笔记前言：

本笔记的内容是去掉步骤的概述后，视频的所有内容。

本猴觉得，自己的步骤概述写的太啰嗦，大家自己做笔记时，

应该每个人都有自己的最舒服最简练的写法，所以没给大家写。

再是本猴觉得，不给大家写这个概述的话，大家会记忆的更深，

掌握的更好！

所以老铁！一定要过呀！不要辜负本猴的心意！~~~

【祝逢考必过，心想事成~~~~】

【一定能过！！！！！】

1/6 无放回题目(一次摸多个)

$$P=\frac{C_{\text{同号第一类东西总}}^{\text{同号第一类东西取}}\cdot C_{\text{同号第二类东西总}}^{\text{同号第二类东西取}}\cdot\ldots}{C_{\text{总共的东西数}}^{\text{要取的东西数}}}$$

其中 $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$

$a!=$ 从a乘到1的结果

如 $5!=5\times4\times3\times2\times1$

$3!=3\times2\times1$

特别注意 $0!=1$

例1. 盒子里有3绿4红共7个小球，无放回的摸3个，试求摸出1绿2红的概率

$$P=\frac{C_{\text{绿总}}^{\text{绿取}}\cdot C_{\text{红总}}^{\text{红取}}}{C_{\text{总共的球数}}^{\text{要取的球数}}}$$

$$=\frac{C_3^1\cdot C_4^2}{C_7^3}$$

$$=\frac{3\cdot6}{35}$$

$$=\frac{18}{35}$$

$$C_3^1=\frac{3!}{1!(3-1)!}=\frac{3!}{1!2!}=\frac{3\times2\times1}{1\times2\times1}=3$$

$$C_4^2=\frac{4!}{2!(4-2)!}=\frac{4!}{2!2!}=\frac{4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1}=6$$

$$C_7^3=\frac{7!}{3!(7-3)!}=\frac{7!}{3!4!}=\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times4\times3\times2\times1}=35$$

练习1. 钱包里有3张100元，5张10元，3张5元的纸币，随机摸3张，试求摸出1张100元,1张10元,1张5元的概率

$$P=\frac{C_{100\text{元总}}^{100\text{元取}}\cdot C_{10\text{元总}}^{10\text{元取}}\cdot C_{5\text{元总}}^{5\text{元取}}}{C_{\text{总共的钱的个数}}^{\text{要取的钱的个数}}}$$

$$=\frac{C_3^1\cdot C_5^1\cdot C_3^1}{C_{3+5+3}^3}$$

$$=\frac{C_3^1\cdot C_5^1\cdot C_3^1}{C_{11}^3}$$

$$=\frac{3\times5\times3}{165}$$

$$=\frac{3}{11}$$

$$C_3^1=\frac{3!}{1!(3-1)!}=\frac{3!}{1!2!}=\frac{3\times2\times1}{1\times2\times1}=3$$

$$C_5^1=\frac{5!}{1!(5-1)!}=\frac{5!}{1!4!}=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{1\times4\times3\times2\times1}=5$$

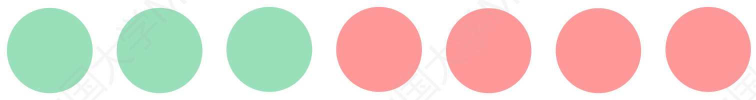
$$C_{11}^3=\frac{11!}{3!(11-3)!}=\frac{11!}{3!8!}=\frac{11\times10\times9\times8!}{3\times2\times1\times8!}=165$$

2/6 有放回题目(进行多次，每次情况一致)

$$P=\frac{\text{活动进行的次数!}}{\text{同号第一类被摸出次数!}\cdot\text{同号第二类被摸出次数!}\cdot\ldots}\cdot P^{\text{同一类被摸出次数}}(\text{摸一次出同一类})\cdot P^{\text{同二类被摸出次数}}(\text{摸一次出同二类})\cdot\ \ldots$$

例2. 盒子里有3绿4红共7个小球，有放回的摸3次，

试求摸出1绿2红的概率



$$P=\frac{\text{活动进行的次数!}}{\text{绿被摸出次数!}\cdot\text{红被摸出次数!}}\cdot P^{\text{绿被摸出次数}}(\text{摸一次出绿})\cdot P^{\text{红被摸出次数}}(\text{摸一次出红})$$

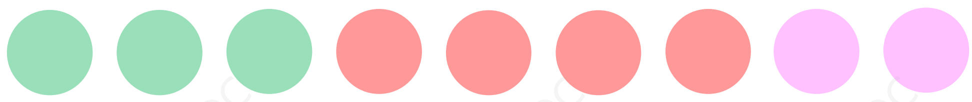
$$=\frac{3!}{1!\cdot 2!}\times\left(\frac{3}{7}\right)^{1}\times\left(\frac{4}{7}\right)^{2}$$

$$=\frac{3\times2\times1}{1\times2\times1}\times\frac{3}{7}\times\frac{16}{49}$$

$$=\frac{144}{343}$$

练习2. 盒子里有3绿4红2粉共9个小球，有放回的摸4次，

试求摸出1绿1红2粉的概率



$$P=\frac{\text{活动进行的次数!}}{\text{绿被摸出次数!}\cdot\text{红被摸出次数!}\cdot\text{粉被摸出次数!}}\cdot P^{\text{绿被摸出次数}}(\text{摸一次出绿})\cdot P^{\text{红被摸出次数}}(\text{摸一次出红})\cdot P^{\text{粉被摸出次数}}(\text{摸一次出粉})$$

$$=\frac{4!}{1!\cdot1!\cdot2!}\cdot\left(\frac{3}{9}\right)^{1}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{1}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^{2}$$

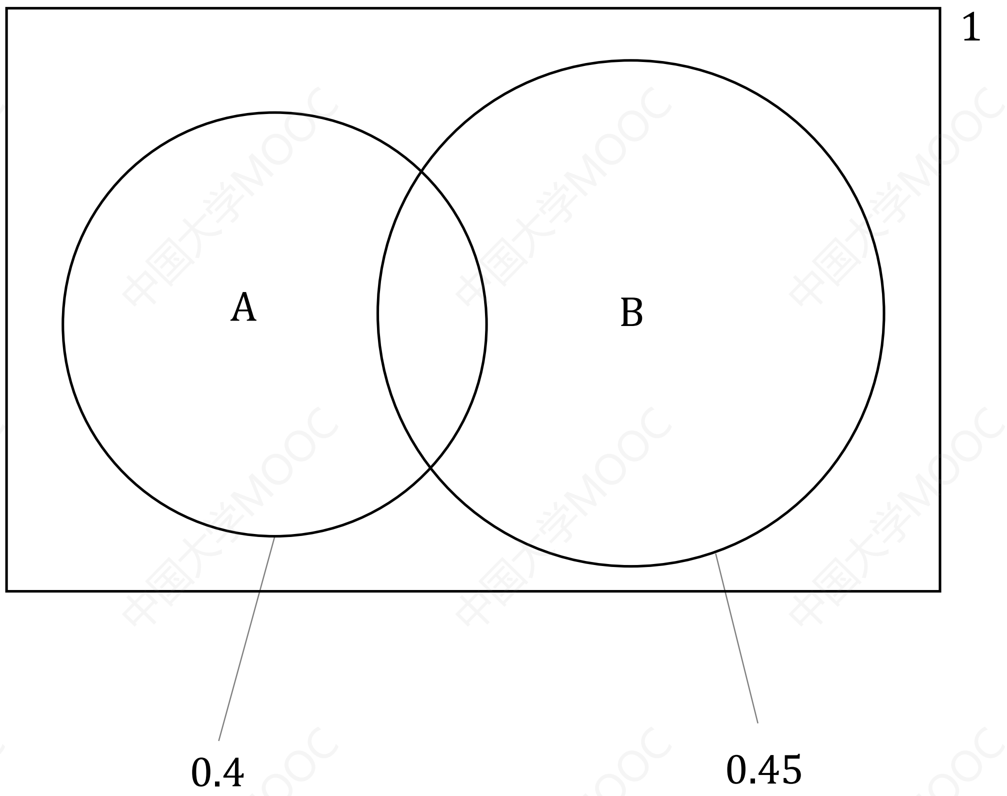
$$=\frac{4\times3\times2\times1}{1\times1\times2\times1}\times\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}\times\frac{4}{81}$$

