

目 录

第一章 捷联惯导系统概述.....	(1)
§ 1-1 捷联惯性技术的发展过程.....	(1)
§ 1-2 捷联惯导系统与平台惯导系统的对比.....	(6)
第二章 惯导系统的基本工作原理.....	(9)
§ 2-1 常用坐标系.....	(9)
§ 2-2 舒勒摆原理.....	(12)
§ 2-3 惯导基本方程.....	(19)
§ 2-4 惯性导航的方向余弦法.....	(36)
§ 2-5 惯导系统的高度通道.....	(54)
第三章 捷联矩阵的即时修正.....	(61)
§ 3-1 捷联矩阵与飞行器的姿态角.....	(61)
§ 3-2 四元数理论及其在刚体定点转动中的应用.....	(66)
§ 3-3 捷联矩阵的即时修正算法.....	(82)
第四章 捷联矩阵的正交化与算法调整.....	(86)
§ 4-1 捷联矩阵正交化问题的提出.....	(86)
§ 4-2 导致捷联矩阵成为非正交矩阵的原因.....	(87)
§ 4-3 捷联矩阵的最佳正交化.....	(97)
§ 4-4 以漂移误差为标准比较三种即时修正算法.....	(106)
第五章 捷联惯导系统的初始对准.....	(109)
§ 5-1 向量及其反对称矩阵的相似变换定理.....	(110)
§ 5-2 初始对准的误差传播方程.....	(114)
§ 5-3 捷联惯导系统的初始对准技术.....	(128)
第六章 捷联惯导系统的数学模型.....	(143)
§ 6-1 系统的数学模型编排.....	(143)

§ 6-2 初始条件的给定与初始数据的计算.....	(150)
§ 6-3 系统的机上执行算法.....	(153)
§ 6-4 捷联计算不同迭代周期的划分及主程序框图.....	(161)
第七章 捷联敏感元件的冗余技术.....	(165)
§ 7-1 系统的可靠性与冗余技术.....	(165)
§ 7-2 双自由度陀螺的最佳配置.....	(170)
§ 7-3 单自由度陀螺的最佳配置.....	(185)
第八章 系统误差分析.....	(194)
§ 8-1 系统误差的分类.....	(194)
§ 8-2 捷联敏感元件的误差模型及补偿方法.....	(195)
§ 8-3 系统误差的传播特性.....	(203)
§ 8-4 捷联系统的数字仿真.....	(206)
第九章 捷联系统的实验研究.....	(212)
§ 9-1 捷联系统实验研究的意义及实验系统的构成.....	(212)
§ 9-2 捷联系统对陀螺的要求及其性能的测试.....	(215)
§ 9-3 惯性敏感元件误差模型的测试.....	(222)
§ 9-4 系统实验及数据采集.....	(223)
附录一 地球参考椭球体的主曲率半径.....	(228)
附录二 无限小转动的向量性定理.....	(237)
附录三 复合数量函数对向量的导数.....	(240)
参考文献.....	(243)

第一章 捷联惯导系统概述

本章将概括地介绍捷联系统的发展过程，并与平台系统相对比地介绍捷联系统的特点，以便使读者在学习捷联系统的基本原理之前就对它的概况有个粗略的了解。

§1-1 捷联惯性技术的发展过程

“捷联(Strapdown)”这一术语的英文原义就是“捆绑”的意思。因此，所谓捷联惯性系统也就是将惯性敏感元件(陀螺与加速度计)直接“捆绑”在飞行器的机体上，从而完成制导和导航任务的系统。

追溯捷联惯性技术的发展历程，要从二次大战末期德国研制的 V-2 导弹说起。在 V-2 导弹上采用了最原始的捷联惯性制导系统，即在导弹上安装了两个位置陀螺和一个积分加速度计，用以解决导弹基本参数的测量问题。当时德国就是利用了这种导弹飞越英吉利海峡，对英国进行了突然袭击。

五十年代以来，捷联惯性技术与平台惯性技术都在以很高的速度并行地发展着。

为了给飞行器(特别是飞机与舰船)提供足够的导航参数(如飞行器的姿态角、位置与速度等)，发展了平台惯导系统，其简化原理图如图 1-1 所示。图中平台台体通过平台轴与载体隔离。通过平台稳定回路可以使平台跟踪某个给定的坐标

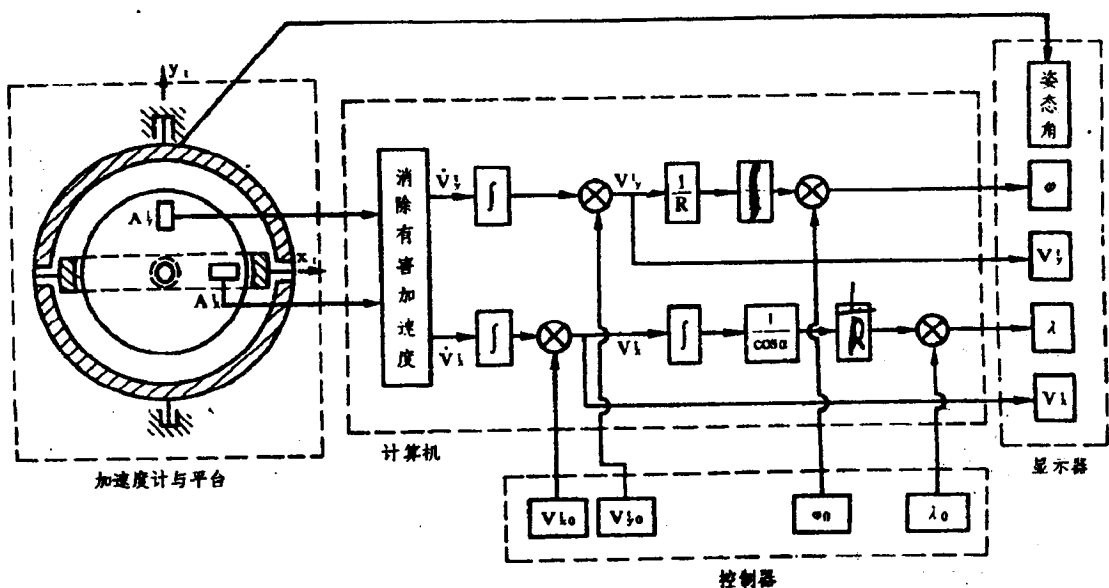


图 1-1 平台惯导系统简化原理图

系,如地理坐标系 Ox, y, z , (下标“ g ”表示“地理”的意思), 其坐标原点 O 在飞行器的重心上, 其坐标轴 Ox, Oy, Oz 的正向分别指向东、北、天方向。沿平台的三个轴向安装的三个加速度计(图中只示出两个)可测出载体沿三个轴向的比力。通过计算机在加速度计的输出中消除有害加速度以后便可获得载体相对地球运动的东向加速度 V'_x 和北向加速度 V'_y , 其中上标“ g ”表示所投影的坐标系为地理坐标系, 下标“ x ”和“ y ”表示所投影的轴为 x 轴(指向东)和 y 轴(指向北), 这里暂不考虑沿垂直方向的分量。只要给定载体的初始条件——初始东向速度 V'_{x0} 、初始北向速度 V'_{y0} 、初始纬度 φ_0 以及初始经度 λ_0 , 就可以获得载体的东向速度 V'_x 、北向速度 V'_y 、纬度 φ 和经度 λ , 即

$$\begin{aligned} V'_x &= V'_{x0} + \int_0^t V'_x dt \\ V'_y &= V'_{y0} + \int_0^t V'_y dt \\ \varphi &= \varphi_0 + \frac{1}{R} \int_0^t V'_y dt \end{aligned} \quad (1-1)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{1}{R} \int_0^t \frac{1}{\cos \varphi} V'_x dt$$

而飞行器的姿态角显然可以通过设置在机体与平台轴之间的角度信号传感器取出。以上所分析的平台惯导系统的原理还可由图 1-2 的原理方块图示出。导航计算机计算出平台要跟踪给定坐标系的角速率, 并对陀螺施矩, 陀螺输出信号给平台稳定回路从而控制平台, 使之跟踪给定的坐标系。

由以上的分析可以看出平台具有以下两方面的作用:

1. 为加速度计提供测量基准;
2. 将惯性敏感元件与飞行器的角运动隔离开。

• 3 •

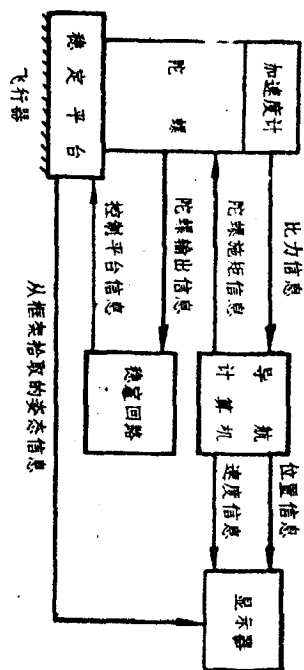
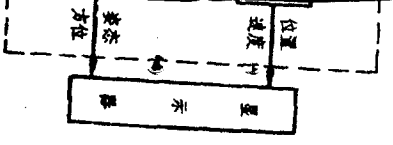


图 1-2 平台惯导系统的原理方块图

由于平台的上述作用, 促进了平台惯导系统的发展和应。1953 年, 美国德雷珀实验室首次进行了飞机平台惯导系统的试飞。当时在一架 B-29 轰炸机上进行了一次长达 10 小时的横贯美国大陆的飞行, 证实了纯惯性技术的可行性, 为惯性技术的发展奠定了良好的基础。1958 年, 在改进性能的基础上, 美国又进行了第二次横贯美国大陆的飞行。1960 年美国利顿公司制造的 LN-3 飞机惯导系统在西德的 F-104G 飞机上试飞成功。在此以后的二十多年中, 平台惯导系统已普遍应用于军用及民用的各种运载器上, 成为一种成熟的导航装置。

就在平台惯导系统迅速发展的同时, 捷联系统也处于研制的过程中。五十年代中期, 美国首先致力于航天飞行器的捷联方案。这样的考虑是很自然的, 因为这些飞行器所承受的角速率很小, 这可以使捷联系统的设计大为简化。到了六十年代, 捷联技术得到了比较成熟的探索。美国在“阿波罗-13”宇宙飞船上成功地应用了捷联技术。1969 年, 在“阿波罗-13”飞向月球的途中, 服务舱的氧气系统爆炸, 使指令舱的电源遭到破坏。在危急的情况下, 正是靠了德雷珀实验室设计的低功耗备份捷联惯导系统 LM/ASA 才将飞船从离地 36 万公里

• 4 •



性已越来越突出地显示出来，并在许多方面已日渐代替平台系统。为什么会出现这种情况呢？为了回答这一问题，本节从生产与使用的角度将捷联系统与平台系统做一对比。

1. 硬件和软件的复杂程度

由于捷联系统没有平台框架及相连的伺服装置，因而简化了硬件；代价是增加了计算机的负担，需要一个比较复杂的实时程序。

2. 可靠性

捷联系统的可靠性要比平台系统高，其原因是它的机械构件少，加之容易采用多敏感元件配置，实现冗余技术。

3. 成本与可维护性

由于平台系统在机械结构上要复杂得多，而对于捷联系统只是算法复杂些，因而从制造成本上算捷联系统的成本要比平台系统低。从市场供应的情况来看，数字计算机的价格一直在下降，而平台系统的价格一直在上升。

