

НИУ "ВШЭ"



ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ПО МЕХАНИКЕ

БФ3223

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ГИРОСКОПА

Автор:
Айдар РЯЖАПОВ

27 декабря 2022 г.

Содержание

1	Теоретические сведения	2
2	Постановка эксперимента	3
3	Результаты измерений и обработка данных	4
3.1	Вычисление момента инерции волчка	4
3.2	Определение преобладающего трения в системе	6
4	Выводы	6

ПРЕЦЕССИЯ ГИРОСКОПА

Аннотация

В данной работе исследуется явление прецессии гироскопа. Была проведена сходимость экспериментальной зависимости с теоретической. Также исследовалась природа трения, создаваемого в системе, методом анализа зависимости вертикальной прецессии от горизонтальной прецессии. Трение в системе оказалось сухим.

1 Теоретические сведения

Рассмотрим динамически симметричное тело ($I_1 = I_2 \neq I_3$) в общем случае.

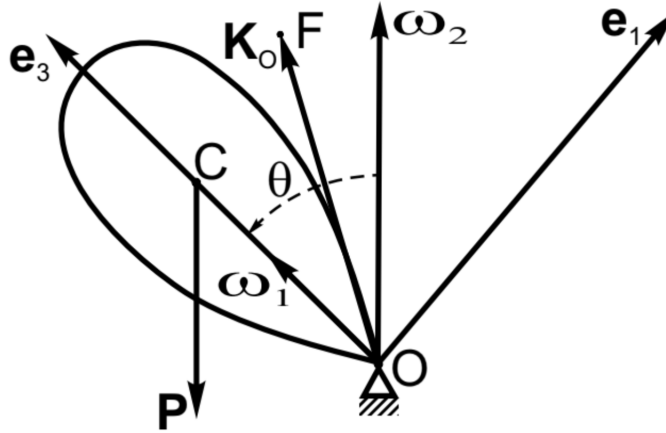


Рис. 1: Тело с динамической симметрией

Для него введём ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$. Орт e_3 направлен по оси симметрии тела. Тела вращается с заданными угловыми скоростями ω_1 и ω_2 и углом θ между ними. Тогда получаем:

$$\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{e}_3$$

$$\vec{\omega}_2 = \omega_2 (\vec{e}_1 \sin(\theta) + \vec{e}_3 \cos(\theta))$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{e}_1 \sin(\theta) + (\omega_1 + \omega_2 \cos(\theta)) \vec{e}_3$$

Запишем момент импульса (кинетический момент) тела:

$$\vec{L}_0 = I_1 \omega_2 \vec{e}_1 \sin(\theta) + I_3 (\omega_1 + \omega_2 \cos(\theta)) \vec{e}_3$$

Вычислим момент вынуждающей силы:

$$\vec{M}_0 = \frac{d\vec{L}_0}{dt} = [\vec{\omega}_2, \vec{L}_0] = -\vec{e}_2 \omega_2 \{I_3 \omega_1 + \omega_2 (I_3 - I_1) \cos(\theta)\} \sin(\theta)$$

Полученную формулу можно переписать в следующей форме:

$$\vec{M}_0 = [\vec{\omega}_2, \vec{\omega}_1] \cdot \left\{ I_3 + \frac{\omega_2}{\omega_1} (I_3 - I_1) \cos(\theta) \right\}$$

В рассматриваемом нами случае вынуждающей силой является сила тяжести груза, который мы прикрепляем к оси ($OC = r$), поэтому уравнение приобретает следующую форму:

$$\vec{M}_0 = -mgr \sin(\theta) \vec{e}_2$$

Подставляя получаем:

$$\omega_2^2(I_3 - I_1)\cos(\theta) + I_3\omega_1\omega_2 - mgr = 0$$

Если выполняется условие $\omega_1 \gg \omega_2$, то тогда формула принимает вид:

$$I_3\omega_1\omega_2 = mgr$$

, где I_3 - является моментом инерции волчка, ω_1 - угловая скорость вращения маховика, ω_2 - угловая скорость прецессии.

