第38届全国中学生物理竞赛复赛试题

（2021 年 9 月 19 日上午 9:00-12:00）

考生必读

1、 考生考试前请务必认真阅读本须知。

2、 本试题共 4 页，每大题 40 分，总分为 320 分。

3、 如遇试题印刷不清楚情况，请务必向监考老师提出。

4、 需要阅卷老师评阅的内容一定要写在答题纸上；写在试题纸和草稿纸上的解答一律不能得分。

一、（1）一宽束平行光正入射到折射率为 n 的平凸透镜左侧平面上，会聚于透镜主轴上的点 F，系统过主轴的截面如图 1a 所示。已知凸透镜顶点 O 到 F 点的距离为 r_0 。试在极坐标系中求所示平凸透镜的凸面形状，并表示成直角坐标系中的标准形式。

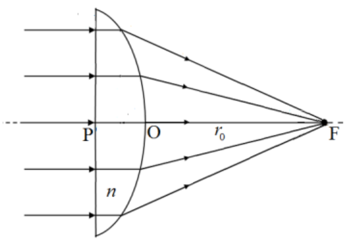


图 1a

（2）在如图 1a 所示的光学系统中，共轴地插入一个折射率为 n' 的平凹透镜（平凹透镜的平面在凹面的右侧，顶点在 O、F 点之间的光轴上，到 F 的距离为 r_0'，$r_0' < r_0$），使原来汇聚到 F 点的光线经平凹透镜的凹面折射后平行向右射出。

（i）在极坐标系中求所插入的平凹透镜的凹面形状，并表示成直角坐标系中的标准形式；

（ii）已知通过平凸透镜后的汇聚光线与主轴的夹角 θ 的最大值为 $\theta_{\max}$，求入射平行圆光束与出射平行圆光束的横截面半径之比。

二、如图 2a，一端开口的薄壁玻璃管竖直放置，开口朝上，玻璃管总长 $l = 75.0\ \text{cm}$，横截面积 $S = 10.0\ \text{cm}^2$，玻璃管内用水银封闭一段理想气体，水银和理想气体之间有一薄而轻的绝热光滑活塞，气柱高度与水银柱高度均为 $h = 25.0\ \text{cm}$ 。已知该理想气体初始温度 $T_0 = 400\ \text{K}$，定体摩尔热容 $C_V = \frac{5}{2}R$，其中 $R = 8.31\ \text{J/(mol}\cdot\text{K)}$ 为普适气体常量；水银密度 $\rho = 13.6\times10^3\ \text{kg/m}^3$，大气压强 $p_0 = 75.0\ \text{cmHg}$，重力加速度大小 $g = 9.80\ \text{m/s}^2$ 。

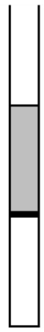


图 2a

（1）过程 A：对封闭的气体缓慢加热，使水银上液面恰好到达玻璃管开口处，求过程 A 中封闭气体对外所做的功；

（2）过程 B：继续对封闭气体缓慢加热，直至水银恰好全部流出为止（薄活塞恰好与玻璃管开口平齐），通过计算说明过程 B 能否缓慢稳定地发生？计算过程 B 中封闭气体所吸收的热量。

忽略玻璃管和水银的热膨胀效应。计算结果保留三位有效数字。

三、如图 3a，一个半径为 r 的均质超球向上、下两个固定的平行硬板之间发射，与两板接连碰撞 3 次后，几乎返回原处；取 x 轴水平向右，y 轴竖直向下，z 轴正向按右手螺旋确定。开始时球心速度的水平分量为 v_{0x}，z 方向的分量为 0，球绕过球心的轴（平行于 z 轴）的角速度大小为 ω_{0z}（$\omega_{0z} < v_{0x}/r$）。不考虑重力。

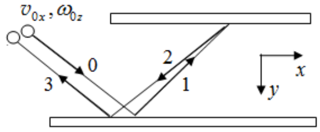


图 3a

（1）求超球与板碰撞第 1 次后球心速度的水平分量 v_{1x} 和球转动的角速度 ω_{1z}；

（2）求超球与板碰撞第 2 次后球心速度的水平分量 v_{2x} 和球转动的角速度 ω_{2z}；

（3）求超球与板碰撞第 3 次后球心速度的水平分量 v_{3x} 和球转动的角速度 ω_{3z} 。

提示：已知一质量为 m、半径为 r 的均质球体绕过球心的轴的转动惯量为 $J = 2mr^2/5$；超球是一种硬质橡皮球体，它在硬板面上的反跳可视为是完全弹性的，换言之，在接触点无滑动，它在接触点受到静摩擦力与正压力时产生的切向形变和法向形变可视为是弹性的，为简化起见，假设这两种形变是彼此无关的（因而相应的弹力各自均为保守力）。

四、一枚小的永磁针可视为一个半径很小的电流环，其磁矩 $\boldsymbol{\mu}$ 的大小为 $\mu = IS$（I 为固有不变的环电流强度，$S = \pi R^2$，R 为电流环的半径），方向与电流环所在的平面垂直，且与电流方向成右手螺旋关系，如图 4a 所示。两枚小磁针 A 和 B 的磁矩大小保持不变均为 μ，质量均为 m。取竖直向下的方向为 z 轴正方向建立坐标系。将 A 固定在坐标系的原点 O 上，其磁矩方向沿 x 轴正方向；将 B 置于 A 的正下方。已知真空的磁导率为 μ_0，重力加速度大小为 g。

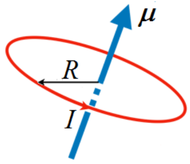


图 4a

（1）假设 B 的磁矩方向与 x 轴成 θ 角，其质心坐标为 $(0,0,z)$（$z >> R$），求 A、B 之间的相互作用势能。

（2）假设 z 不变，求 B 可以处于稳定平衡时与 x 轴所成的角 $\theta_{稳}$（所谓稳定平衡是指：在小扰动下，B 的磁矩指向若偏离了 $\theta_{稳}$，则仍有回到原来指向的趋势）。

（3）现假设 z 可以变化，但 B 的磁矩与 x 轴所成的角 $\theta = \theta_{稳}$，求 B 的受力平衡位置，并说明此平衡位置是否为稳定平衡位置（所谓不稳定平衡是指：在小的扰动下，B 在重力的作用下掉落，或者被 A 吸附过去）。

五、原子激光制冷是一种利用激光使原子减速、降低原子温度的技术。冷原子实验中减速原子束流的塞曼减速装置如图 5a 所示：一束与准直后的原子束流反向传播的单频激光与原子发生散射，以达到使原子减速的目的。原子和光子的散射过程可理解为原子吸收光子、随即各向同性地发射相同能量光子的过程。单位时间内一个原子散射光子的数目称为散射速率。当原子的能级与激光频率共振时，原子散射光子的散射速率最大，减速效果最好。然而，在正常情况下，当原子速度改变（被减速）后，由于多普勒效应，原子与激光不再共振，造成减速暂停。塞曼减速装置利用原子跃迁频率会受磁场影响的特性（塞曼效应：原子的能级会受到外磁场影响，从而能级间跃迁所吸收的光的频率也会受到外磁场的影响），利用随空间变化的磁场来补偿多普勒效应的影响，使原子在减速管中处处与激光共振，直至将原子减速至接近静止。

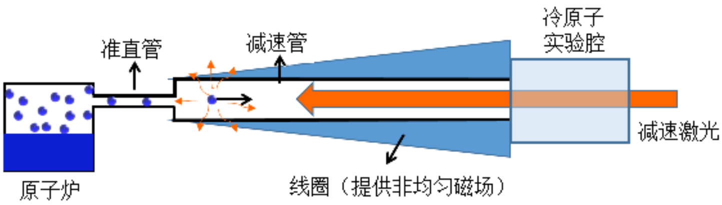


图 5a

（1）考虑被加热到 350°C 的 ^{40}K 原子气体，问准直后（假设准直后原子只有一个方向的自由度）的原子的方均根速率 v_0 是多少？

（2）激光与对应的原子跃迁共振时，原子对光子的散射速率为 $\Gamma = 5.00 \times 10^6 \mathrm{s}^{-1}$。已知用于减速原子的激光波长是 670 nm，问原子做减速运动时的加速度 a 为多少？将具有方均根速率 v_0 的 ^{40}K 原子一直被激光共振减速至静止所需的距离是多少？

