书面作业4.1 参考解答或提示

第1部分 基础

本次作业均为教材习题.

教材P205-207: 7、8、11、14、15、18、20、21、22、23.

习题7

解 由已知得 $R=\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 0,0\rangle,\langle 2,1\rangle\}$，$S=\{\langle 2,0\rangle,\langle 3,1\rangle\}$，于是有

(1) 因为$\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{M}_S=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$，所以，

$$\boldsymbol{M}_{R\circ S}=\boldsymbol{M}_R\circ\boldsymbol{M}_S=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

从而，$R\circ S=\{\langle 1,0\rangle,\langle 2,1\rangle\}$.

(2) $R,S,S\circ R$ 的关系图分别见图 7.6.1(a)，7.6.1(b)和 7.6.1(c)，则

$$S\circ R=\{\langle 2,0\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}.$$

(3) $R\circ S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 2,2\rangle\}$，

$R^3=\{\langle 0,3\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 0,0\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$，

$S^3=\varnothing$.

习题8

解 (1) R 的关系图见图 7.6.2，R 的关系矩阵为：

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

(2) $R^2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle\}$；

$R^3=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle\}$；

$R^4=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle\}$.

习题11

解 (1) $R\circ R=\{\langle x,y\rangle \mid (x,y\in P)\wedge(x$ 是 y 的祖父$)\}$;
(2) $S^{-1}\circ R=\varnothing$;
(3) $S\circ R^{-1}=\{\langle x,y\rangle \mid (x,y\in P)\wedge(x$ 是 y 的妻子$)\}$;
(4) $\{\langle x,y\rangle \mid (x,y\in P)\wedge(y$ 是 x 的外祖母$)\}$可表示为$=S\circ S$;
(5) $\{\langle x,y\rangle \mid (x,y\in P)\wedge(y$ 是 x 的祖母$)\}$可表示为$=S\circ R$.

习题14

证明 由于 A 上的不同二元关系共有 $2^{n\times n}$ 个，根据鸽笼原理，由 R 产生的 $2^{n\times n}+1$ 个幂集关系

$$R^0,R^1,R^2,\cdots,R^{n\times n}$$

中，至少存在相同的关系. 因此存在 $0\leqslant s\leqslant 2^{n\times n}$, $0\leqslant t\leqslant 2^{n\times n}$, $s\neq t$, 使得 $R^s=R^t$.

习题15

证明 (1) 对任意$\langle x,z\rangle\in R\circ T(x,z\in A)$，由"$\circ$"知：存在 $y\in A$，使得

$$\langle x,y\rangle\in R,\langle y,z\rangle\in T.$$

由 $R\subseteq S$ 知：$\langle x,y\rangle\in S$.

由"$\circ$"知：$\langle x,y\rangle\in S,\langle y,z\rangle\in T\Rightarrow\langle x,z\rangle\in S\circ T$.

所以，$R\circ T\subseteq S\circ T$;

(2) 对任意$\langle y,x\rangle\in R^{-1}(x,y\in A)$，有$\langle x,y\rangle\in R$. 由 $R\subseteq S$ 知$\langle x,y\rangle\in S$，即$\langle y,x\rangle\in S^{-1}$. 所以 $R^{-1}\subseteq S^{-1}$.

(3) ① 对任意$\langle y,x\rangle\in(R\cap S)^{-1}(x,y\in A)$，有$\langle x,y\rangle\in R\cap S$. 即$\langle x,y\rangle\in R$ 且$\langle x,y\rangle\in S$. 从而有$\langle y,x\rangle\in R^{-1}$，$\langle y,x\rangle\in S^{-1}$，即$\langle y,x\rangle\in R^{-1}\cap S^{-1}$. 于是得到

$$(R\cap S)^{-1}\subseteq R^{-1}\cap S^{-1}.$$

② 对任意$\langle y,x\rangle\in R^{-1}\cap S^{-1}(x,y\in A)$，有$\langle y,x\rangle\in R^{-1}$且$\langle y,x\rangle\in S^{-1}$. 从而有$\langle x,y\rangle\in R$且$\langle x,y\rangle\in S$，即$\langle x,y\rangle\in R\cap S$. 于是$\langle y,x\rangle\in(R\cap S)^{-1}$. 即

$$R^{-1}\cap S^{-1}\subseteq(R\cap S)^{-1}.$$

由①，②知$(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$.

(4) 对任意$\langle x,y\rangle\in\bar{S}$，有$\langle x,y\rangle\notin S$. 由 $R\subseteq S$，所以$\langle x,y\rangle\notin R$，即$\langle x,y\rangle\in\bar{R}$，从而 $\bar{S}\subseteq\bar{R}$.