2 Постановка эксперимента

Исследуемая установка представлена на рисунке 2. При включении генератора напряжения маховик гироскопа начинает раскручиваться, в результате чего через некоторое время (когда гироскоп раскрутится) возникает прецессия. На экране

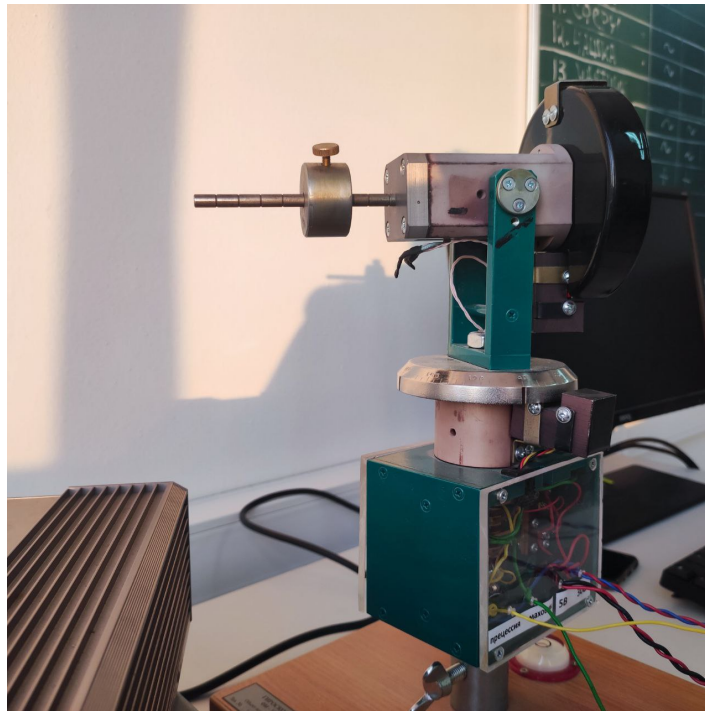


Рис. 2: Исследуемая установка

осциллографа отображались значения частоты вращения маховика, а на камеру телефона снимался гироскоп. Снимались несколько оборотов гироскопа, после чего высчитывалась частота горизонтальной прецессии. Для того, чтобы убрать влияние силы трения и вертикальной прецессии, гироскоп поддерживался руками горизонтально. Также проводились различные опыты в зависимости от положения массы на стержне.

3 Результаты измерений и обработка данных

Построим графики зависимости частоты вращения маховика Ω от обратной частоты прецессии ($1/\omega$).