（3）不考虑磁场的影响，试计算激光频率应该比原子静止时的激光共振频率减小多少才能与以方均根速率 v_0（向着光源方向）运动的原子发生共振跃迁？

（4）已知在磁场的作用下，原子对应的跃迁的频率随磁感应强度变大而线性变小（塞曼效应）

$$f_0(B) = f_0(B=0) + \beta B$$

式中，系数 $\beta = -1.00 \times 10^{10}$ Hz/T。假设在准直管出口处（$z = 0$）^{40}K 原子以均方根速率 v_0 朝激光射来的方向运动，同时假设在准直管出口处（$z = 0$）的磁感应强度 B 为 0。为了使原子在减速管中（直至原子减速至接近静止）处处被激光共振减速，需要加上随着离准直管出口处距离 z 而变化的磁场来补偿多普勒效应的影响。试求需要加上的磁场的磁感应强度 $B(z)$ 与 z 的关系。

已知普朗克常量 $h = 6.626 \times 10^{-34}$ Js，玻尔兹曼常量 $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J / K，单位原子质量 $1\ \mathrm{u} = 1.66 \times 10^{-27}$ kg。

六、如图 6a，在真空中两个同轴放置的无限长均匀带电的薄壁圆筒，圆筒的半径分别为r_1和r_2；在平行于筒轴方向上，单位长度内、外圆筒的质量均为m，单位长度内、外圆筒分别带有q（$q>0$）、$-q$的电荷。两个圆筒均可以各自绕其中心轴自由旋转。已知真空的介电常量（电容率）和磁导率分别为ε_0和μ_0。

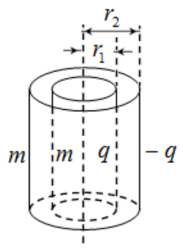


图 6a

（1）计算在距离轴r处的电场强度；

（2）当内外圆筒以相同的角速度ω同向旋转时，求空间中的磁感应强度分布。

（3）若在内圆筒处（$r=r_1$），从静止释放一个质量为μ，电荷量为Q（Q与q同号）的点电荷，试分析当ω满足什么条件时，此点电荷能够在电磁场的作用下到达外圆筒处（$r=r_2$）。

（4）若初始时内、外圆筒均静止，现对外圆筒施加一力矩使其开始旋转，当外圆筒的角速度达到Ω时，试计算

（i）内圆筒转动的角速度ω；

（ii）在从初始时直至外圆筒的角速度达到Ω的整个过程中，沿轴向单位长度的外圆筒所受到的外力矩（不包括两圆筒感应电磁场作用力的力矩）M的总冲量矩J；

（iii）沿轴向单位长度的内、外圆筒的总的机械角动量L。

七、一简化的汽车力学模型如图 7a 所示：半径为r、质量均为m的前轮（两个前轮视为一个物体m）和后轮（两个后轮视为一个物体m）分别视为均质圆柱刚体，前后轮轴相距L；刚体车身质量为M，质心位于前后轮轴正中，且与两轮轴所在平面相距h。车轮与地面之间的滑动摩擦因数为μ（假定最大静摩擦力等于滑动摩擦力）。忽略空气阻力；忽略车轮转动过程中转轴受到的摩擦力矩。重力加速度大小为g。任一半径为r、质量为m的均质圆柱相对于中心轴的转动惯量为$J=mr^2/2$。

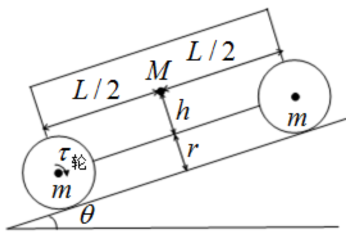


图 7a

（1）假定某时刻汽车在倾角为θ的斜坡（斜面）上无滑动地向上加速运动，车身的加速度为a；前后轮与地面的正压力均大于零，分别求出前轮和后轮与地面的正压力$N_{前}$和$N_{后}$。据此确定为了使前轮不离开地面，加速度的最大安全值$a_{安全}$（此后始终假定$a<a_{安全}$）。

（2）假定汽车在倾角为θ的斜坡上做加速运动。在时刻t，车身上的发动机向后轮提供的顺时针的力矩为$\tau_{轮}$。忽略车轮旋转时与车身之间的摩擦，并假定车轮与地面摩擦系数μ足够大使得车轮与地面之间不发生滑动。求车身此时的加速度a。

（3）发动机和车轮通过变速器连接，假定变速器的机械效率为 100%，发动机转速ω是车轮转速$\omega_{轮}$的r_i倍（变速比）。根据前面结论分别计算 A 型电动汽车在水平地面（$\theta=0$）和 30 度上坡（$\theta=30^\circ$）的最大加速度$a(0^\circ)$和$a(30^\circ)$。计算为了使这两种情况下车轮与地面不发生滑动，摩擦系数μ需要的最小值$\mu_{\min}$。本问可利用的数据：A 型电动汽车的参数$M=1.8\times10^3\ \mathrm{kg}$，$h=0.1\ \mathrm{m}$，$r=0.40\ \mathrm{m}$，$L=2.9\ \mathrm{m}$，发动机最大输出力矩$\tau=4.0\times10^2\ \mathrm{N\cdot m}$，变速比$r_i=10$，车轮质量$m$相对于车身质量可忽略；$g=9.8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$。

数值结果保留两位有效数字。

八、一简化电动汽车模型如图 8a 所示，半径为r、质量均为m的前轮（两个前轮视为一个物体m）和后轮（两个后轮视为一个物体m）分别视为均质圆柱刚体；刚体车身质量为M，质心位于前后轮轴正中。忽略空气阻力；忽略车轮转动过程中转轴受到的摩擦力矩。

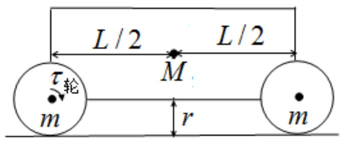


图 8a

（1）很多电动汽车的发动机是永磁直流电机。在简化模型中，电机动子线圈始终在匀强恒定磁场B中运动并垂直切割磁力线，切割磁力线的线圈导线总长度为l，转动轨迹的半径为$r_{线圈}$，线圈总电阻为$R_{线圈}$，线圈自感可忽略。为线圈提供电流的电池的开路电压为V，内阻为$R_{内}$。若电机运动部分之间摩擦可忽略，求电机的输出力矩τ与电机转速ω之间的关系$\tau(\omega)$，最大输出力矩$\tau_{\max}$，输出力矩为零时的最大转速$\omega_{\max}$，以及最大输出功率$P_{\max}$。为方便此后的计算，将$\tau(\omega)$中涉及的常量用$\tau_{\max}$、$\omega_{\max}$和$P_{\max}$表示。

（2）考虑水平地面上汽车从 $t=0$ 时刻的静止状态开始加速的过程，已知在车轮与地面之间不发生滑动的情形下，车身质心在时刻 t 的加速度大小 a 满足

$$a=\frac{\tau_{轮}/r}{M+3m}$$

式中，$\tau_{轮}$ 是此时车身上的电机向后轮提供的顺时针的力矩。电机和车轮通过变速器连接，假定变速器的机械效率为 100%，电机转速与车轮转速之比（变速比）为 r_i。求车速 $v(t)$ 与时间 t 之间的关系。

