Équations aux dérivées partielles

Équation d'Allen–Cahn

BAOUCHI Aboubakar   JURKOWSKI Armand

TD C

Table des matières

Introduction

L'équation d'Allen–Cahn, proposée en 1979 par Samuel M. Allen et John W. Cahn, constitue un modèle paradigmatique de diffusion–réaction pour décrire la séparation de phases dans les milieux continus. Fondée sur l'énergie libre de Ginzburg–Landau, elle rend compte de la formation et de l'évolution des interfaces entre deux états stables.

1 Forme et interprétation de l'équation

1.1 Forme générale

Soit $u = u(x,t)$ défini sur $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ pour $t \in (0,T)$. On pose :

$$\partial_t u - \varepsilon\, \Delta u + f(u) = 0, \tag{1}$$

avec $u|_{t=0} = u_0$, $u|_{\partial\Omega} = 0$, et

$$f(u) = u^3 - u, \quad F(u) = \tfrac{1}{4}(u^2-1)^2.$$

1.2 Interprétation physique

Le terme $-\varepsilon\Delta u$ lisse le champ u, tandis que $-(u^3-u)$ ramène u vers ± 1. La compétition engendre des interfaces d'épaisseur $O(\sqrt{\varepsilon})$.

$$\boxed{\textbf{Diffusion}-\varepsilon\Delta u} \xleftrightarrow[\text{restauration}]{\text{lissage}} \boxed{\textbf{Réaction}-(u^3-u)}$$

2 Les inventeurs et leurs objectifs

Allen et Cahn ont introduit le modèle comme gradient flow de l'énergie :

$$E[u] = \int_\Omega \Big(\tfrac{\varepsilon}{2}|\nabla u|^2 + F(u) \Big)\, dx,$$

visant à décrire la microstructure des alliages et le coarsening.

3 Impacts et applications

- **Science des matériaux** : morphologie des alliages.
- **Physique statistique** : propagation de fronts.
- **Biologie** : membranes cellulaires.

4 Simulations numériques

Ce modèle est régulièrement utilisé dans les simulations afin de prédire l'évolution de systèmes multiphases. Ceci est appliqué dans la science des matériaux et la physique statistique...

5 Méthodes d'application

Discrétisation en 1D : $\Delta x = (b-a)/N$, $\Delta t = T/M$.

5.1 Schéma d'Euler explicite

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t\Big(\varepsilon\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{\Delta x^2} - (u_i^3 - u_i)\Big),$$

CFL : $\Delta t \leq \Delta x^2/(2\varepsilon)$.

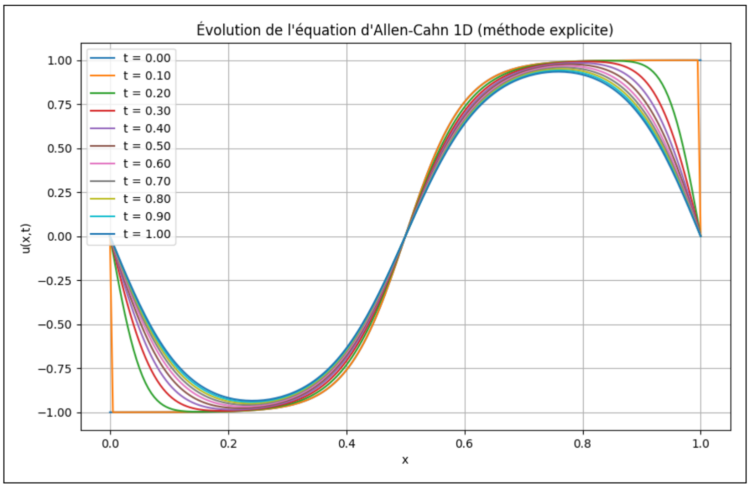

FIGURE 1 – Évolution numérique de l'équation d'Allen–Cahn 1D avec le schéma explicite.

