# 书面作业 第9次 参考解答或提示

## 第1部分 基础

T1 构造互不同构的所有五结点的树.

3棵

T2 一棵树有两个结点度数为 2，一个结点度数为 3，三个结点度数为 4. 问它有几个度数为 1 的结点?

9个

T3 设图 G=（n,m），证明：如果 G 满足如下三个属性中的两个，则 G 就是一棵树，且可以推导出另一个属性：1) G 连通； 2) G 中不存在环； 3) m=n-1.

1) 如果满足属性1)和2)，即满足树定义，因此G是一棵树；下面再用归纳法证明G的结点数n与其边数m之间的关系m=n-1成立.

对n进行归纳。如果n=1，则G是一棵平凡树，从而m=0，故m=n-1成立.

假设n=k时，命题成立。

则n=k+1时,设G有m条边，需证m=n-1.

首先证明G存在叶子结点。假设G不存在叶子结点，则G所有结点的度数至少为2，于是可以从任意结点u出发，达到与u相邻的结点v，由于v的度数也是至少为2，故可继续到达v的相邻结点w，依次类推，由于G结点有限，最终可以到达一个以前经过的结点，于是得到一条闭通路，从而G中存在一条环，与题设矛盾.故G中存在叶子结点.

现在，不妨设v为叶子结点，则G′=G-v与G相差一条边与一个结点，即G′的结点数为k，边数为m-1，于是由归纳假设G′有m-1=k-1，即m=(k+1)-1，即当n=k+1时，m=n-1成立.

综上，命题得证.

2) 如果满足属性1)和3)，需证满足2)，如果得证，G就满足树的定义，即G是一棵树.下面结点数n采用归纳法进行证明.

n=1,2时，显然G无环.

假设n=k时结论成立.

考察n=k+1时，由于G是连通的，所以T的每一个结点度数≥1.若G中所有结点之度数均大于等于2，则 $\sum_{v\in V(G)} \deg(v)$ ≥2n,即2m≥2n，即m≥n，与已知条件m=n-1矛盾.故至少存在一个结点u，使deg(u)=1.

删去u及其关联边，得到图G′,该图连通且边数为k. 由归纳假设，G′无环，故将u及其关联边加入G′得到G，G亦无环，满足属性2).

3) 如果满足属性2)和3)，需证满足1)，如果得证，G就满足树的定义，即G是一棵树.

若G满足属性2)和3)，则G是森林，设其含有k棵树: $G_1$，$G_2$，…，$G_k$，相应边数、结点数分别为 $m_i,n_i$（1≤i≤k）. 于是有m= $\sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k}(n_i-1) = \sum_{i=1}^{k} n_i$ -w=n-w，而题设m=n-1，于是得k=1，即G连通，满足属性1).

T4 试证明或否定：连通图 G 的任一边是 G 的某一棵生成树的枝；连通图 G 的任何一条边都是 G 的某一棵生成树的弦.

注意树的相关结论. 设T是G的生成树，G的任一边e如果不是T的枝，则将该边加入T，于是构成了环C，再删除C上另外一条边得包含e的生成树T′，因此，任何边都可以是某生成树的枝；若G中存在割

边，则结论不成立，因为割边必须是任何G的生成树的枝.

T5 图 G(n,m)含有 k 个分图，试利用树的性质证明：G 中至少包含 m-n+k 条不同的回路。提示：注意到回路的构成、树的相关数量关系.

注意到，一棵树 T 的任二结点间添加一条边 e 则得到一条包含边 e 的回路 C，如果添加不同于 e 的边于 T 中，则得到不同于 C 的回路，因此，一个连通图中回路的数目是其边数与其生成树边数之差。图 G 含有 k 个分图，每个分图的均为一棵树，根据树的基本性质，容易求得所有分图的生成树的边数之和为 n-k, 从而，图 G 中回路数即每个分图中回路数之和为: m-(n-k)=m-n+k.

T6 设 $T_1$，$T_2$ 是连通图 G 的生成树，边 $e_1$ 在 $T_1$ 中但不在 $T_2$ 中，证明：存在边 $e_2$ 在 $T_2$ 中但不在 $T_1$ 中，使得 $T_2\cup\{e_1\}-\{e_2\}$ 与 $T_1\cup\{e_2\}-\{e_1\}$ 都是 G 的生成树.

提示：此题还需要证明 $T_1\cup\{e_2\}-\{e_1\}$ 是生成树，难度有所增加. 对 $e_2$ 需要限定.

令删除 $e_1$ 后 $T_1$ 分为 2 棵树 $T_{11}$，$T_{12}$，定义集合 $E_{e1}=\{(u,v)|(u,v)\in G$，且 $u\in T_{11}, v\in T_{12})$，

注意到如下结论：$E_{e1}$ 中边显然都不在 $T_1$ 中，且 G 中包含 $e_1$ 的环必然包含一条 $E_{e1}$ 中的边，$E_{e1}$ 中的任何边加入 $T_1$ 中均将构成包含 $e_1$ 的环.

于是，将边 $e_1$ 加入 $T_2$ 时将构成环 $C_1$，包含 $e_1$ 的环 $C_1$ 上一定存在一条边 $e_2\in E_{e1}$, 且 $e_2\notin T_1$，$e_2\in T_2$. 从而，删除 $C_1$ 上边 $e_2$ 可得生成树 T′, 即：$T_2\cup\{e_1\}-\{e_2\}$ 是 G 的生成树.

根据集合 $E_{e1}$ 的定义，将 $e_2$ 加入 $T_1$ 时将构成包含 $e_1$ 的环 $C_2$，从而，删除 $C_2$ 上边 $e_1$ 可得生成树 T′′, 即：$T_1\cup\{e_2\}-\{e_1\}$ 是 G 的生成树.

综上，结论成立.

T7 证明：完全二分树 T 的结点数为 n，则 n 为奇数且 T 的叶子结点数 t=(n+1)/2.

设 T 分支结点数为 i，则按结点分类方法，有 mi+1=i+t=n，m=2 时，有 i=t-1，于是 i+t=2t-1=n, t=(n+1)/2. 显然 n=2t-1 为奇数.

显然本题可以用数学归纳法来证明.

## 第2部分 理论

## 第3部分 综合应用

T1 请用有序树表示代数表达式：$\dfrac{(3x-5y^2)^5}{a(b^3-4c)}$，其中，加、减、乘、除、乘方运算分别用+、-、×、÷、↑表示，给出其逆波兰表达式，并进一步思考如何进行如何基于栈结构计算该表达式.

请参考教材 10.3.13 的表示方法.

后缀遍历该有序树即可得逆波兰式：3x*5y2↑*-5↑ab3↑4c*-*÷.

需要用到 2 个栈结构来实现计算，具体请查阅有关资料.

T2 决策树是一种树形结构的机器学习方法，在决策树的树形结构里，每个内部节点表示由一种特征属性引发的判断，每个节点下面的分支结点表示某个判断结果的输出，最后的叶子结点表示一种分类结果。如果某决策树算法求解得到了一棵完全三元决策树且是平衡的，分类结果有 105 个，试问：最好、最坏情况下，利用决策树进行分类分别需要执行多少次判断?

请建原题 106 改为 105（就本题而言，只能是奇数，为什么？）

每一类结果均在叶子结点上，3 元树是完全且平衡的，因此，叶子结点在最低 2 层，h=$\left\lceil \log_m^t \right\rceil$=5.

因此，最好、最坏需要的判断即是为 h-1 与 h，即分别需要 4 与 5 次判断.