（3）利用 A 型汽车的参数数值，以及电机的最大输出功率 $P_{\max}=2.0\times10^{2}\,\mathrm{kW}$，根据（2）的结果，计算车速从零增加到 $v_f=100\ \mathrm{km/h}$ 所需的时间。计算这个加速过程消耗的电池能量（以 kWh 为单位），以及电池能量转化为机械能的效率。本问可利用的数据和结果：A 型电动汽车的参数 $M=1.8\times10^{3}\ \mathrm{kg}$，$r=0.40\ \mathrm{m}$，$L=2.9\ \mathrm{m}$，电机最大输出力矩 $\tau=4.0\times10^{2}\ \mathrm{N\cdot m}$，电机转速与车轮转速之比（变速比）$r_i=10$，车轮质量 m 相对于车身质量可忽略。任一半径为 r、质量为 m 的均质圆柱相对于中心轴的转动惯量为 $J=mr^{2}/2$。

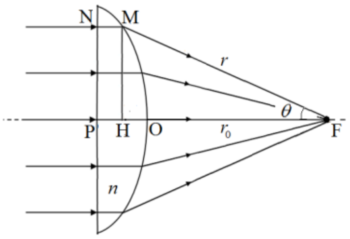
数值结果保留两位有效数字。

第 38 届全国中学生物理竞赛复赛试题参考解答

（2021 年 9 月 19 日 9:00-12:00）

一、

（1）一束平行光入射到平凸透镜左侧平面上，会聚于透镜主轴上的 F 点。假设系统具有相对于主轴的旋转对称性，则只需在过主轴的平面上进行分析。如解题图 1a，考虑任一条离轴的光线 NMF 和 POF，它们从等相位的起始点（平凸透镜左侧平面上的入射点）至 F 点的光程相等，考虑到 $\mathrm{NM}=\mathrm{PH}$ （H 点是 M 点在 PO 上的垂足），有



解题图 1a

$$\mathrm{MF}=n\times\mathrm{HO}+\mathrm{OF}$$

式中 n 是透镜的折射率；以焦点 F 作为极坐标的原点，即

$$r=n(r\cos\theta-r_0)+r_0 \qquad ①$$

由①式得

$$r=\frac{(1-n)r_0}{1-n\cos\theta} \qquad ②$$

在直角坐标系（以从 F 点朝 O 点的射线为 x 轴，从 F 点竖直向下的轴为 y 轴）中有

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \qquad ③$$

$$\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad ④$$

由①③④式得

$$\frac{\left(x-\dfrac{n}{n+1}r_0\right)^2}{\left(\dfrac{r_0}{n+1}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{n^2-1}}{n+1}r_0\right)^2}=1 \qquad ⑤$$

这是直角坐标系中双曲线的标准形式

$$\frac{(x-g)^2}{a^2}-\frac{(y-h)^2}{b^2}=1$$

平凸透镜的凸面为旋转双曲面。

[解法（二）

将③④式代入②式，得

$$\sqrt{x^2+y^2}=r_0(1-n)+nx$$

平方，移项得

$$(n^2-1)x^2+2n(1-n)r_0x-y^2+r_0(1-n)^2=0$$

与直角坐标系中双曲线的标准形式

$$\frac{(x-g)^2}{a^2}-\frac{(y-h)^2}{b^2}=1$$

比较，可得到

$$g=\frac{n}{n+1}r_0,\quad h=0,\quad a=\frac{r_0}{n+1},\quad b=\frac{\sqrt{n^2-1}}{n+1}r$$

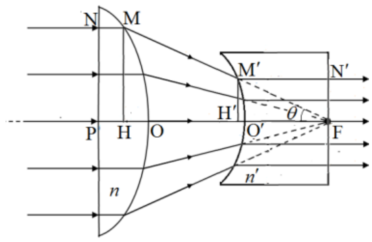
所以

$$\frac{\left(x-\frac{n}{n+1}r_0\right)^2}{\left(\frac{r_0}{n+1}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{n+1}r_0\right)^2}=1 \qquad ⑤$$

平凸透镜的凸面为旋转双曲面。

]

（2）（i）由于光线进入凹透镜后，其传播方向平行于主轴，因此可以将凹透镜的厚度加厚，如解题图 1b 所示，不影响对问题的分析。考虑任一条离轴的光线 NMM′ 和 PHOO′，它们从等相位的起始点（平凸透镜左侧平面上的入射点）至相对于 F 点的垂直平面的光程（等相位点）相等，考虑到 NM = PH （H 点是 M 点在 PO 上的垂足），有



解题图 1b

$$\mathrm{MM'}+n'\mathrm{M'N'}=n\mathrm{HO}+\mathrm{OO'}+n'\mathrm{O'F}$$

即

$$(r-r')+n'r'\cos\theta=n(r\cos\theta-r_0)+(r_0-r_0')+n'r_0' \qquad ⑥$$

由①⑥式得

$$-r'+n'r'\cos\theta=-r_0'+n'r_0' \qquad ⑦$$

这说明，在光线入射到平凹透镜虚焦点 F 然后平行于主轴从平凹透镜的平面侧射出的情形下，从 F 点反向（相对于光的传播方向）追溯到入射的界面（凹透镜表面），然后顺着光线传播方向平行于主轴向右传播至主轴的任一垂直面上的两条光线是等光程的。由⑦式得

$$r'=\frac{(1-n')r_0'}{1-n'\cos\theta} \qquad ⑧$$

它在直角坐标系中的形式为

$$\frac{\left(x-\frac{n'}{n'+1}r_0'\right)^2}{\left(\frac{r_0'}{n'+1}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{n'^2-1}}{n'+1}r_0'\right)^2}=1 \qquad ⑨$$

平凹透镜的凹面也是旋转双曲面。

[解法（二）

⑦式与①式结构相同，只是在相应的量上加撇，所以可直接得到式⑧⑨。

平凹透镜的凹面也是旋转双曲面。

]

（ii）入射平行光束与出射平行光束的横截面尺寸之比为

$$k=\frac{\mathrm{MH}|_{\max}}{\mathrm{M'H'}|_{\max}}=\frac{r\sin\theta_{\max}}{r'\sin\theta_{\max}} \qquad ⑩$$

此即

$$\frac{(1-n)r_0}{1-n\cos\theta_{\max}}\sin\theta_{\max}=k\frac{(1-n')r_0'}{1-n'\cos\theta_{\max}}\sin\theta_{\max} \qquad ⑪$$

于是

$$k=\frac{(1-n)(1-n'\cos\theta_{\max})}{(1-n')(1-n\cos\theta_{\max})}\frac{r_0}{r_0'} \qquad ⑫$$

[解法（二）

由三角形的相似性

$$k=\frac{\mathrm{HF}}{\mathrm{H'F'}}=\frac{r_0+\mathrm{HO}}{r'+\mathrm{H'O'}}$$ ⑩

其中

$$\mathrm{HO}=r_{\max}\cos\theta_{\max}-r_0\,,\quad r_{\max}=\frac{(1-n)r_0}{1-n\cos\theta_{\max}}$$

$$\mathrm{H'O'}=r'_{\max}\cos\theta_{\max}-r'_0\,,\quad r'_{\max}=\frac{(1-n')r'_0}{1-n'\cos\theta_{\max}}$$ ⑪

所以

$$k=\frac{(1-n)(1-n'\cos\theta_{\max})}{(1-n')(1-n\cos\theta_{\max})}\frac{r_0}{r'_0}$$ ⑫

]

