + 5 - 0 = 9 \\
\alpha_{610} &= |\psi_6| + |\psi_{10}| - |\psi_6 \cap \psi_{10}| = 4 + 5 - 0 = 9 \\
\alpha_{611} &= |\psi_6| + |\psi_{11}| - |\psi_6 \cap \psi_{11}| = 4 + 5 - 0 = 9 \\
\alpha_{78} &= |\psi_7| + |\psi_8| - |\psi_7 \cap \psi_8| = 5 + 5 - 4 = 6 \\
\alpha_{79} &= |\psi_7| + |\psi_9| - |\psi_7 \cap \psi_9| = 5 + 5 - 3 = 7 \\
\alpha_{710} &= |\psi_7| + |\psi_{10}| - |\psi_7 \cap \psi_{10}| = 5 + 5 - 2 = 8 \\
\alpha_{711} &= |\psi_7| + |\psi_{11}| - |\psi_7 \cap \psi_{11}| = 5 + 5 - 2 = 8 \\
\alpha_{89} &= |\psi_8| + |\psi_9| - |\psi_8 \cap \psi_9| = 5 + 5 - 4 = 6 \\
\alpha_{810} &= |\psi_8| + |\psi_{10}| - |\psi_8 \cap \psi_{10}| = 5 + 5 - 3 = 7 \\
\alpha_{811} &= |\psi_8| + |\psi_{11}| - |\psi_8 \cap \psi_{11}| = 5 + 5 - 3 = 7 \\
\alpha_{910} &= |\psi_9| + |\psi_{10}| - |\psi_9 \cap \psi_{10}| = 5 + 5 - 3 = 7 \\
\alpha_{911} &= |\psi_9| + |\psi_{11}| - |\psi_9 \cap \psi_{11}| = 5 + 5 - 3 = 7 \\
\alpha_{1011} &= |\psi_{10}| + |\psi_{11}| - |\psi_{10} \cap \psi_{11}| = 5 + 5 - 4 = 6
\end{aligned}$$

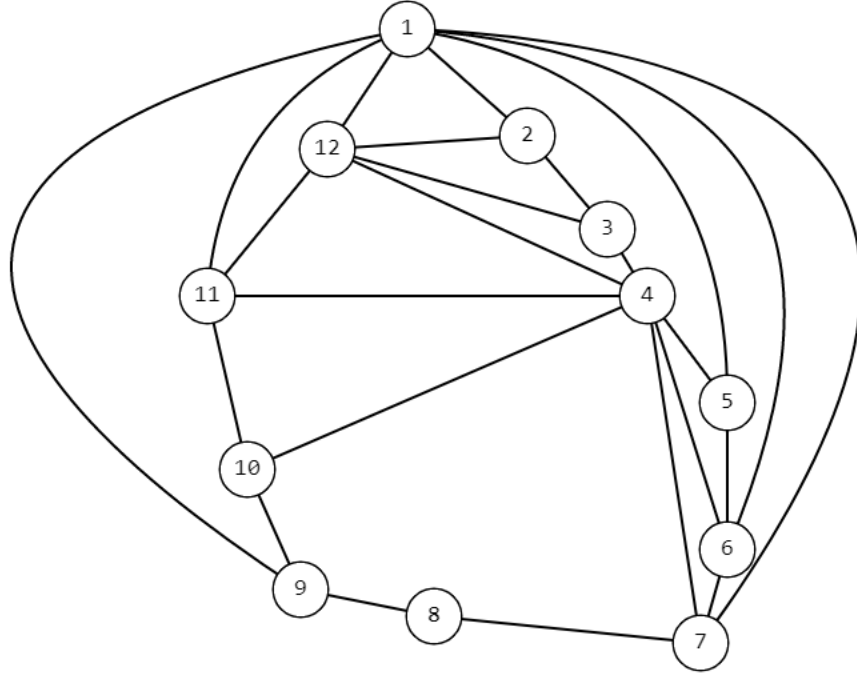
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	6	9	11	12	9	6	7	8	9	9
2		0	6	8	9	5	7	7	7	7	7
3			0	7	8	7	8	7	6	7	7
4				0	8	8	10	9	9	7	8
5					0	8	11	10	10	9	8
6						0	9	9	9	9	9
7							0	6	7	8	8
8								0	6	7	7
9									0	7	7
10										0	6
11											0

$\max \alpha_{i-j} = \alpha_{1-5} = 12$ дает лишь пара множеств

$$\psi_1 = \{u_{1\ 5}, u_{1\ 6}, u_{1\ 7}, u_{1\ 9}, u_{1\ 11}\}$$

$$\psi_5 = \{u_{2\ 12}, u_{3\ 12}, u_{4\ 12}, u_{4\ 11}, u_{4\ 10}, u_{4\ 7}, u_{4\ 6}\}$$

В суграфе H , содержащем максимальное число непересекающихся ребер, проведем ребра из ψ_1 снаружи, а из ψ_5 внутри.



