第三章　习题

§3.1　二维随机变量

一、填空题

1. 设（X,Y）的分布函数为 $F(x,y)=\begin{cases}1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y}, & x\ge 0,\ y\ge 0\\ 0, & 其它\end{cases}$，则

（X,Y）的联合概率密度 $f(x,y)=$ $\underline{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\begin{cases}3^{-x-y}\ln^2 3, & x\ge 0,\ y\ge 0\\ 0, & 其它\end{cases}}$.

2 设随机变量(X,Y)的分布函数为 $F(x,y)=A(B+arctg\dfrac{x}{2})(C+arctg\dfrac{y}{3})$，则 $A=$ $\underline{1/\pi^2}$，$B=$ $\underline{\pi/2}$，$C=$ $\underline{\pi/2}$，$(A\ne 0)$，

3. 用(X,Y)的联合分布函数$F(x,y)$表示概率$P(a<X\le b,Y\le c)=$ $\underline{F(b,c)-F(a,c)}$.

4. 设（X,Y）联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-x-y}, & x>0,\ y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$，则系数 $A=$ $\underline{\ 1\ }$.

二、单项选择题

1. 设$F_1(x)$与$F_2(x)$分别为随机变量X_1和X_2的分布函数，为使$F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$是某一随机变量X的分布函数，在下列给定的各组数值中应取　（A）

$(A)\ a=\dfrac{3}{5},\ b=-\dfrac{2}{5}$; (B) $a=\dfrac{2}{3},\ b=\dfrac{2}{3}$; (C) $a=-\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{3}{2}$; (D) $a=\dfrac{1}{2},\ b=-\dfrac{3}{2}$;

2. 设随机变量$X_i\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$，$i=(1,2)$,满足$P(X_1X_2=0)=1$，则$P(X_1=X_2)=$(A)

(A)　0;　　(B)　1/4;　　(C)　1/2;　　(D)　1.

三、计算下列各题

1. 已知随机变量X和Y的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$，求$X$和$Y$的联合分布函数$F(x,y)$.

解　因为 $F(X,Y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy$

(1)　$x<0$或$y<0$时，由$f(x,y)=0$，得　$F(x,y)=0$

(2) $0\le x\le 1,\ 0\le y<1$时，　$F(x,y)=\int_0^x\int_0^y 4xydxdy=x^2y^2$

(3) $x>1,\ 0\le y\le 1$时，　$F(x,y)=\int_0^1\int_0^y 4xydxdy=y^2$

(4) $0 \le x \le 1,\ y > 1$时， $F(x,y) = \int_0^x \int_0^1 4xydxdy = x^2$

(5) $x > 1,\ y > 1$时， $F(x,y) = 1$

所以 $F(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0或y < 0 \\ x^2y^2, & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y < 1 \\ y^2, & x > 1,\ 0 \le y \le 1 \\ x^2, & 0 \le x \le 1,\quad y > 1 \\ 1, & x > 1,\quad y > 1 \end{cases}$

2. 一个箱子装有 12 只开关，其中 2 只是次品，现随机地无放回抽取两次，每次取一只，以 X 和 Y 分别表示第一次和第二次取出的次品数，试写出 X 和 Y 的概率分布律.

解. $P(X=0,Y=0) = \dfrac{C_{10}^1 C_9^1}{C_{12}^1 C_{11}^1} = \dfrac{45}{66}$， $P(X=1,Y=0) = \dfrac{C_2^1 C_{10}^1}{C_{12}^1 C_{11}^1} = \dfrac{10}{66}$,.

$$P(X=0,Y=1) = \frac{C_{10}^1 C_2^1}{C_{12}^1 C_{11}^1} = \frac{10}{66},\quad P(X=1,Y=1) = \frac{C_2^1 C_1^1}{C_{12}^1 C_{11}^1} = \frac{1}{66}$$

3. 给定非负函数 $g(x)$,它满足$\int_0^{+\infty} g(x)dx = 1$, 又设$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2g(\sqrt{x^2+y^2})}{\pi\sqrt{x^2+y^2}}, 0 < x, y < \infty \\ 0, \qquad\qquad 其它 \end{cases}$,

问 $f(x,y)$ 是否是随机变量 X 和 Y 的联合概率密度?说明理由.

解 $f(x,y)$ 是 X 和 Y 的联合概率密度只要满足 $f(x,y) \geqslant 0$ 与 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)vdxdy = 1$

由于$0 < x, y < \infty$, $\sqrt{x^2+y^2} > 0$, $g(x)$非负, 所以$g(\sqrt{x^2+y^2}) \ge 0$, 故$f(x,y) \ge 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2g(\sqrt{x^2+y^2})}{\pi\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{+\infty} \frac{g(r)}{r} rdr = 1$$

所以 $f(x,y)$ 是随机变量 X 和 Y 的联合概率密度.

