НИУ "ВШЭ"

Лабораторная работа по Механике

БФЗ223

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

Автор:
Айдар Ряжапов

29 декабря 2022 г.

Содержание

КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

Аннотация

В данной работе исследуется явление возникновение полуволн в стоячей волне. Проверяется сходимость теоретической модели с экспериментальными данными. Также было получено значение погонной плотности исследуемой струны и определена добротность системы.

1 Теоретические сведения

Рассмотрим струну, силой тяжести которой по сравнению с силой натяжения можно пренебречь (отсутствует провисание). Форма струны описывается некоторой зависимостью $y(x,t)$, притом в любой момент времени $tg\alpha = \partial y/\partial x$.

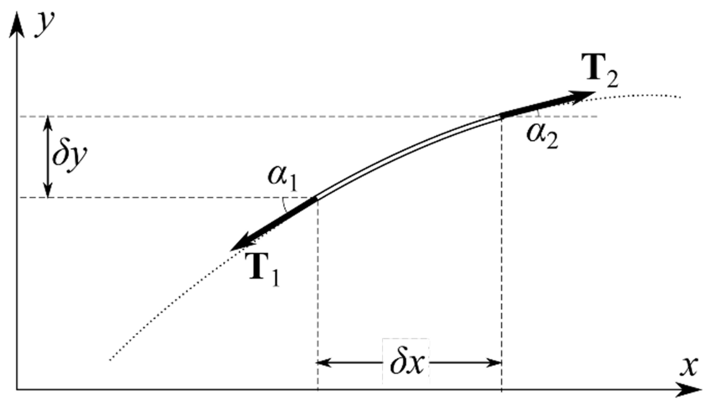

Рис. 1: Малый кусок струны в приближении

Пусть в состоянии равновесия длина малого фрагмента струны δx , его масса $\delta m = \rho_L \delta x$. При смещении на фрагмент действуют силы натяжения T_1 и T_2. Так как отклонения будем считать малыми, то длина фрагмента при его смещении не изменяется, $T_1 \approx T_2 = T$, $tg\alpha \approx \alpha \approx \partial y/\partial x$. Запишем II закон Ньютона в проекциях на вертикальную ось:

$$\delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T_1 sin\alpha_1 + T_2 sin\alpha_2$$

Учитывая пренебрежения описанные выше получаем:

$$\rho_L \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \approx T \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\partial x}$$

Таким образом, получаем волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho_L}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

В общем виде решение данного уравнения записывается в виде:

$$y(x,t) = Acos(\omega t \pm kx + \varphi)$$

, где $k = \omega/u$ - волновое числа, а $u = \sqrt{T/\rho_L}$ - фазовая скорость. Если концы струны закреплены, то получаем стоячую волну, являюшуюся суперпозицией двух волн с равными амплитудами, бегущими в противоволожных направлениях:

$$y = Acos(\omega t + kx + \varphi_1) + Acos(\omega t - kx + \varphi_2)$$

Преобразуя получаем:

$$y = 2Acos(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2})cos(kx + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2})$$

Тогда на закрепленной струне длины L укладывается N полуволн при условии:

$$kL = \pi N$$

Из определения волнового числа, получаем:

$$f_N = \sqrt{\frac{T}{\rho_L}}\frac{N}{2L}$$

2 Постановка эксперимента

В качестве струны используется медный проводник, закрепленный с одногоконца, на другой конец подвешены грузы. Генератор сигналов с переменной частотой генерации подает на проводник переменное синусоидальное напряжение, в струне возникает переменный ток.

