方法精讲-数量 4

（笔记）

主讲教师：牟立志

授课时间：2024.08.10

方法精讲-数量 4（笔记）

01 排列组合与概率

02 容斥问题

【注意】本节课内容稍微有难度，工程、行程、几何、经济利润在中小学接触过，排列组合和容斥原理在高中学习过，无论基础如何，只要想学就可以学会，不要因为没有基础就不学了，因为有基础可能也学不明白，这个模块不看过往基础，而是看个人。本节课讲解的内容当作新的知识点学，尽量理解，这部分要有自我认知，能听懂就能学会，听不懂可以先放一放。

01 排列组合与概率

《排列组合的题型》

①基础概念：有序排列，无序组合，分类相加，分步相乘

②套路题型：相邻、不相邻、同素分堆

【注意】排列组合：

1.基础概念：单纯考查排列组合的概念，通过一些做事的过程，会有分类、分步的思想，比较基础，了解基础概念，会区分即可。计数原理学会分类相加、分步相乘。

2.套路题型：相邻、不相邻、同素分堆。套路题优于基础概念，基础概念比较灵活，每道题的分析不一样，套路题比较固定。

《基础概念》

有序排列：从一堆元素中选几个，需要考虑拿的顺序，顺序对于结果有影响，用 A

例：从 A、B、C、D、E 五个人中，选出两人，一人学行测，一人学申论，有几种情况？

无序组合：从一堆元素中选几个，不需要考虑拿的顺序，顺序对于结果没有影响，用 C

例：从 A、B、C、D、E 五个人中，选出两人，组成一个学习小组，有几种情况？

分类相加：做一件事，有好几种方法，每一种都可以完成，是分类，相加得到总的方法数

例：从 A 地到 B 地，有三种直达的方式，分别为公交 3 趟、地铁 2 趟、飞机 4 趟，一共有几种选择？

分步相乘：做一件事，要分几步进行，必须都完成才可以，是分步，相乘得到总的方法数

例：从 A 地到 B 地，需要在 C 地中转，A 到 C 公交 3 趟，C 到 B 地铁 2 趟，一共有几种选择

【注意】基础概念：

1.有序排列：从一堆元素中选几个，需要考虑拿的顺序，顺序对于结果有影响，用 A。

例：从 A、B、C、D、E 五个人中，选出两人，一人学行测，一人学申论，有几种情况？

答：总数是 5 人，写在下面，选出 2 人，写在上面，排列还是组合要看分类标准，需要考虑拿的顺序或者顺序对调后对结果有影响，此时用 A，即 A（5,2）。如 5 个人选出 2 个人是 A、B，A 学习行测、B 学习申论和 B 学习行测、A 学习申论是不同的情况，对调后对结果有影响，所以用 A 表示。

2.无序组合：从一堆元素中选几个，不需要考虑拿的顺序，顺序对于结果没有影响，用 C。

（1）例：从 A、B、C、D、E 五个人中，选出两人，组成一个学习小组，有几种情况？

答：如选出的是 A、B，先选 A、再选 B 和先选 B、再选 A 是一样的，对结果没有影响，即组合，用 C 表示，为 C（5,2）。

（2）如从 7 个葫芦娃选出 2 个救爷爷，先选大娃、再选二娃和先选二娃、再选大娃一样，对结果没有影响，是组合，用 C 表示，为 C（7,2）；如从 7 个葫芦娃选出 2 个救爷爷，第一人探路，第二人打架，先选大娃探路、再选二娃打架

和先选二娃探路、再选大娃打架不一样，对结果有影响，是排列，用 A 表示，为 A（7,2）。

3.分类相加：做一件事，有好几种方法，每一种都可以完成，是分类，相加得到总的方法数。

例：从 A 地到 B 地，有三种直达的方式，分别为公交 3 趟、地铁 2 趟、飞机 4 趟，一共有几种选择？

答：A 到 B 可以坐公交、地铁、飞机，有好几种方法，每一个方法都可以完成这件事，即分类，把方法数相加就是 A 到 B 的选择，即 3+2+4=9 种。

4.分步相乘：做一件事，要分几步进行，必须都完成才可以，是分步，相乘得到总的方法数。

例：从 A 地到 B 地，需要在 C 地中转，A 到 C 公交 3 趟，C 到 B 地铁 2 趟，一共有几种选择？

答：A 到 B 需要两步，两步都完成才可以，A 到 C 有 3 趟，C 到 B 有 2 趟，一共有 3*2=6 种方法。

排列（A）：与顺序有关（不可互换），A（n,m）=从 n 开始往下乘 m 个数。

组合（C）：与顺无无关（可以互换），C（n,m）=A（n,m）/A（m,m）。

【注意】

1.排列（A）：与顺序有关（不可互换），A（n,m）=从 n 开始往下乘 m 个数。如 A（7,3）=7*6*5；如 A（9,5）=9*8*7*6*5。

2.组合（C）：与顺无无关（可以互换），C（n,m）=A（n,m）/A（m,m）。如 C（7,3）=A（7,3）/A（3,3）=7*6*5/（3*2*1）=35；如 C（7,4）=A（7,4）/A（4,4）=7*6*5*4/（4*3*2*1）=35。C（7,3）=C（7,4）不是巧合，可以从理解的角度考虑，从 7 个元素中拿出 3 个（不考虑顺序）等同于从 7 个元素中找到 4 个留下；再如 C（100,98）=C（100,2）。

考查考生最基本的办事能力，如何思考、安排工作

先进行全面分析（分类），再逐一（分步）完成

【注意】排列组合不是考查高中的基础知识，如果想考查高中知识，完全可以考查立体几何，排列组合比较贴近生活，考上公务员都是基层公务员，要帮助领导办事，考查的是有没有办事的能力，看如何思考、如何安排工作，如领导安排一件事不能直接干，需要先进行分类，把事情思考全面，每一种情况要有应对的对策或者每一个方案有执行的过程，所以做排列组合问题时要先想全面，然后再分步进行。

