书面作业 第7次

第1部分 基础

无.

第2部分 理论

T1. 设 R 为 A 上二元关系，如果对每一 $a \in A$ 均存在 $b \in A$ 使 aRb，则称 R 为连续的.

证明：当 R 连续、对称、传递时，R 为等价关系.

T2. 设 R 是集合 A 上的一个自反关系，证明：R 是等价关系当且仅当若 $(a,b) \in R \wedge (a,c) \in R$ 时，则 $(b,c) \in R$.

T3. 假设给定了正整数的序偶集合 A，在 A 上定义二元关系 R 如下：$((x,y),(u,v)) \in R$，当且仅当 $xv=yu$，证明：R 是一个等价关系.

T4. 令 $C = \{a+bi \mid a,b$ 为实数$, a \neq 0\}$，定义 C 上关系 R：$(a+bi)R(c+di)$当且仅当 $ac>0$， 证明 R 为等价关系.

T5. 设 R 为 A 上二元关系，且 dom(R)=A. 若 $R \circ R^{-1} \circ R = R$，证明 $R \circ R^{-1}$ 和 $R^{-1} \circ R$ 都是 A 上的等价关系.

T6. 设$\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$是集合 A 的一个划分，我们定义 A 上的一个二元关系 R，使$(a,b) \in R$ 当且仅当 a 与 b 在这个划分的同一块中. 证明 R 是等价关系.

T7. 设 R，S 为 A 上的两个等价关系，且 $R \subseteq S$, 定义 A/R 上的关系 R/S：$([x],[y]) \in R/S$ 当且仅当$(x,y) \in S$.

证明：R/S 为 A/R 上的等价关系.

T8. 教材 P232 题 7.

T9. 教材 P233 题 18.

T10. 教材 P233 题 24.

T11. 设$<A, \leq>$是偏序集，有关系 f：$A \to P(A)$, 对$\forall a \in A$，$f(a)=\{x \mid x \in A, x \leq a\}$，证明 f 是单射，且当 $a \leq b$ 时，有 $f(a) \subseteq f(b)$.

T12. 设 f：$A \to B$，定义关系 g：$B \to P(A)$，对于 $b \in B$，$g(b)=\{x \in A \mid f(x)=b\}$，请证明：如果 f 是从 A 到 B 的满射，则 g 是单射，并判断其逆命题是否成立。

T13. 设 R 是集合 A 上的等价关系，在什么条件下从 A 到 A/R 存在双射?

T14. 证明：存在一个从集合 X 到它的幂集 P(X)的单射.

T15. 设 $A=\{a, b, c\}$，$B=\{p, q\}$，定义函数 f：$A \to B$，问可以定义多少个函数 f，其中有多少满射.

T16. 设 A，B 为非空集合，$|A|=n$，$|B|=m$,试计算

（1）集合 A 到集合 B 的不同的单射函数有多少种?

（2）集合 A 到集合 B 的不同的满射函数有多少种?

（3）集合 A 到集合 B 的不同的双射函数有多少种?

T17. 设有函数 f：A→A,g：A→A 和 h：A→A,使得复合函数 hof=hog，证明：若 h 是单射，则 f=g.（提示：用反证法）

T18(选做). An interesting consequence of equivalence relations and partitions is that any function f can be factored（分解）into a composition of two functions, one an injection（单射） and one a surjection（满射）. For a function f : A → B, let P be the partition of A by the kernel relation R of f，that is, aRb iff f(a)=f(b) for a,b in A. Then define s : A → P by s(a) = [a]R and define i : P → B by i([a]R) = f(a). Please prove that s is a surjection, i is an injection, and f = i O s.

Hints：显然 R 是等价关系，每一个划分块（等价类）其实就是 f(B)中元素的原像集合.

第3部分 综合应用

1 现有一个软件开发需求：基于城市之间的交通可达数据提供一个交通信息查询服务，交通方式可以是通过火车、飞机、汽车或轮船的多种方式的结合或仅其中一种方式. 试用集合、关系语言来描述该系统基础数据，以及一些基本服务：如某两个城市间是否有飞机或火车直达，或通过换乘方式可达.

2 在项目安排与工作调度中（如工厂流水线作业、岸桥卸船作业等、软件开发等），某些工作任务与其它某些工作任务存在优先级关系，设计一个好的项目任务的优化调度安排是非常重要的. 试用集合与关系语言描述这类调度问题及其求解方法.