$$=\frac{64}{729}$$

3/6 事件的概率

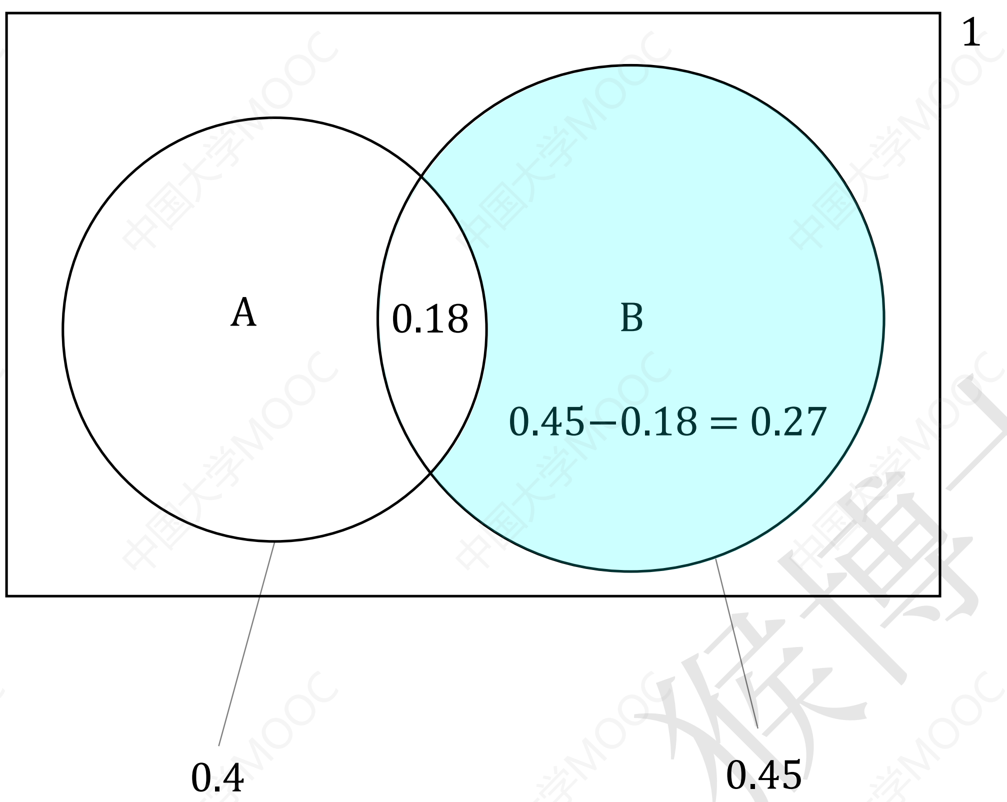
例3. 已知 A、B 相互独立，$P(A)=0.4$，$P(B)=0.45$，试求 $P\left(\overline{A}\cap B\right)$

数学符号	对应的意思
UV、$U\cap V$	U和V重合区域
$U+V$、$U\cup V$	U、V 合并在一起后的区域
$U-V$	U区域去掉UV重合区域后剩的区域
$\overline{U}$	U 区域以外的区域
UV互斥	U区域V区域没有重合：UV 变成 U V
UV对立	U以外是V：UV 变成 U V
U 包含于 V 、V 包含 U、$U\subset V$	U在V里面：U V 变成 U V
U、V 相互独立	U区域与V区域重合区域面积=P(U)·P(V)



∵ A、B 相互独立

∴ A区域与B区域重合区域面积 $=P(A)\cdot P(B)=0.4\times 0.45=0.18$



$P\left(\overline{A}\cap B\right)=0.27$

4/6 条件概率

例4. 已知 A、B 相互独立，$P(A)=0.4$，$P(B)=0.45$，

试求 $P\left(\overline{A}|B\right)$

$P\left(\overline{A}\cap B\right)$ 例3求过了

$$P\left(\overline{A}|B\right)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{0.27}{0.45}=0.6$$

在已知N发生的情况下，M发生的概率：

$$P(M|N)=\frac{P(M\cap N)}{P(N)}$$

例．已知今年发不发洪水和明年发不发洪水相互独立，今年发洪水概率是0.4，明年发洪水的概率是0.45，

试求明年发洪水的情况下，今年不发洪水的概率。

设A：今年发洪水 B：明年发洪水

(此题跟例4一样)

5/6 全概率公式

$P\{$集体发生某事$\}=P\{$个体$_1$出现$\}\cdot P\{$个体$_1$发生该事$\}+P\{$个体$_2$出现$\}\cdot P\{$个体$_2$发生该事$\}+\cdots$

例5. 某高速公路上客车中有 20% 是高速客车，80% 是

普通客车，假设高速客车发生故障的概率是 0.002，

普通客车发生故障的概率是 0.01。求该高速公路上

有客车发生故障的概率。

$P\{$客车发生故障$\}=P\{$高速客车出现$\}\cdot P\{$高速客车发生故障$\}+P\{$普通客车出现$\}\cdot P\{$普通客车发生故障$\}$

$=20\%\times0.002+80\%\times0.01$

$=0.0084$

猴博士爱讲课

6/6 贝叶斯公式

$$P\{\text{已知集体发生某事时，发生该事的是某个体}\}=\frac{P\{\text{该个体出现}\}\cdot P\{\text{该个体发生该事}\}}{P\{\text{集体发生该事}\}}$$

例6. 某高速公路上客车中有 20% 是高速客车，80% 是

普通客车，假设高速客车发生故障的概率是 0.002，

普通客车发生故障的概率是 0.01。求该高速公路上

有客车发生故障时，发生故障的是高速客车的概率。

$$P\{\text{已知客车发生故障时，发生故障的是高速客车}\}=\frac{P\{\text{高速客车出现}\}\cdot P\{\text{高速客车发生故障}\}}{P\{\text{客车发生故障}\}}$$

$P\{$客车发生故障$\}$ 例5求过了

$$=\frac{20\%\times0.002}{0.0084}$$

$$=\frac{1}{21}$$

1/6 求分布律里的未知数

例1. 已知 X 的分布律为

X	-2	0	2
P	0.4	0.3	k

，试求 k

$$0.4+0.3+k=1 \Rightarrow k=0.3$$

例2. 设二维随机变量(X,Y)的联合分布律为

X \ Y	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	a	$\frac{1}{12}$

，试求 a

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{12}+a+\frac{1}{12}=1 \Rightarrow a=\frac{1}{6}$$

2/6 根据 X 的分布律写 Y 的分布律

例3. 已知 X 的分布律为

X	-2	0	2
P	0.4	0.3	0.3

求 $Y=X^2+1$ 的分布律

Y	$(-2)^2+1$	0^2+1	2^2+1
P	0.4	0.3	0.3

$\Rightarrow$

Y	5	1	5
P	0.4	0.3	0.3

$\Rightarrow$

Y	1	5
P	0.3	0.7

3/6 根据 (X,Y) 的分布律写 Z 的分布律

例4. 已知 (X,Y) 的分布律为

X \ Y	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

求 $Z=XY$ 的分布律

$\because Z=XY$

$\therefore$

X \ Y	-1	0	1
0	$Z=0$ 0	$Z=0$ $\frac{1}{3}$	$Z=0$ 0
1	$Z=-1$ $\frac{1}{3}$	$Z=0$ 0	$Z=1$ $\frac{1}{3}$

Z	0	0	0	-1	0	1
P	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

$\Downarrow$

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

4/6 根据 (X,Y) 的分布律写边缘分布律

例5. 已知 (X,Y) 的分布律为

X \ Y	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

求随机变量 X、Y 的边缘分布律

X	0	1
P	$0+\frac{1}{3}+0$	$\frac{1}{3}+0+\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$0+\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}+0$	$0+\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

5/6 X 与 Y 相互独立时的联合分布律

例6. 设随机变量X与Y相互独立，下表列出了二维随机变量(X,Y)的联合分布律及关于X和关于Y的边缘分布律中的部分数值，试将其余数值填入表中的空白处

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}$
x_1	?	$\frac{1}{8}$	?	?
x_2	$\frac{1}{8}$	?	?	?
$P\{Y=y_j\}$	$\frac{1}{6}$	?	?	?

⇒

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}$
x_1	?	$\frac{1}{8}$	?	?
x_2	$\frac{1}{8}$	?	?	?
$P\{Y=y_j\}$	$\frac{1}{6}$	?	?	1

⇒

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}$
x_1	?	$\frac{1}{8}$	?	?
x_2	$\boxed{\frac{1}{8}}$	?	?	$\boxed{\frac{3}{4}}$
$P\{Y=y_j\}$	$\boxed{\frac{1}{6}}$	?	?	1

$$\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{8}$$

⇒

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}$
x_1	?	$\frac{1}{8}$	?	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	?	?	$\frac{3}{4}$
$P\{Y=y_j\}$	$\frac{1}{6}$	?	?	1

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$$

⇒

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	?	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	?	?	$\frac{3}{4}$
$P\{Y=y_j\}$	$\frac{1}{6}$	?	?	1

$$\frac{1}{24}+\frac{1}{8}=\frac{1}{6}$$

⇒

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	?	?	$\frac{3}{4}$
$P\{Y=y_j\}$	$\frac{1}{6}$	?	?	1

$$\frac{1}{24}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$$

5/6 X 与 Y 相互独立时的联合分布律

⇒

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\boxed{\frac{1}{8}}$	$\frac{1}{12}$	$\boxed{\frac{1}{4}}$
x_2	$\frac{1}{8}$	?	?	$\frac{3}{4}$
$P\{Y=y_j\}$	$\frac{1}{6}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	?	1

$\boxed{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}}$

⇒

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	?	$\frac{3}{4}$
$P\{Y=y_j\}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	?	1

$\boxed{\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}}$

⇒

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P\{Y=y_j\}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	?	1

$\boxed{\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}}$

⇒

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P\{Y=y_j\}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

$\boxed{\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}}$

6/6 根据分布律求期望、方差

$E(aX+bY+c) = aEX+bEY+c$

$DA = E(A^2)-(EA)^2$

例7. 已知 X 的分布律为

X	-2	0	2
P	0.4	0.3	0.3

Y 的分布律为

Y	1	5
P	0.3	0.7

试求 EX、EY、$E(X^2)$、$E(Y^3+1)$、$E(3X+5Y+7)$、DX

$EX = -2\times0.4 + 0\times0.3 + 2\times0.3 = -0.2$

$EY = 1\times0.3 + 5\times0.7 = 3.8$

X^2	$(-2)^2$	0^2	2^2
P	0.4	0.3	0.3

$E(X^2) = (-2)^2\times0.4 + 0^2\times0.3 + 2^2\times0.3 = 2.8$

Y^3+1	1^3+1	5^3+1
P	0.3	0.7

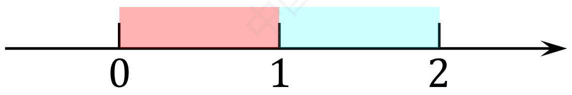
$E(Y^3+1) = (1^3+1)\times0.3 + (5^3+1)\times0.7 = 88.8$