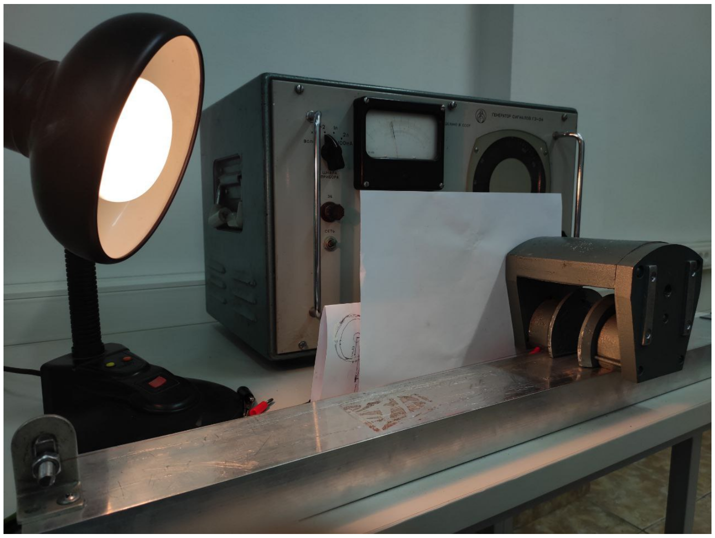

Рис. 2: Исследуемая установка

Струна помещается в магнит, на проводник с током в магнитном поле действует сила Ампера — в нашем случае, она, как и ток, является периодической. Под действием этой силы струна начинает колебаться.Для увеличения точности считывания частоты сигнала используется осциллограф, подключенный к выводам генератора. Для фиксации амплитуды и процессов затухания используется телефон с замедленной съемкой, установленный на штативе, так, чтобы камера смотрела на середину струны. Позади середины струны установлена линейка.

3 Результаты измерений и обработка данных

3.1 Исследование возникновений полуволн в зависимости от частоты

Исследуем количество пучностей, возникаемое в струне в зависимости от частоты. Для этого проводим опыт, в котором для определённой массы груза($m = 74.25$ г, $T = 0.73$ Н, длина струны $L = 1$) на подвесе изменяем частоту на генераторе сигнала. Проверим сходимость экспериментальных данных с теоретической и построим график зависимости частоты сигнала от количества полуволн. Как мы можем видеть по Рис.3 точки ложатся на аппроксимацию прямой.

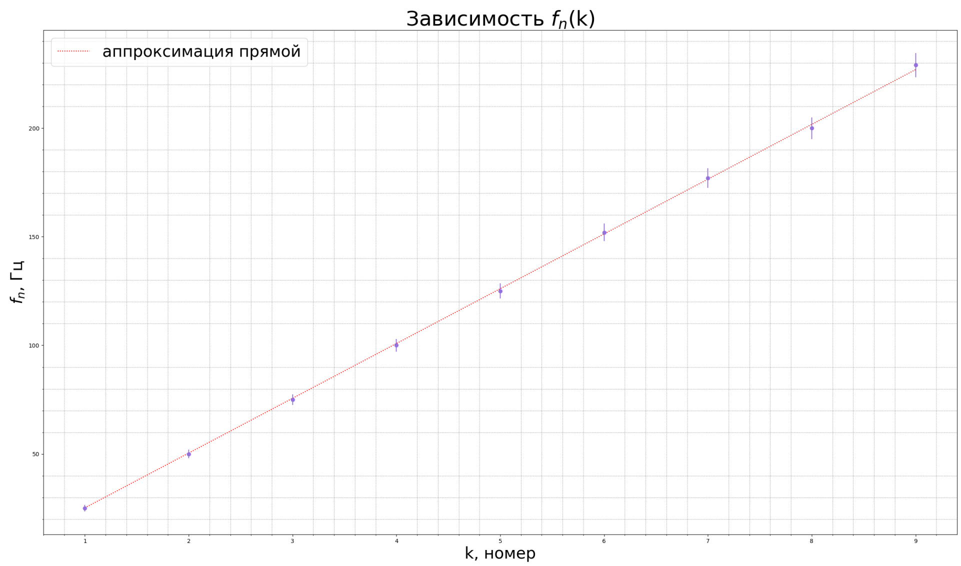

Рис. 3: Зависимость $f_n(k)$

Методом МНК(здесь и далее аппроксимация проводилась методом мнк функцией scipy.optimize.curve_fit) была проведена прямая по полученным данным.
Аппроксимация проводилась функциями $y = kx$ и $y = kx + b$. Ниже представлены полученные коэффициенты для каждой аппроксимации.
Случай $y = kx$

$$k = 25.2175 \text{ Гц} \quad \Delta k = 0.0046 \text{ Гц} \quad \varepsilon_k = 0.018283\%$$

Случай $y = kx + b$

$$k = 25.37 \text{ Гц} \quad \Delta k = 0.02 \text{ Гц} \quad \varepsilon_k = 0.083\%$$
$$b = -0.9 \text{ Гц} \quad \Delta b = 0.7 \text{ Гц} \quad \varepsilon_b = 70\%$$

Как мы можем видеть, второй случай аппроксимации не подходит, из-за большой погрешности коэффициента b, соответственно подходит первый случай, что соответствует теоретическому предсказанию. Из полученного графика можно вычислить погонную плотность струны.

$$f_N = \sqrt{\frac{T}{\rho_L}}\frac{N}{2L}$$

Из полученной аппроксимации получаем:

$$k = \sqrt{\frac{T}{\rho_L}}\frac{1}{2L} = \sqrt{\frac{mg}{\rho_L}}\frac{1}{2L}$$

