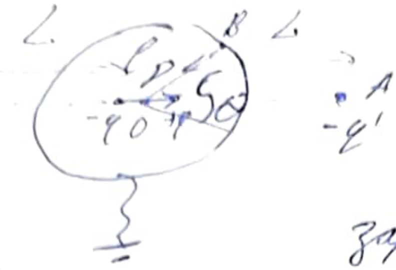
№1

l - расстояние между зарядами q'

q - заряды диполя



Применим метод изображения дважды добавив справа и слева от системы заряды q', чтобы эквивалентная система зарядов $-q'$ и q давала сферу с нулевым потенциалом

$$\varphi_0 = \frac{q}{\frac{l}{2}} - \frac{q'}{BC} = 0$$

$$q' = \frac{2q}{l} BC \qquad q' = \frac{2q}{l} a = q\frac{2a}{l}$$

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OB}{OA} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow OC = \frac{a^2}{b^2}$$

$\frac{2a}{l} \gg 1 \Rightarrow$ Поле от зарядов q' и $-q'$ можно считать однородным

Внешнее поле вблизи шара

$$E_0 = \frac{2q'}{L^2}$$

$$q' \gg q$$

$$\frac{l}{2} = \frac{a^2}{L}$$

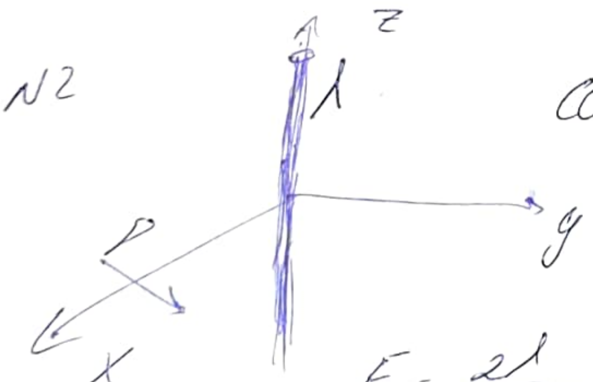
$$p = ql = q'\frac{a}{L}\frac{2a^2}{L} = a^3\frac{2q'}{L^2} = a^3 E_0$$

$$E_0 = \frac{p}{a^3}$$

Поле внутри однородно и равно E_0, поэтому аналогично задаче с распределением заряда сферы во внешнем поле имеем:

$$\sigma = \frac{3E_0}{4\pi}\cos\theta = \frac{3p}{4\pi a^3}\cos\theta$$

№2



(a) в Декартовой С.О поле от нити будет равно $E = \frac{2\lambda}{r}$, где r - радиус цилиндра

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$E = \frac{2\lambda}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$E_x = E(r)\frac{x}{r} = \frac{2\lambda x}{x^2+y^2}$$

$$E_y = E(r)\frac{y}{r} = \frac{2\lambda y}{x^2+y^2}$$

(b)

$$F = (p\cdot\nabla)E_{внешн} = p_x\frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y\frac{\partial E_y}{\partial y} =$$

$$= p_x\frac{2\lambda(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} + p_y\frac{2\lambda(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

(c)

$$\sin\theta = \frac{h}{\sqrt{h^2+x^2}}$$

$$E = \frac{2qh}{\sqrt{h^2+x^2}\,(h^2+x^2+z^2)}$$

$l = 2h$

$h \ll x$

$p = 2qh = ql$

$$dF = E\,dz\,\lambda = \frac{2qh\lambda\,dz}{\sqrt{h^2+x^2}\,(h^2+x^2+z^2)}$$

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p\,dz\,\lambda}{x(x^2+z^2)} = \frac{p\lambda}{x}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda}{x^2+z^2}}_{\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{x}\right)} = \frac{p\lambda\pi}{x^2}$$

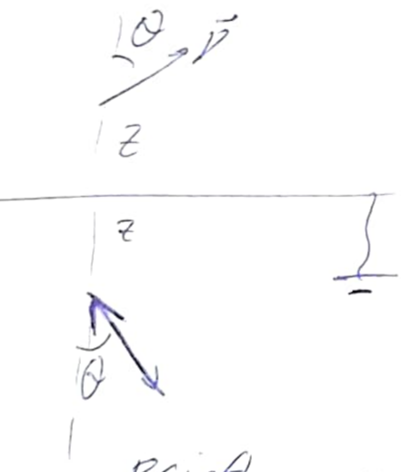
$$\underline{F = \frac{p\lambda p}{x^2}}$$