$E(3X+5Y+7) = 3EX+5EY+7 = 3\times(-0.2) + 5\times3.8 + 7 = 25.4$

$DX = E(X^2)-(EX)^2 = 2.8 - (-0.2)^2 = 2.76$

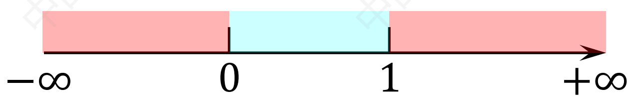
1/4 求分段函数在确定区间的定积分

例1. 已知 $f_X(x)=\begin{cases}1\ ,& 0\le x<1\\ 0\ ,& 其他\end{cases}$ ，试求 $\int_0^2 f_X(x)\,dx$



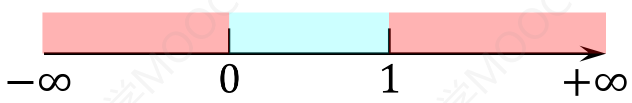
$$
\begin{aligned}
\int_0^2 f_X(x)\,dx &= \int_0^1 f_X(x)\,dx+\int_1^2 f_X(x)\,dx\\
&= \int_0^1 1\,dx+\int_1^2 0\,dx\\
&= x\Big|_{x=0}^{x=1}+0\\
&= (1-0)+0\\
&= 1
\end{aligned}
$$

例2. 已知 $f_X(x)=\begin{cases}1\ ,& 0\le x<1\\ 0\ ,& 其他\end{cases}$ ，试求 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\,dx$



$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} xf_X(x)\,dx+\int_0^1 xf_X(x)\,dx+\int_1^{+\infty} xf_X(x)\,dx\\
&= \int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,dx+\int_0^1 x\cdot 1\,dx+\int_1^{+\infty} x\cdot 0\,dx\\
&= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_0^1 x\,dx+\int_1^{+\infty} 0\,dx\\
&= 0+\left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{x=0}^{x=1}+0\\
&= 0+\left(\frac{1}{2}\times 1^2-\frac{1}{2}\times 0^2\right)+0\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

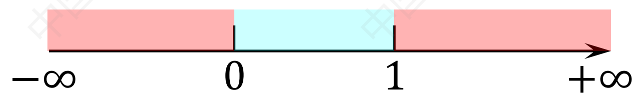
例3. 已知 $f_X(x)=\begin{cases}1\ ,& 0\le x<1\\ 0\ ,& 其他\end{cases}$ ，试求 $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f_X(x)\,dx$



$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f_X(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} x^2f_X(x)\,dx+\int_0^1 x^2f_X(x)\,dx+\int_1^{+\infty} x^2f_X(x)\,dx\\
&= \int_{-\infty}^{0} x^2\cdot 0\,dx+\int_0^1 x^2\cdot 1\,dx+\int_1^{+\infty} x^2\cdot 0\,dx\\
&= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^{+\infty} 0\,dx\\
&= 0+\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{x=0}^{x=1}+0\\
&= 0+\left(\frac{1}{3}\times 1^3-\frac{1}{3}\times 0^3\right)+0\\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

1/4 求分段函数在确定区间的定积分

例4. 已知 $f_X(x)=\begin{cases} a\ , & 0\le x<1 \\ 0\ , & 其他 \end{cases}$ ，试求 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx+\int_{0}^{1} f_X(x)\,dx+\int_{1}^{+\infty} f_X(x)\,dx$$

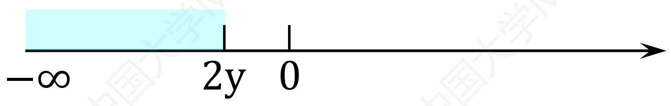
$$=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{1} a\,dx+\int_{1}^{+\infty} 0\,dx$$

$$=0+(ax)\Big|_{x=0}^{x=1}+0$$

$$=0+(a\times1-a\times0)+0$$

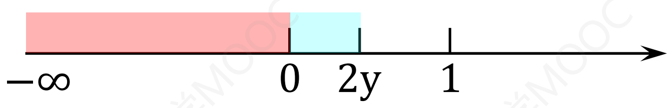
$$=a$$

例5. 已知 $f_X(x)=\begin{cases} 1\ , & 0\le x<1 \\ 0\ , & 其他 \end{cases}$ ，$2y<0$，试求 $\int_{-\infty}^{2y} f_X(x)\,dx$



$$\int_{-\infty}^{2y} f_X(x)\,dx=\int_{-\infty}^{2y} 0\,dx=0$$

例6. 已知 $f_X(x)=\begin{cases} 1\ , & 0\le x<1 \\ 0\ , & 其他 \end{cases}$ ，$0\le 2y<1$，试求 $\int_{-\infty}^{2y} f_X(x)\,dx$



$$\int_{-\infty}^{2y} f_X(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx+\int_{0}^{2y} f_X(x)\,dx$$

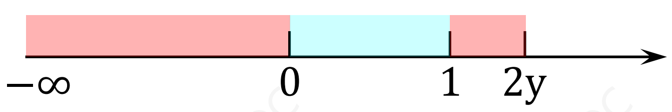
$$=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{2y} 1\,dx$$

$$=0+x\Big|_{x=0}^{x=2y}$$

$$=0+(2y-0)$$

$$=2y$$

例7. 已知 $f_X(x)=\begin{cases} 1\ , & 0\le x<1 \\ 0\ , & 其他 \end{cases}$ ，$2y\ge1$，试求 $\int_{-\infty}^{2y} f_X(x)\,dx$



$$\int_{-\infty}^{2y} f_X(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx+\int_{0}^{1} f_X(x)\,dx+\int_{1}^{2y} f_X(x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{1} 1\,dx+\int_{1}^{2y} 0\,dx$$

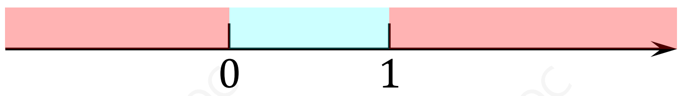
$$=0+x\Big|_{x=0}^{x=1}+0$$

$$=0+(1-0)+0$$

$$=1$$

2/4 求分段函数在$-\infty$到未知数的定积分

例8. 已知 $f_X(x)=\begin{cases}1 , & 0\le x<1\\ 0 , & 其他\end{cases}$ ，试求 $\int_{-\infty}^{2y} f_X(x)\,dx$



设 $2y<0$， $\int_{-\infty}^{2y} f_X(x)\,dx=0$ 例5求过

设 $0\le 2y<1$， $\int_{-\infty}^{2y} f_X(x)\,dx=2y$ 例6求过

设 $2y\ge 1$， $\int_{-\infty}^{2y} f_X(x)\,dx=1$ 例7求过

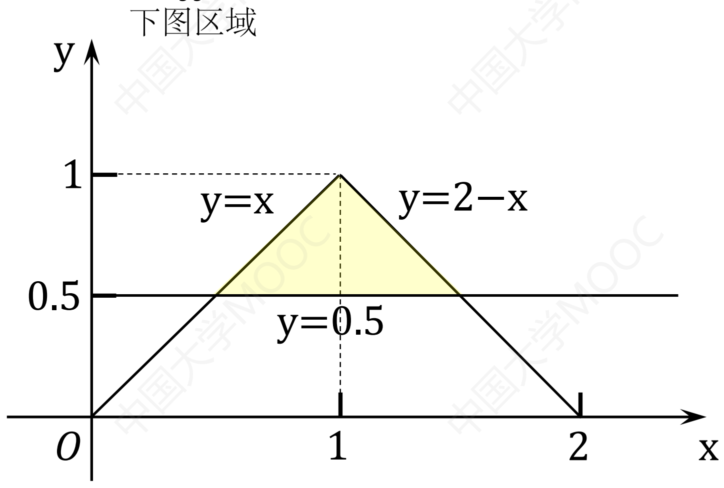
$$\int_{-\infty}^{2y} f_X(x)\,dx=\begin{cases}0 , & 2y<0\\ 2y , & 0\le 2y<1\\ 1 , & 2y\ge 1\end{cases}$$

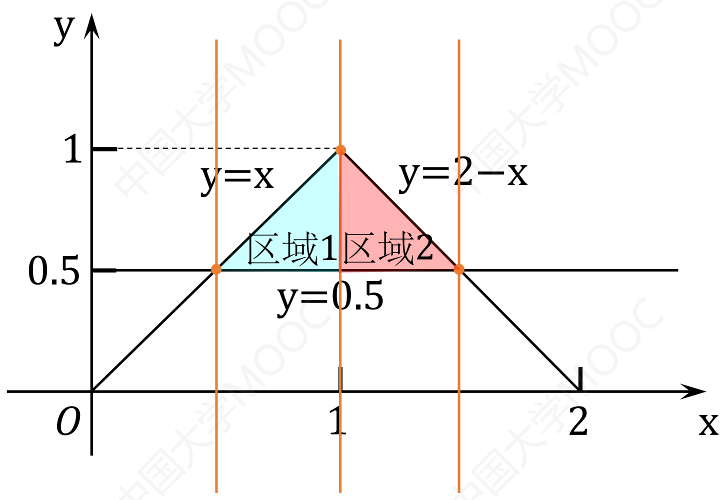
$$=\begin{cases}0 , & y<0\\ 2y , & 0\le y<\frac{1}{2}\\ 1 , & y\ge\frac{1}{2}\end{cases}$$

