НИУ "ВШЭ"

Лабораторная работа по Механике

БФЗ223

Вынужденные колебания

Автор:
Айдар Ряжапов

29 ноября 2022 г.

Содержание

Отчет о выполнении лабораторной работы №8

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Аннотация

В данной работе исследуется явление вынужденных колебаний, резонанса, а также биение. В работе была получена амплитудно-частотная характеристика. Исследовалось влияние разложение гармоник в ряду Фурье для задаваемого сигнала вынуждающей силы.

1 Теоретические сведения

1.1 Свободное движение

Опишем систему математического маятника с затухающими колебаниями. Из второго закона Ньютона следует:

$$ml\ddot{\alpha} = -mg\sin(\alpha) - \xi l\alpha$$

где ξ - коэффициент вязкого трения.

$$\ddot{\alpha} + \frac{\xi}{m}\dot{\alpha} + \omega^2\alpha = 0$$

Введём обозначение $2\gamma = 2/\tau = \xi/m$. Решая дифференциальное уравнение получаем:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0$$

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - {}^2} = -\gamma \pm i\omega\sqrt{1 - (\frac{\gamma}{\omega})^2}$$

Решением дифференциального уравнения является уравнение:

$$\alpha = \alpha_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Для описания слабо затухающих колебаний удобно ввести понятие добротности колебаний. Добротностью Q называется отношение энергии, запасённой в маятнике к потерям за время, соответсвующее изменению фазы колебаний на 1 радиан (за время равное $1/\omega$). По определению для математического маятника добротность равна:

$$Q = \frac{mgl\frac{\alpha^2}{2}}{mgl\frac{\alpha^2}{2}(1 - e^{-2\gamma/\omega})} = \frac{\omega}{2\gamma}$$

1.2 Вынужденные колебания

Рассмотрим пружинный маятник с затухаянием с вынуждающей силой $F = F_0 sin(\Omega t)$. Из второго закона Ньютона:

$$m\ddot{x} = -\xi\dot{x} - kx + F_0 sin(\Omega t)$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} sin(\Omega t)$$

где ω - собственная частота маятника. Найдём установившееся решения на той же частоте, что и вынуждающей силы.

$$x = x_0 sin(\Omega t + \varphi)$$
$$x_0(-\Omega^2 sin(\Omega t + \varphi) + 2\gamma\Omega cos(\Omega t + \varphi) + \omega^2 sin(\Omega t + \varphi)) = \frac{F_0}{m} sin(\Omega t)$$
$$x_0\sqrt{(2\gamma\Omega) + (\omega^2 - \Omega^2)^2}[\frac{2\gamma\Omega}{\sqrt{(2\gamma\Omega) + (\omega^2 - \Omega^2)^2}} cos(\Omega t + \varphi) + \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\sqrt{(2\gamma\Omega) + (\omega^2 - \Omega^2)^2}} sin(\Omega t + \varphi)] =$$
$$= \frac{F_0}{m} sin(\Omega t)$$

Выражение становится тождественно верным, если выражение в скобках становится равным $sin(\Omega t + \varphi - \varphi)$. Следовательно:

$$\cos(\varphi) = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\sqrt{(2\gamma\Omega) + (\omega^2 - \Omega^2)^2}}$$
$$\sin(\varphi) = \frac{2\gamma\Omega}{\sqrt{(2\gamma\Omega) + (\omega^2 - \Omega^2)^2}}$$
$$x_0(\Omega) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(2\gamma\Omega) + (\omega^2 - \Omega^2)^2}}$$

В условиях резонанса амплитуда колебаний:

$$x_a = \frac{F_0}{2m\omega\gamma} = Q\frac{F_0}{m\omega^2} = Qx_s$$

где x_s - амплитуда отклонения под действием стационарной силы, равной F_0.