评分参考：本题 40 分。

第（1）问 20 分，①②③④⑤式各 4 分；

第（2）问 20 分，⑥⑦⑧式各 4 分，⑨⑩⑪⑫式各 2 分。

二、

（1）过程 A 中封闭气体初态体积为

$$V_1=Sh$$ ①

温度为

$$T_1=T_0$$ ②

初始压强为

$$p_1=p_0+\rho gh=4\rho gh$$ ③

末态压强为

$$p_2=p_1$$ ④

末态体积为

$$V_2=2Sh$$ ⑤

根据理想气体物态方程得

$$\frac{p_1V_1}{T_1}=\frac{p_2V_2}{T_2}$$ ⑥

由以上各式得

$$T_2=2T_0$$ ⑦

过程 A 是等压过程，此过程中封闭气体对外所做的功为

$$W_1=p_1(V_2-V_1)=4\rho ghSh=33.3\ \mathrm{J}$$ ⑧

[

或利用理想气体所做的功等于水银重力势能的增加和克服大气压对外做的功，即

$$W_1=\rho Shgh+p_0(V_2-V_1)=\rho Shgh+3\rho Shgh=33.3\ \mathrm{J}$$ ⑧

由于缓慢加热，水银的动能可以忽略。

]

（2）设过程 B 中水银柱的高度为 x，若该过程可以缓慢稳定地发生，则要求水银柱高度在不断减小的过程中，满足气体状态方程的 x 始终有解。设对应于 x 的封闭气体压强为 p，体积为 V，温度为 T，则

$$p=p_0+\rho gx=3\rho gh+\rho gx$$ ⑨

$$V = S(l-x) = S(3h-x) \quad ⑩$$

根据理想气体状态方程有

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_1V_1}{T_1} \quad ⑪$$

即

$$\frac{(3\rho gh + \rho gx)S(3h-x)}{T} = \frac{4\rho ghSh}{T_0} \quad ⑫$$

或

$$9h^2 - x^2 = 4h^2\frac{T}{T_0}$$

解为

$$x = h\sqrt{9-4\frac{T}{T_0}} \quad ⑬$$

当$T = 2T_0$时，$x = h$是过程 B 的初始状态；当$T = 9T_0/4$时，$x = 0$是过程 B 的末状态。由⑬式知，x随T单调递减，所以

过程 B 可以缓慢稳定地发生 ⑭

根据热力学第一定律，过程 B 中总的吸热Q等于气体内能的增加ΔU和气体对外做的功W_2，即

$$Q = \Delta U + W_2 \quad ⑮$$

该理想气体的摩尔数为

$$\mu = \frac{p_1V_1}{RT_1} = \frac{4\rho ghSh}{RT_0} \approx 1.00\times10^{-2}\,\mathrm{mol} \quad ⑯$$

理想气体内能只是其温度的函数，其增加量为

$$\Delta U = \mu C_V\left(\frac{9T_0}{4} - 2T_0\right) \approx 20.8\ \mathrm{J} \quad ⑰$$

此过程中气体对外做功等于水银重力势能的增加以及克服大气压所做的功，即

$$\begin{aligned} W_2 &= \rho Shg\frac{h}{2} + p_0(V_3 - V_2) \\ &= \rho Shg\frac{h}{2} + 3\rho ghSh = 29.2\ \mathrm{J} \end{aligned} \quad ⑱$$

式中V_3是过程 B 中封闭气体的末态体积。总的吸热为

$$Q = 20.8\ \mathrm{J} + 29.2\ \mathrm{J} = 50.0\ \mathrm{J} \quad ⑲$$

评分标准：本题 40 分。

第（1）问 18 分，①②③④⑤式各 2 分，⑥式 3 分，⑦式 2 分，⑧式 3 分；

第（2）问 22 分，⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱⑲式各 2 分。

三、

（1）由动量定理和角动量定理知

$$m(v_{1x} - v_{0x}) = -\int_{t_0}^{t_1} f_x \mathrm{d}t \quad ①$$

$$m(v_{1y} - v_{0y}) = -\int_{t_0}^{t_1} f_y \mathrm{d}t \quad ②$$

$$J_z(\omega_{1z}-\omega_{0z})=r\int_{t_0}^{t_1} f_x\mathrm{d}t \qquad ③$$

式中，m 是超球的质量，f_x 是下板对球的摩擦力，f_y 是下板对球的正压力，它们对球作用时间 $\Delta t=t_1-t_0$ 极短，而 J_z 是球绕过球心的轴（平行于 z 轴）的转动惯量。利用①③式消去 f_x 得

$$m(v_{1x}-v_{0x})=-\frac{J_z}{r}(\omega_{1z}-\omega_{0z}) \qquad ④$$

由 f_y 引起的弹性径向形变的保守性质有

$$\frac{1}{2}mv_{1y}^2=\frac{1}{2}mv_{0y}^2$$

球的竖直速度必定在 f_y 的作用下反向

$$v_{1y}=-v_{0y} \qquad ⑤$$

由 f_x 引起的弹性切向形变的保守性质（亦即无滑动），有

$$\frac{1}{2}I_z\omega_{1z}^2+\frac{1}{2}mv_{1x}^2=\frac{1}{2}J_z\omega_{0z}^2+\frac{1}{2}mv_{0x}^2$$

可见，能量只在球的水平运动与旋转运动之间进行交换；竖直运动的能量保持不变，仅竖直速度在碰撞前后方向相反。上式即

$$m(v_{1x}-v_{0x})(v_{1x}+v_{0x})=-J_z(\omega_{1z}-\omega_{0z})(\omega_{1z}+\omega_{0z}) \qquad ⑥$$

④⑤⑥式是超球反跳运动的动力学方程。它的解是

$$v_{1x}=v_{0x}\text{，}\quad \omega_{1z}=\omega_{0z}$$

和

$$v_{1x}+v_{0x}=r(\omega_{1z}+\omega_{0z}) \qquad ⑦$$

前者对应于 $f_x=0$，仅与光滑球相关；后者适合于超球的反跳运动。⑦式即

$$(v_{1x}-r\omega_{1z})=-(v_{0x}-r\omega_{0z}) \qquad ⑧$$

这里 $(v_x-r\omega_z)$ 即为球上与平板相接触的点在碰撞前后的水平速度。由④⑧式和

$$J_z=\frac{2}{5}mr^2$$

得

$$v_{1x}=\frac{3}{7}v_{0x}+\frac{4}{7}r\omega_{0z} \qquad ⑨$$

$$\omega_{1z}=\frac{10}{7}\frac{v_{0x}}{r}-\frac{3}{7}\omega_{0z} \qquad ⑩$$

（2）现考虑球从下板向上板射出与上板相碰（第 2 次碰撞），碰撞前后由动量定理和角动量定理知

$$m(v_{2x}-v_{1x})=-\int_{t_1}^{t_2} f_x\mathrm{d}t \qquad ⑪$$

$$J_z(\omega_{2z}-\omega_{1z})=-r\int_{t_1}^{t_2} f_x\mathrm{d}t \qquad ⑫$$

y 方向的动量定理表达式与②式类似（未表出）。注意：此次由于静摩擦力的力矩反号，使得⑫式右边与③式相比多了一个因子 (-1) 。类似推理得

$$v_{2x}=\frac{3}{7}v_{1x}-\frac{4}{7}r\omega_{1z} \qquad ⑬$$

$$\omega_{2z}=-\frac{10}{7}\frac{v_{1x}}{r}-\frac{3}{7}\omega_{1z}\qquad ⑭$$

联立⑨⑩⑬⑭式得

$$v_{2x}=\frac{-31}{49}v_{0x}+\frac{24}{49}r\omega_{0z}\qquad ⑮$$

$$\omega_{2z}=-\frac{60}{49}\frac{v_{0x}}{r}-\frac{31}{49}\omega_{0z}\qquad ⑯$$

值得指出的是仍有

$$v_{2y}=-v_{1y}=v_{0y}$$

（3）最后，考虑球从上板向下板射出与下板相碰（第 3 次碰撞），类似于⑨⑩式有

$$v_{3x}=\frac{3}{7}v_{2x}+\frac{4}{7}r\omega_{2z}\qquad ⑰$$

$$\omega_{3z}=\frac{10}{7}\frac{v_{2x}}{r}-\frac{3}{7}\omega_{2z}\qquad ⑱$$

y 方向的动量定理表达式与②式类似（未表出）。联立⑮⑯⑰⑱式得

$$v_{3x}=-\frac{333}{343}v_{0x}-\frac{52}{343}r\omega_{0z}\qquad ⑲$$

$$\omega_{3z}=-\frac{130}{343}\frac{v_{0x}}{r}+\frac{333}{343}\omega_{0z}\qquad ⑳$$

