



书面作业 第7次 参考解答或提示

第1部分 基础

无.

第2部分 理论

T1. 设 R 为 A 上二元关系, 如果对每一 $a \in A$ 均存在 $b \in A$ 使 aRb , 则称 R 为连续的.

证明: 当 R 连续、对称、传递时, R 为等价关系.

只需证 R 是自反的. 设 a 是 A 上任意元素, 则有 $b \in A$ 使 aRb (因为 R 连续), 因而有 bRa (因为 R 对称), 所以有 aRa (因为 R 传递). 因此 R 是自反的.

T2. 设 R 是集合 A 上的一个自反关系, 证明: R 是等价关系当且仅当若 $(a,b) \in R \wedge (a,c) \in R$ 时, 则 $(b,c) \in R$.

当 R 等价时, 容易证明结论, 下面证明另一方面, 即证 R 等价.

(1) R 自反 (题设);

(2) 若 aRb , 因 R 自反, 有 aRa , 从而由条件有: bRa , 所以 R 对称;

(3) 若 aRb, bRc , 则由已证对称知, bRa , 加上 bRc , 由条件有: aRc , 所以 R 传递.

综上, R 是等价关系.

T3. 假设给定了正整数的序偶集合 A , 在 A 上定义二元关系 R 如下: $((x,y),(u,v)) \in R$, 当且仅当 $xv=yu$, 证明: R 是一个等价关系.

(1) 自反性: $\forall (x,y) \in A$, 因为 $xy=yx$, 所以 $((x,y),(x,y)) \in R$, 因此 R 是自反的;

(2) 对称性: $\forall (x,y), (u,v) \in A$, 若 $((x,y),(u,v)) \in R \Rightarrow xv=yu \Rightarrow uy=vx \Rightarrow ((u,v),(x,y)) \in R$, 因此 R 是对称的;

(3) 传递性: $\forall (x,y), (u,v), (s,t) \in A$, 若 $((x,y),(u,v)) \in R \wedge ((u,v),(s,t)) \in R \Rightarrow xv=yu \wedge ut=vs \Rightarrow xvut=yuvs \Rightarrow xt=ys \Rightarrow ((x,y),(s,t)) \in R$, 因此 R 是传递的.

综上, R 是一个等价关系.

T4. 令 $C = \{a + bi \mid a, b \text{ 为实数}, a \neq 0\}$, 定义 C 上关系 R : $(a + bi)R(c + di)$ 当且仅当 $ac > 0$, 证明 R 为等价关系.

对任意 $s = (a + bi) \in C$, $a \neq 0$, 有 $a \cdot a > 0$, 则 $(a + bi)R(a + bi)$, 所以 R 是自反的;

若 $(a + bi)R(c + di)$, 则有 $ac > 0$, 所以 $ca > 0$, 故 $(c + di)R(a + bi)$, R 是对称的;

若 $(a + bi)R(c + di)$, $(c + di)R(e + fi)$, 则 $ac > 0$, $ce > 0$, 因此 $ae > 0$,

所以 $(a + bi)R(e + fi)$, 故 R 是传递的.

因此 R 为等价关系.

T5. 设 R 为 A 上二元关系, 且 $\text{dom}(R) = A$. 若 $R \circ R^{-1} \circ R = R$, 证明 $R \circ R^{-1}$ 是 A 上的等价关系.

