

НИУ "ВШЭ"



ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ПО МЕХАНИКЕ

БФ3223

Определение вязкости жидкости

Автор:
Айдар РЯЖАПОВ

8 ноября 2022 г.

Содержание

1	Теоретические сведения	2
2	Постановка эксперимента	2
2.1	Подготовка к эксперименту	2
2.2	Методика исследования	3
3	Оборудование и инструментальные погрешности	4
4	Расчёт погрешностей	4
4.1	Погрешности измерения параметров шариков	4
4.1.1	Новые большие стальные шарiki	4
4.1.2	Старые большие стальные шарiki	5
4.1.3	Маленькие стальные шарiki	5
4.1.4	Стальные шарiki с медным покрытием	6
4.1.5	Стальные шарiki с цинковым покрытием	6
4.1.6	Свинцовые шарiki	7
4.1.7	Пластиковые шарiki	7
4.2	Погрешность измерения плотности	8
4.3	Погрешность измерения скорости	9
4.4	Вычисление погрешности коэффициента вязкости	9
5	Результаты измерений и обработка данных	10
5.1	Коэффициент вязкости для различных шаров	10
5.2	Зависимость коэффициента вязкости от радиуса колбы	11
5.3	Кривая для скорости	11
6	Обсуждение результатов и выводы	11
	Приложение	13

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ

Аннотация

В данной работе исследуется динамическая вязкость глицерина и скоростные кривые. В отчёте отдельное внимание уделено поиску случайных и систематических погрешностей. Также проверены результаты, которые получаются в неидеальных ситуациях в их приближениях к формуле Стокса.

1 Теоретические сведения

В данной работе исследуется движение сферических тел в вязкой жидкости.

Для тела сферической формы, падающего в неограниченной жидкости сила действующая со стороны жидкости на тело определяется формулой Стокса:

$$\vec{F} = -6\pi r \eta \vec{v}, \quad (1)$$

где r - радиус сферы, η - коэффициент вязкости жидкости, v - установившаяся скорость тела. Таким образом, для тела равномерного движущегося (с установившейся скоростью) в жидкости можем записать из равенства сил следующее уравнение:

$$mg = 6\pi r \eta v + \frac{4}{3}\rho g \pi r^3,$$

где ρ - плотность жидкости. Таким образом, коэффициент вязкости определяется следующей формулой:

$$\eta = \frac{mg - \frac{4}{3}\rho g \pi r^3}{6\pi r v} \quad (2)$$

2 Постановка эксперимента

2.1 Подготовка к эксперименту

В начале эксперимента отдельное внимание было уделено сбору параметров шариков, для того, чтобы уменьшить случайную погрешность. Между собой шарики отличались, особенно это четко прослеживалось на стальных шариках с свинцовым покрытием (из-за мягкости свинца было много вмятин) и пластиковых. Поэтому, мы измеряли с помощью микрометра для одного вида шарика несколько раз значение его диаметра.

Измерения массы шаров проводились весами HR-100AZG. Перед началом измерений у весов был выставлен уровень, чтобы они стояли строго перпендикулярно столу. Масса шариков измерялась методом рядов, чтобы уменьшить погрешность из-за отличия шариков друг от друга: бралось некоторое количество шариков ($N = 30, 50, 80, 100$) и измерялась их масса, таким образом мы уменьшили погрешность при измерении массы одного шарика. Перед началом каждого измерения значения на весах калибровались и выставлялось нулевое значение.

Также измерялась плотность жидкости, так как в силу различных примесей она могла отличаться для данной жидкости при данной температуре помещения

в момент проведения эксперимента. Плотность измерялась последовательным наливом жидкости в колбу и измерением её массы на весах. Из получившейся зависимости находился угловой коэффициент прямой (подробнее про это в части про обработку данных).

2.2 Методика исследования

Для нахождения вязкости жидкости использовалась установка, изображенная на рисунке. Перпендикулярно столу (для уменьшения влияния оптического искажения) на штатив ставился телефон для съемки падения шариков. На колбы наносились контрастные метки на различном расстоянии друг от друга. Сзади колбы стоял предмет белого фона, чтобы метки на колбе и шарик были более заметными. Вверху колбы установлена воронка, которая была расположена так, чтобы шарик падал в центр колбы. Таким образом, шарик падает из воронки и летит по центру колбы, попадает в жидкость и замедляется до установившейся скорости, момент падения фиксируется камерой телефона. Температура в момент проведения эксперимента равнялась $t = 26^\circ \text{C}$.

