书面作业 第12次

第1部分 基础

第2部分 理论

T1 f是群G到群H的同态映射，e_G、e_H为G、H的单位元，请证明：

（1） $f(e_G) = e_H$.

（2） 任意$x \in G$, $f(x^{-1}) =f(x)^{-1}$.

（3）任意$x \in G$, $f(x^n) = f(x)^n (n \in Z)$.

T2 针对下列具体的群之间同态关系，写出上一题中3个性质的具体形式（（1）（2）小题），或利用相关性质证明结论（第（3）小题）：

（1）f为群<R; +>到群<R_+;*>的同态映射：$f(x)=a^x$，a>0，+，*为一般的加法、乘法.

（2）f为群<R_+;*>到群<R; +>的同态映射：$f(x)=\log_a x$，a>0，+，*为一般的加法、乘法.

（3）证明：f为群G到群H的同态映射，$x \in G$，若$|x|=n$, 则 $|f(x)|$ 整除n.

T3 证明单位半群G的所有可逆元素的集合H，对于G的运算*，能够构成群.

提示：需要证明结合律成立：即a，b∈ H，则$(a*b)^{-1}\in H$.

T4 设<G;o>是半群，若∀ a,b∈ G，方程a*x=b，y*a=b有解，则称<G;*>是可解的，

（1）证明：可解半群G是群；

（2）G是有限半群，G为群当且仅当G中消去律成立.

提示：（1）需要首先利用方程有解以及单位元的性质，将"右单位元"e_1表示出来，再利用另外一个方程进行运算判断此e_1满足左单位元的要求，类似地，证明右单位元e_2也存在，从而二者相等即为单位元；再进一步，证明元素可逆.（2）对于充分性，可利用消去律证明半群G也是可解半群.

T5 设<H；*>是群<G；*>的子群，令$A=\{x|x\in G，x*H*x^{-1}=H\}$，证明：<A；*>是<G；*>的一个子群.

T6 设<H；*>和<K；*>均是群<G；*>的子群，设HK={h*k | h∈H，k∈K}，证明<HK；·>是<G；·>的子群的充要条件是HK=KH.

T7 设f、g是从群<A;*>到群<B;o>的同态，C={x|x∈A且f(x)=g(x)}, 请证明：<C;*>是<A;*>的子群.

提示：按照判定定理来证明，并注意利用同态映射以及T1中的有关结论.

T8 证明：（1）有限群G中的任何元素a的阶可整除|G|.

（2）质数阶的群G没有非平凡子群(G除外)，且为循环群.

（3）设G和H分别是m阶与n阶群，若G到H存在单同态，则m|n.

T9 证明右陪集的如下性质：

1) a∈Ha； 2) b∈Ha⇔Ha=Hb； 3) a∈H⇔Ha=H； 4)$Ha=Hb\Leftrightarrow ab^{-1}\in H$.

T10 1) 设G为模12加群，求<3>在G中所有的左陪集.

2) X={x|x∈R,x≠0,1}，在X上定义如下6个函数，则$G=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6\}$关于函数的复合运算构成群，求子群$\{f_1,f_2\}$的所有的陪集.

$f_1(x)=x$，$f_2(x)=1/x$，$f_3(x)=1-x$， $f_4(x)=1/(1-x)$， $f_5(x)=(x-1)/x$， $f_6(x)=x/(x-1)$.

第3部分 综合应用

T1 某通讯编码由4个数据位x1、x2、x3、x4和3位校验位x5、x7、x8构成，它们的关系如下：

x5=x1⊕x2⊕x3

$x6=x1\oplus x2\oplus x4$

$x7=x1\oplus x3\oplus x4$

其中，$\oplus$为异或运算.若S为满足上述关系的码字的集合，且当$x,y\in S$时有$x\oplus y=x1\oplus y1,\ldots,x7\oplus y7$.

（1）$<S;\oplus>$是群，试证明之；

（2）**(选做)** 查阅资料分析、证明上述纠错码（群码）的纠错能力.