$t = 0$ において, コンデンサの電荷 Q は 0 とする. キルヒホッフの電圧則から, 次の式が成り立つ.[1]

$$V = Ri + \frac{1}{C}\int_0^t idt \tag{1}$$

時間 t で微分する. k_0 を積分定数とし, $k = e^{k_0}$ とする.

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \frac{d(Ri)}{dt} + \frac{d\left(\frac{1}{C}\int_0^t idt\right)}{dt} \\
0 &= R\frac{d}{dt}i + \frac{1}{C}\frac{d\left(\int_0^t idt\right)}{dt} \\
&= R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i \\
R\frac{di}{dt} &= -\frac{i}{C} \\
\frac{1}{i}\frac{di}{dt} &= -\frac{1}{RC} \\
\int \frac{1}{i}di &= \int -\frac{1}{RC}dt \\
\ln i &= -\frac{1}{RC}\int dt + k_0 \\
&= -\frac{t}{RC} + k_0 \\
i &= e^{-\frac{t}{RC}+k_0} \\
&= e^{k_0}e^{-\frac{t}{RC}} \\
&= ke^{-\frac{t}{RC}} \qquad (2)
\end{aligned}$$

次に, k の値を求める. 式 2 から,

$$\begin{aligned}
i(0) &= ke^{-\frac{0}{RC}} \\
&= ke^0 \\
&= k \qquad (3)
\end{aligned}$$

となる. 初期条件として, $t = 0, Q = 0$ であるから, 式 1 は,

$$\begin{aligned}
V &= Ri + \frac{0}{C} \\
&= Ri \\
i &= \frac{V}{R} \qquad (4)
\end{aligned}$$

である. 式 3 と 式 4 から,

$$k = \frac{V}{R} \tag{5}$$

以上より, $i(t)$ は,

[1] $Q = CV \Longleftrightarrow V = \frac{Q}{C}$, また, $i = \frac{dQ}{dt}$.

$$i(t) = \underbrace{\frac{V}{R}}_{k} e^{-\frac{t}{RC}} [\mathrm{A}] \tag{6}$$

である. 時定数を $\tau = RC[\mathrm{s}]$ とすると,

$$i(t) = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} [A] \tag{7}$$

となる.