粉笔直播课

方法精讲-数量 3

（笔记）

主讲教师：牟立志

授课时间：2024.08.09

方法精讲-数量 3（笔记）

学习任务：

1. 课程内容：行程问题、几何问题

2. 授课时长：3 小时

3. 对应讲义：第 203～208 页

4. 重点内容：

（1）掌握行程问题的基础公式与匀变速运动平均速度公式

（2）掌握直线和环形上的相遇、追及问题计算公式，用图示来理解复杂的运动过程

（3）掌握几何问题基本公式及其运用

（4）掌握勾股定理、特殊三角形及面积相关的知识

《数量关系必备能力》

①连续的分析能力：每个条件，能往下分析一步

②认知：看到什么，想到什么

③积累：积累套路

01 行程问题

02 几何问题

【注意】本节课讲解行程问题、几何问题，难度较高，可能需要画图理解题目。如果对题目的理解、画图能力欠缺，这种题目做起来会很困难。

第六节　行程问题

《行程问题的认知》

①画图分析

②判题型，用公式，填已知，求未知

【注意】

1. 画图分析：边读题、边画图、边分析。

2.大部分是套路题，判题型，用公式，填已知，求位置。比如是相遇问题，判断题型之后，思考公式是什么，填已知、求未知。

《行程问题的题型》

基础行程：

①路程=速度*时间

②匀加速→平均速度=（初速度+末速度）/2

相对行程：

①相遇问题→相遇路程=速度和*时间

②追及问题→追及路程=速度差*时间

【注意】基础行程：

1.路程=速度*时间。

2.匀加速→平均速度=(初速度+末速度)/2，匀加速的速度每分钟变化相同，类比等差数列求中项，等差中项=（首项+末项）/2。

3.相对行程：

（1）相遇问题→相遇路程=速度和*时间。

（2）追及问题→追及路程=速度差*时间。

【例1】（2024国考网友回忆版）甲和乙两辆车同时从A地出发匀速开往B地，甲车出发时的速度比乙车快20%，但乙车行驶1个小时后速度加快30千米/小时继续匀速行驶，又用了3小时与甲车同时抵达，则A、B两地相距多少千米？

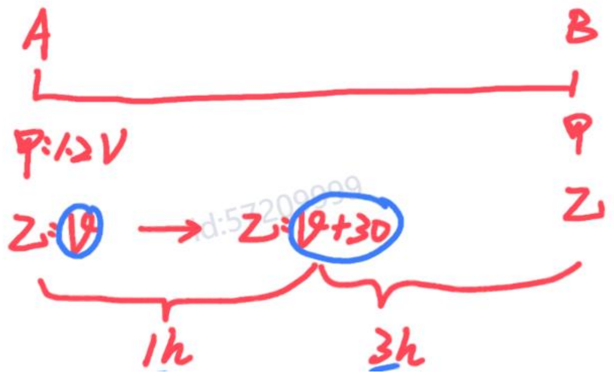
A.540　　　　B.510

C.600　　　　D.570

【解析】1.根据题意画图，题目中没有给甲车或者乙车的速度，可以假设，甲车出发的速度比乙快了20%，设乙出发的速度为V，则甲的速度为V*（1+20%）=1.2V。“乙车行驶1个小时后速度加快30千米/小时继续匀速行驶”，乙车1小时之后速度变为V+30。边读题边画图边分析，求AB的距离，甲、乙都是从A到B，可以分别看。甲速度一直是1.2V，走了1+3=4小时，S_{AB}=1.2*V*（1+3）=4.8V。乙先以V的速度走1小时，又以V+30的速度走3小时，S_{AB}=V*1+（V+30）*3，得

到方程：4.8V=V*1+(V+30)*3→4.8V=4V+90→0.8V=90，S_{AB}=4.8V=6*0.8V=6*90=540。

【选 A】

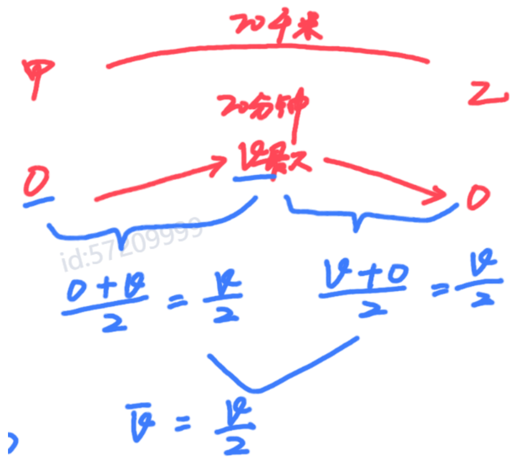


【例 2】（2023 山东）一辆车从甲地行驶到乙地共 20 千米，用时 20 分钟，已知该车在匀加速到最大速度后开始匀减速，到乙地时速度恰好为 0，问该车行驶的最大速度是多少千米/小时？

A. 100　　　　　　　　B. 108

C. 116　　　　　　　　D. 120

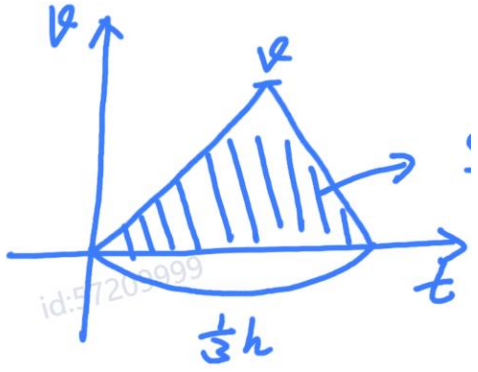
【解析】2. 方法一：从甲出发的时候，速度为 0，匀加速达到最大的速度，之后匀减速到乙地速度刚好为 0，匀加速、匀减速，但加速度不一定相同。匀加速过程，从速度 0 加速到 V，平均速度=（0+V）/2=V/2；匀减速过程，平均速度（V+0）/2=V/2。前一段的平均速度、后一段的平均速度都是 V/2，则总的平均速度就是 V/2。整个过程 S=Vt，总路程=20 千米，速度单位是千米/小时，则时间 20 分钟=1/3 小时，列式：20=V/2*1/3→20=V/6→V=120。



方法二：20 分钟=1/3 小时，S=Vt，20=$\overline{V}$*t，则整个过程的平均速度=60，前

一段的平均速度、后一段的平均速度都是 V/2，则总的平均速度就是 V/2。V/2=60→$V_{最大}$=120，选择 D 项。

方法三：画 Vt 图，时间 1/3 小时，速度匀加速到最高点，之后匀减速到 0，要求速度。y 轴和 x 轴共同围成的面积就是路程，S=1/3*（$V_{最大}$/2）→20=$V_{最大}$/6→$V_{最大}$=120。【选 D】