$\text{dom}(R) = A$,



对任意 $x \in A$, 有 $y \in A$, 使 xRy , 所以 $yR^{-1}x$, 因此 $xR \circ R^{-1}x$, $R \circ R^{-1}$ 是自反的;

对任意 $x, y \in A$, 若 $xR \circ R^{-1}y$, 则存在 $u \in A$, 使得 xRu , $uR^{-1}y$, 所以有 $uR^{-1}x$, yRu , 因此 $yR \circ R^{-1}x$, $R \circ R^{-1}$ 是对称的;

对任意 $x, y, z \in A$, 若 $xR \circ R^{-1}y$, $yR \circ R^{-1}z$, 则存在 $u, v \in A$, 使得 xRu , $uR^{-1}y$, yRv , $vR^{-1}z$, 所以 $(x, v) \in R \circ R^{-1} \circ R$, 而 $R \circ R^{-1} \circ R = R$, 所以有 $(x, v) \in R$, 同时 $(v, z) \in R^{-1}$, 因此 $xR \circ R^{-1}z$, $R \circ R^{-1}$ 是传递的;

综上所述, $R \circ R^{-1}$ 是 A 上的等价关系。

T6. 设 $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ 是集合 A 的一个划分, 我们定义 A 上的一个二元关系 R , 使 $(a, b) \in R$ 当且仅当 a 和 b 在这个划分的同一块中. 证明 R 是等价关系.

T7. 设 R, S 为 A 上的两个等价关系, 且 $R \subseteq S$, 定义 A/R 上的关系 $R/S: ([x], [y]) \in R/S$ 当且仅当 $(x, y) \in S$.

证明: R/S 为 A/R 上的等价关系.

S 为 A 上的等价关系, 那么对任意 x 有 $(x, x) \in S$, 所以 $([x], [x]) \in R/S$, R/S 是自反的;

对任意 $[x], [y] \in A/R$, 若 $([x], [y]) \in R/S$, 则 $(x, y) \in S$, 由 S 对称知 $(y, x) \in S$, 所以 $([y], [x]) \in R/S$, R/S 是对称的; 对任意 $[x], [y], [z] \in A/R$, 若 $([x], [y]) \in R/S$, $([y], [z]) \in R/S$, 则 $(x, y) \in S$, $(y, z) \in S$, 由 S 传递知 $(x, z) \in S$,

所以 $([x], [z]) \in R/S$, R/S 是传递的.

故 R/S 为 A/R 上的等价关系.

T8. 教材 P232 题 7.

证明 (1) “ \Rightarrow ”. 设 $R \circ S$ 是 A 上的等价关系.

(a) 对任意的 $\langle x, y \rangle \in R \circ S (x, y \in A)$, 因 $R \circ S$ 是对称的, 所以 $\langle y, x \rangle \in R \circ S$. 存在 $z \in A$, 使得 $(\langle y, z \rangle \in R) \wedge (\langle z, x \rangle \in S)$, 因 R 和 S 是对称的, 所以 $(\langle x, z \rangle \in S) \wedge (\langle z, y \rangle \in R)$. 由 “ \circ ” 知: $\langle x, y \rangle \in S \circ R$. 所以 $R \circ S \subseteq S \circ R$.

(b) 对任意的 $\langle x, y \rangle \in S \circ R (x, y \in A)$, 则存在 $z \in A$, 使得 $(\langle x, z \rangle \in S) \wedge (\langle z, y \rangle \in R)$, 因 R 和 S 是对称的, 所以 $(\langle y, z \rangle \in R) \wedge (\langle z, x \rangle \in S)$. 由 “ \circ ” 知: $\langle y, x \rangle \in R \circ S$. 因 $R \circ S$ 是对称的, 所以 $\langle x, y \rangle \in R \circ S$, 所以 $S \circ R \subseteq R \circ S$.

由 (a), (b) 知 $R \circ S = S \circ R$.

(2) “ \Leftarrow ”. 设 $R \circ S = S \circ R$.

(a) 对任意的 $x \in A$, 由 R, S 是自反的 $(\langle x, x \rangle \in R) \wedge (\langle x, x \rangle \in S)$, 所以 $\langle x, x \rangle \in R \circ S$. 即 $R \circ S$ 是自反的.