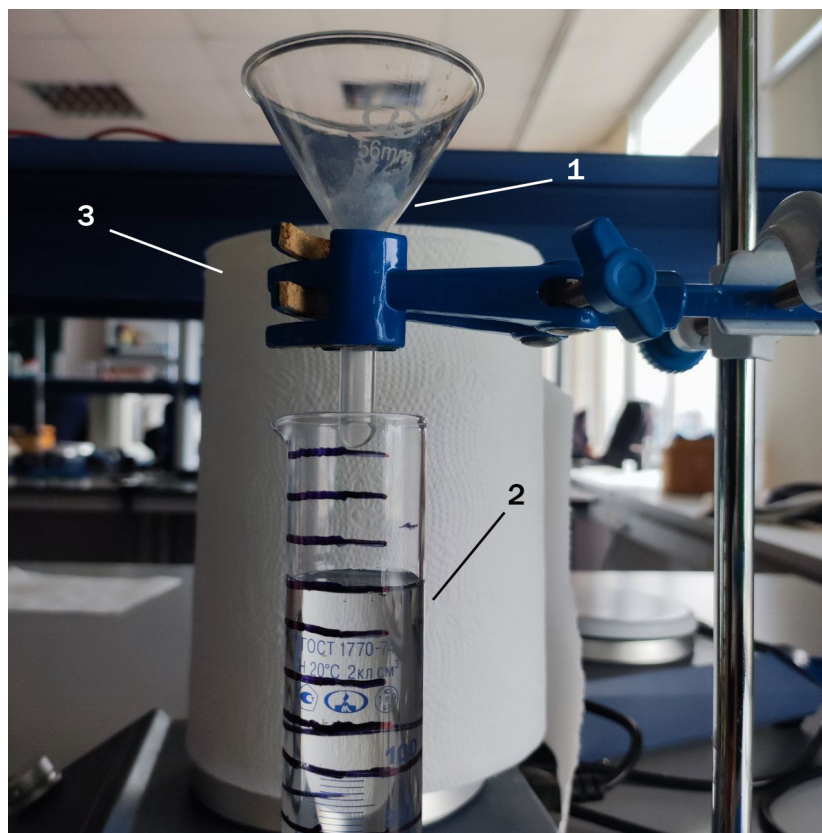


Рис. 1: Установка. 1 - воронка, 2 - колба, 3 - контрастный фон

Для последующего анализа прохождения шариком меток была написана программа на языке программирования Python с использованием библиотеки OpenCV. Программа фиксирует четкие моменты падения шарика и выдает файл с данными координат и времени их прохождения. Перед загрузкой видеоклипа в программу вручную калибруется соотношение между пикселями для данного файла и реальным значением расстояния. Расстояние было удобно мерить по рисочкам,

нанесённым на самой колбе, а не нарисованными вручную. Подробнее с программой можно ознакомиться на гитхабе и в приложении. Для прозрачных шариков пришлось снимать показания вручную, так как они недостаточно контрастны, чтобы программа их замечала.

В работе проводились следующие исследования: определение коэффициента вязкости, поиск корреляции между определением коэффициента вязкости среды и радиусом рассматриваемой колбы, исследование сходимости теоретической формулы в случае неидеально сферических шаров, исследование скоростной кривой шарика при падении в жидкость.

3 Оборудование и инструментальные погрешности

Измерения диаметров шаров проводились с помощью микрометров 1-го класса точности с погрешностью измерения $\Delta l = 0.01$ мм.

Измерения массы шариков проводились с помощью весов HR-100AZG 1-го класса точности с поверочным интервалом $e = 0.001$ г.

Измерения массы жидкости проводились с помощью весов OHAUS SPX622 с поверочным интервалом $e = 0.1$ г.

Погрешность измерения расстояния между метками колбы: $\Delta x = 1$ мм.

4 Расчёт погрешностей

4.1 Погрешности измерения параметров шариков

4.1.1 Новые большие стальные шарики

По результатам серии из $N_n = 10$ количества измерений диаметра:

Средний диаметр: $d_{avg} = \frac{\sum d_i}{N_n} = 5.98$ мм

Стандартное отклонение:

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{1}{N_n - 1} \sum_{i=1}^{N_n} (d_i - d_{avg})^2} = 0.012 \text{ мм}$$

Случайная погрешность среднего:

$$\sigma_{\bar{d}} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{N_n}} = 0.004 \text{ мм}$$

Приборная погрешность: $\Delta l = 0.01$ мм

Полная погрешность:

$$\Delta d = \sqrt{\sigma_d^2 + \Delta l^2} = 0.01 \text{ мм}$$

По результатам измерения массы методом рядов для $N = 30$ шариков проводилось 5 различных измерений.

