МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

КУРСОВАЯ РАБОТА

Игра Хакенбуш

Студент: Меркулов Ф.А.

Группа 8О-105Б

Преподаватель: доц. Смерчинская С.О.

Оценка:

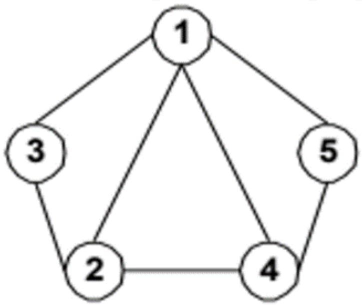
Дата: 26.04.2022

1. Определить для орграфа, заданного матрицей смежности:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

а) матрицу односторонней связности (2 способа, включая итерационный алгоритм);
б) матрицу сильной связности;
в) компоненты сильной связности;
г) матрицу контуров;
д) изображение графа и компонент сильной связности.

2. Используя алгоритм Терри, определить замкнутый маршрут, проходящий ровно по два раза (по одному в каждом направлении) через каждое ребро графа.



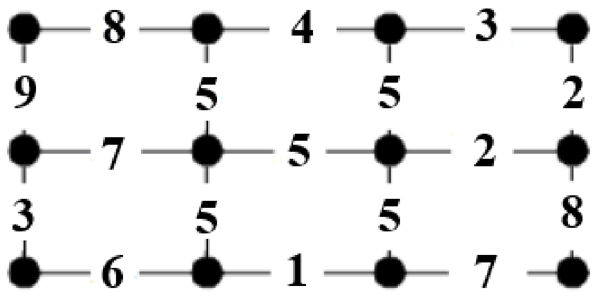
3. Используя алгоритм “фронта волны”, найти все минимальные пути из первой вершины в последнюю орграфа, заданного матрицей смежности.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

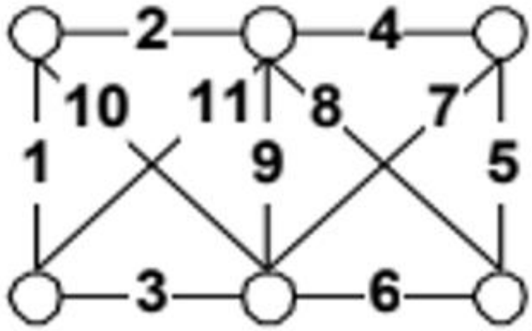
4. Используя алгоритм Форда, найти минимальные пути из первой вершины во все достижимые вершины в нагруженном графе, заданном матрицей длин дуг.

$$A = \begin{pmatrix} \infty & 3 & 5 & 6 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & \infty & 1 & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 5 & 1 & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 10 & \infty & 13 \\ 7 & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 2 \\ 6 & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 4 \\ 8 & \infty & \infty & 17 & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

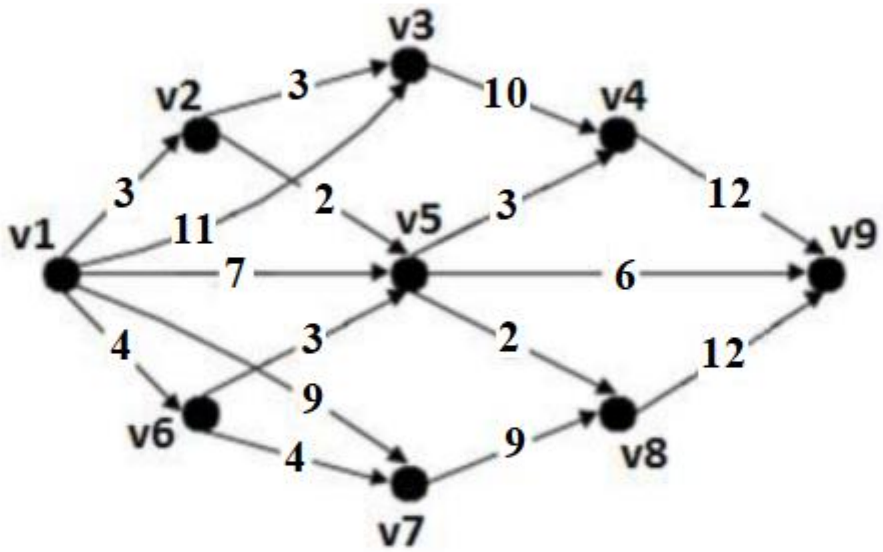
5. Найти остовное дерево с минимальной суммой длин входящих в него ребер.



6. Пусть каждому ребру неориентированного графа соответствует некоторый элемент электрической цепи. Составить линейно независимые системы уравнений Кирхгофа для токов и напряжений. Пусть первому и пятому ребру соответствуют источники тока с ЭДС $\boldsymbol{E_1}$ и $\boldsymbol{E_2}$ (полярность выбирается произвольно), а остальные элементы являются сопротивлениями. Используя закон Ома, и, предполагая внутренние сопротивления источников тока равными нулю, получить систему уравнений для токов.



7. Построить максимальный поток по транспортной сети.



№ 1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

а) Найдём матрицу односторонней связанности по формуле: $T = E \vee A \vee A^2 \vee A^3$.

$$T = E \vee A \vee A^2 \vee A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу односторонней связанности по итерационному алгоритму Уоршалла:

$$T^{(0)} = E \vee A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{(k)} = \left\| t_{ij}^{(k)} \right\|, \qquad t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} \vee (t_{ik}^{(k-1)} \,\&\, t_{kj}^{(k-1)})$$

$$T^{(1)} = \left\| t_{ij}^{(1)} \right\|, \qquad t_{ij}^{(1)} = t_{ij}^{(0)} \vee (t_{i1}^{(0)} \,\&\, t_{1j}^{(0)})$$

$$T^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{(2)} = \left\| t_{ij}^{(2)} \right\|, \qquad t_{ij}^{(2)} = t_{ij}^{(1)} \vee (t_{i2}^{(1)} \,\&\, t_{2j}^{(1)})$$

$$T^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{(3)} = \left\| t_{ij}^{(3)} \right\|, \qquad t_{ij}^{(3)} = t_{ij}^{(2)} \vee (t_{i3}^{(2)} \,\&\, t_{3j}^{(2)})$$

$$T^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$T^{(4)} = \left\|t_{ij}^{(4)}\right\|, \qquad t_{ij}^{(4)} = t_{ij}^{(3)} \vee (t_{i4}^{(3)} \,\&\, t_{4j}^{(3)})$

$$T^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$$

б) Матрица сильной связанности:$\bar{S} = T \,\&\, T^T$

$$\bar{S} = T \,\&\, T^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в) Компоненты сильной связанности

Выбираем первую строку, как ненулевую в матрице сильной связности

$$\overline{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Номера вершин первой компоненты сильной связности соответствуют номерам столбцов матрицы $\overline{S}$, в которых в первой строке стоят единицы:

$\{ v_1, v_3\}$.

1. Обнуляем первый, третий столбцы матрицы $\overline{S}$. Получаем матрицу:

$$\overline{S_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

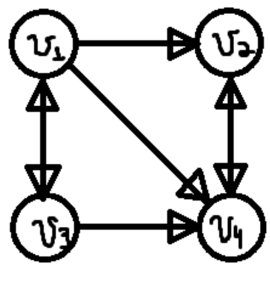
2. Ищем ненулевую строку матрицы $\overline{S_1}$: это вторую строка. Единицы две – во втором и в четвёртом столбцах третьем. Следовательно, вторая компонента сильной связности: $\{v_2, v_4\}$.
3. Обнуляем второй и четвёртый столбцы матрицы $\overline{S_1}$, получаем нулевую матрицу. Следовательно, других компонент сильной связности нет.

г) Матрица контуров: $К = \bar{S} \,\&\, A$

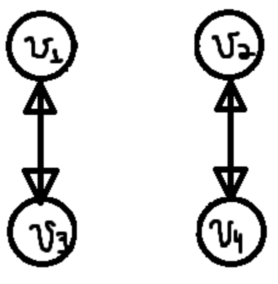
$$К = \bar{S} \,\&\, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

д) Изображение графа и компонент сильной связанности.

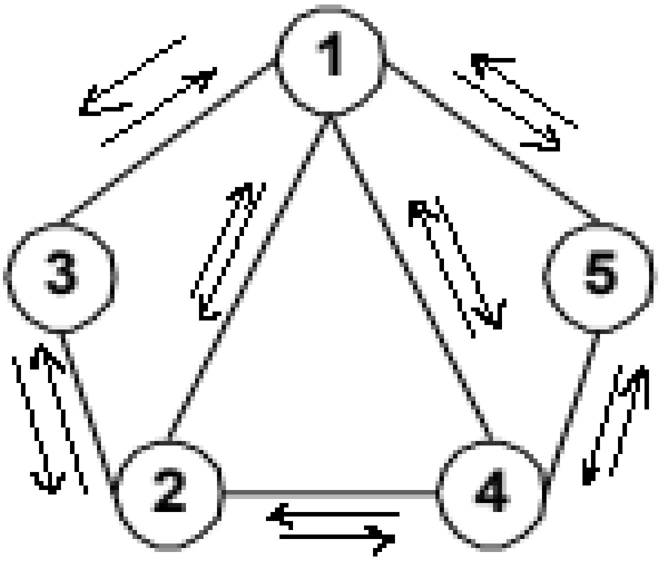
Изображение графа:



Изображение компонент сильной связанности:



№ 2



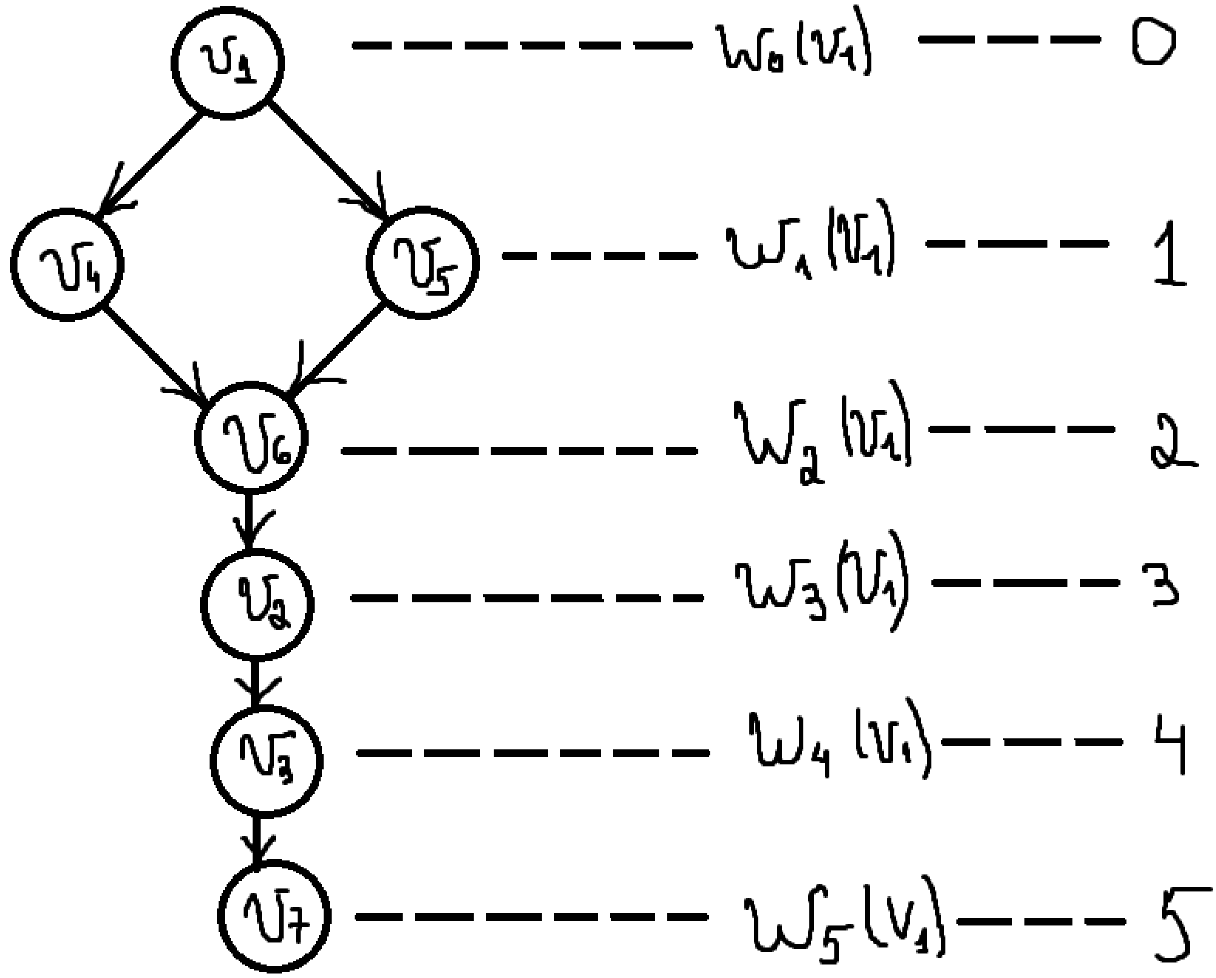
Маршрут обхода:

1→5→4→2→3→1→2→4→1→3→2→1→4→5→1

№ 3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Помечаем вершину v индексом 0. Вершина v_1 принадлежит фронту волны нулевого уровня $W_0(v_1)$.
2. Вершины из множества $\Gamma v_i = \Gamma W_0(v_1) = \{v_4, v_5\}$ (соответствуют единицам в первой строке матрицы А) помечаем индексом 1, они принадлежат фронту волны первого уровня $W_1(v_1)$.
3. Непомеченные ранее вершины из множества $\Gamma W_1(v_1) = \Gamma\{v_4, v_5\} = \{v_6\}$ (соответствуют единицам в четвертой и пятой строках матрицы А) помечаем индексом 2, они принадлежат фронту волны второго уровня $W_2(v_1)$.
4. Непомеченные ранее вершины из множества $\Gamma W_2(v_1) = \Gamma\{v_6\} = \{v_2\}$ (соответствуют единицам в шестой строке матрицы А) помечаем индексом 3, они принадлежат фронту волны третьего уровня $W_3(v_1)$.
5. Непомеченные ранее вершины из множества $\Gamma W_3(v_1) = \Gamma\{v_2\} = \{v_3\}$ (соответствуют единицам во второй строке матрицы А) помечаем индексом 4, они принадлежат фронту волны четвёртого уровня $W_4(v_1)$.
6. Непомеченные ранее вершины из множества $\Gamma W_4(v_1) = \Gamma\{v_3\} = \{v_7\}$ (соответствуют единицам в третьей строке матрицы А) помечаем индексом 5, они принадлежат фронту волны пятого уровня $W_5(v_1)$.
7. Вершина v_7 достигнута, помечена индексом 5, следовательно, длина кратчайшего пути изv_1 в v_7 равна пяти.



Промежуточные вершины кратчайших путей находятся согласно приведенным формулам (начинаем с последней вершины пути):

1) v_7
2) $W_4(v_1) \cap \Gamma^{-1}v_7 = \{v_3\} \cap \{v_3\} = \{v_3\}$
3) $W_3(v_1) \cap \Gamma^{-1}v_3 = \{v_2\} \cap \{v_2, v_4, v_5, v_6\} = \{v_2\}$
4) $W_2(v_1) \cap \Gamma^{-1}v_2 = \{v_6\} \cap \{v_3, v_6, v_7\} = \{v_6\}$
5) $W_1(v_1) \cap \Gamma^{-1}v_6 = \{v_4, v_5\} \cap \{v_2, v_4, v_5, v_7\} = \{v_4, v_5\}$

6.1) $W_0(v_1) \cap \Gamma^{-1}v_4 = \{v_1\} \cap \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6\} = \{v_1\}$

6.2) $W_0(v_1) \cap \Gamma^{-1}v_5 = \{v_1\} \cap \{v_1, v_3, v_4, v_7\} = \{v_1\}$

Кратчайших путей два:

1) $v_1 - v_4 - v_6 - v_2 - v_3 - v_7$
2) $v_1 - v_5 - v_6 - v_2 - v_3 - v_7$

№ 4

$$A = \begin{pmatrix} \infty & 3 & 5 & 6 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & \infty & 1 & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 5 & 1 & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 10 & \infty & 13 \\ 7 & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 2 \\ 6 & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 4 \\ 8 & \infty & \infty & 17 & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

1) Составим таблицу итераций:

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	$\lambda_i^{(0)}$	$\lambda_i^{(1)}$	$\lambda_i^{(2)}$	$\lambda_i^{(3)}$	$\lambda_i^{(4)}$	$\lambda_i^{(5)}$	$\lambda_i^{(6)}$	$\lambda_i^{(7)}$
V_1	∞	3	5	6	∞	∞	∞	∞	0	0	0	0	0	0	0	0
V_2	4	∞	1	4	∞	∞	∞	∞	∞	3	3	3	3	3	3	3
V_3	5	1	∞	∞	7	∞	∞	∞	∞	5	4	4	4	4	4	4
V_4	∞	∞	∞	∞	3	10	∞	13	∞	6	6	6	6	6	6	6
V_5	7	∞	∞	3	∞	∞	5	∞	∞	∞	9	9	9	9	9	9
V_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞	1	2	∞	∞	16	16	15	15	15	15
V_7	6	∞	∞	∞	∞	1	∞	4	∞	∞	∞	14	14	14	14	14
V_8	8	∞	∞	17	∞	∞	∞	∞	∞	∞	19	18	18	17	17	17

2) Длины минимальных путей из вершины v_1 во все остальные вершины определены в последнем столбце таблицы.

3) Найдем вершины, входящие в минимальные пути из v_1 во все остальные вершины графа.

3.1) Минимальный путь из v_1 в v_2: $v_1 - v_2$, его длина равна 3.

$$\lambda_1^{(0)} + c_{12} = 0 + 3 = \lambda_2^{(1)}$$

3.2) Минимальный путь из v_1 в v_3: $v_1 - v_2 - v_3$, его длина равна 4.

$$\lambda_2^{(1)} + c_{23} = 3 + 1 = \lambda_3^{(2)}$$

3.3) Минимальный путь из v_1 в v_4: $v_1 - v_4$, его длина равна 6.

$$\lambda_1^{(0)} + c_{14} = 0 + 6 = \lambda_4^{(1)}$$

3.4) Минимальный путь из v_1 в v_5: $v_1 - v_4 - v_5$, его длина равна 9.

$$\lambda_4^{(1)} + c_{45} = 6 + 3 = \lambda_5^{(2)}$$

3.5) Минимальный путь из v_1 в v_6: $v_1 - v_4 - v_5 - v_7 - v_6$, его длина равна 15.

$$\lambda_7^{(3)} + c_{76} = 14 + 1 = \lambda_6^{(4)}$$

$$\lambda_5^{(2)} + c_{57} = 9 + 5 = \lambda_7^{(3)}$$

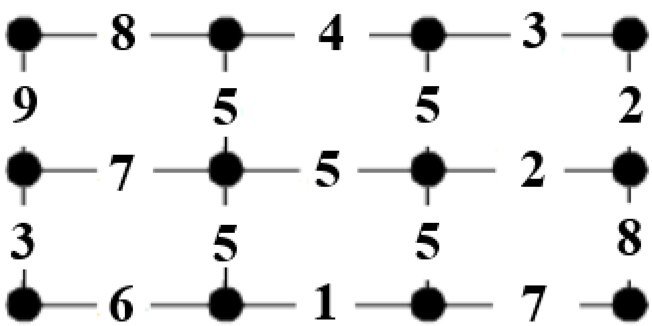
3.6) Минимальный путь из v_1 в v_7: $v_1 - v_4 - v_5 - v_7$, его длина равна 14.