【例 1】(2023 广东)某公司向餐馆订购盒饭，要求每份盒饭包含 2 种荤菜、2 种素菜。如果餐馆共准备了 6 种荤菜和 4 种素菜，则最多有多少种盒饭？

A. 42　　B. 60

C. 72　　D. 90

【解析】1. 排列组合问题，近几年考查的很多都是基本概念。首先明确要求，即两荤两素，荤菜 6 种选 2 种，先选排骨、再选红烧肉和先选红烧肉、再选排骨一样，为 C（6,2）=A（6,2）/A（2,2）=6*5/（2*1）=15；素菜 4 种选 2 种，没有顺序，为 C（4,2）=A（4,2）/A（2,2）=4*3/（2*1）=6。先荤菜，后素菜，分步用乘法，所求=15*6=90，对应 D 项。【选 D】

【注意】学习排列组合的关键在于对题目的理解，并不是所有人都能学，如果能理解可以尝试，如果学习完、老师解答后还是不理解打菜为什么是分步，建议放弃。

【例 2】（2024 山东网友回忆版）某医院积极响应国家号召，组建医疗小分队赴西部地区开展对口支援工作。该医院现有 6 名男医生和 3 名女医生报名，现从 9 人中抽取一组男、女医生都有的 3 人小分队。问有多少种不同的组队方式？

A. 63　　B. 70

C. 73　　D. 60

【解析】2. 方法一：“组队”会想到本题考查的是组合，先看清要求，即选择 3 人，且要有男有女，需要分情况讨论，可以是 2 男 1 女、1 男 2 女，然后分步进行。2 男 1 女：6 名男医生中选择 2 个，为 C（6,2），女医生从 3 个人中选

出 1 个，为 C（3,1）；先选男，再选女，分步相乘，为 C（6,2）*C（3,1）=6*5/（2*1）*3=15*3=45。1 男 2 女：从 6 名男医生中选择 1 个，为 C（6,1），从 3 名女医生中选出 2 个，为 C（3,2）；先选男，再选女，分步相乘，为 C（6,1）*C（3,2）=6*C（3,1）=6*3=18。分类相加，所求=45+18=63，对应 A 项。

方法二：要求从 9 人选择 3 人，为 C（9,3），其中包含全选男或者全选女的情况，把不满足的去掉即可，所求=C（9,3）-全男-全女，全选男医生的情况是从 6 个人中选出 3 个，为 C（6,3）；全选女医生的情况是 3 名女医生全选，为 C（3,3），所求=C（9,3）-C（6,3）-C（3,3）=63，对应 A 项。【选 A】

【注意】组队不涉及顺序，为组合；排队、表演节目、站排、照相涉及排序。

【例 3】（2021 新疆兵团）某部门有 9 名员工，从中随机抽取 2 人参加公司代表大会，要求女员工人数不得少于 1 人。已知该部门女员工比男员工多 1 人，则共有多少种方案符合要求？

A. 24　　B. 30

C. 36　　D. 72

【解析】3. 排列组合问题，先明确要求，即选 2 人且女生不少于 1 人（≥1 人）。

方法一：先分类，可以是 1 男 1 女、0 男 2 女，然后分别讨论。不清楚男员工和女员工数量，需要分析一下，一共 9 人，且女员工比男员工多 1 人，则男员工有 4 人，女员工有 5 人。1 男 1 女：男员工从 4 个人中选出 1 个，为 C（4,1），女员工从 5 人当中选出 1 个，为 C（5,1），分步相乘，为 C（5,1）*C（4,1）=5*4=20。0 男 2 女：女员工从 5 个人中选出 2 个人，为 C（5,2）=（5*4）/（2*1）=10。分类用加法，所求=20+10=30，对应 B 项。

方法二：从反面考虑，从 9 人中选 2 人为 C（9,2）=（9*8）/（2*1）=36，其中包含了不满足的情况，即没有女员工（全都是男员工）的情况，所求=C（9,2）-全男，全男的情况数是从 4 个人中选出 2 个人，为 C（4,2）=（4*3）/（2*1）=6。所求=36-6=30，对应 B 项。【选 B】

【注意】排列组合问题选无差别元素时，尽量一次选完，如本题，选出 2 个女员工，二者没有区别，要一次性选完，不能先选 1 个女员工，再选 1 个女员工，如 9 人中先选的是女 1，再选的是女 2，这种情况是满足的；但是也有可能是先选的是女 2，再选的是女 1，这与前面的情况是一样的，所以会出现重复。

【例 4】（2022 联考）某健身房近期推出甲、乙、丙、丁 4 项课程，每项课程的一次消费分别为 200 元、300 元、400 元、500 元，会员可根据充值卡内余额自行进行消费。会员小李充值卡内还剩 2200 元，打算在有效期内每项课程都至少消费 1 次，且将充值卡内余额恰好用完，问他消费这 4 项课程的组合有多少种不同的可能性？

A. 3　　　　B. 4

C. 5　　　　D. 6

【解析】4. “每项课程都至少消费 1 次”可以先把每一种课程消费 1 次，2200-（200+300+400+500）=800 元，剩下的 800 元可以随便选，不需要考虑用 A 还是用 C，选项情况数比较少，可以考虑枚举，按照一定标准进行枚举，如从便宜的开始。

