第二章 习题

§2.1 随机变量

§2.2 离散型随机变量的概率分布

§2.3 随机变量的分布函数

1 填空题

1. 某射手每次命中目标的概率为0.8，若独立射击了三次，则三次中命中目标次数为k的概率$P(X=k)=$ $C_3^k(0.8)^k(0.2)^{3-k}, k=0,1,2,3$.

2. 设随机变量X服从泊松分布，且$P(X=1)=P(X=2)$，则$P(X=4)=$ 0.0902 .

3. 设X服从参数为p的两点分布，则X的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-p, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$.

4. 超几何分布的概率分布为$P(X=k)=$ $\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k=0,1,2,\cdots,\min\{M,n\}$.

二、单项选择题

设离散型随机变量X的分布律为$P(X=k)=b\lambda^k\ (k=1,2,\cdots)$, 且$b>0$, 则$\lambda$为（B）

(A) λ>0的任意实数; (B) $\lambda=\dfrac{1}{b+1}$; (C) λ=b+1; (D) $\lambda=\dfrac{1}{b-1}$.

三、 计算下列各题

1. 袋中有10个球，分别编号为1~10，从中任取5个球，令X：取出5个球的最大号码，试求X的分布列。

解 X的可能取值为5，6，7，8，9，10 且 $P(X=k)=\dfrac{C_{k-1}^4}{C_{10}^5}, \quad k=5,6,7,8,9,10$

所以X的分布列为

X	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
P	$\frac{1}{252}$	$\frac{5}{252}$	$\frac{5}{84}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{2}$

2. 一批元件的正品率为$\frac{3}{4}$，次品率为$\frac{1}{4}$，现对这批元件进行测试，设第X次首次测到正品，试求X的分布列。

解 X的取值为1，2，3，… 且 $P(X=k)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{4^k}, \quad k=1,2,3,\cdots$.

此即为X的分布列。

3. 袋中有6个球，分别标有数字1，2，2，2，3，3，从中任取一个球，令X为取出的球的号码，试求X的分布列及分布函数。

解 X的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

由分布函数的计算公式得 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \frac{1}{6}, & 1\le x<2\\ \frac{2}{3}, & 2\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$$

4. 设随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=\frac{k}{15}\quad k=1,2,3,4,5$。

求 (1) $P(\frac{1}{2}<X<\frac{5}{2})$, (2) $P(1\le x\le 3)$, (3) $P(X>3)$.

解

(1) $P(\frac{1}{2}<X<\frac{5}{2})=P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}=\frac{1}{5}$,

(2) $P(1\le x\le 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{3}{15}=\frac{2}{5}$,

(3) $P(X>3)=P(X=4)+P(X=5)=\frac{4}{15}+\frac{5}{15}=\frac{3}{5}$.

5. （1）设随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=a\frac{\lambda^k}{k!}\quad k=1,2,\cdots;\quad \lambda>0$ 为常数，试确定 a。

（2）设随机变量 Y 只取正整数值 N，且 $P(Y=N)$ 与 N^2 成反比，求 Y 的分布律。

解 （1）因为 $\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k)=1,$ 及 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{\lambda}-1,\quad \lambda>0$，所以 $a=\frac{1}{e^{\lambda}-1}.$

（2）令 $P(Y=N)=a\frac{k}{N^2}\quad \mathrm{N}=1,2,\cdots;$ 类似上题可得 $k=\frac{6}{\pi^2}$。

所以 Y 的分布律为 $P(Y=N)=\frac{6}{\pi^2N^2},\quad N=1,2,\cdots$

6. 汽车沿街道行驶，需要通过3个均设有红绿信号灯的路口，每个信号灯为红或绿与其它信号灯为红或绿相互独立，且红绿两种信号灯时间相等，以 X 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口，求 X 的概率分布

解 X =0, 1, 2, 3, A_i =“汽车在第 i 个路口遇到红灯.”，i =1，2，3.

