第三章　随机变量的数字特征

§3.1　数学期望　§3.2　方差

一、填空题

1.若随机变量 X 服从参数为 $n,\ p$ 的二项式分布，则 $E(X)=\underline{np}$ 、$D(X)=\underline{npq}$.

2.已知随机变量 X 的分布律为: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$, 则 $Y=g(X)=5X^2+X-1$ 的期望 $E(Y)=\underline{37.8\quad}$.

3.若 X 、Y 是两个相互独立随机变量，且 $E(X)=2,E(Y)=5,$ 则 $E(3X-5Y)=\underline{-19}$.若 $D(X)=2,D(Y)=5,$ 则 $D(3X-5Y)=\underline{143\quad}$.

4.已知连续型随机变量 X 的概率为 $f(X)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$,则 X 的数学期望为 $\underline{1}$, X 的方差为 $\underline{0.5\quad}$.

二、计算下列各题

1. 设球直径的测量值在 $[a,b]$ 上服从均匀分布,求球体积 V 的数学期望.

解　设球的直径为 X ,其概率密度为 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

则球的体积　$Y=g(x)=\frac{\pi x^3}{6}$,

$$E(Y)=E[g(x)]=\int_a^b \frac{\pi}{6}x^3\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{\pi}{6(b-a)}\cdot\frac{1}{4}x^4\Big|_a^b=\frac{\pi}{24}(a+b)(a^2+b^2)$$

2. 设随机变量 X 服从 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 上的均匀分布，$y=g(x)=\begin{cases} \ln x, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$,求 $Y=g(x)$ 的数学期望和方差。

解　　X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases} 1, & -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

$$E(Y)=E(g(x))=\int_0^{\frac{1}{2}}\ln x dx=-\frac{1+\ln 2}{2},$$

$$E\left(Y^2\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}\ln^2 x dx=\frac{(\ln 2)^2}{2}+\ln 2+1,\quad D(Y)=\frac{1}{4}(\ln 2)^2+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3}{4}.$$

3. 某射手每次命中目标的概率为 0.8,连续射击一个目标,直至命中目标一次为止。求射击次数的期望和方差。

解 $A_k=$“第 K 次命中目标”, $K=1,2\cdots$

$$P\{x=k\}=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{k-1}}A_k)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_{k-1}})P(A_k)=(1-0.8)^{k-1}\cdot 0.8$$

$$E(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot 0.2^{k-1}\cdot 0.8=0.8\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot 0.2^{k-1},$$

取 $S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^k\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$, $|x|<1$,

所以 $E(x)=\frac{0.8}{(1-0.2)^2}=\frac{1}{0.8}=1.25$, $E(x^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot 0.2^{k-1}\cdot 0.8=0.8\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot 0.2^{k-1}$,

取 $g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2x^{k-1}=\left(x\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}\right)'=\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'=\frac{1+x}{(1-x)^3}$, $|x|<1$

故 $E\left(x^2\right)=0.8\cdot\frac{1+0.2}{(1-0.2)^3}=1.875$, 从而 $D(x)=E\left(x^2\right)-(Ex)^2=0.3125$.

4. 设轮船横向摇摆的振幅 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}Axe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$, σ 为常数

试确定常数 A,并求 $E(X)$、$D(X)$ 和 $P\{X>E(X)\}$.