值得指出的是仍有

$$v_{3y}=-v_{2y}=-v_{0y}$$

评分参考：本题 40 分。

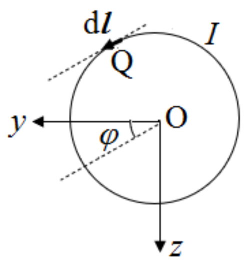
第（1）问 20 分，①②③④⑤⑥⑦式各 2 分，⑨⑩式各 3 分；

第（2）问 12 分，⑪式 1 分，⑫式 3 分，⑬⑭⑮⑯式各 2 分；

第（3）问 8 分，⑰⑱⑲⑳式各 2 分。

四、

（1）计算 A（中心为 O）在 z 轴上坐标为 z（$z>>R$）处（记为 P 点）的磁场。如解题图 4a，A 的电流环（位于 yz 平面）上 Q 处的电流元为



解题图 4a

$$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}=IR\mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{j}\cos\varphi+\boldsymbol{k}\sin\varphi)$$

这里，φ 为电流元与 y 轴正方向的夹角，x 轴垂直于纸面向外。电流元 Q 到 P 点的矢径为

$$\boldsymbol{d}=-\boldsymbol{j}R\sin\varphi+\boldsymbol{k}R\cos\varphi+\boldsymbol{k}z=-\boldsymbol{j}R\sin\varphi+\boldsymbol{k}\left(z+R\cos\varphi\right)$$

由此知 $d=\left[\left(R\sin\varphi\right)^2+\left(z+R\cos\varphi\right)^2\right]^{1/2}$。根据毕奥-萨伐尔定律有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{B}&=\frac{\mu_0}{4\pi d^3}I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{d}=\frac{\mu_0 IR}{4\pi d^3}\mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{j}\cos\varphi+\boldsymbol{k}\sin\varphi)\times\left[-\boldsymbol{j}R\sin\varphi+\boldsymbol{k}\left(z+R\cos\varphi\right)\right]\\&=\boldsymbol{i}\frac{\mu_0 IR}{4\pi d^3}\mathrm{d}\varphi(R+z\cos\varphi)\end{aligned}\qquad ①$$

由题给条件，电流环的半径很小，故有

$$\frac{1}{d^3}=\left[\left(R\sin\varphi\right)^2+\left(z+R\cos\varphi\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}\approx\frac{1}{z^3}\left(1-\frac{3}{2}\cdot2\frac{R}{z}\cos\varphi\right)=\frac{1}{z^3}\left(1-3\frac{R}{z}\cos\varphi\right)\qquad ②$$

所以，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} \approx \boldsymbol{i}\frac{\mu_0 IR}{4\pi}\mathrm{d}\varphi(R+z\cos\varphi)\frac{1}{z^3}\left(1-3\frac{R}{z}\cos\varphi\right)$$

$$\approx \boldsymbol{i}\frac{\mu_0 IR}{4\pi z^3}\mathrm{d}\varphi(R+z\cos\varphi-3R\cos^2\varphi) \qquad ③$$

$$=\boldsymbol{i}\frac{\mu_0 IR}{4\pi z^3}\mathrm{d}\varphi(-\frac{R}{2}-\frac{3}{2}R\cos 2\varphi+z\cos\varphi)$$

积分得

$$\boldsymbol{B}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\boldsymbol{B}\approx -\boldsymbol{i}\frac{\mu_0 IR}{4\pi z^3}\frac{R}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=-\boldsymbol{i}\frac{\mu_0 IR^2\pi}{4\pi z^3}=-\frac{\mu_0\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{A}}}{4\pi z^3} \qquad ④$$

可见，A 在 $(0,0,z)$ 处的磁场的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 沿 x 轴负方向。取 B 的磁矩与磁场垂直时为势能零点，A 与 B 之间的相互作用势能为

$$E_{\mathrm{p}}=-\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{B}}\cdot\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{B}}\cdot\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{A}}\mu_0}{4\pi z^3}=\frac{\mu_0\mu^2\cos\theta}{4\pi z^3} \qquad ⑤$$

（2）考虑重力后，系统的势能为

$$V=E_{\mathrm{p}}-mgz=\frac{\mu_0\mu^2\cos\theta}{4\pi z^3}-mgz \qquad ⑥$$

它只与 z 有关。由于 z 不变，B 受到磁场的外力矩大小为

$$M=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mu_0\mu^2\sin\theta}{4\pi z^3} \qquad ⑦$$

方向朝着 θ 减小的方向。可见，只有 $\theta=0$ 或 π 时，外力矩才为零，此即力矩平衡条件

$$M(\theta)=0,\ \text{当}\,\theta=0,\pi \qquad ⑧$$

由

$$\frac{d^2V}{\mathrm{d}\theta^2}\left(=-\frac{dM}{\mathrm{d}\theta}\right)=-\frac{\mu_0\mu^2\cos\theta}{4\pi z^3}.$$

可知 $\theta=0$ 对应的平衡状态是不稳定的。因此，在 z 不变的条件下，B 处于稳定平衡的条件为

$$\theta=\theta_{\text{稳}}=\pi \qquad ⑨$$

[解法（二）

B 受到磁场的外力矩的大小为

$$M=\mu B\sin\theta=\frac{\mu_0\mu^2\sin\theta}{4\pi z^3} \qquad ⑦$$

可见，只有 $\theta=0$ 或 π 时，外力矩才为零，此即力矩平衡条件

$$M(\theta)=0,\ \text{当}\,\theta=0,\pi \qquad ⑧$$

由

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mu_0\mu^2\cos\theta}{4\pi z^3}$$

可知 $\theta=0$ 对应的平衡状态是不稳定的。 因此，在 z 不变的条件下，B 处于稳定平衡的条件为

$$\theta=\theta_{\text{稳}}=\pi \qquad ⑨$$

]

[

解法（三）

由⑥式可知

$V(\theta=\pi)$ 最低，　　（按⑦⑧两式得分之和计分）

因此，在 z 不变的条件下，B 处于稳定平衡的条件为

$$\theta = \theta_{稳} = \pi \qquad ⑨$$

]

（3）$\theta = \theta_{稳} = \pi$ 时 B 在竖直方向受到的外力为

$$F = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} = -\frac{3\mu_0\mu^2}{4\pi z^4} + mg \qquad ⑩$$

$F > 0$ 相当于指向 z 轴正方向。由 $F = 0$ 求得平衡位置 z 满足

$$z = \left(\frac{3\mu_0\mu^2}{4\pi mg}\right)^{1/4} \qquad ⑪$$

进而由

$$\frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{3\mu_0\mu^2}{\pi z^5} < 0 \qquad ⑫$$

可知，

该位置是不稳定的。 ⑬

评分参考：本题 40 分。

第（1）问 14 分，①②③式各 2 分，④⑤式各 4 分；

第（2）问 13 分，⑥式 3 分，⑦式 4 分，⑧⑨式各 3 分；

第（3）问 13 分，⑩式 4 分，⑪⑫⑬式各 3 分。

五、

（1）根据能量按自由度均分定理，任一自由度的能量的平均值都是 $\frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}T$ 。因此准直后的原子速率平方的平均值 v_0^2 满足

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}T \qquad ①$$

式中 m 是 ^{40}K 原子的质量

$$m = 40\times1.66\times10^{-27}\ \mathrm{kg} = 6.64\times10^{-26}\ \mathrm{kg} \qquad ②$$