此外，捷联系统比平台系统具有较长的平均故障间隔时间，加之模块设计简化了维修，从而捷联系统的可维护性比平台系统大为提高了。

4. 初始对准精度与系统精度

决定系统精度的重要因素之一是惯导系统的初始基准建立的准确性。平台系统的陀螺安装在台体上以后还可以相对重力加速度和地球自转轴方向任意定位，还可以根据需要标定惯性敏感元件的误差；而捷联系统的敏感元件在载体上安装以后就不能再标定，因此要求捷联敏感元件有较高的参数稳定性。

在系统的精度方面，由于捷联系统是靠计算机来实现“平台”作用的，所以其算法误差比平台系统要大些。一般要求软

性误差不应超过系统误差的10%。此外，由于捷联敏感元件工作在较恶劣的动态环境（如高角速率等）中，捷联系统往往存在着不可忽略的动态误差。

5. 参与系统综合的能力

捷联系统可以提供载体所要求的全部惯性基准信号，特别是可以直接给出载体的角速率，而平台系统则无法直接给出。至于载体的姿态捷联系统可以很高的速率和精度以数字形式提供，而平台系统则是通过框架间安装的同步器获得的，而且还需要把它们分解到机体轴上。同样，加速度信息也要分解到机体轴上。这样就会带来传递误差。因而，从姿态和加速度信息的精度和完整性上来看，捷联系统要比平台系统优越。

捷联系统还可以采用共同的惯性元件来执行多项任务，即具有较强的参与系统综合的能力。

综上所述可以看出，捷联系统与平台系统相比，就可靠性、体积、重量和成本而言，前者优于后者；就精度而言，后者优于前者。由于飞船、战术导弹及飞机的惯导系统具有中等精度与低成本的要求，所以采用捷联方案是十分适宜的。

第二章 惯导系统的基本工作原理

不论是捷联惯导系统还是平台惯导系统,其基本工作原理都是相同的,只不过实现这一基本工作原理所采用的手段有所不同而已。本章不涉及具体类型的惯导系统的特殊性问题,而只讨论两种惯导系统所共同遵循的基本工作原理。这样,在以后的章节中便可集中精力讨论捷联惯导系统所特有的问题。

§2-1 常用坐标系

在数学与力学中我们都遇到过坐标系的概念。那么在惯性导航中为什么要引入各种不同的坐标系呢?这些坐标系又是怎样定义的?本节就来回答这些问题。

一、在惯性导航中采用各种坐标系的必要性

惯性导航中所采用的坐标系可分为惯性坐标系与非惯性坐标系两类。惯性导航区别于其它类型的导航方案(如无线电导航、天文导航等)的根本不同之处就在于其导航原理是建立在牛顿力学定律——又可称为惯性定律——的基础上的,“惯性导航”也因此而得名。然而牛顿力学定律是在惯性空间内成立的,这就首先有必要引入惯性坐标系,作为讨论惯导基本原理的坐标基准。我们知道,对飞行器进行导航的主要目的就是要实时地确定其导航参数,如飞行器的姿态、位置、速

度等。飞行器的导航参数就是通过各个坐标系之间的关系来确定的,这些坐标系是区别于惯性坐标系、并根据导航的需要而选取的。我们将它们就称为非惯性坐标系,如地球坐标系、地理坐标系、导航坐标系、平台坐标系及机体坐标系等。

二、几种常用的坐标系

在惯性导航中常用的坐标系有以下几种。

1. 地心惯性坐标系(下标为*i*)—— O, x_i, y_i, z_i

惯性坐标系是符合牛顿力学定律的坐标系,即是绝对静止或只做匀速直线运动的坐标系。由于宇宙空间中的万物都处于运动之中,因此想寻找绝对的惯性坐标系是不可能的,我们只能根据导航的需要来选取惯性坐标系。对于在地球附近运动的飞行器选取地心惯性坐标系是合适的。地心惯性坐标系不考虑地球绕太阳的公转运动,当然更略去了太阳相对于宇宙空间的运动。地心惯性坐标系的原点*O*,选在地球的中心,它不参加地球的自转。惯性坐标系是惯性敏感元件测量的基准。由于在进行导航计算时无需在这个坐标系中分解任何向量,因此惯性坐标系的坐标轴的定向本无关紧要,但习惯上我们可以将*x_i*轴选在沿地轴指向北极的方向上,而*x_i*、*y_i*轴则在地球的赤道平面内,并指向空间的两颗恒星。

2. 地球坐标系(下标为*e*)—— O, x_e, y_e, z_e

地球坐标系是固连在地球上的坐标系,它相对惯性坐标系以地球自转角速率 ω_e 旋转, $\omega_e = 15.04107^\circ/\text{小时}$ 。地球坐标系的原点在地球中心*O_e*, *O_ez_e*轴与*O_ez_i*轴重合, *O_ex_e*、*y_e*在赤道平面内, *x_e*轴指向格林威治经线, *y_e*轴指向东经90°方向。

3. 地理坐标系(下标为*g*)—— O, x_g, y_g, z_g

地理坐标系是在飞行器上用来表示飞行器所在位置的东

之间的关系来
行导航的需要
地球坐标系、
系等。

间、北向和垂线方向的坐标系。地理坐标系的原点 O 选在飞
行器重心处， x_i 指向东， y_i 指向北， z_i 沿垂线方向指向天（东
北天）。对于地理坐标系，在不同的惯导文献中往往有不同的
取法。所不同之处仅在于坐标轴的正向的指向不同，如还有
北西天、北东地等取法。坐标轴指向不同仅使向量在坐标系
中取投影分量时的正负号有所不同，并不影响导航基本原理
的阐述及导航参数计算结果的正确性。

4. 导航坐标系(下标为 n)—— Ox_n, y_n, z_n $n \rightarrow b$ 机体

导航坐标系是在导航时根据导航系统工作的需要而选取
的作为导航基准的坐标系。当把导航坐标系选得与地理坐标
系相重合时，可将这种导航坐标系称为指北方位系统；为了适
应在极区附近导航的需要往往将导航坐标系的 z_n 轴仍选得
与 z_i 轴重合，而使 x_n 与 x_i 及 y_n 与 y_i 之间相差一个自由方位
角或游动方位角(面)这种导航坐标系可称为自由方位系统或
游动自由方位系统。这一点本章下面还要详细讨论。

5. 平台坐标系(下标为 p)—— Ox_p, y_p, z_p

平台坐标系是用惯导系统来复现导航坐标系时所获得的
坐标系。平台坐标系的坐标原点 O 位于飞行器的重心处。当
惯导系统不存在误差时，平台坐标系与导航坐标系相重合；当
惯导系统出现误差时，平台坐标系就要相对导航坐标系出现
误差角。对于平台惯导系统，平台坐标系是通过平台机体来
实现的；对于捷联惯导系统，平台坐标系则是通过存储在计算
机中的方向余弦矩阵来实现的，因此又叫做“数学平台”。对
于平台惯导系统，平台坐标系与导航坐标系之间的误差是由
平台的加工、装配工艺不完善、敏感元件误差以及初始对准误
差等因素造成的；而对于捷联惯导系统，该误差则是由算法误
差、敏感元件误差以及初始对准误差等造成的。

6. 机体坐标系(下标为 b)—— Ox_b, y_b, z_b
机体坐标系是固连在机体上的坐标系。机体坐标系的坐
标原点 O 位于飞行器的重心处， x_b 沿机体横轴指向右， y_b 沿
机体纵轴指向前， z_b 垂直于 Ox_b, y_b 并沿飞行器的竖轴指向
上。

图 2-1 为上述各种坐标系的示意图。图中 D 为飞行器所
在位置沿 z_i 轴投影在地球表面上的一点。显然 DO 为飞行
器的高度。为了表示方便起见，图中将机体系的 z_b 轴取在与 z_i
轴相重合的位置上。

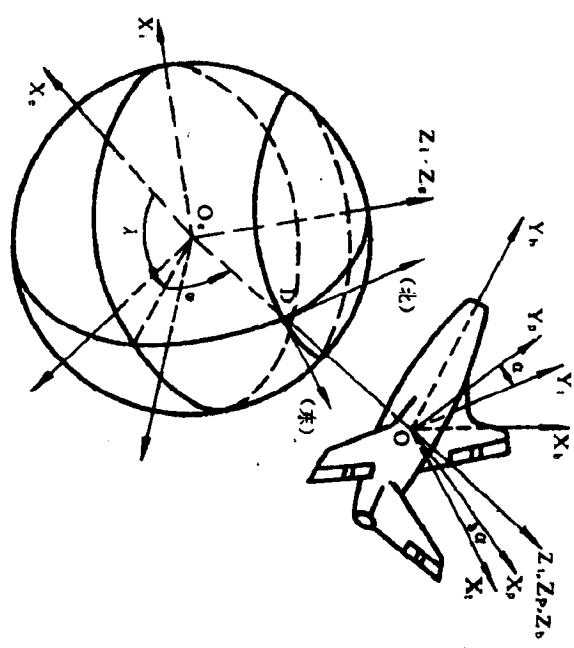


图 2-1 各种坐标系的示意图

§2-2 舒勒摆原理

为了进行导航，往往需要给出一个导航基准。在地球附

近导航所常用的导航基准就是水平面（或与其垂直的地垂线方向）。我们知道，一个数学摆就可以给出地垂线的方向，地平仪中的液体开关就是仿照这一原理制成的。但是当受到飞行器加速度的作用时，这种数学摆就会偏离地垂线的方向。那么不受机体加速度干扰的摆是否存在呢？这就是德国科学家舒勒（Schuler）在1923年提出的舒勒摆。

一、用物理摆（复摆）实现舒勒摆的原理

图2-2中示出了物理摆的工作原理示意图。为了简化分析，设地球为球体，其半径为 R ，且不转动。飞行器沿于午面

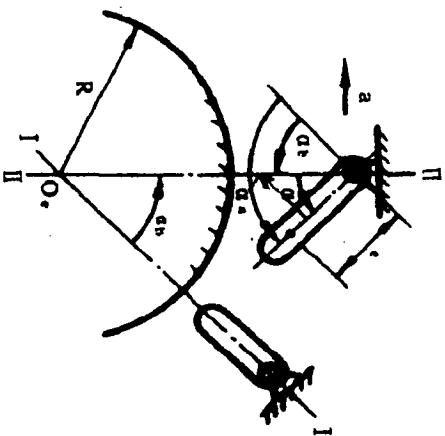


图2-2 物理摆的工作原理图

飞行，加速度为 a ，略去飞行器的高度。设飞行器的起始垂线为II，经过一小段飞行后到达新位置的垂线为II'。由于飞行器加速度的存在使摆线偏离II线 α 角，而II'线偏离II线 α_0 角。并有

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha_0 + \alpha \\ \ddot{\alpha}_0 &= \ddot{\alpha}_0 + \ddot{\alpha} \end{aligned} \quad (2-1)$$

设物理摆的重心到悬挂点的长度（即摆长）为 l ，质量为 m ，于是可写出物理摆的运动方程式，即

$$J \ddot{\alpha} = m l a \cos \alpha - m l g \sin \alpha \quad (2-2)$$

由图可知

$$\alpha_0 = \frac{a}{g} \quad (2-3)$$

考虑到 α 为小角度，并将式(2-1)和(2-3)代入式(2-2)，则有

$$\ddot{\alpha} + \frac{m l g}{J} \alpha = \left(\frac{m l}{J} - \frac{1}{R} \right) a \quad (2-4)$$