（1）4 次 200 元课程。

（2）2 次 200 元课程、1 次 400 元课程。

（3）1 次 200 元课程、2 次 300 元课程。

（4）1 次 300 元课程、1 次 500 元课程。

（5）2 次 400 元课程。

综上，一共有 5 种情况，对应 C 项。【选 C】

【注意】课程数需要加 1，总体的情况数不需要加 1。

《套路题型》

①必须相邻（在一起）

方法：

先捆：把相邻的元素捆绑在一起，注意内部有无顺序

再排：将捆绑后的看成一个整体，进行排列

例：A、B、C、D、E 五人站排，A、B 相邻，有几种站法？

【注意】必须相邻（在一起）：

1.方法：捆绑法。

2.例：A、B、C、D、E 五人站排，A、B 相邻，有几种站法？

答：A、B 要求相邻，可以先将二者捆绑在一起，站排需要考虑顺序，A 在 B 左边和 A 在 B 右边是不同的情况，要考虑内部顺序，所以 A、B 捆绑为 A（2,2）=2*1=2；A、B 捆绑后当作一个整体，然后与 C、D、E 站排，即一共 4 个人站排，考虑内部顺序，为 A（4,4）=4*3*2*1=24。先捆再排，分步相乘，所求=2*24=48。

3.3 人排列为 A（3,3），4 人排列为 A（4,4），即全排列。

【例 5】（2020 河北事业单位）现有七年级的学生 1 名，八年级的学生 4 名，九年级的学生 5 名，需让他们排一排拍一张合照，要求同一年级的学生要挨在一起站，且七年级的学生不站两边，则有多少种不同的排法？

A.3760　　B.4760

C.5760　　D.6760

【解析】5.“排一排照相”是排列的问题，“同一年级的学生要挨在一起站”考虑捆绑法，先捆再排。七年级只有 1 个学生，不需要捆绑；八年级的学生有 4 名，捆绑需要考虑内部顺序，为 A（4,4）=4*3*2*1=24；九年级学生有 5 名，内部有顺序，捆绑为 A（5,5）=5*24=120。捆绑后相当于 3 个人，要求七年级不站两边，即七年级站中间，那么八年级和九年级在两边，为 A（2,2）=2。先捆再排，分步相乘，所求=24*120*2=24*240=5760，对应 C 项。【选 C】

《套路题型》

②不能相邻（不在一起）

方法：

先排：先安排可以相邻的元素，形成若干空位

再插：将不相邻的元素插入到空位中

例：A、B、C、D、E 五人站排，A、B 不相邻，有几种站法？

【注意】不能相邻（不在一起）：

1. 方法：插空法。

2. 例：A、B、C、D、E 五人站排，A、B 不相邻，有几种站法？

答：A、B 要求不相邻，考虑插空法，先排可以相邻的元素，即先把 C、D、E 进行排列，为 A（3,3）=3*2*1=6；3 人产生 4 个空，从 4 个空中选出 2 个位置放 A、B 即可，涉及顺序，为 A（4,2）=4*3=12。先排再插，分步相乘，所求=6*12=72。也可以先选空，再排人，从 4 个空中挑选 2 个空为 C（4,2），A 在前、B 在后和 B 在前、A 在后不一样，有顺序，为 A（2,2），C（4,2）*A（2,2）=A（4,2），所以不需要分两步，比较浪费时间，直接选出 2 个空排列即可。

【例 6】（2023 成都事业单位）要将不同的五种商品 A、B、C、D、E 在货柜上排成一排，其中 A、B 必须排在一起，C、D 不能排在一起。则有多少种不同的排列方式？

A. 12　　B. 20

C. 24　　D. 48

【解析】6. “A、B 必须排在一起”相邻问题，“C、D 不能排在一起”是不相邻问题。A、B 捆绑在一起，考虑内部顺序，为 A（2,2）=2；C、D 不能排在一起考虑插空法，先排再插，所以先排 AB 和 E，为 A（2,2）=2；2 个主体产生 3 个空位，挑出 2 个排序即可，为 A（3,2）=3*2=6。分步相乘，所求=2*2*6=24，对应 C 项。【选 C】

《套路题型》

③同素分堆

典型：要求每个主体至少分得一个

方法：同素分堆，C 空插板，至少分一个共有 C（空,板）=C（元素-1,堆-1）

例：5 个相同的苹果，分给 3 个小朋友，每人至少 1 个

【注意】同素分堆：相同元素分几堆。

1. 典型：要求每个主体至少分得一个。

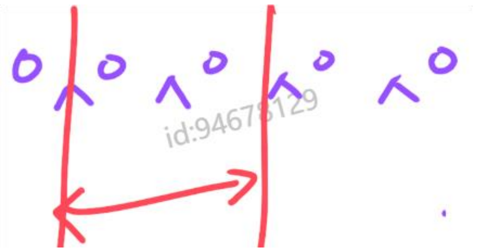
2. 方法：同素分堆，C 空插板，至少分一个共有 C（空,板）=C（元素-1,堆

-1）。

3.例：

（1）5 个相同的苹果，分给 3 个小朋友，每人至少 1 个。

答：5 个相同的苹果→相同元素，要求每人至少分一个，为同素分堆，考虑隔板法。5 个苹果产生 6 个空位，两边插板无法形成“堆”，在苹果中间插板一分为二，如一堆是 1 个苹果、一堆是 4 个苹果。分 3 堆需要 2 块板子，共有 4 个空位插 2 块板，调换顺序对结果没影响，为 C（4,2），即 5 个元素有 4 个空可以插板，分 3 堆所需要的板子为 3-1=2。



（2）15 个苹果分给 4 个小朋友至少每人一个，为 C（15-1,4-1）=C（14,3）；20 个苹果分给 5 个小朋友至少每人一个，为 C（20-1,5-1）=C（19,4）；12 个苹果分给 3 个小朋友至少每人一个，为 C（12-1,3-1）=C（11,2）。