而

$$T = (350+273)\ \mathrm{K} = 623\ \mathrm{K} \qquad ③$$

是 ^{40}K 原子气体的温度。由①②③式与题给常量 k_{B} 得，原子方均根速率为

$$v_0 = 360\ \mathrm{m/s} \qquad ④$$

（2）按照牛顿第二定律，^{40}K 原子做减速运动时的加速度 a 大小满足

$$a = \frac{F}{m} \qquad ⑤$$

式中 F 是 ^{40}K 原子所受到的激光对它的作用力的大小

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \qquad ⑥$$

这里，Δp 是 ^{40}K 原子在受到激光照射 Δt 时间间隔内其动量的减少。这种减少源自 ^{40}K 原子在 Δt 时间间隔内共振吸收了与原子初速度 v_0 反向运动的 N 个光子

$$N = \frac{\Delta p}{p_{\mathrm{single}}} = \Gamma\Delta t \qquad ⑦$$

式中 p_{single} 是单个光子动量

$$p_{\text{single}} = \frac{h}{\lambda} \qquad ⑧$$

联立⑤⑥⑦⑧式得

$$a = \Gamma \frac{h}{\lambda m} = 7.45 \times 10^{4}\ \text{m/s}^{2} \qquad ⑨$$

将初速度为 v_0 的 ^{40}K 原子减速直至静止，该原子所通过的距离是

$$s = \frac{v_0^2}{2a} = 0.87\ \text{m} \qquad ⑩$$

（3）设激光的频率为 f；当 ^{40}K 原子以速度 v 与激光光子相向运动时它所感受到的激光的频率为 f'，此即该原子在其静止的参考系中所接受到的激光的频率。根据多普勒效应公式

$$f' = f\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$$

当 $v << c$ 时，可得

$$\frac{\Delta f}{f'} \equiv \frac{f' - f}{f'} = \frac{v}{c} \qquad ⑪$$

设 ^{40}K 原子的跃迁频率为 f_0。当

$$f' = f_0 \qquad ⑫$$

时，^{40}K 原子与激光达到共振散射。由此得激光应该减小的频率为

$$\Delta f \equiv f_0 - f = \frac{v}{c} f_0 = \frac{v}{\lambda} \qquad ⑬$$

式中 λ 是激光的波长。当 $v = v_0$ 时有

$$\Delta f = \frac{v_0}{\lambda} = \frac{360\ \text{m/s}}{670\ \text{nm}} = 537\ \text{MHz} \qquad ⑭$$

（4）在原子与激光处处共振的条件下，原子做减速运动的加速度 a 为常值。在 z 处的原子的速度 $v(z)$ 满足

$$v^2(z) - v^2(z=0) = 2(-a)z \qquad ⑮$$

由此得

$$v(z) = \sqrt{v^2(z=0) - 2az} \qquad ⑯$$

由⑬式可知，在 $z = 0$ 处有

$$\Delta f \equiv f_0(z=0) - f = \frac{v(z=0)}{c} f_0 = \frac{v(z=0)}{\lambda}$$

同理，在 z 处有

$$\Delta f(z) \equiv f_0(z) - f = \frac{v(z)}{\lambda} = \frac{\sqrt{v^2(z=0) - 2az}}{\lambda} \qquad ⑰$$

于是

$$f_0(z=0)-f_0(z)=\frac{v(z=0)}{\lambda}-\frac{\sqrt{v^2(z=0)-2az}}{\lambda} \qquad ⑱$$

塞曼减速装置的设计目的是应用塞曼效应让原子处处与冷却激光共振，按题给条件有

$$f_0(B)=f_0(B=0)+\beta B$$

注意到$B(z=0)=0$，上式可写为

$$f_0(z)=f_0(z=0)+\beta B(z)$$

与⑱式比较并利用⑨式得

$$\begin{aligned}B(z)&=-\frac{v(z=0)-\sqrt{v^2(z=0)-2az}}{\beta\lambda}\\&=-\frac{v(z=0)}{\beta\lambda}\left[1-\sqrt{1-\frac{2\Gamma hz}{\lambda m v^2(z=0)}}\right]\end{aligned} \qquad ⑲$$

将$v(z=0)=v_0$，$\beta=-1.00\ \mathrm{MHz/Gs}=-1.00\times10^{10}\,\mathrm{Hz/T}$以及其它量的题给数据代入⑲式得

$$B(z)=\frac{360}{10^{10}\times670\times10^{-9}}\left[1-\sqrt{1-\frac{2\times5\times10^6\times6.626\times10^{-34}z}{670\times10^{-9}\times6.64\times10^{-26}\times360^2}}\right]=0.0537\times(1-\sqrt{1-1.15z})\ (\mathrm{T}) \qquad ⑳$$

其中，B的单位是T，B的取值范围为$0\sim0.0537$ T；z的单位是m，z的取值范围是$0\sim0.869$（或$0\sim0.870$）m。

评分参考：本题40分。

第（1）问8分，①④式各4分；

第（2）问12分，⑤⑥⑦⑧⑨⑩式各2分；

第（3）问8分，⑪⑫⑬⑭式各2分；

第（4）问12分，⑯式2分，⑰⑱式各3分，⑲⑳式各2分。

六、

（1）由对称性及高斯定理可知静电场方向沿径向，且大小仅与r有关，故

$$\begin{cases}2\pi\varepsilon_0 rE=q, & r_1<r<r_2\\E=0, & 其它\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}E=\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}, & r_1<r<r_2\\E=0, & 其它\end{cases} \qquad ①$$

（2）由对称性及磁场的环路定理可知，磁场的方向沿轴向，且大小仅与r有关。内圆筒在旋转时等效的电流密度（轴向单位长度的电流）为

$$I=\frac{q\omega}{2\pi} \qquad ②$$

内、外圆筒的电流大小相同，方向相反。应用安培环路定理有

$$\boldsymbol{B}=\begin{cases}-\dfrac{\mu_0 q\boldsymbol{\omega}}{2\pi}, & r_1<r<r_2\\0, & 其它\end{cases} \qquad ③$$

（3）点电荷在运动过程中受到由①③式所得电场和磁场共同作用，设其在运动过程中径向运动速度为$v=\dot r$。点电荷运动的角动量随时间的变化满足

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=QvBr=QBr\dot r \qquad ④$$

其中 l 为点电荷绕筒轴运动的角动量，$B=\frac{\mu_0 q\omega}{2\pi}$ 为 Q 所受磁感应强度大小。由④式积分得

$$l=\frac{1}{2}QBr^2+C$$

式中 C 为积分常数，利用初始条件：点电荷从 $r=r_1$ 释放时静止，即

$$l(r=r_1)=0$$

可得

$$l=\frac{1}{2}QB(r^2-r_1^2) \quad ⑤$$

由动能定理并利用①式得，

$$dE_{\mathrm{k}}=\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 r}dr \quad ⑥$$

积分得，当粒子位于半径 r 处时动能为

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_1} \quad ⑦$$

注意，粒子动能也可表为

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}\left(\mu v^2+\frac{l^2}{\mu r^2}\right) \quad ⑧$$

若粒子能到达 $r=r_2$ 处，则当 $r=r_2$ 时应有

$$\frac{1}{2}\mu v^2\geq 0\text{，}$$

由⑦⑧式，此条件即

$$\frac{l^2}{2\mu r_2^2}\leq\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

将③⑥式代入上式得

$$\omega^2\leq\frac{16\pi\mu r_2^2}{\varepsilon_0\mu_0^2 qQ(r_2^2-r_1^2)^2}\ln\frac{r_2}{r_1} \quad ⑨$$

（4）（i）利用（2）中结论，内筒在以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转时，在其内部产生的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}_1=\frac{\mu_0 q\boldsymbol{\omega}}{2\pi} \quad ⑩$$