Средняя масса одного шарика:

$$m_{avg} = \frac{\sum m_i}{N_n} = 0.888 \text{ г}$$

Приборная погрешность: $e = 0.001 \text{ г}$

Полная погрешность:

$$\Delta m = \frac{e}{N} = 0.00003 \text{ г}$$

4.1.2 Старые большие стальные шарiki

По результатам серии из $N_n = 10$ количества измерений диаметра:

Средний диаметр: $d_{avg} = \frac{\sum d_i}{N_n} = 5.99 \text{ мм}$

Стандартное отклонение:

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{1}{N_n - 1} \sum_{i=1}^{N_n} (d_i - d_{avg})^2} = 0.013 \text{ мм}$$

Случайная погрешность среднего:

$$\sigma_{\bar{d}} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{N_n}} = 0.004 \text{ мм}$$

Приборная погрешность: $\Delta l = 0.01 \text{ мм}$

Полная погрешность:

$$\Delta d = \sqrt{\sigma_{\bar{d}}^2 + \Delta l^2} = 0.01 \text{ мм}$$

По результатам измерения массы методом рядов для $N = 30$ шариков проводилось 5 различных измерений.

Средняя масса одного шарика:

$$m_{avg} = \frac{\sum m_i}{N_n} = 0.888 \text{ г}$$

Приборная погрешность: $e = 0.001 \text{ г}$

Полная погрешность:

$$\Delta m = \frac{e}{N} = 0.00003 \text{ г}$$

4.1.3 Маленькие стальные шарiki

По результатам серии из $N_n = 10$ количества измерений диаметра:

Средний диаметр: $d_{avg} = \frac{\sum d_i}{N_n} = 3.17 \text{ мм}$

Стандартное отклонение:

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{1}{N_n - 1} \sum_{i=1}^{N_n} (d_i - d_{avg})^2} = 0.005 \text{ мм}$$

Случайная погрешность среднего:

$$\sigma_{\bar{d}} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{N_n}} = 0.002 \text{ мм}$$

Приборная погрешность: $\Delta l = 0.01 \text{ мм}$

Полная погрешность:

$$\Delta d = \sqrt{\sigma_{\bar{d}}^2 + \Delta l^2} = 0.01 \text{ мм}$$

По результатам измерения массы методом рядов для $N = 80$ шариков проводилось 5 различных измерений.

Средняя масса одного шарика:

$$m_{avg} = \frac{\sum m_i}{N_n} = 0.136 \text{ г}$$

Приборная погрешность: $e = 0.001 \text{ г}$

Полная погрешность:

$$\Delta m = \frac{e}{N} = 0.00001 \text{ г}$$

4.1.4 Стальные шарiki с медным покрытием

По результатам серии из $N_n = 10$ количества измерений диаметра:

Средний диаметр: $d_{avg} = \frac{\sum d_i}{N_n} = 4.43 \text{ мм}$

Стандартное отклонение:

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{1}{N_n - 1} \sum_{i=1}^{N_n} (d_i - d_{avg})^2} = 0.005 \text{ мм}$$

Случайная погрешность среднего:

$$\sigma_{\bar{d}} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{N_n}} = 0.002 \text{ мм}$$

Приборная погрешность: $\Delta l = 0.01 \text{ мм}$

Полная погрешность:

$$\Delta d = \sqrt{\sigma_{\bar{d}}^2 + \Delta l^2} = 0.01 \text{ мм}$$

По результатам измерения массы методом рядов для $N = 50$ шариков проводилось 5 различных измерений.

Средняя масса одного шарика:

$$m_{avg} = \frac{\sum m_i}{N_n} = 0.357 \text{ г}$$

Приборная погрешность: $e = 0.001 \text{ г}$

Полная погрешность:

$$\Delta m = \frac{e}{N} = 0.00002 \text{ г}$$

4.1.5 Стальные шарiki с цинковым покрытием

По результатам серии из $N_n = 10$ количества измерений диаметра:

Средний диаметр: $d_{avg} = \frac{\sum d_i}{N_n} = 4.39 \text{ мм}$

Стандартное отклонение:

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{1}{N_n - 1} \sum_{i=1}^{N_n} (d_i - d_{avg})^2} = 0.006 \text{ мм}$$

Случайная погрешность среднего:

$$\sigma_{\bar{d}} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{N_n}} = 0.002 \text{ мм}$$

Приборная погрешность: $\Delta l = 0.01$ мм

Полная погрешность:

$$\Delta d = \sqrt{\sigma_d^2 + \Delta l^2} = 0.01 \text{ мм}$$

По результатам измерения массы методом рядов для $N = 50$ шариков проводилось 5 различных измерений.

