

# Cours de quantique II

Lucas

14 février 2019

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Outils mathématiques</b>	<b>2</b>
1.1	Le produit tensoriel de 2 espaces vectoriels . . . . .	2
1.1.1	Bilinéarité . . . . .	2
1.2	Produit tensoriel de 3 espaces vectoriels . . . . .	3
1.3	Produit tensoriel de 2 espaces d'Hilbert . . . . .	3
1.3.1	Exemples d'espaces d'Hilbert produits tensoriels . . . . .	3
1.4	Vecteur produit tensoriel . . . . .	3
1.5	Le prolongement des opérateurs . . . . .	4
1.6	Commutateur dans l'espace produit . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Le spin</b>	<b>6</b>

# Chapitre 1

## Outils mathématiques

### 1.1 Le produit tensoriel de 2 espaces vectoriels

Le produit scalaire est une application qui à deux vecteurs renvoie un nombre. Nous allons introduire le produit scalaire.

Soient  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  espaces vectoriels de dimensions  $N_1$  et  $N_2$ .

**Théorème.** *Il existe toujours un espace vectoriel  $\varepsilon$  et 1 application bilinéaire<sup>1</sup>.  $G : \varepsilon_1 \times \varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon$  tels que, pour toute application bilinéaire  $S : \varepsilon_1 \times \varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_S$ , il existe une application linéaire  $\tilde{S} : \varepsilon \rightarrow \varepsilon_S$  telle que*

$$S(|u\rangle, |v\rangle) = \tilde{S}G(|u\rangle, |v\rangle), \forall |u\rangle \in \varepsilon_1, |v\rangle \in \varepsilon_2$$

Ce théorème est fondateur pour le produit tensoriel. On peut le lire autrement. Soient deux EV, il existe toujours un troisième EV avec une application G.

**Théorème.** *L'espace vectoriel  $\varepsilon$  est unique à un isomorphisme près, de même que l'application G. Cet espace est de dim  $N_1 \cdot N_2$  et  $\{G(|u_i\rangle, |v_j\rangle)\}$  est une base de  $\varepsilon$*

L'application G est l'application produit tensoriel.

**Définition.** *L'espace  $\varepsilon$  est appelé espace produit tensoriel des espaces vectoriels  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  et on le note*

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2$$

On peut noter les vecteurs  $G(|u\rangle, |v\rangle)$   $|u\rangle \otimes |v\rangle$  ou  $|u\rangle |v\rangle$  ou  $|u, v\rangle$

Il faut avoir conscience qu'on joue dans des espaces vectoriels différents.

#### 1.1.1 Bilinéarité

Par construction, on a  $(|u\rangle, |v\rangle) \rightarrow |u\rangle \otimes |v\rangle$  qui vérifie la bilinéarité.

$$|u\rangle \otimes [\lambda |v_1\rangle + \mu |v_2\rangle] = \lambda (|u\rangle \otimes |v_1\rangle) + \mu (|u\rangle \otimes |v_2\rangle)$$

$$[\lambda |u_1\rangle + \mu |u_2\rangle] \otimes |v\rangle = \lambda (|u_1\rangle \otimes |v\rangle) + \mu (|u_2\rangle \otimes |v\rangle)$$

---

1. Linéaire tant sur le premier membre que sur le second

## 1.2 Produit tensoriel de 3 espaces vectoriels

On généralise, cela peut se faire pour d'autres nombres que 3.

Soient  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ , espaces vectoriels de dimensions  $N_1, N_2, N_3$

**Théorème.** *Il existe toujours un espace vectoriel  $\varepsilon$  et 1 application trilinéaire  $G : \varepsilon_1 \times \varepsilon_2 \times \varepsilon_3 \rightarrow \varepsilon$  tels que, pour toute application trilinéaire  $S : \varepsilon_1 \times \varepsilon_2 \times \varepsilon_3 \rightarrow \varepsilon_S$ , il existe une application linéaire  $\tilde{S} : \varepsilon \rightarrow \varepsilon_S$  telle que*

$$S(|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle) = \tilde{S}G(|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle), \forall |u\rangle \in \varepsilon_1, |v\rangle \in \varepsilon_2, |w\rangle \in \varepsilon_3$$

**Théorème.** *L'espace vectoriel  $\varepsilon$  est unique à un isomorphisme près, de même que l'application  $G$ . Cet espace est de dim  $N_1 \cdot N_2 \cdot N_3$  et  $\{G(|u_i\rangle, |v_j\rangle, |w_k\rangle)\}$  est une base de  $\varepsilon$*

**Définition.** *L'espace  $\varepsilon$  est appelé espace produit tensoriel des espaces vectoriels  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  et on le note*

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2 \otimes \varepsilon_3$$

## 1.3 Produit tensoriel de 2 espaces d'Hilbert

Soient  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ , deux espaces d'Hilbert de dimension  $N_1$  et  $N_2$ .

On peut définir le produit scalaire suivant<sup>2</sup> dans l'espace  $\varepsilon$

**Théorème.** *L'application*

$$\langle G(|u\rangle, |v\rangle) | G(|u'\rangle, |v'\rangle) \rangle_\varepsilon = \langle u | u' \rangle_{\varepsilon_1} \cdot \langle v | v' \rangle_{\varepsilon_2}$$

*définit un produit scalaire du  $\varepsilon$  et confère à cet espace, avec la norme et la métrique associée, la structure d'un espace d'Hilbert.*

**Définition.** *L'espace  $\varepsilon$  est appelé espace produit tensoriel des espaces d'Hilbert  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  et on le note*

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2$$

### 1.3.1 Exemples d'espaces d'Hilbert produits tensoriels

$$\mathbb{R}^{n.m} = \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$$

$$\mathbb{C}^{n.m} = \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$$

$$L^{(2)}(\mathbb{R}^{n+m}) = L^{(2)}(\mathbb{R}^n) \otimes L^{(2)}(\mathbb{R}^m)$$

On peut calculer le produit scalaire pour chacun des espaces proposés.