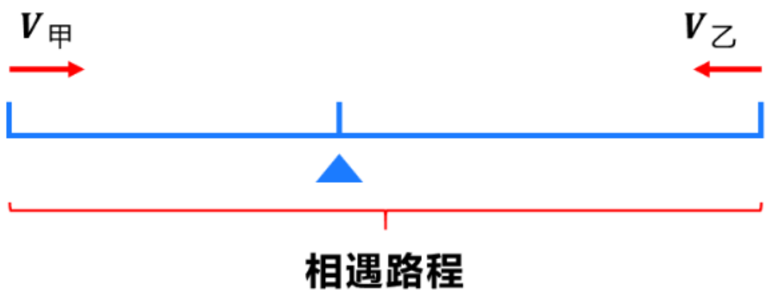


《直线相遇》

例：甲的速度为 1 米/秒，乙的速度为 2 米/秒，两人从 A、B 同时出发，相向而行，经过 100 秒相遇，问：A、B 两地距离相距多少？

识别：两人从两地相向而行

公式：$S_{相遇}$=（V_1+V_2）*时间

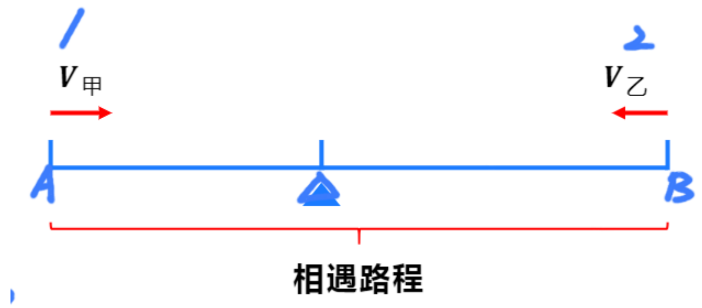


注：相遇路程为在相遇过程中两人走的路程之和

【注意】直线相遇：平时做题的时候要识别出来，要考查的等量关系，需要记住公式。

1.例：甲的速度为 1 米/秒，乙的速度为 2 米/秒，两人从 A、B 同时出发，相向而行，经过 100 秒相遇，问：A、B 两地距离相距多少？

答：相向而行即向着对方行进，相遇的过程，$S_{相遇}$=$V_{和}$t，S_{AB}=(1+2)*100=300。相遇过程是甲走的一段加上乙走的一段。



2. 识别：两人从两地相向而行。

3. 公式：$S_{相遇}$=（V_1+V_2）*时间。

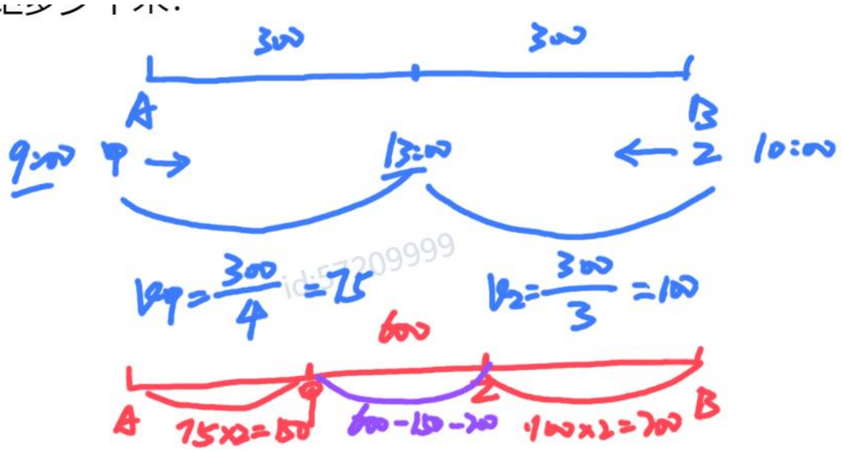
4. 注：相遇路程为在相遇过程中两人走的路程之和。

【例 3】（2020 新疆）A、B 两地相距 600 千米，甲车上午 9 时从 A 地开往 B 地，乙车上午 10 时从 B 地开往 A 地，到中午 13 时，两辆车恰好在 A、B 两地的中点相遇。如果甲、乙两辆车都从上午 9 时由两地相向开出，速度不变，到上午 11 时，两车还相距多少千米？

A. 100　　B. 150

C. 200　　D. 250

【解析】3. 画图理解，从 9：00→13：00 甲走了 4 个小时，从 10：00→13：00 乙走了 3 个小时，此时他们各自走了一半，已知甲、乙的路程和时间，$V_{甲}$=300/4=75、$V_{乙}$=300/3=100。“如果甲、乙两辆车都从上午 9 时由两地相向开出，速度不变，到上午 11 时”，甲乙各走了两个小时，共走了 $S_{和}$=（75+100）*2=350，所求=600-350=250，对应 D 项。【选 D】

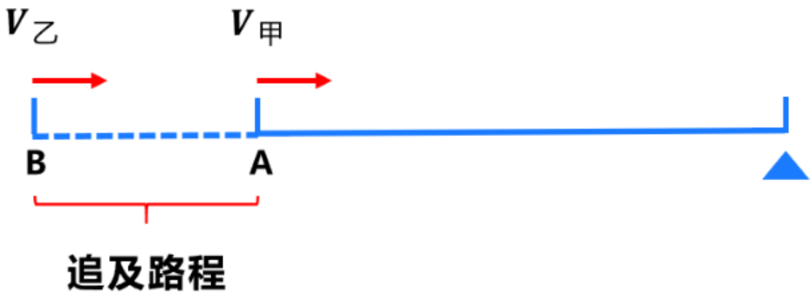


《直线追及》

例：甲的速度为 1 米/秒，乙的速度为 2 米/秒，甲从 A、乙从 B 同时出发，同向而行，经过 100 秒乙追上甲，问：A、B 两地距离相距多少？

识别：两人从两地同向而行

公式：$S_{追及}$=（$V_{大}$-$V_{小}$）*时间

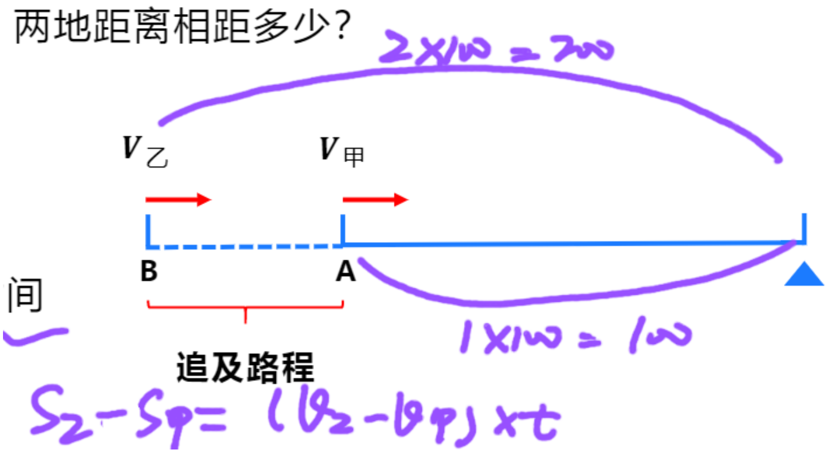


注：追及路程为多走的距离，也可以理解为：两人原始相距的距离

【注意】直线追及：追及和追击是有区别的，追及是追上就结束，追击是追上去攻击。

1. 例：甲的速度为 1 米/秒，乙的速度为 2 米/秒，甲从 A、乙从 B 同时出发，同向而行，经过 100 秒乙追上甲，问：A、B 两地距离相距多少？

答：“追”需要相同的方向，速度快的追速度慢的，甲速度慢乙速度快，经过一段时间后乙能追上甲，同时出发同时追上，时间都是 100 秒，$S_{乙}$=2*100=200、$S_{甲}$=1*100=100，两者原来相距 $S_{差}$=$S_{乙}$-$S_{甲}$=（$V_{乙}$-$V_{甲}$）*t。



2. 识别：两人从两地同向而行。

3. 公式：$S_{追及}$=（$V_{大}$-$V_{小}$）*时间。

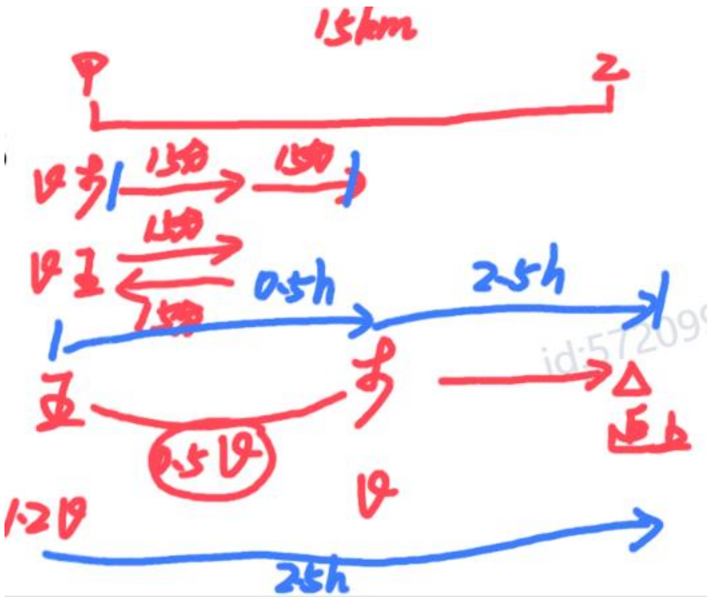
4. 注：追及路程为多走的距离，也可以理解为两人原始相距的距离，开始相差的距离是一个定值。

【例 4】（2020 深圳）小王和小李从甲地去往相距 15km 的乙地调研。两人同时出发且速度相同。15 分钟后，小王发现遗漏了重要文件遂立即原路原速返回，小李则继续前行；小王取到文件后提速 20%追赶小李，在小李到达乙地时刚好追上，假设小王取文件的时间忽略不计，则小李的速度为多少 km/h？

A. 4　　　　B. 4.5

C. 5　　　　D. 6

【解析】4.“两人同时出发且速度相同”，假设小王、小李速度均为 V，“15 分钟后，小王发现遗漏了重要文件遂立即原路原速返回，小李则继续前行”，小王往回走需要 15 分钟，同时小李往前走了 15 分钟，此时两人相距 0.5 小时（30 分钟）小李走的路程——0.5V。“小王取到文件后提速 20%追赶小李”，小王速度变为 1.2V。本题为追及问题，公式：$S_{追}=V_{差}*t$→0.5V=（1.2V-V）*t→t=0.5V/（0.2V）=2.5h，对于小李来讲，从甲→乙走了 0.5+2.5=3h，所求 V=15/3=5，对应 C 项。【选 C】



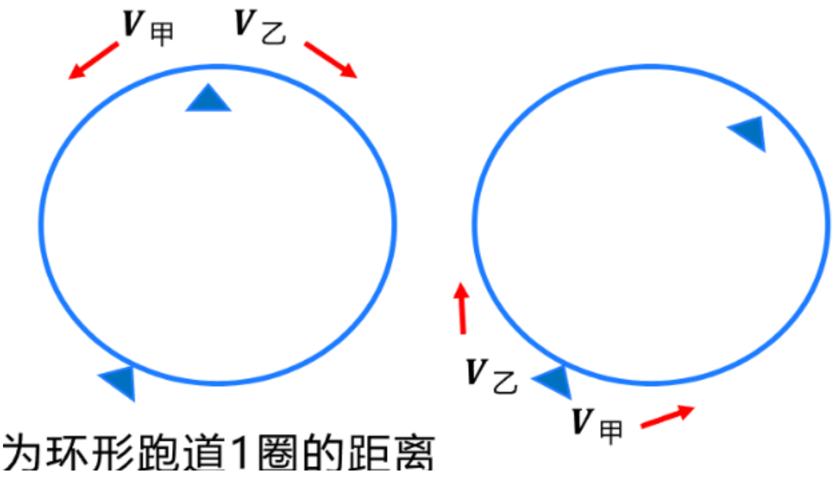
【注意】实际做题：问小李的速度，$V_{李}=15/t_{李}$，关键是 $t_{李}$。“两人同时出发且速度相同。15 分钟后，小王发现遗漏了重要文件遂立即原路原速返回，小李则继续前行”，此时小李走了 0.5h，$t_{追}=S_{追}/V_{差}$=0.5V/（0.2V）=2.5h，$t_{总}$=0.5+2.5=3，所求=15/3=5。正常做题没必要画图，画图是为了辅助做题，如果能理解清楚过程，做题不难。