【例 7】（2020 联考）某城市一条道路上有 4 个十字路口，每个十字路口至少有 1 名交通协管员，现将 8 个协管员名额分配到这 4 个路口，则每个路口协管员名额的分配方案有：

A.35 种　　　　B.70 种

C.96 种　　　　D.114 种

【解析】7.协管员虽然是不同的人，但分配的是名额，名额无需关注是谁，只需关注个数，属于相同的元素，“分配到这 4 个路口”，要分为 4 堆，要求“每个十字路口至少有 1 名交通协管员”每个路口分 1 个，同素分堆。C 空插板，所求=C（8-1,4-1）=C（7,3）=A（7,3）/A（3,3）=7*6*5/（3*2*1）=35，对应 A 项。

【选 A】

【注意】

1.行测考查的不是推导的过程，考的是认知。相同元素每个主体至少分一个

→同素分堆→C 空插板，C（元素-1,堆-1），直接记忆即可。

2. 本题 8 个元素产生 9 个空，但插板不能插两边的空位，没有分堆，所以有 8-1=7 个空位。再如分 4 堆，插 1 块板能分 2 堆、插 2 块板能分 3 堆、插 4-1=3 块板能分 4 堆。

《套路题型》

③同素分堆

变形：要求每个主体至少分得 N 个

方法：每人先分 N-1 个，剩余的按照至少分一个，同素分堆

例：25 个相同的苹果，分给 4 个小朋友，每人至少 3 个

【注意】同素分堆变形：要求每个主体至少分得 N 个。

1. 方法：每人先分 N-1 个，剩余的按照至少分一个，同素分堆。

2. 例：25 个相同的苹果，分给 4 个小朋友，每人至少 3 个。

答：假设小朋友为 A、B、C、D，若每人至少分 3 个，先从 25 个苹果中每人分 2 个，此时分出 8 个苹果，还剩 25-8=17 个苹果，将 17 个苹果按照每人至少分一个（≥1），先分的 2 个加上≥1 个即为≥3 个，C（17-1,4-1）=C（16,3），将每人至少分 3 个转化为每人至少分 1 个，3-1=2，4 个小朋友分 4*2=8 个，剩下 17 个苹果按照每人至少分一个，为 C（16,3）。

【拓展】某幼儿园老师把 25 本相同的笔记本发给班里的 5 名小朋友，要求每名小朋友至少可以分 4 本，则共有多少种不同的分配方案？

A. 115　　　　B. 120

C. 126　　　　D. 131

【解析】拓展. 要求“每名小朋友至少可以分 4 本”，先转化为每人至少分 1 本，4-1=3 本，分出去 3*5=15 本，还剩余 25-15=10 本，再每人至少分一本，为 C（9,4），对应 C 项。【选 C】

《概率的题型》

①给情况，求概率

②给概率，求概率

【注意】概率的题型：

1.给情况，求概率。

2.给概率，求概率。

《给情况，求概率》

公式：概率=满足/全部

例：3 个绿球、2 个黄球、5 个红球，球都一样，随便摸一个

【注意】给情况求概率：给出具体情况，求概率，通过排列组合，找到全部的情况数和满足的情况数。

1.公式：概率 P=满足/全部。

2.例：3 个绿球、2 个黄球、5 个红球，球都一样，随便摸一个。问：摸到绿球的概率？

答：全部的情况为 10 个球中挑 1 个，满足的情况是从 3 个绿球中挑 1 个，P=C（3,1）/C（10,1）=3/10。

《给概率，求概率》

公式：分类加和、分步相乘

例：某抽奖活动：

一等奖（小汽车），中奖概率为 5%

二等奖（摩托车），中奖概率为 10%

三等奖（自行车），中奖概率为 30%

①帅志中奖的概率为多少？

②帅志和郭子同时中二等奖的概率为多少？

【注意】给概率求概率：给其中一步的概率。

1.公式：分类加和、分步相乘。

2.例：某抽奖活动：一等奖（小汽车），中奖概率为 5%；二等奖（摩托车），

中奖概率为 10%；三等奖（自行车），中奖概率为 30%。问：帅志中奖的概率为多少？帅志和郭子同时中二等奖的概率为多少？。

答：（1）中奖分三种情况，中一等奖、二等奖、三等奖都算中奖，分类相加，5%+10%+30%=45%。（2）两人中二等奖的概率都是 10%，互不干扰，同时中奖，分步相乘，10%*10%=1%。

3. 给概率求概率比给情况求概率简单一些，只需要理解好分类和分步即可，对于概率问题优先做给概率求概率题型，给情况求概率需要排列组合的基础。

【例 1】（2020 联考）物业派出小王、小曾、小郭三名工作人员负责修剪小区内的 6 棵树，每名工作人员至少修剪 1 棵（只考虑修剪的棵数），则小王至少修剪 3 棵的概率为：

A. 3/10　　B. 3/7

C. 1/4　　D. 3/5

【解析】1. 问“小王至少修剪 3 棵的概率”，P=满足情况/全部情况。“每名工作人员至少修剪 1 棵（只考虑修剪的棵数）”，6 棵树分 3 人每人至少一棵树，为同素分堆问题，C 空插板，全部情况：C（6-1,3-1）=C（5,2）=10，分母为 10，排除 B、C 项。D 项：3/5=6/10，6 棵树小王修 6 棵，大概率不可能。满足要求情况数：要求小王至少修剪 3 棵，情况为王 3、曾 2、郭 1，或王 3、曾 1、郭 2，或王 4、曾 1、郭 1，满足的情况共 3 种，P=3/10，对应 A 项。【选 A】