## 1.4 Vecteur produit tensoriel

— Tout vecteur  $|u\rangle \otimes |v\rangle$  est appelé vecteur produit tensoriel

---

2. A vérifier par soi-même que c'est bien correct, et que c'est un produit scalaire

- Tout vecteur produit tensoriel peut se décomposer sur une base de  $\varepsilon$  :  
Si  $\{|u_i\rangle\}$  base de  $\varepsilon_1$  et  $\{|v_j\rangle\}$  base de  $\varepsilon_2$

$$|u\rangle \otimes |v\rangle = \left( \sum_i a_i |u_i\rangle \right) \otimes \left( \sum_j b_j |v_j\rangle \right) = \sum_{i,j} a_i b_j |u_i\rangle \otimes |v_j\rangle^3$$

L'espace produit tensoriel contient des vecteurs produits tensoriel des vecteurs des espaces  $\varepsilon_1 \varepsilon_2$  mais il contient aussi d'autres vecteurs qui ne sont pas résultats de produits tensoriel. En mécanique quantique, les premiers sont appelés états séparés, les seconds états intriqués.

## 1.5 Le prolongement des opérateurs

Soient  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  opérateurs définis respectivement sur les espaces  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ . On a aussi  $|\psi_1\rangle \in \varepsilon_1$  et  $|\psi_2\rangle \in \varepsilon_2$

On définit le prolongateur de  $\hat{A}$  dans  $\varepsilon$ , opérateur linéaire de  $\varepsilon$  noté  $\hat{\hat{A}}$

$$\hat{\hat{A}}[|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle] = [\hat{A}|\psi_1\rangle] \otimes |\psi_2\rangle$$

On définit le prolongateur de  $\hat{B}$  dans  $\varepsilon$ , opérateur linéaire de  $\varepsilon$  noté  $\hat{\hat{B}}$

$$\hat{\hat{B}}[|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle] = |\psi_1\rangle \otimes [\hat{B}|\psi_2\rangle]$$

On peut calculer aussi l'action de  $\hat{\hat{A}}$  sur un vecteur  $|\psi\rangle$  quelconque appartenant à  $\varepsilon$

On peut ensuite définir le produit tensoriel  $\hat{A} \otimes \hat{B}$

$$[\hat{A} \otimes \hat{B}] |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = [\hat{A}|\psi_1\rangle] \otimes [\hat{B}|\psi_2\rangle]$$

Pour simplifier la notation, on peut laisser tomber la tilde, car l'état sur lequel va s'appliquer l'opérateur nous donne l'information, ce qui lèvera l'ambiguïté.

Pour le produit tensoriel  $\hat{A} \otimes \hat{B}$ , la notation  $\hat{A}\hat{B}$  n'est pas ambiguë, étant donné que le produit d'opérateurs provenant d'espaces différents n'est pas défini.

## 1.6 Commutateur dans l'espace produit

Soient  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  opérateurs prolongés dans  $\varepsilon$ ,

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0^4$$

---

3. Soit  $|\psi\rangle$  quelconque  $\in \varepsilon$ . On peut le décomposer dans la base de  $\varepsilon \{ |u_i\rangle \otimes |v_j\rangle \forall i, j \}$ .  $|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{i,j} |u_i\rangle \otimes |v_j\rangle$   
La question est de savoir s'il existe  $N_1$  coefficients  $a_i$  et  $N_2$  coefficients  $b_j$  tels que  $\forall i, j$  on a  $c_{i,j} = a_i b_j$ .

- Si oui, alors, on pourra écrire  $|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{i,j} |u_i\rangle \otimes |v_j\rangle = \sum_{i,j} a_i b_j |u_i\rangle \otimes |v_j\rangle = \sum_i a_i |u_i\rangle \otimes \sum_j b_j |v_j\rangle$ . Et donc  $|\psi\rangle$  appartient à l'ensemble des états séparés.
- Si non, cela veut dire que  $|\psi\rangle$  n'appartient pas à l'ensemble des états séparés. On peut montrer facilement que possible. En effet, il est rarement possible de trouver  $N_1$  et  $N_2$  nombres  $a_i$  et  $b_j$  tels que  $N_1 N_2$  nombres  $c_{i,j}$  peuvent s'écrire  $c_{i,j} = a_i b_j$ . On a  $N_1 N_2$  équations à  $N_1 + N_2$  inconnues, cela semble complexe à résoudre.

On dit que 2 opérateurs originaires d'espaces différents commutent toujours.

---

4. En effet

$$\begin{aligned}
 [\hat{A}, \hat{B}] (|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) &= (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) \\
 &= \hat{A}\hat{B}(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) - \hat{B}\hat{A}(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) \\
 &= [(\hat{A}|\psi_1\rangle) \otimes (\hat{B}|\psi_2\rangle)] - [(\hat{A}|\psi_1\rangle) \otimes (\hat{B}|\psi_2\rangle)] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Il en résulte  $[\hat{A} - \hat{B}] |\psi\rangle = 0, \forall |\psi\rangle \in \varepsilon$  et donc  $[\hat{A} - \hat{B}] = 0$ ,

## **Chapitre 2**

### **Le spin**