《环形相遇》

例：甲的速度为 1 米/秒，乙的速度为 2 米/秒，两人在一环形跑道的上的同一点出发，背向而行，经过 100 秒相遇，问：环形跑道长度多少？

识别：环形跑道，同点背向而行

公式：$S_{相遇=}$（V_1+V_2）*时间

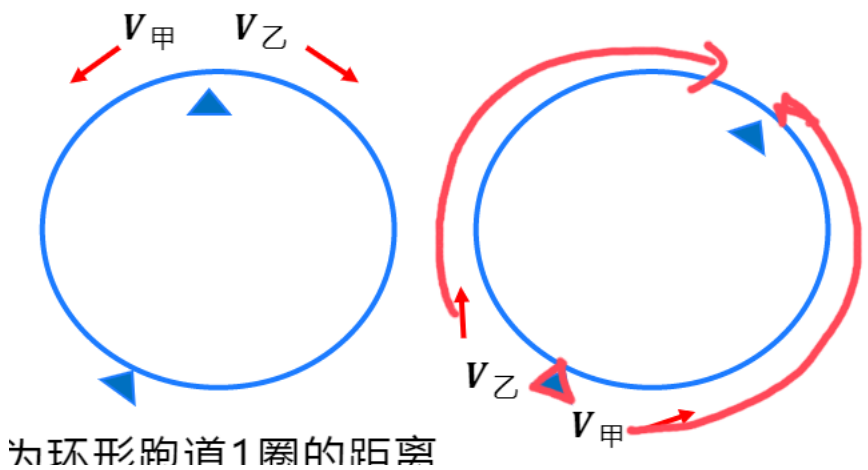


注：每相遇一次所走的路程和（S 相遇）均为环形跑道 1 圈的距离

【注意】环形相遇：

1. 例：甲的速度为 1 米/秒，乙的速度为 2 米/秒，两人在一环形跑道的上的同一点出发，背向而行，经过 100 秒相遇，问：环形跑道长度多少？

答：环形在两人背向而行一定会相遇，第一次相遇两人的路程和为一圈，如果两人相遇之后继续按照原来的方向走，再次相遇，此时两人又和走了一圈。每相遇一次，路程和都是一圈。



2. 识别：环形跑道，同点背向而行。

3. 公式：S $_{相遇}$=（V_1+V_2）*时间。

4. 注：每相遇一次所走的路程和（S 相遇）均为环形跑道 1 圈的距离。

【例 5】（2023 内蒙古事业单位）老张和小张在周长为 400 米的运动场上跑步，小张的跑步速度快于老张，当两人在同一起点同时同向出发，则每隔 8 分钟相遇一次；当两人在同一起点同时反向出发，则每隔 2 分钟相遇一次，老张在该运动场跑一圈需要多少分钟？

A. 5.33　　B. 5.36

C. 5.42　　D. 5.45

【解析】5. 存在两个“相遇”，是广义的相遇，实际“同向出发”为追及，“反向”为相遇。追及公式：S $_{追}$=V $_{差}$ t。相遇公式：S $_{和}$=V $_{和}$ t。追上一次，S $_{和}$=400，时间为 8 分钟，则 400=（V $_{小张}$-V $_{老张}$）*8→V $_{小张}$-V $_{老张}$=400/8=50。“当两人在同一起点同时反向出发，则每隔 2 分钟相遇一次”，则 400=（V $_{小张}$+V $_{老张}$）*2→V $_{小张}$+V $_{老张}$=400/2=200，两个方程两个未知数，解得 V $_{小张}$=125、V $_{老张}$=75，所求=400/V $_{老张}$=400/75=16/3≈5.33，对应 A 项。【选 A】

【注意】

1. 环形相遇的关键，是 S $_{相遇}$和圈数的关系，每相遇 1 次，S $_{和}$为 1 圈。比如两人速度相同，相遇的时候，每个人都走半圈，两人一共走了一圈。

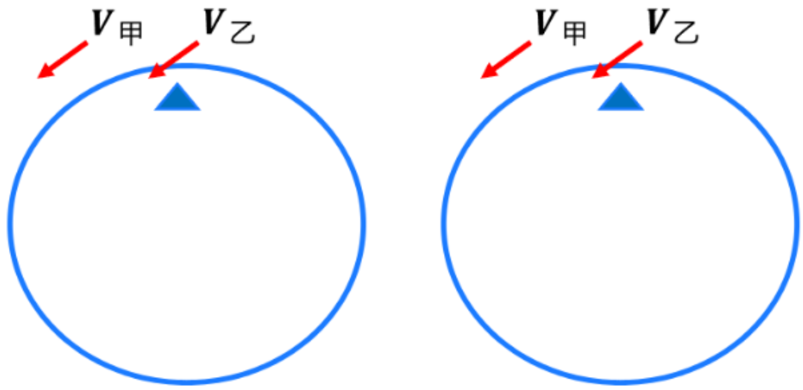
2. 同向而行，是环形追及，追及路程的本质是多跑的部分，环形追及，多跑的就是套圈。比如环形跑道，和蜗牛比赛，蜗牛基本原地不动，每追上一次，是多跑了一圈，S $_{追及}$=1 圈。

《环形追及》

例：甲的速度为 1 米/秒，乙的速度为 2 米/秒，两人在一环形跑道的上的同一点出发，同向而行，经过 100 秒乙追上甲，问：环形跑道长度多少？

识别：环形跑道，同点同向而行

公式：S $_{追及}$=（V $_{大}$-V $_{小}$）*时间

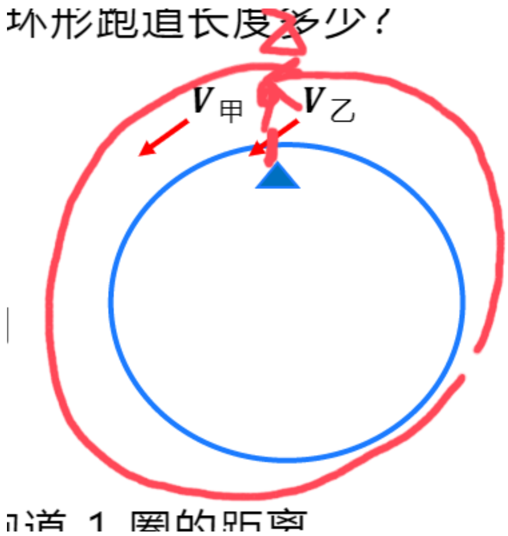


注：每追上一次的（S 追及）均为环形跑道 1 圈的距离

【注意】环形追及：

1. 例：甲的速度为 1 米/秒，乙的速度为 2 米/秒，两人在一环形跑道的上的同一点出发，同向而行，经过 100 秒乙追上甲，问：环形跑道长度多少？

答：假设甲跑得很慢，乙正常跑，跑了一段时间乙会从后面追上甲（套圈），此时乙比甲多跑了一圈，追上一次多跑一圈，追及路程的本质为多跑的路程。



2. 识别：环形跑道，同点同向而行。

3. 公式：S 追及=（V 大-V 小）*时间。

4. 注：每追上一次的（S 追及）均为环形跑道 1 圈的距离。

【例 6】（2023 天津事业单位）师范大学体育场的环形跑道长 400 米，王鹏、李华、周可从同一地点同时同向出发，围绕跑道分别慢跑、快跑和轮滑。已知三人的速度分别是 2 米/秒、6 米/秒和 8 米/秒，问李华第 4 次超越王鹏时，周可

已经超越了王鹏多少次？

A. 6　　　　B. 7

C. 8　　　　D. 9

【解析】6. 同向出发，考查追及。追及公式：$S_{追}=V_{差}t$，问“李华第 4 次超越王鹏时，周可已经超越了王鹏多少次”，$S_{追}$是多跑的距离，追上 4 次，多跑 4 圈，$S_{追}$=4*400=（6-2）*t→t=1600/4=400s。周比王多跑了（8-2）*400=2400，2400/400=6 圈，选择 A 项。【选 A】

