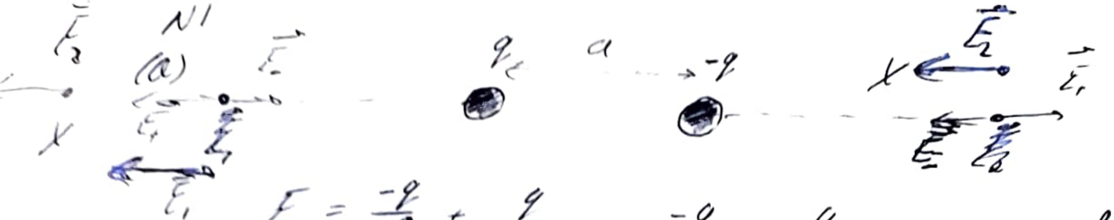
№1

(a)



$\vec{E}_+$ – поле от заряда $+q$
$\vec{E}_-$ – поле от заряда $-q$

$$E_2 = \frac{-q}{x^2} + \frac{q}{(a+x)^2} = \frac{-q}{x^2} + \frac{q}{x^2+2ax+\underset{0,\ \text{т.к } a \ll x}{a^2}} = \frac{-q(x^2+2ax)+qx^2}{x^2(x^2+2ax)} =$$

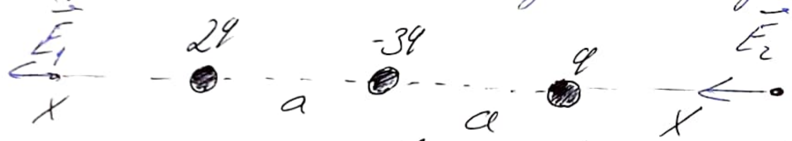
$$= \frac{-2axq}{x^2(x^2+2ax)} = \frac{-2aq}{x^3+2ax^2}$$

$$E_1 = \frac{q}{x^2} - \frac{q}{(a+x)^2} = \frac{q}{x^2} - \frac{q}{x^2+2ax+\underset{0\ \text{т.к } a \ll x}{a^2}} = \frac{q(x^2+2ax)-qx^2}{x^2(x^2+2ax)} =$$

$$= \frac{2axq}{x^2(x^2+2ax)} = \frac{2aq}{x^3+2ax^2}$$

E_1 – Поле на x слева от системы
E_2 – Поле на x вправо от системы (Направления на рисунке)

(b) ← Аналогичные обозначения и для других пунктов



$$E_1 = \frac{2q}{x^2} - \frac{3q}{(a+x)^2} + \frac{q}{(2a+x)^2} = \frac{2q}{x^2} - \frac{3q}{\underset{0\ \text{т.к } a \ll x}{a^2}+2ax+x^2} + \frac{q}{x^2+4ax+\underset{0\ \text{т.к } a \ll x}{a^2}} =$$

$$= \frac{2q(x^2+2ax)(x^2+4ax) - 3qx^2(x^2+4ax) + qx^2(x^2+2ax)}{x^2(x^2+2ax)(x^2+4ax)} =$$

$$= \frac{q(2x^4+12ax^3+\overset{0}{\cancel{16a^2x^2}} - 3x^4 - 12ax^3 + x^4 + 2ax^3)}{x^2(x^2+2ax)(x^2+4ax)} =$$

$$= \frac{2axq}{(x^2+2ax)(x^2+4ax)} = \frac{2axq}{x^4+6ax^3+\underset{0}{\cancel{8a^2x^2}}} = \frac{2aq}{x^3+6ax^2}$$

$$E_2 = \frac{q}{x^2} - \frac{3q}{(a+x)^2} + \frac{2q}{(2a+x)^2} = \frac{q}{x^2} - \frac{3q}{x^2+2ax} + \frac{2q}{x^2+4ax} =$$

$$= \frac{q((x^2+2ax)(x^2+4ax) - 3x^2(x^2+4ax) + 2x^2(x^2+2ax))}{x^2(x^2+2ax)(x^2+4ax)} =$$

$$= \frac{q(x^4+6ax^3+\overset{0}{\cancel{8a^2x^2}} - 3x^4 - 12ax^3 + 2x^4 + 4ax^3)}{x^2(x^2+2ax)(x^2+4ax)} = \frac{-2aq}{x^3+6ax^2}$$

$E_1 = E_2$ в силу симметрии системы

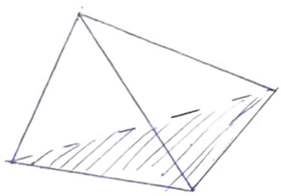
$$E_1 = \frac{q}{x^2} - \frac{2q}{(a+x)^2} + \frac{q}{(2a+x)^2} = \frac{q}{x^2(a+x)^2(2a+x)^2}\Big((a^2+2ax+x^2)\cdot(x^2+4ax+a^2) - 2x^2(x^2+4ax+a^2) + x^2(a^2+2ax+x^2)\Big) =$$

$$= \frac{q}{x^2(a+x)^2(2a+x)^2}\left(a^2x^2+2ax^3+8a^2x^2+x^4+4ax^3+a^2x^2 - 2x^4-8ax^3-2x^2a^2+x^2a^2+2ax^3+x^4\right) = \frac{q}{x^2(a+x)^2(2a+x)^2}\cdot$$

$$\cdot\left(10x^2a^2+x^4+6ax^3-2x^4-8ax^3-2x^2a^2+x^2a^2+2ax^3+x^4\right) =$$

$$= \frac{9x^2a^2q}{x^2(a+x)^2(2a+x)^2} = \frac{9a^2q}{(x+a)^2(x+2a)^2}$$

№2



Зарядим все грани поверхностной плотностью σ_1. Одну из граней зарядим поверхностной плотностью $(\sigma_2-\sigma_1)$

