1 Fourrier Reihe

1.1 Einleitung

Wir fangen mit einem Beispiel an. Wir wollen uns eine Antenne und vor allem die Ladungsverteilung auf dieser anschauen. Dabei haben wir in einer gewissen Perioditát die Ladung verteilt. In unserem ersten Beispiel in Abbildung 1 jetzt wie eine Sinuskurve:

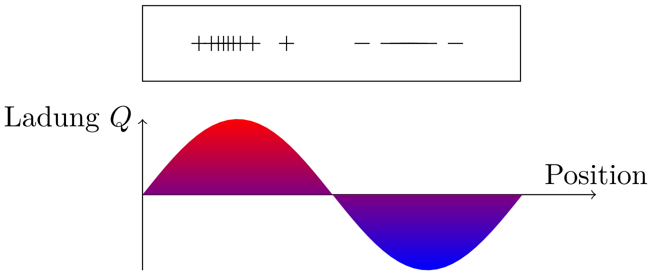

Figure 1: Ladungsverteilung auf Antenne

Diese Ladungsverteilung brauchen wir, da wir damit das Elektrodynamische Problem der Signawelle lösen können. Dann könnten wir zum Beispiel bestimmen, wie die Signalstärke von der Richtung abhängig ist.

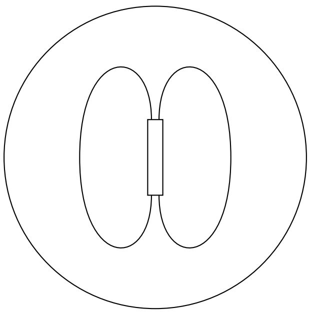

Figure 2: Elektrisches Feld um Antenne

Da wir die Kurve zur Mathematik bekommen wollen fangen wir jetzt mit Sinuskurven an. Wir denken uns in Abbildung 3 ein periodische Ladungsverteilung aus, und spalten diese in verschiedene Sinusfunktionen auf:

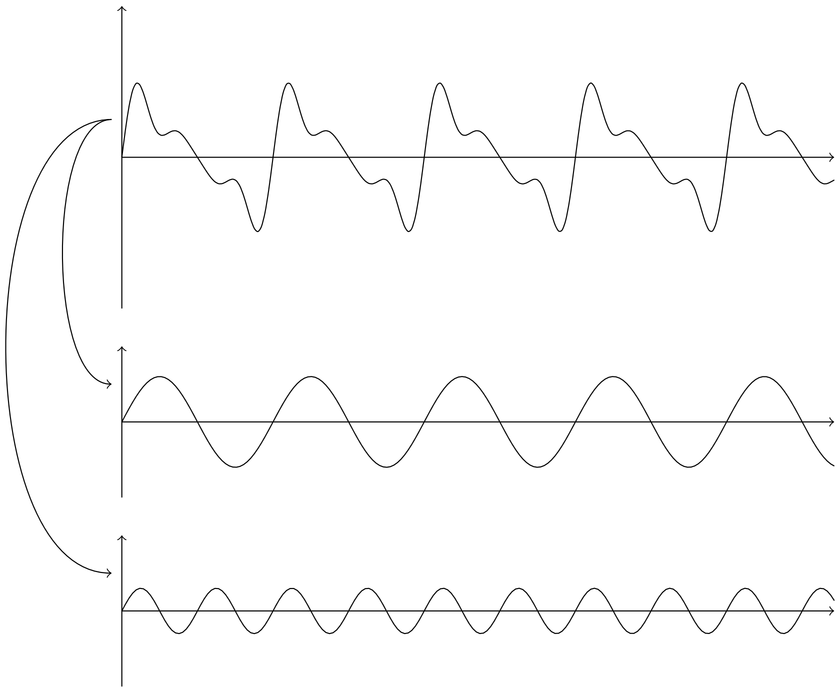

Figure 3: Aufteilung der Ladungsverteilung auf verschieden Frequenzen

Da wir eine periodische Funktion haben können von einem Randproblem ausgehen. Bei jeder Wiederholung startet unsere Verteilung bei $f(n \cdot T) = 0$. Dann können wir davon ausgehen, dass wir unser Problem mit verschiedenen Sinusfunktionen lösen können:

$$v_i(x) = sin(i \cdot xf) \tag{1}$$

Da wir die Form unserer Sinusfunktionen nun kennen, brauchen wir nur den Anteil der einzelnen Sinusfunktionen an unserer Verteilung:

$$f(x) = a_1 v_1(x) + a_2 v_2(x) + ... \tag{2}$$

Interessant ist jetzt nur noch die Amplitude der einzelnen Schwingungen:

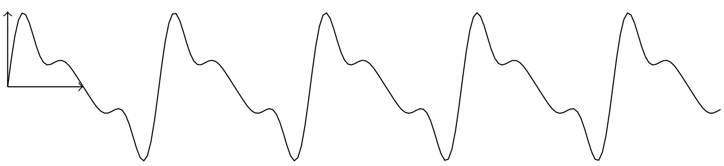

Figure 4: Ablesen der Amplituden von den einzelnen Schwingungen

Nach dieser Aufteilung der Amplituden kann man die Grafik auch als Superpositiion der einzelnen Schwingungen schreiben. Die Grafik 3 können wir dadurch als Gleichung aufschreiben.

1.2 Aufteilung auf die Frequenzen - Tupelform der Verteilung

Die Verteilung können wir in verschiedene Schwingungen aufteilen:

$$f(x) = a_1 v_1(x) + a_2 v_2(x) + ... \tag{3}$$

Da wir die Form unserer Schwingungen kennen, brauchen wir für die vollständige Darstellung der Verteilung nur die einzelnen Amplituden. Wir können also die Funktion durch ein Tupel darstellen:

$$f = (a_1, a_2, a_3, ...) \tag{4}$$

Das sieht jetzt schon sehr nach einem Vektor aus. Für einen Vektor brauchen wir aber am besten noch ein Skalarprodukt:

$$a_i =< f|v_i > \tag{5}$$

Mit diesem wollen wir dann auch eine beliebige Verteilung auf einen anderen Vektor abbilden können, wie in unserer Abbildung 5 beispielhaft auf die erste Sinusschwingung(längste Wellenlänge).

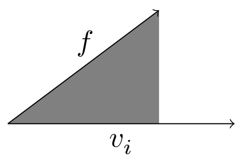

Figure 5: Darstellung des Skalarprodukts in Vektordarstellung

1.3 Skalarprodukt stehender Wellen

Wir brauchen ein Skalarprodukt, dass uns erlaubt eine beliebige Wellenfunktion auf eine Basisschwingung abzubilden. Dafür bedienen wir uns einer der Eigenschaften von Sinusfunktionen. Wir modulieren dafür verschiedene Schwingungen $v_{2,3,...}$ mit einer Schwingung v_1. Danach mitteln wir über eine Periode$1/f$.

$$\int_{1/f} v_{2,3,...}(x) \cdot v_1(x) \mathrm{d}x = 0 \tag{6}$$

Diese Mittelung ist gleich null, wenn die Frequenz nicht die gleiche ist. bei gleichen Frequenzen erhält man einen Beitrag $\neq 0$. Wie in Abbildung 4 kann man eine beliebige periodische Funktion auf verschiedene Wellen aufteilen:

$$f(x) = \sum_i a_i v_i(x) \tag{7}$$

Wenn man eine Verteilung wie oben moduliert und danach mittelt, fallen alle Beiträge von Schwingungen die nicht unserer untersuchten Frequenz entsprechen weg:

$$\int_{1/\nu} f(x)v_1(x)\mathrm{d}x = \int_{1/\nu} a_1 v_1^2(x)\mathrm{d}x \tag{8}$$

$$= a_1 \int_{1/f} v_1^2(x)\mathrm{d}x \tag{9}$$

Wir erhalten also aus dieser Rechnung den Beitrag einer Schwingung a_1 an unserer Verteilung f. Dies kann man auch mit den anderen Schwingungen v_i durchführen und kann dadurch die anderen Beiträge a_i ermitteln. Außerdem haben wir jetzt eine Rechnungsmethode gefunden die unserem gesuchten Skalarprodukt entspircht:

$$< f|v_i >= \frac{1}{\alpha_i} \int_{1/\nu} f(x)v_i(x)\mathrm{d}x \tag{10}$$

Dabei brauchen wir auch noch einen Normierungsfaktor α:

$$\alpha_i =< v_i|v_i > \tag{11}$$

1.4 Gewichtungsfaktor bzw Proportionalitätsfaktor

Beider Mittelung kommt es zu einem Vergrößerungsfaktor α. Diesen kann man berechnen indem man den Beitrag einer Welle zu sich selbst berechnet:

$$< v_i|v_i >= \frac{1}{\alpha} \int \sin^2(x)\mathrm{d}x \tag{12}$$

1.5 Fourrieretransformation - allgemein

Ursprünglich hatten wir nur bestimmte Schwingungen zugelassen, zB nur sinus-Schwingungen. Wir wollen jetzt zu etwas allgemeineren Formulierungen übergehen und erstmal cosinus-Schwingungen zulassen:

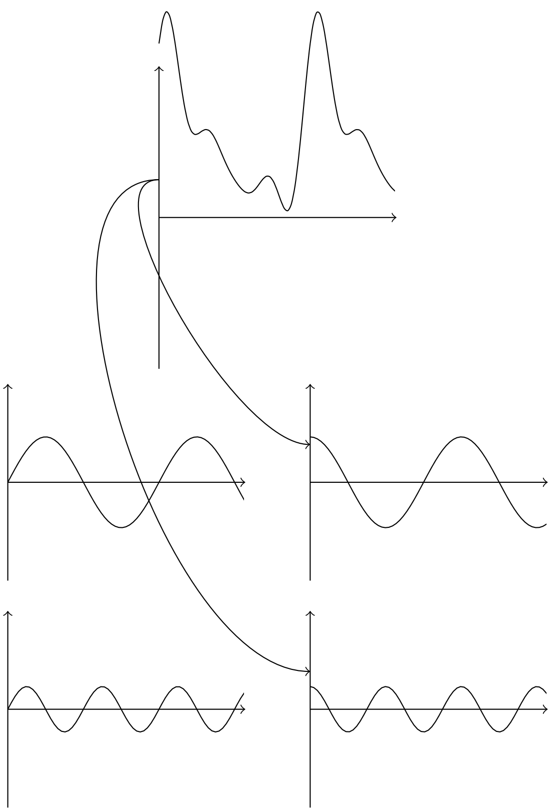

Figure 6: Aufteilung in sinus und cosinus-Schwingungen

Da wir keine zwei unterschiedlichen Arten von Basen verwenden wollen, also sinus-Basen v_i und cosinus-Basen u_i, wollen wir bei einheitliche zusammenfassen. Dies können wir über die Exponentialfunktion verwirklichen:

$$\exp(\pm ikx) = \cos(kx) \pm \sin(kx) \tag{13}$$

Durch den Zusammenhang 13 zwischen exponential-Funktion und den trigonometrischen Funktionen können wir nun uns auf eine Basis nur von Exponentialfunktionen beschränken:

$$w_n = \exp(ik_n x) \tag{14}$$

Hierbei sind allerdings auch negative Wellenvektoren k zugelassen.

1.6 kontinuirliche Basis

Als letzten Schritt gehen wir von einer diskreten Basis w_n zu einer kontinuirichen Basis über.

Figure 7: Übergang von diskreten Basis zu einer kontinuirlichen Basis

Wir beschränken uns nun nicht mehr auf einen Index, dem dann Wellenvektoren zugeordnet sind, sondern erlauben alle möglichen Wellenvektoren k:

$$w(k) = \exp(ikx) \tag{15}$$

Nun erhalten wir nach der Fourrieretransformation nicht mehr Amplituden einzelner Schwingungen sondern eine Verteilung der Schwingungen:

$$A(k) = \frac{1}{\alpha} \int f(x) \exp(-ikx) \mathrm{d}x \tag{16}$$

Dies führt dazu, dass unsere Ursprungsfunktion $f(x)$ wieder auf eine Funktion $A(k)$ abgebildet wird:

Figure 8: Abbildung einer Funktion zu ihrer Fourrieretransformierten

1.7 Rücktransformation

2 Fourrierereihe

2.1 Erweiterung von der Fourriereihe

Bis jetzt haben wir nur periodische Funktionen $f(x) = f(x+T)$ in Frequenzen aufgeteilt, also in eine Fourriereihe aufgeteilt. Jetzt stellt sich natürlich die Frage geht dass denn mit jeder beliebigen Funktion $f(x) \neq f(x+T)$? Der einfachste Ansatz und das was wir hier machen werden ist schon von einer periodischen Funktion auszugehen, allerdings wiederholt sich die Funktion erst in der Unendlichkeit. Dann können wir unsere Funktion wieder in ihre Bestandteile auflösen:

$$f(x) = \sum_j exp(-i(k + \Delta k * j) * x) \tag{17}$$

Da