第七节　几何问题

《几何问题的高频题型》

①公式类

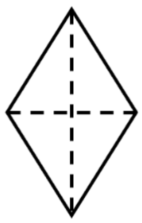
②结论类

③方位图

④最短路径

⑤三角形

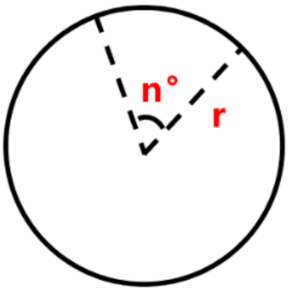
《公式类》



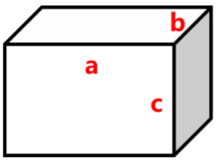
菱形面积=对角线乘积÷2

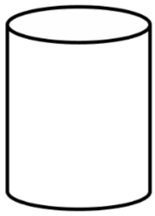
平行四边形面积=底×高

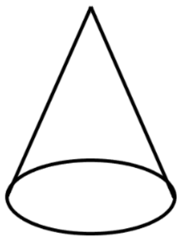
梯形面 = $\frac{(上底+下底)\times 高}{2}$



弧长公式 = $2\pi r \times \frac{n°}{360°}$　　扇形面积公式 = $\pi r^2 \times \frac{n°}{360°}$







表面积 = 2 ×（ab+bc+ac）

体积 = abc

表面积 = $2\pi r^2 + 2\pi rh$

体积 = 底面积 × 高

体积 = $\frac{1}{3}$ × 底面积 × 高

【注意】公式类：

1.弧长：可以当圆形的一部分，重点看角度占 360 的比例，角度的占比就是周长或者面积占圆形的比例。

2.长方体：表面积=六个面相加。体积=长*宽*高。

3.圆柱形：展开之后，侧面是一个以高为宽、底面周长为长的长方形，加上上下两个圆形的面积。体积=底面积*高。

4.圆锥：体积=1/3*底面积*高。

《公式类》

等边三角形面积=$\sqrt{3}/4*a^2$

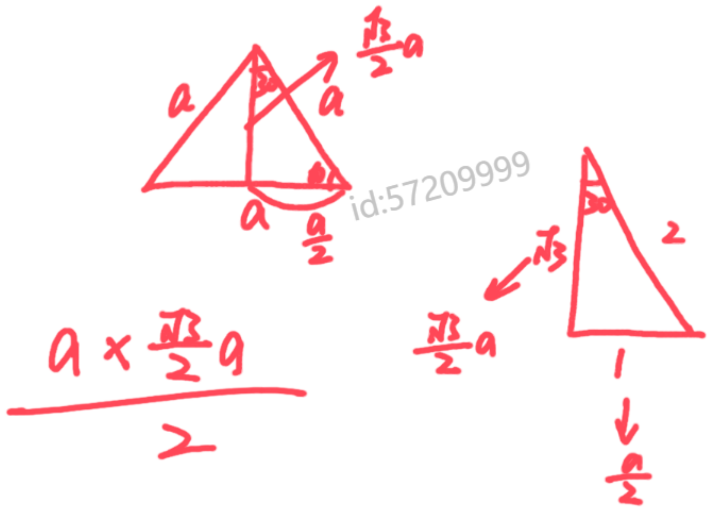
质量=体积*密度

$F_{浮}=G_{排}=\rho_{液}gV_{排}$

【注意】

1.等边三角形面积=$\sqrt{3}/4*a^2$。如果做一条高，会出现 30°、60° 的直角三

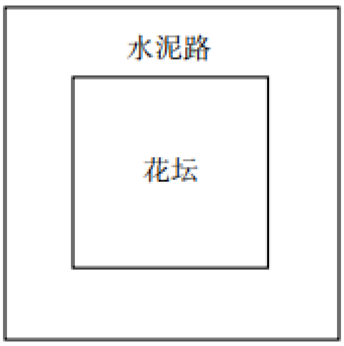
角形，存在特殊的三边关系 1：2：$\sqrt{3}$。按照比例，1 对应 a/2，则$\sqrt{3}$对应$\sqrt{3}$/2*a，高为$\sqrt{3}$/2*a，面积=底*高/2=a*（$\sqrt{3}$/2*a）÷2=$\sqrt{3}$/4*a² 。



2. 质量=体积*密度。物理公式，近几年考过物理方面的公式，可以记忆一下。

3. $F_{浮}=G_{排}=\rho_{液}gV_{排}$。$\rho_{液}$是溶液的密度；g 是常数；$V_{排}$是排出水的体积。

【例 1】（2020 河北事业单位）街心公园里有一个正方形的花坛（如下图所示）。花坛四周有 1 米宽的水泥路，如果水泥路的总面积是 16 平方米，那么中间花坛的面积是多少平方米？

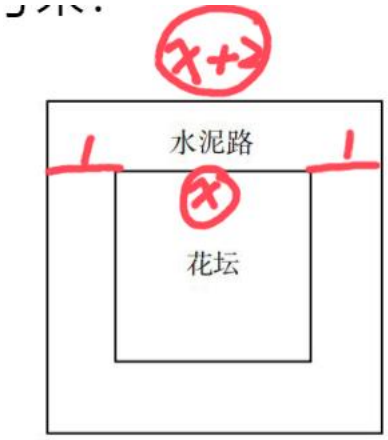


A. 16　　B. 9

C. 4　　D. 1

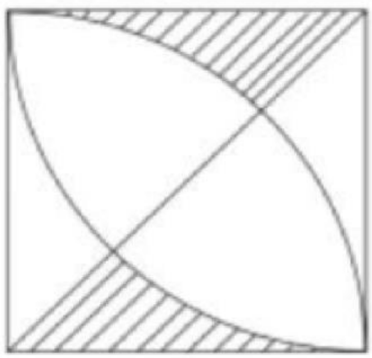
【解析】1. 方法一：求花坛的面积，假设花坛的边长为 x，都是从花坛往外扩 1 米，则外面也是一个大正方形，外面大正方形边长为 x+2。“如果水泥路的总面积是 16 平方米”，列式：$16=S_{大正方形}-S_{小正方形}=(x+2)^2-x^2=x^2+4x+4-x^2$ →

4x=16-4=12→x=12/4=3，花坛面积=x²=9，对应 B 项。



方法二：代入。要结合常识，通常正方形的边长，边长的数通常是整数，16+小正方形面积=大正方形面积，小正方形、大正方形都应该是一个平方数，代入 A 项，16+16=32，32 无法开平方，排除；代入 B 项：16+9=25，25 可以开平方，C、D 项代入之后也不能开平方，选择 B 项。【选 B】

【娱乐一下】(2019 广东)某小区规划建设一块边长为 10 米的正方形绿地。如图所示，以绿地的 2 个顶点为圆心，边长为半径分别作扇形，把绿地划分为不同的区域。小区现准备在图中阴影部分种植杜鹃，则杜鹃种植面积为( )平方米。



A. 100-25π　　　　B. 200-35π

C. 200-50π　　　　D. 100π - 100

【解析】拓展. 方法一：要求阴影部分面积，则要用 $S_{正方形}-S_{空白}$，不用割补，通常正方形边长都是整数，则面积是平方数，面积（平方数）-空白部分面积，减号前面是平方数，A 项符合。

方法二：或者根据正方形边长为 10，则正方形面积为 100，答案应该是 100-

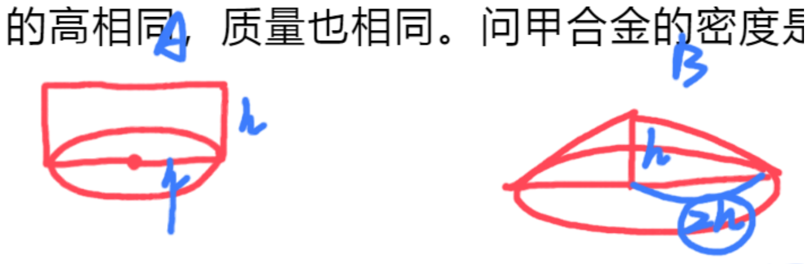
面积，A 项符合。【选 A】

【例 2】（2023 国考）一个圆柱体零件 A 和一个圆锥体零件 B 分别用甲、乙两种合金铸造而成。A 的底面半径和高相同，B 的底面半径是高的 2 倍，两个零件的高相同，质量也相同。问甲合金的密度是乙合金的多少倍？

A. 4/3　　　　B. 3/4

C. 2/3　　　　D. 3/2

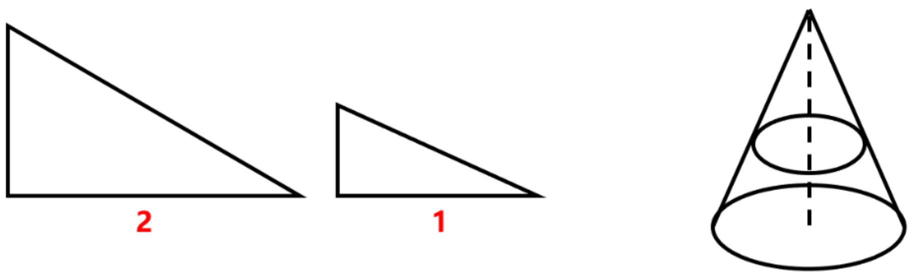
【解析】2. “A 的底面半径和高相同”，则 A 的底面半径=高=h；圆柱体积=底面积*高，“B 的底面半径是高的 2 倍”，则 B 的底面半径=2h，高为 h。质量=体积*密度，A 零件质量=πh^2*h*甲密度；B 零件质量=1/3*π*$(2h)^2$*h*乙密度，根据质量相同列式：πh^2*h*甲密度=1/3*π*4*h^2*h*乙密度→甲密度/乙密度=4/3。【选 A】