【例 2】（2024 山东网友回忆版）山东手造精品众多，某展览会有叶雕、皮影、风筝、麦秸画、柳编、葫芦画、锡雕、鲁班枕 8 个展厅。因时间原因，一名参观者决定从 8 个展厅中随机选取 3 个进行参观。问叶雕和皮影展厅至少一个被选中的概率是多少？

A. 5/14　　B. 15/28

C. 9/14　　D. 19/28

【解析】2. 给情况求概率题，P=满足情况/全部情况。全部情况：从 8 个中选择 3 个，没有顺序要求，为 C（8,3）=A（8,3）/A（3,3）=8*7*6/（3*2*1）=56。要求叶雕和皮影至少选一个，可能选了叶雕、或选皮影、或叶雕和皮影都

选，情况比较多，正难则反。反面情况是叶雕和皮影都不选，从另外的 8-2=6 种中选择 3 种，为 C（6,3），满足的情况=全部情况-反面情况=56-C（6,3）=56-20=36，P=36/56=9/14，选择 C 项。【选 C】

【注意】本题不讲解正面求解，公务员是行测考试，从正面考虑比较麻烦，反面考虑更简单，正难则反是行测的思维，如果正面求解和反面求解难度相同，正反面都会讲，但本题正面求解没有反面求解简单。

【例 3】（2023 天津事业单位）一枚骰子共有六面，点数从 1 到 6，每次掷骰子得到的数字概率相同。掷三次骰子得到的三个数字完全相同的概率：

A. 小于 2%　　　　B. 在 2%～5%之间

C. 在 5%～8%之间　　　　D. 大于 8%

【解析】3. 方法一：概率问题，给情况求概率，P=满足情况/全部情况。全部情况是掷 3 次骰子，第一次从 6 个面中选 1 个面，不涉及顺序，为 C（6,1），同理，第二次和第三次也为 C（6,1），全部情况为 C（6,1）*C（6,1）*C（6,1）=6*6*6。满足要求的情况数：三个数字相同，枚举，111、222、333、444、555、666，只有 6 种，P=6/（6*6*6）=1/36，对应 B 项。

方法二：假如甲、乙、丙 3 人掷骰子，求得到相同点数的概率。假设甲先掷骰子为 5 点，要想乙的点数和甲一样，为 1/6，同理，丙的点数和甲一样，为 1/6，则所求=1/6*（1/6）=1/36，对应 B 项。【选 B】

【注意】多个主体相同的目标，求概率：

1. 比如老师和同学蒙选择题，求恰巧蒙到相同选项的概率为多少，可以理解为“跟屁虫”的概率问题，两个主体共同的目标（蒙到相同选项）求概率。

（1）第一步让其中一个人确定选择，任意固定一人，假设同学先蒙选项 A 项。

（2）第二步看另一人满足的概率是多少，老师挑选项，依然有 4 个选项，只有选到 A 项才能达成相同选项的目标，则满足情况为 1/4。

2. 再如老师和同学从 A→B 坐车，共有 15 趟车，求坐到相同车的概率。假设

同学先选择 2 号车，老师有 15 种选择，在 15 种车里只有选择 2 号车能够达成相同目标，则满足情况为 1/15。

【例 4】（2024 上海网友回忆版）某市向广大市民随机发放消费券，规则是先公布消费券发放额，再根据商家的参与量决定中签率。第一批消费券商家参与度较高，中签率为 60%；第二批和第三批消费券的中签率均为 20%。三批消费券依次发放，市民张先生连续三次申请，则他恰好成功两次的概率约为：

A. 20%　　B. 40%

C. 60%　　D. 80%

【解析】4. 给概率求概率问题。概率分为三批，“恰好成功两次”，第一次中奖的概率为 60%，则不中的概率为 40%；第二次中奖的概率为 20%，则不中的概率为 80%；第三次中奖的概率为 20%，则不中的概率为 80%。分为三种情况：第一次、第二次成功，第三次失败，60%*20%*80%=9.6%；第一次、第三次成功，第二次失败，60%*80%*20%=9.6%；第一次失败，第二次、第三次成功，40%*20%*20%，该算式各项百分数均小于前两种情况，则结果＜9.6%，分类相加，9.6%+9.6%+小于 9.6%的概率=19.2%+小于 9.6%的概率，最接近 A 项；或直接计算，40%*20%*20%=1.6%，分类相加，9.6%+9.6%+1.6%≈20%，对应 A 项。【选 A】

第九节　容斥原理问题

【注意】容斥问题不建议放弃，属于送分题，比较简单。

《容斥问题的认知》

①几个集合：两集合、三集合

②解题方法：公式、画图

【注意】容斥问题的认知：认知简单，可操作性强。

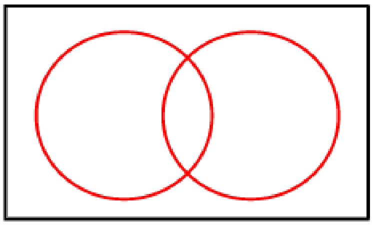
1. 几个集合：两集合、三集合。

2. 解题方法：公式、画图。

《两集合》

公式：总数=A+B-A∩B+都不

例：班级喜欢帅志的有 50 人，喜欢郭子的有 30 人，都不喜欢的有 3000 人，都喜欢的有 1 人，问：班级一共多少人？



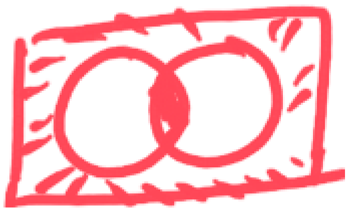
【注意】两集合：

1. 例：班级喜欢帅志的有 50 人，喜欢郭子的有 30 人，都不喜欢的有 3000 人，都喜欢的有 1 人。问：班级一共多少人？

答：求班级总数，先把所求的情况都加上，50+30+3000≠总数，因为中间有交叉重复的，有 1 人都喜欢，既在 50 人中被算过、又在 30 人中被算过，重复了 1 次，需要减掉 1 次，即总数=50+30+3000-1=A+B+都不-A∩B。