由式(2-4)可以看出，当

$$\frac{m l}{J} - \frac{1}{R} = 0 \quad (2-5)$$

时，物理摆的运动就与加速度 a 无关，即不再受到加速度的干扰。式(2-5)也可以写成

$$\frac{m l}{J} = \frac{1}{R} \quad (2-6)$$

通常称式(2-6)为舒勒调整条件。对于数学摆，由于 $J = m l^2$ ，则舒勒调整条件变为

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{R} \quad \text{或} \quad l = R \quad (2-7)$$

即摆长等于地球的半径。

当满足舒勒调整条件后，式(2-4)可写成

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{R} \alpha = 0 \quad (2-8)$$

上式表示了一个无阻尼振荡运动。令

$$\omega_s^2 = \frac{g}{R}, \quad T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \quad (2-9)$$

质量为 m , 于式 (2-2) 中 ω , 为舒勒频率, T , 为舒勒周期。将 $R = 6370$ 公里, $g = 9.8$ 米/秒² 代入上式, 可得 $T = 84.4$ 分。

(2-2) 下面我们讨论一下舒勒摆的物理意义。由于 $\ddot{a}_g = a/R$ 代表由飞行器运动 (a) 而引起的地垂线变化的角加速度, 而 $\frac{ml}{J} \ddot{a}$ 则为物理摆在加速度 a 作用下绕其悬挂点运动的角加速度。当二者相等时, 物理摆对加速度 a 不敏感。若物理摆初始时指向地垂线, 则不论飞行器怎样运动, 物理摆将永远指向地垂线; 若物理摆初始时偏离地垂线 α_0 角, 则它就围绕地垂线以舒勒周期做不变幅的振荡。

(2-3) 物理摆的原理方块图如图 2-3(a) 所示, 对它进行简化可得图 2-3(b), 再进一步简化可得图 2-3(c)。由图 2-3(c) 中可进一步看出舒勒调整条件的物理意义, 当物理摆满足舒勒调整条件后即变成一个与加速度无关而只与初始条件有关的二阶自由振荡系统。

(2-4) 二、实现舒勒调整的可能性

(2-5) 1. 用物理摆实现舒勒调整

由式 (2-6) 可知

$$l = \frac{J}{mR}$$

(2-6) 由于 R 很大, 则要求物理摆的摆长 l 应非常小。设物理摆为一个半径 $r = 0.5$ 米的圆环, 并忽略圆环的厚度, 认为环的质量集中在圆环上。此时

(2-7)

$$l = \frac{mr^2}{mR} = \frac{r^2}{R} = 0.04 \mu\text{m}$$

(2-8) 这样的摆长当前的工艺水平条件下是无法实现的。

(2-9) 2. 用数学摆实现舒勒调整

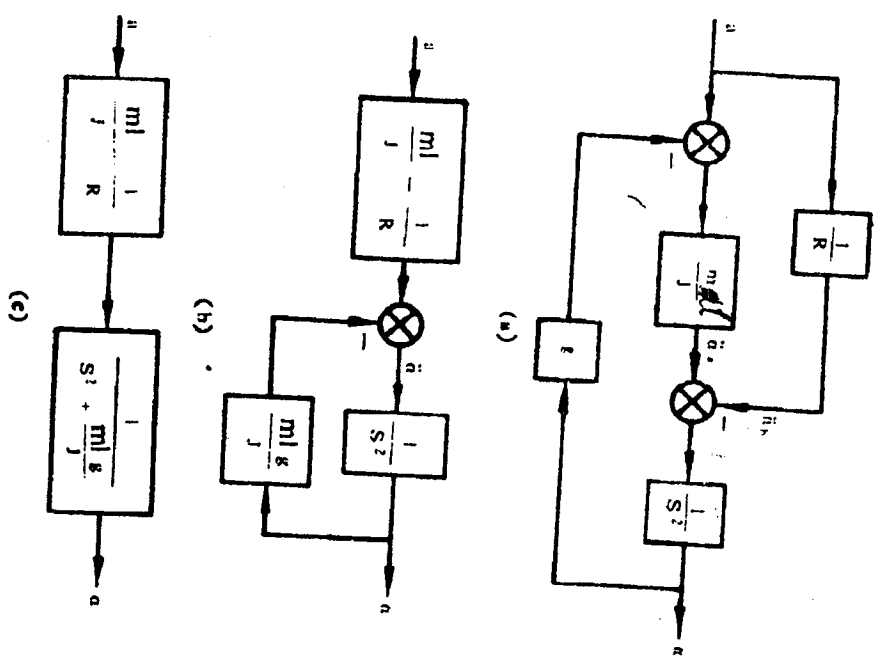


图 2-3 物理摆的原理方块图
(a) 原理方块图; (b) 简化方块图; (c) 进一步简化的方块图。
由式 (2-7) 可知此时

$$l = R$$

即数学摆的摆长等于地球半径, 摆锤处于地球中心, 这从原理上就是不可能的。

3. 用计算机实现舒勒调整

如上所述,舒勒摆原理虽然早在二十年代就已被发现,但在很长时间内一直未能实现。计算机的发展使得舒勒调整成为可能。

以飞行器在子午面内的飞行为例,图2-4示出了单自由度平台惯导系统的原理方块图。图中 a_N 为北向加速度。加速度的标度因数为 K_a ,它感受 a_N ,并将输出输至积分器。积分器的标度因数为 K_i ,它完成一次积分的运算。积分器的输出到下一环节进行 $\frac{1}{R}$ 的运算,再将信号输至陀螺力矩器。力矩器的标度因数为 K_m ,它的输出用以操纵平台的稳定回路。陀螺以及平台的整个特性可简化为 $\frac{1}{H}$ 的环节。稳定回路带动平台转动 α 角。而地垂线改变的角度为 $\alpha_g = a_N \frac{1}{R^2}$,于是有 $\alpha = \alpha_g - \alpha_b$,其中 α 为平台偏离地垂线的角度。由于平台偏离地垂线 α 角,则加速度计还感受一个与重力加速度 g 的分量相反的加速度 $-g\alpha$ 。对图2-4进行结构变换可得图2-5。由图2-5(a)所示的方块图可知,当满足舒勒调整条件

$$\frac{K_a K_i K_m}{H} = 1 \quad (2-10)$$

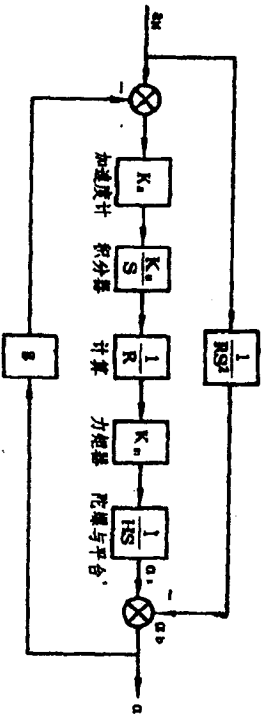


图2-4 单自由度平台惯导系统原理方块图

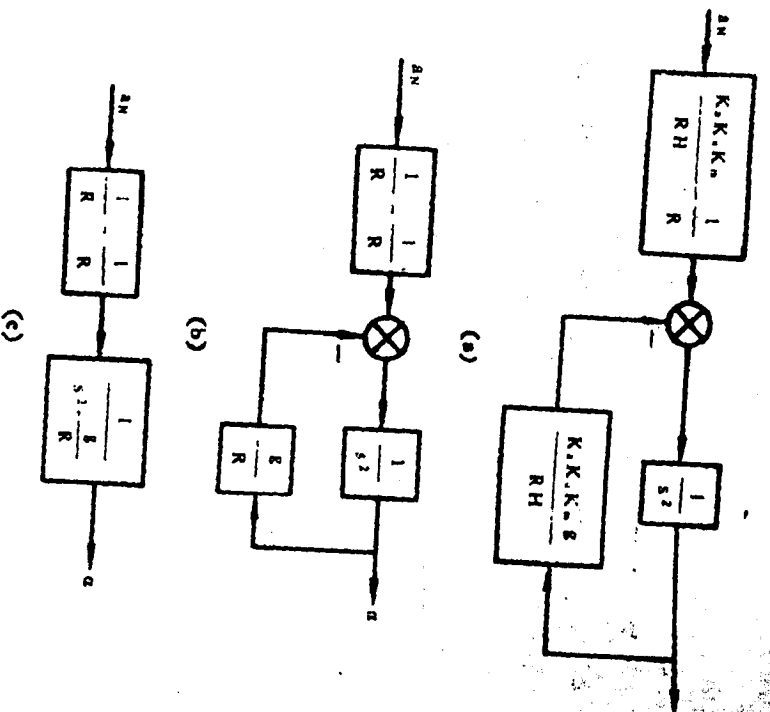


图2-5 由图2-4到舒勒摆的结构变换
(a) 图2-4的结构变换; (b) 满足舒勒调整条件时的结构形式;
(c) 舒勒摆形式。

时,图2-5(a)就简化为图2-5(b)形式。对图2-5(b)再进行一次结构变换就可得到舒勒摆的原理方块图。此时惯导系统的特征方程为

$$s^2 + \frac{g}{R} = 0$$

它表示了以舒勒周期为自振周期的二阶无阻尼运动。式(2-10)所表示的舒勒调整条件可以通过计算机来实现,这才真

E使得用舒勒摆构成惯性导航系统具有现实可能性。

在满足舒勒调整条件的理想情况下，图 2-4 所示的惯导系统可以简化为理想条件下的惯导系统原理方块图，如图 2-6 所示。

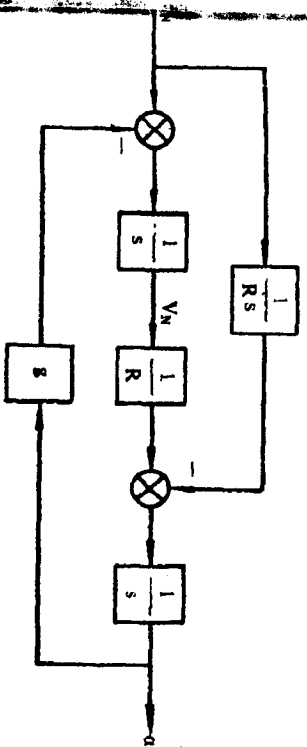


图 2-6 理想条件下的惯导系统原理方块图

以上讨论的是由北向加速度计构成的一个水平通道的惯导系统。对于东向加速度计所构成的另一个水平通道，可以仿照以上的原理得出。

舒勒摆的原理及实现方法对于平台惯导系统比较形象与直观；而对于捷联惯导系统，由于加速度计与陀螺都是沿机体坐标系安装的，数学平台的作用要靠计算机来完成，因此舒勒摆的原理也全隐蔽在计算机之中了，这一点在讨论捷联系统的初始对准与误差分析时便可进一步看出。

§2-3 惯导基本方程

不论采用何种类型的惯导系统，都要遵循共同的惯导基本方程。本节就来引出惯导基本方程，并讨论其在惯导系统

中的应用。

一、向量的绝对变率与相对变率的关系

惯性导航所遵循的基本定律是牛顿第二定律，而牛顿第二定律是相对惯性坐标系对时间求取变化率的，我们将其称为绝对变率。然而，当我们研究物体的运动时，往往需要将向量投影在某个运动着的坐标系（如地理坐标系）上。向量在动坐标系上的投影对时间的变化率称为相对变率。在绝对变率与相对变率之间存在着某个确定的关系。下面就讨论这一关系。

为了使讨论更具有通用性，我们选取定系 $Ox_1y_1z_1$ 及动系 $Oxyz$ 来讨论绝对变率与相对变率的关系。设动系与定系的坐标原点相重合，动系相对定系做定点转动，转动的角速度又是确定的，则绝对变率与相对变率的关系也是确定的。