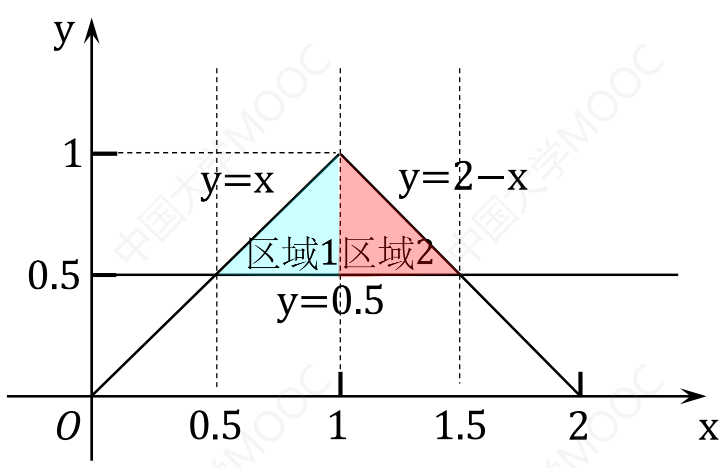
3/4 求简单的二重积分

$$积分 = \int_{区域内最小的x值}^{区域内最大的x值}\left(\int_{区域下边界y等于的式子}^{区域上边界y等于的式子} 求积分的式子\ dy\right)dx$$

例9. 求 $\iint\limits_{下图区域} 1\ dxdy$







积分 = 区域1的积分 + 区域2的积分

$$= \int_{0.5}^{1}\left(\int_{0.5}^{x} 1\ dy\right)dx + \int_{1}^{1.5}\left(\int_{0.5}^{2-x} 1\ dy\right)dx$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\int_{0.5}^{1}\left(\int_{0.5}^{x} 1\ dy\right)dx$$

$$= \int_{0.5}^{1}\left(y\Big|_{y=0.5}^{y=x}\right)dx$$

$$= \int_{0.5}^{1}(x-0.5)dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2-0.5x\right)\Big|_{x=0.5}^{x=1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\times 1^2-0.5\times 1\right)-\left(\frac{1}{2}\times 0.5^2-0.5\times 0.5\right)$$

$$= \frac{1}{8}$$

$$\int_{1}^{1.5}\left(\int_{0.5}^{2-x} 1\ dy\right)dx$$

$$= \int_{1}^{1.5}\left(y\Big|_{y=0.5}^{y=2-x}\right)dx$$

$$= \int_{1}^{1.5}(2-x-0.5)\ dx$$

$$= \int_{1}^{1.5}(1.5-x)\ dx$$

$$= \left(1.5x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{x=1}^{x=1.5}$$

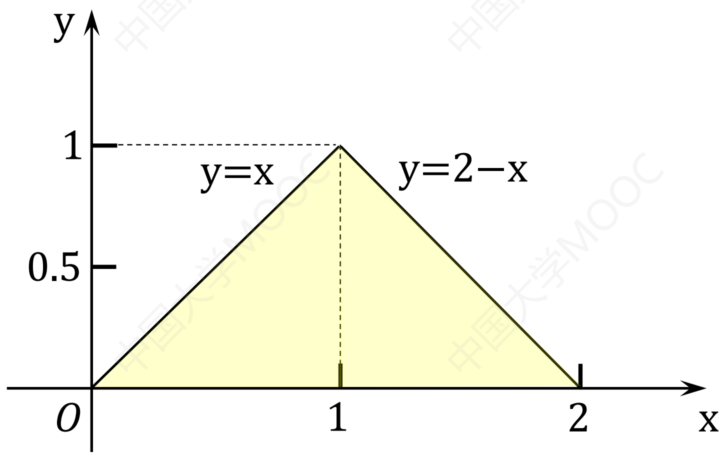
$$= \left(1.5\times 1.5-\frac{1}{2}\times 1.5^2\right)-\left(1.5\times 1-\frac{1}{2}\times 1^2\right)$$

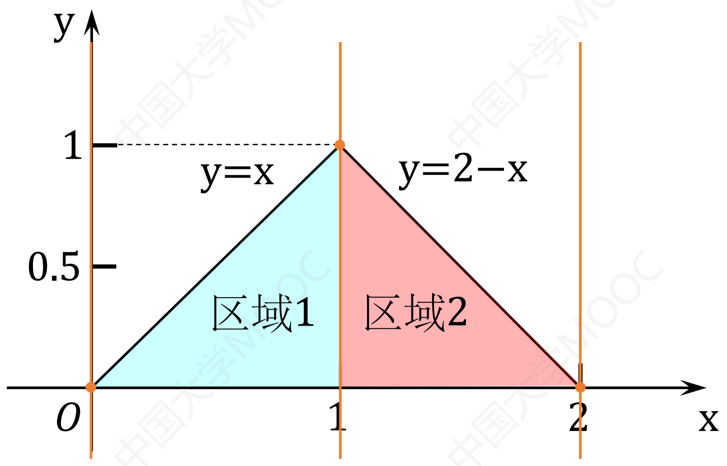
$$= \frac{1}{8}$$

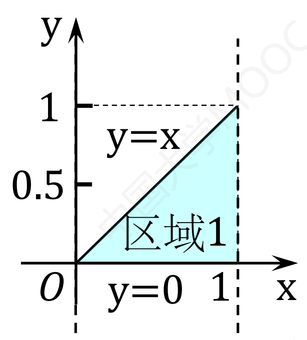
3/4 求简单的二重积分

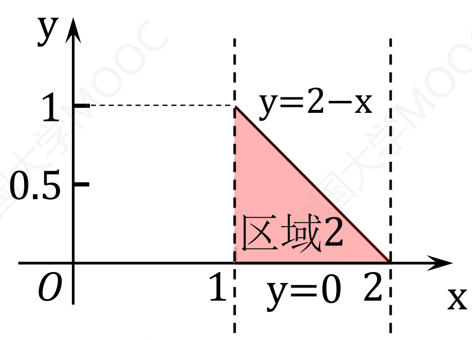
$$积分 = \int_{区域内最小的x值}^{区域内最大的x值}\left(\int_{区域下边界y等于的式子}^{区域上边界y等于的式子} 求积分的式子\, dy\right)dx$$

例10. 求 $\iint\limits_{下图区域} xy\, dxdy$









积分 = 区域1的积分 + 区域2的积分

$= \frac{1}{8} + \frac{5}{24}$

$= \frac{1}{3}$

区域1的积分 $= \int_0^1\left(\int_0^x xy\, dy\right)dx$

区域2的积分 $= \int_1^2\left(\int_0^{2-x} xy\, dy\right)dx$

$\because \frac{\partial\left(\frac{1}{2}xy^2\right)}{\partial y} = xy \qquad \therefore \int xydy = \frac{1}{2}xy^2$

区域1：

$= \int_0^1\left[\left(\frac{1}{2}xy^2\right)\Big|_{y=0}^{y=x}\right]dx$

$= \int_0^1\left(\frac{1}{2}x\cdot x^2 - \frac{1}{2}x\cdot 0^2\right)dx$

$= \int_0^1 \frac{1}{2}x^3\, dx$

$= \left(\frac{1}{8}x^4\right)\Big|_{x=0}^{x=1}$

$= \frac{1}{8}\times 1^4 - \frac{1}{8}\times 0^4$

$= \frac{1}{8}$

区域2：

$= \int_1^2\left[\left(\frac{1}{2}xy^2\right)\Big|_{y=0}^{y=2-x}\right]dx$

$= \int_1^2\left[\frac{1}{2}x\cdot(2-x)^2 - \frac{1}{2}x\cdot 0^2\right]dx$

$= \int_1^2\left(\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2x\right)dx$

$= \left(\frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x^2\right)\Big|_{x=1}^{x=2}$

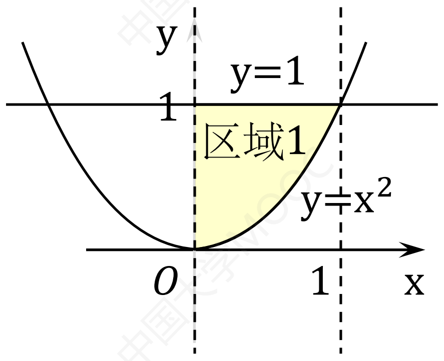
$= \frac{2}{3} - \frac{11}{24}$

$= \frac{5}{24}$

3/4 求简单的二重积分

$$积分=\int_{区域内最小的x值}^{区域内最大的x值}\left(\int_{区域下边界y等于的式子}^{区域上边界y等于的式子}求积分的式子\,dy\right)dx$$

