笔记前言：

本笔记的内容是去掉步骤的概述后，视频的所有内容。

本猴觉得，自己的步骤概述写的太啰嗦，大家自己做笔记时，

应该每个人都有自己的最舒服最简练的写法，所以没给大家写。

再是本猴觉得，不给大家写这个概述的话，大家会记忆的更深，

掌握的更好！

所以老铁！一定要过呀！不要辜负本猴的心意！~~~

【祝逢考必过，心想事成~~~~】

【一定能过！！！！！】

1/5 求样本均值、样本方差、样本标准差

例1. 设 1.1 , 1.3 , 1.2 , 1.2 , 1.2 , 1.2 , 1.2 , 1.2 , 1.2 , 1.2 是取自总体 X 的简单随机样本， 试求样本均值、样本方差、样本标准差

样本均值 $\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$

样本方差 $S^2=\frac{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\cdots+(X_n-\overline{X})^2}{n-1}$

样本标准差 $S=\sqrt{S^2}$

$$\overline{X}=\frac{1.1+1.3+1.2+1.2+1.2+1.2+1.2+1.2+1.2+1.2}{10}=1.2$$

$$S^2=\frac{(1.1-1.2)^2+(1.3-1.2)^2+(1.2-1.2)^2+(1.2-1.2)^2+(1.2-1.2)^2+(1.2-1.2)^2+(1.2-1.2)^2+(1.2-1.2)^2+(1.2-1.2)^2+(1.2-1.2)^2}{10-1}=\frac{1}{450}$$

$$S=\sqrt{\frac{1}{450}}=\frac{\sqrt{2}}{30}$$

2/5 求统计量的期望和方差

例2. 设总体 X 服从参数为 5 的泊松分布，X_1, X_2, X_3 是取自总体 X 的简单随机样本，试求 $E\overline{X}$、$E(S^2)$、$D\overline{X}$

$E\overline{X}=EX$

$E(S^2)=DX$

$D\overline{X}=\frac{1}{n}DX$

$E\overline{X}=EX=5$

$E(S^2)=DX=5$

$D\overline{X}=\frac{1}{n}DX=\frac{1}{3}\times 5=\frac{5}{3}$

猴博士爱讲课

3/5 已知服从三大分布，求某东西

例3. 已知随机变量 $M\sim\chi^2(3)$，求 DM

$$DM=2\times3=6$$

例4. 设随机变量 $M\sim t(n)$，且 $P\{M>c\}=\alpha$，

则 $P\{M<-c\}=$____。

$$P\{M<-c\}=P\{M>c\}=\alpha$$

若 $M\sim\chi^2(n)$，则：M 可经处理后 $=A_1{}^2+A_2{}^2+\cdots+A_n{}^2$

【 $A_1,A_2\ldots\sim N(0,1)$并且相互独立(没有重复的X_i) 】

$EM=n$、$DM=2n$

若 $M\sim\chi^2(n_1)$、$N\sim\chi^2(n_2)$ 且 M 与 N 相互独立，则：

$M+N\sim\chi^2(n_1+n_2)$

$n_1>n_2$ 时，$M-N\sim\chi^2(n_1-n_2)$

若 $M\sim t(n)$，则：M 可经处理后 $=\dfrac{B}{\sqrt{(A_1{}^2+A_2{}^2+\cdots+A_n{}^2)\cdot\frac{1}{n}}}$

【 $A_1,A_2\ldots$与$B\sim N(0,1)$并且相互独立(没有重复的X_i) 】

$EM=0$

$P\{M>\text{某数}\}=P\{M<-\text{某数}\}$

$N\sim F(1,n)$ 时，$N=M^2$

若 $M\sim F(n,m)$，则：M 可经处理后 $=\dfrac{(A_1{}^2+A_2{}^2+\cdots+A_n{}^2)\cdot\frac{1}{n}}{(B_1{}^2+B_2{}^2+\cdots+B_m{}^2)\cdot\frac{1}{m}}$

【 $A_1,A_2\ldots B_1,B_2\ldots\sim N(0,1)$并且相互独立(没有重复的$X_i$) 】

$\frac{1}{M}\sim F(m,n)$

常用公式：当 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 时，$\frac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

