Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 04.12.2018 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 7 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die Unterräume

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = 0 \\ \xi_1 + 3\,\xi_2 = 0 \end{matrix} \right\} \quad \text{und} \quad U_2 := \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Bestimmen Sie Basen der Unterräume U_1, U_2 sowie $U_1 \cap U_2$ und geben Sie die Dimensionen dieser Unterräume an.
Bestimmen Sie mit Hilfe des Dimensionssatzes die Dimension des Unterraums $U_1 + U_2$.

(b) Im $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $\mathbb{F}_2^3$ betrachten wir die Unterräume

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^3 \;\middle|\; \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0 \right\} \quad \text{und} \quad U_2 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Bestimmen Sie Basen der Unterräume U_1, U_2 sowie $U_1 + U_2$ und geben Sie die Dimensionen dieser Unterräume an.
Bestimmen Sie mit Hilfe des Dimensionssatzes die Dimension des Unterraums $U_1 \cap U_2$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien U_1 und U_2 zwei Unterräume des K-Vektorraums V. Dann heißt $V = U_1 \oplus U_2$ *direkte Summe von U_1 und U_2*, falls $V = U_1 + U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ gilt.

(a) Es sei U_1 ein Unterraum des endlich dimensionalen K-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass es dann einen *zu U_1 komplementären Unterraum* U_2 gibt, d.h. einen Unterraum U_2 mit der Eigenschaft $V = U_1 \oplus U_2$.

(b) Im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^4$ betrachten wir den Unterraum

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \;\middle|\; -\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie zwei verschiedene zu U_1 komplementäre Unterräume U_2 und U_2' im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^4$.
Überprüfen Sie die Gültigkeit des Dimensionssatzes für die beiden Unterräume U_1 und U_2.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils die Koordinaten des Vektors v bezüglich der gegebenen geordneten Basis $\mathcal{B}$ des K-Vektorraums V:

(a) $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}^3 : v = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$;

(b) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3} : v = X^2$, $\mathcal{B} = \{X^3 + X^2 + X + 1, X^2 - X, X^3 + 1, X^3 + X^2\}$;

(c) $K = \mathbb{F}_3$, $V = \mathbb{F}_3^3 : v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$;

(d) $K = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^2 : v = \begin{pmatrix} 1 + 2i \\ -i \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Aufgabe 4* (10 Zusatzpunkte)

Es seien V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $\mathcal{B} := \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine geordnete Basis von V.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f\colon V \longrightarrow K^n$, gegeben durch die Zuordnung

$$x \mapsto \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

wobei $x = \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j$ ist, bijektiv ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung aus Teilaufgabe (a) zudem linear ist.