2. 公式：总数=A+B-A∩B+都不。

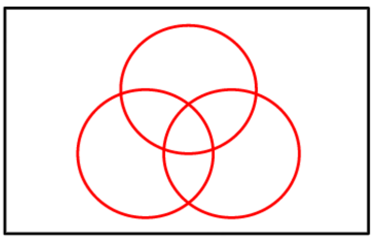
3. 原理：比如家里窗户漏风，需要用纸片糊上，糊上两片，还需要糊上外围都不的部分，才不漏风，但是有浪费，中间部分有 2 层，需要撕掉 1 层，减掉 A∩B，即总数=A+B-A∩B+都不。



《三集合》

公式一（分别给出两两交集）：

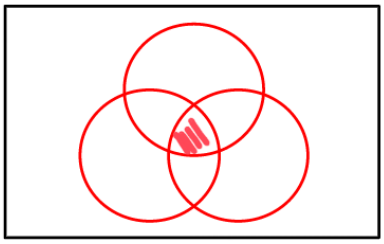
总数=A+B+C+都不-A∩B-A∩C-B∩C+A∩B∩C



【注意】三集合——公式一：分别给出两两交集。

1. 公式：总数=A+B+C+都不-A∩B-A∩C-B∩C+A∩B∩C。

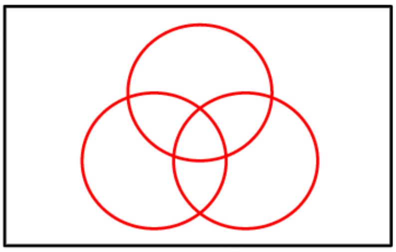
2. 原理：比如家里窗户漏风，需要用纸片糊上，糊上 3 片纸，加上外围都不的部分，但 A∩B、A∩C、B∩C 的部分有 2 层，均需要减掉 1 层；中间 A∩B∩C 的部分，糊了 3 层，减掉了 3 层，需要补回来，即总数=A+B+C+都不-A∩B-A∩C-B∩C+A∩B∩C。



《三集合》

公式二（一起给出只满足两项）：

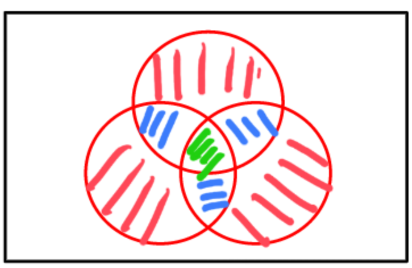
总数=A+B+C+都不-只满足两项-2*满足三项



【注意】三集合——公式二：一起给出只满足两项。

1. 公式：总数=A+B+C+都不-只满足两项-2*满足三项。

2. 原理：如图，红色部分是只满足 1 种情况，蓝色部分是满足 2 种情况，绿色部分是满足 3 种情况，注意蓝色部分不包括绿色部分。比如糊窗户，A+B+C+都不，此时都糊上了窗户，蓝色部分糊了 2 次，需要减掉一层，同理，绿色部分糊了 3 次，需要减掉 2 次，即总数=A+B+C+都不-只满足两项-2*满足三项。



容斥问题的方法选择

《容斥问题的解题方法》

公式法：题目中所给、所求都是公式中的一部分

画图法：出现“只 A”

【注意】容斥问题的解题方法：分析几个集合、啥方法。

1.公式法：题目中所给、所求都是公式中的一部分，直接代入公式。

2.画图法：出现“只 A”，不管是两集合还是三集合，在公式中没有体现，考虑画图分析。

【例 1】（2022 广东）某单位计划从全部 80 名员工中挑选专项工作组成员，要求该组成员须同时有基层经历和计算机等级证书。已知，单位内有 40 人有基层经历，有 46 人有计算机等级证书，既没有基层经历又未获得计算机等级证书的有 10 人。那么能够进入工作组的员工有多少人？

A.16

B.40

C.46

D.54

【解析】1.问能够进入工作组的员工有多少人，需要同时有基层经历和计算机等级证书，即求交集，容斥问题，两个集合，给出总数、A、B、都不，所给、所求都是公式中的一部分，套公式。设能够进入工作组的有 x 人，代入数据：80=40+46+10-x→80=96-x，解得 x=16，对应 A 项。【选 A】

【例 2】（2022 联考）某班期末考试结束后统计，物理、化学均不及格的人数占全班的 14%，物理及格的人数比化学及格的人数多 10 人，且化学及格的人数占全班人数的 60%。已知全班人数不超过 70 人，问物理及格的人中化学也及格的有多少人？

A.25

B.26

C.27

D.28

【解析】2.容斥问题，问物理及格的人中化学也及格的有多少人，求交集，分为物理和化学两个集合，给出都不、A、B、总数，所给、所求都是公式中的一

部分，总数是范围，但求的是具体值，则结合倍数特性确定范围的唯一值，“物理、化学均不及格的人数占全班的 14%”→都不及格/全班人数=14%=7/50，则全班人数为 50 的倍数，已知全班人数不超过 70 人（≤70），则全班人数为 50 人、都不及格人数为 50*14%=7 人，化学及格人数=50*60%=30 人，物理及格人数=30+10=40 人，设物理及格的人中化学也及格的有 x 人，代入数据：50=40+30+7-x，利用尾数法，尾 0=尾 7-x，则 x 的尾数为 7，对应 C 项。【选 C】