猴博士爱讲课

4/5 判断服从啥分布

例5. 设总体 $X\sim N(0,2^2)$，$X_1,X_2,\ldots$ 为简单随机样本，

试判断 $\dfrac{8\cdot(X_5{}^2+X_6{}^2+X_7{}^2)}{3X_1{}^2+6\sqrt{3}X_1X_2+9X_2{}^2+3X_3{}^2+6\sqrt{3}X_3X_4+9X_4{}^2}$ 服从什么分布

$$\frac{8\cdot(X_5{}^2+X_6{}^2+X_7{}^2)}{3X_1{}^2+6\sqrt{3}X_1X_2+9X_2{}^2+3X_3{}^2+6\sqrt{3}X_3X_4+9X_4{}^2}$$

$$=\frac{8\cdot X_5{}^2+8\cdot X_6{}^2+8\cdot X_7{}^2}{3\left(X_1+\sqrt{3}X_2\right)^2+3\left(X_3+\sqrt{3}X_4\right)^2}$$

$$=\frac{8\cdot2^2\cdot\left(\frac{X_5-0}{2}\right)^2+8\cdot2^2\cdot\left(\frac{X_6-0}{2}\right)^2+8\cdot\sigma^2\cdot\left(\frac{X_7-0}{2}\right)^2}{3\cdot\left[1+(\sqrt{3})^2\right]\cdot2^2\cdot\left[\frac{X_1+\sqrt{3}X_2-(1+\sqrt{3})\cdot0}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}\cdot2}\right]^2+3\cdot\left[1+(\sqrt{3})^2\right]\cdot2^2\cdot\left[\frac{X_3+\sqrt{3}X_4-(1+\sqrt{3})\cdot0}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}\cdot2}\right]^2}$$

$$=\frac{2\cdot\left[\left(\frac{X_5}{2}\right)^2+\left(\frac{X_6}{2}\right)^2+\left(\frac{X_7}{2}\right)^2\right]}{3\cdot\left[\left(\frac{X_1+\sqrt{3}X_2}{4}\right)^2+\left(\frac{X_3+\sqrt{3}X_4}{4}\right)^2\right]}$$

$$=\frac{\left[\left(\frac{X_5}{2}\right)^2+\left(\frac{X_6}{2}\right)^2+\left(\frac{X_7}{2}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{3}}{\left[\left(\frac{X_1+\sqrt{3}X_2}{4}\right)^2+\left(\frac{X_3+\sqrt{3}X_4}{4}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{2}}\sim F(3,2)$$

$$\text{项}^2+\text{项}^2+\cdots\sim\chi^2(\text{项数})$$

$$\frac{\text{某式子}}{\sqrt{(\text{项}^2+\text{项}^2+\cdots)\cdot\frac{1}{\text{前面括号内项的个数}}}}\sim t(\text{蓝数})$$

$$\frac{(\text{项}^2+\text{项}^2+\cdots)\cdot\frac{1}{\text{前面括号内项的个数}}}{(\text{项}^2+\text{项}^2+\cdots)\cdot\frac{1}{\text{前面括号内项的个数}}}\sim F(\text{蓝数},\text{黄数})$$

5/5 总体服从正态分布的小题

【 下表大量公式可根据 $M\sim\chi^2(n)\Rightarrow EM=n$、$DM=2n$ 推出 】

$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow$

正态分布	$\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$
	$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$
χ^2分布	$\frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1)$
	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$
	$\frac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$
	$\frac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$
t分布	$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$

期望方差	$E[(\overline{X}-\mu)^2]=\frac{\sigma^2}{n}$
	$D[(\overline{X}-\mu)^2]=\frac{2\sigma^4}{n^2}$
	$E(S^2)=\sigma^2$
	$D(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$
	$E\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=\sigma^2(n-1)$
	$D\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=2\sigma^4(n-1)$
	$E\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]=\sigma^2 n$
	$D\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]=2\sigma^4 n$
	$D[(\overline{X}$相关式子$)\pm(S$相关式子$)]$ $=D(\overline{X}$相关式子$)+D(S$相关式子$)$

例6. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geq2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ $(\sigma>0)$ 的简单随机样本，则 ______。