例11. 求 $\iint\limits_{下图区域} kxy\,dxdy$



$积分=区域1的积分$

$$=\int_0^1\left(\int_{x^2}^1 kxy\,dy\right)dx$$

$$\because \frac{\partial\left(\frac{kxy^2}{2}\right)}{\partial y}=kxy \qquad \therefore \int kxydy=\frac{kxy^2}{2}$$

$$=\int_0^1\left[\left(\frac{kxy^2}{2}\right)\Big|_{y=x^2}^{y=1}\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[\frac{kx\cdot 1^2}{2}-\frac{kx\cdot\left(x^2\right)^2}{2}\right]dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{k}{2}x-\frac{k}{2}x^5\right)dx$$

$$=\left(\frac{k}{4}x^2-\frac{k}{12}x^6\right)\Big|_0^1$$

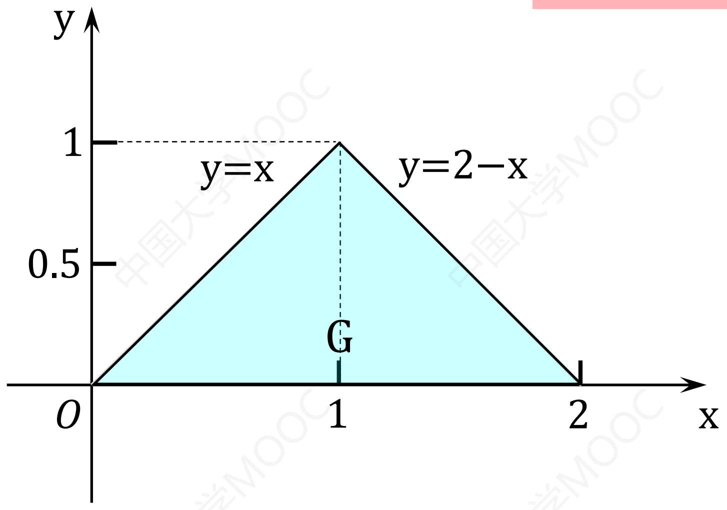
$$=\left(\frac{k}{4}\times 1^2-\frac{k}{12}\times 1^6\right)-\left(\frac{k}{4}\times 0^2-\frac{k}{12}\times 0^6\right)$$

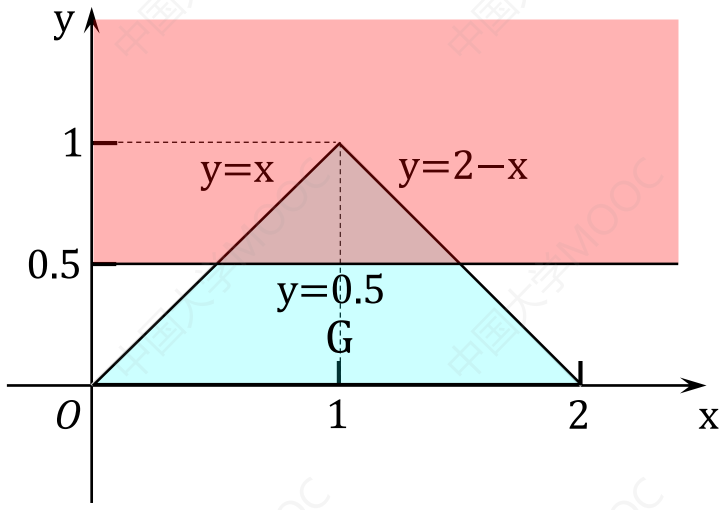
$$=\frac{k}{6}$$

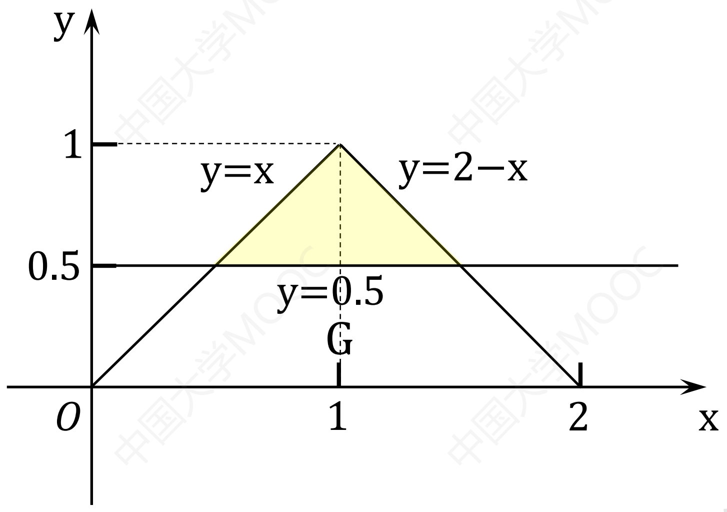
4/4 求 f(x,y) 的二重积分

例12. 设区域 G 如下图所示，(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其他}\end{cases},\quad 求\iint\limits_{满足y>0.5的区域} f(x,y)dxdy$$





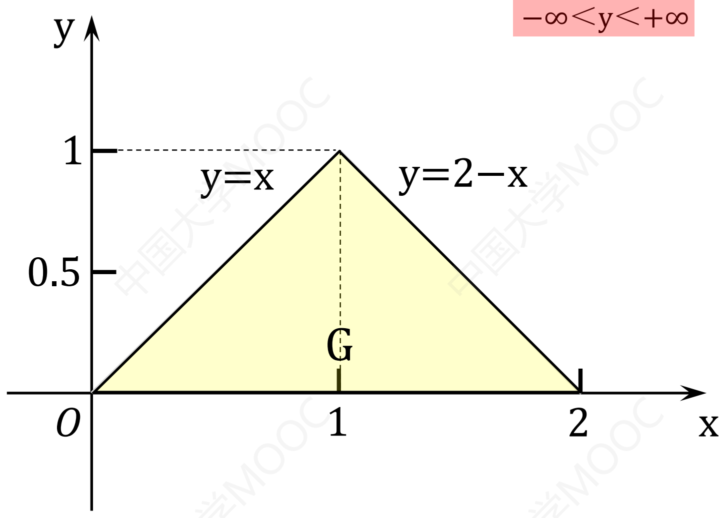


$$待求式子=\iint\limits_{上图区域} 1dxdy=\frac{1}{4}$$ 例9求过

4/4 求 f(x,y) 的二重积分

例13. 设区域 G 如下图所示，(X,Y)的概率密度为

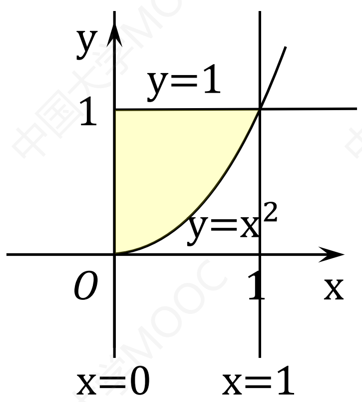
$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in G\\ 0, & 其他\end{cases}，求\iint\limits_{\substack{-\infty<x<+\infty\\ -\infty<y<+\infty}} xyf(x,y)dxdy$$



$$待求式子=\iint\limits_{上图区域} xy\cdot 1dxdy=\frac{1}{3}$$ 例10求过

例14. 设 $f(x,y)=\begin{cases}kxy, & 0\le x\le 1, x^2\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$，

求 $\iint\limits_{\substack{-\infty<x<+\infty\\ -\infty<y<+\infty}} f(x,y)dxdy$



$$待求式子=\iint\limits_{上图区域} kxy\,dxdy=\frac{k}{6}$$ 例11求过

1/7 已知 $f_X(x)$ 求概率

$P\{X在ab之间\} = \int_a^b f_X(x)\,dx$

例1. 设 X 的概率密度 $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，

已知 $Y = \frac{1}{2}X$，求 $P\{0<Y<1\}$

$$= P\left\{0 < \frac{1}{2}X < 1\right\}$$

$$= P\{0<X<2\}$$

$$P\{0<X<2\} = \int_0^2 f_X(x)\,dx$$

第三课例1求过

$$= 1$$

例2. 设 X 的概率密度 $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，

已知 $Y = \frac{1}{2}X$，求 $P\{Y \le y\}$

① $= P\left\{\frac{1}{2}X \le y\right\}$

$= P\{X \le 2y\}$

$= P\{-\infty < X \le 2y\}$

② $P\{-\infty < X \le 2y\} = \int_{-\infty}^{2y} f_X(x)\,dx$

第三课例8求过

$$= \begin{cases} 0, & y<0 \\ 2y, & 0 \le y < \frac{1}{2} \\ 1, & y \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

2/7 求 $f_X(x)$ 中的未知数

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

例3. 设 X 的概率密度 $f_X(x) = \begin{cases} a, & 0 \le x < 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，试求 a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = a \Rightarrow a = 1$$

上一课例4求过

3/7 已知 $f_X(x)$ 求 F

$F_A(b) \Leftrightarrow P\{A\le b\}$

$F(b) \Leftrightarrow P\{B\le b\}$

例4. 设 X 的概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，

已知 $Y=\frac{1}{2}X$，求 $F_Y(y)$

求 $P\{Y\le y\}$ 本课例2求过

$=P\left\{\frac{1}{2}X\le y\right\}$

$=P\{X\le 2y\}$

$=P\{-\infty<X\le 2y\}$

$$P\{-\infty<X\le 2y\}=\int_{-\infty}^{2y} f_X(x)\,dx$$

$$=\begin{cases}0, & y<0\\ 2y, & 0\le y<\frac{1}{2}\\ 1, & y\ge\frac{1}{2}\end{cases}$$

4/7 求 F 中的未知数

$$\begin{cases}F(+\infty)=1\\ F(-\infty)=0\\ F_{上}(分段点)=F_{下}(分段点)\end{cases}$$

例5. 设 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ a+be^{-\lambda x}, & x>0\end{cases}(\lambda>0)$，

求常数 a 和 b

$F(+\infty)=1 \Rightarrow a+be^{-\lambda\cdot(+\infty)}=1$

$\Rightarrow a+be^{-\infty}=1$

$\Rightarrow a+b\frac{1}{e^{\infty}}=1$

$\Rightarrow a+b\cdot\frac{1}{\infty}=1$

$\Rightarrow a+b\cdot 0=1$

$\Rightarrow a=1$

将 $a=1$ 代入 $F(x)$ 表达式，得：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1+be^{-\lambda x}, & x>0\end{cases}(\lambda>0)$$