【例 3】(2020 新疆)某单位共有 240 名员工，其中订阅 A 期刊的有 125 人，订阅 B 期刊的有 126 人，订阅 C 期刊的有 135 人，订阅 A、B 期刊的有 57 人，订阅 A、C 期刊的有 73 人，订阅 3 种期刊的有 31 人，此外，还有 17 人没有订阅这三种期刊中的任何一种。问订阅 B、C 期刊的有多少人？

A. 57　　B. 64

C. 69　　D. 78

【解析】3. 容斥问题，出现 A、B、C 三个集合，给出总数、A、B、C、A∩B、A∩C、A∩B∩C、都不，求 B∩C，所给、所求都是公式中的一部分，两两存在交集，设订阅 B、C 期刊的有 x 人，代入数据：240=125+126+135+17-57-73-x+31，利用尾数法，尾 0=尾 4-x，则 x 的尾数为 4，对应 B 项。【选 B】

【例 4】（2023 事业单位联考）某高新技术园区对园区内的部分企业的专利申请情况进行了调查，在接受调查的企业中，申请了发明专利的有 46 家，申请了实用新型专利的有 69 家，申请了外观设计专利的有 25 家，三类专利都申请了的有 12 家，申请了其中两类专利的有 39 家，三类专利都没申请的有 16 家，那么接受调查的企业有多少家？

A. 89　　B. 93

C. 106　　D. 111

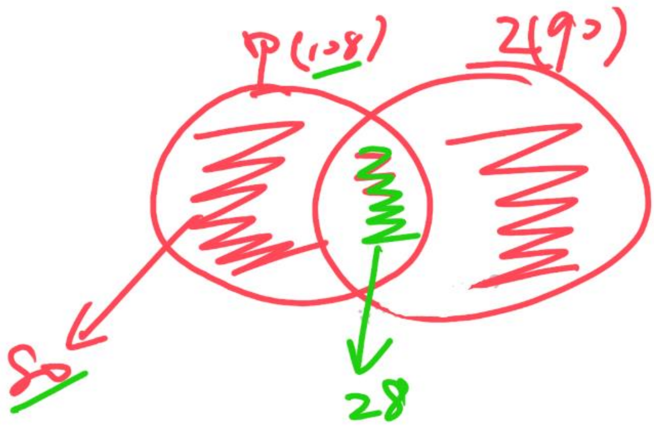
【解析】4. 三个集合，给出 A、B、C、A∩B∩C、只满足两项、都不，求总数，所给、所求都是公式中的一部分，代入数据：总数=46+69+25+16-39-2*12，结果的尾数为 3，对应 B 项。【选 B】

【例 5】（2024 江苏网友回忆版）某基层工会共有 180 名会员，举行甲、乙两项工会活动，60%的会员参加甲活动，50%的会员参加乙活动，若只参加甲活动的会员有 80 人，则只参加乙活动的会员有：

A. 10 人　　　　B. 36 人

C. 62 人　　　　D. 78 人

【解析】5.“60%的会员参加甲活动，50%的会员参加乙活动”→参加甲活动人数=180*60%=108，参加乙活动人数=180*50%=90。容斥问题，两个集合，问只参加乙活动的会员有多少人，只能画图，只乙=乙-交集，参加甲活动的会员有 108 人，其中只参加甲活动的会员有 80 人，则交集=108-80=28 人，所求=90-28=62 人，对应 C 项。【选 C】



总结

【注意】总结：

1. 排列组合问题：

（1）基础概念：

①有序排列（A），无需组合（C）。

②分类相加，分步相乘。

（2）套路题型：

①相邻：先捆，注意内部有无顺序，如有顺序，捆 3 个人为 A（3,3）、5 个人为 A（5,5），捆绑之后看作一个整体，再排。

②不相邻：先排没有要求的，如 3 个人形成 4 个空，再插。

③同素分堆：

a. 至少分 1 个：C（空,板）。

b. 至少分 n 个：每人先分 n-1 个，再用公式。

2. 概率问题：

（1）给情况求概率：满足情况数/全部情况数。

（2）给概率求概率：分类相加，分步相乘。

3. 容斥问题：

（1）几个集合、解题方法（公式、画图）。

（2）公式：

①两集合：总数=A+B+都不-A∩B。

②三集合：

a. 总数=A+B+C+都不-A∩B-A∩C-B∩C+A∩B∩C。

b. 总数=A+B+C+都不-只满足两项-2*满足三项。

《一讲一练》

检测 1：（2022 联考）滑雪和滑冰是冬奥会的两大项赛事，其中高山滑雪、自由式滑雪、单板滑雪、跳台滑雪、越野滑雪和北欧两项是滑雪大项中的 6 个分项，短道速滑、速度滑冰和花样滑冰是滑冰大项中的 3 个分项。小林打算去现场观看比赛，共选择 6 个项目，并且每个大项不少于 1 个，若所有项目比赛时间均不交叉，则不同的观赛方式有：

A. 83 种　　　　B. 84 种

C. 92 种　　　　D. 102 种

【解析】检测 1. 排列组合问题，滑雪有 6 项，滑冰有 3 项，共选择 6 个项目，要求每个大项不少于 1 个，正面分析需要分类讨论，正难则反，总情况数：总共有 6+3=9 项，从中选择 6 项，没有顺序，为 C(9,6)=C(9,3)=9*8*7/(3*2*1)=84；不满足的情况数：反面是只有滑雪或者只有滑冰，全选滑雪为 C（6,6）=1 种情况，不存在只有滑冰的情况，所求=84-1=83，对应 A 项。**【选 A】**

检测 2：（2019 四川下）某场科技论坛有 5G、人工智能、区块链、大数据和云计算 5 个主题，每个主题有 2 位发言嘉宾。如果要求每个主题的嘉宾发言次序必须相邻，问共有多少种不同的发言次序？