Средняя масса одного шарика:

$$m_{avg} = \frac{\sum m_i}{N_n} = 0.348 \text{ г}$$

Приборная погрешность: $e = 0.001$ г

Полная погрешность:

$$\Delta m = \frac{e}{N} = 0.00002 \text{ г}$$

4.1.6 Свинцовые шарик

По результатам серии из $N_n = 10$ количества измерений диаметра:

Средний диаметр: $d_{avg} = \frac{\sum d_i}{N_n} = 4.46$ мм

Стандартное отклонение:

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{1}{N_n - 1} \sum_{i=1}^{N_n} (d_i - d_{avg})^2} = 0.03 \text{ мм}$$

Случайная погрешность среднего:

$$\sigma_{\bar{d}} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{N_n}} = 0.009 \text{ мм}$$

Приборная погрешность: $\Delta l = 0.01$ мм

Полная погрешность:

$$\Delta d = \sqrt{\sigma_d^2 + \Delta l^2} = 0.013 \text{ мм}$$

По результатам измерения массы методом рядов для $N = 50$ шариков проводилось 5 различных измерений.

Средняя масса одного шарика:

$$m_{avg} = \frac{\sum m_i}{N_n} = 0.517 \text{ г}$$

Приборная погрешность: $e = 0.001$ г

Полная погрешность:

$$\Delta m = \frac{e}{N} = 0.00002 \text{ г}$$

4.1.7 Пластиковые шарик

По результатам серии из $N_n = 10$ количества измерений диаметра:

Средний диаметр: $d_{avg} = \frac{\sum d_i}{N_n} = 3.6$ мм

Стандартное отклонение:

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{1}{N_n - 1} \sum_{i=1}^{N_n} (d_i - d_{avg})^2} = 0.36 \text{ мм}$$

Случайная погрешность среднего:

$$\sigma_{\bar{d}} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{N_n}} = 0.11 \text{ мм}$$

Приборная погрешность: $\Delta l = 0.01 \text{ мм}$

Полная погрешность:

$$\Delta d = \sqrt{\sigma_{\bar{d}}^2 + \Delta l^2} = 0.1 \text{ мм}$$

По результатам измерения массы методом рядов для $N = 100$ шариков проводилось 5 различных измерений.

Средняя масса одного шарика:

$$m_{avg} = \frac{\sum m_i}{N_n} = 0.077 \text{ г}$$

Приборная погрешность: $e = 0.001 \text{ г}$

Полная погрешность:

$$\Delta m = \frac{e}{N} = 0.00001 \text{ г}$$

4.2 Погрешность измерения плотности

Построим график зависимости массы от объема (см. Рисунок 2). Для того чтобы провести лучшую прямую воспользуемся методом наименьших квадратов (`scipy.optimize.curve_fit`). Из проведенной прямой:

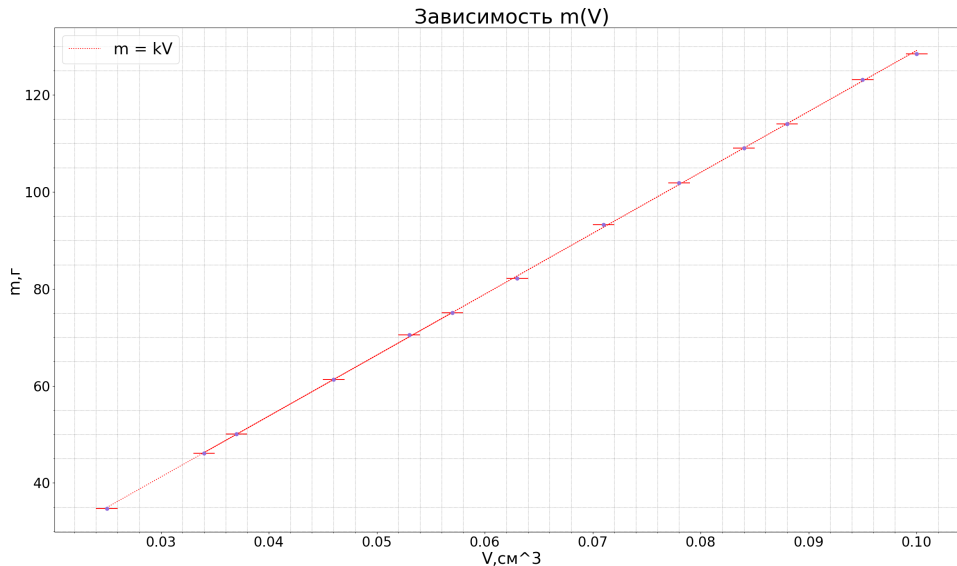


Рис. 2: График массы жидкости от объема

$$\rho = 1256 \pm 18 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

4.3 Погрешность измерения скорости

Далее приведена общая формула для измерения погрешности скорости, для каждой колбы и каждого шарика значения скоростей и погрешностей будут свои.