【注意】质量相同，质量=密度*体积，质量相同，密度越大，体积越小，成反比。质量相同，甲密度/乙密度=V_B/V_A=[1/3*π*$(2r)^2$*r]÷(πr^2*r)=4/3。

《结论类》

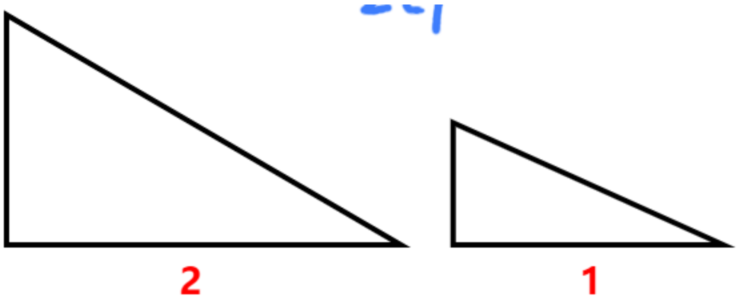
①相似比：长度比等于相似比，面积比等于相似比的平方，体积比等于相似比的立方



【注意】

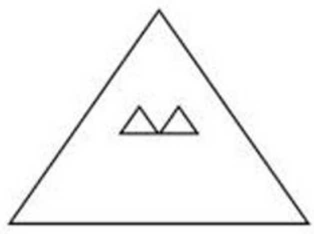
1. 相似比：长度比等于相似比，面积比等于相似比的平方，体积比等于相似比的立方。

2. 比如边长比例为 2：1，则相似比就是 2：1，也可以理解为长度的比例=相似比。不论是边长、周长、高，都是长度。两个三角形的相似比是 2：1，则边长之比、周长之比、高之比都是 2：1。面积比等于相似比的平方，长度比为 2：1，则面积比是 4：1。



3. 体积比等于相似比的立方。比如圆锥从高的一半切开，大、小两个圆锥相似，小圆锥高为 1、大圆锥高为 2，相似比为 1：2，如果问 2 个圆锥的体积之比，为相似比的立方，（1：2）^{3}=1：8。大圆锥分为上半部分和下半部分，两部分的体积之比为 1：7。

【拓展】（2020 联考）某演播大厅的地面形状是边长为 100 米的正三角形，现要用边长为 2 米的正三角形砖铺满（如图所示）。问，需要用多少块砖？



A. 2763　　B. 2500

C. 2340　　D. 2300

【解析】拓展. 需要多少块砖与面积有关系，如果总面积是 100，1 块砖的面积是 2，就需要 50 块。正三角形一定是相似的，大的正三角形边长为 100，小的正三角形边长为 2，边长比为 50：1，相似比也是 50：1，面积比是相似比的平

方，面积比为 2500：1，假设总面积为 2500，1 块砖的面积就是 1，需要 2500 块砖，对应 B 项。【选 B】

《结论类》

②均值定理：

a+b 为定值，a=b，a*b 最大

长方形周长一定，正方形时，面积最大

a*b 为定值，a=b，a+b 最小

长方形面积一定，正方形时，周长最小

【注意】均值定理：高中内容。

1. a+b 为定值，a=b，a*b 最大。长方形周长一定，即 2*（a+b）一定，则 a+b 一定，只有 a=b 的时候，a*b 最大，即长方形周长一定，正方形时，面积最大。

2. a*b 为定值，a=b，a+b 最小。长方形面积一定，即 a*b 一定，只有 a=b 的时候，a+b 最小，则 2*（a+b）也最小，即长方形面积一定，正方形时，周长最小。

3. 比如一个四边形的周长是 20，周长一定，求面积最大，当四边形为正方形时，面积最大，正方形的边长是 5，正方形的面积是 25。

【拓展】（2018 联考）某地市区有一个长方形广场，其面积为 1600 平方米。由此可知，这个广场的周长至少有：

A. 160 米　　B. 200 米

C. 240 米　　D. 320 米

【解析】拓展. 遇到长方形求最值，不管是周长还是面积求最值，不管是最大还是最小，都与正方形有关系，假设长方形是正方形，边长是 a，则 $a^2=1600$ →a=40，周长=4a=4*40=160，对应 A 项。【选 A】

《方位图》

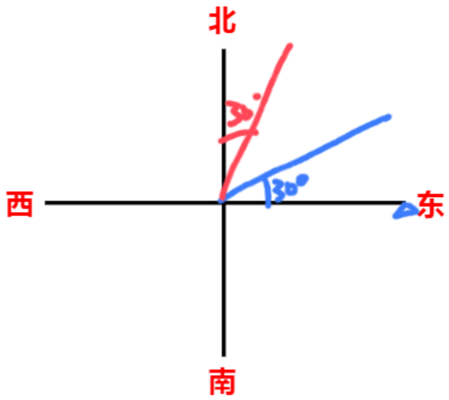
注意：弄清谁偏谁

经验：一般求长度，需要构造直角三角形，运用勾股定理、相似、特殊三边

关系

【注意】方位图：

1. 注意：弄清谁偏谁。东偏北 30°，以正东作为基准，向北偏 30°；北偏东 30°，以正北作为基准，向东偏 30°。



2. 经验：一般求长度，需要构造直角三角形，通过勾股定理、相似、特殊三边关系进行求解，基本上离不开直角三角形，只有直角三角形，才能通过勾股定理、相似、特殊三边关系求长度的数值。

【例 3】（2024 山东网友回忆版）某巡逻艇在海域 A 点发现正南方 30 千米处的 B 点有一艘可疑船只正匀速向正西方行驶，巡逻艇以比该可疑船只快 1/3 的速度沿某一方向直线追击，两船恰好在 C 点相遇。问 B、C 两点之间的距离约多少千米？

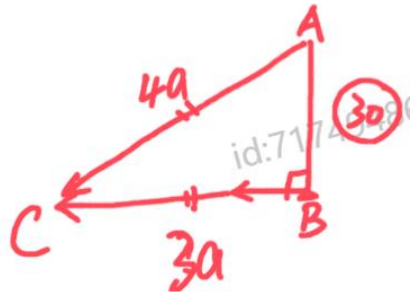
A. 26　　　　B. 28

C. 30　　　　D. 34

【解析】3. 画图分析，假设原点是 A 点，B 点在 A 点的正南方（正下方）30km 处，可疑船只向正西方（左边）行驶。已知“巡逻艇以比该可疑船只快 1/3 的速度沿某一方向直线追击”，$V_{巡逻艇}/V_{可疑船只}=4/3$。巡逻艇追赶可疑船只，两船恰好在 C 点相遇，巡逻艇只能沿着 AC 追赶，△ABC 是直角三角形。在方位图中，构造直角三角形，要么用勾股定理，要么用相似，要么用特殊三边关系，本题只能用勾股定理。

巡逻艇和可疑船只同时出发、同时到达，时间相同，速度越快，走过的路程越远，$V_{巡逻艇}/V_{可疑船只}=4/3$，则 $S_{巡逻艇}/S_{可疑船只}=AC/CB=4/3$，假设 AC=4a、BC=3a，AB=30km，根据勾股定理，$(3a)^2+30^2=(4a)^2\rightarrow 9a^2+900=16a^2\rightarrow 7a^2=900\rightarrow a^2=900/7$，可

以考虑代入，代入 C 项：假设 $3a=30\rightarrow a=10\rightarrow a^2=100$，实际上，$a^2=900/7=100^+$，C 项偏小，排除 A、B、C 项，D 项当选。【选 D】



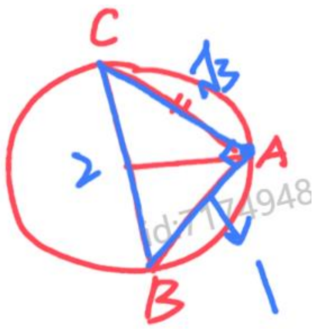
【注意】本题不能考虑倍数特性，求的是距离，不一定是整数。

【例 4】（2022 北京）一个圆形水库的半径为 1 千米。一艘船从水库边的 A 点出发，直线行驶 1 千米后到达水库边的 B 点，又从 B 点出发直线行驶 2 千米后到达水库边的 C 点。则 C 点与 A 点的直线距离最短可能为多少千米？

A. 不到 1 千米　　　　B. 1～1.3 千米之间

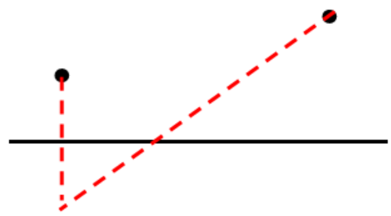
C. 1.3～1.6 千米之间　　　　D. 超过 1.6 千米

【解析】4. 看到“一个圆形水库”，画圆分析，圆的半径是 1 千米。从 A 点出发走了 1 千米（一个半径的长度）后到达 B 点，从 B 点出发直线行驶 2 千米（一个直径的长度）后到达 C 点，求 C 点与 A 点的直线距离。本题不用构造直角三角形，圆的直径与圆上的一点连接出来的三角形是直角三角形，要想求长度，可以用勾股定理，也可以用特殊的三边关系。AB=1 千米，BC=2 千米，为特殊的三边关系，根据 1：2：$\sqrt{3}$，AC=$\sqrt{3}$千米≈1.732 千米，对应 D 项。【选 D】