$F_{上}(分段点)=F_{下}(分段点)$

$\Rightarrow 0=1+be^{-\lambda\cdot 0}$

$\Rightarrow 0=1+be^{0}$

$\Rightarrow 0=1+b$

$\Rightarrow b=-1$

5/7 已知 F 求 f

$f_A(a) = F_A{}'(a)$

例6. 设 Y 的分布函数 $F_Y(y) = \begin{cases} 0 \ , & y<0 \\ 2y \ , & 0 \le y < \frac{1}{2} \\ 1 \ , & y \ge \frac{1}{2} \end{cases}$，求 $f_Y(y)$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0' \ , & y<0 \\ (2y)' \ , & 0 \le y < \frac{1}{2} \\ 1' \ , & y \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} 0 \ , & y<0 \\ 2 \ , & 0 \le y < \frac{1}{2} \\ 0 \ , & y \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} 2 \ , & 0 \le y < \frac{1}{2} \\ 0 \ , & \text{其他} \end{cases}$$

6/7 已知 f 求 f

例7. 设 X 的概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}1\ ,\ 0\le x<1\\ 0\ ,\ 其他\end{cases}$，

已知 $Y=\frac{1}{2}X$，求 $f_Y(y)$

普通求法：

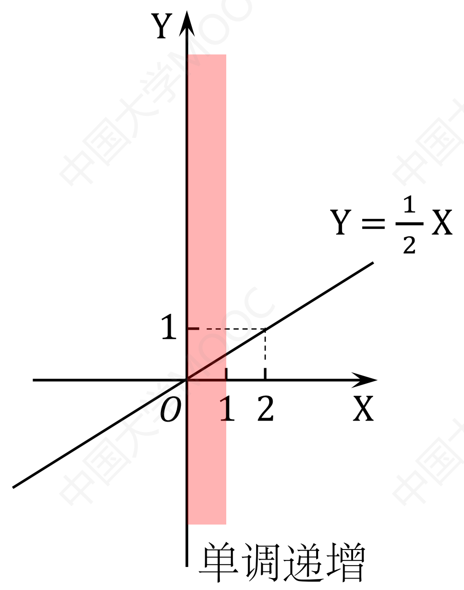
$$F_Y(y)=\begin{cases}0\ ,\ y<0\\ 2y\ ,\ 0\le y<\frac{1}{2}\\ 1\ ,\ y\ge\frac{1}{2}\end{cases}$$

本课例4求过

$$f_Y(y)=\begin{cases}2\ ,\ 0\le y<\frac{1}{2}\\ 0\ ,\ 其他\end{cases}$$

本课例6求过

公式法：



$Y=\frac{1}{2}X \Longrightarrow X=2Y$

$\frac{dx}{dy}=\frac{d(2y)}{dy}=2$

$$f_X(x)=\begin{cases}1\times\left|\frac{dx}{dy}\right|,\ 0\le x<1\\ 0\times\left|\frac{dx}{dy}\right|,\ 其他\end{cases}$$

$$\Longrightarrow f_X(x)=\begin{cases}1\times|2|,\ 0\le x<1\\ 0\times|2|,\ 其他\end{cases}$$

$$\Longrightarrow f_X(x)=\begin{cases}2,\ 0\le x<1\\ 0,\ 其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}2,\ 0\le 2y<1\\ 0,\ 其他\end{cases}$$

$$\Longrightarrow f_Y(y)=\begin{cases}2,\ 0\le y<\frac{1}{2}\\ 0,\ 其他\end{cases}$$

7/7 已知 f 求期望、方差

例8. 已知 $f_X(x)=\begin{cases}1\ ,\ 0\le x<1\\ 0\ ,\ 其他\end{cases}$，试求 $D(2X+3)$

$$
\begin{aligned}
D(2X+3) &= 2^2DX\\
&= 4DX\\
&= 4\left[E\left(X^2\right)-(EX)^2\right]\\
&= 4\left[\underline{\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)\,dx}-\left(\underline{\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\,dx}\right)^2\right]\\
&= 4\times\left[\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

第三课例2、例3求过

$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f_X(x)\,dx$

$E(aX+bY+c)=aEX+bEY+c$

$DX=E\left(X^2\right)-(EX)^2$

$D(aX+c)=a^2DX$

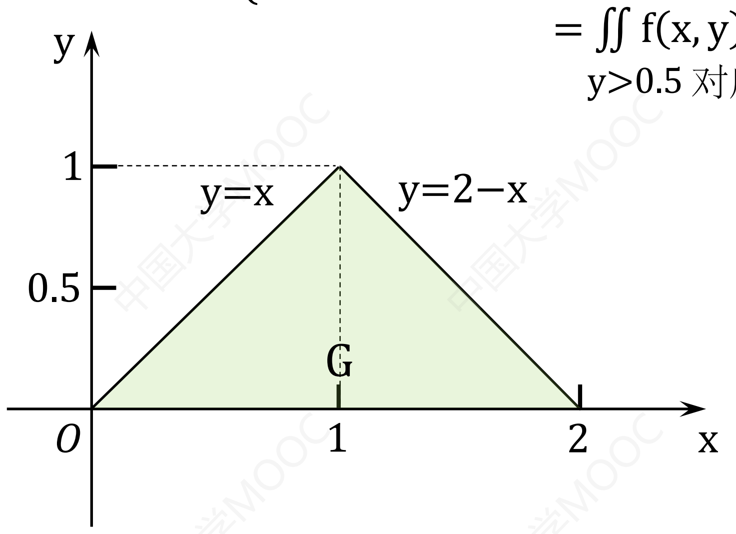
1/8 已知 f(x,y) 求概率

$P\{X与Y如何\} = \iint\limits_{要求概率事件对应区域} f(x,y)dxdy$

例1. 设区域 G 如下图所示，(X,Y)的概率密度为

$f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in G \\ 0, & 其他 \end{cases}$，求 P{Y>0.5}

$= \iint\limits_{y>0.5\ 对应区域} f(x,y)dxdy = \frac{1}{4}$ 第三课例12求过



2/8 求 f(x,y) 中的未知数

$\iint\limits_{\substack{-\infty<x<+\infty \\ -\infty<y<+\infty}} f(x,y)\,dxdy = 1$

例2. 设 $f(x,y) = \begin{cases} kxy, & 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，求 k

$\iint\limits_{\substack{-\infty<x<+\infty \\ -\infty<y<+\infty}} f(x,y)\,dxdy = \frac{k}{6} = 1 \Rightarrow k = 6$

第三课例14求过

3/8 已知 f(x,y) 求 $f_Z(z)$

例3. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 2e^{-(x+2y)}, & x>0,y>0 \\ 0, & 其他 \end{cases},$$

已知 Z=X+2Y，求 $f_Z(z)$

$Z=X+2Y \Longrightarrow z=x+2y \Longrightarrow y=\frac{z-x}{2}$

$$\left|\frac{\partial y}{\partial z}\right| = \left|\frac{\partial\left(\frac{z-x}{2}\right)}{\partial z}\right|$$

$$= \left|\frac{\partial\left(\frac{z}{2}-\frac{x}{2}\right)}{\partial z}\right|$$

$$= \left|\frac{d\left(\frac{z}{2}\right)}{dz} - \frac{\partial\left(\frac{x}{2}\right)}{\partial z}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2} - 0\right|$$

$$= \frac{1}{2}$$

式子：$2e^{-(x+2y)}$　　范围：$x>0, y>0$

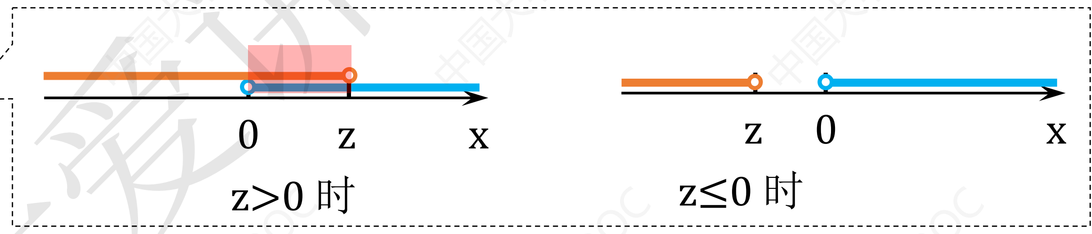
$\Longrightarrow$ 式子：$2e^{-\left(x+2\cdot\frac{z-x}{2}\right)}$　　范围：$x>0, \frac{z-x}{2}>0$

$\Longrightarrow$ 式子：$2e^{-z}$　　范围：$x>0, z-x>0$

$\Longrightarrow$ 式子：$2e^{-z}$　　范围：$x>0, x<z$

z>0时，范围存在，是 (0,z)；z≤0时，范围不存在

左边界：0　右边界：z



$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^z 2e^{-z}\cdot\frac{1}{2}\,dx, & z>0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$\int_0^z 2e^{-z}\cdot\frac{1}{2}\,dx = \int_0^z e^{-z}\,dx$$

$$\boxed{\because \frac{\partial(e^{-z}\cdot x)}{\partial x} = e^{-z} \ \therefore \int e^{-z}\,dx = e^{-z}\cdot x}$$

$$= e^{-z}\cdot x\Big|_{x=0}^{x=z}$$

$$= e^{-z}\cdot z - e^{-z}\cdot 0$$

$$= ze^{-z}$$

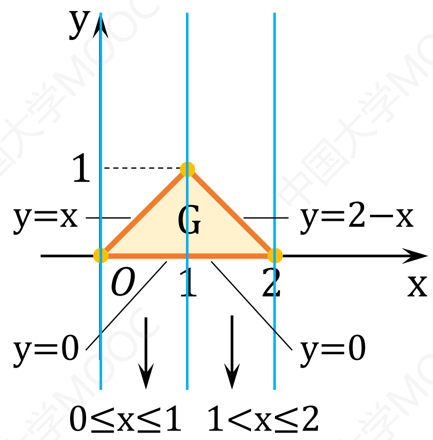
$$\Longrightarrow f_Z(z) = \begin{cases} ze^{-z}, & z>0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