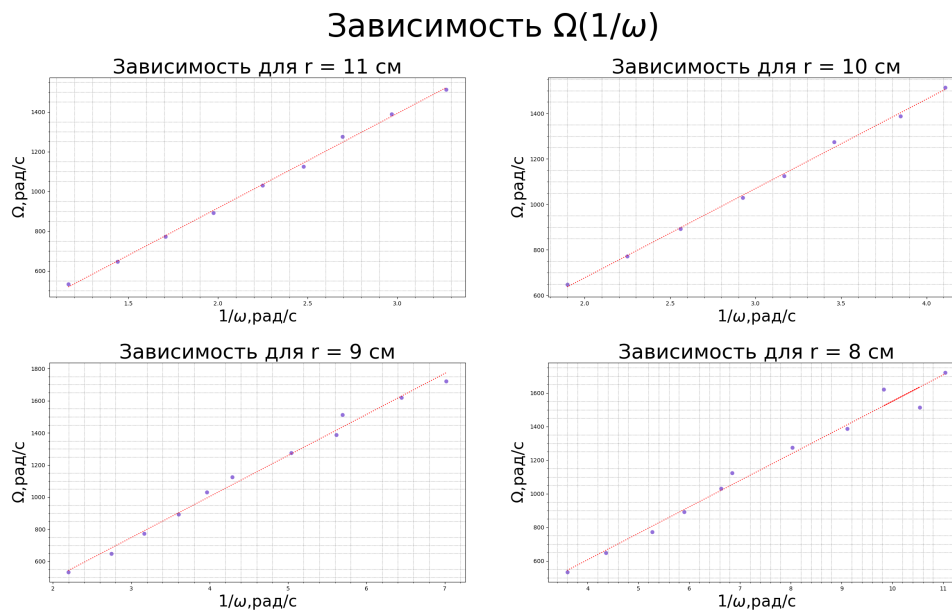


Рис. 3: Графики зависимостей Ω от $1/\omega$

Как мы можем видеть точки графиков ложатся на аппроксимацию прямой (здесь и далее аппроксимация проводилась методом мнк функцией `scipy.optimize.curve_fit`), следовательно экспериментальная зависимость соответствует теоретической. Из формулы для движения гироскопа:

$$\Omega = \frac{1}{\omega} \frac{mgr}{I}$$

Тогда из полученных прямых можно найти коэффициент наклона прямых равный:

$$k = \frac{mgr}{I}$$

3.1 Вычисление момента инерции волчка

Из графиков получаем коэффициенты наклона прямой занесённые в таблицу 1.

Таблица 1

r , см	8	9	10	11
k , $1/\text{м} \cdot \text{с}^2$	244	270	393	476
Δk , $1/\text{м} \cdot \text{с}^2$	32	36	50	64

Построим график зависимости $k(r)$ и из него найдём угловой коэффициент γ .

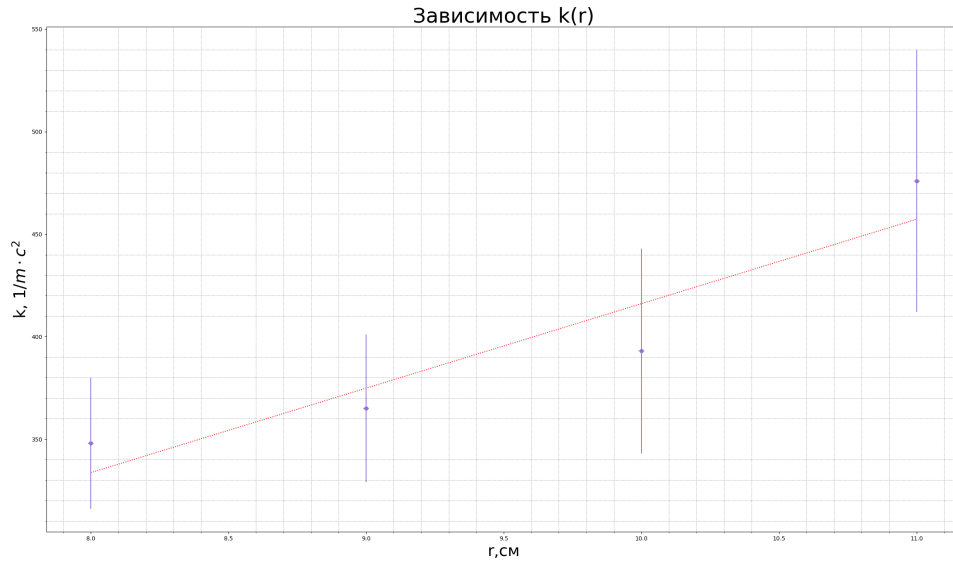


Рис. 4: Графики зависимости k от r

$$\gamma = 4120 \frac{1}{\text{M}^2 \text{c}^2}$$

$$\varepsilon_\gamma = 14\%$$

Тогда момент инерции равен:

$$I_e = (3.4 \pm 0.5) \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Теоретический расчёт момента инерции волчка:

$$I_t = \frac{mR^2}{2} = 3.75 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Как мы можем в пределах погрешности теоретическое и экспериментальное значение момента инерции волчка совпадают.

