书面作业 第8次 参考解答或提示

第1部分 基础

无.

第2部分 理论

T1-T5：教材第 9 章习题：题 9，14，22，27，28.

T6 请证明：设 G 是一(n，m)图，G 有ω个分图，则 n-ω≤m≤(n-ω)(n-ω+1)/2.

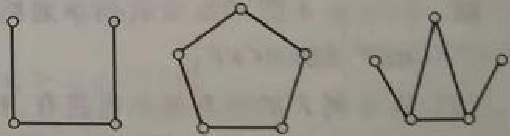
上述练习中，T2 可以应用反证法来证明，T1、T3 需要清楚补图、有向图连通性等基本概念，T4、T5 需要理解如何应用矩阵计算来证明或求解图有关结论. T6 左端不等式可以考虑用数学归纳法，右端不等式可以考虑用构造法证明.

T1（题 9）

解 (1) 图 7.9.6 中(a)与它的补图同构，所以它是具有 4 个结点的自补图，此外再也没有与它不同构的具有 4 个结点的自补图了；

(2) 具有 5 个结点的非同构的自补图只有两个，它们分别是图 7.9.6 中的(b)和(c)；

(3) 若具有 n 个结点无向图 G 是自补图，则因 $G \cong \bar{G}$，因而 G 与 $\bar{G}$ 边数相同，设它们的边数为 m. 又因为 G 与 $\bar{G}$ 的边数之和为 K_n 的边数 $\frac{1}{2}n(n-1)$，所以 $\frac{1}{2}n(n-1)=2m$，即 $n(n-1)=4m$，因而 n 为 4 的倍数，即 $n=4k$，或者 $n-1$ 为 4 的倍数，即 $n=4k+1$.



(a) (b) (c)

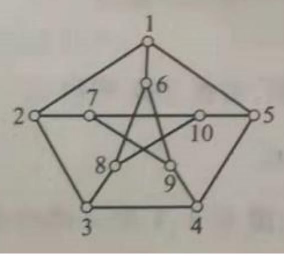
T2（题 14）

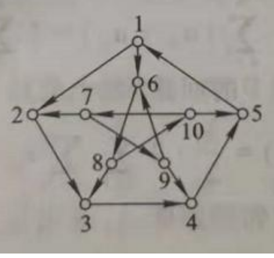
请参考定理 11.3.2.

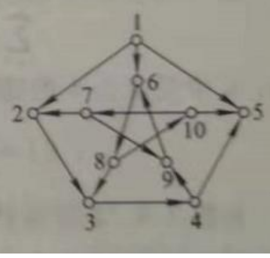
T3（题 22）

解 (1) 给图 7.9.13 加方向如图 7.9.14 所示便成为强连通图，事实上，图 7.9.14 中存在一条回路 1,2,3,4,5,1,6,8,10,7,9,4,5,1，该回路经过图中每个结点至少一次；

(2) 给图 7.9.13 加方向如图 7.9.15 所示便成为单向连通图，但不是强连通图，事实上，该图中的结点 2,3,4,6,7,8,9,10 相互可达，结点 1 可达其他所有结点，而其他所有结点都不可达 1.所有结点都可达结点 5，但 5 不可达其他所有结点.







T4(题 27)

解 (1) 将 G 中结点按 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5 排序，则 G 的邻接矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

(2) 为了求 G 中长度为 4 的连通数目，就要计算 A^4，为此先计算 A^2 和 A^3，

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0&2\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&2\\1&0&1&0&0\\0&2&0&2&0\end{pmatrix},A^3=\begin{pmatrix}2&0&2&0&0\\0&2&0&2&0\\2&0&2&0&0\\0&2&0&2&0\\0&0&0&0&4\end{pmatrix},$$

$$A^4=\begin{pmatrix}0&4&0&4&0\\0&0&0&0&4\\0&4&0&4&0\\0&0&0&0&4\\4&0&4&0&0\end{pmatrix}.$$

因 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^{(4)}=32$，故 G 中长度为 4 的通路有 32 条。因 A^4 的主对角元素均为 0，G 中无长度为 4 的回路。

(3) 因为

$$A^{(2)}=A\wedge A=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\end{pmatrix},A^{(3)}=A\wedge A^{(2)}=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$A^{(4)}=A\wedge A^{(3)}=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\end{pmatrix},A^{(5)}=A\wedge A^{(4)}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 G 的可达性矩阵

$$P=A\vee A^{(2)}\vee A^{(3)}\vee A^{(4)}\vee A^{(5)}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

由于 P 中每个元素均为 1，所以 G 是强连通图，当然也是单向连通图。

T5(题 28)

(1) 根据 G_1 的邻接矩阵 A 求解其可达矩阵 P：

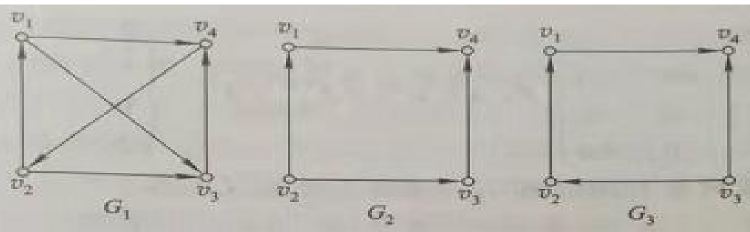


图 7.9.20

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},P=A\vee A^{(2)}\vee A^{(3)}\vee A^{(4)}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

由于 P 中每个元素均为 1，所以图 G_1 是强连通图，当然也是单向连通图和弱连通图.