1.3 Биение

Найдём установившиеся решения колебаний под действием гармонической вынуждающей силы. Начальными условиями системы являются $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ Из второго закона Ньютона:

$$m\ddot{x} = -\xi\dot{x} - kx + F_0 sin(\Omega t)$$
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} sin(\Omega t)$$

Решение в общем виде можно представить как сумму решения для вынужденных и свободных колебаний.

$$x(t) = C_1 e^{-\gamma t} sin(\omega t) + C_2 e^{-\gamma t} cos(\omega t) + x_0 sin(\Omega t + \varphi)$$

Учитывая начальные условия, получаем:

$$C_2 = x_0 sin(\varphi)$$
$$C_1 = -x_0 \frac{\Omega}{\omega} cos(\varphi) \approx -x_0 cos(\varphi)$$
$$\frac{x(t)}{x_0} = sin(\Omega t + \varphi) - e^{-\gamma t} sin(\omega t + \varphi)$$

Проанализируем полученное решение:

- При $\gamma t \gg 1$ устанавливаются вынужденные колебания при частоте вынуждающей силы

- При $\gamma t \ll 1$ происходят биения$(x(t) = x_0(2sin(\frac{\Omega-\omega}{2}t)cos(\Omega t)))$

2 Постановка эксперимента

Исследуются вынужденные колебаний маятника, вынуждающей силой является сила Ампера, действующая на рамку с током, подвешенную в зазоре постоянного магнита. Индукция поля в зазоре магнита примерно равна 0.15 Тл. Переменный характер вынуждающей силы создаётся при помощи управляемого с компьютера реле, включающего и выключающего ток через рамку. Таким образом, вынуждающая сила в нашем опыте — не гармоническая. Однако, известно, что любой периодический сигнал можно разложить в сумму гармонических сигналов на кратных частотах (разложение в ряд Фурье).

$$F = \frac{F_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n sin(n\Omega t)$$

$$f_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)sin(n\Omega t)dt = \frac{2F_0}{T}\int_0^{T/2} sin(n\Omega t)dt = \frac{F_0}{\pi n}(1 - cos(\pi n)) = \begin{cases} 0, n = 2k \\ \frac{2F_0}{\pi n}, n = 2k+1 \end{cases}$$

Если одно из слагаемых этого ряда (одна из гармоник) совпадёт с резонансной частотой, то возникнет резонансное усиление вынужденных колебаний.

3 Результаты измерений и обработка данных

3.1 Свободные колебания

Для свободных колебаний маятника была проведена серия из 7 измерений(см. Рис. 1). В Таблице 1 можно ознакомиться с полученными декрементами затухания и собственными частотами.

Таблица 1

γ	1.3112	1.302	1.3240	1.2891	1.3156	1.3211	1.2902
$\Delta\gamma$	0.0002	0.0003	0.0002	0.0004	0.0004	0.0002	0.0003
T	1.878	1.882	1.875	1.879	1.88	1.891	1.888
ΔT	0.007	0.002	0.006	0.003	0.008	0.007	0.006
ω	3.34	3.336	3.35	3.342	3.34	3.32	3.33
$\Delta\omega$	0.01	0.004	0.01	0.005	0.01	0.01	0.01

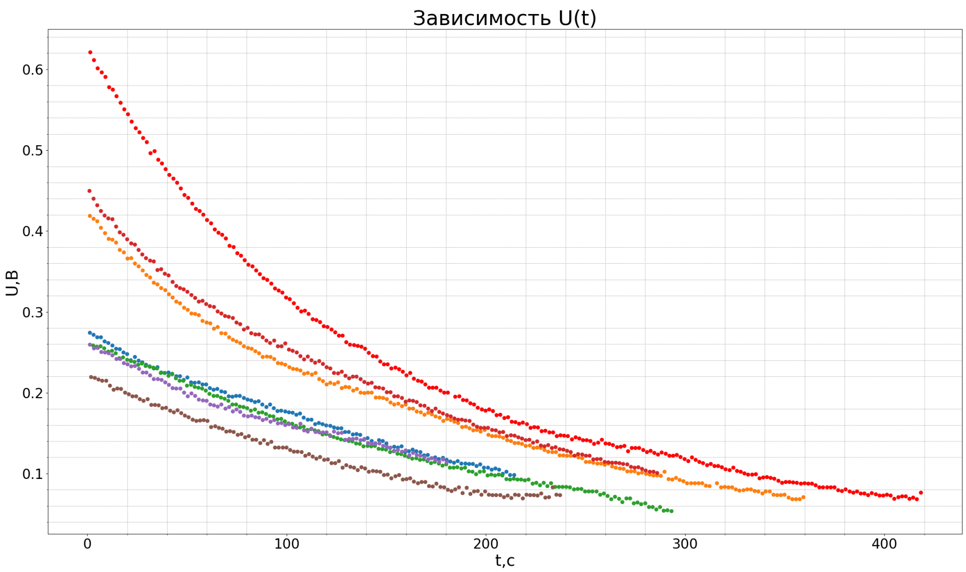

Рис. 1: Зависимость амплитуды напряжения от времени

Из таблички следует:

$\gamma = 1.308 \pm 0.014$ 1/с
$\omega = 3.34 \pm 0.01$ 1/с

Посчитаем добротность маятника:

$$Q = \frac{\omega}{2\gamma} = 1.28$$

$$\Delta Q = \sqrt{(\frac{\partial Q}{\partial \omega}\Delta\omega)^2 + (\frac{\partial Q}{\partial \gamma}\Delta\gamma)^2} = 0.014$$

$$Q = 1.28 \pm 0.01$$

Посчитаем добротность маятника с помощью отклонения формулы связи амплитуды резонанса и случая стационарной силы.

$x_a = 8.3$ см
$x_s = 6.2$ см

$$Q = \frac{x_a}{x_s} = 1.34 \pm 0.03$$

3.2 Резонанс и амплитудно-частотная характеристика

На рисунке 2 представлены зависимость амплитуды напряжения от времени в случае резонанса при разложении на разные гармоники.

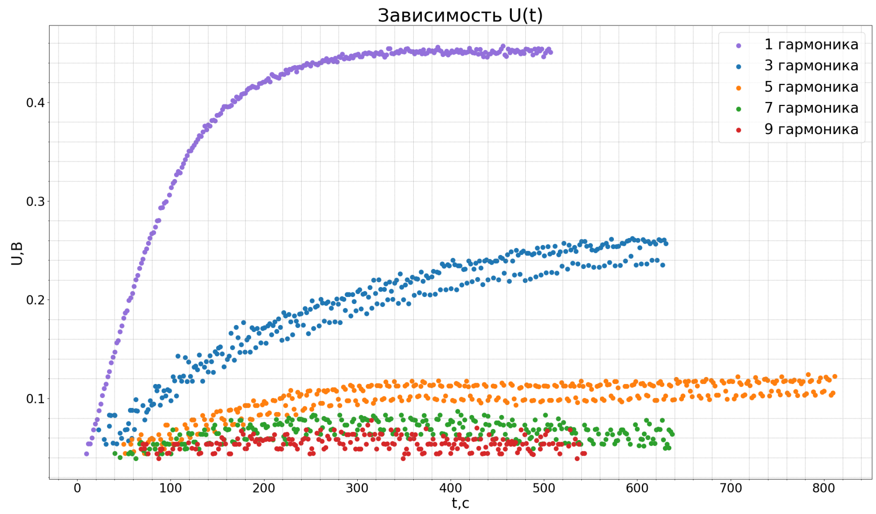

Рис. 2: Зависимость амплитуды напряжения от времени при резонансной частоте

Построим зависимость амплитуды от номера гармоники

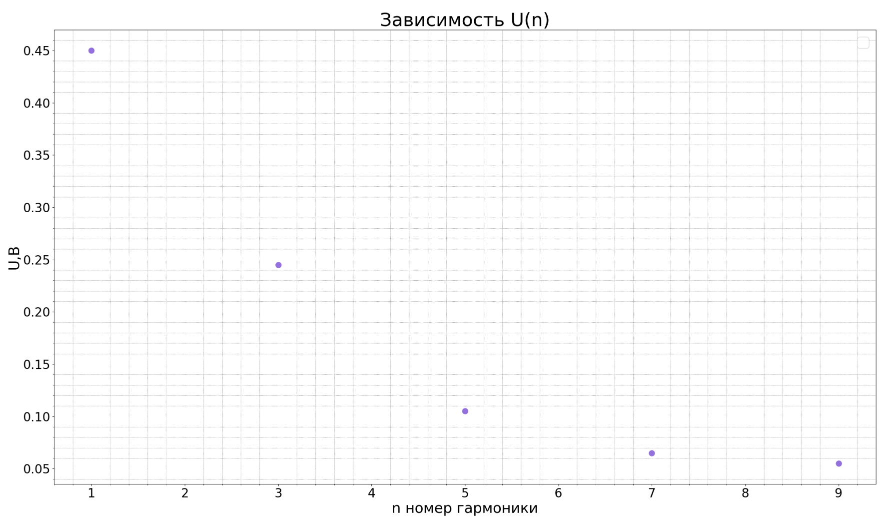

Рис. 3: Зависимость амплитуды напряжения от времени при резонансной частоте

Как можно видеть из графика, при разложении вынужденный силы в ряд Фурье с большим номером амплитуда напряжения уменьшается(что также напрямую следует из разложение в ряд Фурье меандра).
Построим амплитудно-частотную характеристику.