设一空间向量 \vec{a} （如向径、速度等），其量值与方向都随时问而变化。过 O 点做定系 $Ox_1y_1z_1$ ；过 O 点再做动系 $Oxyz$ ，动系的基或单位向量为 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 。动系相对定系的角速度为 ω ，如图 2-7 所示。由于动系相对定系在运动，所以向量 \vec{a} 相

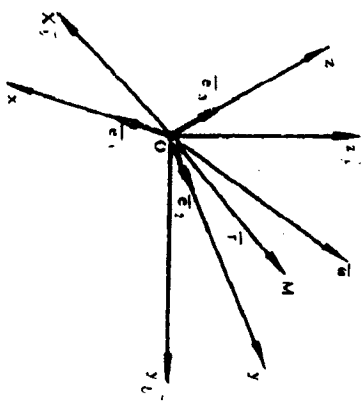


图 2-7 动系与定系之间的关系

对这两个坐标系的变化率是不相同的。设向量的绝对变率以 $\left. \frac{d\vec{a}}{dt} \right|_i$ 表示, 其相对变率以 $\left. \frac{d\vec{a}}{dt} \right|_r$ 表示。由于向量往往是在某个运动着的坐标系(如地球坐标系, 机体坐标系)中观测的, 于是向量 \vec{a} 及 \vec{a} 需要沿动系取分量, 即

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_1 + a_y \vec{e}_2 + a_z \vec{e}_3 \quad (2-11)$$

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{e}_1 + \omega_y \vec{e}_2 + \omega_z \vec{e}_3 \quad (2-12)$$

由于式(2-11)中的 a_x, a_y, a_z 及 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 相对定系都在随时间变化, 所以向量 \vec{a} 的绝对变率为

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{a}}{dt} \right|_i &= \frac{d}{dt} (a_x \vec{e}_1 + a_y \vec{e}_2 + a_z \vec{e}_3) \\ &= \frac{da_x}{dt} \vec{e}_1 + \frac{da_y}{dt} \vec{e}_2 + \frac{da_z}{dt} \vec{e}_3 \\ &\quad + a_x \frac{d\vec{e}_1}{dt} + a_y \frac{d\vec{e}_2}{dt} + a_z \frac{d\vec{e}_3}{dt} \end{aligned} \quad (2-13)$$

式(2-13)中的前三项与动系的运动无关, 只表示向量 \vec{a} 相对动系随时间的变化率, 称之为相对变率, 即

$$\left. \frac{d\vec{a}}{dt} \right|_r = \frac{da_x}{dt} \vec{e}_1 + \frac{da_y}{dt} \vec{e}_2 + \frac{da_z}{dt} \vec{e}_3 \quad (2-14)$$

式(2-13)的后三项与动系转动的角速度 $\vec{\omega}$ 有关。为了求这三项, 首先要 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 的变率。由于动系的基 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 可以看成在定系中运动的向径。而以角速率 $\vec{\omega}$ 运动的向径 \vec{r} 的速度向量可以表示为

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2-15)$$

对向径 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 应用上式, 可得

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_1$$

• 21 •

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_2}{dt} &= \vec{\omega} \times \vec{e}_2 \\ \frac{d\vec{e}_3}{dt} &= \vec{\omega} \times \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (2-16)$$

将上式代入式(2-13)的后三项, 得

$$\begin{aligned} a_x \frac{d\vec{e}_1}{dt} + a_y \frac{d\vec{e}_2}{dt} + a_z \frac{d\vec{e}_3}{dt} &= a_x \vec{\omega} \times \vec{e}_1 + a_y \vec{\omega} \times \vec{e}_2 + a_z \vec{\omega} \times \vec{e}_3 \\ &= \vec{\omega} \times (a_x \vec{e}_1 + a_y \vec{e}_2 + a_z \vec{e}_3) \\ &= \vec{\omega} \times \vec{a} \end{aligned} \quad (2-17)$$

将式(2-14)与(2-17)代入式(2-13), 得

$$\left. \frac{d\vec{a}}{dt} \right|_i = \left. \frac{d\vec{a}}{dt} \right|_r + \vec{\omega} \times \vec{a} \quad (2-18)$$

式(2-18)表示了向量的绝对变率与相对变率的关系。

二、惯导基本方程

当研究飞行器(我们将飞行器看成刚体)的运动时, 为了导航的需要, 我们选取一个平台系(用下标“p”来表示), 其原点取在飞行器的重心上。设 \vec{R} 为平台系的原点在惯性坐标系内的向径, 如图 2-8 所示。

由于研究飞行器的运动通常要相对地球确定飞行器的速度与位置, 所以可取地球坐标系(用下标“e”来表示)为动系。而地球坐标系相对惯性坐标系的角速率为 $\vec{\omega}_{ie}$, 其中下标“ie”表示“地球坐标系相对惯性坐标系”的意思。于是以地球坐标系为动系来求向量 \vec{R} 的绝对变率, 并根据式(2-18)可得

$$\left. \frac{d\vec{R}}{dt} \right|_i = \left. \frac{d\vec{R}}{dt} \right|_e + \vec{\omega}_{ie} \times \vec{R} \quad (2-19)$$

• 22 •

(2-16)

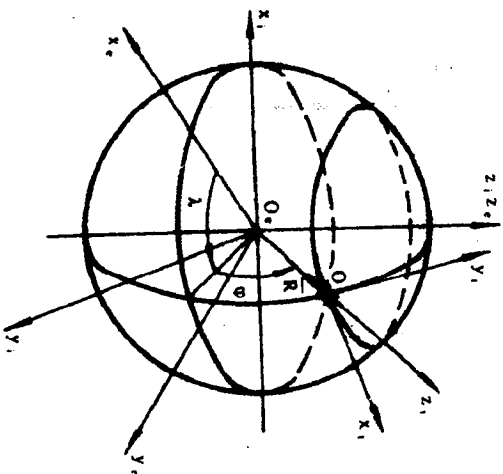


图 2-8 平台坐标系原点的角速

(2-17)

(2-18)

上式中设

$$\bar{V}_{op} = \frac{d\bar{R}}{dt} \Big|_i \quad (2-20)$$

为平台坐标系原点相对地球坐标系的速度向量——即地速向量。将上式代入式(2-19)可得

$$\frac{d\bar{R}}{dt} \Big|_i = \bar{V}_{op} + \omega_{ie} \times \bar{R} \quad (2-21)$$

对式(2-21)再次求绝对变率可得

$$\frac{d^2\bar{R}}{dt^2} \Big|_i = \frac{d\bar{V}_{op}}{dt} \Big|_i + \frac{d}{dt}(\omega_{ie} \times \bar{R}) \Big|_i \quad (2-22)$$

由于地球自转角速率可近似地看为常量,则

$$\frac{d\omega_{ie}}{dt} \Big|_i = 0$$

于是式(2-22)可写成

(2-19)

飞行器速度(表示)为动系。下标“ie”从地球坐标系可得

关系。

角速度的相对性

$$\frac{d^2\bar{R}}{dt^2} \Big|_i = \frac{d\bar{V}_{op}}{dt} \Big|_i + \omega_{ie} \times \frac{d\bar{R}}{dt} \Big|_i \quad (2-23)$$

将式(2-21)代入式(2-23),得

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{R}}{dt^2} \Big|_i &= \frac{d\bar{V}_{op}}{dt} \Big|_i + \omega_{ie} \times (\bar{V}_{op} + \omega_{ie} \times \bar{R}) \\ &= \frac{d\bar{V}_{op}}{dt} \Big|_i + \omega_{ie} \times \bar{V}_{op} + \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times \bar{R}) \end{aligned} \quad (2-24)$$

在求上式中的 $\frac{d\bar{V}_{op}}{dt} \Big|_i$ 时, 由于 \bar{V}_{op} 要在平台坐标系上取投影(即地速的各分量是在平台坐标系上给出的), 因此这次取绝对变率时应取平台坐标系为动系, 则有

$$\frac{d\bar{V}_{op}}{dt} \Big|_i = \frac{d\bar{V}_{op}}{dt} \Big|_p + \omega_{ip} \times \bar{V}_{op} \quad (2-25)$$

而上式中

$$\omega_{ip} = \omega_{ie} + \omega_{op} \quad (2-26)$$

式中 ω_{op} 为平台坐标系相对地球坐标系的角速率, 它取决于平台坐标系的取法。将式(2-25)、(2-26)代入式(2-24), 可得

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{R}}{dt^2} \Big|_i &= \frac{d\bar{V}_{op}}{dt} \Big|_p + (2\omega_{ie} + \omega_{op}) \times \bar{V}_{op} \\ &\quad + \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times \bar{R}) \end{aligned} \quad (2-27)$$

由于平台惯导方程的实现与加速度计有着密切的联系, 我们就来研究加速度计与式(2-27)的关系。设在平台上或机体上装有加速度计, 其示意图如图 2-9 所示。设加速度计中的质量块的质量为 m , 根据牛顿第二定律, 有

$$\bar{F} = m \frac{d^2\bar{R}}{dt^2} \Big|_i \quad (2-28)$$

式中 \bar{F} 为作用于加速度计质量块上的外力。进一步可得

$$\bar{F} = \bar{F}_s + m\bar{g}_m \quad (2-29)$$

式中 \bar{F}_s 表示作用在质量块上的弹簧拉力, 它与弹簧的变形成正比; 而 $m\bar{g}_m$ 为作用在质量块上的万有引力。将式 (2-29) 代入式 (2-28) 可得

$$\bar{F}_s + m\bar{g}_m = m \frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} \quad (2-30)$$

进而由上式可得

$$\frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} = -\frac{\bar{F}_s}{m} + \bar{g}_m \quad (2-31)$$

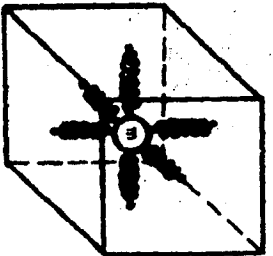


图 2-9 加速度计示意图

上式中 $\frac{d^2 \bar{R}}{dt^2}$ 为加速度计的质量块所承受的绝对加速度, 也即飞行器或平台坐标系原点的绝对加速度; \bar{g}_m 为万有引力加速度; $\frac{\bar{F}_s}{m}$ 为非引力加速度。设 $\bar{j} = \frac{\bar{F}_s}{m}$, 它表示单位质量块质量所承受的弹簧拉力, 将它定义为比力。因为比力 \bar{j} 的大小与弹簧变形成正比, 而加速度计的输出正是与弹簧变形成正比。因此加速度计实质上测量的并非机体加速度, 而是比力, 这是惯导理论中的最重要的基本概念之一。

将式 (2-31) 代入式 (2-27), 得

$$\bar{j} + \bar{g}_m = \frac{d^2 \bar{V}_{cp}}{dt^2} + (2\bar{\omega}_{ie} + \bar{\omega}_{cp}) \times \bar{V}_{cp}$$

$$+ \bar{\omega}_{ie} \times (\bar{\omega}_{ie} \times \bar{R}) \quad (2-32)$$

设
$$\bar{\dot{V}}_{cp} = \frac{d\bar{V}_{cp}}{dt} \quad (2-33)$$

它表示在平台坐标系上观测的地速向量的导数, 它也正是惯导中所要求的量。考虑到式 (2-33), 式 (2-32) 可写成

设

$$\bar{\dot{V}}_{cp} = \bar{j} - (2\bar{\omega}_{ie} + \bar{\omega}_{cp}) \times \bar{V}_{cp} + \bar{g}_m - \bar{\omega}_{ie} \times (\bar{\omega}_{ie} \times \bar{R}) \quad (2-34)$$

