№1

$f(x) = e^x$

Разложение $f(x)$ в ряд Тейлора в $x_0 = 0$:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$g(x) = \frac{a_0 + a_1 x}{1 + b_1 x}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a_0 + a_1 x}{1 + b_1 x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

$$(a_0 + a_1 x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)\right)(1 + b_1 x)$$

$$a_0 + a_1 x = 1 + b_1 x + x + b_1 x^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{b_1}{2} x^3 + O(x^3)$$

$$x^2\left(b_1 + \frac{1}{2}\right) + x(b_1 - a_1 + 1) + (1 - a_0) = 0$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_1 - a_1 + 1 = 0 \\ b_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_0 = 1 \\ b_1 = -\frac{1}{2} \\ a_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ответ: $g(x) = \dfrac{1 + \frac{x}{2}}{1 - \frac{x}{2}}$

$a_0 = 1$

$b_1 = -\frac{1}{2}$

$a_1 = \frac{1}{2}$

№2

$f(x) = \ln(1+x)$

Разложение $f(x)$ в ряд Тейлора в $x_0 = 0$:

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

$g(x) = \frac{a_0 + a_1 x}{1 + b_1 x}$

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) \approx \ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$

$a_0 + a_1 x = (1 + b_1 x)(x - \frac{x^2}{2} + O(x^3))$

$a_0 + a_1 x = x + b_1 x - \frac{x^2}{2} - \frac{b_1}{2} x^3 + O(x^3)$

$a_0 = 0$

$a_1 = 1$

$b_1 = 1/2$

Ответ: $g(x) = \frac{x}{1 + \frac{x}{2}}$

$a_0 = 0$

$a_1 = 1$

$b_1 = \frac{1}{2}$

№3

$\tan x \approx \frac{g(x)}{1 - \frac{4}{\pi^2} x^2}$

Разложение тангенса в ряд Тейлора в $x_0 = 0$

$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^7)$

$g(x) \approx (1 - \frac{4}{\pi^2} x^2) \tan x = (1 - \frac{4}{\pi^2} x^2)(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^7)) =$

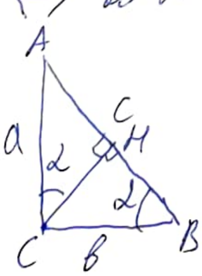
$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^7) - \frac{4}{\pi^2} x^3 - \frac{4}{\pi^2} \frac{x^5}{3} - \frac{4}{\pi^2} \frac{2x^7}{15} - O(x^7) =$

$= x + x^3(\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}) + x^5(\frac{2}{15} - \frac{4}{3\pi^2})$

Ответ: $g(x) = x + x^3(\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}) + x^5(\frac{2}{15} - \frac{4}{3\pi^2})$

№4

Д-во th Пифагора нагл-ти



$c^2 f(\alpha) = a^2 f(\alpha) + b^2 f(\alpha)$ => сократим $f(\alpha)$ => $c^2 = a^2 + b^2$

В силу того, что угол $\angle ACH = \angle HBC = \alpha$ т.к. сумма углов в Δ равна 180°

В случае искривлённой поверхности сумма углов в треугольнике может быть как больше 180°, так и меньше, поэтому $\angle ACH \neq \angle HBC$, поэтому д-во неверно.

№5

$$\tan x \approx \frac{x+bx^3}{\left(1-\frac{4}{\pi^2}x^2\right)(1+ax^2)}$$

$$\tan x \approx \frac{x+bx^3}{\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\frac{\pi}{2}+x\right)(1+ax^2)}$$

Разложение в ряд Тейлора в $x_0=0$

$$\tan x \approx x+\frac{x^3}{3}+O(x^5)$$

$$\lim_{x\to 0}\tan x \approx \lim_{x\to 0}\frac{x+bx^3}{\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\frac{\pi}{2}+x\right)(1+ax^2)} \approx \lim_{x\to 0} x+bx^3 =$$

$$\approx \underbrace{x+\frac{x^3}{3}}_{\text{Разложение в ряд Тейлора}}$$

$$\Downarrow$$

$$b=\frac{1}{3}$$

Поведение при $x\to\frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x+\frac{x^3}{3}}{\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\frac{\pi}{2}+x\right)(1+ax^2)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{4}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(1+a\frac{\pi^2}{4}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^4}{96}}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(1+a\frac{\pi^2}{4}\right)}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{4}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)}{1+a\frac{\pi^2}{4}}=1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^4}{96}}{1+a\frac{\pi^2}{4}}=1$$

$$a=\frac{\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^4}{96}-1}{\frac{\pi^2}{4}}$$

$$a=\frac{\pi^2+\frac{\pi^4}{12}-8}{8\frac{\pi^2}{4}}=\frac{\pi^2+\frac{\pi^4}{12}-8}{2\pi^2}$$

Ответ: $\tan x \approx \dfrac{x+\frac{x^3}{3}}{\left(1-\frac{4}{\pi^2}x^2\right)\left(1+\frac{\pi^2+\frac{\pi^4}{12}-8}{2\pi^2}x^2\right)}$