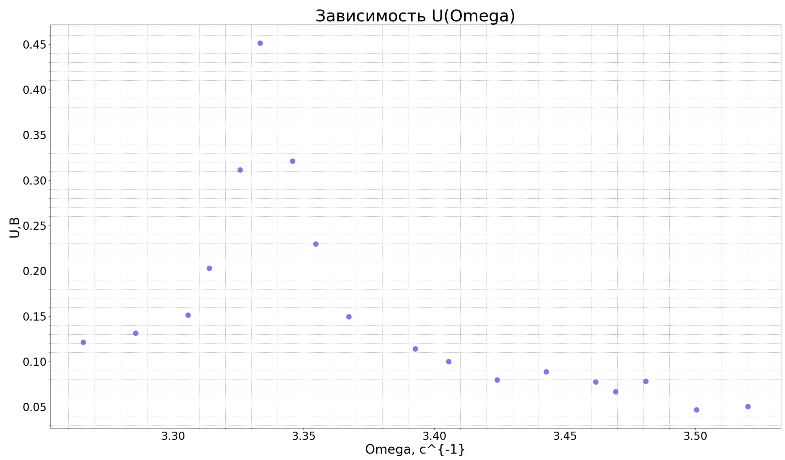

Рис. 4: Амплитудно-частотная характеристика

3.3 Биение

В случае возникновения биения получилось построить 4 кривые(см. Рис. 3). Ча-

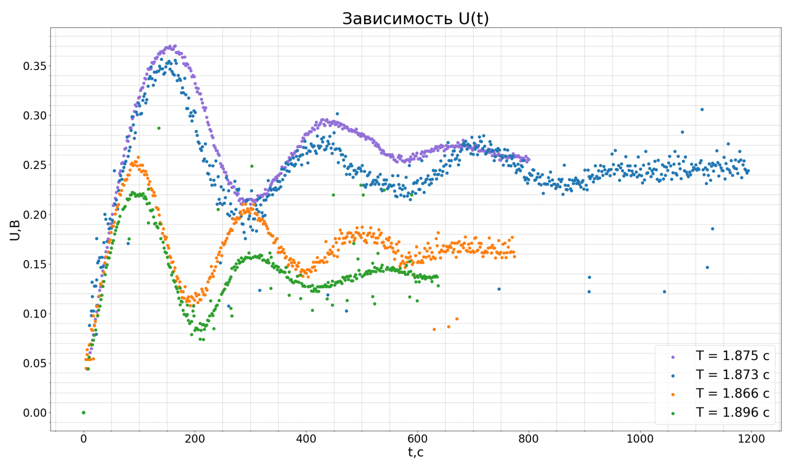

Рис. 5: Амплитудно-частотная характеристика

стоты биения:

$T = 1.875 \quad \boldsymbol{\omega} = 0.0061$ 1/с

$T = 1.873 \quad \boldsymbol{\omega} = 0.008$ 1/с

$T = 1.866 \quad \boldsymbol{\omega} = 0.014$ 1/с

$T = 1.896 \quad \boldsymbol{\omega} = 0.012$ 1/с

4 Обсуждение результатов и выводы

В данной работе было исследовано явление вынужденных колебаний, резонанса, а также биения для исследоваемого маятника с добротностью $Q = 1.28 \pm 0.01 (\varepsilon =$

0.8%) и частотой собственных колебаний $\omega = 3.34 \pm 0.01$ 1/с. Для данной системы было получено амплитудно-частотная характеристика, а также была вычислена частота биения маятника. Также исследовалась эффективность расскачивания маятника с помощью разных гармоник в разложении по ряду Фурье. Таким, образом более старшими порядками разложения в ряд получается меньшая амплитуда колебаний.