(5) ① 首先证明$(R\cup S)\circ T\subseteq(R\circ T)\cup(S\circ T)$.

对任意$\langle x,z\rangle\in(R\cup S)\circ T\ (x,z\in A)$，由"$\circ$"知：存在 $y\in A$，使得$\langle x,y\rangle\in(R\cup S)$并且$\langle y,z\rangle\in T$，从而有$\langle x,y\rangle\in R$ 或$\langle x,y\rangle\in S$.

由"$\circ$"知：

$$\langle x,y\rangle\in R,\langle y,z\rangle\in T\Rightarrow\langle x,z\rangle\in R\circ T \text{ 或}$$
$$\langle x,y\rangle\in S,\langle y,z\rangle\in T\Rightarrow\langle x,z\rangle\in S\circ T,$$

所以$\langle x,z\rangle\in(R\circ T)\cup(S\circ T)$. 即

$$(R\cup S)\circ T\subseteq(R\circ T)\cup(S\circ T).$$

习题18

解 (1) 设 $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,4\rangle\}$，则 R 既不是自反的，又不是反自反的；
(2) 设 $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$，则 R 既是对称的，又是反对称的；
(3) 设 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle\}$，则 R 既不是对称的，也不是反对称的；
(4) 设 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle\}$，则 R 是传递的.

习题20

解 （1）R 是反对称的、反自反的、传递的；
（2）R 是反对称的；
（3）I_A 是自反的、对称的、反对称的、传递的；
（4）R 是对称的.

习题21

解 （1）$r(R)=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$；
$s(R)=R$；
$t(R)=R$.

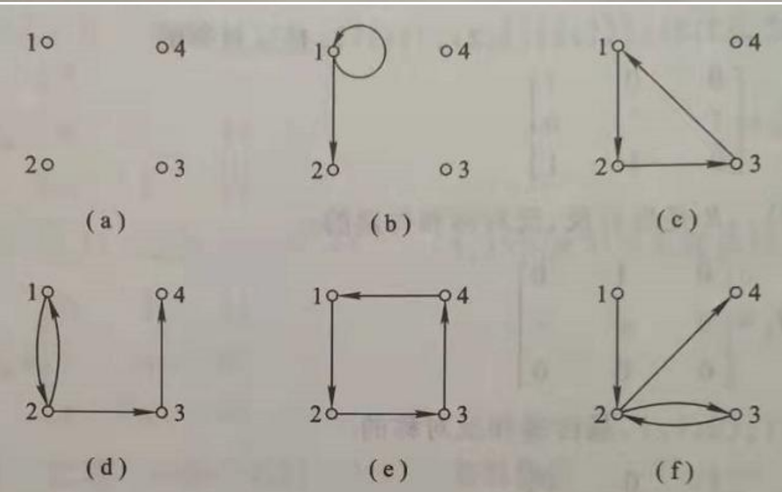

图 7.6.5

$r(R)$，$s(R)$，$t(R)$的关系图分别见图 7.6.6(a)，7.6.6(b)和 7.6.6(c).

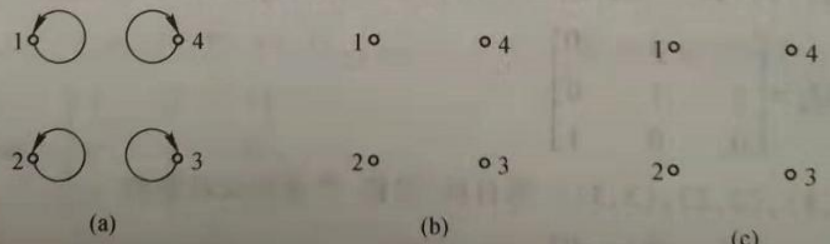

图 7.6.6

（2）$r(R)=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$；
$s(R)=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$；
$t(R)=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle\}$.
$r(R)$，$s(R)$，$t(R)$的关系图分别见图 7.6.7(a)，7.6.7(b)和 7.6.7(c).

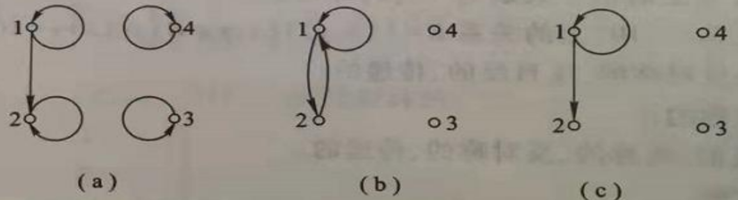

图 7.6.7

（3）$r(R)=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$；
$s(R)=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,3\rangle\}$；
$t(R)=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$.