(b) 对任意的 $x, y \in A$,

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle \in R \circ S &\Rightarrow \langle x, y \rangle \in S \circ R \\ &\Rightarrow (\langle x, z \rangle \in S) \wedge (\langle z, y \rangle \in R) \\ &\Rightarrow (\langle y, z \rangle \in R) \wedge (\langle z, x \rangle \in S) \\ &\Rightarrow \langle y, x \rangle \in R \circ S, \end{aligned}$$

所以 $R \circ S$ 是对称的.

(c) 对任意的 $x, y, z \in A$,

$$\begin{aligned} (\langle x, y \rangle \in R \circ S) \wedge (\langle y, z \rangle \in R \circ S) &\Rightarrow (\langle x, y \rangle \in R \circ S) \wedge (\langle y, z \rangle \in S \circ R) \\ &\Rightarrow (\langle x, w \rangle \in R) \wedge (\langle w, y \rangle \in S) \wedge \\ &\quad (\langle y, t \rangle \in S) \wedge (\langle t, z \rangle \in R) \\ &\Rightarrow (\langle x, w \rangle \in R) \wedge (\langle w, t \rangle \in S) \wedge (\langle t, z \rangle \in R) \\ &\Rightarrow (\langle x, t \rangle \in R \circ S) \wedge (\langle t, z \rangle \in R) \\ &\Rightarrow (\langle t, x \rangle \in R \circ S) \wedge (\langle t, z \rangle \in R), \\ &\Rightarrow (\langle t, w \rangle \in R) \wedge (\langle w, x \rangle \in S) \wedge (\langle t, z \rangle \in R) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\Rightarrow (\langle z, t \rangle \in R) \wedge (\langle t, w \rangle \in R) \wedge (\langle w, x \rangle \in S) \\ &\Rightarrow (\langle z, w \rangle \in R) \wedge (\langle w, x \rangle \in S). \\ &\Rightarrow \langle z, x \rangle \in R \circ S \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R \circ S. \end{aligned}$$

所以 $R \circ S$ 是传递的.

由 (a), (b), (c) 知 $R \circ S$ 是等价关系.

T9. 教材 P233 题 18.

解 (1) X 的最大元为 x_1 ;

X 无最小元;

(2) X_1 无最大元;

X_1 的最小元为 x_4 ;

X_1 的上界为 x_1 ;

X_1 的下界为 x_4 ;

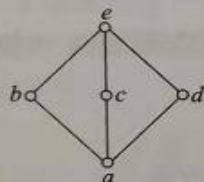


图 7.7.8

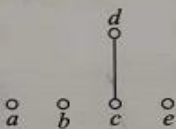


图 7.7.9

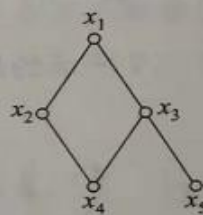


图 7.7.10

(3) X_2 的最大元为 x_3 ;

X_2 无最小元;

X_2 的上界为 x_1, x_3 ;

X_2 无下界;

(4) X_3 的最大元为 x_1 ;

X_3 无最小元;

X_3 的上界为 x_1 ;

X_3 的下界为 x_4 ;

极大元为 x_1 ;

极小元为 x_4, x_5 ;

极大元为 x_2, x_3 ;

极小元为 x_4 ;

最小上界为 x_1 ;

最大下界为 x_4 ;

极大元为 x_3 ;

极小元为 x_4, x_5 ;

最小上界为 x_3 ;

无最大下界;

极大元为 x_1 ;

极小元为 x_2, x_3 ;

最小上界为 x_1 ;

最大下界为 x_4 ;

T10. 教材 P233 题 24.

解 (1) 断言成立. 若 R 是 S 上的传递关系, 则对任意 $x, y, z \in S_1$, 若 $\langle x, y \rangle \in R_1$ 且 $\langle y, z \rangle \in R_1$, 则有:

$$(\langle x, y \rangle \in R \text{ 且 } \langle y, z \rangle \in R) \text{ 以及 } (\langle x, y \rangle \in S_1 \times S_1 \text{ 且 } \langle y, z \rangle \in S_1 \times S_1).$$

因为 $S_1 \subseteq S$, 所以 $x, y, z \in S$.