解 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=A\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=-A\sigma^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{+\infty}=A\sigma^2=1, A=\frac{1}{\sigma^2}$

$$E(X)=\frac{1}{\sigma^2}\int_0^{+\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}dx=-\int_0^{+\infty}xde^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}=-xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{\sqrt{2\pi}\sigma}{2}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$$

$$E\left(X^2\right)=\frac{1}{\sigma^2}\int_0^{+\infty}x^3e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx\overset{令t=\frac{x^2}{2\sigma^2}}{=\!=\!=\!=}2\sigma^2\int_0^{+\infty}te^{-t}dt=-2\sigma^2\int_0^{+\infty}tde^{-t}=2\sigma^2$$

$$D(X)=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2=2\sigma^2-\frac{\pi}{2}\sigma^2=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$$

$$P\{X>E(X)\}=1-P\{X\le E(X)\}=1-\int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma}f(x)dx=1-\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma}\frac{1}{\sigma^2}xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=e^{-\frac{\pi}{4}}$$

5. 设$(X、Y)$的联合分布为右表

(1) 求$E(X)$、$E(Y)$

(2) 设$Z=Y/X$、求$E(Z)$

(3) 设$W=(X-Y)^2$、求$E(W)$.

Y \ X	1	2	3
-1	0.2	0.1	0
0	0.1	0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

解 $E(Y)=(0.2+0.1+0)\times(-1)+(0.1+0+0.3)\times 0+(0.1+0.1+0.1)\times 1=0$

$E(X)=(0.2+0.1+0.1)\times 1+(0.1+0+0.1)\times 2+(0+0.3+0.1)\times 3=2$

Z	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
P	0.2	0.1	0	0.4	0.1	0.1	0.1

W	0	1	4	9	16
P	0.1	0.2	0.3	0.4	0

$$E(Z)=0.2\times(-1)+0.1\times\left(-\frac{1}{2}\right)+0.1\times 1+0.1\times\frac{1}{3}+0.1\times\frac{1}{2}=-0.0667$$

$$E(W)=0.1\times 0+0.2\times 1+0.3\times 4+0.4\times 9+0\times 16=5.$$

6. 已知随机变量X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{m!}x^m e^{-x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$，求$E(X)$和$D(X)$,并证明

$P\{0<X<2(m+1)\}\ge\frac{m}{m+1}$.

解 $E(X)=\frac{1}{m!}\int_0^{+\infty}x^{m+1}e^{-x}dx=-\frac{1}{m!}x^{m+1}e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\frac{m+1}{m!}\int_0^{+\infty}x^m e^{-x}dx=m+1$

$$E(X^2)=\frac{1}{m!}\int_0^{+\infty}x^{m+2}e^{-x}dx=(m+2)(m+1)$$
$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=(m+2)(m+1)-(m+1)^2=m+1$$
$$P\{0<X<2(m+1)\}=P\{|X-(m+1)|<m+1\}\ge 1-\frac{m+1}{(m+1)^2}=\frac{m}{m+1}$$

§3.3 协方差和相关系数

§3.4 矩、协方差矩阵

一、填空题

1. 已知随机变量 $X\sim N(-3,\ 1)$, $Y\sim N(2,\ 1)$, 且 X,Y 相互独立, 设随机变量 $Z=X-2Y+7$, 则 $Z\sim$ $\underline{N(0,5)}$.

2. 已知 $D(X)=25, D(Y)=36, \rho_{XY}=0.4$, 则 $D(X+Y)=\underline{85}$, $D(X-Y)=\underline{37}$.

3. 随机变量 $X\sim N(2,16)$, Y 服从参数 $\lambda=0.5$ 的指数分布, X,Y 的相关系数 $\rho_{XY}=0.5$ ，则 $D(X+Y)=\underline{28}$.

二、单项选择题

1. 如果 X 和 Y 满足 $D(X+Y)=D(X-Y)$, 则必有 （B）

(A) X 和 Y 独立,　(B) X 和 Y 不相关,　(C) $D(Y)=0$,　(D) $D(X)D(Y)=0$

2. 设随机变量 X 和 Y 独立同分布,记 $U=X+Y, V=X-Y$ 则 U 和 V 必然 （D）

(A) 不独立,　(B) 独立,　(C) 相关系数不为零,　(D) 相关系数为零.

三、计算下列各题

1. 若随机变量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布 $D=\{(x,y)|0<x<1, 0<y<x\}$, 求随机变量 X ,Y 的相关系数.