$$\lambda_5^{(2)} + c_{57} = 9 + 5 = \lambda_7^{(3)}$$

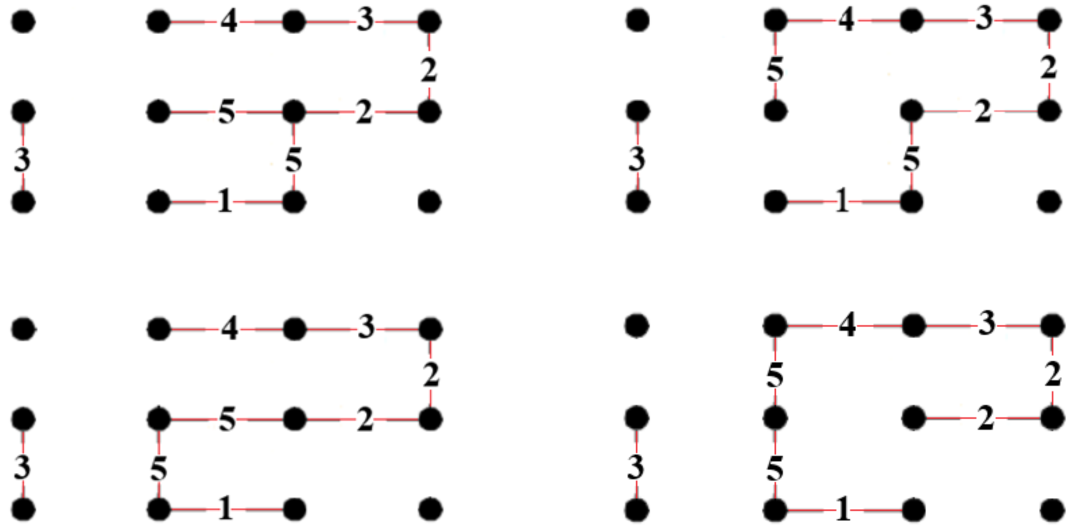
3.7) Минимальный путь из v_1 в v_8: $v_1 - v_4 - v_5 - v_7 - v_6 - v_7$, его длина равна 17.

$$\lambda_6^{(4)} + c_{68} = 15 + 2 = \lambda_8^{(5)}$$

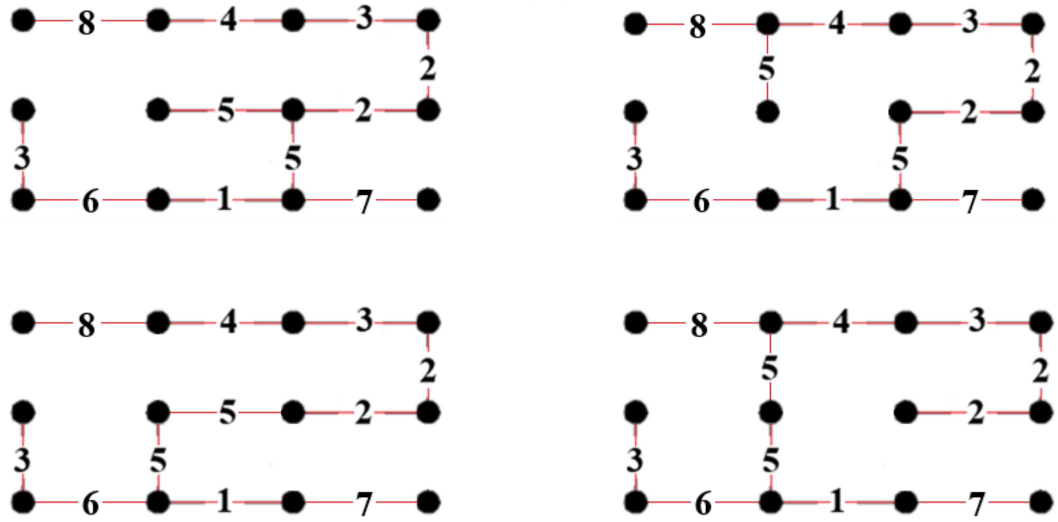
№ 5



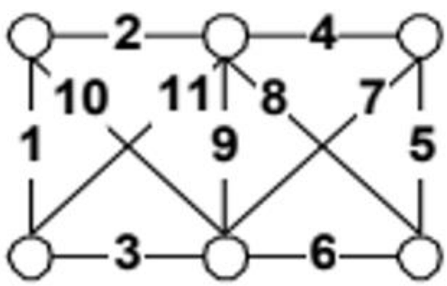
1) Выбираем все вершины графа.
2) Добавляем все дуги, имеющие минимальный вес – 1. Циклов нет.
3) Добавляем все дуги, имеющие минимальный вес среди оставшихся – 2. Циклов нет.
4) Добавляем все дуги, имеющие минимальный вес среди оставшихся – 3. Циклов нет.
5) Добавляем все дуги, имеющие минимальный вес среди оставшихся – 4. Циклов нет.
6) Добавляем все дуги, имеющие минимальный вес среди оставшихся – 5, так чтобы не было циклов. Получаем четыре возможных варианта:



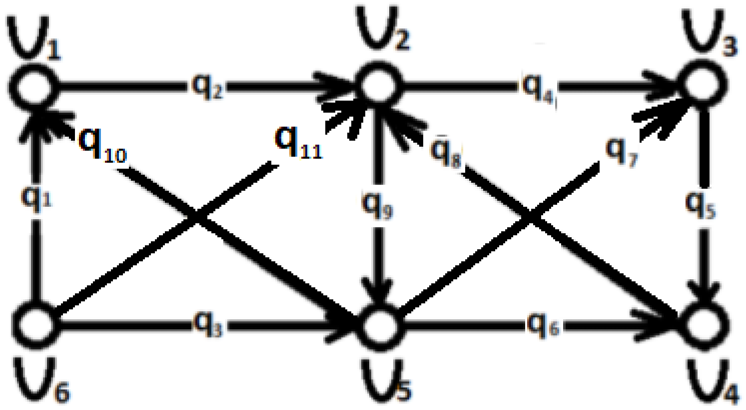
7) Добавляем все дуги, имеющие минимальный вес среди оставшихся – 6. Циклов нет.
8) Добавляем все дуги, имеющие минимальный вес среди оставшихся – 7, так чтобы не было циклов.
9) Добавляем все дуги, имеющие минимальный вес среди оставшихся – 8, так чтобы не было циклов. Получаем четыре возможных остовных деревьев минимального веса. Минимальный вес остовного дерева $L(D) = 46$.



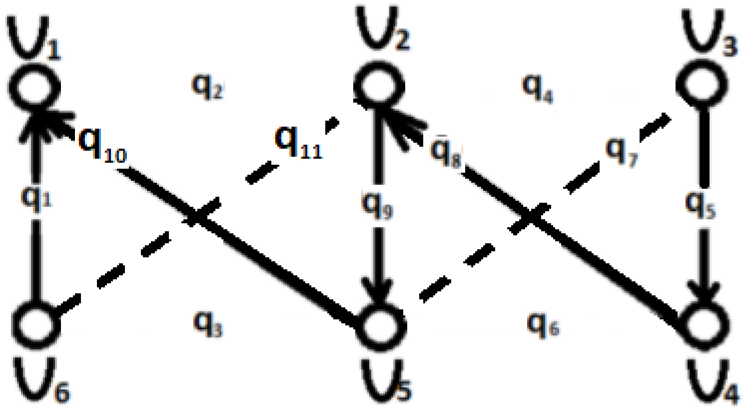
№ 6



1) Зададим на графе произвольную ориентацию:



2) Построим произвольное остовное дерево D заданного графа:



3) Найдем базис циклов, добавляя к остовному дереву по одному не вошедшему в него ребру. Затем найдем соответствующие вектор-циклы:

$(D+q_2)\colon \mu_1\colon v_1 - v_2 - v_5 - v_1 \quad \Rightarrow C(\mu_1) = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0)$

$(D+q_{11})\colon \mu_2\colon v_6 - v_2 - v_5 - v_1 - v_6 \Rightarrow C(\mu_2) = (-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$

$(D+q_3)\colon \mu_3\colon v_6 - v_5 - v_1 - v_6 \quad \Rightarrow C(\mu_3) = (-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$

$(D+q_4)\colon \mu_4\colon v_2 - v_3 - v_4 - v_2 \quad \Rightarrow C(\mu_4) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$

$(D+q_7)\colon \mu_5\colon v_5 - v_3 - v_4 - v_2 - v_5 \Rightarrow C(\mu_5) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$

$(D+q_6)\colon \mu_6\colon v_5 - v_4 - v_2 - v_5 \quad \Rightarrow C(\mu_6) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$

4) Цикломатическая матрица графа имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5) Выпишем закон Кирхгова для напряжений:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \end{pmatrix} = 0$$

Напряжения, соответствующие ребрам, не вошедшим в остовное дерево – базисные переменные системы:

$$\begin{cases} u_2 + u_9 + u_{10} = 0 \\ -u_1 + u_9 + u_{10} + u_{11} = 0 \\ -u_1 + u_3 + u_{10} = 0 \\ u_4 + u_5 + u_8 = 0 \\ u_5 + u_7 + u_8 + u_9 = 0 \\ u_6 + u_8 + u_9 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = -u_9 - u_{10} \\ u_{11} = u_1 - u_9 - u_{10} \\ u_3 = u_1 - u_{10} \\ u_4 = -u_5 - u_8 \\ u_7 = -u_5 - u_8 - u_9 = 0 \\ u_6 = -u_8 - u_9 \end{cases}$$

6) Выпишем закон Кирхгова для токов:
7) Выпишем уравнения Кирхгофа для токов.

Найдём матрицу инцидентности B орграфа:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	q_{11}
v_1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
v_2	0	1	0	-1	0	0	0	1	-1	0	1
v_3	0	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	0
v_4	0	0	0	0	1	1	0	-1	0	0	0
v_5	0	0	1	0	0	-1	-1	0	1	-1	0
v_6	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	-1

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \\ I_{10} \\ I_{11} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_{10} = 0 \\ I_2 - I_4 + I_8 - I_9 + I_{11} = 0 \\ I_4 - I_5 + I_7 = 0 \\ I_5 + I_6 - I_8 = 0 \\ I_3 - I_6 - I_7 + I_9 - I_{10} = 0 \\ -I_1 - I_3 - I_{11} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_1 - I_2 + I_{10} = 0 \\ I_2 - I_4 + I_8 - I_9 + I_{11} = 0 \\ I_4 - I_5 + I_7 = 0 \\ I_5 + I_6 - I_8 = 0 \\ -I_1 - I_3 - I_{11} = 0 \end{cases}$$

8) Подставим закон Ома:

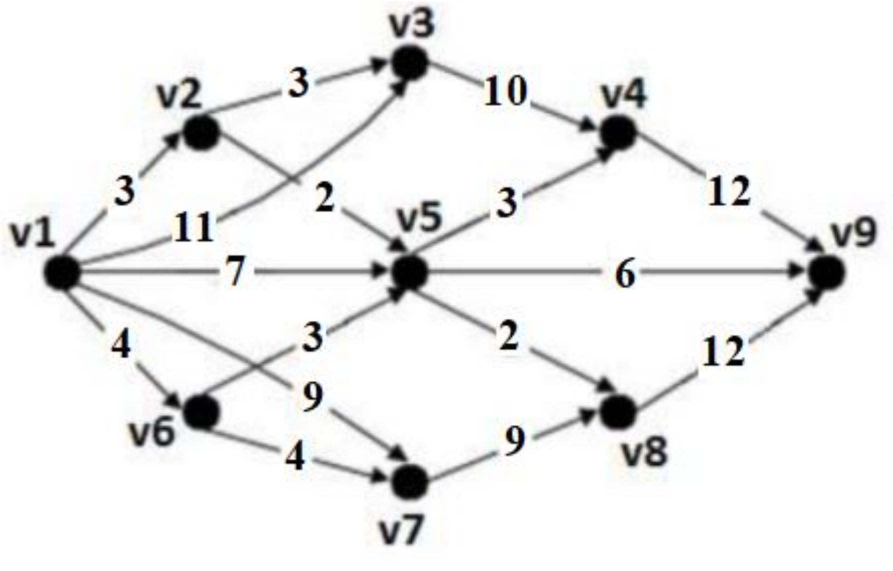
$$\begin{cases} I_2R_2 + I_9R_9 + I_{10}R_{10} = 0 \\ E_1 = I_9R_9 + I_{10}R_{10} + I_{11}R_{11} \\ E_1 = I_3R_3 + I_{10}R_{10} \\ E_2 = -I_4R_4 - I_8R_8 \\ E_2 = -I_7R_7 - I_8R_8 - I_9R_9 \\ I_6R_6 + I_8R_8 + I_9R_9 = 0 \end{cases}$$

9) Совместная система имеет вид:

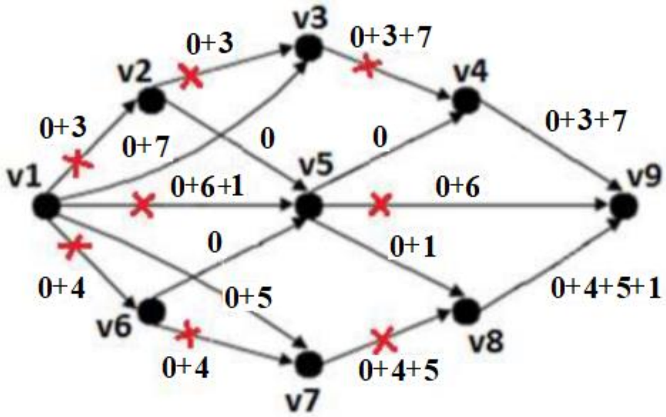
$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_{10} = 0 \\ I_2 - I_4 + I_8 - I_9 + I_{11} = 0 \\ I_4 - I_5 + I_7 = 0 \\ I_5 + I_6 - I_8 = 0 \\ -I_1 - I_3 - I_{11} = 0 \\ I_2R_2 + I_9R_9 + I_{10}R_{10} = 0 \\ E_1 = I_9R_9 + I_{10}R_{10} + I_{11}R_{11} \\ E_1 = I_3R_3 + I_{10}R_{10} \\ E_2 = -I_4R_4 - I_8R_8 \\ E_2 = -I_7R_7 - I_8R_8 - I_9R_9 \\ I_6R_6 + I_8R_8 + I_9R_9 = 0 \end{cases}$$

Одиннадцать уравнений и одиннадцать неизвестных – токи $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8, I_9, I_{10}, I_{11}$; ЭДС E_1, E_2 и сопротивления $R_2, R_3, R_4, R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10}, R_{11}$ известны.

№ 7



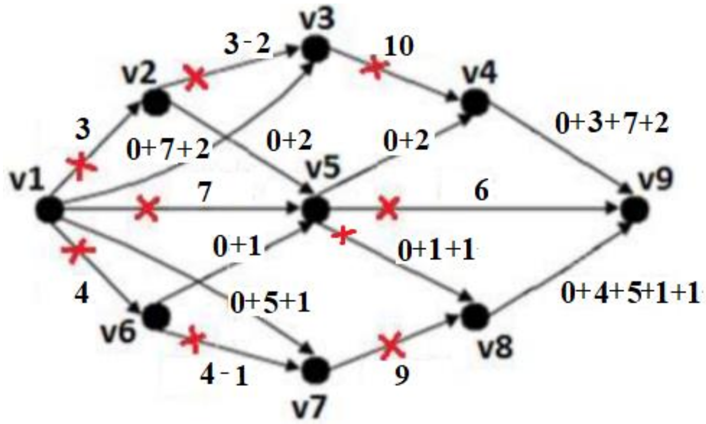
1) Построение полного потока. Ищем пути из источника в сток, не содержащие насыщенных дуг.



1. $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_9$
   $\min\{3; 3; 10; 12\} = 3$
2. $v_1 - v_6 - v_7 - v_8 - v_9$
   $\min\{4; 4; 9; 12\} = 4$
3. $v_1 - v_5 - v_9$
   $\min\{7; 6\} = 6$
4. $v_1 - v_3 - v_4 - v_9$
   $\min\{11; 10 - 3; 12 - 3\} = 7$
5. $v_1 - v_7 - v_8 - v_9$
   $\min\{9; 9 - 4; 12 - 4\} = 5$
6. $v_1 - v_5 - v_8 - v_9$
   $\min\{7 - 6; 2; 12 - 9\} = 1$

   Величина полного потока $Ф_{пол.}$ = 3+4+6+7+5+1 = 26.

2) Построение максимального потока.



Найдем увеличивающие цепи.

1. $v_1 - v_3 - v_2 - v_5 - v_4 - v_9$
   $\Delta_1 = \min\{11 - 7; \underline{3}; 2; 3; 12 - 10\} = 2$
2. $v_1 - v_7 - v_6 - v_5 - v_8 - v_9$
   $\Delta_2 = \min\{9 - 5; \underline{4}; 3; 2 - 1; 12 - 10\} = 1$

Величина потока увеличилась на 3 (2+1): величина максимального потока $Ф_{макс.} = 12 + 6 + 11 = 29$

№ 8

Основные понятия и определения по теме.

Определение 1. Будем называть игрой (возможно, бесконечное) множество G («позиции») вместе с выделенным элементом g_0 («начальная позиция») и зафиксированными для каждой позиции $g \in G$ двумя подмножествами g^L , $g^R \subset G$ («допустимые ходы Левого и Правого из позиции g»). При этом потребуем ещё, чтобы любая цепочка допустимых ходов имела конечную длину (в частности, не существует циклов из разрешённых ходов). Два игрока играют в такую игру, начиная с начальной позиции и каждый раз делая по допустимому ходу; проигрывает тот, кто не может сделать ход. Последнее условие в определении игры гарантирует, что с какой бы позиции мы ни начинали, партия завершается за конечное время.

Определение 2. Игра g — это два множества:

$$g^L = \{g_1^L, g_2^L, \dots\} \text{ и } g^R = \{g_1^R, g_2^R, \dots\},$$

состоящие из игр; мы будем также писать

$$g = \{g_1^L, g_2^L, \dots | g_1^R, g_2^R, \dots\}.$$

Играют двое, Левый и Правый. Ход состоит в том, что игрок выбирает одну из игр из множества g^L (если это Левый игрок) или g^R (если это Правый игрок) и передаёт её противнику (дальше тот берёт эту игру и делает ход аналогичным образом и т. д.). Тот, кто не может сделать ход, проигрывает.

Такое рекурсивное определение выглядит парадоксально: мы определяем понятие игры, используя понятие игры. Понимать это нужно так: мы называем играми то, что в силу этого определения не можем не считать играми. Например, $g = \{|\}$ является игрой: множества g^L и g^R пусты, так что все их элементы являются играми. Значит, $\{\{|\}|\}$ и $\{|\{|\}\}$ являются играми и т. д.

Это определение, на самом деле, довольно тонкое. Существуют игры с бесконечным числом позиций, построение которых требует «бесконечного числа итераций» описанной конструкции.

Игра Хакенбуш

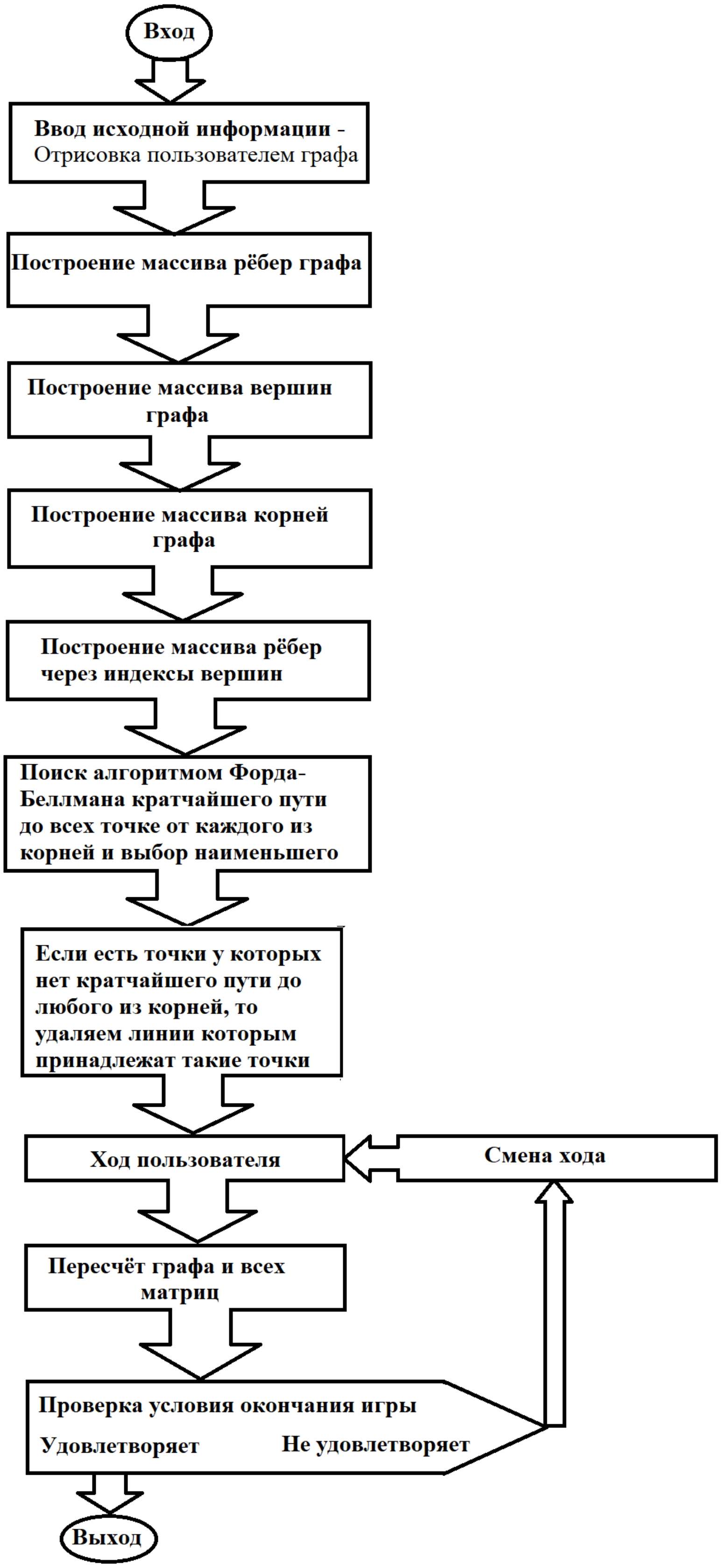
Правила (Хакенбуш).