(A) $\frac{\sqrt{n}\cdot\overline{X}}{S}\sim t(n)$ (B) $\frac{\sqrt{n}\cdot\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$

(C) $\frac{\sqrt{n}\cdot\overline{X}}{S-1}\sim t(n)$ (D) $\frac{\sqrt{n}\cdot\overline{X}}{S-1}\sim t(n-1)$

$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow$

t分布	$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$

$X\sim N(0,1)\Rightarrow$

t分布	$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-0)}{S}\sim t(n-1)$

即 $\frac{\sqrt{n}\cdot\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$，选 (B)

猴博士爱讲课

1/3 矩估计法

例1. 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta\left(0<\theta<\frac{1}{2}\right)$ 是未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值，求 θ 的矩估计

$$EX = 0\times\theta^2 + 1\times2\theta(1-\theta) + 2\times\theta^2 + 3\times(1-2\theta)$$
$$= 3-4\theta$$

令 $3-4\theta = \overline{X} \Longrightarrow \hat{\theta} = \frac{3-\overline{X}}{4}$

2/3 最大似然估计法

例2. 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta\left(0<\theta<\frac{1}{2}\right)$ 是未知参数，利用总体 X 的以下样本值：3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3，求 θ 的最大似然估计值

$$\frac{d[\ln(P\{X=3\}\cdot P\{X=1\}\cdot P\{X=3\}\cdot P\{X=0\}\cdot P\{X=3\}\cdot P\{X=1\}\cdot P\{X=2\}\cdot P\{X=3\})]}{d\theta} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{d\left[\ln\left(4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4\right)\right]}{d\theta} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{24\theta^2-28\theta+6}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)} = 0$$

$$\Longrightarrow \theta = \frac{7\pm\sqrt{13}}{12}$$

$$\frac{d\left[\ln\left(4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4\right)\right]}{d\theta}$$

$\ln(a\cdot b\cdot c\cdot\cdots) = \ln a + \ln b + \ln c + \cdots$

$$= \frac{d\left[\ln4+\ln(\theta^6)+\ln[(1-\theta)^2]+\ln[(1-2\theta)^4]\right]}{d\theta}$$

$\ln(a^b) = b\ln a$

$$= \frac{d[\ln4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)]}{d\theta}$$

$$= \frac{d(\ln4)}{d\theta} + \frac{d(6\ln\theta)}{d\theta} + \frac{d[2\ln(1-\theta)]}{d\theta} + \frac{d[4\ln(1-2\theta)]}{d\theta}$$

$$= 0 + 6\times\frac{1}{\theta} + 2\times\frac{(1-\theta)'}{1-\theta} + 4\times\frac{(1-2\theta)'}{1-2\theta}$$

$$= \frac{6}{\theta} + 2\times\frac{-1}{1-\theta} + 4\times\frac{-2}{1-2\theta}$$

$$= \frac{24\theta^2-28\theta+6}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}$$

$$\frac{24\theta^2-28\theta+6}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)} = 0$$

$$\Longrightarrow 24\theta^2-28\theta+6 = 0$$

$$\Longrightarrow 12\theta^2-14\theta+3 = 0$$

$ax^2+bx+c=0$

$$\Longrightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Longrightarrow \theta = \frac{-(-14)\pm\sqrt{(-14)^2-4\times12\times3}}{2\times12}$$