$$v = \frac{x}{\tau}$$

$$\Delta v_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x} 2\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} 2\Delta \tau\right)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\tau}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = -\frac{x}{\tau^2}$$

Стандартное отклонение:

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{N_n - 1} \sum_{i=1}^{N_n} (v_i - v_{avg})^2}$$

Случайная погрешность среднего:

$$\sigma_{\bar{v}} = \frac{\sigma_v}{\sqrt{N_n}}$$

$$\Delta v = \sqrt{(\Delta v_0)^2 + \sigma_{\bar{v}}^2}$$

4.4 Вычисление погрешности коэффициента вязкости

Аналогично как и со скоростью, для измерений погрешности коэффициента вязкости приведена формула, точное значение высчитано в табличке.

$$\Delta \eta = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial m} \Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial v} \Delta v\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \rho} \Delta \rho\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial r} \Delta r\right)^2}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial m} = \frac{g}{6\pi r v}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial v} = -\frac{gm - \frac{4}{3}g\pi r^3 \rho}{6\pi r v^2}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \rho} = -\frac{2gr^2}{9v}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial r} = -\left(\frac{4\rho g r}{3v} + \frac{mg}{6\pi r^2 v}\right)$$

5 Результаты измерений и обработка данных

5.1 Коэффициент вязкости для различных шаров

В Таблице 1 приведены коэффициенты вязкости для различных шаров. Из таблицы можно понять, что влияние стенок на измерения для самой узкой колбы оказались существенными, из-за чего значения сильно расходятся с данными для других колб, поэтому далее мы не будем рассматривать этот столбец. Выпишем

Таблица 1: Динамическая вязкость для разных колб

D	1.2 см		2.2см		3 см		3.5 см	
	η , Па · с	$\Delta\eta$, Па · с	η	$\Delta\eta$, Па · с	η , Па · с	$\Delta\eta$, Па · с	η , Па · с	$\Delta\eta$, Па · с
стальные новые	3.37	0.15	0.78	0.03	0.76	0.03	0.68	0.03
старые большие			0.78	0.03	0.71	0.03	0.67	0.03
маленькие	2.9	0.2	0.56	0.04	0.51	0.04	0.55	0.04
с медью	2.8	0.1	0.63	0.03	0.56	0.03	0.57	0.03
цинкованные	3.0	0.2	0.63	0.03	0.54	0.03	0.57	0.03
свинцовые			0.62	0.03	0.59	0.03	0.59	0.03

полученные значения динамической вязкости для каждого шарика в измерениях для самой большой колбы, так как в ней влияние стенок сведено к минимуму.

Новые стальные шарики:

$$\eta = 0.68 \pm 0.03 \text{ Па} \cdot \text{с}$$

$$\varepsilon_{\eta} = 4.4\%$$

Старые стальные шарики:

$$\eta = 0.67 \pm 0.03 \text{ Па} \cdot \text{с}$$

$$\varepsilon_{\eta} = 4.5\%$$

Маленькие стальные шарики:

$$\eta = 0.55 \pm 0.04 \text{ Па} \cdot \text{с}$$

$$\varepsilon_{\eta} = 7.3\%$$

С медным покрытием:

$$\eta = 0.57 \pm 0.03 \text{ Па} \cdot \text{с}$$

$$\varepsilon_{\eta} = 5.3\%$$

Цинкованные:

$$\eta = 0.57 \pm 0.03 \text{ Па} \cdot \text{с}$$

$$\varepsilon_{\eta} = 5.3\%$$

Свинцовые:

$$\eta = 0.59 \pm 0.03 \text{ Па} \cdot \text{с}$$

$$\varepsilon_{\eta} = 5.1\%$$

Также по табличке можно заметить, что для стальных больших и остальных шариков значения сильно отличаются. Это может быть связано с недостаточно хорошей выборке данных (на видео сложно выделить выбросы), также это может быть связано с тем, что мы большие шары кидали первыми, после чего состав жидкости менялся. Для точного выяснения причины разницы необходимо провести дополнительные измерения.