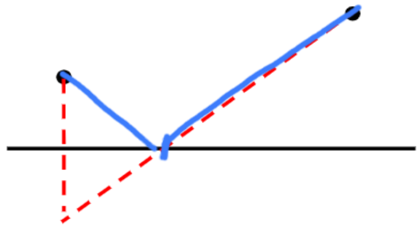
《最短路径》

平面：求在直线一点到同侧的两点的距离之和最短

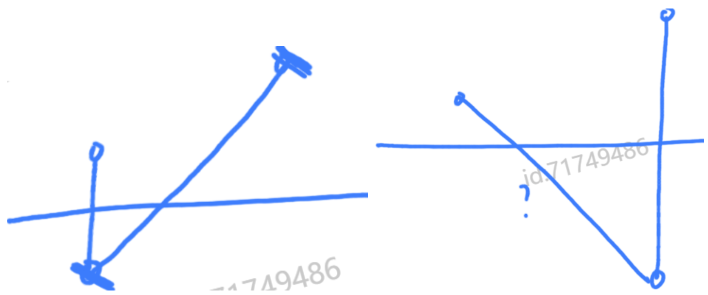


【注意】最短路径：分为平面和立体。

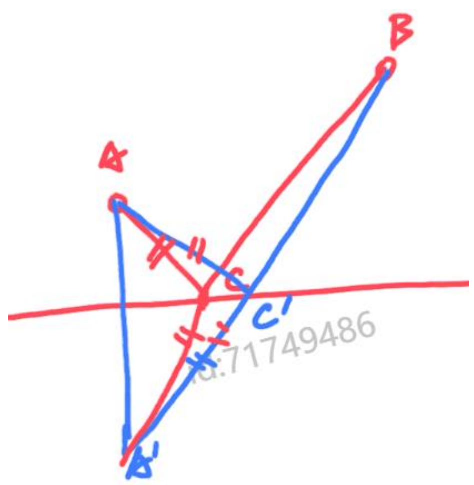
1. 平面：求在直线一点到同侧的两点的距离之和最短。有一条直线，在直线的同侧有两个点，在直线上找一个点，使得到这两个点的距离加和是最短的。



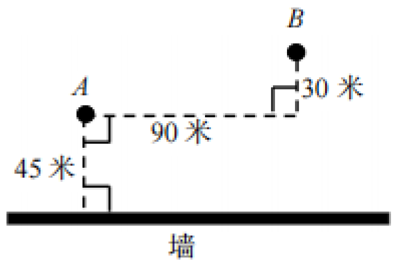
2. 方法：抓住其中一个点，以这条线为对称轴做对称，做完对称以后，与另外一个点连接，连接之后的距离就是最短路径。



3. 原理：在直线上随便找一个点，假设为 C 点，连接 AC、BC；作 A 点关于直线的对称点 A’，连接 A’和 B，交直线于 C’点，A 点和 A’点是对称的，对边两边是相似的，A’C’=AC’，AC+BC＞AC’+BC’=A’C’+BC’=A’B（直线）。考试不考证明过程，会用即可。



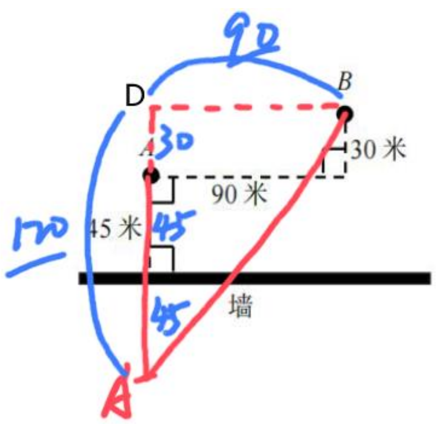
【例 5】（2019 浙江）A、B 点和墙的位置如下图所示。现从 A 点出发以 5 米/秒的速度跑向墙，接触到墙后再跑到 B 点。问最少要多少秒到达 B 点？



A. 30　　　　　　B. 34

C. 38　　　　　　D. 42

【解析】5. A 点距离墙面 45 米，B 点距离墙面 30+45=75 米，A、B 两点的水平距离是 90 米。问“最少要多少秒到达 B 点”，速度一定，求时间最少，时间=路程/速度，速度是一个定值，要求路程最小，求最短路径。抓住其中一个点做对称，作 A 点关于墙的对称点 A’，连接 A’和 B 的距离，这个距离就是要求的最短路径，构造直角三角形，延伸 A’A，过 B 点作 AA’延长线的垂线，设垂足为 D 点，BD=90 米，A’D=45+45+30=120 米，两条直角边均已知，斜边可以求，利用勾股定理，$120^2+90^2=(A'B)^2$→$14400+8100=22500=150^2$→A’B=150 米；也可以利用常见勾股数（3：4：5），BD=90 米→对应 3 份，A’D=120 米→对应 4 份，则 A’B=150 米→对应 3 份，所求=150/5=30 秒，对应 A 项。【选 A】



【例 6】（2024 国考网友回忆版）甲、乙两个联络站相距 10 千米。一条道路与甲、乙联络站连线相平行，且与两联络站连线的垂直距离为 12 千米。现需紧

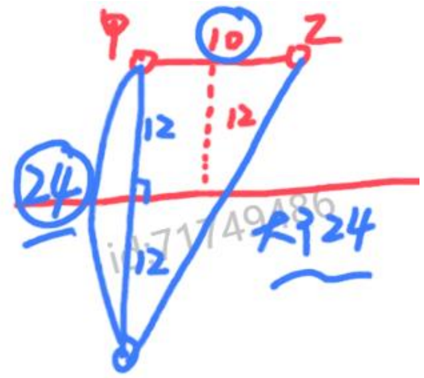
邻该道路建一个工作站，问工作站距离甲、乙联络站距离之和最小为多少千米？

A. 20　　　　　　　　　　B. 22

C. 24　　　　　　　　　　D. 26

【解析】6. 画图分析，甲、乙相距 10 千米，一条道路与甲、乙连线相平行，与两联络站连线的垂直距离为 12 千米。抓住其中一个点做对称，作甲关于道路的镜面对称点甲’，连接甲’乙，甲甲’=12+12=24 千米。

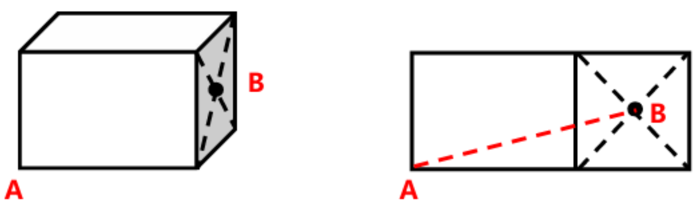
方法一：斜边一定要大于直角边（24 千米），只有 D 项符合，D 项当选。



方法二：利用常见勾股数有 3：4：5，还有 5：12：13，甲乙=10=5*2，甲甲’=24=12*2，均扩大 2 倍，则（　）=13*2=26，对应 D 项。【选 D】

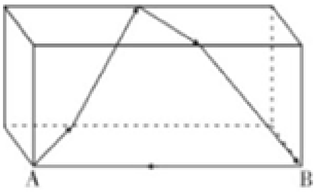
《最短路径》

立体：求立体图形表面上两点的最短距离



【注意】立体图形有很多个面，在不同面上，转化成相同的面。如上图，求 A 点到 B 点的最短路径，以这两个面的公共边为轴，进行翻转，翻转之后两个面变为一个面，直接求 AB 连线的长度即可。

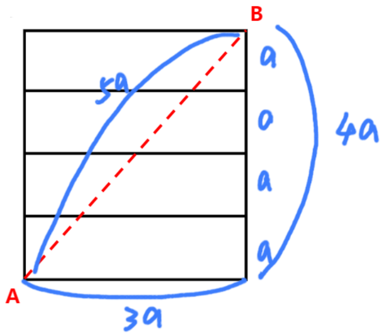
【拓展】（2021 四川）下图是长为 3a 厘米，宽、高均为 a 厘米的长方体。一只蚂蚁以 m 厘米/秒的速度沿如图所示的路径由 A 点爬行到 B 点后，又沿棱 BA 爬回 A 点。问其全程用时最短可能为多少秒？

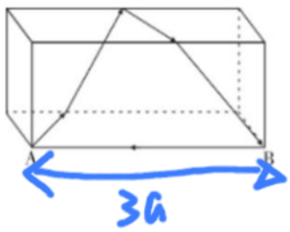


A. 7a/m　　　　B. 8a/m

C. 9a/m　　　　D. 10a/m

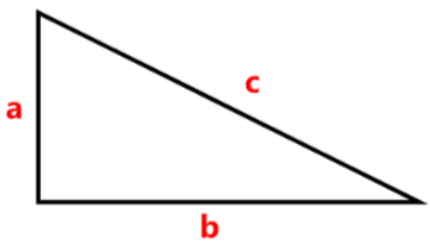
【解析】拓展. 根据题意，蚂蚁由 A 点爬行到 B 点走了 4 个面，把这 4 个面展开，蚂蚁经过了底面→背面→上面→前面，长为 3a，每个小的宽是 a，直角边分别为 3a 和 4a，根据勾股定理，斜边为 5a，但无对应选项，注意条件还有“又沿棱 BA 爬回 A 点”，总路程为 5a+3a=8a，蚂蚁的速度为 m，所求=8a/m，对应 B 项。【选 B】