$$\Longrightarrow \theta = \frac{7\pm\sqrt{13}}{12}$$

$\because 0<\theta<\frac{1}{2}$

$\therefore \hat{\theta} = \frac{7-\sqrt{13}}{12}$

猴博士爱讲课
中国大学MOOC

3/3 区间估计

关于	已知	置信区间
μ	X服从正态分布 方差已知	$\mu\ :\left(\overline{X}\pm\frac{\sqrt{方差}}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\ 之间\right)$ 【$z_{\frac{\alpha}{2}}$的求法 : 找 $\Phi(?)=\frac{\alpha}{2}$, $?=z_{\frac{\alpha}{2}}$】
	X服从正态分布 方差未知	$\mu\ :\left(\overline{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\ 之间\right)$
σ	X服从正态分布 方差未知	$\sigma^2\ :\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\ ,\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$
$\mu_X-\mu_Y$	X 服从正态分布 方差已知 Y 服从正态分布 方差已知	$\mu_X-\mu_Y\ :\left((\overline{X}-\overline{Y})\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_X{}^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y{}^2}{n_Y}}\ 之间\right)$【$z_{\frac{\alpha}{2}}$的求法 : 找 $\Phi(?)=\frac{\alpha}{2}$, $?=z_{\frac{\alpha}{2}}$】
	X 服从正态分布 Y 服从正态分布 仅知他俩方差相等	$\mu_X-\mu_Y\ :\left((\overline{X}-\overline{Y})\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_X+n_Y-2)\sqrt{\left(\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}\right)\frac{(n_X-1)S_X{}^2+(n_Y-1)S_Y{}^2}{n_X+n_Y-2}}\ 之间\right)$
$\frac{\sigma_X{}^2}{\sigma_Y{}^2}$	X 服从正态分布 Y 服从正态分布 方差均未知	$\frac{\sigma_X{}^2}{\sigma_Y{}^2}\ :\left(\frac{S_X{}^2}{S_Y{}^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_X-1,n_Y-1)}\ ,\ \frac{S_X{}^2}{S_Y{}^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_X-1,n_Y-1)}\right)$

猴博士爱讲课

例3. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，从总体中抽取容量为 36 的一个样本，样本均值 $\overline{X}=3.5$，样本方差 $S^2=4$。求 σ 的置信度为 0.95 的置信区间。

$\left(\begin{array}{l}注 : \chi^2{}_{0.025}(35)=53.203\ ,\\ \quad\ \chi^2{}_{0.975}(35)=20.569\end{array}\right)$

① 令 $\alpha=1-0.95=0.05$

② $\sigma^2 : \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2{}_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\ ,\frac{(n-1)S^2}{\chi^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

$=\left(\frac{(36-1)\times4}{\chi^2{}_{\frac{0.05}{2}}(36-1)}\ ,\frac{(36-1)\times4}{\chi^2{}_{1-\frac{0.05}{2}}(36-1)}\right)$

$=\left(\frac{140}{\chi^2{}_{0.025}(35)}\ ,\frac{140}{\chi^2{}_{0.975}(35)}\right)$