由 R 在 S 上是传递的且 $S_1 \times S_1$ 也是传递的知: $\langle x, z \rangle \in R$ 且 $\langle x, z \rangle \in S_1 \times S_1$, 所以, $\langle x, z \rangle \in R_1$, 即 R_1 是传递的.

(2) 断言成立. 若 R 是 S 上的偏序关系, 则 R 是自反、反对称和传递的. 则

① 对任意 $x \in S_1$, 因为 $S_1 \subseteq S$, 所以 $x \in S$. 又因为 R 和 $S_1 \times S_1$ 是自反的, 所以 $\langle x, x \rangle \in R$ 且 $\langle x, x \rangle \in S_1 \times S_1$, 则有 $\langle x, x \rangle \in R \cap S_1 \times S_1$, 即 R_1 是自反的.

② 对任意 $x, y \in S_1$, 若 $\langle x, y \rangle \in R_1$ 且 $\langle y, x \rangle \in R_1$, 则有

$$(\langle x, y \rangle \in R \text{ 且 } \langle y, x \rangle \in R) \text{ 以及 } (\langle x, y \rangle \in S_1 \times S_1 \text{ 且 } \langle y, x \rangle \in S_1 \times S_1).$$

因为 $S_1 \subseteq S$, 所以 $x, y \in S$. 由 R 在 S 上是对称的, 且 $S_1 \times S_1$ 也是对称的知 $x = y$, 所以 R_1 是反对称的.

③ 由题(1)知 R_1 是传递的.

由①, ②, ③知: R_1 是偏序关系.

(3) 断言成立. 若 R 是 S 上的拟序关系, 则 R 是反自反、反对称和传递的, 则

① 对任意 $x \in S_1$, 因为 $S_1 \subseteq S$, 所以 $x \in S$. 因为 R 是反自反的, 所以, $\langle x, x \rangle \notin R$, 则有 $\langle x, x \rangle \notin R \cap S_1 \times S_1$, 即 R_1 是反自反的.

② 由题(2)的②知 R_1 是反对称的.



③ 由题(1)知 R_1 是传递的.

由①, ②, ③知 R_1 是拟序关系.

(4) 断言成立. 若 R 是 S 上的全序关系, 即 R 是偏序关系且对任意 $x, y \in S$, 有 xRy 且 yRx .

① 由(2)知 R_1 是偏序关系.

② 对任意 $x, y \in S_1$, 则有 $(x, y \in S)$ 且 $(\langle x, y \rangle \in R$ 或 $\langle y, x \rangle \in R)$. 又 $(\langle x, y \rangle \in S_1 \times S_1$ 且 $\langle y, x \rangle \in S_1 \times S_1)$, 所以 $(\langle x, y \rangle \in R \cap S_1 \times S_1)$ 或 $(\langle y, x \rangle \in R \cap S_1 \times S_1)$, 即 $\langle x, y \rangle \in R_1$ 或 $\langle y, x \rangle \in R_1$.

由①, ②知 R_1 是全序关系.

(5) 断言成立. 若 R 是 S 上的良序关系, 即 S 的任意非空子集都有最小元.

① 因良序关系一定是全序关系, 由(4)知 R_1 是全序关系.

② 对 S_1 的任意非空子集 T , 显然 T 是 S 的非空子集, 因此 T 中存在关于关系 R 的最小元, 即存在 $a \in T$, 使得对任意 $x \in T$, 都有 $\langle a, x \rangle \in R$.

又 $\langle a, x \rangle \in S_1 \times S_1$, 所以 $\langle a, x \rangle \in R \cap S_1 \times S_1$, 即 $\langle a, x \rangle \in R_1$, 故 a 是 T 中关于关系 R_1 的最小元.