A. 120　　　　B. 240

C. 1200　　　　D. 3840

【解析】检测 2. 要求必须相邻，考虑捆绑法，先捆，每个主题有 2 位发言嘉宾，2 人的内部顺序为 A（2,2），5 个主题都要捆，即有 5 个 A（2,2）；再排，捆完之后有 5 个主体，5 个主体的顺序为 A（5,5），所求=A（2,2）*A（2,2）*A（2,2）*A（2,2）*A（2,2）*A（5,5）=2^5*5*4*3*2*1=32*120，对应 D 项。【选 D】

检测 3：（2018 浙江事业单位）某地组织 9 名政协委员负责调研农民工子弟小学教学情况。调研结束合影前有 3 名委员因紧急工作已经离开，学校决定安排 3 名小学生代表与委员一起坐在前排。现要求每位小学生的两边都坐着政协委员，一共有多少种不同的方式？

A. 7200　　　　B. 29600

C. 43200　　　　D. 362880

【解析】检测 3. 要求每位小学生的两边都坐着政协委员，即小学生不能坐在一起，考虑插空法。“调研结束合影前有 3 名委员因紧急工作已经离开”说明有 6 位政协委员，先排政协委员，为 A（6,6），6 个人产生 7 个空，“每位小学生的两边都坐着政协委员”说明小学生不能坐在两边，所以要在 5 个空中选 3 个，为 A（5,3），所求=A（6,6）*A（5,3），对应 C 项。【选 C】

检测 4：（2019 江苏）已知一个箱子中装有 12 件产品，其中有 2 件次品。若从箱子中随机抽取 2 件产品进行检验，则恰好抽到 1 件次品的概率是：

A. 13/22　　　　B. 10/33

C. 7/11　　　　D. 8/11

【解析】检测 4. 概率问题，P=满足要求的情况数/全部的情况数。全部的情况数：从 12 件产品中选出 2 件，为 C（12,2）=12*11/（2*1）=66，约分可以得

到 11、22、33，无法排除选项；满足要求的情况数：要求恰好抽到 1 件次品，即 1 件好的、1 件坏的，为 C（10,1）*C（2,1）=20，所求=20/66，对应 B 项。【选 B】

检测 5：（2022 辽宁事业单位）某公司下午 5：00 下班，当不堵车时，张某 6：20 之前到家；当堵车时，6：20 之前到家的概率为 0.4。若 5：00～6：20 堵车的概率为 0.4，则张某 6：20 之前到家的概率是：

A. 0.74　　B. 0.76

C. 0.84　　D. 0.89

【解析】检测 5. 概率问题，给概率求概率，分类相加，分步相乘。

方法一：问 6：20 之前到家的概率，分为堵车和不堵车两种情况，堵车的概率为 0.4，则不堵车的概率为 0.6。若不堵车，张某 6：20 之前到家，即 6：20 之前到家的概率为 0.6；若堵车，分为能到家和不能到家两种情况，6：20 之前到家的概率为 0.4，则堵车且 6：20 之前到家的概率为 0.4*0.4=0.16，所求=0.6+0.16=0.76，对应 B 项。

方法二：反面是堵车且不能到家，所求=1-0.4*0.6=1-0.24=0.76，对应 B 项。【选 B】

检测 6：（2022 四川事业单位）某汽车制造厂一周内生产汽车共 68 辆，其中 45 辆有空调，30 辆有高级音响，12 辆兼而有之。则既没有空调也没有高级音响的汽车有多少辆？

A. 5　　B. 8

C. 10　　D. 15

【解析】检测 6. 两个集合，套公式，设既没有空调也没有高级音响的汽车有 x 辆，代入数据：68=45+30+x-12→x=5，对应 A 项。【选 A】

检测 7：（2018 重庆选调）一社区居委会为丰富居民的业余生活，专门设立了多个俱乐部邀请居民自愿参加。统计结果如下：22 人参加了棋类俱乐部、27 人参加了音乐俱乐部、50 人参加了戏剧俱乐部、10 人参加了棋类和音乐俱乐部、

14 人参加了音乐和戏剧俱乐部、10 人参加了戏剧和棋类俱乐部、8 人参加了这三个俱乐部。那么参与活动的居民人数是：

A. 57　　　　B. 68

C. 73　　　　D. 84

【解析】检测 7. 三集合容斥问题，公式：总数=A+B+C+都不-A∩B-A∩C-B∩C+A∩B∩C。问参与活动的居民人数，所以没有不参与的，即都不=0，代入数据：总数=22+27+50-10-14-10+8，结果的尾数为 3，对应 C 项。【选 C】

检测 8：（2019 新疆兵团）某机关开展红色教育月活动，三个时间段分别安排了三场讲座。该机关共有 139 人，有 42 人报名参加第一场讲座，51 人报名参加第二场讲座，88 人报名参加第三场讲座，三场讲座都报名的有 12 人，只报名参加两场讲座的有 30 人。问没有报名参加其中任何一场讲座的有多少人？

A. 12　　　　B. 14

C. 24　　　　D. 28

【解析】检测 8. 三集合容斥问题，公式：总数=A+B+C+都不-只满足两项-2*满足三项。设没有报名参加其中任何一场讲座的有 x 人，代入数据：139=42+51+88+x-30-12*2→尾 9=尾 1-尾 4+x→尾 9=尾 7+x→x 的尾数为 2，选择 A 项。【选 A】

【答案汇总】

排列组合问题 1-5：DABCC；6-7：CA

概率问题 1-4：ACBA

容斥原理问题 1-5：ACBBC

遇见不一样的自己

Be your better self