$=\left(\frac{140}{53.203}\ ,\frac{140}{20.569}\right)$

$=(2.631\ ,6.806)$

③ $\Rightarrow\ \ 2.631<\sigma^2<6.806$

$\Rightarrow\ \ 1.622<\sigma<2.609$

$\Rightarrow\ \ \sigma : (1.622\ , 2.609)$

$\therefore$ σ 的置信度为 0.95 的置信区间为 $(1.622\ , 2.609)$

假设检验

	H_0	拒绝域	检验统计量
已知总体的方差σ_0^2	$\mu=\mu_0$	$\lvert Z_0\rvert \ge z_{\frac{\alpha}{2}}$	$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}$
	$\mu\le\mu_0$	$Z_0\ge z_\alpha$	
	$\mu\ge\mu_0$	$Z_0\le -z_\alpha$	
只知样本数据不知总体方差	$\mu=\mu_0$	$\lvert t_0\rvert \ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$	$t=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$
	$\mu\le\mu_0$	$t_0\ge t_\alpha(n-1)$	
	$\mu\ge\mu_0$	$t_0\le -t_\alpha(n-1)$	
	$\sigma^2={\sigma_0}^2$	${\chi^2}_0\le {\chi^2}_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 ${\chi^2}_0\ge {\chi^2}_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$	$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{{\sigma_0}^2}$
	$\sigma^2\le{\sigma_0}^2$	${\chi^2}_0\ge {\chi^2}_\alpha(n-1)$	
	$\sigma^2\ge{\sigma_0}^2$	${\chi^2}_0\le {\chi^2}_{1-\alpha}(n-1)$	
已知X、Y总体的方差${\sigma_{X0}}^2$与${\sigma_{Y0}}^2$	$\mu_X-\mu_Y=\delta$	$\lvert Z_0\rvert \ge z_{\frac{\alpha}{2}}$	$Z=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta}{\sqrt{\frac{{\sigma_{X0}}^2}{n_X}+\frac{{\sigma_{Y0}}^2}{n_Y}}}$
	$\mu_X-\mu_Y\le\delta$	$Z_0\ge z_\alpha$	
	$\mu_X-\mu_Y\ge\delta$	$Z_0\le -z_\alpha$	
只知X、Y总体的方差相等	$\mu_X-\mu_Y=\delta$	$\lvert t_0\rvert \ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n_X+n_Y-2)$	$t=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}\right)\frac{(n_X-1){S_X}^2+(n_Y-1){S_Y}^2}{n_X+n_Y-2}}}$
	$\mu_X-\mu_Y\le\delta$	$t_0\ge t_\alpha(n_X+n_Y-2)$	
	$\mu_X-\mu_Y\ge\delta$	$t_0\le -t_\alpha(n_X+n_Y-2)$	
只知道俩样本容量相同，即$n_X=n_Y$	$\mu_X-\mu_Y=0$	$\lvert t_0\rvert \ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n_X-1)$	【设D=X−Y，均值$\bar{D}$，标准差S_D】 $t=\frac{\bar{D}}{\frac{S_D}{\sqrt{n_X}}}$
	$\mu_X-\mu_Y\le 0$	$t_0\ge t_\alpha(n_X-1)$	
	$\mu_X-\mu_Y\ge 0$	$t_0\le -t_\alpha(n_X-1)$	
	${\sigma_X}^2={\sigma_Y}^2$	$F_0\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_X-1,n_Y-1)$ 或 $F_0\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_X-1,n_Y-1)$	$F=\frac{{S_X}^2}{{S_Y}^2}$
	${\sigma_X}^2\le{\sigma_Y}^2$	$F_0\ge F_\alpha(n_X-1,n_Y-1)$	
	${\sigma_X}^2\ge{\sigma_Y}^2$	$F_0\le F_{1-\alpha}(n_X-1,n_Y-1)$	

例1. 设某包装机包装葡萄糖。袋装糖的净重是一个正态随机变量，其标准差为 0.015kg，且长期实践表明标准差稳定不变，机器正常时均值为 0.5kg。某日开工后随机地抽取该机器所包装的糖 9 袋，称得净重平均值为 0.511kg，请问机器是否正常？
(α=0.05，$z_{0.025}$=1.96)

① 设袋装糖的净重为 X，$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从 X 抽 n 个样本，样本均值为$\bar{X}$，标准差为 S

② 在显著性水平 α=0.05 下，

③

机器正常	机器不正常
均值为 0.5	均值不为 0.5
$H_0:\mu=0.5$	$H_1:\mu\ne 0.5$

∵ 题干说净重平均值为 0.511kg
∴ $\mu\ne 0.5$ 可能更对
∴ $H_1:\mu\ne 0.5$

④ 假设 $H_0:\mu=0.5$；$H_1:\mu\ne 0.5$

⑤ 检验统计量 $Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}$，拒绝域为 $\lvert Z_0\rvert\ge z_{\frac{\alpha}{2}}$

⑥ $Z_0=\frac{0.511-0.5}{\frac{0.015}{\sqrt{9}}}=2.2$

∵ 净重平均值为 0.511kg
∴ $\bar{X}=0.511$
∵ $H_0:\mu=0.5$，而最上方的表格中 $\mu=\mu_0$
∴ $\mu_0=0.5$
∵ 标准差为 0.015kg
∴ $\sigma_0=0.015$
∵ 随机地抽取该机器所包装的糖 9 袋
∴ $n=9$

⑦ 将 $Z_0=2.2$ 代入 $\lvert Z_0\rvert\ge z_{\frac{\alpha}{2}}$ 中，得：

$\lvert 2.2\rvert\ge z_{\frac{\alpha}{2}}$ α 的值题干已给出

$\Rightarrow 2.2\ge z_{\frac{0.05}{2}}$

$\Rightarrow 2.2\ge z_{0.025}$ $z_{0.025}$ 的值题干已给出

$\Rightarrow 2.2\ge 1.96$ ✓

∴ Z_0 在拒绝域中，H_1 成立

⑧ H_1 成立 $\Rightarrow$ 均值不为 0.5 $\Rightarrow$ 机器不正常

猴博士爱讲课

假设检验的小题

例1.设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，据此样本检验假设：
$H_0: \mu = \mu_0$，$H_1: \mu \neq \mu_0$，则（　　）