由①, ②知 R_1 是良序关系.

T11. 设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, 有关系 $f: A \rightarrow P(A)$, 对 $\forall a \in A$, $f(a) = \{x | x \in A, x \leq a\}$, 证明 f 是单射, 且当 $a \leq b$ 时, 有 $f(a) \subseteq f(b)$.

首先, 对 $\forall a \in A$, 有 $a \leq a$, 所以 $a \in f(a)$, 且 $f(a)$ 唯一, 故 f 是 A 到 $P(A)$ 的函数.

其次, 当 $a \neq b$ 时, 若 $a \leq b$, 则 $a \in f(a)$, $b \in f(b)$, 但 $b \notin f(a)$, $b \in f(b)$, 因此, $f(a) \neq f(b)$; 若 a, b 不可比, 则 a, b 分别在 $f(a), f(b)$ 中, 因此, $f(a) \neq f(b)$. 故, 当 $a \neq b$ 时, $f(a) \neq f(b)$, 即 f 是单射.

当 $a \leq b$ 时, 对于任意 $x \in f(a)$, $x \leq a$, 于是, $x \leq b$, 从而 $x \in f(b)$, 故 $f(a) \subseteq f(b)$.

T12. 设 $f: A \rightarrow B$, 定义关系 $g: B \rightarrow P(A)$, 对于 $b \in B$, $g(b) = \{x \in A | f(x) = b\}$, 请证明: 如果 f 是从 A 到 B 的满射, 则 g 是单射, 并判断其逆命题是否成立.

f 是从 A 到 B 的满射, 则, 任意 $b \in B$, b 在 f 下有原像, 于是 $g(b)$ 非空且唯一, 故 g 是 B 到 $P(A)$ 的函数. 又, 当 $b_1 \neq b_2 \in B$, $g(b_1), g(b_2)$ 均非空, 于是, $g(b_1) \neq g(b_2)$, 否则, 存在元素 $a \in g(b_1) = g(b_2)$, 使得 $f(a) = b_1$, $f(a) = b_2$, 出现 f 下的一对多情况, 与 f 为函数矛盾, 故 g 是单射函数.

其逆否命题不成立, 因为如果仅有一个元素 $b \in B$, $g(b) = \emptyset$ (即 b 无 f 下的原像), 此时, g 也可以构成单射函数, 但 f 不是满射函数.

T13. 设 R 是集合 A 上的等价关系, 在什么条件下从 A 到 A/R 存在双射?

当 R 是 A 上的恒等关系时.

T14. 证明: 存在一个从集合 X 到它的幂集 $P(X)$ 的单射.

令 $f: X \rightarrow P(X)$, 任意 $x \in X$, $f(x) = \{x\}$. 显然 f 是函数, 且对任意 $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 因此 f 是单射函数. 得证.

T15. 设 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{p, q\}$, 定义函数 $f: A \rightarrow B$, 问可以定义多少个函数 f , 其中有多少满射.

8 个函数, 其中 6 个满射.

T16. 设 A, B 为非空集合, $|A| = n$, $|B| = m$, 试计算

(1) 集合 A 到集合 B 的不同的单射函数有多少种?

(2) 集合 A 到集合 B 的不同的满射函数有多少种?

(3) 集合 A 到集合 B 的不同的双射函数有多少种?

(1) $n \leq m$, 时存在单射函数数量: $m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)$

(2) $m \leq n$ 时, 存在满射函数: 这一问题等价于先“把 n 个有区别的球放入 m 个相同的盒子中, 要求无一空盒, 记为: $S(m, n)$ ” (分堆问题), 再对这 n 个盒子进行不同的排列 (假定盒子有区别), 其总数为所求