（2）写出图 7.9.20 中图 G_2 的邻接矩阵 A，并根据 A 求出可达性矩阵 P 如下：

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},P=A\vee A^{(2)}\vee A^{(3)}\vee A^{(4)}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

由于 P 中不是每个元素均为 1，所以图 G_2 不是强连通图. 又因为

$$P'=P\vee P^{T}=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

中不是除主对角元外所有元素均为 1，所以图 G_2 不是单向连通图. 下面计算

$$A_1=A\vee A^{T}=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix},$$

及

$$P_1=A_1\vee A_1^{(2)}\vee A_1^{(3)}\vee A_1^{(4)}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

由于 P_1 中每个元素均为 1，所以图 G_2 是弱连通图.

（3）写出图 7.9.20 中图 G_3 的邻接矩阵 A，并根据 A 求出可达性矩阵 P 如下：

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},P=A\vee A^{(2)}\vee A^{(3)}\vee A^{(4)}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

由于 P 中不是每个元素均为 1，所以图 G_3 不是强连通图. 又因为

$$P'=P\vee P^{T}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

中除主对角元外所有元素均为 1，所以图 G_3 是单向连通图.

T6

证明 首先证明 $m\ge n-\omega$. 对G的边数m施归纳法，当 $m=0$ 时，显然 $\omega=n$，$m\ge n-\omega$ 成立.

假设对于 $m=m_0-1$ 的图结论成立，设图G边数 $m=m_0$，从G中删去一条边，得到图 G'，可能有两种情形：

(1) G' 有n个结点，ω 个分图，m_0-1 条边. 由归纳假设，$n-\omega\le m_0-1$，即有 $n-\omega\le m_0$；(2) G' 有n个结点，

$\omega+1$个分图，m_0-1条边. 由归纳假设，$n-(\omega+1)\le m_0-1$，即$n-\omega\le m_0$. 因此，对于$m=m_0$结论成立.

再证$m\le(n-\omega)(n-\omega+1)/2$.

对于有ω个分图的G，其边数不大于将G中每一个分图均变为完全图的情形. 现在假设G的每个分图均为完全图，G_i和G_j是其中的两个分图，G_i有n_i个结点，G_j有n_j个结点，设$n_i\ge n_j\ge 1$.若G_i变为n_i+1个结点的完全图，而G_j变为n_j-1个结点的完全图，则结点总数n_i+n_j不变，而边数变化为：

$$((n_i+1)n_i-n_i(n_i-1))/2-(n_j(n_j-1)-(n_j-1)(n_j-2))/2=n_i-n_j+1>0$$

即这样的变化使边数增加.

因此，G的子图均为完全图的情况下，G的边数必小于等于由$n-\omega+1$个结点的完全图和$\omega-1$个结点情形下的边数，故有$m\le(n-\omega)(n-\omega+1)/2$.

综上，命题得证.

第3部分 综合应用

下述 2 个应用问题，需要首先构建图模型，之后通过判断图的连通性来证明相关结论.

T1 已知有关人员 a，b，c，d，e，f，g 具有如下的语言能力：a 说英语；b 说英语和西班牙语；c 说英语、意大利语和俄语；d 说日语和西班牙语；e 说德语和意大利语；f 说法语、日语和俄语；g 说法语和德语.

试问： 上述七人是否任意二人都能交谈(可借助于其余五 人组成的译员链)?

思路：用简单图来表示上述问题：结点表示相关人员，如果二人可以说同一语言，则在相应的二结点间加边。如果得到的图是连通图则表示上述七人可以任意二人进行交谈.

T2 某局域网上的 2n 台计算机，如果每一台计算机至少可以与另外 n 台计算机直接传递数据， 那么，在这 2n 台计算机中任何两台之间都可以传递数据（可能需要通过其它计算机）.

思路：用结点表示计算机，如果二计算机可以进行直接数据传递，则在相应而结点间加边，从而可以将原问题表示为一个简单图 G，如果图 G 是连通的，则表示在这 2n 台计算机中任何两台之间都可以传递数据（可能要通过其它计算机）.

应用反证法来证明 G 是连通的（参考本次习题的 T2）.

假设 G 不连通，则至少存在两个分图，设其中二个分图的结点数分别为 n_1, n_2，结点 u，v 分别在这两个分图中，于是，容易得到:$d(u)+d(v)\ge 2n$ 与 $d(u)+d(v)\le(n_1-1)+(n_2-1)\le 2n-2$ 的矛盾.

此题还可以直接用后续证明 G 为 Hamilton 图的方法来证明其连通性.