5.2 Schéma semi-implicite

$$u_i^{n+1} - \Delta t\,\varepsilon\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{\Delta x^2} = u_i^n - \Delta t\,(u_i^3 - u_i).$$

On résout ainsi un système tridiagonal à chaque pas.

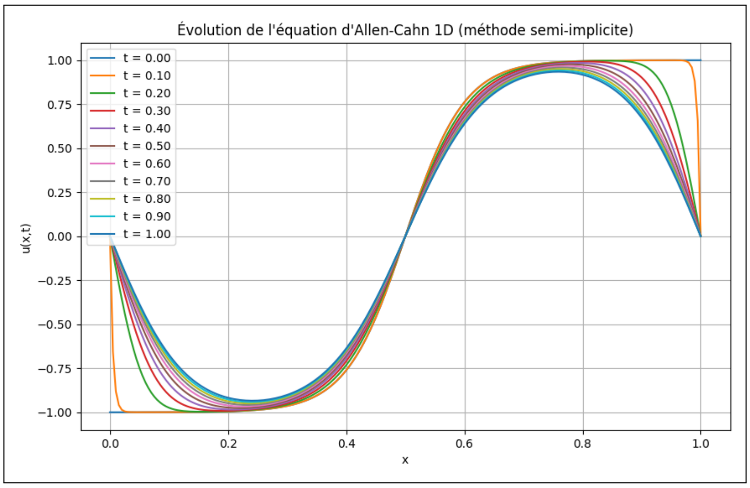

FIGURE 2 – Évolution numérique de l'équation d'Allen–Cahn 1D avec le schéma semi-implicite (échelle réduite).

6 Solution exacte

Nous comparons ici la solution numérique à la solution manufacturée exacte, ici on observe que les erreurs sont plus gfrandes aux conditions extrêmes (t=0 et t=1).

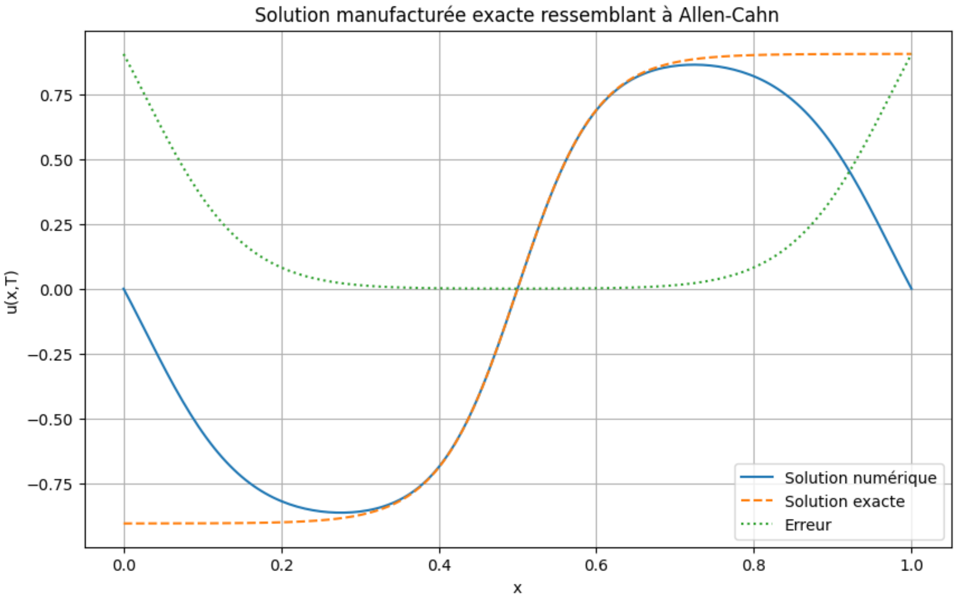

FIGURE 3 – Solution manufacturée exacte ressemblant au profil d'Allen–Cahn, comparaison numérique / exacte et erreur.