得满射数。即所求的不同的满射有 $S(m,n) \cdot n!$ 个。其中, $S(m,n)$ 称为 Stirling 数, 满足下面递推公式 (详见组合数学教材) :

$$S(m,0)=0; S(m,1)=1; S(m,n)=n S(m-1,n)+S(m-1,n-1).$$

(3) $m=n$ 时, 存在双射函数数量: $n!$

T17. 设有函数 $f: A \rightarrow A, g: A \rightarrow A$ 和 $h: A \rightarrow A$, 使得复合函数 $h \circ f = h \circ g$, 证明: 若 h 是单射, 则 $f=g$. (提示: 用反证法)

(反证法) 假设 $f \neq g$, 则必存在元素 $a \in A$, 使得 $f(a) \neq g(a)$, 因为 h 是内射, 所以 $h(f(a)) \neq h(g(a))$, 即 $h \circ f(a) \neq h \circ g(a)$. 这与题设 $h \circ f = h \circ g$ 相矛盾. 故 $f=g$.

T18(选做). An interesting consequence of equivalence relations and partitions is that any function f can be factored (分解) into a composition of two functions, one an injection (单射) and one a surjection (满射). For a function $f: A \rightarrow B$, let P be the partition of A by the kernel relation R of f , that is, aRb iff $f(a)=f(b)$ for a,b in A . Then define $s: A \rightarrow P$ by $s(a) = [a]_R$ and define $i: P \rightarrow B$ by $i([a]_R) = f(a)$. Please prove that s is a surjection, i is an injection, and $f = i \circ s$.

(1) f 是函数, A 中任意元素 a 在函数 f 下都有像, 易证 R 是等价关系, P 即 A/R , 每一个划分块 (等价类) 其实就是 $f(B)$ 中元素的原像集合. A 中任意元素 a 在划分块 $[a]_R \in P$ 中, 且 P 中每一个元素 $[a]_R$ 在 A 中有 s 下的原像 $a \in A$. 所以, s 是满射函数.

(2) P 中每一个元素 $[a]_R$ 都有代表元 a , a 在 f 下有像 $f(a)$, 所以 i 是函数; 且 i 是单射, 因为若 $i([a]) = i([b])$, 有 $f(a) = f(b)$, 从而 aRb , 则可得 $[a] = [b]$. (即: $[a] \neq [b]$ 时, $i([a]) \neq i([b])$).

(3) 至于 $f = i \circ s$, 注意到: $f, i \circ s$ 都是 A 到 B 的函数, 且 $(i \circ s)(a) = i(s(a)) = i([a]) = f(a)$.

第3部分 综合应用

1 现有一个软件开发需求: 基于城市之间的交通可达数据提供一个交通信息查询服务, 交通方式可以通过火车、飞机、汽车或轮船的多种方式的结合或仅其中一种方式. 试用集合、关系语言来描述该系统基础数据, 以及一些基本服务: 如某两个城市间是否有飞机或火车直达, 或通过换乘方式可达.

提示: 用 C 表示所有城市的集合, R 表示城市间的可达性, 对于任意 2 个城市 $C_1, C_2 \in C$, 如果有交通可达, 则 $\langle C_1, C_2 \rangle \in R$. 容易证明, R 是等价关系, 商集 R/C 的等价类表示该等价类集合中的城市间是相互可达的; 求解 R 的传递闭包 $t(R)$, 城市间是否换乘可达可以基于 $t(R)$ 查询; 对于各种交通工具的班次可以用元组来描述, 从而构建关系数据库.

2 在项目安排与工作调度中 (如工厂流水线作业、岸桥卸船作业等、软件开发等), 某些工作任务与其它某些工作任务存在优先级关系, 设计一个好的项目任务的优化调度安排是非常重要的. 试用集合与关系语言描述这类调度问题及其求解方法.

提示: 用 T 表示任务集合, 定义 T 上的偏序关系 $R: \{(x,y) | x \leq y \text{ 当且仅当 } x \text{ 的优先级比 } y \text{ 高}, x, y \in T\}$, 进而可以利用逐步求解偏序集中极小元的算法设计任务的完成顺序.