4/8 已知 f(x,y) 求 $f_X(x)$、$f_Y(y)$

例4. 设区域 G 是由 x−y=0，x+y=2 与 y=0 所围成的三角形区域，二维随机变量(X,Y)的概率密度为

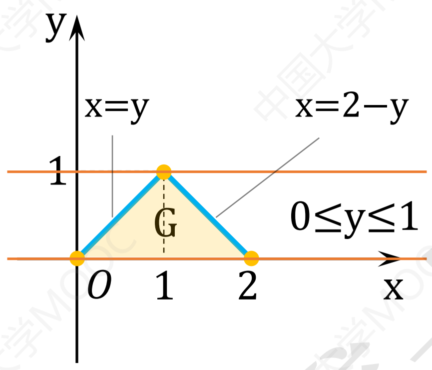
$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in G\\ 0, & 其他\end{cases}$$

，求(X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x)$、$f_Y(y)$



$$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^x 1\,dy & ,\ 0\le x\le 1\\ \int_0^{2-x} 1\,dy, & 1<x\le 2\\ 0 & ,\ 其他\end{cases} \Rightarrow f_X(x)=\begin{cases}x\ , & 0\le x\le 1\\ 2-x\ , & 1<x\le 2\\ 0\ , & 其他\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_0^x 1\,dy=\int_0^x y'\,dy=y\Big|_{y=0}^{y=x}=x-0=x\\ &\int_0^{2-x} 1\,dy=\int_0^{2-x} y'\,dy=y\Big|_{y=0}^{y=2-x}=2-x-0=2-x\end{aligned}}$$



$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_y^{2-y} 1\,dx\ , & 0\le y\le 1\\ 0 & ,\ 其他\end{cases} \Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}2-2y\ , & 0\le y\le 1\\ 0\ , & 其他\end{cases}$$

$$\boxed{\int_y^{2-y} 1\,dx=\int_y^{2-y} x'\,dx=x\Big|_{x=y}^{x=2-y}=2-y-y=2-2y}$$

5/8 已知 f(x,y) 求期望和方差

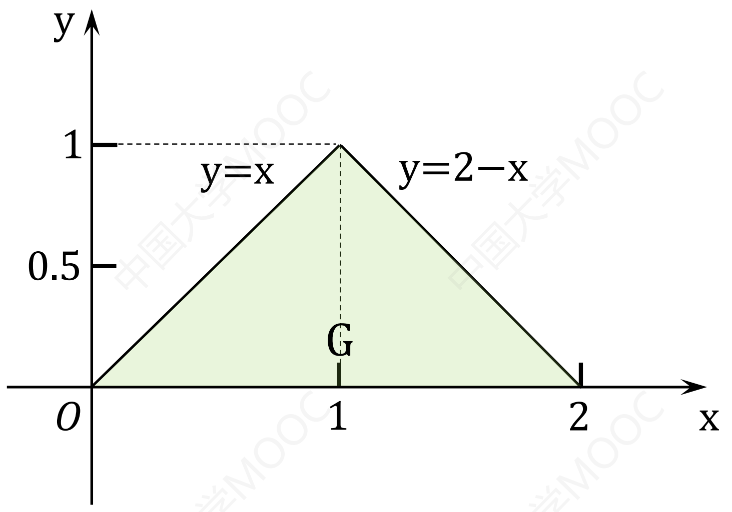
$$E[g(X,Y)] = \iint\limits_{\substack{-\infty<x<+\infty\\-\infty<y<+\infty}} g(x,y)f(x,y)\,dxdy$$

$$DX = E(X^2) - (EX)^2$$

$$D(aX+c) = a^2DX$$

例5. 设区域 G 如下图所示，(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in G \\ 0, & 其他 \end{cases}，求 E(XY)$$



$$E(XY) = \iint\limits_{\substack{-\infty<x<+\infty\\-\infty<y<+\infty}} xyf(x,y)\,dxdy$$

第三课例13求过

$$= \frac{1}{3}$$

6/8 已知 F(x,y) 求 f(x,y)

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

例6. $F(x,y) = \begin{cases} xy, & 0<x<1, 0<y<1 \\ x, & 0<x<1, y\geq 1 \\ y, & x\geq 1, 0<y<1 \\ 1, & x\geq 1, y\geq 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，求 f(x,y)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\partial^2(xy)}{\partial x\partial y}, & 0<x<1, 0<y<1 \\ \frac{\partial^2(x)}{\partial x\partial y}, & 0<x<1, y\geq 1 \\ \frac{\partial^2(y)}{\partial x\partial y}, & x\geq 1, 0<y<1 \\ \frac{\partial^2(1)}{\partial x\partial y}, & x\geq 1, y\geq 1 \\ \frac{\partial^2(0)}{\partial x\partial y}, & 其他 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0, & 0<x<1, y\geq 1 \\ 0, & x\geq 1, 0<y<1 \\ 0, & x\geq 1, y\geq 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

7/8 求 F(x,y) 中的未知数

$F(+\infty,+\infty)=1$

$F(x,-\infty)=0$

$F(-\infty,y)=0$

例7. 设二维随机变量的联合分布函数为

$F(x,y)=a(b+\arctan x)(c+\arctan 2y)$，$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$

求 a、b、c

$F(+\infty,+\infty)=1 \implies a[b+\arctan(+\infty)][c+\arctan 2(+\infty)]=a\left(b+\frac{\pi}{2}\right)\left(c+\frac{\pi}{2}\right)=1 \implies a=\frac{1}{\pi^2}$

$F(x,-\infty)=0 \implies a(b+\arctan x)[c+\arctan 2(-\infty)]=a(b+\arctan x)\left(c-\frac{\pi}{2}\right)=0 \implies c=\frac{\pi}{2}$

$F(-\infty,y)=0 \implies a[b+\arctan(-\infty)](c+\arctan 2y)=a\left(b-\frac{\pi}{2}\right)(c+\arctan 2y)=0 \implies b=\frac{\pi}{2}$

8/8 已知 F(x,y) 求 $F_X(x)$、$F_Y(y)$

$F_X(x)=F(x,+\infty)$

$F_Y(y)=F(+\infty,y)$

例8. 设随机变量(X,Y)的分布函数为：

$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan 2y\right)$，$-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$

求边缘分布函数 $F_X(x)$、$F_Y(y)$

$$
\begin{aligned}
F_X(x)&=F(x,+\infty)\\
&=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)\left[\frac{\pi}{2}+\arctan 2(+\infty)\right]\\
&=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x \quad , \quad -\infty<x<+\infty
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_Y(y)&=F(+\infty,y)\\
&=\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{\pi}{2}+\arctan(+\infty)\right]\left(\frac{\pi}{2}+\arctan 2y\right)\\
&=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan 2y\right)\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan 2y \quad , \quad -\infty<y<+\infty
\end{aligned}
$$

1/3 均匀、泊松、指数、二项分布

$X\sim U$区间 X 在区间上服从均匀分布	① $P\{式子\}=\frac{数轴上区间与式子重合段长度}{区间两侧数之差}$ ② $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{区间两侧数之差}, & x\in 区间\\ 0, & 其他\end{cases}$ ③ $EX=\frac{区间两侧数之和}{2}$、$DX=\frac{(区间两侧数之差)^2}{12}$、$E(X^2)=(EX)^2+DX$
(X,Y) 在区域上服从均匀分布	① $P\{式子\}=\frac{区域与式子对应区域重合部分面积}{区域的面积}$ ② $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{区域的面积}, & (x,y)\in 区域\\ 0, & 其他\end{cases}$
$X\sim P(\lambda)$ X 服从参数为 λ 的泊松分布	① $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$k=0,1,2,\cdots$ ② $EX=\lambda$、$DX=\lambda$、$E(X^2)=(EX)^2+DX$
$X\sim E(\lambda)$ X 服从参数为 λ 的指数分布	① $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x>0\end{cases}$ ② $P\{X在a到b之间\}=\int_a^b f(x)dx$ ③ $b\ge a$ 时，$P\{X比b如何\|X>或\ge a\}=P\{X比b-a如何\}$ 【如 $P\{X>1500\|X>1000\}=P\{X>(1500-1000)\}=P\{X>500\}$】 ④ $EX=\frac{1}{\lambda}$、$DX=\frac{1}{\lambda^2}$、$E(X^2)=(EX)^2+DX$
$X\sim B(n,p)$ X是n次里某结果出现的总数，单次里出现该结果的概率为p	① $P\{X=k\}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$，$k=0,1,2,\cdots$ ② $EX=np$、$DX=np(1-p)$、$E(X^2)=(EX)^2+DX$

例1. 设随机变量 X 服从参数为 5 的泊松分布，求 $E(X^2)$

X 服从参数为 5 的泊松分布时，$EX=5$、$DX=5$、$E(X^2)=(EX)^2+DX=(5)^2+5=30$

2/3 Φ(?)的性质与计算

$\Phi(+\infty)=1$

$\Phi(-\infty)=0$

$\Phi(0)=0.5$

$\Phi(a)=1-\Phi(-a)$

$\Phi(a)$ 如何 $\Phi(b)\ \Longrightarrow\ a$ 如何 b

【 如 : $\Phi(a)>\Phi(b)\ \Longrightarrow\ a>b$ 】

$\Phi'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$-\infty<x<+\infty$

例2. 试求 $\Phi(0)-\Phi(-\infty)=$______ 。

$\because \Phi(0)=0.5$，$\Phi(-\infty)=0$

$\therefore \Phi(0)-\Phi(-\infty)=0.5$

例3. 已知 $\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=0.8$，求 $\Phi(0)-\Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right)=$______ 。