4. 设随机变量 (X,Y) 的联合密度为 $f(x,y) = \begin{cases} a(1-\sqrt{x^2+y^2}), & x^2+y^2 < 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$,

求 (1) 系数 a， (2) 概率 $P(X^2+Y^2 \le \dfrac{1}{4})$.

解 (1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 a(1-r)rdr = \dfrac{\pi a}{3} = 1 \Rightarrow a = \dfrac{3}{\pi}$.

(2) $P(X^2+Y^2 \le \dfrac{1}{4}) = \iint\limits_{X^2+Y^2 \le \frac{1}{4}} f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{3}{\pi}(1-r)rdr = \dfrac{1}{2}$.

§3.2　边缘分布

§3.3　相互独立的随机变量

一、填空题

1. 设平面区域D由曲线 $y=\frac{1}{x}$ 及直线 $y=0$，$x=1$，$x=e^2$ 所围成.（X，Y）在D上均匀分布，则（X，Y）关于 X 的边缘密度在 $x=2$ 处值为 <u>0.25</u>.

2. 若（X，Y）的分布律为

Y \ X	1	2	3
1	1/6	1/9	1/18
2	1/3	α	β

α,β 应满足条件是 <u>$\alpha+\beta=\frac{1}{3}$</u>.

若 X 与 Y 相互独立则 $\alpha=$ <u>2/9</u>，$\beta=$ <u>1/9</u>.

3. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，都服从 $N(\mu,\sigma^2)$，则（$X_1,X_2,\cdots,X_n$）的概率密度函数为 <u>$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sigma^{-n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$，　$-\infty<x_i<+\infty,\ i=1,2,\cdots,n$</u>.

二、单项选择题

设两随机变量 X 和 Y 独立同分布 $P(X=-1)=P(Y=-1)=1/2,\ P(X=1)=P(Y=1)=1/2$，则下列各式成立的是（A）

(A) $P(X=Y)=1/2$；　(B) $P(X=Y)=1$；　(C) $P(X+Y=0)=1/4$；　(D) $P(XY=1)=1/4$.

三、计算下列各题

1. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\dfrac{6}{\pi^2(4+x^2)(9+y^2)}$，$-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$（1）求关于 X 和 Y 的边缘概率密度.（2）问 X 与 Y 是否独立？

解 (1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{6}{\pi^2(4+x^2)(9+y^2)}dy=\dfrac{2}{\pi(4+x^2)}$，$-\infty<x<+\infty$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{6}{\pi^2(4+x^2)(9+y^2)}dx=\dfrac{3}{\pi(9+y^2)}$，$-\infty<y<+\infty$

(2) $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以 X,Y 独立

2. 雷达的圆形屏幕的半径为 R，设目标出现点 (X,Y) 在屏幕上均匀分布，（1）求 X,Y 的边缘概率密度，（2）问 X,Y 是否独立？

解　$f(x,y)=\begin{cases}1/(\pi R^2), & x^2+y^2\le R^2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}}\frac{1}{\pi R^2}dy=\frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, & |x|\le R\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

同理 $f_Y(y)==\begin{cases}\frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2}, & |y|\le R\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

(2) $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$, 所以X 和Y不独立.

3. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-y}, & 0<x<y\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，求（1）常数$A$（2）随机变量$X,Y$的边缘密度，（3）概率$P(X+Y\le 1)$..

解 （1）$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=A\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=A$, 得 $A=1$.

（2）$x>0$, $f_X(x)=\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-x}$, $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ ，同理 $f_Y(y)=\begin{cases}ye^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

(3) $P(X+Y\le 1)=\iint\limits_{x+y\le 1} f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}e^{-y}dy=1+e^{-1}-2e^{-\frac{1}{2}}$.

4. 知随机变量X,Y的概率分布：$X\sim\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1/4 & 1/2 & 1/4\end{bmatrix}$, $Y\sim\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix}$.

且$P(X_1X_2=0)=1$.（1）求X,Y的联合分布，（2）问X,Y是否独立？为什么？

解 因为 $P(X_1X_2=0)=1$, 所以,有 $P(X_1=-1,X_2=1)=P(X_1=1,X_2=1)=0$,

（1）设X,Y的联合分布为

Y \ X	-1	0	1	P. j
0	P_{11}	P_{21}	P_{31}	1/2
1	0	P_{22}	0	1/2
$P_{i.}$	1/4	1/2	1/4	1

则 $p_{11}=0.25, p_{31}=0.25, p_{22}=0.5$, 由于$p_{21}+p_{22}=0.5$, 故 $p_{21}=0.5-0.5=0$

因此,(X,Y)的联合分布律为

Y \ X	-1	0	1
0	1/4	0	1/4
1	0	1/2	0

(2) 由于$p_{21}=0\ne 0.5\times 0.5$, 故 X_1与X_2不相互独立.