上式中 \bar{g} 为重力加速度。下面我们简要地来讨论一下重力加速度的物理意义。图 2-10 示出了地球表面上的一个质点 M , 其质量为 m 。它可以放在另一个物体上, 这时它受到了物体的约束反力 \bar{T} ; 它也可以悬挂在一根细线上, 这时它受到的是线的拉力 \bar{T} 。质点 M 还受到万有引力 $m\bar{g}_m$ 。在这两个力的作用下质点随地球以向心加速度 $\bar{\omega}_{ie} \times (\bar{\omega}_{ie} \times \bar{R})$ 运动, 即

$$\bar{T} + m\bar{g}_m = m\bar{\omega}_{ie} \times (\bar{\omega}_{ie} \times \bar{R})$$

由上式可得

$$\frac{\bar{T}}{m} = \bar{\omega}_{ie} \times (\bar{\omega}_{ie} \times \bar{R}) - \bar{g}_m$$

再取 $\bar{g} = -\frac{\bar{T}}{m}$, 则有

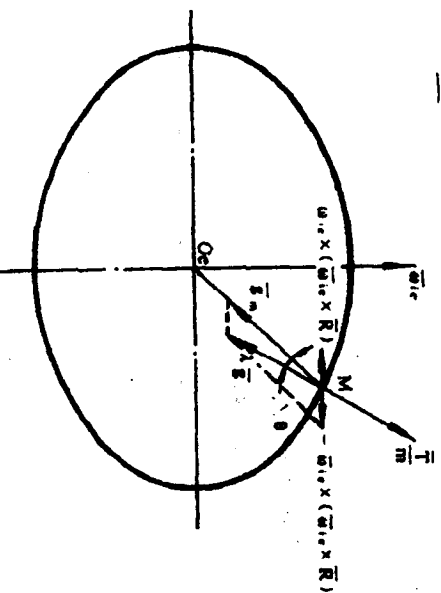


图 2-10 重力加速度的物理意义

(2-34)

$$\vec{g} = \vec{g}_n - \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times \vec{R})$$

(2-35)

即得到式 (2-35)。由图 2-10 可以看出, 重力加速度沿着地球上的质点所受到的约束反力或拉力的方向, 并与其反向, 它又可看成地球引力加速度 \vec{g}_n 与向量 $-\omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times \vec{R})$ 的合向量。地垂线的方向正是沿着 \vec{g} 的方向; 而水平面则与 \vec{g} 垂直。 \vec{g} 与 \vec{g}_n 之间有个很小的夹角 $\Delta\theta$ 。 $\Delta\theta$ 与地理纬度 φ 有关。当 $\varphi = 45^\circ$ 时, $\Delta\theta \approx 10$ 角分。

我们再回到惯导基本方程的推导上。将式 (2-35) 代入式 (2-34) 可得

$$\dot{\vec{v}}_n = \vec{j} - (2\omega_{ie} + \omega_{n\varphi}) \times \vec{v}_n + \vec{g} \quad (2-36)$$

式 (2-36) 就是向量形式的惯导基本方程。惯导基本方程中各项的物理意义可简述如下: $\dot{\vec{v}}_n$ 为进行导航计算需要获得的载体 (也即平台系) 相对地球的加速度向量; \vec{j} 为加速度计所测量的比力向量; $-(2\omega_{ie} + \omega_{n\varphi}) \times \vec{v}_n$ 是由地球自转和载体相对地球运动而产生的加速度, 它没有明显的物理意义, 而又被加速度表所感受, 为计算 $\dot{\vec{v}}_n$ 需要把它从 \vec{j} 中消除掉, 因此称之为有害加速度; \vec{g} 为重力加速度向量。惯导基本方程也可写成沿平台坐标系的投影形式。平台系的取法不同, 惯导基本方程沿平台坐标系的具体投影形式也不同。

三、向量乘积的矩阵表示法

对惯导基本方程式 (2-36) 进行分析可以看出, 在方程中出现了向量叉积项。为了便于应用矩阵这一数学工具进行分析与计算, 需要将向量的乘积 (包括点积与叉积) 用矩阵形式表示出来。

设两个向量 \vec{a} 与 \vec{b} , 将其表示成在同一坐标系 $Oxyz$ 中的投影形式 (坐标系的基为 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$), 为

• 27 •

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \quad (2-37)$$

下面求向量 \vec{a} 与 \vec{b} 的乘积。

1. \vec{a} 与 \vec{b} 的点积 $\vec{a} \cdot \vec{b}$

因为

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

又因为

$$\begin{aligned} [a_x \ a_y \ a_z] \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} &= [b_x \ b_y \ b_z] \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= [a_x \ a_y \ a_z] \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \\ &= [b_x \ b_y \ b_z] \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-38)$$

2. \vec{a} 与 \vec{b} 的叉积 $\vec{a} \times \vec{b}$

设

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad (2-39)$$

且有

$$\begin{aligned} \vec{c} &= a_x \vec{e}_1 + a_y \vec{e}_2 + a_z \vec{e}_3 \\ \vec{b} &= b_x \vec{e}_1 + b_y \vec{e}_2 + b_z \vec{e}_3 \\ \vec{c} &= c_x \vec{e}_1 + c_y \vec{e}_2 + c_z \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (2-40)$$

将式 (2-40) 代入式 (2-39) 可得

• 28 •



$$\begin{aligned}\bar{c} &= \bar{a} \times \bar{b} \\ &= (a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3) \times (b_1\bar{e}_1 + b_2\bar{e}_2 + b_3\bar{e}_3) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\bar{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\bar{e}_2 \\ &\quad + (a_1b_2 - a_2b_1)\bar{e}_3 \\ &= c_1\bar{e}_1 + c_2\bar{e}_2 + c_3\bar{e}_3\end{aligned}$$

将上式写成投影形式则有

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} \quad (2-41)$$

上式右端可写成两矩阵的乘积,即

$$\begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 & a_2 \\ a_2 & 0 & -a_3 \\ -a_3 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} 0 & -b_1 & b_2 \\ b_1 & 0 & -b_3 \\ -b_1 & b_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

设

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 & a_2 \\ a_2 & 0 & -a_3 \\ -a_3 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-42)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -b_1 & b_2 \\ b_1 & 0 & -b_3 \\ -b_1 & b_2 & 0 \end{bmatrix}$$

式中 A, B 分别为向量 \bar{a}, \bar{b} 的反对称矩阵, 其对角元为零, 其它元素差一个负号地与主对角线相对称, 并按式 (2-42) 所示的顺序排列。从而 $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ 可写成矩阵形式

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = -B \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (2-43)$$

四、三类惯导系统的基本原理

1. 惯导基本方程在平台坐标系的投影

首先将平台坐标系 Ox_p, y_p, z_p 的 z_p 轴的正向选为沿 \bar{g} 的方向, 即指向天 (若取 z_p 指向地则只要将向量沿 z_p 轴的投影变号即可)。至于 x_p, y_p 轴在水平面中的指向, 这里暂不做具体规定。下面我们讨论惯导基本方程在平台系的投影形式。为了书写方便, 我们将 $V_{p, x}, V_{p, y}, V_{p, z}$ 简写为 V_x^p, V_y^p, V_z^p , 表示向量 \bar{V}_p 在平台坐标系的 x_p, y_p, z_p 轴的投影。考虑到向量叉乘的矩阵表示法, 惯导基本方程 (2-36) 可写成如下矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_x^p \\ \dot{V}_y^p \\ \dot{V}_z^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x^p \\ f_y^p \\ f_z^p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -(2\omega_{i, x}^p + \omega_{p, x}^p) & 2\omega_{i, y}^p + \omega_{p, y}^p \\ 2\omega_{i, x}^p + \omega_{p, x}^p & 0 & -(2\omega_{i, x}^p + \omega_{p, x}^p) \\ -(2\omega_{i, y}^p + \omega_{p, y}^p) & 2\omega_{i, x}^p + \omega_{p, y}^p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x^p \\ V_y^p \\ V_z^p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (2-44)$$

2. 三类不同的惯导系统

上面我们已将平台坐标系的 z_p 轴向选定, 而 x_p, y_p 轴可以有三种不同的选法。根据平台坐标系的选法的不同, 我们可将惯导系统分成指北方位系统、自由方位系统和游动自由方位系统三种。

(2-43)

(1) 指北方位系统

对于指北方位系统,平台坐标系 $Ox_p y_p z_p$ 与地理坐标系 $Ox_g y_g z_g$ 重合。因 y_p 指北,这种惯导系统便由此而得名。指北方位系统平台坐标系的取法如图 2-11 所示。

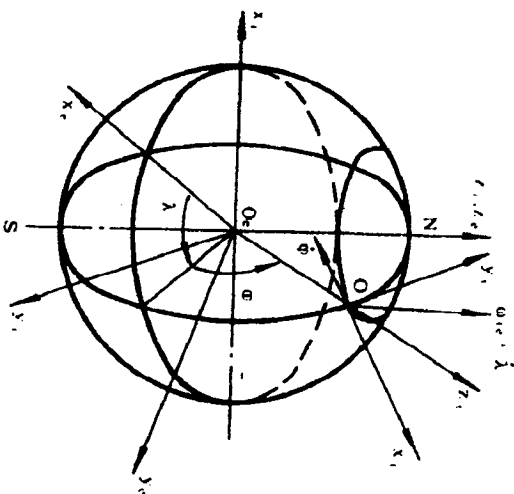


图 2-11 指北方位系统的平台坐标系

在图 2-11 中,我们将地球画为圆球体。事实上,地球可近似为一个椭球体。设地球的椭球度为

$$e = \frac{R_e - R_p}{R_e}$$

(2-44)

式中 R_e 为地球的赤道半径; R_p 为地球的极轴半径; $e=1/297$ 。当飞行器沿北向飞行时,即飞行器在子午面内飞行,这时地球的曲率半径为 R_n ; 当飞行器沿东向飞行时,这时飞行器在与子午面垂直的平面内运动,这时地球的曲率半径为 R_{no} 。附录一的式(附 1-24)给出了 R_n (即 $R_{y'}$) 及 R_{no} (即 $R_{x'}$) 的计算公式,该公式可表示成

$$\frac{1}{R_M} = \frac{1}{R_n} = \frac{1}{R_e} (1 + 2e - 3e \sin^2 \varphi)$$
$$\frac{1}{R_v} = \frac{1}{R_{no}} = \frac{1}{R_e} (1 - e \sin^2 \varphi)$$

(2-45)

在以后的分析中,我们就不再把地球半径写成 R , 而是根据不同的情况写成 R_n 或 R_{no} , 从而考虑了地球的椭球度。

对于指北方位系统,平台要跟踪地理坐标系。对于平台惯导系统,就要在陀螺上施加,使平台跟踪地理坐标系;对于捷联惯导系统,则要把地理坐标系的转动角速率输入到“数学平台”的计算程序中去。因此需要计算地理坐标系的角速率。

由图 2-11 可以求得由于地球转动引起的地理坐标系的角速度,它的三个分量为

$$\omega_{ix} = 0$$
$$\omega_{iy} = \omega_{ie} \cos \varphi$$
$$\omega_{iz} = \omega_{ie} \sin \varphi$$

(2-46)

由于飞行器的运动引起的地理坐标系相对地球坐标系的角速度的三个分量为

$$\omega'_{ix} = -\frac{V'_z}{R_{no}}$$
$$\omega'_{iy} = \frac{V'_z}{R_{no}}$$
$$\omega'_{iz} = \frac{V'_x}{R_n} \tan \varphi$$

