有关利用幂函数求解无穷级数和展开函数的微专题整理。

1 常用展开

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$
$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$
$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$
$$sinx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$cosx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

技巧：逐项求导或逐项积分，在以上展开式中进行代换和变形

2 例题

2.1 绿皮书 8.3.4(1)

求解以下级数的和函数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}(\frac{3}{4})^n$$

证明. 首先补上一个 t^{2n-1} 为了求导后可以和 $2n-1$ 消去, 先求导再积分就是原函数:

$$\int_0^x(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}(\frac{3}{4})^n t^{2n-1})'dx$$

(这一步中用 n+1 代 n)

$$= -\frac{3}{4}\int_0^x (\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{3}{4})^n t^{2n})dx$$

$$= -\frac{3}{4}\int_0^x \frac{1}{1+(\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2}dx$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}arctan\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

最后带入 $x = 1$ 即可。 □

2.2 绿皮书 8.3.4(2)

$$\int_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n(n+1)}{2^n}$$

证明. 这道题目考察逐项求导的方法，目的是凑出 $n(n+1)$ 形式：由结论 $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ 两边同时乘以 x，然后求导：
$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n = \frac{1}{(x+1)^2}$
再求导：
$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n+1)x^{n-1} = \frac{-2}{(x+1)^3}$
两边同时乘以 x, 再用 $\frac{x}{2}$ 代 x: 就得到：
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n(n+1)}{2^n}x^n = \frac{-8x}{(x+2)^3}$ 带入 $x = 1$ 即可得到答案。

□

思路小结: 可以从常见的展开式下手，通过积分，求导等变化得到结果要求的形式。

2.3 绿皮书 8.3.6(4)

求下列函数的 $Maclaurin$ 展开式

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

证明. 可以发现，分子不用担心，最后乘上去就行了，另一块的基本形式是 $(1+x)^{\alpha}$ 的展开，于是得到如下过程：$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n$

带入 $-x^2$ 再在两边乘以 x^2, 即可得到结果为:
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n+2}$ □

这种题目解法和上面求和函数的做法本质上是一样的，就不多加赘述，大家自己做题理解。

2021 年 6 月 4 日