(A) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0

(B) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0

(C) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0

(D) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0

$\because$ α 大时 接受 $H_0 \Longrightarrow \alpha$ 小时 接受 H_0

$\therefore$ $\alpha=0.05$ 下接受 $H_0 \Longrightarrow \alpha=0.01$ 下必接受 H_0

选 (D)

例2.在假设检验时，对于 $H_0: \mu=\mu_0$；$H_1: \mu\neq\mu_0$，
称 ____ 为犯第一类错误。

(A) H_1 真，接受 H_1　　(B) H_1 不真，接受 H_1

(C) H_1 真，拒绝 H_1　　(D) H_1 不真，拒绝 H_1

$\because$ 第一类错误：$\begin{cases} H_0\text{真}/H_1\text{不真} \\ \text{拒绝了}H_0/\text{接受了}H_1 \end{cases}$

$\therefore$ (B) 正确

例3.在假设检验中，显著性水平 α 的意义是 ____ 。

(A) 原假设 H_0 成立，经检验被拒绝的概率

(B) 原假设 H_0 成立，经检验被接受的概率

(C) 原假设 H_0 不成立，经检验被接受的概率

(D) 原假设 H_0 不成立，经检验被拒绝的概率

$\because P\{\text{拒绝了}H_0|H_0\text{真}\} = \alpha$

$\therefore$ 在H_0真的前提下，拒绝了H_0的概率 $= \alpha$

$\therefore$ (A) 正确

例4.在假设检验中，α、β 分别代表第一类和第二类错误的概率，则当样本容量 n 一定时，下列说法正确的是 ___ 。

(A) α 减小，β 也减小

(B) α 增大，β 也增大

(C) A 和 B 同时成立

(D) α 和 β 一个减小，另一个往往增大

$\because$ 在 n 固定的条件下，α 小 β 就大，
β 小 α 就大

$\therefore$ α 和 β 一个减小，另一个往往增大，(D) 正确

【 α 越大越容易 拒绝 H_0/接受 H_1 】

α 小时 拒绝 H_0/接受 $H_1 \Longrightarrow \alpha$ 大时 拒绝 H_0/接受 H_1

α 大时 接受 H_0/拒绝 $H_1 \Longrightarrow \alpha$ 小时 接受 H_0/拒绝 H_1

第一类错误：$\begin{cases} H_0\text{真}/H_1\text{不真} \\ \text{拒绝了}H_0/\text{接受了}H_1 \end{cases}$

$P\{\text{拒绝了}H_0/\text{接受了}H_1|H_0\text{真}/H_1\text{不真}\} = \alpha$

第二类错误：$\begin{cases} H_0\text{不真}/H_1\text{真} \\ \text{接受了}H_0/\text{拒绝了}H_1 \end{cases}$

$P\{\text{接受了}H_0/\text{拒绝了}H_1|H_0\text{不真}/H_1\text{真}\} = \beta$

α、β 的性质：① $\alpha+\beta$ 不一定等于 1
② 在 n 固定的条件下，α 小 β 就大，
β 小 α 就大

线性回归

例1. 为研究某一化学反应过程中温度 x (℃) 对产品得率 y (%) 的影响，测得数据如下表。求 y 关于 x 的线性回归方程，并求 σ^2 的无偏估计

温度x (℃)	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
得率y (%)	45	51	54	61	66	70	74	78	85	89