外筒在以角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 旋转时，在其内部产生的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}_2=-\frac{\mu_0 q\boldsymbol{\Omega}}{2\pi} \quad ⑪$$

由法拉第电磁感应定律得，$\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_2$ 变化时在 $r=r_1$ 处产生的沿切向的感应电场为

$$E_1=-\frac{\pi r_1^2}{2\pi r_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B_1+B_2)=-\frac{\mu_0 q r_1}{4\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega-\Omega) \quad ⑫$$

对内筒的转动有

$$mr_1^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=qE_1 r_1 \quad ⑬$$

将⑫式代入⑬式得

$$\mathrm{d}\omega=\frac{\mu_0 q^2}{4\pi m+\mu_0 q^2}\mathrm{d}\Omega$$

对上式两边积分，并利用初态时内、外筒均静止的条件，得

$$\omega = \frac{\mu_0 q^2}{4\pi m + \mu_0 q^2}\Omega \qquad ⑭$$

（ii）由法拉第电磁感应定律得，$\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_2$ 变化时在 $r = r_2$ 处产生的沿切向的感应电场为

$$E_2 = -\frac{1}{2\pi r_2}\left(\pi r_1^2 \frac{\mathrm{d}B_1}{\mathrm{d}t} + \pi r_2^2 \frac{\mathrm{d}B_2}{\mathrm{d}t}\right) \qquad ⑮$$

单位长度的外筒受到的感应电场的力矩为

$$M_2 = (-q)E_2 r_2 = \frac{\mu_0 q^2}{4\pi}\left(r_1^2 \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} - r_2^2 \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\right) \qquad ⑯$$

这里应用了⑩⑪式。将⑯式两边对 t 积分并利用由 ω 与 Ω 的关系⑭可得，感应电场的力矩的冲量矩为

$$J_{电场} = \int_0^t M_2 \mathrm{d}t' = \frac{\mu_0 q^2}{4\pi}\left(\frac{\mu_0 q^2}{4\pi m + \mu_0 q^2} r_1^2 - r_2^2\right)\Omega \qquad ⑰$$

沿轴向单位长度的外圆筒的角动量为

$$L_2 = m r_2^2 \Omega \qquad ⑱$$

设外力（不包括两圆筒感应电磁场的作用力）对外圆筒的冲量矩为 J ，由角动量定理有

$$J + J_{电场} = L_2$$

故

$$J = L_2 - J_{电场} = \left[m r_2^2 - \frac{\mu_0 q^2}{4\pi}\left(\frac{\mu_0 q^2}{4\pi m + \mu_0 q^2} r_1^2 - r_2^2\right)\right]\Omega \qquad ⑲$$

（iii）沿轴向单位长度的内、外圆筒总的角动量为

$$L = L_1 + L_2 = m\left(r_1^2 \omega + r_2^2 \Omega\right) = m\Omega\left(\frac{\mu_0 q^2}{4\pi m + \mu_0 q^2} r_1^2 + r_2^2\right) \qquad ⑳$$

评分参考：本题 40 分。

第（1）问 2 分，①式 2 分；

第（2）问 4 分，②③式各 2 分；

第（3）问 12 分，④⑤⑥⑦⑧⑨式各 2 分；

第（4）问 22 分，

　　第（i）小问 10 分，⑩⑪式各 1 分，⑫⑬式各 3 分。⑭式 2 分；

　　第（ii）小问 10 分，⑮式 3 分，⑯式 2 分，⑰式 3 分，⑱⑲式各 1 分；

　　第（iii）小问 2 分， ⑳式 2 分。

七、

（1）取 x 轴沿坡面向上， y 轴垂直于坡面向上，前后轮轴处向车身提供的x方向合力满足

$$F_x = Ma + Mg\sin\theta \qquad ①$$

前、后轮轴处对车身提供的 y 方向支撑力大小分别为

$$F_{y前} = N_{前} - mg\cos\theta \qquad ②$$

$$F_{y后} = N_{后} - mg\cos\theta \qquad ③$$

其中， $N_{前}$ 和 $N_{后}$ 分别表示前轮和后轮受到的支持力大小。车身在 y 方向受力平衡条件为

$$F_{y前} + F_{y后} = Mg\cos\theta \qquad ④$$

或

$$(N_{前} - mg\cos\theta) + (N_{后} - mg\cos\theta) = Mg\cos\theta$$

车身相对于其质心没有转动加速度，力矩平衡条件为

$$F_{y前}\frac{L}{2}+F_{x}h-F_{y后}\frac{L}{2}=0 \quad ⑤$$

或

$$(N_{前}-mg\cos\theta)\frac{L}{2}+(Ma+Mg\sin\theta)h-(N_{后}-mg\cos\theta)\frac{L}{2}=0$$

联立以上各式得

$$N_{前}=mg\cos\theta+\frac{1}{2}Mg\cos\theta-\frac{h}{L}M(a+g\sin\theta) \quad ⑥$$

$$N_{后}=mg\cos\theta+\frac{1}{2}Mg\cos\theta+\frac{h}{L}M(a+g\sin\theta) \quad ⑦$$

令 $N_{前}=0$ ，得

$$a_{安全}=\frac{(2m+M)L}{2Mh}g\cos\theta-g\sin\theta \quad ⑧$$

（2）对角速度、角加速度、力矩等量，统一设逆时针方向为正方向。假定前后轮均与地面不发生滑动，则前、后轮的角加速度 $\alpha_{前}$ 、 $\alpha_{后}$ 与车身的加速度 a 满足

$$\alpha_{前}=\alpha_{后}=-\frac{a}{r}$$

设前、后轮与地面的摩擦力分别为 $F_{x前}$ 、 $F_{x后}$ ，前轮相对于其轮轴的转动满足

$$F_{x前}r=J\alpha_{前} \quad ⑨$$

由以上两式与 $J=\frac{1}{2}mr^2$ 得

$$F_{x前}=-\frac{m}{2}a \quad ⑩$$

汽车整体的质心运动方程为

$$F_{x前}+F_{x后}-(M+2m)g\sin\theta=(M+2m)a \quad ⑪$$

由⑩⑪式得

$$F_{x后}=(M+2m)(a+g\sin\theta)+\frac{m}{2}a \quad ⑫$$

后轮相对于轮轴的转动方程为

$$-\tau_{轮}+F_{x后}r=J\alpha_{后} \quad ⑬$$

由⑨⑫⑬式与 $J=\frac{1}{2}mr^2$ 得

$$a=\frac{\tau_{轮}/r-(M+2m)g\sin\theta}{M+3m} \quad ⑭$$

（3）由于变速器的机械效率为 100%，车轮与地面之间不发生滑动，没有传递功率损失，传递到车轮的力矩为

$$\tau_{轮}=\frac{\tau\omega}{\omega_{轮}}=\tau r_i \quad ⑮$$

将题给 A 型汽车参数值代入⑭式，分别对于 θ=0° 、30° 得

$$a(0^\circ)=\frac{\frac{400\times10}{0.4}}{1800}\mathrm{m\cdot s^{-2}}\approx5.6\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$a(30°)=\frac{\frac{400\times10}{0.4}-1800\times9.8\times0.5}{1800}\text{m}\cdot\text{s}^{-2}\approx0.66\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

前后轮与地面不发生滑动的条件分别为

$$\left|F_{x前}\right|\le\mu N_{前}，\quad\left|F_{x后}\right|\le\mu N_{后}$$

A 型汽车车轮质量 m 相对于车身质量可忽略，由⑩式得

$$F_{x前}=0$$

前轮无滑动的条件总是满足的。将题给 A 型汽车参数值代入⑦⑫式，对于 $\theta=0°$ 有

$$N_{后}\Big|_{\theta=0}=M\left[\frac{g}{2}+\frac{h}{L}a(0°)\right]\approx9.2\times10^{3}\ \text{N}，\tag{16}$$

$$F_{x后}\Big|_{\theta=0}=Ma(0°)=1.0\times10^{4}\ \text{N}；\tag{17}$$

对于 $\theta=30°$ 有

$$N_{后}\Big|_{\theta=30°}=M\left\{\frac{g}{2}\cos30°+\frac{h}{L}[a(30°)+g\sin30°]\right\}\approx8.0\times10^{3}\ \text{N}，\tag{18}$$

$$F_{x后}\Big|_{\theta=30°}=M[a(30°)+g\sin30°]=1.0\times10^{4}\ \text{N}\tag{19}$$