《三角形》

勾股定理：在直角三角形中，两个直角边边长的平方加起来等于斜边长的平方，即 $a^2+b^2=c^2$



积累：记住（3、4、5）*n、（5、12、13）

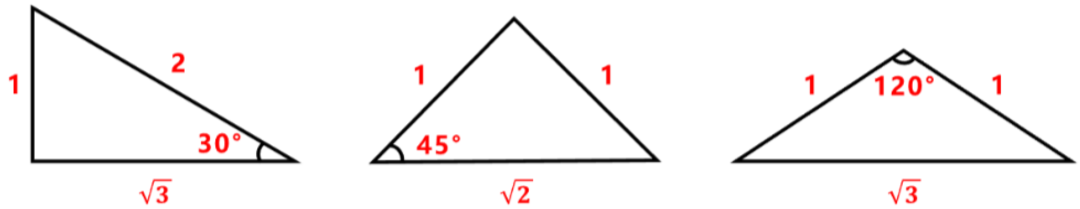
【注意】三角形——勾股定理：

1. 勾股定理：在直角三角形中，两个直角边边长的平方加起来等于斜边长的平方，即 $a^2+b^2=c^2$。

2. 积累：需要记忆一些常见的勾股比例，记住（3、4、5）*n、（5、12、13）。有时候勾股数不是让你算的，而是让你猜的。对于数量关系，往往会把数字设置得很“整”，看起来很“体面”，感觉计算量不大。

《三角形》

特殊三角形三边关系

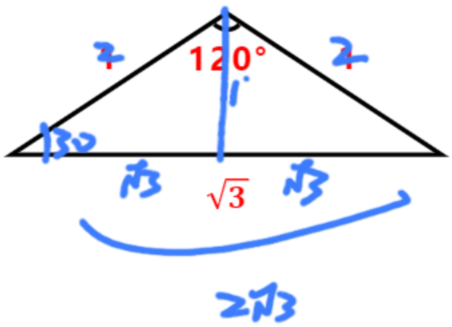


【注意】三角形——特殊三角形三边关系：

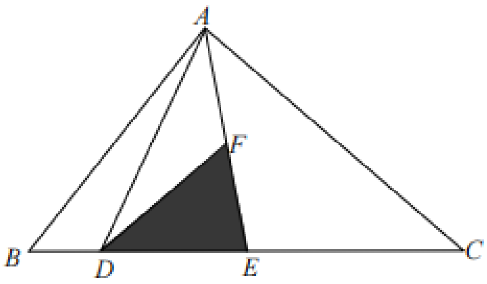
1. 30° 的直角三角形，三边之比为 1：2：$\sqrt{3}$。

2. 45° 等腰直角三角形，三边之比为 1：1：$\sqrt{2}$。

3. 顶角是 120° 的等腰直角三角形，可以理解为 2 个 30° 的直角三角形拼在一起，三边之比为 2：2：$2\sqrt{3}$=1：1：$\sqrt{3}$。



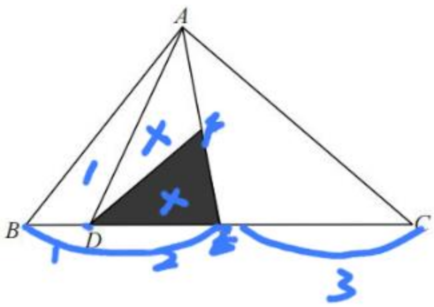
【例 7】（2023 联考）为推动产业园和产业集聚区加快转型，某地计划在三角形 ABC 区域内建设新能源产业园区（如下图所示），三角形 DEF 是中央工厂区，已知 BD：DE：EC=1：2：3，F 为 AE 的中点，则新能源产业园区总面积是中央工厂区面积的：



A. 7 倍　　　　B. 6 倍

C. 5 倍　　　　D. 4 倍

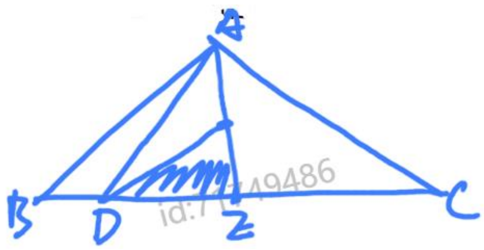
【解析】7. 根据题意，所求=$S_{\triangle ABC}/S_{\triangle DEF}$，通过比例分数就可以“秒”掉本题。假设 $S_{\triangle ABD}=1$，△ABD 和△ADE 的底边之比是 1：2，高是相同的，两个三角形共用同一个高，则 $S_{\triangle ADE}=2$，$S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADE}=1+2=3$，BD:DE:EC=1:2:3，则 $S_{\triangle AEC}=3$，$S_{\triangle ABC}=3+3=6$；F 为 AE 的中点，则 $S_{\triangle EFD}=S_{\triangle AFD}$，$S_{\triangle EFD}=1$，所求=6/1=6，对应 B 项。【选 B】



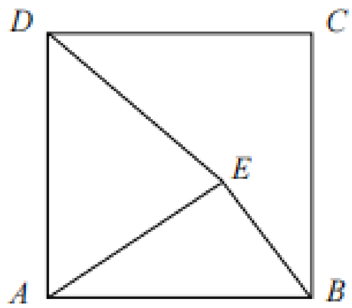
【注意】

1. 连接顶点和另外一条边的中点可以把三角形的面积一分为二，高是一样的，底是相等的，相当于把三角形的面积分为两等份。

2. BD：DE：EC=1：2：3，相当于 AE 把△ABC 的面积分为相等的两个部分；F 为 AE 的中点，相当于 DF 把 ADE 的面积一分为二。



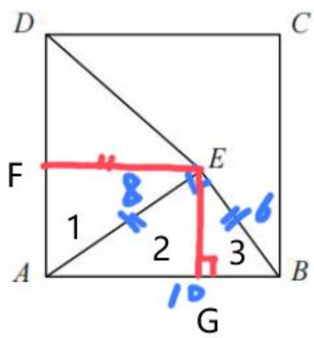
【例 8】（2023 联考）边长为 10 厘米的正方形 ABCD 如下图所示，E 为正方形中的某一点，已知 AE 长 8 厘米，BE 长 6 厘米，问三角形 ADE 的面积为多少平方厘米？



A. 24　　　　B. 32

C. 44　　　　D. 48

【解析】8. 本题稍微有一点复杂，但如果数学基础扎实，本题仍然可以"秒"。AB=10，AE=8，BE=6，则△ABE 是直角三角形。求 $S_{\triangle ADE}$，缺一个高，画一条辅助线，以 AD 为底边，过 E 点作 AD 的垂线，交 AD 于 F 点；再以 AB 为底边，过 E 点作 AB 的垂线，交 AB 于 G 点，三角形 $_1$ 和三角形 $_2$ 是全等的，三角形 $_2$ 和三角形 $_3$ 是相似的，可以推出 EF 的具体数值，进而求出 $S_{\triangle ADE}$，但这样做比较麻烦。利用射影定理，EF=AG，求出 AG 即可，$AE^2=AG*AB \to 8^2=AG*10 \to AG=6.4$，则 EF=AG=6.4，$S_{\triangle ADE}=6.4*10/2=32$，对应 B 项。【选 B】



《射影定理》

CD^2 =AD*BD

AC^2 =AD*AB

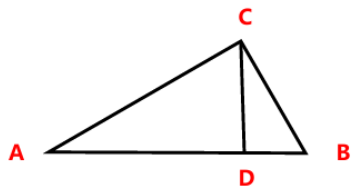
BC^2 =DB*AB

【注意】射影定理：直角三角形，斜边的高把△ABC 分为两个直角三角形。

1. CD^2 =AD*BD，把 CD 当成一个电线杆，CD 在地上的“影子”是 AD。

2. AC^2 =AD*AB，AC 的“影子”是 AD。

3. BC^2 =BD*AB，BC 的“影子”是 BD。



《总结》

【注意】总结：

1. 行程问题：

（1）基础行程：

①路程=速度*时间（S=V*t）。

②匀变速的平均速度=（初速度+末速度）/2。

（2）相对行程：

①直线相遇：$S_{和}=V_{和}*t$。$S_{和}$代表总距离。

②直线追及：$S_{差}=V_{差}*t$。$S_{差}$代表追及路程，本质是多走的路程。

③环形相遇：相遇 1 次，$S_{相遇}$=1 圈。

④环形追及：追上 1 次，$S_{追及}$=1 圈。

2. 几何问题：

（1）公式：

①质量=密度*体积。

②$F_{浮}=\rho_{液}*g*V_{排}$。

（2）结论：

①相似比=边长比，相似比^2=面积比，相似比^3=体积比。

②均值：长方形周长一定，正方形时，面积最大；长方形面积一定，正方形时，周长最小。

（3）方位图：注意弄清谁偏谁。一般考查形式是构造直角三角形，利用勾股定理、相似、特殊三边关系求长度。

（4）最短路径：

①平面：对称、连线。

②立体：展开、连线。

（5）三角形：

①30°的直角三角形，三边之比为1：2：$\sqrt{3}$。45°等腰直角三角形，三边之比为1：1：$\sqrt{2}$。顶角是120°的等腰直角三角形，三边之比为1：1：$\sqrt{3}$。