Позиции: граф, рёбра которого раскрашены в синий, красный, зелёный цвета, а некоторые из вершин объявлены находящимися на земле, причём от каждого из рёбер можно дойти до земли.

Ходы: Левый перерезает произвольное синее или зелёное ребро, при этом все остальные рёбра, которые перестают быть связанными с землёй, исчезают; Правый перерезает красное или зелёное ребро, при этом все остальные рёбра, которые перестают быть связанными с землёй, исчезают.

Логическая блок-схема алгоритма

Основные этапы работы алгоритма представлены на рисунке логической блок схемы.



Программа написана на движке Unity 3D, в результате чего она имеет ряд интересных технических особенностей. Программа работает с объектами, из которых мы получаем все необходимые нам данные. Это позволяет в начале отрисовать объектами, а потом взаимодействовать с ними.

Описание программы и инструкции работы с ней

Программа позволяет пользователю создать неориентированный граф, а также его модифицировать, после чего человеку даётся возможность сыграть в игру “Хакенбуш” на построенном им же графе.

Инструкция:

Пользователь для работы с программой может использовать панель инструментов, на которой имеются:

1)”Карандаш”, который позволяет пользователю рисовать любые кривые линии

2)”Прямая”, которая позволяет пользователю нарисовать любую прямую линию

3)”Ластик”, который позволяет пользователю удалить нарисованный объект

4)”Красный цвет”, который позволяет перекрасить любую линию в красный цвет (нужен для того, чтобы пометить рёбра, которые не сможет удалить синий (второй) игрок)

5)”Синий цвет”, который позволяет перекрасить любую линию в синий цвет (нужен для того, чтобы пометить рёбра, которые не сможет удалить красный (первый) игрок)

6)”Зелёный цвет”, который позволяет перекрасить любую линию в зелёный цвет (хоть первоначально линии и зелёного цвета, но эта кнопка нужна для того, чтобы у человека была возможность вернуть ребру первоначальный цвет (зелёный цвет могут удалить оба игрока))

7)”Фиолетовый цвет”, который позволяет перекрасить любую линию в фиолетовый цвет (нужен для того, чтобы корни могли располагаться не только на земле (фиолетовый цвет не могут удалить оба игрока))

8)кнопка ”Очистить”, которая позволяет удалить все объекты разом

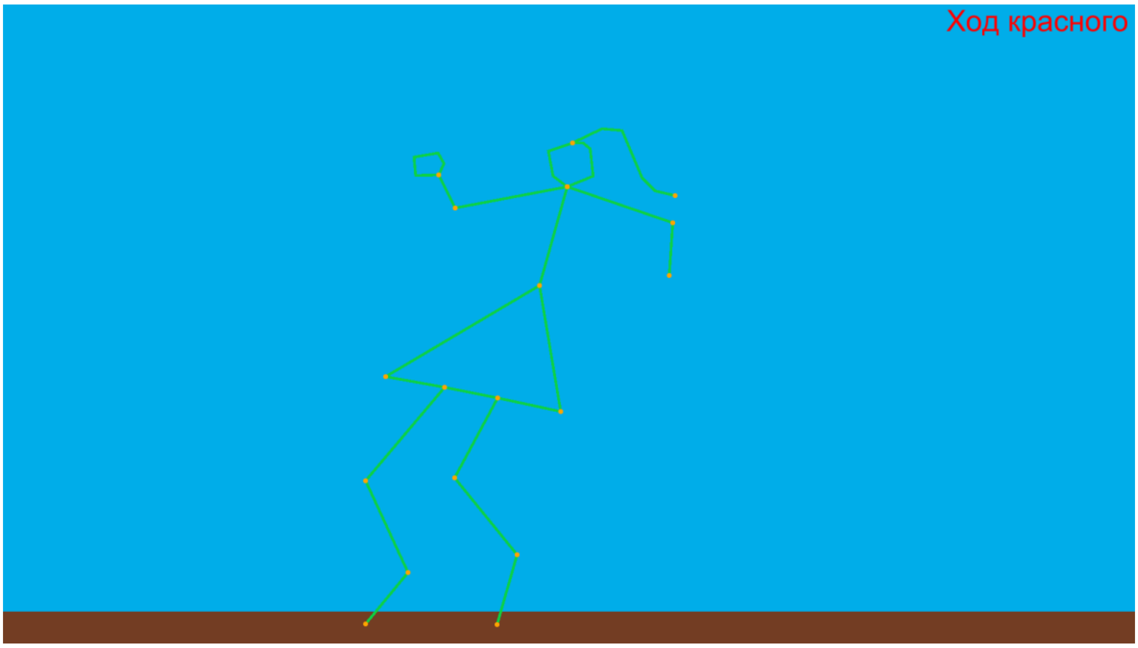
9)кнопка “Начать”, которая позволяет начать игру “Хакенбуш”

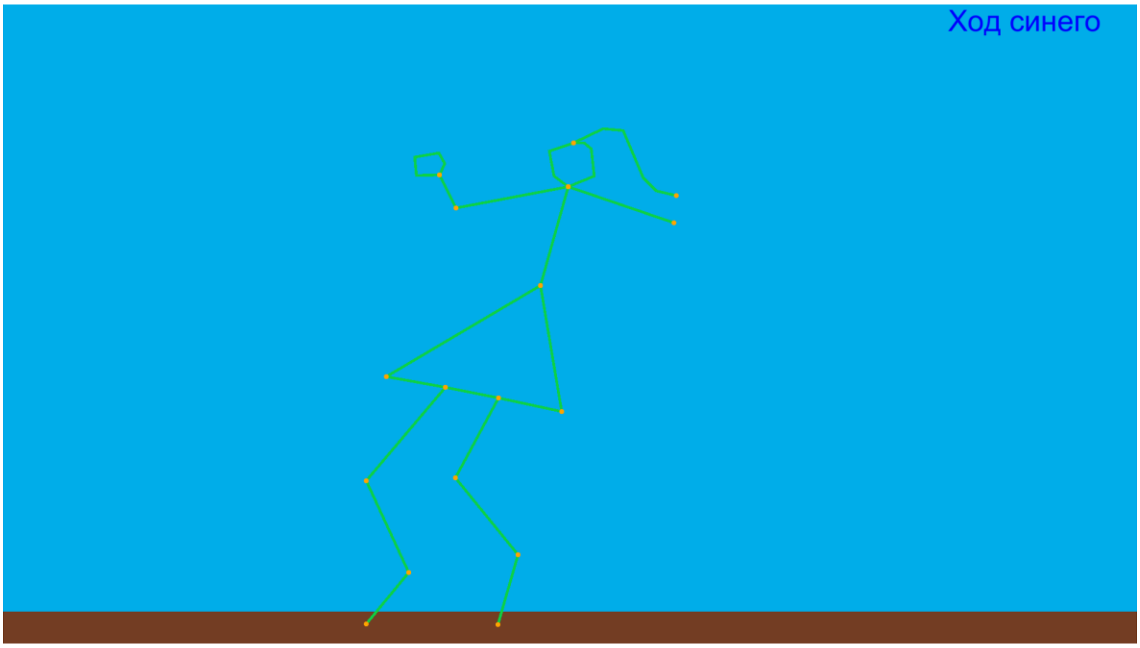
Оценка сложности алгоритма.

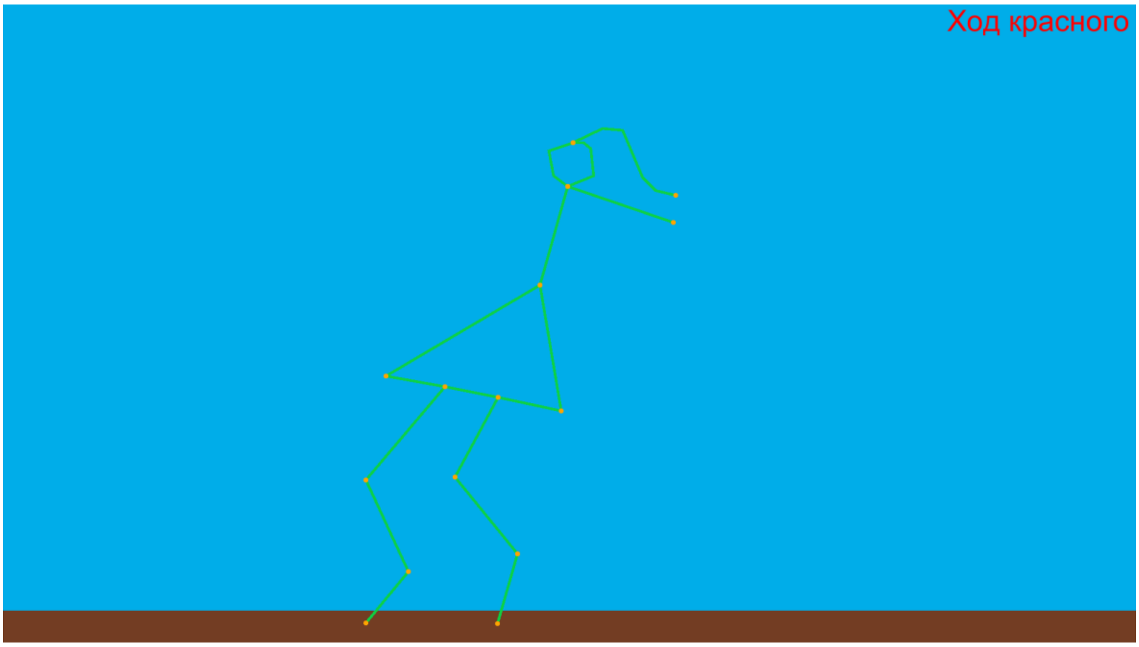
Наибольшую сложность имеет подпрограмма нахождения кратчайшего пути от корней до любых вершин графа, а именно алгоритм Форда-Беллмана нахождения кратчайшего пути во взвешенном графе – $O(n \cdot m \cdot k)$ (n – число вершин графа, m – число рёбер графа, k – число корней графа), что соответствует максимальному числу вложенных циклов в программе – три.

