仿射/凸(锥)、集/组合/包

回顾：数学规划/优化 Mathematical programming / Optimization

$$
\begin{aligned}
&(\min)\quad \text{minimize} \quad f_0(x) \\
&(\text{s.t.})\quad \text{subject to} \quad f_i(x) \le b_i \qquad i=1,\dots,m \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad x=[x_1 \ \cdots \ x_n]^T
\end{aligned}
$$

Chapter 2 : Convex Sets

仿射集 Affine Sets

给定两点 $x_1 \neq x_2 \in R^n$，写出直线方程：

$$
\begin{aligned}
y &= \theta x_1 + (1-\theta) x_2 \\
&= x_2 + \theta (x_1 - x_2), \quad \theta \in R
\end{aligned}
$$

从 x_2 出发，沿 $x_1 - x_2$ 方向变换变量 θ，可以画出一条贯穿两点的直线

给定两点 $x_1 \neq x_2 \in R^n$，写出线段方程：

$$y = \theta x_1 + (1-\theta) x_2, \quad \theta \in [0,1]$$

=> **仿射集**：一个集合 C 是仿射集，若 $\forall x_1, x_2 \in C$，则连接 x_1 与 x_2 的直线也在集合内.

↳若干个点的集合

∴直线是仿射集，线段不是。一个二维空间也是。

设 $x_1, \cdots, x_k \in C$, $\theta_1, \cdots, \theta_k \in R$, 且

$\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_k = 1$ → 仿射集 C

则有仿射组合：$\theta_1 x_1+\cdots+\theta_k x_k$

这样一个仿射组合也应在 C 内.

仿射集性质：

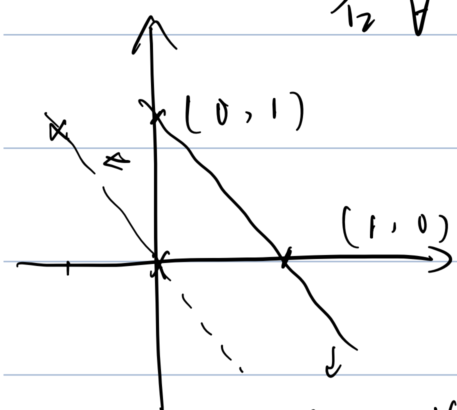
① $x_1, x_2 \in C$，C 为仿射集 $\Rightarrow \theta x_1+(1-\theta)x_2 \in C$

② 假设集合 $V = C - x_0 = \{x - x_0 \mid x \in C\}$，$\forall x_0 \in$

则 V 为与 C 相关的子空间，对于这样特殊的仿射集，

若 $\forall v_1, v_2 \in V$，则对 $\forall \alpha, \beta \in R$

$\Rightarrow \alpha v_1+\beta v_2 \in V$



↪ 该子空间一定经过原点.

C, $V = \{x - (1,0) \mid x \in C\}$

重要问题：线性方程组的解集是仿射集

① 已知 $C=\{x \mid Ax=b\}$，$A\in R^{m\times n}$，$b\in R^m$，$x\in R^n$

证明 $\forall x_1, x_2\in C$，有 $Ax_1=b$，$Ax_2=b$

令 $\theta\in R$，$\theta x_1+(1-\theta)x_2\in C$

$A(\theta x_1+(1-\theta)x_2)=\theta Ax_1+(1-\theta)Ax_2=b$

$\therefore$ 有 $\theta x_1+(1-\theta)x_2\in C$

即任意线性方程组的解集一定是一个仿射集.

② 与之相关的子空间？

$V=\{x-x_0 \mid x\in C\}$ $\forall x_0\in C$

$=\{x-x_0 \mid Ax=b\}$，$Ax_0=b$ （x_0在这一步假设已定

$=\{x-x_0 \mid A(x-x_0)=0\}$

$=\{y \mid Ay=0\}$

化零空间.

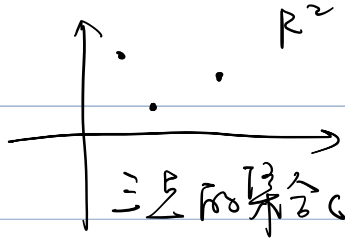
③ 反之，任意仿射集都可以写成一个线性方程组的解集

问题 2 给定集合 C（仿射/非仿射），构造一个最小的仿射集.

仿射包 aff $C=\left\{\theta_1x_1+\cdots+\theta_kx_k \;\middle|\; \begin{array}{l}\forall x_1\cdots x_k\in C\\ \forall \theta_1+\cdots+\theta_k=1\end{array}\right\}$ 不一定是仿射集

仿射包一定是个仿射集。

仿射集的仿射包是它自己。



$\xrightarrow{\text{仿射包}}$ 整个二维平面

凸集 Convex Set

1) 一个集合 C 是凸集 $\Leftrightarrow$ 其任意两点之间的线段仍在 C 内

(2) C 为凸集 $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in C$，对 $\forall \theta \in [0,1]$

$$\theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in C.$$

∴ 仿射集一定是一个凸集。

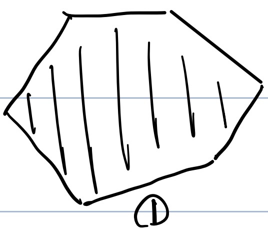
$x_1, \cdots, x_k$ 的凸组合

$$\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_k x_k \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 \cdots \theta_k \in R \\ \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1 \\ \theta_1 \cdots \theta_k \in [0,1] \ \triangle \end{array} \right.$$