(2-47)

将式(2-46)、(2-47)求和可得

$$\omega'_{ix} = -\frac{V'_z}{R_{no}}$$

0451 0212

$$\begin{cases} \omega_{ix} = \omega_{is} \cos \varphi + \frac{V_x'}{R_{ss}} \\ \omega_{is} = \omega_{is} \sin \varphi + \frac{V_z'}{R_{ss}} \end{cases} \quad (2-48)$$

式(2-48)表示了指北方位系统平台的跟踪角速率。将式(2-48)代入式(2-44),并将惯导基本方程写成投影形式,从而可得

$$\begin{cases} \dot{V}_x' = f_x' + \left(2\omega_{is} \sin \varphi + \frac{V_x'}{R_{ss}} \tan \varphi \right) V_z' - \left(2\omega_{is} \cos \varphi + \frac{V_z'}{R_{ss}} \right) V_x' \\ \dot{V}_y' = f_y' - \left(2\omega_{is} \sin \varphi + \frac{V_x'}{R_{ss}} \tan \varphi \right) V_z' - \frac{V_x'}{R_{ss}} V_z' - f_z' - \left(2\omega_{is} \cos \varphi + \frac{V_z'}{R_{ss}} \right) V_x' \\ \dot{V}_z' = f_z' + \left(2\omega_{is} \cos \varphi + \frac{V_z'}{R_{ss}} \right) V_x' + \frac{V_z'}{R_{ss}} V_z' - g \end{cases} \quad (2-49)$$

上式中 f_x', f_y', f_z' 为比力 \vec{f} 在地理坐标系上的三个投影。对于平台惯导系统,它可以通过沿平台轴安装的三个加速度计直接测得;对于捷联系统,沿机体系安装的三个加速度测量的沿机体系的比力分量需经过坐标转换才能获得 f_x', f_y', f_z' 。而上式中的 a_{ix}, a_{iy}, a_{iz} 为进行导航计算所必须消除的有害加速度分量,它们可由计算机算出。按式(2-49)确定 V_x', V_y', V_z' , 便可按照第一章所介绍的基本原理,参照式(1-1)求出

导航参数。计算机还可由式(2-48)计算出平台坐标系的跟踪角速率。根据以上所述原理便可画出指北方位系统的导航原理方块图,如图2-12所示。

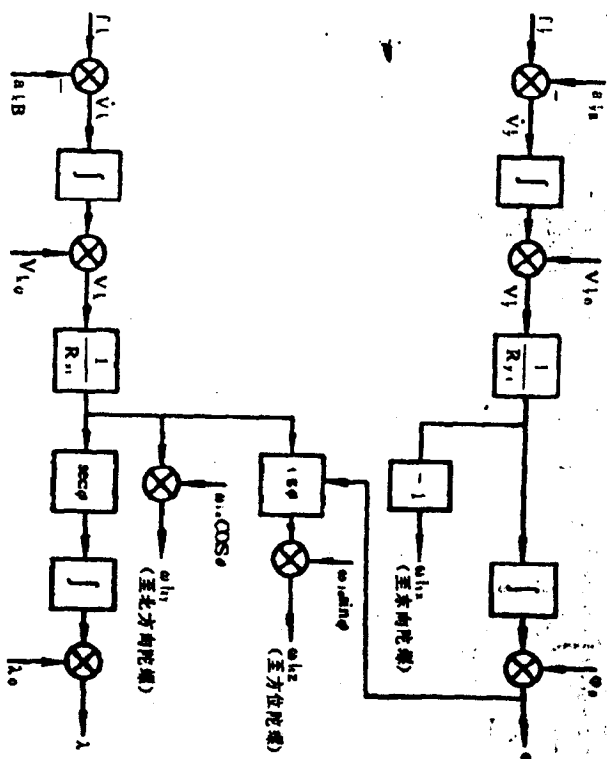


图2-12 指北方位系统的导航原理方块图

采用指北方位系统进行导航时,由于平台要跟踪北向,而当飞行器在极区飞行时,方位的变化较快,因此要求平台具有较快的跟踪角速度。对于平台惯导系统,则要求陀螺有较大力的矩器系数,这就造成了硬件上的困难;对于捷联惯导系统,较快的方位变化要求计算机有较快的计算速度,否则就会降低计算精度。因此指北方位系统不适用于在极区附近使用。为了克服这一缺点出现了其它类型的惯导系统。

(2) 自由方位系统

台坐标系的跟位系统的导航

在选取平台坐标系时,取

$$\omega_{p_s}^s = 0$$

即平台相对惯性坐标系 s_r 轴不转动, 这样控制平台 s_r 轴转动的陀螺就不需要加矩, 从而克服了指北方位系统在极区使用的困难。然而由于平台相对惯性空间绕 s_r 轴不转动, 则相对地理坐标系存在着表观运动, 即 y_r 不再指北, 而与 y_s 轴之间存在着自由方位角 α , 如图 2-13 所示。

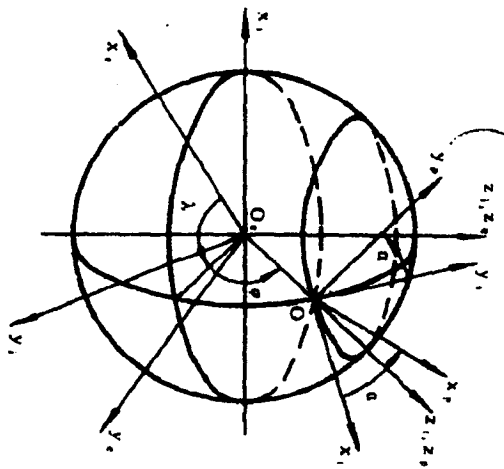


图 2-13 自由方位系统的平台坐标系

仿照指北方位系统的导航原理, 我们可以求出平台坐标系相对惯性坐标系的角速率分量。沿平台轴测量的比力可以通过由自由方位角构成的方向余弦矩阵转换为沿地理系的比力分量, 进而便可进行导航计算, 自由方位系统的导航原理方块图如图 2-14 所示, 读者可自行推导。

(3) 游动自由方位系统

在选取平台坐标系时取

$$\omega_{p_s}^s = 0$$

则得到的是游动自由方位系统。这时平台的方位既不稳定在北向, 也不稳定在惯性坐标系方向, 而是相对地球没有绕 s_r 轴的运动。 y_r 轴与北向的夹角不为零, 而是一个随时间变化的游动方位角 α 。

对于游动自由方位系统, 也可以得到与图 2-14 相类似的惯导原理方块图。由于对于游动自由方位系统的导航一般多采用方向余弦法, 因此这里就不再赘述。

§ 2-4 惯性导航的方向余弦法

上一节介绍的导航原理是基于求得沿地理坐标系的 \dot{y}_s , \dot{z}_s , 进行两次积分, 从而进行导航参数的计算。对于自由方位系统或游动自由方位系统则首先要将沿平台坐标系测量的比力转换到地理坐标系上。本节介绍一种适用于上述两种系统的方向余弦法。对于方向余弦法, 可以由 \dot{y}_s 经一次积分求得 \bar{y}_s , 再经过求解方向余弦矩阵微分方程等计算求得导航参数。由于采用方向余弦法为导航计算带来许多方便, 所以对于自由方位系统或游动自由方位系统多采用方向余弦法。本节就以游动自由方位系统为对象来讨论方向余弦法。

一、直角坐标系的坐标变换是正交变换

设直角坐标系 $O x_r y_r z_r$ 的单位向量为 $\bar{i}_r, \bar{j}_r, \bar{k}_r$, 即三者互相垂直, 且模为 1; 而另一直角坐标系 $O x_s y_s z_s$ 的单位向量为 $\bar{i}_s, \bar{j}_s, \bar{k}_s$, 同样三者互相垂直, 模为 1。矩阵 C 将坐标系 $O x_r y_r z_r$ 转换到坐标系 $O x_s y_s z_s$, 即

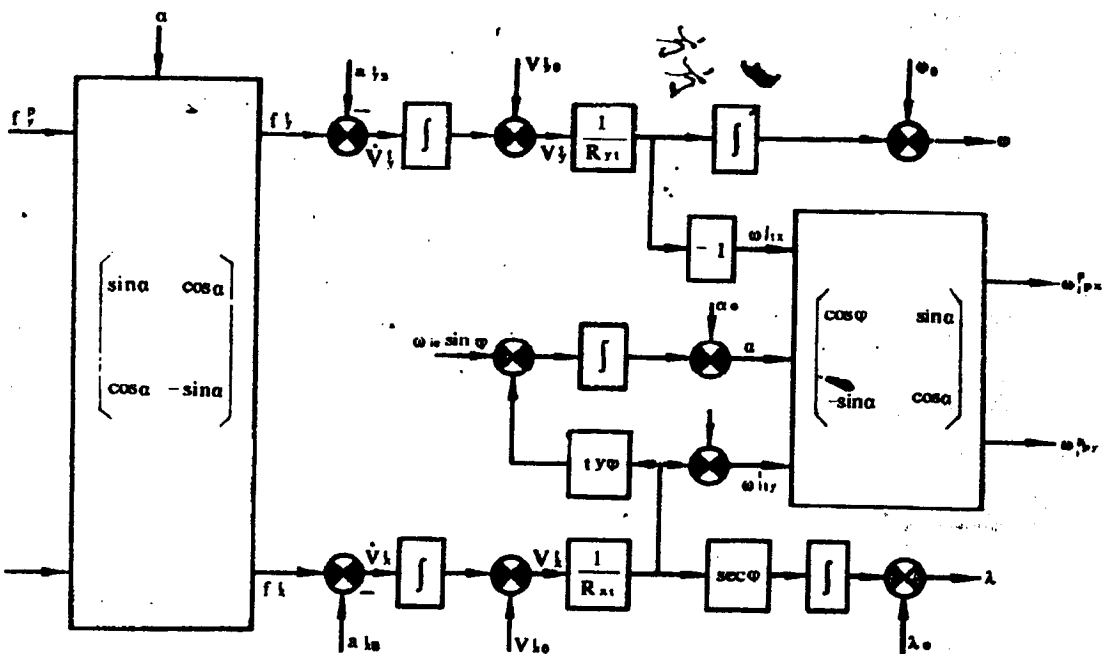


图 2-14 自由方位系统的导航原理方块图

• 37 •

$$\begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \\ \bar{i}_3 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \\ \bar{i}_3 \end{bmatrix} \quad (2-50)$$

式中

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (2-51)$$

式(2-50)可写成

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= C_{11}\bar{i}_1 + C_{12}\bar{i}_2 + C_{13}\bar{i}_3 \\ \bar{e}_2 &= C_{21}\bar{i}_1 + C_{22}\bar{i}_2 + C_{23}\bar{i}_3 \\ \bar{e}_3 &= C_{31}\bar{i}_1 + C_{32}\bar{i}_2 + C_{33}\bar{i}_3 \end{aligned} \quad (2-52)$$

因为 $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ 为互相垂直的单位向量, 即有

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 &= \bar{e}_3 \\ \bar{e}_2 \times \bar{e}_3 &= \bar{e}_1 \\ \bar{e}_3 \times \bar{e}_1 &= \bar{e}_2 \end{aligned} \quad (2-53)$$