$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 的关系图分别见图 7.6.8(a), 7.6.8(b) 和 7.6.8(c).

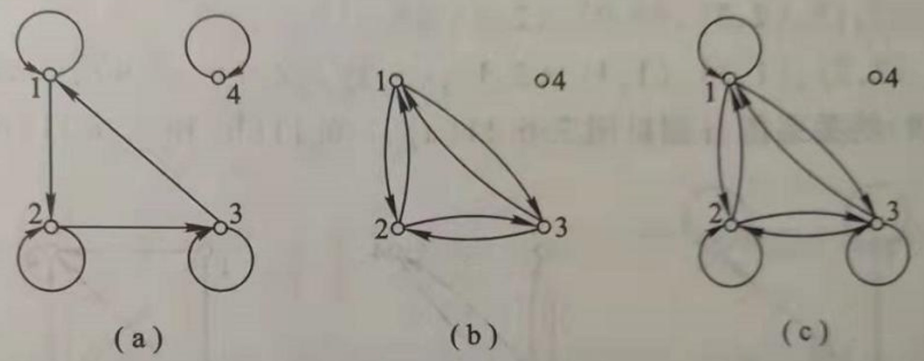

图 7.6.8

(4) $r(R)=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,4\rangle\}$;

$s(R)=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,3\rangle\}$;

$t(R)=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$.

$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 的关系图分别见图 7.6.9(a), 7.6.9(b) 和 7.6.9(c).

(5) $r(R)=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,4\rangle\}$;

$s(R)=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 1,4\rangle\}$;

$t(R)=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 1,4\rangle,$
$\langle 4,1\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$.

$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 的关系图分别见图 7.6.10(a), 7.6.10(b) 和 7.6.10(c).

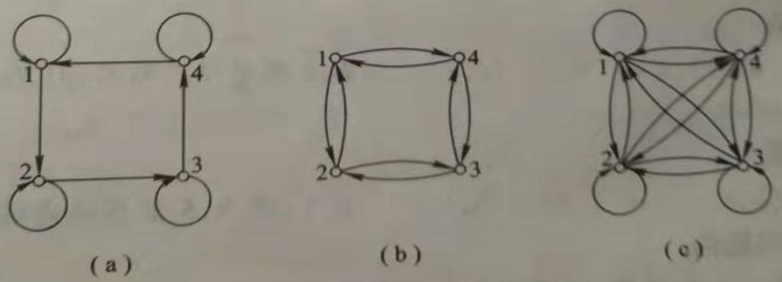

图 7.6.10

(6) $r(R)=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$;

$s(R)=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$;

$t(R)=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 3,3\rangle\}$.

$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 的关系图分别见图 7.6.11(a), 7.6.11(b) 和 7.6.11(c).

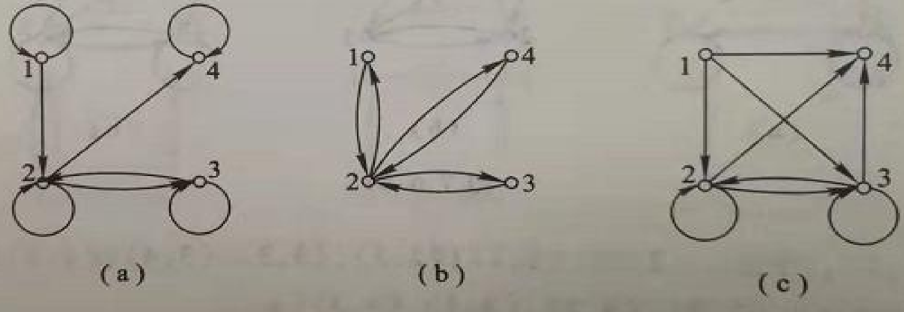

图 7.6.11

习题22

解　(1) 是正确的.

对任意的 $x\in A$，因为 R,S 是自反的，所以 $\langle x,x\rangle\in R$，$\langle x,x\rangle\in S$. 由"$\circ$"知：$\langle x,x\rangle\in R\circ S$. 所以，$R\circ S$ 是自反的.

(2) 不一定正确.

如 $R=\{\langle a,b\rangle\}$，$S=\{\langle b,a\rangle\}$，则 R,S 都是反自反的，但 $R\circ S=\{\langle a,a\rangle\}$ 不是反自反的.

(3) 不一定正确.

如 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$，$S=\{\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$，则 R,S 都是对称的，但 $R\circ S=\{\langle a,c\rangle\}$ 不是对称的.

