

Домашнее задание №1 по аналитической механике

Дедлайн: 19.01.2023, 12:50

Задача 1

Лагранжиан свободной частицы совпадает с его кинетической энергией,

$$L = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2}.$$

Соответственно, действие равно

$$S = \int_0^T dt \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2}.$$

Физическая траектория частицы $\mathbf{r}(t)$ отвечает экстремуму действия S при заданных граничных условиях

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_1, \mathbf{r}(T) = \mathbf{r}_2$$

Эти условия задают начальную и конечную точки траектории.

- 1) (1 балл) Покажите, что вариационное уравнение (уравнение Лагранжа) для свободной частицы есть $\ddot{\mathbf{r}} = 0$ и найдите физическую траекторию, решив его.
- 2) (1 балл) Докажите, что найденная траектория соответствует именно минимуму действия (а не, например, максимуму).

Задача 2

Имеется бусинка на окружности (сила тяжести отсутствует, то есть речь идет о свободной частице, живущей на кольце). Если радиус окружности R , а положение бусинки на окружности задается углом φ , то лагранжиан бусинки, совпадающий с ее кинетической энергией, равен

$$L = \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2}.$$

- 1) (1 балл) Предполагая граничные условия $\varphi(0) = \varphi_1$, $\varphi(T) = \varphi_2$, найдите траекторию $\varphi(t)$ бусинки, соответствующую экстремуму действия. Сколько таких траекторий существует?
- 2) (1 балл) Докажите, что найденные траектории соответствуют минимуму действия (а не, например, максимуму).

Задача 3

Рассмотрите функцию Лагранжа, которая зависит от первых k производных координаты по времени, то есть действие имеет вид

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(x, x^{(1)}, \dots, x^{(k)})$$
$$x^{(k)} = \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$

- 1) (1 балл) Сколько условий необходимо для разрешения такой задачи? На каких вариациях необходимо искать решения?
- 2) (1 балл) Найдите уравнения Эйлера-Лагранжа

Задача 4

Рассмотрим нерастяжимый шнур длины L в поле тяжести, концы которой закреплены в точках $x = 0, y = 0$ и $x = W, y = 0$. Во всех пунктах предполагается, что $L - W \ll L$ (искривление шнура мало).

1) (1 балл) Запишите эффективное «действие» (функционал, подлежащий минимизации) для данной задачи, пользуясь указанным выше предположением.

2) (2 балла) Найдите профиль цепи, пользуясь пробными функциями в следующем виде:

$$\begin{aligned}y_1(x) &= -\alpha x(W - x) \\ y_2(x) &= -\beta x^2(W - x)^2\end{aligned}$$

3) (2 балла) Какое из решений более правдоподобно и почему? *Указание:* для ответа на этот вопрос вновь воспользуйтесь исходным предположением.