将式(2-52)代入式(2-53), 可得

$$\begin{aligned} (C_{11}\bar{i}_1 + C_{12}\bar{i}_2 + C_{13}\bar{i}_3) \times (C_{21}\bar{i}_1 + C_{22}\bar{i}_2 + C_{23}\bar{i}_3) &= (C_{31}\bar{i}_1 + C_{32}\bar{i}_2 + C_{33}\bar{i}_3) \\ (C_{21}\bar{i}_1 + C_{22}\bar{i}_2 + C_{23}\bar{i}_3) \times (C_{31}\bar{i}_1 + C_{32}\bar{i}_2 + C_{33}\bar{i}_3) &= (C_{11}\bar{i}_1 + C_{12}\bar{i}_2 + C_{13}\bar{i}_3) \\ (C_{31}\bar{i}_1 + C_{32}\bar{i}_2 + C_{33}\bar{i}_3) \times (C_{11}\bar{i}_1 + C_{12}\bar{i}_2 + C_{13}\bar{i}_3) &= (C_{21}\bar{i}_1 + C_{22}\bar{i}_2 + C_{23}\bar{i}_3) \end{aligned}$$

对以上三个公式的左边进行向量运算, 令对应单位向量的系数相等, 可得如下九个方程

$$\begin{aligned} C_{31} &= C_{12}C_{23} - C_{13}C_{22} \\ C_{32} &= C_{13}C_{21} - C_{11}C_{23} \\ C_{33} &= C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} \end{aligned}$$

• 38 •

(2-50)

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{22}C_{33} - C_{23}C_{32} \\ C_{12} &= C_{23}C_{31} - C_{21}C_{33} \\ C_{13} &= C_{21}C_{32} - C_{22}C_{31} \\ C_{21} &= C_{22}C_{33} - C_{23}C_{32} \\ C_{22} &= C_{23}C_{31} - C_{21}C_{33} \\ C_{23} &= C_{21}C_{32} - C_{22}C_{31} \end{aligned}$$

(2-54)

(2-51)

$$C_{31} = C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}$$

(2-52)

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0$$

(2-53)

$$C_{11}^2 + C_{12}^2 + C_{13}^2 = 1$$

$$C_{21}^2 + C_{22}^2 + C_{23}^2 = 1$$

$$C_{31}^2 + C_{32}^2 + C_{33}^2 = 1$$

(2-55)

$$C_{11}C_{21} + C_{12}C_{22} + C_{13}C_{23} = 0$$

$$C_{21}C_{31} + C_{22}C_{32} + C_{23}C_{33} = 0$$

$$C_{11}C_{31} + C_{12}C_{32} + C_{13}C_{33} = 0$$

式(2-55)也是正交变换所必须满足的条件。

由以上给出的正交条件可以证明, C 的行列式为 1, 即

$$|C| = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} = C_{11}A_{11} + C_{12}A_{12} + C_{13}A_{13}$$

式中 A_{11}, A_{12}, A_{13} 分别为 C_{11}, C_{12}, C_{13} 的代数余子式。由式(2-54)可将上式写成

$$|C| = C_{11}^2 + C_{12}^2 + C_{13}^2$$

• 39 •

再由式(2-55)可得

$$|C| = 1$$

(2-56)

最后可由正交矩阵的定义 $C^{-1} = C'$ 证明矩阵 C 为正交矩阵, 式中上标“ $'$ ”表示“转置”的意思。从而

$$C^{-1} = \frac{adj C}{|C|} = adj C$$

$$= C' = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix}$$

(2-57)

这就证明了直角坐标系的坐标变换为正交变换, 即实现这一变换的矩阵为正交矩阵。

二、转动的方向余弦矩阵的微分方程

绕定点转动的两个坐标系之间的关系可用方向余弦矩阵来表示, 而方向余弦矩阵也是在随时间变化的, 其变化规律的

数学描述就是方向余弦矩阵的微分方程。方向余弦矩阵的即时值就是求解该微分方程而得到的。下面就讨论转动的方向余弦矩阵的微分方程的形式。

设动系 $Oxyz$ 与定系 $Ox_1y_1z_1$ 的关系如图 2-15 所示, 动系相对定系以角速度 ω 转动, 动系内一点 M 的位置可用向径 \vec{r} 表示。动系相对定系的角度位置关系可用方向余弦矩阵 C 或其逆阵 $S = C^{-1}$ 来表示。 C 或 S 的变化是由 ω 引

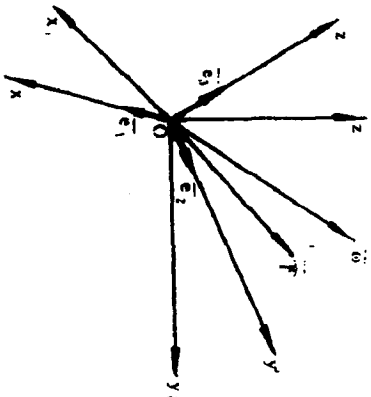


图 2-15 动系与定系之间的关系

起。动系相对定系的角度位置关系可用方向余弦矩阵 C 或其逆阵 $S = C^{-1}$ 来表示。 C 或 S 的变化是由 ω 引

• 40 •

起的。设向径 \vec{r} 在动系与定系的投影分量分别为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (2-58)$$

则向径 \vec{r} 在动系与定系之间的投影存在着下面的关系:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (2-59)$$

显然, $S = C^{-1}$, 于是 M 点的速度向量 \vec{v} 可表示为列矩阵, 即

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \left\{ S \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\}$$

因为 M 点在动系上的投影保持不变, 于是上式可写成

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} = \dot{S} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \dot{S} S^{-1} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (2-60)$$

将 $\vec{v} = \omega \times \vec{r}$ 写成矩阵形式, 有

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} = Q_i \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (2-61)$$

式中 Q_i 是 ω 在定系投影的反对称矩阵, 即

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{zi} & \omega_{yi} \\ \omega_{zi} & 0 & -\omega_{xi} \\ -\omega_{yi} & \omega_{xi} & 0 \end{bmatrix}$$

比较式 (2-60) 与 (2-61) 可得

$$Q_i = \dot{S} S^{-1} \quad (2-62)$$

• 41 •

上式中的 Q_i 使用起来不方便, 需要将上式化成在动系上的投影形式。

将 $\vec{v} = \omega \times \vec{r}$ 写成沿动系投影的矩阵形式, 有

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2-63)$$

式中 Q 是 ω 在动系上的投影的反对称矩阵, 即

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

利用方向余弦矩阵 $C = S^{-1}$ 进行坐标转换可将式 (2-63) 的左端写成

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = S^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix}$$

将式 (2-61) 代入上式, 再考虑到式 (2-59) 的变换可得

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = S^{-1} Q_i \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = S^{-1} Q_i S \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2-64)$$

比较式 (2-63) 与 (2-64), 可得

$$Q = S^{-1} Q_i S \quad (2-65)$$

将式 (2-62) 代入上式, 得

$$Q = S^{-1} \dot{S} S^{-1} S$$

将上式等式两边左乘以 S , 于是可得

$$\underline{\dot{S}} = S Q \quad (2-66)$$

上式可写成

• 42 •

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_{11} & \dot{C}_{12} & \dot{C}_{13} \\ \dot{C}_{21} & \dot{C}_{22} & \dot{C}_{23} \\ \dot{C}_{31} & \dot{C}_{32} & \dot{C}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & \omega_y \\ \omega_x & 0 & -\omega_z \\ -\omega_y & \omega_z & 0 \end{bmatrix} \quad (2-67)$$

它代表 9 个微分方程

$$\begin{aligned} \dot{C}_{11} &= C_{11}\omega_x - C_{12}\omega_y \\ \dot{C}_{12} &= C_{12}\omega_x - C_{22}\omega_y \\ \dot{C}_{13} &= C_{13}\omega_x - C_{32}\omega_y \\ \dot{C}_{21} &= C_{11}\omega_x - C_{12}\omega_z \\ \dot{C}_{22} &= C_{22}\omega_x - C_{23}\omega_z \\ \dot{C}_{23} &= C_{11}\omega_y - C_{21}\omega_z \\ \dot{C}_{31} &= C_{13}\omega_x - C_{23}\omega_z \\ \dot{C}_{32} &= C_{13}\omega_y - C_{23}\omega_z \\ \dot{C}_{33} &= C_{13}\omega_z - C_{23}\omega_x \end{aligned} \quad (2-68)$$

式 (2-68) 的结果与以下矩阵微分方程的结果也是一致的:

$$\dot{C} = -\Omega C \quad (2-69)$$

式 (2-66) 与式 (2-69) 是同一方向余弦矩阵微分方程的不同表示形式, 在惯导中都有应用。

三、随动自由方位系统的方向余弦法

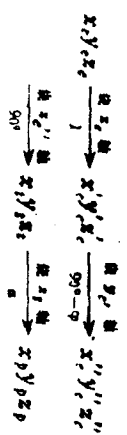
1. 方向余弦矩阵(位置矩阵) C^p

平台坐标系 $O x_p, y_p, z_p$ 与地球坐标系 $O_e x_e, y_e, z_e$ 之间的转动关系(虽然两个坐标系的坐标原点不重合, 但可以通过平移使它们重合, 从而得到其转动关系)可用下式来表示:

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = C^p \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} \quad (2-70)$$

式中 C^p 为由地球坐标系转换到平台坐标系的方向余弦矩阵, 它是纬度 φ 、经度 λ 与随动方位角 α 的函数, 并可由下面顺序

的转动来实现:



上述的转动关系可由图 2-16 (a) 来表示; 为清楚起见, 将绕 y_e' 轴转动 $90^\circ - \varphi$ 的坐标关系, 在于午面内表现出来, 如图 2-16 (b) 所示。图 2-16 (c) 示出了将这些坐标系平移至 O 点时的坐标转换关系。上述的转动关系可以写成下面的矩阵方程:

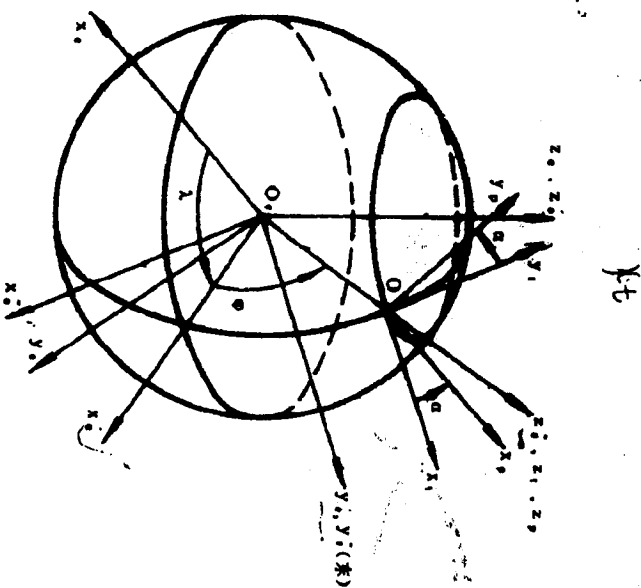
$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sin \varphi & 0 & -\cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda & 0 \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix}$$