Расчёт погрешности

Оценим погрешности по полученным данным:

$$\varepsilon_\gamma = 14\%$$

$$\varepsilon_m = \frac{0.0001}{0.1413} \cdot 100 = 0.07\%$$

$$\varepsilon_r = \frac{0.1}{8} \cdot 100 = 1.25\% \text{ - оценка максимальной погрешности измерения расстояния}$$

Таким образом, наибольшая погрешность в вычислении момента инерции идёт от коэффициента наклона прямой. Тогда относительная погрешность ε_γ коэффициента наклона прямой равна ε_I .

3.2 Определение преобладающего трения в системе

Для того, что определить тип трения, которые преобладает в системе, необходимо построить график зависимости вертикальной прецессии от горизонтальной прецессии.

Зависимость $\omega_{вер}(\omega_{гор})$

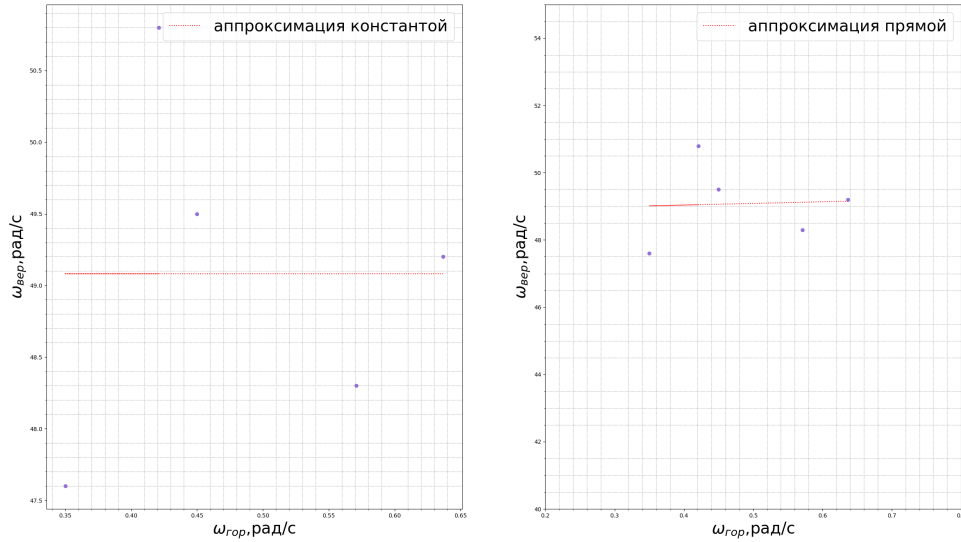


Рис. 5: Аппроксимация константой

На рисунке 5 представлены две аппроксимации зависимости функциями $y = Ax + B$ и $y = B$. Ниже представлены значения для двух аппроксимаций.

Линейная аппроксимация

$$A = 0.48 \quad \Delta A = 36 \quad \varepsilon_A = 7557\%$$

$$B = 49 \quad \Delta B = 9 \quad \varepsilon_B = 18.5\%$$

По полученным погрешностям коэффициентов аппроксимации легко понять, что данная аппроксимация неверна, поэтому трение в системе не является вязким.

Аппроксимация константой

$$B = 49.1 \quad \Delta B = 0.3 \quad \varepsilon_B = 0.6\%$$

Соответственно в системе преобладает сухое трение.

4 Выводы

В данной работе исследовалась элементарная теория гироскопа, а также определялось преобладающий тип трения в системе. Экспериментальная зависимость сходится с теоретической. Из эксперимента был получен момент инерции волчка, равный $I_e = (3.4 \pm 0.5) \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, что в пределах погрешности сходится с теоретическим значением $I_t = \frac{mR^2}{2} = 3.75 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Экспериментально было получено, что в системе преобладает сухое трение.