$P(X=0)=P(A_1)=\frac{1}{2}$，$P(X=1)=P(\overline{A_1}A_2)=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

$P(X=2)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$，$P(X=3)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$

X	0	1	2	3
P	1/2	1/4	1/8	1/8

为所求概率分布

§2.4 连续型随机变量及其概率密度函数

1　填空题

1. 已知连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}A+Be^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，则 $A=$ __1__, $B=-1$, $P(\frac{1}{2}<x<2)=$ $e^{-1}-e^{-4}$, $f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$。

2. 设随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}Ax, & x\in[0,2]\\ 0, & 其它\end{cases}$，则 $A=$ __0.5__, $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x^2}{4}, & 0\le x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$； $P(|x|\le\frac{1}{2})=$ $\frac{1}{16}$ 。

3. 设 X 服从参数为 λ 的指数分布，则 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ 。

2　单项选择题

设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in[a,b]\\ 0, & 其它\end{cases}$,问区间 $[a,b]$ 为下列哪一个区间时, $f(x)$ 才可能是某个随机变量的概率密度函数? （A）

（A）$[0,\frac{\pi}{2}]$;　　（B）$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$;　　(C) $[0,\ \pi]$;　　(D) $(0,\ 2\pi)$.

三、计算下列各题

1. 设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\le 1\\ 2-x, & 1<x\le 2\\ 0, & 其它\end{cases}$；求 X 的分布函数。

解　$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx$,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x^2}{2}, & 0<x\le 1\\ 2x-\frac{x^2}{2}-1, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$

2. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-(1+x)e^{-x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$；求 $(1)\ P(X\ge 1)$; $(2)\ X$ 的密度函数。

解

(1) $P(X \geq 1) = F(+\infty) - F(1) = 1 - (1 - 2e^{-1}) = 2e^{-1}$;

(2) $f(x) = F'(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

3. 设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} 4x^3, & 0 < x < 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$；

（1）求常数 a，使 $P(X > a) = P(X < a)$；（2）求常数 b，使 $P(X > b) = 0.05$。

解 （1）因为 $P(X > a) = P(X < a)$，所以 $1 - P(X < a) = P(X < a)$, 故

$$P(X < a) = \int_0^a 4x^3 dx = a^4 = \frac{1}{2}, \quad 所以\ a = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$$ 。

因为 $P(X > b) = 0.05, \quad 1 - P(X \leq b) = 0.05, \ P(X \leq b) = b^4 = \dfrac{19}{20},$

所以 $b^4 = \dfrac{19}{20}$, 即 $b = \sqrt[4]{0.95} = 0.9872$

4. 在半径为 R，球心为 O 的球内任取一点 P，求 $X = \overline{OP}$ 的分布函数及概率密度。

解 当 $0 \leq x \leq R$ 时，设 $OP = x$，则点 P 落到以 O 为球心，x 为半径的球面上时，它到 O 点的距离均为 x，因此

$$P(X \leq x) = \frac{V_{OP}}{V_{OR}} = \frac{\frac{4}{3}\pi x^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \left(\frac{x}{R}\right)^3$$

所以，X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ \left(\dfrac{x}{R}\right)^3, & 0 \leq x < R \\ 1, & x \geq R \end{cases}$$

X 的密度函数为

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{R^3}, & 0 \leq x \leq R \\ 0, & x < 0, x > R \end{cases}$$

5. 从某区到火车站有两条路线，一条路程短，但阻塞多，所需时间（分钟）服从 $N(50,100)$；另一条路程长，但阻塞少，所需时间（分钟）服从 $N(60,16)$，问

1 要在70分钟内赶到火车站应走哪条路保险？

2 要在65分钟内赶到火车站又应走哪条路保险？

解 （1）因为

$$P(X_1 \leq 70) = \Phi(\frac{70-50}{10}) = 0.9772, \ P(X_2 \leq 70) = \Phi(\frac{70-60}{4}) = 0.9938.$$ 所以走第二条。

（2）类似的走第一条。

§2.5 随机变量函数的分布

1 填空题

1. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 则 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim$ $Y\sim N(0,1)$.

2. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 则 $Y=aX+b\sim$ $N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$.

3. 设 $X\sim N(0,1)$，则 $Y=X^2$ 的概率密度函数是 $f_Y(x)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}y^{-\frac{1}{2}}, & y>0\end{cases}$.

4. 设随机变量 X 服从(0,2)上的均匀分布,则随机变量 $Y=X^2$ 在(0,4)内的概率密度 $f_Y(y)$ 为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{y}}, & 0<y<4\\ 0, & 其它\end{cases}$$.

