HU Berlin Wintersemester 2018/19

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 13.11.2018 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 4 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Es seien K und L Körper und $f\colon K \longrightarrow L$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, dass f entweder injektiv oder der Nullhomomorphismus ist.

(b) Es sei $f\colon (\mathbb{Q},+) \longrightarrow (\mathbb{Z},+)$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass f der Nullhomomorphismus ist.

(c) Es seien m und n zwei positive natürliche Zahlen, wobei m ein Teiler von n ist. Wir betrachten die Gruppen $(\mathcal{R}_m,\oplus)$ und $(\mathcal{R}_n,\oplus)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f\colon (\mathcal{R}_m,\oplus) \longrightarrow (\mathcal{R}_n,\oplus),$$

gegeben durch die Zuordnung $a \mapsto \frac{n}{m}\cdot a$ ($a \in \mathcal{R}_m$), ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.
Definiert die Abbildungsvorschrift

$$a \mapsto \frac{n}{m}\cdot a$$

auch einem Ringhomomorphismus $g\colon (\mathcal{R}_m,\oplus,\odot) \longrightarrow (\mathcal{R}_n,\oplus,\odot)$?

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Wir betrachten die Menge $\mathbb{R}[X]$ der Polynome in der Variablen X mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}[X]$ mit der Addition

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}\alpha_j\cdot X^j\right) + \left(\sum_{j\in\mathbb{N}}\beta_j\cdot X^j\right) := \sum_{j\in\mathbb{N}}(\alpha_j+\beta_j)\cdot X^j$$

und der Skalarmultiplikation

$$\lambda\cdot\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}\alpha_j\cdot X^j\right) := \sum_{j\in\mathbb{N}}(\lambda\cdot\alpha_j)\cdot X^j \qquad (\lambda\in\mathbb{R})$$

ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

Hinweis: Sie dürfen Aussagen der Aufgabe 2 von Serie 3 nutzen.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Wir betrachten im Vektorraum $\mathbb{R}^n$ die Menge U aller n-Tupel

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

welche die m Gleichungen

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha_{1,1}\xi_1 & + & \alpha_{1,2}\xi_2 & + & \dots & + & \alpha_{1,n}\xi_n & = & \beta_1 \\ \alpha_{2,1}\xi_1 & + & \alpha_{2,2}\xi_2 & + & \dots & + & \alpha_{2,n}\xi_n & = & \beta_2 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ \alpha_{m,1}\xi_1 & + & \alpha_{m,2}\xi_2 & + & \dots & + & \alpha_{m,n}\xi_n & = & \beta_m \end{array}$$

erfüllen ($\alpha_{j,k} \in \mathbb{R}$, $\beta_j \in \mathbb{R}$ mit $j = 1, \dots, m$ und $k = 1, \dots, n$).

Zeigen Sie, dass U genau dann ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist, wenn $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m = 0$ gilt.

(b) Bilden die folgenden Mengen Unterräume des $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie.

(i) $U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \xi_2 \geq \xi_3 \right\}$;

(ii) $U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \xi_2 = 2\xi_1, \xi_3 = 3\xi_1 \right\}$;

(iii) $U_3 := \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 = 0 \text{ oder } \xi_1 = \xi_2 \right\}$.