5.2 Зависимость коэффициента вязкости от радиуса колбы

Посмотрим на значения полученных нами коэффициентов в зависимости от размера колб(в данном случае рассматривается диаметр, так как интерес составляет качественная зависимость). На рисунке 3 представлена зависимость для всех ша-

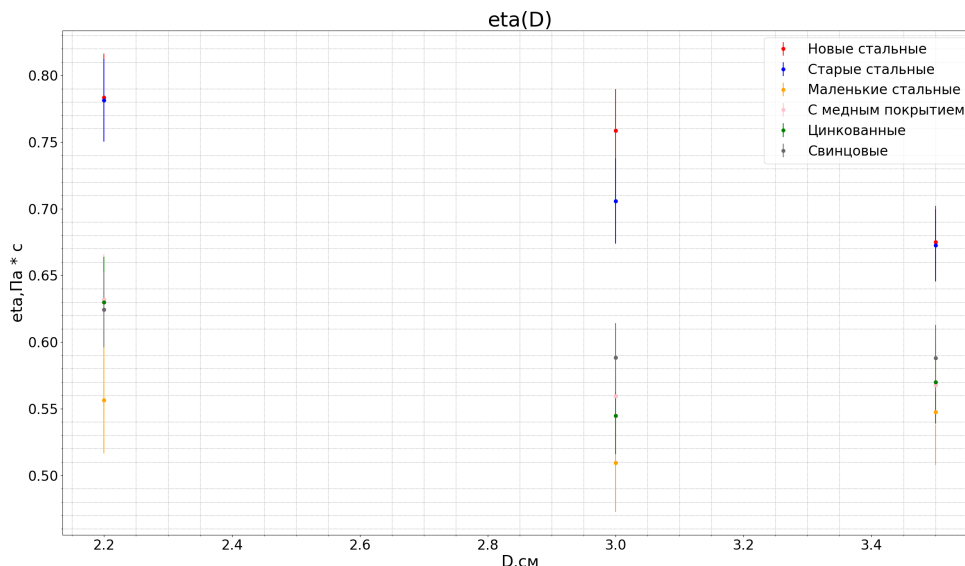


Рис. 3: Зависимость динамической вязкости от диаметра

ров. С более подробными графиками для каждого типа шариков в отдельности можно ознакомиться в приложении. Рассмотрим сходимости для каждого шарика. Для больших стальных шариков(см. Рисунок 4 приложения) значения сильно отличаются друг для друга даже в пределах погрешности(нельзя провести прямую параллельную оси OX лежащую во всех воротах погрешности). Для малых стальных шариков(см. Рисунок 5 приложения) такую прямую провести можно. Для всех остальных шариков значения для колбы с диаметром 2.2 сильно выбиваются по сравнению с другими. На основе этих данных нельзя сказать о какой-то общей корреляции, так как не ясна достоверность полученных измерений(описано в предыдущем пункте), к тому же в зависимости мало точек.

5.3 Кривая для скорости

В данной работе интересен также начальный момент падения шарика, но в силу сложности процессов, рассмотрим лишь скоростную кривую для различных состояний шарика: сухой, смоченный глицерином, смоченный водой. В данном опыте проводилось исследование только для больших стальных шаров.....

6 Обсуждение результатов и выводы

В работе было получено значение коэффициента вязкости с погрешностью не более $\varepsilon_\eta = 7.3$. Значения вязкости отличаются для разных шаров, поэтому необходимо провести дополнительные измерения с большей точностью. К примеру, можно

изменить методику сброса шариков: поставить серво-двигатель на основе микроконтроллера Arduino, который будет последовательно скидывать шарики в центр колб, тогда можно будет исключить случайный полёт шарика и влияние стенок. Также для сбора статистики имеет смысл провести измерения для большего числа колб с различными размерами. Также можно улучшить работу программы, которая отмечает шарики(уменьшить количество ложных срабатываний). В момент проведения эксперимента температура в помещении была равна $t = 26^{\circ} \text{C}$, при данном значении температуры значение динамической вязкости чистого глицерина(не обязательно соответствует нашей жидкости) лежит в интервале от $600 \text{ Па} \cdot \text{с}$ до $1480 \text{ Па} \cdot \text{с}$.