§3.3　多维随机变量函数的分布

一、填空题

1. 设 X 与 Y 独立同分布，且 X 的分布律为 $P(X=0)=0.5, P(X=1)=0.5$，则随机变量 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布律为 P(Z=0)=0.25,　P(Z=1)=0.75 .

2. 设 X 与 Y 两随机变量，且 $P(X\ge 0,\ Y\ge 0)=\frac{3}{7}$，$P(X\ge 0)=\frac{4}{7}$，$P（Y\ge 0)=\frac{4}{7}$，则 $P(\max（X，Y）\ge 0)=$ 5/7 .

3. 若 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，相互独立，$X-Y$ 服从分布为 $N(\mu_1-\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

二、单项选择题

1. 设随机变量 X 服从指数分布，则随机变量 $Y=\min\{X,2\}$ 的分布函数　（D）

（A）　是连续函数；（B）至少两个间断点；（C）是阶梯函数；（D）恰有一个间断点。

2. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布,其概率分布为: $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$,则下列式子正确的是（C）

(A)　$X=Y$;　　(B) P ($X=Y$)=0;　　(C) P ($X=Y$)=0.5;　　(D) P ($X=Y$)=1.

三、计算下列各题

1. 设两个独立随机变量 X 与 Y 的分布律为 $P(X=1)=0.3, P(X=3)=0.7, P(Y=2)=0.6$, $P(X=4)=0.4$, 求（1）$Z=X+Y$ 的分布律，（2）$W=X-Y$ 的分布律.

解　由独立性可得

(X,Y)	（1，2）	（1，4）	（3，2）	（3，4）
$P(X=x,Y=y)$	0.18	0.12	0.42	0.28
$X+Y$	3	5	5	7
$X-Y$	–1	–3	1	–1

所以　$Z=X+Y$ 的分布律为 $\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 0.18 & 0.54 & 0.28\end{pmatrix}$, $W=X-Y$ 的分布律为 $\begin{pmatrix}-3 & -1 & 1\\ 0.12 & 0.46 & 0.42\end{pmatrix}$

2. 设 X,Y 独立，$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, Y 在$[-\pi，\pi]$服从均匀分布，$Z=X+Y$，求Z 的概率密度.(用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示).

解　由已知 X 的密度函数为 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<+\infty$

Y 在[-π，π]服从均匀分布，则 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & -\pi\le y\le\pi\\ 0, & 其它\end{cases}$，X 和 Y 独立，由公式(1)

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)\ f_Y(y)\ dy=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(z-y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{2\pi}dy,\ 令t=\frac{z-y-\mu}{\sigma}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}}^{\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\Phi\ (\frac{z+\pi-\mu}{\sigma})-\Phi\ (\frac{z-\pi-\mu}{\sigma})]$$

3. 已知随机变量(X,Y)服从二维正态分布，其联合密度为$f\ (x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$，$-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty$，求随机变量$Z=\frac{1}{3}(X^2+Y^2)$的概率密度函数.

解 $F_Z(z)=P\left(\frac{1}{3}(X^2+Y^2)\le z\right)=\iint\limits_{\frac{1}{3}(X^2+Y^2)\le z} f(x,y)dxdy$

当 $z\le 0$时，$F_Z(z)=0$，当 $z>0$时，$F_Z(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3z}}e^{-\frac{1}{2}r^2}rdr=1-e^{-\frac{3}{2}z}$，

所以 $f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}z}, & z>0\end{cases}$

4. 设随机变量(X,Y)的联合概率密度 $f\ (x,\ y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1,\ 0<y<x\\ 0, & 其它\end{cases}$，

求$Z=X-Y$的概率密度.

解 $F_Z(z)=P(X-Y\le z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \int_0^z dx\int_0^x 3xdy+\int_z^1 dx\int_{x-z}^x 3xdy=\frac{3}{2}z-\frac{1}{2}z^3, & 0\le z\le 1\\ 1, & z\ge 1\end{cases}$

所以，Z的密度函数为 $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{3}{2}-\frac{3}{2}z^2, & 0<z<1\\ 0, & 其它\end{cases}$.

5. 假设电路装有三个同种电器元件，其状况相互独立，且无故障工作时间都服从参数为λ的指数分布，当三个元件都无故障时，电路正常工作，否则整个电路不正常工作.试求电路正常工作时间T的概率分布.

解 以X_i表示第i个元件无故障工作时间，则X_1,X_2,X_3独立且分布函数为

$$F_{X_i}(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases},\quad i=1,2,3,\quad T=\min\{X_1,X_2,X_3\}.$$

$$F_T(t)=1-\prod_{i=1}^{3}(1-F_{X_i}(t))=\begin{cases}1-e^{-3\lambda t}, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}.$$ 所以 T 服从参数为 3λ 的指数分布