7 Cas concrets en finance

La dualité diffusion–réaction se transpose naturellement en finance pour modéliser la valorisation d'actifs dérivés.

7.1 Modèle de Black–Scholes

— $r > 0$: taux d'intérêt (non risqué)
— σ : volatilité de l'actif
— T : date de maturité du contrat
— $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: payoff du contrat

Si S_t désigne le cours de l'actif, le prix de l'option satisfait la PDE :

$$\partial_t V + rS\partial_S V + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial^2_{SS} V - rV = 0,$$

avec condition terminale $V(S, T) = h(S)$.

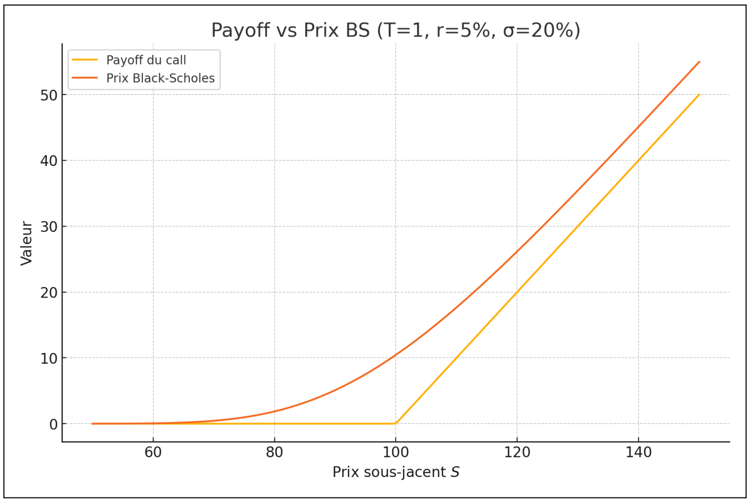

FIGURE 4 – Comparaison du payoff et du prix Black–Scholes d'un call (T=1, r=5%, σ=20%).

7.2 Modèles de volatilité locale

Pour tenir compte de la surface de volatilité :

$$\partial_t \sigma - \kappa\, \partial_{SS}^2 \sigma + g(\sigma) = 0,$$

avec κ paramètre de diffusion et $g(\sigma)$ terme de réaction.

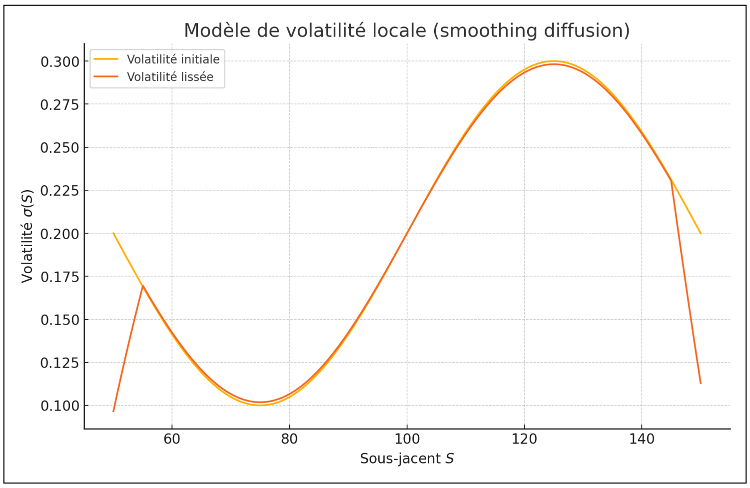

FIGURE 5 – Exemple de lissage d'une surface de volatilité locale par un terme diffusif.

8 Conclusion

Le modèle d'Allen–Cahn, par son couplage diffusion–réaction et son interprétation en gradient flow, offre un socle mathématique commun aux sciences des matériaux et à la finance. Sa simplicité formelle cache une grande richesse de comportements et d'applications.