Приложение

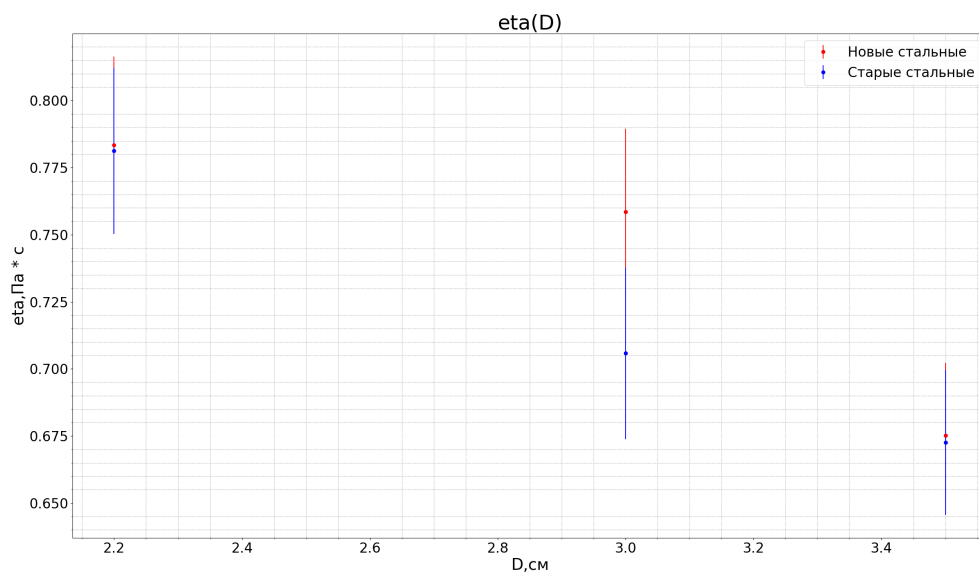


Рис. 4: Зависимость динамической вязкости от диаметра

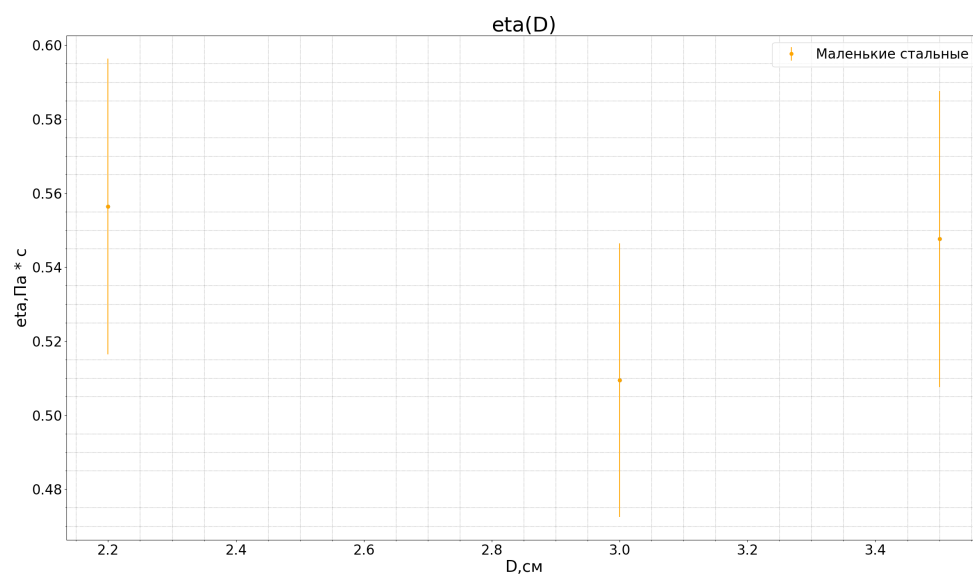


Рис. 5: Зависимость динамической вязкости от диаметра

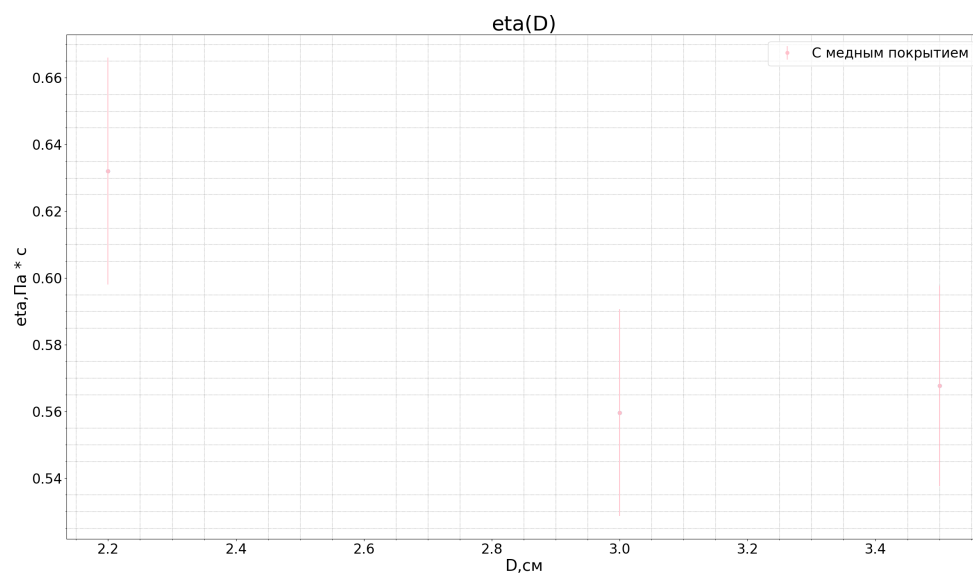