Удалим из ψG ребра, которые вошли в ψ_1 и ψ_5 .

$$\psi_1 = \{\}$$

$$\psi_2 = \{u_{5 \ 12}\}$$

$$\psi_3 = \{u_{2 \ 9}\}$$

$$\psi_4 = \{u_{3 \ 10}\}$$

$$\psi_5 = \{\}$$

$$\psi_6 = \{u_{5 \ 12}\}$$

$$\psi_7 = \{\}$$

$$\psi_8 = \{\}$$

$$\psi_9 = \{u_{2 \ 9}\}$$

$$\psi_{10} = \{u_{3 \ 10}\}$$

$$\psi_{11} = \{\}$$

Удаляем ψ_1 , ψ_5 , ψ_7 , ψ_8 , ψ_{11} так как они пусты и объединяем одинаковые семейства

$$\psi_2 = \{u_{5 \ 12}\}$$

$$\psi_3 = \{u_{2 \ 9}\}$$

$$\psi_4 = \{u_{3 \ 10}\}$$

	2	3	4
2	0	2	2
3		0	2
4			0

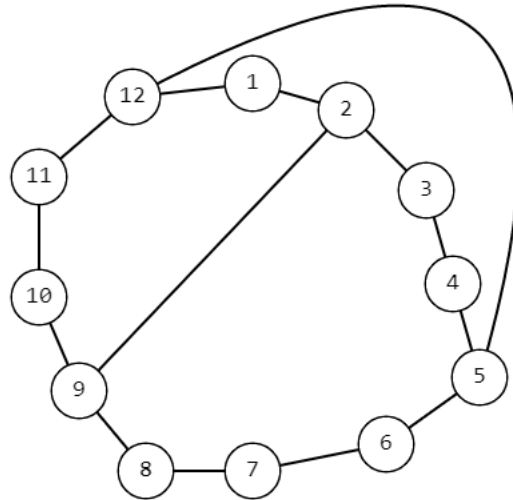
$\max \alpha_{\gamma\delta} = 2$, дают пары множеств: $\psi_2 \psi_3$, $\psi_2 \psi_4$, $\psi_3 \psi_4$.

Возьмем множества

$$\psi_2 = \{u_{5 \ 12}\}$$

$$\psi_3 = \{u_{2 \ 9}\}$$

В суграфе H , содержащем максимальное число непересекающихся ребер, ребра, вошедшие в ψ_2 , проводим внутри гамильтонова цикла, а в ψ_3 – вне его.



Удаляем из $\Psi G'$ ребра, вошедшие в ψ_2, ψ_3

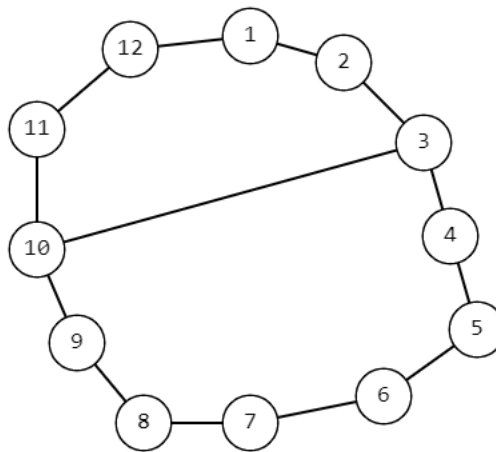
$$\psi_2 = \{\}$$

$$\psi_3 = \{\}$$

$$\psi_4 = \{u_{3,10}\}$$

Объединяем одинаковые множества:

$$\psi_4 = \{u_{3,10}\}$$



Удаляем из $\Psi G'$ ребра, вошедшие в ψ_4

$$\psi_4 = \{\}$$

В $\Psi G'$ пусто – граф планаризирован.

При текущих условиях (при ограниченном количестве замененных ребер) толщина графа $m = 3$. Если заменить все ребра – толщина будет другой.