解 $A=\iint_D dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x dy=\frac{1}{2},\quad f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$

$$E(x)=2\int_0^1 xdx\int_0^x dy=\frac{2}{3},\quad E(x^2)=2\int_0^1 x^2dx\int_0^x dy=\frac{1}{2}, D(x)=E(x^2)-(E(x))^2=\frac{1}{18}$$

$$E(y)=2\int_0^1 dx\int_0^x ydy=\frac{1}{3},\quad E(y^2)=2\int_0^1 dx\int_0^x y^2dy=\frac{1}{6}, D(y)=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{18},$$

$$E(xy)=2\int_0^1 xdx\int_0^x ydy=\frac{1}{4}, Cov(x,y)=E(xy)-E(x)E(y)=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{36}.$$

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sqrt{D(x)}\sqrt{D(y)}}=\frac{\frac{1}{36}}{\sqrt{1/18}\sqrt{1/18}}=\frac{1}{2}.$$

2. 设随机变量 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=A\sin(x+y)\quad 0\le x\le\frac{\pi}{2}\ ,\quad 0\le y\le\frac{\pi}{2}$

求：（1）系数 A; (2) $E(x)$, $E(y)$, $D(x)$, $D(y)$;（3）协方差及相关系数.

解 (1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = A\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)dy = 2A = 1,\quad A = 0.5$

(2) $E(x) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x+y)dy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x + \sin x)dx = \frac{\pi}{4}$

$E(x^2) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(x+y)dy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\cos x + \sin x)dx = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} - 2$

$D(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2;$

由X与Y的对称关系,知 $E(Y) = \frac{\pi}{4},\quad D(Y) = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2.$

(3) $E(xy) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} xy\sin(x+y)dy = \frac{\pi}{2} - 1$

于是 $\mathrm{cov}(x,y) = E(xy) - E(x)E(y) = \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\pi^2}{16}$，$\rho_{xy} = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sqrt{D(x)}\sqrt{D(y)}} = -\frac{\pi^2 - 8\pi + 16}{\pi^2 + 8\pi - 32}.$

3. 设随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$，求 X,Y 的相关系数.

解 $E(X) = \int_0^1 dx\int_0^1 x(2-x-y)dy = \frac{5}{12}$，$E(X^2) = \int_0^1 dx\int_0^1 x^2(2-x-y)dy = \frac{1}{4}$

$D(X) = \frac{1}{4} - \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}$，由对称性 $E(Y) = \frac{5}{12}$，$D(Y) = \frac{11}{144}$,

$E(XY) = \int_0^1 dx\int_0^1 xy(2-x-y)dy = \frac{1}{6}$，$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{1}{144}$

所以 X和Y的相关系数为 : $\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = -\frac{1}{11}$

4. 设随机变量 X 服从$[-\pi,\pi]$上的均匀分布，令 $Y = \sin X, Z = \cos X$.求 ρ_{YZ}

解 X的密度函数为 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi \le x \le \pi \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

$E(Y) = \int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{2\pi}\sin xdx = 0,\quad E(Z) = \int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{2\pi}\cos xdx = 0,$

$E(YZ) = \int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{2\pi}\sin x\cos xdx = 0,\quad \mathrm{cov}(Y,Z) = E(YZ) - E(Y)E(Z) = 0,$

所以 $\rho_{YZ} = \frac{\mathrm{cov}Y,Z)}{\sqrt{D(Y)}\sqrt{D(Z)}} = 0.$

四、证明题

设 X,Y 是随机变量，$U = aX + b, V = cY + d$. 其中 a,b,c,d 为常数，且 a,c 同号.证明：$\rho_{UV} = \rho_{XY}$

证 $\rho_{UV} = \frac{Cov(aX+b, cY+d)}{\sqrt{D(aX+b)}\sqrt{D(cY+d)}} = \frac{abCov(X,Y)}{ab\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \rho_{XY}.$