(d)

$$\vec{M} = \vec{p}\times\vec{E} = q\vec{l}\times\vec{E} = \vec{l}\times\vec{F}$$

$$|\vec{M}| = |\vec{p}\times\vec{E}| = p\frac{2\lambda}{r} = \frac{2\lambda p}{r}$$

№3



$r = 2z$

Воспользуюсь методом изображений получаем систему из двух диполей

$U = -\frac{1}{2}(\vec{p}\vec{E})$ $\qquad \vec{r} = \begin{pmatrix}0\\2z\end{pmatrix}$

$$E = \frac{3(p\cdot r)r - r^2 p}{r^5} \qquad \vec{p} = \begin{pmatrix}p\sin\theta\\p\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$E_x = -\frac{p\sin\theta}{r^3} \qquad E_y = \frac{-3r^2p\cos\theta + r^2p\cos\theta}{r^5} = \frac{-2p\cos\theta}{r^3}$$

$$U = -\frac{1}{2}\left(-p\sin\theta\,\frac{p\sin\theta}{r^3} - p\cos\theta\,\frac{2p\cos\theta}{r^3}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{p^2(\sin^2\theta + 2\cos^2\theta)}{r^3} =$$

$$= \frac{p^2(1+\cos^2\theta)}{2r^3} = \frac{p^2(1+\cos^2\theta)}{16z^3}$$

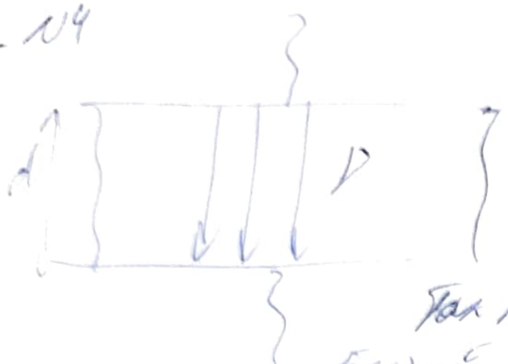
При вращении $U \to min \Rightarrow 1+\cos^2\theta \to min$

$$\Downarrow$$

$$\cos^2\theta \to 0$$

$$\underline{\theta = \pm\frac{\pi}{2}}$$

N4



$P = \delta x$

$\rho = -\nabla \cdot P \} \Rightarrow \rho = const$

$\Delta\varphi = \int_0^d E\,dx$

Так как диэлектрик равномерно заряжен ($\rho = const$)

$\Downarrow$

Заряд будет на поверхности

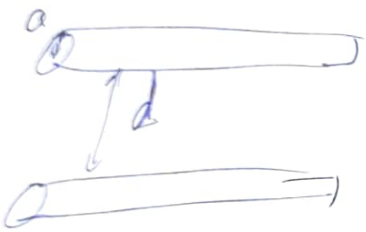
$E(x) = E_{x-} - E_{x+}$

$E = 2\pi\sigma = 2\pi P_0$

$\Delta\varphi = \int_0^d E\,dx = 2\pi P_0 d$

$$\underline{U = 2\pi P_0 d}$$

N5



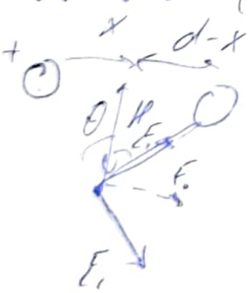
Аналогично прошлому д/з по т. Гаусса

$E\, 2\pi R l = 4\pi\lambda l$ r - расстояние от нити

$E = \frac{2\lambda}{r}$ - в СГС $\quad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

$$\Delta\varphi = \int_a^{d-a} \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (d-r)}\right) dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^{d-a}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{d-r}\right)dr =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{(d-a)(d-a)}{a^2}\right) = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d-a}{a}\right) \qquad \Delta\varphi = U$$



Случай $d = 2x$: $x = \frac{d}{2}$

$$\lambda = \frac{\Delta\varphi\, \pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{d-a}{a}\right)}$$

$$\vec E_0 = \vec E_1 + \vec E_2 =$$

$$= \frac{2\lambda}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+h^2}}\sin\theta = \frac{2\lambda}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+h^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} = \frac{\lambda x}{2\pi\varepsilon_0(x^2+h^2)} =$$

$$= \frac{\Delta\varphi\, \pi\varepsilon_0\, x}{2\pi\varepsilon_0 \ln\left(\frac{d-a}{a}\right)(x^2+h^2)} = \frac{\Delta\varphi \frac{d}{2}}{2\ln\left(\frac{d-a}{a}\right)\left(\frac{d^2}{4}+h^2\right)} = 16\,\frac{В}{м}$$