三人下棋问题

共有 A，B 和 C 三个玩家：

任一玩家有一人连赢两次的概率记为 $P(win)$，则：

$$P(win) = \frac{1}{2^2} \tag{1}$$

假设 A 玩家和 B 玩家先下一局，赢的人和 C 玩家下，

C 玩家获胜的概率 $P(Cwin)$ 为：

$$P(Cwin) = \sum_{i=1}^{n} P(Cwin|A_i) + \sum_{i=1}^{n} P(Cwin|B_i) \tag{2}$$

则有

$$\begin{aligned}
P(Cwin|A_1) &= P(win) \times P(A_1) = \frac{1}{2^3} \\
P(Cwin|A_2) &= P(win) \times P(A_2) = \frac{1}{2^6} \\
P(Cwin|A_3) &= P(win) \times P(A_3) = \frac{1}{2^9} \\
&\cdots \\
P(Cwin|A_n) &= P(win) \times P(A_n) = \frac{1}{2^{3n}}
\end{aligned} \tag{3}$$

因 A 与 B 同时下棋，同理，则有：

$$P(Cwin|B_n) = P(win) \times P(B_n) = \frac{1}{2^{3n}} \tag{4}$$

由等比数列求和公式可得：

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} P(Cwin|A_i) &= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + \cdots + \frac{1}{2^{3n}} \\
&= \frac{1 - \frac{1}{2^{3n}}}{1 - \frac{1}{2^3}} \times \frac{1}{2^3} \\
&= \frac{1}{7}
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(Cwin|B_i) = \frac{1}{7} \tag{6}$$

故，C 玩家获胜的概率为：

$$P(Cwin) = \sum_{i=1}^{n} P(Cwin|A_i) + \sum_{i=1}^{n} P(Cwin|B_i) = \frac{2}{7} \tag{7}$$

因 A 玩家与 B 玩家同时下棋，则 A 与 B 获胜的概率相等，

$$P(Awin) = P(Bwin) = \frac{1 - P(Cwin)}{2} = \frac{5}{14} \tag{8}$$

综上所述，如果 A 玩家和 B 玩家先下棋，则 A 玩家和 B 玩家获胜的概率为 $\frac{5}{14}$，C 玩家获胜的概率为 $\frac{2}{7}$。