① $\bar{x}=\frac{100+110+\cdots+190}{10}=145$ $\quad n=10$

$\bar{y}=\frac{45+51+\cdots+89}{10}=67.3$

$l_{xx}=100^2+110^2+\cdots+190^2-10\times145^2=8250$

$l_{yy}=45^2+51^2+\cdots+89^2-10\times67.3^2=1932.1$

$l_{xy}=100\times45+110\times51+\cdots+190\times89-10\times145\times67.3=3985$

② $\hat{b}=\frac{3985}{8250}=0.48303$

$\hat{a}=67.3-145\times0.48303=-2.73935$

$\widehat{\sigma^2}=\frac{1932.1-\frac{3985^2}{8250}}{10-2}=0.9$

③ 回归方程 : $\hat{y}=-2.73935+0.48303x$

σ^2 的无偏估计 : $\widehat{\sigma^2}=0.9$

$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

$\bar{y}=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}$

$l_{xx}={x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2-n\bar{x}^2$

$l_{yy}={y_1}^2+{y_2}^2+\cdots+{y_n}^2-n\bar{y}^2$

$l_{xy}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n-n\bar{x}\bar{y}$

$\hat{b}=\frac{l_{xy}}{l_{xx}}$ ，$\hat{a}=\bar{y}-\bar{x}\hat{b}$ ，$\widehat{\sigma^2}=\frac{l_{yy}-\frac{{l_{xy}}^2}{l_{xx}}}{n-2}$

回归方程 : $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$

σ^2的无偏估计 : $\widehat{\sigma^2}$

例2. 为研究某一化学反应过程中温度 x (℃) 对产品得率 y (%) 的影响，测得数据如下表。试检验回归效果是否显著 ($\alpha=0.05$，$t_{0.025}(8)=2.3060$)

温度x (℃)	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
得率y (%)	45	51	54	61	66	70	74	78	85	89

① $\bar{x}=\frac{100+110+\cdots+190}{10}=145$ $\quad n=10$

$\bar{y}=\frac{45+51+\cdots+89}{10}=67.3$

$l_{xx}=100^2+110^2+\cdots+190^2-10\times145^2=8250$

$l_{yy}=45^2+51^2+\cdots+89^2-10\times67.3^2=1932.1$

$l_{xy}=100\times45+110\times51+\cdots+190\times89-10\times145\times67.3=3985$

$\hat{b}=\frac{3985}{8250}=0.48303$

$\hat{a}=67.3-145\times0.48303=-2.73935$

$\widehat{\sigma^2}=\frac{1932.1-\frac{3985^2}{8250}}{10-2}=0.9\Longrightarrow\hat{\sigma}=\sqrt{0.9}=0.95$

回归方程 : $\hat{y}=-2.73935+0.48303x$

σ^2 的无偏估计 : $\widehat{\sigma^2}=0.9$

② 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，

假设 $H_0:b=0$； $H_1:b\neq0$，

检验统计量 $t=\frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}}\sqrt{l_{xx}}$，拒绝域为 $|t_0|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$

③ $t_0=\frac{0.48303}{0.95}\times\sqrt{8250}=46.2$

④ 将 $t_0=46.2$ 代入 $|t_0|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$ 中，得 :

$|46.2|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$

$\Longrightarrow 46.2\geq t_{\frac{0.05}{2}}(10-2)$

$\Longrightarrow 46.2\geq t_{0.025}(8)$

$\Longrightarrow 46.2\geq2.3060$ ✓

$\therefore t_0$ 在拒绝域中，回归效果显著

检验统计量 $t=\frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}}\sqrt{l_{xx}}$，拒绝域为$|t_0|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$”

猴博士爱讲课

查表 —— $\Phi(?)$、 $z_?$

例1. 查 $\Phi(1.86)$　　$1.86 = 1.8 + 0.06$

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

x	⋯	0.05	0.06	0.07	⋯
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯
1.7	⋯	0.9599	0.9608	0.9616	⋯
1.8	⋯	0.9678	0.9686	0.9693	⋯
1.9	⋯	0.9744	0.9750	0.9756	⋯
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯

$\Phi(1.86) = 0.9686$

例2. 查 $\Phi(-1.86)$

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

x	⋯	0.05	0.06	0.07	⋯
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯
1.7	⋯	0.9599	0.9608	0.9616	⋯
1.8	⋯	0.9678	0.9686	0.9693	⋯
1.9	⋯	0.9744	0.9750	0.9756	⋯
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯

先查 $\Phi(1.86)$

$\Phi(1.86) = 0.9686$ 本课例1求过

$$\begin{aligned}\Phi(-1.86) &= 1 - \Phi(1.86)\\ &= 1 - 0.9686\\ &= 0.0314\end{aligned}$$

例3. 查 $z_{0.025}$

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

x	⋯	0.05	0.06	0.07	⋯
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯
1.7	⋯	0.9599	0.9608	0.9616	⋯
1.8	⋯	0.9678	0.9686	0.9693	⋯
1.9	⋯	0.9744	0.9750	0.9756	⋯
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯

$1-0.025 = 0.975$

$1.9 + 0.06 = z_{0.025} \implies z_{0.025} = 1.96$

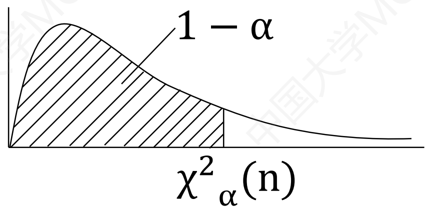
猴博士爱讲课

查表 ——χ^2、t、F

例1. 查 $\chi^2_{0.05}(24)$

【 查不到 $t_A(n)$，可查 $t_{1-A}(n)$，$t_A(n) = -t_{1-A}(n)$ 】

【 查不到 $F_\alpha(n_1,n_2)$，可查 $F_{1-\alpha}(n_2,n_1)$，$F_\alpha(n_1,n_2) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_2,n_1)}$ 】



n \ α	⋯	0.1	0.05	0.025	⋯
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯
23	⋯	32.007	35.172	38.075	⋯
24	⋯	33.196	36.415	39.364	⋯
25	⋯	34.381	37.652	40.646	⋯
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯

$P\{\chi^2(n) \le \chi^2_\alpha(n)\} = 1-\alpha$

∵ 下标 α 和 等号右边的 1−α 不相同

∴ 式子变为 $P\{\chi^2(n) > \chi^2_\alpha(n)\}$

∵ P 里符号是 “>”，不是“< 或 ≤” 且 下标 α 跟表头对应项一致

∴ 直接查表就行

$\chi^2_{0.05}(24) = 36.415$

例2. 查 $t_{0.025}(35)$

$P\{t(n) > t_p(n)\} = 1-p$

n \ $t_p(n)$ \ p	0.05	0.025
35	−1.6896	−2.0301
36	−1.6883	−2.0281

题干给出了 : $P\{t(n) > t_p(n)\} = 1-p$

∵ 下标 p 和 等号右边的 1−p 不相同

∴ 式子变为 $P\{t(n) < t_p(n)\}$

∵ P 里符号是“<”且 下标 p 跟表头对应项一致

∴ 将表里关于 p 的所有取值都变成 1−原取值

n \ $t_p(n)$ \ p	1−0.05	1−0.025
35	−1.6896	−2.0301
36	−1.6883	−2.0281

⇒

n \ $t_p(n)$ \ p	0.95	0.975
35	−1.6896	−2.0301
36	−1.6883	−2.0281

然后查表，查不到，可查 $t_{1-0.025}(35)$

$t_{1-0.025}(35) = t_{0.975}(35) = -2.0301$

$$t_{0.025}(35) = -t_{1-0.025}(35) = -(-2.0301) = 2.0301$$

猴博士爱讲课
中国大学MOOC

查表 —— χ^2、t、F

例3. 查 $F_{0.05}(12,15)$

【查不到 $t_A(n)$，可查 $t_{1-A}(n)$，$t_A(n) = -t_{1-A}(n)$】

【查不到 $F_\alpha(n_1,n_2)$，可查 $F_{1-\alpha}(n_2,n_1)$，$F_\alpha(n_1,n_2) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_2,n_1)}$】

$P\{F(n_1,n_2) > F_\alpha(n_1,n_2)\} = \alpha$

α=0.05					
n_2 \ n_1	…	10	12	15	…
…	…	…	…	…	…
14	…	2.60	2.53	2.46	…
15	…	2.54	$\boxed{2.48}$	2.40	…
…	…	…	…	…	…

α=0.1					
n_2 \ n_1	…	10	12	15	…
…	…	…	…	…	…
14	…	2.10	2.05	2.01	…
15	…	2.06	2.02	1.97	…
…	…	…	…	…	…

题干给出了：$P\{F(n_1,n_2) > F_\alpha(n_1,n_2)\} = \alpha$

∵ 下标 α 和等号右边的 α 相同，

且 P 里符号是"$>$"，不是"$<$ 或 $\leq$"，下标 α 跟表头对应项一致

∴ 直接查表就行

$F_{0.05}(12,15) = 2.48$

猴博士爱讲课