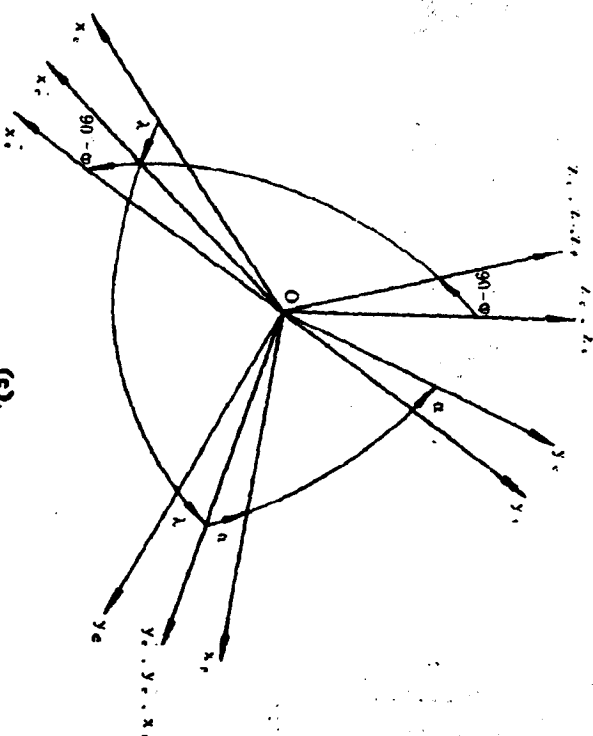
$$= \begin{bmatrix} -\sin \alpha \sin \varphi \cos \lambda - \cos \alpha \sin \lambda \\ -\cos \alpha \sin \varphi \cos \lambda + \sin \alpha \sin \lambda \\ \cos \varphi \cos \lambda \end{bmatrix}$$

式中

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \sin \alpha \cos \varphi \\ \cos \alpha \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} = C^p \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} \\ & C^p = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-71)$$



(a)

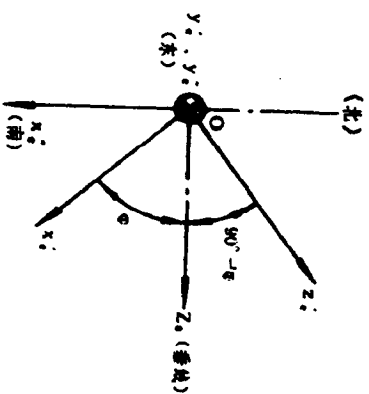


(c)

图 2-16 地球坐标系与平台坐标系的转换关系

(a) 由地球坐标系到平台坐标系的转换；(b) 在子午面内表示绕 y_e 轴的转动；

(c) 将各坐标系平移至 O 点时的坐标转换关系。



(b)

$$= \begin{bmatrix} -\sin \alpha \sin \varphi \cos \lambda - \cos \alpha \sin \lambda \\ -\cos \alpha \sin \varphi \cos \lambda + \sin \alpha \sin \lambda \\ \cos \varphi \cos \lambda \\ -\sin \alpha \sin \varphi \sin \lambda + \cos \lambda \cos \alpha \sin \alpha \cos \varphi \\ -\cos \alpha \sin \varphi \sin \lambda - \sin \alpha \cos \lambda \cos \alpha \cos \varphi \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (2-72)$$

因为由方向余弦矩阵 C^e 可以确定飞行器的位置(经度 λ 和纬度 φ)，所以通常又将 C^e 称为位置矩阵，当然由 C^e 还可确定游动方位角 α 。这一问题将在下面讨论。

2. 由方向余弦矩阵 C^e 的元素确定纬度 φ 、经度 λ 和游动方位角 α

由矩阵 C_p' 的元素便可以单值地确定 φ, λ, α 的真值。为了达到这一目的首先要规定 φ, λ, α 的定义域。 φ 的定义域为 $(-90^\circ, 90^\circ)$; λ 的定义域为 $(-180^\circ, 180^\circ)$, α 的定义域为 $(0^\circ, 360^\circ)$ 。这样, 对于平台坐标系的任一位置, 都有唯一的 φ, λ, α 与之相对应。进而可根据 C_p' 的元素值进行反三角函数运算来确定 φ, λ, α 。由于反三角函数是多值函数, 所以应先求其主值

$$\begin{aligned}\varphi_z &= \sin^{-1} C_{33} \\ \lambda_z &= \lg^{-1} \frac{C_{32}}{C_{31}} \\ \alpha_z &= \lg^{-1} \frac{C_{13}}{C_{11}}\end{aligned}\quad (2-73)$$

当反三角函数的主值确定后, 应根据反三角函数的主值域与 φ, λ, α 的定义域及 C_p' 的有关元素的正负号来确定 φ, λ, α 的真值。

(1) 求纬度的真值 φ

由于反正弦函数的主值域与 φ 的定义域是一致的, 因此有

$$\varphi = \varphi_z \quad (2-74)$$

(2) 求经度的真值 λ

由于反正切函数的主值域是 $(-90^\circ, 90^\circ)$, 它与 λ 的定义域不一致, 因此需要在 λ 的定义域内确定经度的真值 λ_0 。

由式 (2-72) 可得到 C_{32} 与 C_{31} , 代入 λ_z 的公式可得

$$\lambda_z = \lg^{-1} \frac{C_{32}}{C_{31}} = \lg^{-1} \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{\cos \varphi \cos \lambda}$$

由于在 φ 的定义域 $(-90^\circ, 90^\circ)$ 内 $\cos \varphi$ 永远为正, 则 $\cos \lambda$ 与 C_{31} 同号。利用 C_{31} 与 λ_z 的正负值可在 λ 的定义域内

• 47 •

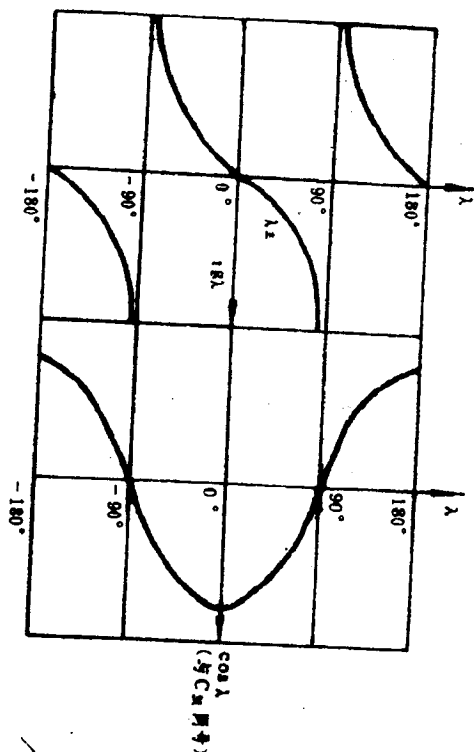


图 2-17 经度的真值 λ 与 $\cos \lambda$ 的关系

确定经度的真值 λ , 参见图 2-17。由图可以得出

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_z & \text{当 } C_{31} > 0 \text{ 时} \\ \lambda_z + 180^\circ & \text{当 } C_{31} < 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (2-75)$$

由式 (2-75) 可以通过计算机软件计算出经度的真值 λ_0 。

(3) 求游动方位角的真值 α

同理, 有

$$\alpha_z = \lg^{-1} \frac{C_{13}}{C_{11}} = \frac{\sin \alpha \cos \varphi}{\cos \alpha \cos \varphi}$$

显然 C_{13} 与 $\cos \alpha$ 同号。图 2-18 示出了游动方位角的真值 α 与 $\cos \alpha$ 的关系。由图可以得出

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_z & \text{当 } C_{13} > 0 \text{ 时} \\ \alpha_z + 360^\circ & \text{当 } C_{13} < 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (2-76)$$

• 48 •

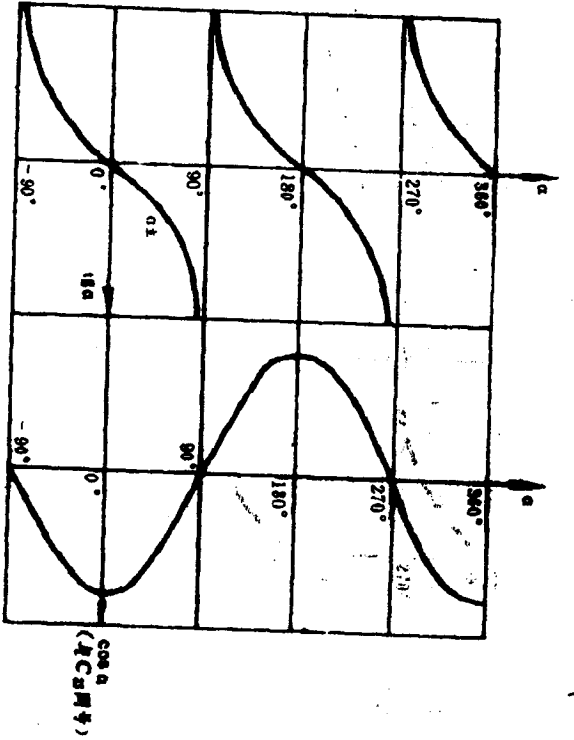


图2-18 游动方位角的真值 α 与 $\cos \alpha$ 的关系

由式(2-76)可以通过计算机的软件程序计算出游动方位角的真值 α_0 。

式(2-75)中当 $C_x = 0$ 时与 $\lambda_z = 0$ 时 λ 的计算以及式(2-76)中当 $C_x = 0$ 时与 $\alpha_z = 0$ 时的计算可仿照参考文献[12]中介绍的方法进行。

3. 方向余弦矩阵 C_i' 的即时修正

方向余弦矩阵 C_i' 的改变是由平台坐标系相对地球坐标系运动的角速率(又称为位置速率) ω_{ij}^p 所引起的。参照式(2-69)所给出的方向余弦矩阵微分方程形式可得

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_{11} & \dot{C}_{12} & \dot{C}_{13} \\ \dot{C}_{21} & \dot{C}_{22} & \dot{C}_{23} \\ \dot{C}_{31} & \dot{C}_{32} & \dot{C}_{33} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{12}^p & \omega_{13}^p \\ \omega_{12}^p & 0 & -\omega_{23}^p \\ -\omega_{12}^p & \omega_{13}^p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

对于游动方位系统,上式中 $\omega_{12}^p = 0$,于是上式可简化为

$$C = -\Omega C$$

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_{11} & \dot{C}_{12} & \dot{C}_{13} \\ \dot{C}_{21} & \dot{C}_{22} & \dot{C}_{23} \\ \dot{C}_{31} & \dot{C}_{32} & \dot{C}_{33} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_{13}^p \\ 0 & 0 & -\omega_{23}^p \\ -\omega_{12}^p & \omega_{13}^p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (2-77)$$

由上式可以看出采用方向余弦法的游动方位系统的特殊优点。

4. 位置速率 ω_{ij}^p

由上面的分析可以看出,要求解方向余弦矩阵微分方程(2-77)需要提供位置速率 ω_{ij}^p 。下面就给出位置速率的计算公式。

位置速率 ω_{ij}^p 是由飞行器的地速的水平分量所引起的。通过微分方程求得 V_x^p, V_y^p , 进行一次积分后可得 V_x^p, V_y^p 。由于平台坐标系与地理坐标系之间相差一个游动方位角 α , 于是通过坐标转换,可得

$$\begin{bmatrix} V_x^p \\ V_y^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x^g \\ V_y^g \end{bmatrix}$$

进而

$$\begin{aligned} V_x^p &= V_x^g \cos \alpha - V_y^g \sin \alpha \\ V_y^p &= V_x^g \sin \alpha + V_y^g \cos \alpha \end{aligned} \quad (2-78)$$

考虑到 $\omega_{12}^p = 0$, 则 ω_{13}^p 可写成

$$\begin{bmatrix} \omega_{13}^p \\ \omega_{23}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{13}^g \\ \omega_{23}^g \end{bmatrix} \quad (2-79)$$

将式(2-78)代入地理坐标系的运动角速率公式(2-47),再代入式(2-79),得

$$\begin{bmatrix} \omega_{13}^p \\ \omega_{23}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -V_x^g \sin \alpha - V_y^g \cos \alpha \\ R_{11} \\ V_x^g \cos \alpha - V_y^g \sin \alpha \\ R_{21} \end{bmatrix}$$