Рис. 6: Зависимость динамической вязкости от диаметра

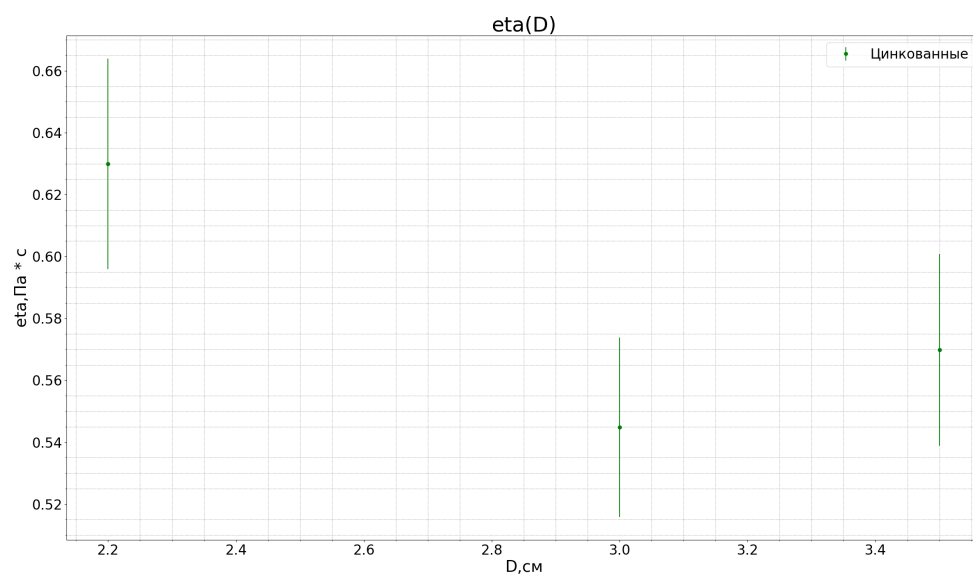


Рис. 7: Зависимость динамической вязкости от диаметра

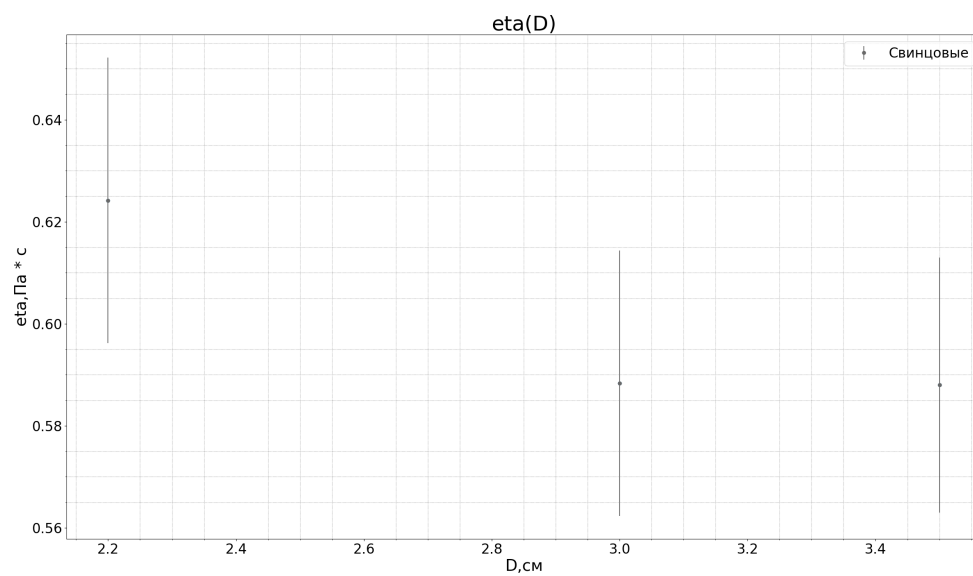


Рис. 8: Зависимость динамической вязкости от диаметра