Calcul Scientifique avec Python

Mohamed El Ghmary
mohamed.elghmary@um5s.net.ma

***

Résolution approchée d'équations différentielles.

Exercice 06

Les équations différentielles (ED) apparaissent très souvent dans la modélisation de la physique et des sciences de l'ingénieur. Trouver la solution d'une ED ou d'un système d'ED est ainsi un problème courant, souvent difficile ou impossible à résoudre de façon analytique. Il est alors nécessaire de recourir à des méthodes numériques pour les résoudre.

Le problème de Cauchy consiste à trouver une fonction y(t) définie sur l'intervalle [a, b] telle que :

$$\begin{cases} y' = f(y(t), t) \quad ; \quad \forall t \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Pour obtenir une approximation numérique de la solution y(t) sur l'intervalle [a, b], nous allons estimer la valeur de cette fonction en un nombre fini de points ti, pour i = 0, 1, … , n, constituants les nœuds du maillage. La solution numérique obtenue aux points t_i est notée $y_i = y(t_i)$. L'écart entre deux abscisses, noté **h**, est appelé : le pas de discrétisation.

Les principales méthodes de résolution numérique des ED sont séparées en deux grandes catégories :

- **Les méthodes à un pas :** Le calcul de la valeur y_{n+1} au noeud t_{n+1} fait intervenir la valeur y_n obtenue à l'abscisse précédente. Les principales méthodes sont celles de : Euler, Runge-Kutta, Crank-Nicholson …
- **Les méthodes à multiples pas:** Le calcul de la valeur y_{n+1} au noeud t_{n+1} fait intervenir plusieurs valeurs y_n , y_{n-1} , y_{n-2} , … obtenues aux abscisses précédentes. Les principales méthodes sont celles de : Nyström, Adams-Bashforth, Adams-Moulton, Gear …

Implémentation de la méthode d'Euler , la méthode de Heun, Runge-Kutta ,Nystrom :

Le problème de Cauchy

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} y' = f(y(t), t) \quad ; \quad \forall\, t \in [\,a\,, b\,] \\ \qquad\qquad y(a) = y_0 \end{cases}$$

- La fonction f définie telle que :

$$\begin{cases} y' = f(y(t), t) \quad ; \quad \forall\, t \in [\,a\,, b\,] \\ \qquad\qquad y(a) = y_0 \end{cases}$$

- [a,b] l'intervalle d'étude
- La condition initiale (a,y0)
- **h** le pas. Cette valeur doit être correctement choisie, si h est trop petit le temps de calcul sera élevé, si h est trop grand l'erreur sera trop grande

1. Écrire la fonction ***euler (f,a,b,y0,h)***
2. Écrire la fonction ***heun (f,a,b,y0,h)***
3. La méthode de Runge-Kutta (ou RK4) **RK4 *(f,a,b,y0,h)***
4. La méthode de Nyström **Nystrom *(f,a,b,y0,h)***
5. La méthode de Adams-Bashforth **AdamsBashforth *(f,a,b,y0,h)***
6. Résoudre y'=y entre 0 et 5 pour un pas de 0.1 avec y(0)=1
7. Résoudre y'=sin(t*y(t)) entre 0 et pi pour un pas de 0.1 avec y(0)=1
8. Résoudre y'=-0.5y entre 0 et 5 pour un pas de 0.1 avec y(0)=1
9. Résoudre l'équation de Lotka-Volterra (système proie-prédateur) x'=x(a-by) et y'=y(-c+dx) entre 0 et 1000 pour un pas de 0.1 (x0,y0)=(100,80) et a = 1,b = 0.005, c = 1.5,d = 0.01

10. Résoudre y''+0.2y'+y=2cos(3t) entre 0 et 5 pour un pas de 0.1 avec y(0)=1 y'(0)=0
11. Résoudre l'équations de Bessel : $t^2.y''+(t^2-a^2).y+t.y'=0$ entre 0 et 20 pour un pas de 0.1 avec y(0)=1 y'(0)=-3 ,a=0.5
12. Ecrire le programme pour le pendule simple

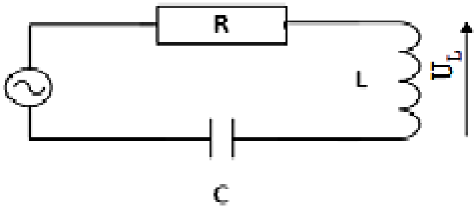
$$\theta''(t) + \frac{k}{m\ell^2}\theta'(t) + \frac{g}{\ell}\sin\big(\theta(t)\big) = 0.$$

En posant $Y(t) = \begin{pmatrix}\theta(t)\\ \theta'(t)\end{pmatrix}$, cette équation s'écrit aussi

$$Y'(t) = F(t, Y) \quad \text{avec} \quad F\left(t, \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ -\frac{k}{m\ell^2}y - \frac{g}{l}\sin(x)\end{pmatrix}.$$

13. Ecrire le programme pour le pendule amorti

14. Ecrire le programme pour le Circuit RLC



- $u_R + u_L + u_C = E$ et $u_R = Ri$, $u_L = L\frac{di}{dt}$ et $i = C\frac{du_C}{dt}$

En dérivant deux fois et en remplaçant certaines expressions on arrive à l'expression :

$$\frac{d^2u_L}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_L}{dt} + \frac{1}{LC}u_L = \frac{d^2E}{dt^2}$$

En posant $Y(t) = \begin{bmatrix} u_L \\ \dot{u}_l \end{bmatrix}$

Cette équation s'écrit aussi : $Y'(t) = F(t, Y)$ $\quad avec\ F\left(t, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ -E0 \cdot w^2 \cdot \sin(w \cdot t) - \frac{R}{L} \cdot y - \frac{1}{LC} \cdot x \end{pmatrix}$

```
# les données

n=150          #le nombre de pas
R=20           #  en ohms
L=0.8          # inductance en mH
C=700e-6       # capa en mF
freq=80        # fréquence
E0=10          # tension maximale du générateur
t0=0           # temps initial
b=0.3          # temps final
vb=0           #tension aux bornes de la bobine
dvb=0          #dérivée =0 aux bornes de la bobine
omega= 2*np.pi*freq
```