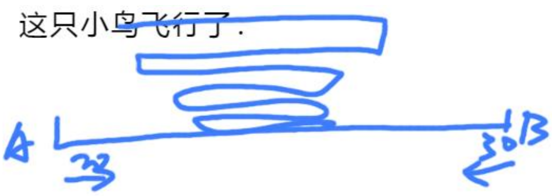
②射影定理：了解即可。

检测1：（2019河南事业单位）有一辆火车以每小时20公里的速度离开A地直奔B地，另一辆火车以每小时30公里的速度从B地开往A地。如果有一只鸟，以40公里每小时的速度和两辆火车同时启动，从A地出发，碰到另一辆车后返回，依次在两辆火车间来回飞行，直到两辆火车相遇，这只小鸟飞行了：

A. A、B间距离的一半　　B. 正好为A、B间的距离

C. A、B间距离的五分之四　　D. A、B间距离的三分之二

【解析】检测1.边分析边画图，直线相遇，一辆火车的速度是20，另一辆火车的速度是30，鸟的速度是40，抓住问题分析，问的是鸟的路程，三量关系，其中一个量不变，另外两个量有比例关系，时间一定，速度与距离成正比，速度越快，走过的距离就越远，$S_{鸟}/S_{AB}=V_{鸟}/V_{和}$=40/（20+30）=40/50=4/5；假设经历了时间t，S_{AB}=（20+30）*t=50t，鸟的运动过程很复杂，但鸟的速度是不变的，鸟和两辆火车同时启动直到相遇，时间是一定的，$S_{鸟}$=40*t，所求=40t/（50t）=4/5，对应C项。**【选C】**



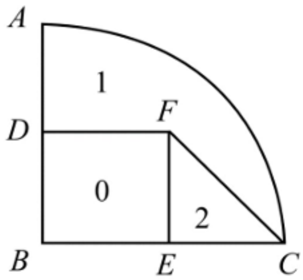
检测 2：（2020 重庆选调）甲、乙两人分别以不同速度在周长为 500 米的环形跑道上跑步，甲的速度是 180 米/分钟。若两人从同一地点同时出发，反向跑步，75 秒时第一次相遇；若两人保持各自的速度从同一地点同时出发同向而行，那么乙第一次追上甲时跑的圈数是多少圈？

A. 5　　　　B. 5. 5

C. 6　　　　D. 6. 5

【解析】检测 2. “反向”是相遇，$S_{相遇}=V_{和}*t$，相遇 1 次，$S_{相遇}$=1 圈=500，500=（180+$V_{乙}$）*1. 25→180+$V_{乙}$=400→$V_{乙}$=220。“同向”是追及，$S_{追及}=V_{差}*t$，追上 1 次，$S_{相遇}$=1 圈=500，500=（220-180）*t→t=500/40=12. 5 秒。问“乙第一次追上甲时跑的圈数是多少圈”，$S_{乙}$/500=（220*12. 5）/500=2750/500=5. 5 圈，看有效数字即可，对应 B 项。【选 B】

检测 3：（2022 联考）某疫苗共需接种 2 剂次方可达到最佳效果。A 市的接种人数占比统计如下图所示，其中，区域“0”表示尚未接种，区域“1”表示只接种 1 剂次，区域“2”表示已接种 2 剂次。假设 ABC 是四分之一圆面，D、E 是中点，BDFE 是正方形，则 A 市该疫苗只接种 1 剂次的人数占比：



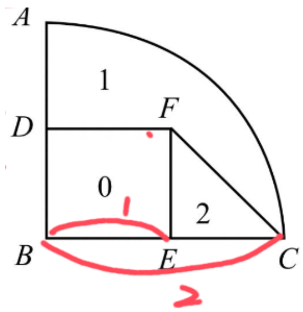
A. 超过 40%但不到 50%　　　　B. 刚好 50%

C. 超过 50%但不到 60%　　　　D. 超过 60%

【解析】检测 3. 几何问题，根据题意，所求=S_{ADFC}/S_{ABC}。S_{ABC}=（1/4）＊πr^2＝（1/4）＊π＊2^2＝π，$S_{ADFC}=S_{ABC}-S_{正方形}-S_{\triangle CEF}$=π-1-0. 5，所求=（π-1-0. 5）/π≈

（3.14-1.5）/3.14=1.64/3.14，结果为一半多一点，首位商不到 6，对应 C 项。

【选 C】

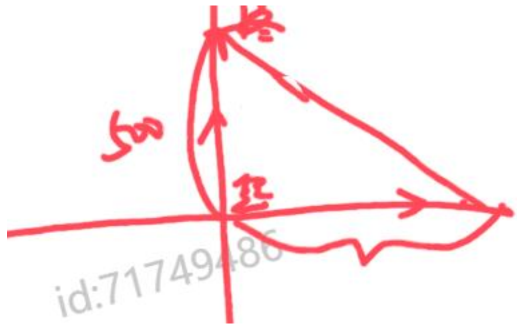


检测 4：（2022 联考）兔子和乌龟举行一场跑步比赛，终点位于起点正北方 500 米处。兔子和乌龟同时出发，均保持匀速奔跑，且兔子的速度是乌龟的 5 倍。兔子先向正东方跑了一会儿后发现自己跑错了方向，马上直奔终点，速度不变，结果兔子和乌龟同时到达终点。那么兔子发现跑错方向时已经跑了多少米？

A. 600　　　　B. 1200

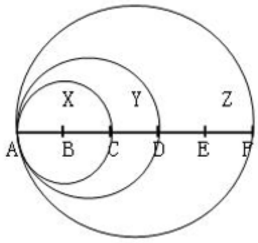
C. 2400　　　　D. 3000

【解析】检测 4. 画方位图，假设起点在原点，终点位于起点正北方（上方）500 米处，兔子先向正东方（右边）跑，跑了一会儿后发现自己跑错了方向，马上直奔终点，最后兔子和乌龟同时到达终点，构成了一个直角三角形，常见勾股数有（3：4：5）和（5：12：13），本题的“5”在直角边，（3：4：5）的“5”在斜边，三边比例不能是 3：4：5，只能是 5：12：13，5 份对应 500，则 12 份对应 1200，对应 B 项。【选 B】



【注意】如果不放心，可以验证，两条直角边分别为 500 和 1200，则斜边为 1300，兔子跑了 1200+1300=2500，已知“兔子的速度是乌龟的 5 倍”，时间相等，路程比=速度比=2500/500=5。

检测 5：（2017 四川）下图为以 AC、AD 和 AF 为直径画成的三个圆形，已知 AB、BC、CD、DE 和 EF 之间的距离彼此相等。问小圆 x、弯月 y 以及弯月 z 三部分的面积之比为：



A. 4：5：16　　　　B. 4：5：14

C. 4：7：12　　　　D. 4：3：10

【解析】检测 5. 已知“AB、BC、CD、DE 和 EF 之间的距离彼此相等”，赋值 AB、BC、CD、DE 和 EF 均为 1，小圆 x 的面积为 π，中圆的面积为 $\pi*1.5^2$，这样做肯定能做出来，但会麻烦；小圆 x 的直径是 2，中圆的直径是 3，大圆的直径是 5，三个圆的面积之比为 4：9：25，小圆 x 的面积为 4 份，弯月 y 的面积为 9-4=5，弯月 z 的面积为 25-9=16，对应 A 项。【选 A】

检测 6：（2019 新疆）某健身馆准备将一块周长为 100 米的长方形区域划为瑜伽场地，将一块周长为 160 米的长方形区域划为游泳场馆。若瑜伽场地和游泳场馆均是满足周长（一定）条件下的最大面积。问两块场地面积之差为多少平方米？

A. 625　　　　B. 845

C. 975　　　　D. 1150

【解析】检测 6. 画图分析，瑜伽场地（长方形）的周长为 100 米，游泳场馆（长方形）的周长为 160 米，出现“最大面积”，考虑均值定理，把长方形想象成正方形，此时瑜伽场地的边长为 100/4=25，面积为 $25^2=625$；同理，游泳场馆的边长为 160/4=40，面积为 $40^2=1600$，所求=1600-625=975，对应 C 项。【选 C】

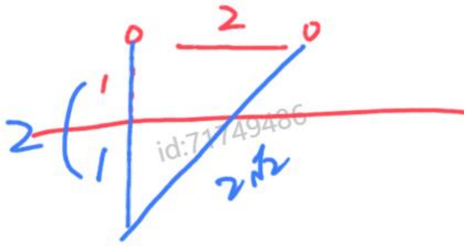
检测 7：（2018 安徽）悟空与二郎神在离地面一米的空中决斗，两人相距 2

米，悟空想用分身直接偷袭二郎神，为了不引起对方的警觉，分身必须在地面反弹一次再进行攻击，则分身到达二郎神的位置所走的最短距离为（　）。

A. $2\sqrt{2}$米　　B. 3 米

C. 2 米　　D. $2\sqrt{3}$米

【解析】检测 7. 画图分析，做对称，连线，构成直角三角形，两个直角边均为 2，三边比例为 1：1：$\sqrt{2}$，斜边长为 $2\sqrt{2}$，对应 A 项。【选 A】



【答案汇总】

行程问题 1-5：ADDCA；6：A

几何问题 1-5：BADDA；6-8：DBB

遇见不一样的自己

Be your better self