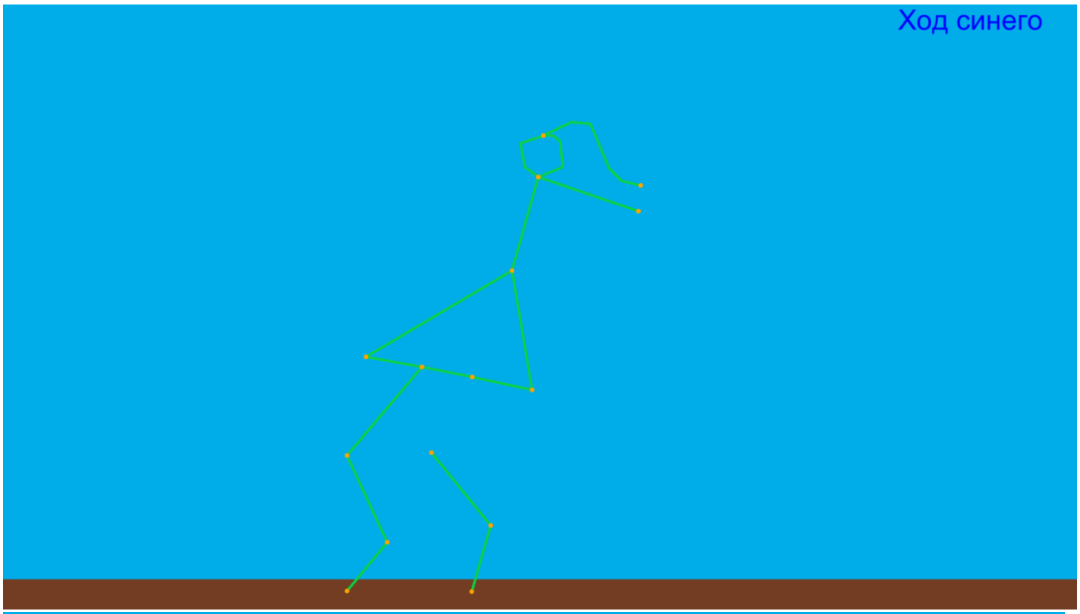
Тестовые примеры. Скриншоты программы

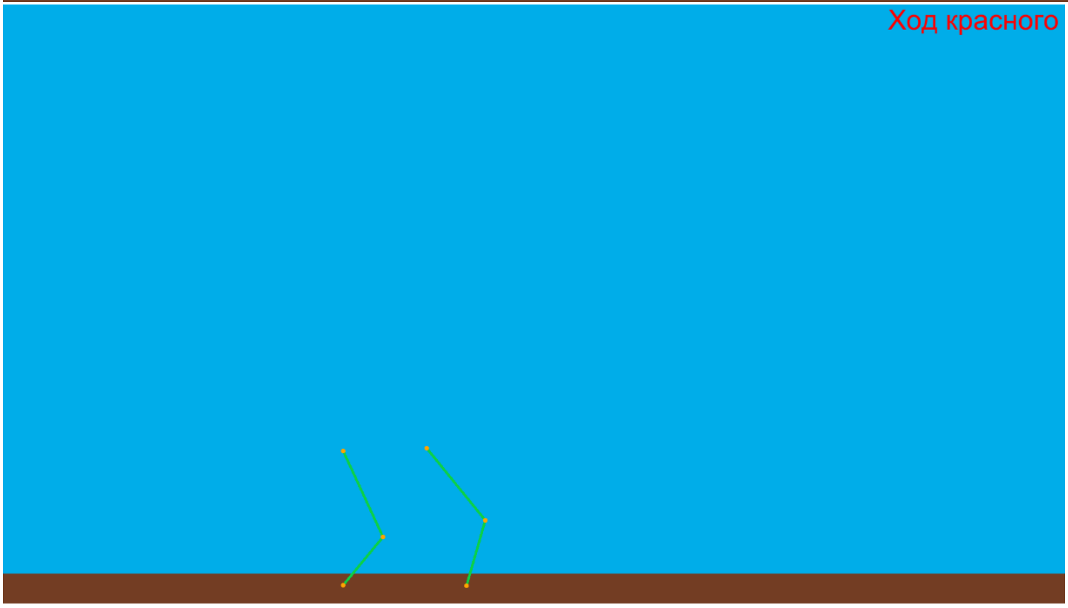
Пример 1. ***Оригинальный Хакенбуш:*** Все отрезки линии одного цвета и могут быть разрезаны любым игроком

