第四章　大数定律与中心极限定理

§4.1　大数定律　　§4.2　中心极限定理

一、 填空题

1. 设 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$，则由切比雪夫不等式有 $P(|X-\mu|\geq 3\sigma)\leq$ __1/9__。

2. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n\cdots$ 独立同分布，且 $E(X_i)=\mu, D(X_i)=8, i=1,2,\cdots$，则由切比雪夫不等式有 $P(|\overline{X}-\mu|\geq\varepsilon)$ $\underline{\frac{8}{n\varepsilon^2}}$ 。并有估计 $P(|\overline{X}-\mu|<4)$ $\underline{\geq 1-\frac{1}{2n}}$ 。

3. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n\cdots$ 相互独立且都服从参数为 λ 的泊松分布,则

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leq x\right)=\underline{\Phi(x)}\ .$$

二、 单项选择题

1. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立且都服从参数为λ的指数分布，则（A ）

（A）$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leq x\right)=\Phi(x)$,　（B）$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leq x\right)=\Phi(x)$,

（C）$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-\lambda}{\sqrt{n}\lambda}\leq x\right)=\Phi(x)$,　（D）$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-\lambda}{n\lambda}\leq x\right)=\Phi(x)$,

其中　$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

2. 根据德莫弗–拉普拉斯定理可知：（B）

（A）二项分布是正态分布的极限分布；（B）正态分布是二项分布的极限分布；

（C）二项分布是指数分布的极限分布；（D）二项分布与正态分布没有关系。

三、计算下列各题

1. 设在每次实验中事件 A 以概率 0.5 发生.是否可以用大于 0.97 的概率确信：在 1000 次实验中，事件 A 出现的次数在 400 与 600 范围内？

解　设 X 表示 1000 次试验中 A 出现的次数，

则　$X\sim B(1000,\ 0.5),\ \ E(X)=500,\ \ D(X)=250$，由切比雪夫不等式有

$$P(400<X<600)=P(|X-500|<100)\geq 1-\frac{250}{100^2}=0.975$$

所以可以用大于 0.97 的概率确信：在 1000 次实验中，事件 A 出现的次数在 400 与 600 范围内.

2. 抽样检查产品质量时，若发生次品多于 10 个，则拒绝接受这批产品，设某批产品次

品率为 10%，问至少应抽取多少次品检查，才能保证拒绝该产品的概率达到 0.9。

解 设应抽查 n 个产品，η为其中的次品数，则 η~B（n，0.1），E(η)=0.1 n, D(η)=0.09 n

由德莫弗—拉普拉斯定理，$P(\text{拒绝接受}) = P(10 < \eta \le n) = P(\frac{10-0.1n}{\sqrt{0.09n}} < \frac{\eta - 0.1n}{\sqrt{0.09n}} \le \frac{n-0.1n}{\sqrt{0.09n}})$

$$\approx \Phi\left(3\sqrt{n}\right) - \Phi\left(\frac{10-0.1n}{0.3\sqrt{n}}\right), \quad n\text{充分大时}, \Phi\left(3\sqrt{n}\right) \approx \Phi(+\infty) = 1$$

由题意 $1-\Phi\left(\frac{10-0.1n}{0.3\sqrt{n}}\right) = 0.9$, 即 $\Phi\left(\frac{10-0.1n}{0.3\sqrt{n}}\right) = 0.1$, 查表 $\frac{10-0.1n}{0.3\sqrt{n}} = -1.28 \Rightarrow n = 147$

3.（1）一个复杂系统由 100 个相互独立元件组成，系统运行期间每元件损坏的概率为 0.1，又知系统运行至少必需 85 个元件工作，求系统可靠度（即正常工作的概率），（2）上述系统假如由 n 个相互独立元件组成，至少 80%的元件工作，才使系统正常运行，问 n 至少多大才能保证系统可靠度为 0.95？

解（1）设η为系统中正常运行完好的元件数，则η~B（100，0.9），E(η)=90, D(η)=9,

$$P(\eta \ge 85) = 1 - P(\eta < 85) = 1 - P(\frac{\eta - 90}{\sqrt{9}} < \frac{85-90}{\sqrt{9}}) \approx 1 - \Phi(-\frac{5}{3}) = 0.952 .$$

(2) $P(\eta \ge 0.8n) = 0.95, \quad \eta \sim B(n, 0.9), \quad E(\eta) = 0.9n, \quad D(\eta) = 0.09n$

$$P(\eta \ge 0.8n) = 1 - P(\eta < 0.8n) = 1 - P(\frac{\eta - 0.9n}{\sqrt{0.09n}} < \frac{0.8n - 0.9n}{\sqrt{0.09n}}) = \Phi(\frac{\sqrt{n}}{3}) = 0.95 .$$

查表 $\frac{\sqrt{n}}{3} = 1.65, \quad n = 24.5, \quad \text{取} n = 25$

4. 某保险公司多年的统计资料表明，在索赔户中被盗索赔户占 20 %，以 X 表示在随意抽查的 100 个索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数.

（1）写出 X 的概率分布；

（2）用德莫弗–拉普拉斯定理，求被盗索赔户不少于 14 户不多于 30 户的概率的近似值.

解 （1） X 服从二项分布，参数 $n = 100, p = 0.2$.

$$P(X = k) = C_{100}^{k} 0.2^{k} 0.8^{100-k}, \quad k = 0,1,\cdots,100.$$

（2） $E(X) = np = 20,\ D(X) = np(1-p) = 16$， 根据德莫弗–拉普拉斯定理

$$\begin{aligned} P(14 \le X \le 30) &= P(\frac{14-20}{4} \le \frac{X-20}{4} \le \frac{30-20}{4}) \\ &= P(-1.5 \le \frac{X-20}{4} \le 2.5) \approx \Phi(2.5) - \Phi(-1.5) \\ &= \Phi(2.5) - [1 - \Phi(1.5)] = \Phi(2.5) + \Phi(1.5) - 1 = 0.994 + 0.933 - 1 = 0.927 \end{aligned}$$

5. 设 X_i (i =1,2,⋯50)是相互独立的随机变量，且服从参数 $\lambda = 0.03$ 的泊松分布,记 $Z = \sum_{i=1}^{50} X_i$,利用中心极限定理,求 $P(Z > 3)$.

解 $P(Z > 3) = 1 - P(Z \le 3) = 1 - P(\frac{Z - 50\times 0.03}{\sqrt{50\times 0.03}} \le \frac{3 - 50\times 0.03}{\sqrt{50\times 0.03}}) \approx 1 - \Phi\left(\sqrt{1.5}\right) = 0.1112$