∴ (3) C 为凸集 $\Leftrightarrow$ 任意元素凸组合在 C 内

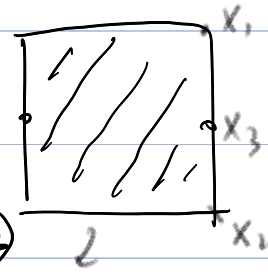
凸包

凸包：$C \subset R^n$，$\mathrm{Conv}\, C = \left\{ \theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall \theta_1 \cdots \theta_k \in R \\ \forall \theta_1 \cdots \theta_k \in [0,1] \\ \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1 \end{array} \right\}$



① 凸集 ✓

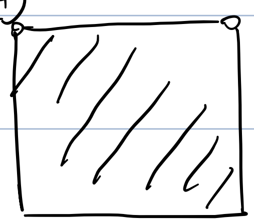
② ✗



③ ✗

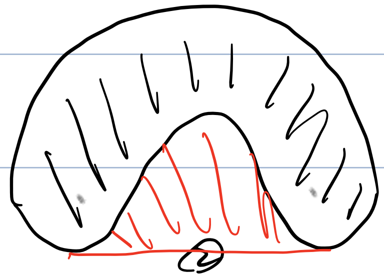
如 x_1、x_2 连线中间的 x_3 没在集合内 ⇒ 不是凸集

④



✓

在上述图形基础上构造凸包，①④为其本身.



②加上两点即可.

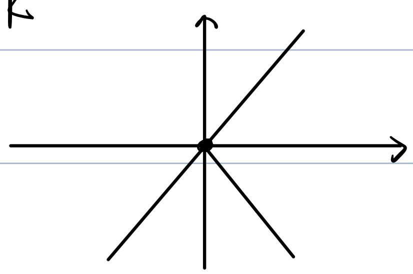
另外，如果是离散点的集合，在最外围把所有点连起来的封闭空间即是凸包. 

锥 Cone　凸锥 Convex Cone

C 是锥 $\Longleftrightarrow \forall x \in C, \ \theta \geq 0$，有 $\theta x \in C$

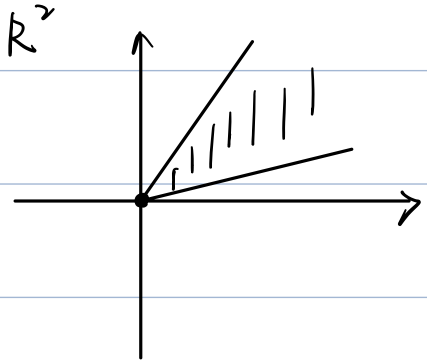
C 是凸锥 $\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in C, \ \theta_1、\theta_2 \geq 0$，有 $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C$

R^2



三条射线从原点出发，构成的集合是锥.

R^2



由无穷多从原点出发的射线组成，其构成的集合是锥. 又由任意两点连成的线段都在集合内，因此是凸集 $\Longrightarrow$ 凸锥 ✓.

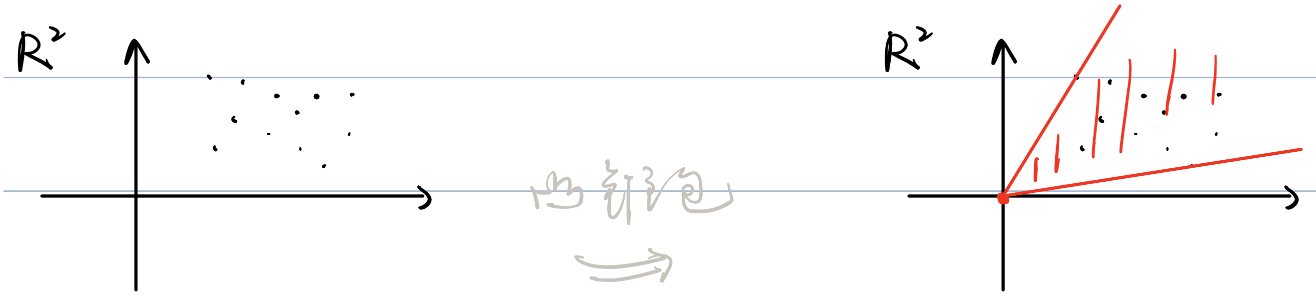
凸锥组合

$\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k, \quad \theta_1 \cdots \theta_k \geq 0$

凸锥包

不一定是凸锥

$x_1, \cdots, x_k \in C, \quad \left\{ \theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 \cdots x_k \in C \\ \theta_1 \cdots \theta_k \geq 0 \end{array} \right\}$



凸锥和特例

① 仿射组合 $\forall \theta_1, \cdots, \theta_k,\ \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$

凸组合 $\forall \theta_1, \cdots, \theta_k,\ \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$

$\theta_1, \cdots, \theta_k \in [0,1]$

凸锥组合 $\forall \theta_1, \cdots, \theta_k,\ \theta_1, \cdots, \theta_k \geq 0$

② 任一仿射集一定是凸集.

任一凸锥一定是凸的.

③ 如果集合内只有一个点, $C = \{x\}$. 仍然是仿射集, 因此一定是凸集, 如果x在原点上, 则集合C还是一个凸锥.

④ 空集仍然是仿射集、凸集、凸锥.