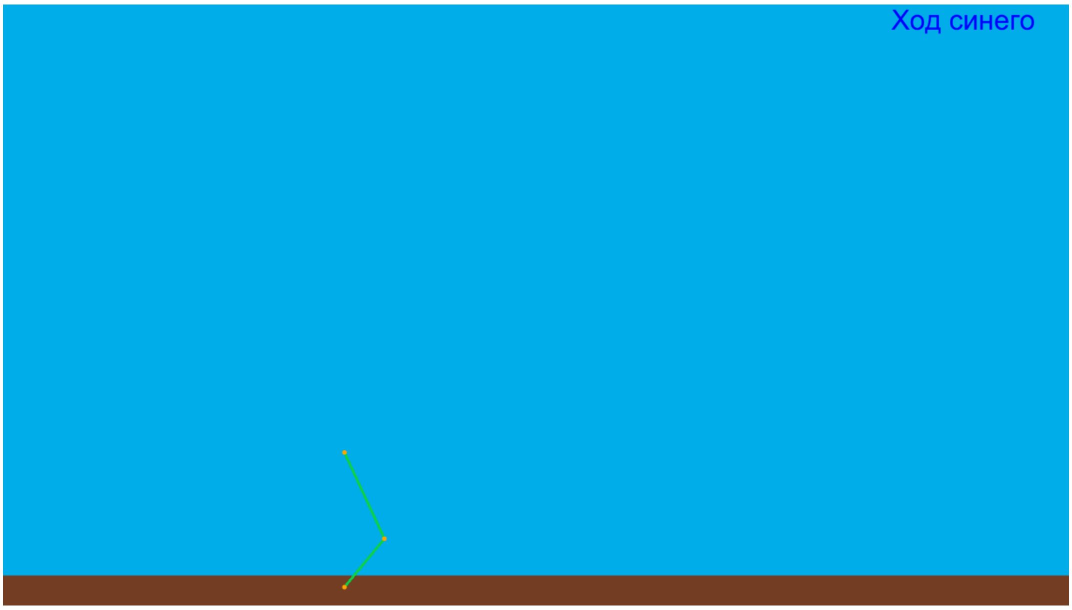

Ход красного

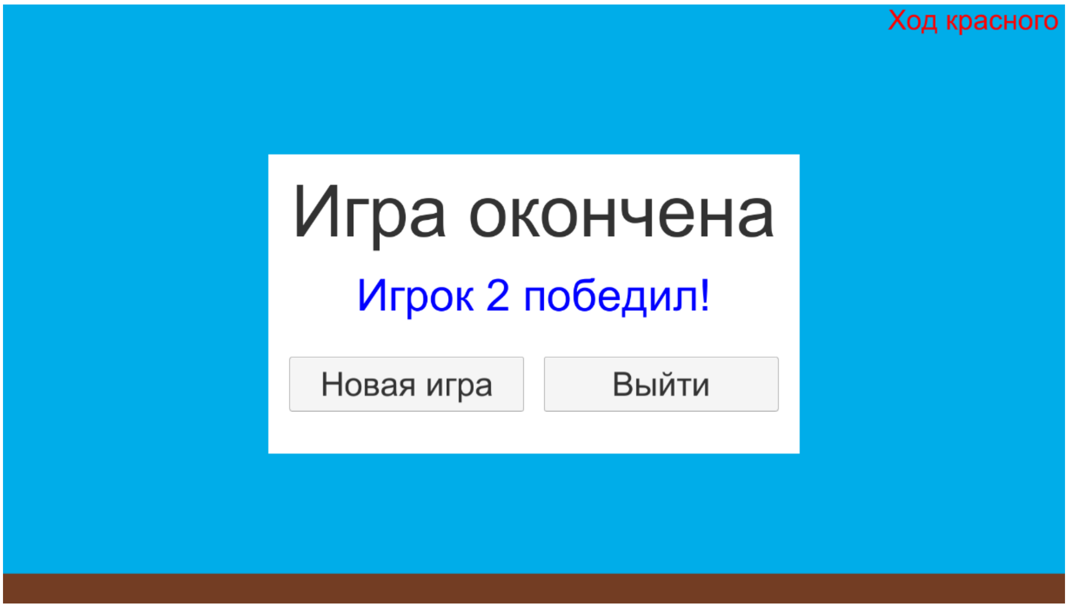

Ход синего


Ход красного

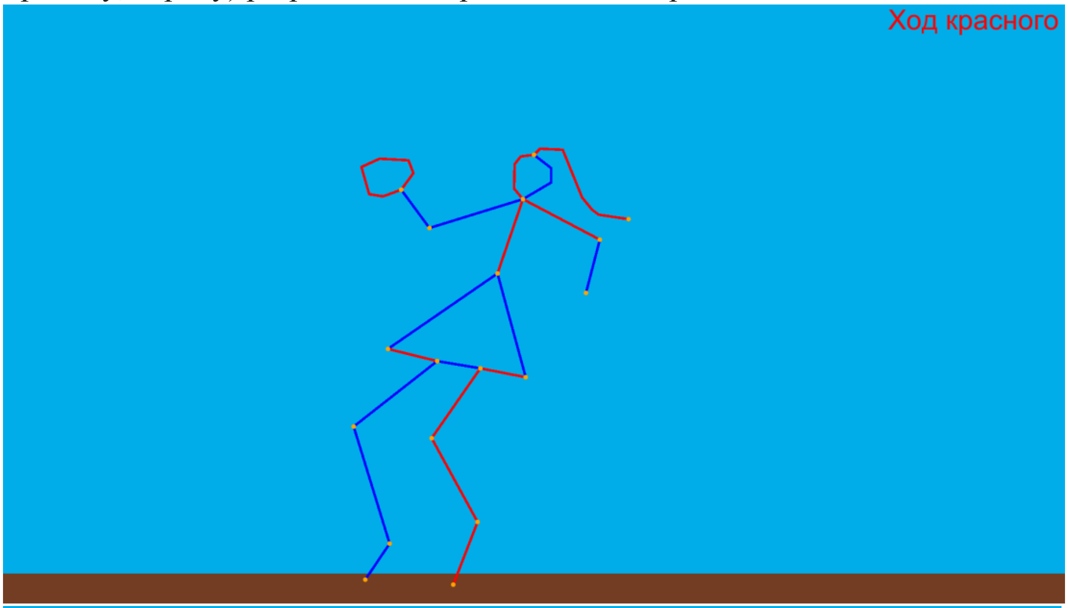

Ход синего

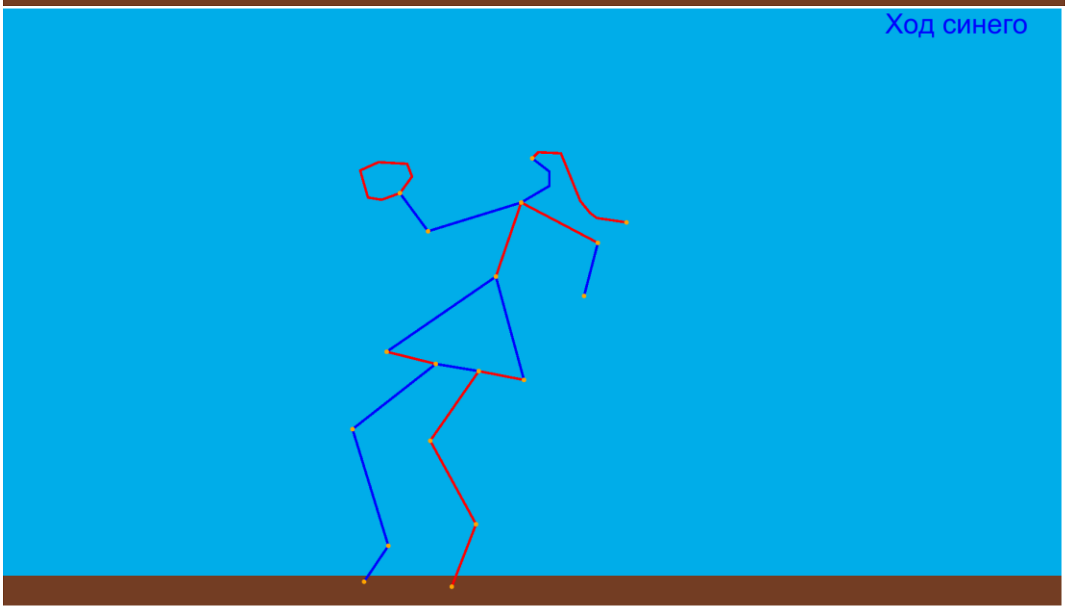

Ход красного

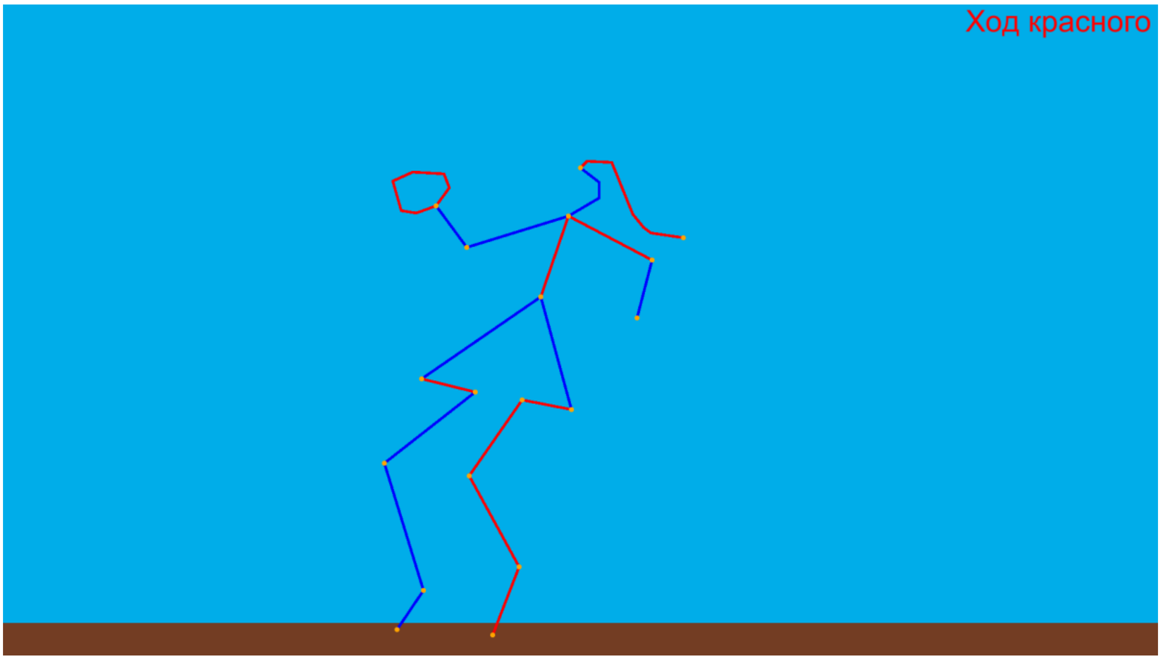

Ход синего

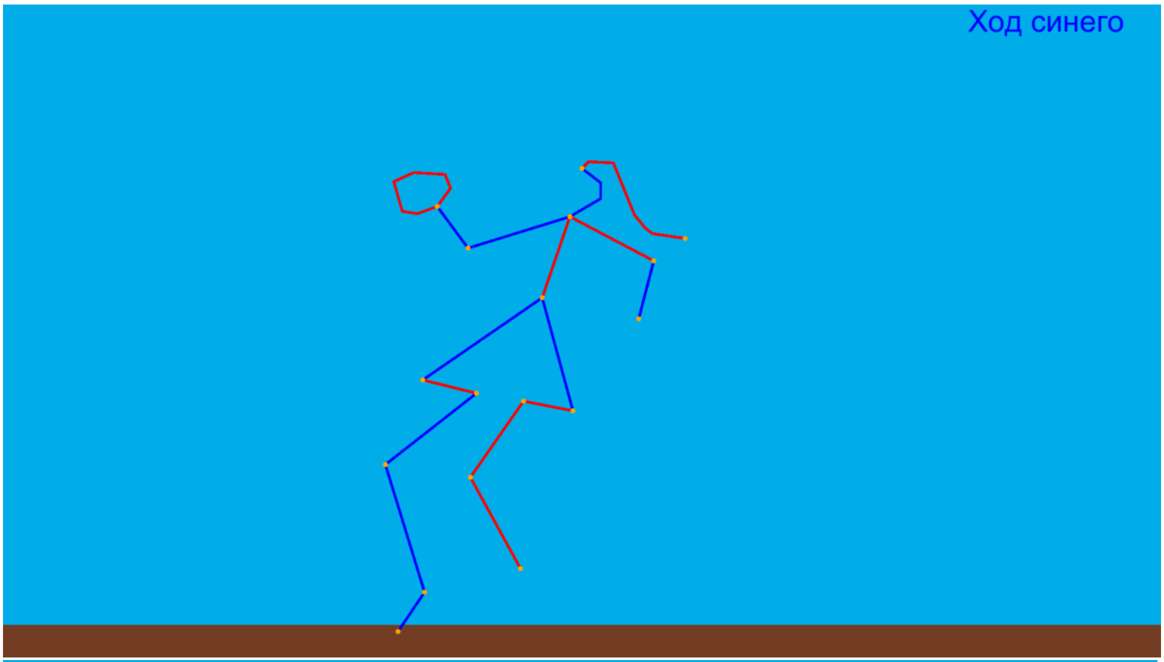


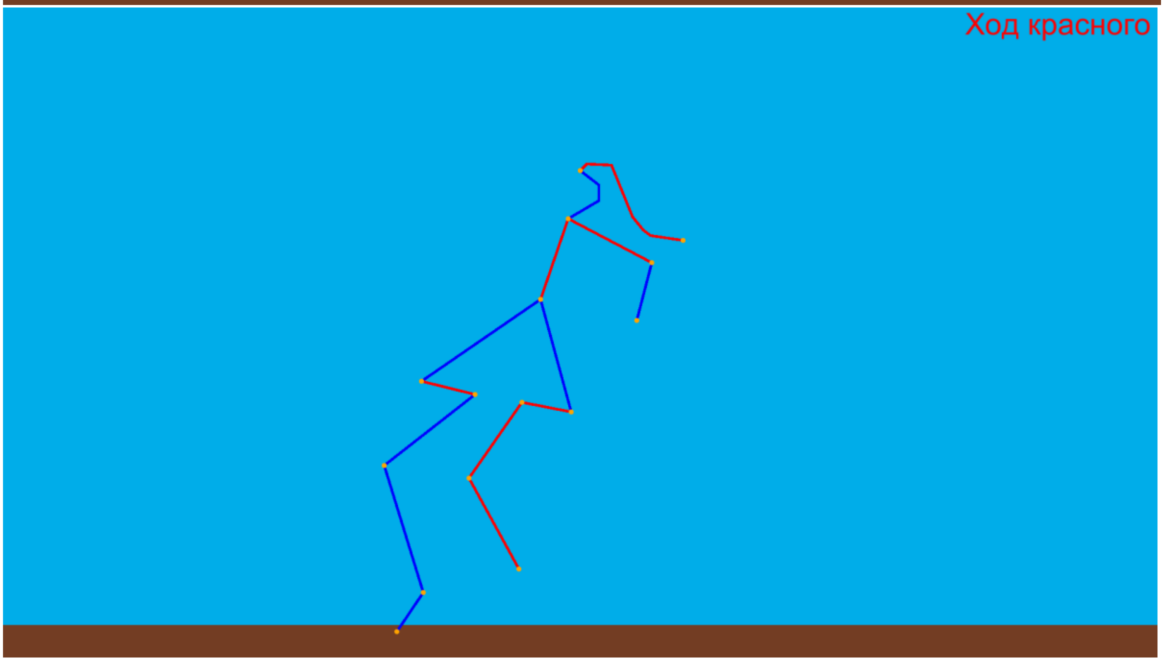
Пример 2. ***Сине-красный Хакенбуш***: каждый отрезок линии окрашен в красный или синий цвет. Одному игроку (обычно первому, или левому, игроку) разрешается вырезать только синие сегменты линии, в то время как другому игроку (обычно второму, или правому, игроку) разрешается вырезать только красные сегменты линии.