Выражая ρ_L получаем уравнение:

$$\rho_L = T\frac{1}{4L^2k^2} = 2.797 \cdot 10^{-4}\text{кг/м}$$

Расчитаем погрешность:

$$\varepsilon_{\rho_L} = \sqrt{(2\varepsilon_L)^2 + (2\varepsilon_k)^2 + \varepsilon_T^2} = 0.24\%$$
$$\varepsilon_L = \frac{0.001}{1} \cdot 100 = 0.1\%$$
$$\varepsilon_k = 0.018\%$$
$$\varepsilon_T = \frac{0.1}{74.25} \cdot 100 = 0.13\%$$

Соответсвенно получаем:

$$\rho_L = (2.80 \pm 0.01) \cdot 10^{-4}\text{кг/м}$$

3.2 Исследование зависимости частоты сигнала от силы натяжения струны

В данной части исследуется зависимость частоты сигнала, образующую одну полуволну от силы натяжения струны. Проверим сходимость экспериментальных данных с теоретической зависимостью. На Рис.4 представлена исследуемая зависимость.

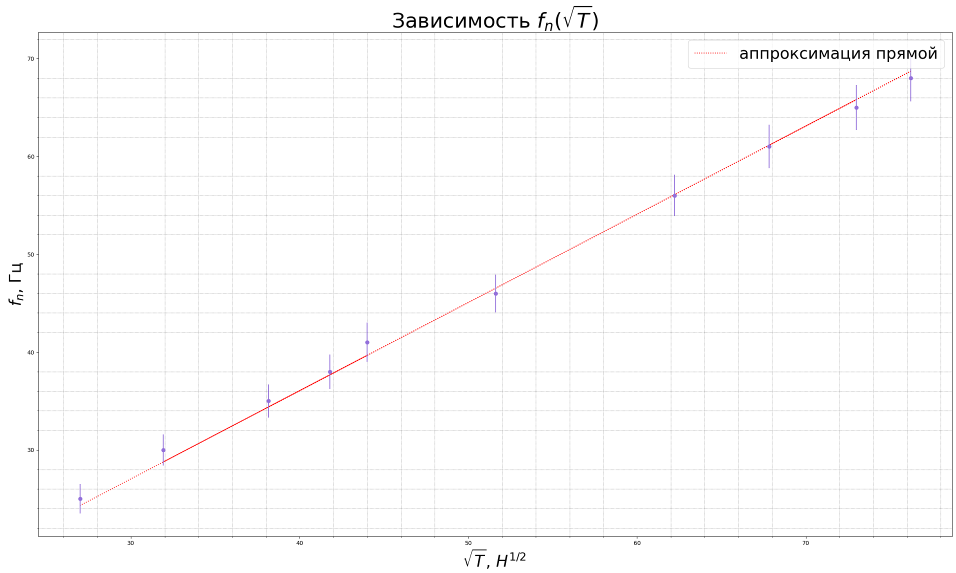

Рис. 4: Зависимость $f_n(\sqrt{T})$

Методом МНК была проведена прямая по полученным данным.
Аппроксимация проводилась функциями $y = kx$ и $y = kx + b$. Ниже представлены полученные коэффициенты для каждой аппроксимации.
Случай $y = kx$

$$k = 0.90145\frac{\text{Гц}}{\sqrt{H}} \quad \Delta k = 0.00002\frac{\text{Гц}}{\sqrt{H}} \quad \varepsilon_k = 0.0024\%$$

Случай $y = kx + b$

$$k = 0.86546\frac{\text{Гц}}{\sqrt{H}} \quad \Delta k = 0.00008\frac{\text{Гц}}{\sqrt{H}} \quad \varepsilon_k = 0.009\%$$
$$b = 2.0\frac{\text{Гц}}{\sqrt{H}} \quad \Delta b = 0.2\frac{\text{Гц}}{\sqrt{H}} \quad \varepsilon_b = 11\%$$

Как мы можем видеть, второй случай аппроксимации подходит хуже первого, так как существует существенная погрешность коэффициента b, соответственно подходит первый случай, что соответствует теоретическому предсказанию. Из полученного графика можно вычислить погонную плотность струны.

$$f_N = \sqrt{\frac{T}{\rho_L}}\frac{N}{2L}$$

Из полученной аппроксимации получаем:

$$k = \sqrt{\frac{1}{\rho_L}}\frac{1}{2L}$$

Выражая ρ_L получаем уравнение:

$$\rho_L = \frac{1}{4L^2k^2} = 3.086 \cdot 10^{-4}\text{кг/м}$$

Расчитаем погрешность:

$$\varepsilon_{\rho_L} = \sqrt{(2\varepsilon_L)^2 + (2\varepsilon_k)^2} = 0.2\%$$
$$\varepsilon_L = \frac{0.001}{1} \cdot 100 = 0.1\%$$
$$\varepsilon_k = 0.009\%$$