В силу симметрии поле в центре от 4-х граней с зарядом σ_1 будет равно нуль. Соответственно вклад будет вносить только грань с зарядом $\sigma_2-\sigma_1$

Телесный угол под которым видно грань $\Omega = \frac{4\pi}{4} = \pi$

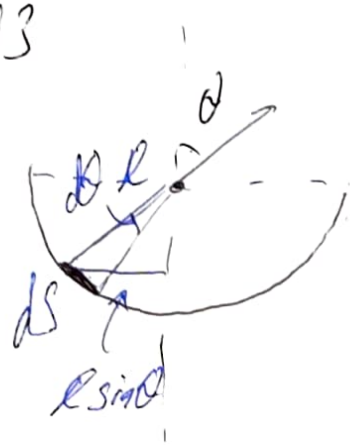
Делим на 4
т.к у тетраэдра 4 грани

Тогда:

$E = (\sigma_2-\sigma_1)\pi$

Ответ: $E = (\sigma_2-\sigma_1)\pi$

№3



$$dS = R\sin\theta\, d\varphi \cdot \underline{R\, d\theta}$$

Толщина кусочка dS

$$dE = \frac{\sigma\, dS}{R^2}\cos\theta = \sigma\, d\varphi\, d\theta \sin\theta\cos\theta$$

$$E = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = 2\pi\sigma\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta =$$

$$= \pi\sigma\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta\, d\theta = \pi\sigma\,\frac{\cos 0 - \cos\pi}{2} = \pi\sigma$$

Ответ: $E = \pi\sigma$

№4

(a)

$$\nabla\cdot(C\varphi) = C\cdot\nabla\varphi$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right)\cdot\left(\vec{e}_x C_x\varphi + \vec{e}_y C_y\varphi + \vec{e}_z C_z\varphi\right) =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial x}C_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}C_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}C_z$$

$$C\cdot\nabla\varphi = C\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}C_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}C_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}C_z$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla\cdot(C\varphi) = C\cdot\nabla\varphi$$ ч.т.д.

(b) $\oint_S dS = \oint \vec{F} d\vec{S}$

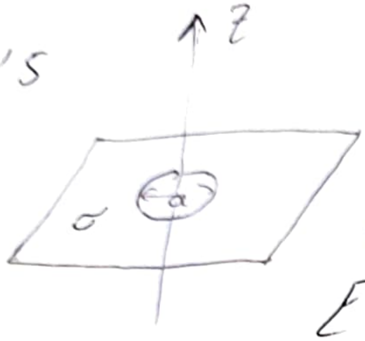
1) Если $\vec{F} \perp d\vec{S}$, то $\oint_S dS = 0$

2) $\vec{F}$ не $\perp d\vec{S}$, то по th Гаусса-Остроградского

$$\oint_S \vec{F} d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F}\, dV = 0$$

$$\vec{F} = I \Rightarrow F\text{-const} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{F} = 0$$

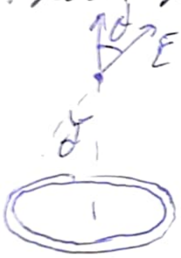
№5



Пусть поверхность заполнена зарядом $+\sigma$, а дырка зарядом $-\sigma$. Тогда в силу суперпозиции:

$E = E_{пл} + E_0$, где $E_{пл}$ – напряженность от пл-ти, E_0 – от дырки

Тогда задача сводится к поиску поля диска на расстоянии z от него. Разобьем диск на кольца и возьмем интеграл



$$dq = -2\pi R \sigma dR \qquad E_{пл} = 2\pi\sigma$$

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

th Пифагора

$$E_0 = \int dE = \int \frac{dq}{(R^2+z^2)} \cos\theta = -\int \frac{2\pi R \sigma dR}{(R^2+z^2)^{3/2}} \cdot z = -2\pi z \sigma \int \frac{R dR}{(R^2+z^2)^{3/2}} =$$

$$= -2\pi z \sigma \int_0^R \frac{\frac{1}{2} d(R^2)}{(R^2+z^2)^{3/2}} = -\left(-\frac{2z\pi\sigma}{\sqrt{R^2+z^2}} + 2\sigma\pi\right)$$

$$E = 2\pi\sigma - \left(2\pi\sigma - \frac{2z\pi\sigma}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) = \frac{2\pi\sigma}{\sqrt{R^2+z^2}} z$$

Ответ: $E = \frac{2\pi\sigma}{\sqrt{R^2+z^2}} z$