2 单项选择题

1. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$,则随机变量 $Y=2X+1$ 的分布函数 $G(y)$ 是 （A）

$(A)\ G(y)=F(\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}).$ $(B)\ G(y)=F(\frac{1}{2}y+1)$

$(C)\ G(y)=2F(y)+1.$ $(D)\ G(y)=\frac{1}{2}F(y)-\frac{1}{2}.$

2. 已知随机变量X的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & 2<x<e+1\\ 0, & 其它\end{cases}$，则随机变量 $Y=X^2$ 的密度函数为 （C）

（A）$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(y-1)^2}, & 4<y<(e+1)^2\\ 0, & 其它\end{cases}$； $(B)\ f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & 2<y<\sqrt{e+1}\\ 0, & 其它\end{cases}$；

$(C)\ f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}(\sqrt{y}-1)}, & 4<y<(e+1)^2\\ 0, & 其它\end{cases}$； $(D)\ f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{y}}, & 2<y<\sqrt{e+1}\\ 0, & 其它\end{cases}$.

三、计算下列各题

1. 设随机变量 X 的分布律如下，求 $Y=X^2+1$ 的分布律。

X	-2	-1	0	1	2
P_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

解

Y	1	2	5
P_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{17}{30}$

2. 设随机变量 X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布，求 (1) $Y=e^X$；(2) $Z=-2\ln X$ 的密度函数。

解　X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & x<0, x>1\end{cases}$

设 $Y=e^X$，则有 $F_Y(x)=P(Y\le x)=P(e^X\le x)=P(X\le \ln x)=\int_{-\infty}^{\ln x} f_X(t)dt$。

所以 $f_Y(x)=\frac{1}{x}f_X(\ln x)$，因此当 $x\le 1$ 及 $x\ge e$ 时，由 $f_X(x)=0$ 知 $f_Y(x)=0$；

当 $0<x<e$ 时，由 $f_X(x)=1$ 知 $f_Y(x)=\frac{1}{x}$，所以所求密度函数为

$$f_Y(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 1<x<e\\ 0, & x\le 1, x\ge e\end{cases}$$

类似的可得：

$$f_Y(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

3. 设 $X\sim N(0,1)$，求 (1) $Y=e^X$；(2) $Z=2X^2+1$；(3) $W=|X|$ 的密度函数。

解　（1）X 的密度函数为 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\quad(-\infty<x<+\infty)$，$Y=e^X$ 的分布函数为

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)=P(X\le \ln y)=\int_{-\infty}^{\ln y} f_X(t)dt,\quad y\ge 0$$

$F_Y(y)=0$，　$y<0$

所以 $Y=e^X$ 的密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(iny)^2}{2}}.\frac{1}{y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

（2）类似地可得：所以 $Z=2X^2+1$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{\pi(z-1)}}e^{-\frac{z-1}{4}}, & z\ge 1\\ 0, & z<1\end{cases}$$

（3）　$W=|X|$ 的分布函数为 $F_W(y)=P(W\le y)=P(|X|\le y)$

$$=P(-y\le X\le y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-y}^{y}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{y}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\qquad y\ge 0$$

$F_W(y)=0$，　$y<0$

所以 $W=|X|$ 的密度函数为

$$f_W(y)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases}$$

4. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi\\ 0, & \text{其它}\end{cases};$$

求 $Y=\sin X$ 的概率密度。

解 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\sin x\le y)$

$$=P(0<X\le\arcsin y)+P(\pi-\arcsin y\le X\le\pi)$$

$$=\int_0^{\arcsin y}\frac{2x}{\pi^2}dx+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}\frac{2x}{\pi^2}dx=\frac{2\arcsin y}{\pi^2},\quad 0<y<1$$

所以

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0\le y\le 1\\ 0, & y<0,\quad y>1\end{cases}$$

5. 在半径为 R，中心在坐标原点的圆周上任取一点（即该点的极角服从 $(-\pi,\pi)$ 上的均匀分布）求该点横坐标及纵坐标的密度函数。

解 因为极角服从 $(-\pi,\pi)$ 上的均匀分布，所以

$$f_\theta(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & -\pi<x<\pi\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$

所以

$$F_x(x)=P(X\le x)=P(R\cos\theta\le x)=P(-\pi\le\theta\le-\arccos\frac{x}{R})+P(\arccos\frac{x}{R}<\theta\le\pi)$$

$$=\int_{-\pi}^{-\arccos\frac{x}{R}}\frac{1}{2\pi}dx+\int_{\arccos\frac{x}{R}}^{\pi}\frac{1}{2\pi}dx=1-\frac{1}{\pi}\arccos\frac{x}{R}$$

所以

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{R^2-x^2}}, & -R\le x\le R\\ 0, & x<R,\quad x>R\end{cases}$$

同理

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{R^2-y^2}}, & -R\le y\le R\\ 0, & y<R,\quad y>R\end{cases}$$