(4) 不一定正确.

如 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle\}$，$S=\{\langle b,b\rangle,\langle c,a\rangle\}$，则 R,S 都是反对称的，但 $R\circ S=\{\langle b,a\rangle,\langle a,b\rangle\}$ 不是反对称的.

(5) 不一定正确.

如 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle\}$，$S=\{\langle b,b\rangle,\langle c,a\rangle\}$，则 R,S 都是传递的，但 $R\circ S=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle a,a\rangle\}$ 不是传递的.

习题23

证明 (1) ① 对任意的 $x\in A$，因为 R 是自反的，所以 $\langle x,x\rangle\in R$. 又因为 $R\subseteq s(R)$，所以 $\langle x,x\rangle\in s(R)$. 即 $s(R)$ 是自反的.

② 对任意的 $x\in A$，因为 R 是自反的，所以 $\langle x,x\rangle\in R$. 又因为 $R\subseteq t(R)$，所以 $\langle x,x\rangle\in t(R)$. 即 $t(R)$ 是自反的.

(2) ① 对任意的 $x,y\in A$，若 $\langle x,y\rangle\in r(R)=R\cup I_A$，则有 $\langle x,y\rangle\in R$ 或 $\langle x,y\rangle\in I_A$.

若 $\langle x,y\rangle\in R$，则由 R 是对称的，所以 $\langle y,x\rangle\in R$. 又因为 $R\subseteq r(R)$，所以 $\langle y,x\rangle\in r(R)$.

若 $\langle x,y\rangle\in I_A$，则 $x=y$，即 $\langle y,x\rangle\in I_A$. 又因为 $I_A\subseteq r(R)$，所以 $\langle y,x\rangle\in r(R)$.

无论是哪一种情况，都有 $\langle y,x\rangle\in r(R)$. 即 $r(R)$ 是对称的.

② 对任意的 $x,y\in A$，若 $\langle x,y\rangle\in t(R)$，则存在 $i\in\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$，使得 $\langle x,y\rangle\in R^i$. 由"$\circ$"的定义知：存在 $c_1,c_2,c_3,\cdots,c_{i-1}$，使得 $\langle x,c_1\rangle\in R$，$\langle c_1,c_2\rangle\in R$，$\langle c_2,c_3\rangle\in R$，$\cdots$，$\langle c_{i-1},y\rangle\in R$. 因为 R 是对称的，所以有 $\langle y,c_{i-1}\rangle\in R$，$\langle c_{i-2},c_{i-3}\rangle\in R$，$\langle c_{i-3},c_{i-4}\rangle\in R$，$\cdots$，$\langle c_1,x\rangle\in R$. 由"$\circ$"的定义知：$\langle y,x\rangle\in R^i$，即有 $\langle y,x\rangle\in t(R)$. 所以 $t(R)$ 是对称的.

(3) ① 对任意 $x,y,z\in A$，若 $\langle x,y\rangle\in r(R)=R\cup I_A$，$\langle y,z\rangle\in r(R)=R\cup I_A$，则有

$$(\langle x,y\rangle\in R\text{ 或 }\langle x,y\rangle\in I_A)\text{ 并且 }(\langle y,z\rangle\in R\text{ 或 }\langle y,z\rangle\in I_A).$$

若 $\langle x,y\rangle\in R$ 且 $\langle y,z\rangle\in R$，则由 R 是传递的，所以 $\langle x,z\rangle\in R$. 又因为 $R\subseteq r(R)$，所以

$$\langle x,z\rangle\in r(R).$$

若 $\langle x,y\rangle\in I_A$ 或 $\langle y,z\rangle\in I_A$，则有 $x=y$ 或 $y=z$. 又因为 $I_A\subseteq r(R)$，则

由 $\langle x,x\rangle\in r(R)$ 及 $\langle x,z\rangle\in r(R)$，有 $\langle x,z\rangle\in r(R)$.

由 $\langle x,z\rangle\in r(R)$ 及 $\langle z,z\rangle\in r(R)$，有 $\langle x,z\rangle\in r(R)$.

所以 $\langle x,z\rangle\in r(R)$.

无论是哪一种情况，都有 $\langle x,z\rangle\in r(R)$. 即 $r(R)$ 是传递的.

② 结论不一定成立.

如 $R=\{\langle 1,2\rangle\}$，则 R 可传递，但 $s(R)=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ 不可传递.

(4) 结论不一定成立.

若 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$，则 R 是反对称的，但 $t(R)=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}$ 不是反对称的.

第2部分 理论

无

第3部分 综合应用

无