Соответсвенно получаем:

$$\rho_L = (3.086 \pm 0.001) \cdot 10^{-4}\text{кг/м}$$

3.3 Анализ полученных значений погонной плотности

Таким образом, мы имеем два значения погонной плотности, вычисленные разными способами.

$$\rho_1 = (2.80 \pm 0.01) \cdot 10^{-4}\text{кг/м}$$
$$\rho_2 = (3.086 \pm 0.001) \cdot 10^{-4}\text{кг/м}$$

Погонную плотность можно вычислить также прямум способом, измеряя массу m струну длины L.

3.4 Вычисление добротности системы

Для того, чтобы вычислить добротность системы, проведём следующий эксперимент: для определённого значения натяжения струны($T = 1.01$ Н,$f_n = 29$ Гц) найдём резонансную частоту, после чего выключаем генератор сигнала и снимаем на видео затухающие колебания струны. По полученным данным определяем декремент затухания системы.

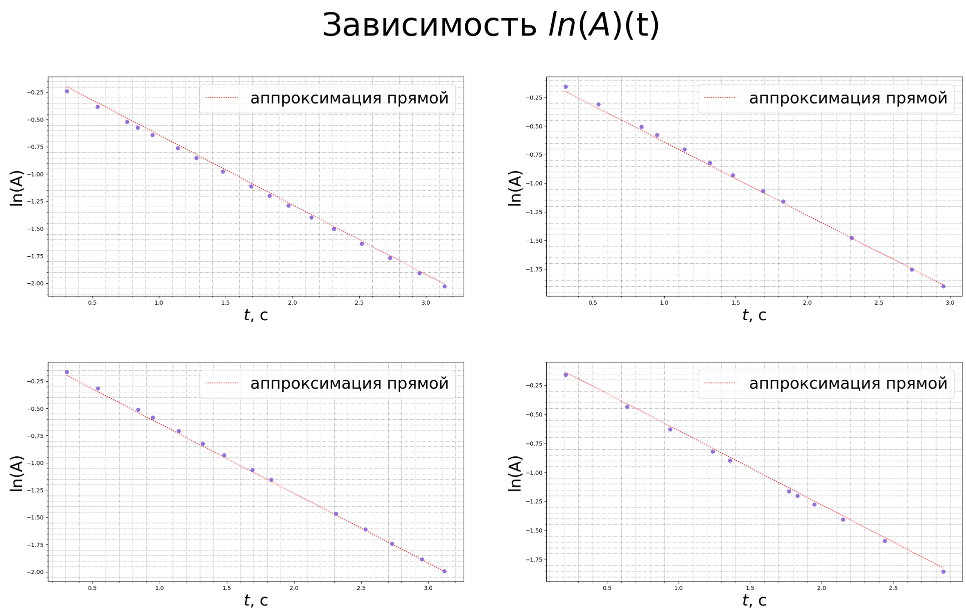

Рис. 5: Зависимости $ln(A)(t)$

Из графиков:

$\gamma_1 = 0.64$ 1/с $\quad \varepsilon_{\gamma_1} = 2\% \quad Q = 144$

$\gamma_2 = 0.63$ 1/с $\quad \varepsilon_{\gamma_2} = 1.5\% \quad Q = 138$

$\gamma_3 = 0.66$ 1/с $\quad \varepsilon_{\gamma_3} = 1.8\% \quad Q = 142$

$\gamma_4 = 0.65$ 1/с $\quad \varepsilon_{\gamma_4} = 2.2\% \quad Q = 140$

$\varepsilon_\omega = \dfrac{2}{29} \cdot 100 = 6.7\%$

Добротность вычисляется по определению:

$$Q = \frac{\omega}{2\gamma}$$

Так как относительная погрешность измерения частоты более чем в 3 раза больше относительной погрешность коэффициента затухания получаем, что относительная погрешность добротности равна относительной погрешности измерения частоты. Тогда получаем:

$$Q = 141 \pm 9$$

4 Выводы

В работе исследовались колебания стоячей волны и проверялась сходимость теоретических зависимостей с экспериментальными. Была получена погонная плотность струны двумя различными способами $\rho_1 = (2.80 \pm 0.01) \cdot 10^{-4}$кг/м и $\rho_2 = (3.086 \pm 0.001) \cdot 10^{-4}$кг/м. Также была определена добротность системы при $T = 1.01$ Н. Значение оказалось равным $Q = 141 \pm 9$.