由前后轮与地面不发生滑动的条件得，摩擦系数应满足的条件

$$\mu(0°)\ge\mu_{\min}(0°)=\left.\frac{\left|F_{x后}\right|}{N_{后}}\right|_{\theta=0}=1.09，\quad\mu(30°)\ge\mu_{\min}(30°)=\left.\frac{\left|F_{x后}\right|}{N_{后}}\right|_{\theta=30°}=1.25\tag{20}$$

评分参考：本题 40 分。

第（1）问 16 分，①②③④式各 2 分，⑤式 3 分，⑥⑦式各 1 分，⑧式 3 分，;

第（2）问 16 分，⑨式 3 分，⑩式 2 分，⑪式 3 分，⑫式 2 分，⑬⑭式各 3 分，;

第（3）问 8 分，⑮式 2 分，⑯⑰⑱⑲式各 1 分，⑳式各 2 分。

八、

（1）设通过线圈电流为 I，则线圈所受磁场的力矩为

$$\tau=BIlr_{线圈}\tag{1}$$

当线圈转速为 ω 时，感应电动势为

$$\varepsilon=B\omega r_{线圈}l\tag{2}$$

线圈电流为

$$I=\frac{V-\varepsilon}{R_{总}}\tag{3}$$

式中

$$R_{总}=R_{内}+R_{线圈}$$

由①②③式得，电机输出力矩 τ 与电机转速 ω 之间的关系为

$$\tau=\tau(\omega)=Br_{线圈}l\frac{V-Br_{线圈}l\omega}{R_{总}}\tag{4}$$

可见，电机输出力矩 τ 与电机转速 ω 成线性关系。电机输出功率满足

$$P=\tau\omega=Br_{线圈}l\omega\frac{V-Br_{线圈}l\omega}{R_{总}}\tag{5}$$

它当

$$Br_{线圈}l\omega=\frac{V}{2}$$

时达到最大值

$$P_{\max}=\frac{V^2}{4R_{总}} \quad ⑥$$

由②③式知，感应电动势ε随线圈转速ω增大而增大，直至ε完全抵消供电池的开路电压V为止。这时线圈转速ω最大

$$\omega_{\max}=\frac{V}{Br_{线圈}l} \quad ⑦$$

由④式知，当$\omega=0$时电机输出力矩τ达到最大值

$$\tau_{\max}=\tau(\omega=0)=Br_{线圈}l\frac{V}{R_{总}}=4\frac{P_{\max}}{\omega_{\max}} \quad ⑧$$

由④⑥⑦⑧式知，电机输出力矩τ可表为

$$\tau=\tau(\omega)=\frac{4P_{\max}}{\omega_{\max}}\left(1-\frac{\omega}{\omega_{\max}}\right)=\tau_{\max}\left(1-\frac{\omega}{\omega_{\max}}\right) \quad ⑨$$

（2）当汽车行驶速度为v时，车轮转速为

$$\omega_{轮}=\frac{v}{r}$$

电机转速为

$$\omega=\omega_{轮}r_i=\frac{v}{r}r_i \quad ⑩$$

电机输出力矩为

$$\tau=\tau_{\max}\left(1-\frac{r_iv}{r\omega_{\max}}\right) \quad ⑪$$

由于变速器的机械效率为100%，车轮与地面之间不发生滑动，没有传递功率损失，传递到车轮的力矩为

$$\tau_{轮}=\frac{\tau\omega}{\omega_{轮}}=\tau r_i=\tau_{\max}\left(1-\frac{r_iv}{r\omega_{\max}}\right)r_i \quad ⑫$$

由题给信息和⑫式得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=a=\frac{\tau_{轮}/r}{M+3m}=\frac{\tau_{\max}}{(M+3m)r}r_i-\frac{\tau_{\max}}{(M+3m)r}r_i^2\frac{1}{r\omega_{\max}}v \quad ⑬$$

初值

$$v(t=0)=0$$

解为

$$v(t)=\frac{r\omega_{\max}}{r_i}\left[1-\exp\left(-\frac{\tau_{\max}r_i^2}{(M+3m)r^2\omega_{\max}}t\right)\right]=v_{\max}\left(1-e^{-\frac{a_{\max}}{v_{\max}}t}\right) \quad ⑭$$

式中

$$v_{\max}=\frac{r\omega_{\max}}{r_i} \quad ⑮$$

为汽车在平地上行驶时最高车速，而

$$a_{\max}=\frac{\tau_{\max}}{(M+3m)r}r_i \quad ⑯$$

为汽车在平地上行驶时最大加速度。

（3）对 A 型汽车有

$$\omega_{\max}=4\frac{P_{\max}}{\tau_{\max}}=4\times\frac{2.0\times10^{5}}{400}\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}=2.0\times10^{3}\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

于是

$$v_{\max}=\frac{r\omega_{\max}}{r_i}=\frac{0.4\times2.0\times10^{3}}{10}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=80\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$a_{\max}=\frac{\tau_{\max}}{Mr}r_i=\frac{400}{1800\times0.4}\times10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}=5.6\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

A 型汽车从静止加速到 v_f 所需时间为

$$t_f=-\frac{v_{\max}}{a_{\max}}\ln\left(1-\frac{v_f}{v_{\max}}\right)=-\frac{80}{5.6}\ln\left(1-\frac{\frac{100}{3.6}}{80}\right)\ \mathrm{s}\approx6.1\ \mathrm{s}$$

根据（1）中的结果，电池提供的瞬时功率为

$$P_{电池}=IV=4P_{\max}\left(1-\frac{v}{v_{\max}}\right)$$

加速过程消耗的电池能量为

$$\Delta E_{电池}=\int_{t=0}^{t_f}4P_{\max}\left(1-\frac{v(t)}{v_{\max}}\right)\mathrm{d}t=4P_{\max}\frac{v_{\max}}{a_{\max}}(1-e^{-\frac{a_{\max}}{v_{\max}}t_f})=4P_{\max}\frac{v_f}{a_{\max}} \qquad ⑰$$

由于机械部分没有摩擦损耗，加速过程所增加的机械能为

$$\Delta E_{机械能}=\frac{1}{2}(M+2m)v_f^2+2\times\frac{1}{2}J\left(\frac{v_f}{r}\right)^2=\frac{1}{2}(M+3m)v_f^2 \qquad ⑱$$

电池能量转化为机械能的效率为

$$\eta=\frac{\Delta E_{机械能}}{\Delta E_{电池}}=\frac{(M+3m)a_{\max}v_f}{8P_{\max}} \qquad ⑲$$

代入 A 型汽车参数值得

$$\Delta E_{电池}\approx4\times2.0\times10^{5}\times\frac{\frac{100}{3.6}}{5.6}\ \mathrm{J}\approx4.0\times10^{6}\ \mathrm{J}\approx1.1\ \mathrm{kWh}$$

于是

$$\eta=\frac{1800\times5.6\times\frac{100}{3.6}}{8\times2.0\times10^{5}}=18\%\text{（或 }17\%\text{）} \qquad ⑳$$

评分参考：本题 40 分。

第（1）问 13 分，①②③④式各 2 分，⑤⑥⑦式各 1 分，⑧式 2 分；

第（2）问 16 分，⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯式各 2 分；

第（3）问 11 分，⑰⑱⑲式各 3 分，⑳式 2 分。