$\because \Phi(0)=0.5$

$\Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=1-0.8=0.2$

$\therefore \Phi(0)-\Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right)=0.3$

例4. 已知 $\Phi\left(-\frac{1}{\sigma_X}\right)>\Phi\left(-\frac{1}{\sigma_Y}\right)$，则 σ_X _____ σ_Y (填>、< 或 =，σ_X 与 σ_Y 均大于0)

$\Phi\left(-\frac{1}{\sigma_X}\right)>\Phi\left(-\frac{1}{\sigma_Y}\right)$

$\Longrightarrow\ -\frac{1}{\sigma_X}>-\frac{1}{\sigma_Y}$

$\Longrightarrow\ -\frac{1}{\sigma_X}\cdot\sigma_X\sigma_Y>-\frac{1}{\sigma_Y}\cdot\sigma_X\sigma_Y$

$\Longrightarrow\ -\sigma_Y>-\sigma_X$

$\Longrightarrow\ \sigma_Y<\sigma_X$

$\because \sigma_X>0$，$\sigma_Y>0\ \Longrightarrow\ \sigma_X\sigma_Y>0$

$\therefore$ 不等式两边同乘$\sigma_X\sigma_Y$不用变号

3/3 正态分布

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 【 $\sigma>0$ 】 X 服从……的正态分布【$\mu=$ 均值，$\sigma=\begin{cases}\text{标准差}\\\text{均方差}\\\sqrt{\text{方差}}\end{cases}$ 】 X 服从标准正态分布【$\mu=0$，$\sigma=1$】 $f(x)$ 经计算 $=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<+\infty$	① $P\{X\text{在}a\text{到}b\text{之间}\}=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$ ② $EX=\mu$、$DX=\sigma^2$、$E(X^2)=(EX)^2+DX$ ③ $aX+c\sim N(a\mu+c,a^2\sigma^2)$ ④ 概率密度函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<+\infty$
$X\sim N(\mu_X,\sigma_X{}^2)$，$Y\sim N(\mu_Y,\sigma_Y{}^2)$，且 X 与 Y 相互独立	$aX+bY+c\sim N\left(a\mu_X+b\mu_Y+c,a^2\sigma_X{}^2+b^2\sigma_Y{}^2\right)$

例5. 设随机变量 $X\sim N(500,100)$，试求 $P\{X<500\}$

$\mu=500$，$\sigma=10$

$$P\{-\infty<X<500\}=\Phi\left(\frac{500-500}{10}\right)-\Phi\left(\frac{-\infty-500}{10}\right)$$
$$=\Phi(0)-\Phi(-\infty)$$

例2求过

$$=0.5$$

例6. 设随机变量 $X\sim N\left(\theta,\frac{1}{2}\right)$，求 EX、DX、$E(X^2)$

$\mu=\theta$，$\sigma=\sqrt{\frac{1}{2}}$

$EX=\theta$

$DX=\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$

$E(X^2)=(EX)^2+DX$

$=\theta^2+\frac{1}{2}$

$\mu=2$

例7. 设随机变量 X 服从均值为 2 的正态分布，

且 $\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=0.8$，则 $P\{0<X<2\}=$ ______。

$$P\{0<X<2\}=\Phi\left(\frac{2-2}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{0-2}{\sigma}\right)$$
$$=\Phi(0)-\Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right)$$

例3求过

$$=0.3$$

$\mu_X=1$，$\sigma_X=\sqrt{2}$ $\quad$ $\mu_Y=0$，$\sigma_Y=1$

例8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N\left(1,(\sqrt{2})^2\right)$，$Y\sim N(0,1^2)$，

试求随机变量 $Z=2X-Y+3$ 服从的分布

$$2X-Y+3\sim N\left(2\times1+(-1)\times0+3,2^2\times\left(\sqrt{2}\right)^2+(-1)^2\times1^2\right)$$
$$\Longrightarrow 2X-Y+3\sim N(5,9)$$

1/5 协方差、相关系数、含X,Y的D

例1. 已知 $DX=1$，$DY=4$，$\rho_{XY}=-0.5$，

则 $Cov(X,Y)=$____，$D(X+Y)=$____。

$$Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}$$
$$=-0.5\times\sqrt{1}\times\sqrt{4}$$
$$=-1$$

$$D(X+Y)=D(1X+1Y+0)=1^2DX+1^2DY+2\times1\times1Cov(X,Y)$$
$$=1^2\times1+1^2\times4+2\times1\times1\times(-1)$$
$$=3$$

例2. 将长度为 1m 的木棒随机地截成 X、Y 两段，

则 X、Y 的长度的相关系数为 ______。

(A) 1　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $-\frac{1}{2}$　(D) -1

$X+Y=1\Rightarrow Y=-X+1$

$a=-1<0\Rightarrow\rho_{XY}=-1$，选 (D)

算协方差 Cov：

ρ_{XY} 已知时，用 $Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}$

ρ_{XY} 未知时，用 $Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY$

算相关系数 ρ：

Y 与 X 满足 $Y=aX+b$ 时，$\begin{cases}a>0\Rightarrow\rho_{XY}=1\\a<0\Rightarrow\rho_{XY}=-1\end{cases}$

不满足时，用 $\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$

算含 X, Y 的 D：

$$D(aX+bY+c)=a^2DX+b^2DY+2abCov(X,Y)$$

小题常考：

$\rho_{XY}\in[-1,1]$

2/5 不相关、相互独立带来的条件

例3. 设二维随机变量(X,Y)服从二维正态分布，则随机变量

X 与 Y 不相关 $\Leftrightarrow$ _______。

(A) $EX=EY$　(B) $E(X^2)=E(Y^2)$

(C) $E(XY)=EX\cdot EY$　(D) $E(X^2)+(EX)^2=E(Y^2)+(EY)^2$

X 与 Y 不相关 $\Leftrightarrow$ $E(XY)=EX\cdot EY$　选 (C)

X 与 Y 相互独立

$\Downarrow$

X 与 Y 不相关（即 $\rho_{XY}=0$）$\Leftrightarrow$ $Cov(X,Y)=0$

$\Updownarrow$　　$\Updownarrow$

$E(XY)=EX\cdot EY$ $\Leftrightarrow$ $D(X\pm Y)=DX+DY$

3/5 切比雪夫不等式

例4. 设随机变量 X 的期望为 0，方差为 2，根据

切比雪夫不等式估计 $P\{|X|\geq2\}\leq$_____。

$$P\{|X|\geq2\}\leq\frac{DX}{2^2}=\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}$$

切比雪夫不等式：$P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}$

考试时直接用
$$P\{|某式子|\geq a\}\leq\frac{D(该式子)}{a^2}$$
$$P\{|某式子|<a\}\geq1-\frac{D(该式子)}{a^2}$$

4/5 大数定律

例5. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，
且均服从参数为 5 的泊松分布，
则当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{P}$ ______。

问法1：式子 $\xrightarrow{P}$?

问法2：式子 依概率收敛于 ?

问法3：已知对于任意 $\varepsilon > 0$，都有 $\lim_{n\to\infty} P\{|式子 - a| < \varepsilon\} = 1$，$a =$?

问法4：已知对于任意 $\varepsilon > 0$，都有 $\lim_{n\to\infty} P\{|式子 - a| \geq \varepsilon\} = 0$，$a =$?

答案均为 $\lim_{n\to\infty}[E(式子)]$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{P} \lim_{n\to\infty}\left[E\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[E\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}\cdot(n-1+1)\cdot E(X^2)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n+1}E(X^2)\right]$$

第六课例1求过

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\times 30\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{30n}{n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{30\cdot n^1}{n^1+1\cdot n^0}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{30\cdot n^1}{n^1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 30$$

$$= 30$$

5/5 中心极限定理

某东西均值为 μ，方差为 σ^2 时，n 个该类东西之和 $X\sim N(n\mu, n\sigma^2)$

例6. 已知产品重量的均值为 5 kg，方差为 1，

试求100个该产品总重量 X 小于 500 的概率

$X\sim N(100\times 5, 100\times 1)$　　求 $P\{X<500\}$

$$P\{-\infty<X<500\} = \Phi\left(\frac{500-500}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty-500}{10}\right)$$
$$= \Phi(0) - \Phi(-\infty)$$
$$= 0.5$$

例7. 设 X_1、X_2、$\cdots$ X_n 为独立同分布的随机变量序列，

且均服从期望为 3 、方差为 2^2 的分布，则有 ______。

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\cdot 2}{\sqrt{n}\cdot 3} \le x\right\} = \Phi(x)$　(B) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\cdot 3}{\sqrt{n}\cdot 2} \le x\right\} = \Phi(x)$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\cdot 2^2}{\sqrt{n}\cdot 3} \le x\right\} = \Phi(x)$　(D) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\cdot 3}{\sqrt{n}\cdot 2^2} \le x\right\} = \Phi(x)$

已知 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，

期望为 μ、方差为 σ^2，

则 $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x\right\} = \Phi(x) \\ \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ 近似地服从 } N(n\mu, n\sigma^2)\text{，n越大越近似} \end{cases}$

$\because X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，期望为 3、方差为 2^2

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\cdot 3}{\sqrt{n}\cdot 2} \le x\right\} = \Phi(x)$，选 (B)