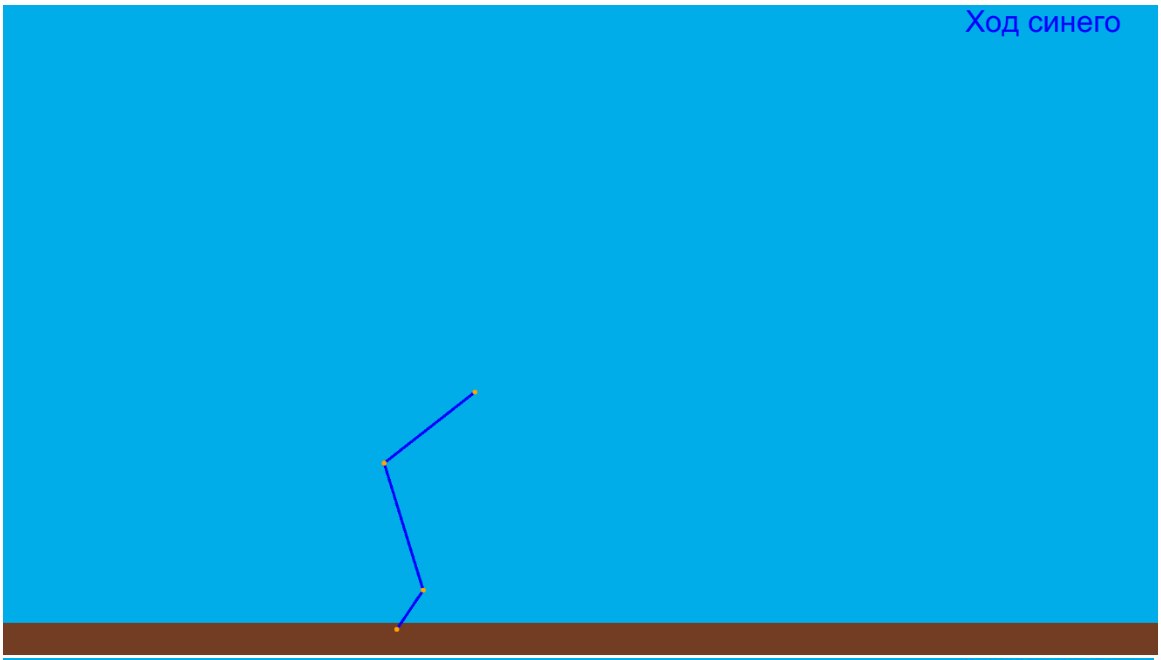


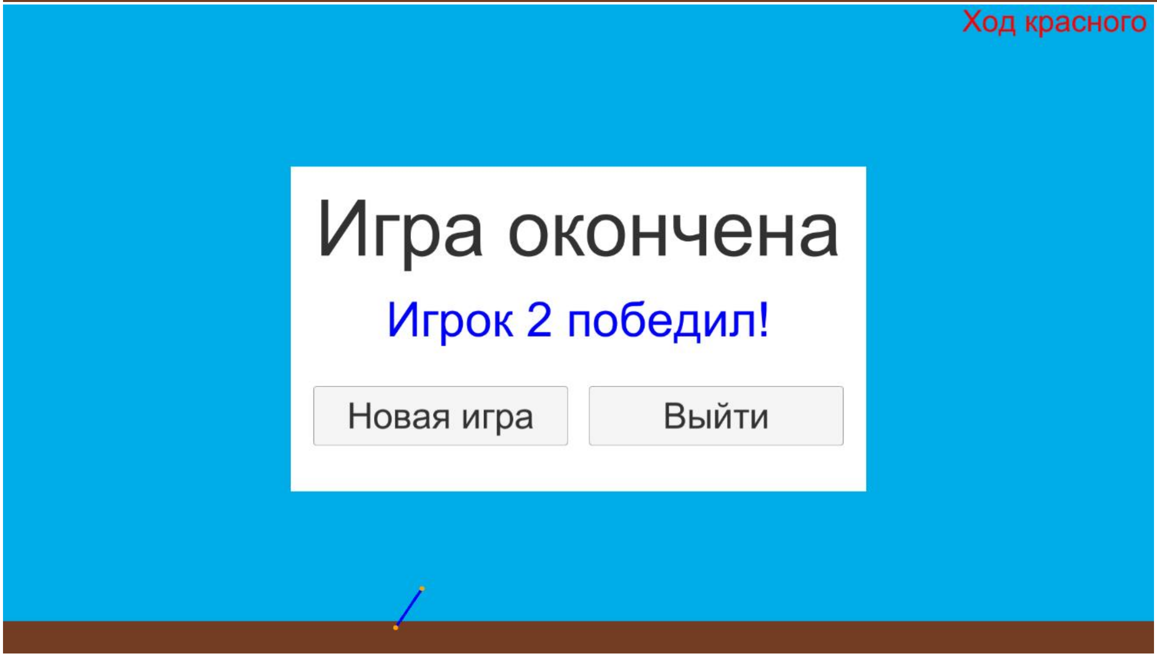



Ход красного

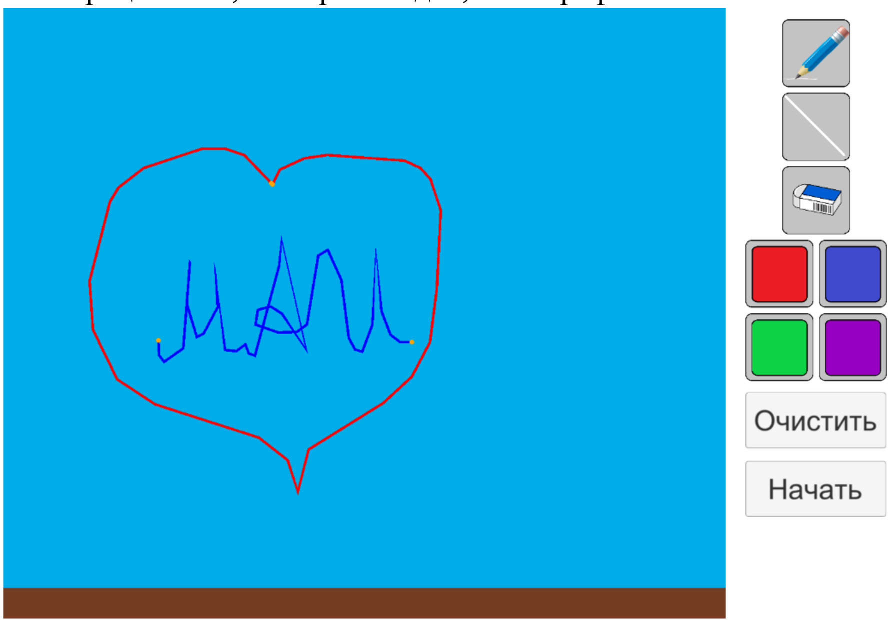

Ход синего

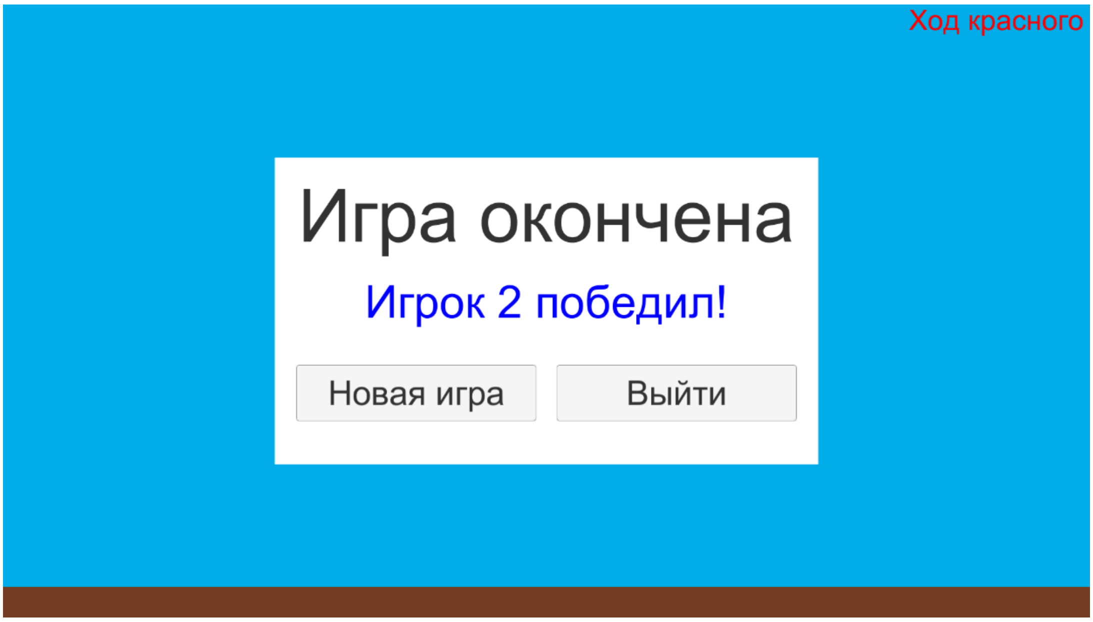

Ход красного





Пример 3. Иллюстрация того, что происходит, если граф изначально не связан с землёй.





После начала игры сразу происходит конец, в связи с тем, что граф удаляется из-за отсутствия соединений с землёй и красный (первый игрок) не может сделать ход.